

**T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

GRAFLARIN KOMŞU RUPTURE DERECESESİ

Ferhan Nihan ALTUNDAĞ

**Danışman
Yrd. Doç. Dr. Gökşen BACAK TURAN**



MANİSA 2015

TEZ ONAYI

Ferhan Nihan ALTUNDAĞ tarafından hazırlanan "**Grafların Komşu Rupture Derecesi**" adlı tez çalışması 23/07/2015 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman Yrd. Doç. Dr. Gökşen BACAK TURAN
Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ
Ege Üniversitesi

Jüri Üyesi Yrd. Doç. Dr. Derya DURGUN
Celal Bayar Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Ferhan Nihan ALTUNDAĞ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
ŞEKİLLER DİZİNİ	II
TABLO DİZİNİ.....	III
TEŞEKKÜR	IV
ÖZET	V
ABSTRACT	VI
1. GİRİŞ	1
2.HARARY GRAFLARIN KOMŞU RUPTURE DERECEŚİ	8
2.1. Harary Grafinin 1. Durumu.....	8
2.2. Harary Grafinin 2. Durumu	10
2.3. Harary Grafinin 3.Durumu.....	19
3. SONUÇ	26
KAYNAKLAR.....	27
ÖZGEÇMİŞ.....	28

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. G_1	2
Şekil 1.2. G_2	2
Şekil 1.3. 5 tepeli bir G grafi	5
Şekil 2.1. $H_{4,12}$	8
Şekil 2.2. $H_{5,8}$	10
Şekil 2.3. $H_{5,9}$	19

TABLO DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 2.1. n çift ve $(n < 12)$ için $H_{3,n}$ Harary grafinin komşu rupture derecesi ...	18
Tablo 2.2. n tek ve $n \leq 31$ için $H_{5,n}$ Harary grafinin komşu rupture derecesi	22
Tablo 2.3. n tek ve $n < 12$ için $H_{3,n}$ Harary grafinin komşu rupture derecesi	25

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Gökşen BACAK TURAN' a, bilgi ve tecrübesi ile lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum sevgili hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Derya DURGUN'a, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

Ferhan Nihan ALTUNDAĞ
Manisa, 2015

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Grafların Komşu Rupture Derecesi

Ferhan Nihan ALTUNDAĞ

**Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Gökşen BACAK TURAN

Zedelenebilirlik, iletişim bağlantıları veya bazı merkezlerin bozulmasından sonra iletişim kesilene kadar ağın dayanıklılığını gösterir. Bir casus ağında bir casus veya istasyon ele geçirilirse komşu istasyonlarda tehlike altındadır. Bir zedelenebilirlik parametresi olan komşu rupture derecesi casus ağın zedelenebilirliğinin hesaplanmasında kullanılabilir. Tam graf olmayan bağlantılı bir G grafının komşu rupture derecesi, G grafının herhangi bir subversion stratejisi S , G/S grafının bileşen sayısı $\omega(G/S)$ ve G/S grafının en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı $c(G/S)$ olmak üzere;

$$Nr(G) = \max\{w(G/S) - |S| - c(G/S) : S \subset V(G), w(G/S) \geq 1\}$$

olarak tanımlanmıştır. Bu tezde, minimum sayıdaki ayrıt ile mümkün olan maksimum bağlantılılık(connectivity) sayısına sahip graf sınıflarından oluşan Harary grafının komşu rupture derecesi bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Zedelenebilirlik, Komşu Rupture Derecesi, Harary Graflar

2015, 37 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Neighbor Rupture Degree of Graphs

Ferhan Nihan ALTUNDAĞ

**Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Gökşen BACAK TURAN

The vulnerability shows the endurance of the network until the communication collapse after the breakdown of certain stations or communication links. If a spy or a station is invaded in a spy network, then the adjacent stations are treacherous. A vulnerability parameter the neighbor rupture degree can be used to obtain the vulnerability of a spy network. The neighbor rupture degree of a noncomplete connected graph G is defined to be

$$Nr(G) = \max\{w(G/S) - |S| - c(G/S) : S \subset V(G), w(G/S) \geq 1\}$$

where S is any vertex subversion strategy of G , $w(G/S)$ is the number of connected components in G/S , and $c(G/S)$ is the maximum order of the components of G/S . In this thesis, the neighbor rupture degree of Harary graphs which are the maximum possible connectivity with the minimum number of edges are obtained.

Keywords: Vulnerability, Neighbor Rupture Degree, Harary Graphs

2015, 37 pages

1. GİRİŞ

Gelişen teknoloji ile birlikte herhangi bir bilginin veya herhangi bir nesnenin bir yerden başka bir yere aktarım isteğinin önemi giderek artmaktadır. Bu durum beraberinde oluşan iletimin hızlı, güvenilir ve sürekli olmasını gerektirir. Günlük hayatımızda önemli bir yere sahip olan bu iletim durumuna birçok örnek verilebilir. Elektrik dağıtım ağları, su dağıtım ağları, teknolojik ağlar (sosyal ağ, internet, bilgi ağları, vb.), biyolojik ağlar (protein etkileşim ağları, sinir ağları, ekolojik ağlar, vb.) örneklerin birkaçını oluşturmaktadır. Buradan anlaşıldığı gibi iletişim hayatımızın vazgeçilmez bir parçasıdır. Bu durum ise kurulması gereken iletişim ağlarının önemini daha da arttırmaktadır.

İletişim ağı, merkezler ve bu merkezleri birbirine bağlayan bağlantı hatlarından oluşur. Bir ağda veri akışının devam etmesinin temel kural olduğu düşünülürse, ağ analizinde temel konu, ağın güvenilirliği ve kararlılığının değerlendirilmesi olacaktır. Yani bazı kötü ve olumsuz koşullara karşı bu ağın nasıl ve ne kadar dayanacağı önemli bir sorundur. İşte tam burada "*zedelenebilirlik*" kavramı ortaya çıkar.

Bir sistemde zedelenebilirlik, sistemin belirli bir konudaki işlevselliğinin azalmasına ya da tamamen kaybolmasına yol açabilecek bir hasar karşısında, sistemin gösterdiği dayanıklılığın ölçümüdür. Aynı şekilde bir ağdaki zedelenebilirlik, bu ağın merkezlerinin ya da merkezler arasındaki bağlantıyı temsil eden hatların gördüğü herhangi bir hasar karşısında ağın gösterdiği dayanma gücünün ölçümüdür. Esas amaç, fonsiyonlarda herhangi bir bozulma olduğunda ağ şeklinde olan sistemin vereceği tepkinin anlaşılabilmesi, nasıl davranacağının öngörülmesi ve kontrol edilmesidir.

Ağ şeklindeki sisteme zarar vermek için kullanılan en basit strateji ağdaki en önemli noktaya saldırı yapılması kavramıdır. Amaç sistemi kullanılamaz hale getirmek, ciddi hasar vermek ya da sadece saldırı yapılan merkezi yok etmektir. Bu sebeple bu strateji birçok savaşta kullanılmış ve önemli sonuçlar vermiştir. Ancak daha karmaşık ağlarda önemli merkezi belirlemek bu kadar kolay olmayabilir ya da tek bir merkez olmayabilir. Böyle bir ağda herhangi bir bozulma ya da yok olma meydana geldiğinde ağın genelinde oluşan hasarın büyüklüğü araştırılırken aşağıdaki sorular sorulabilir.

1. Kaç tane zarar gören merkez vardır?
2. Kaç tane zarar gören hat/bağlantı vardır?
3. Aralarında iletişim devam eden merkezler birer alt ağ olarak düşünülürse, bu alt ağların sayısı kaç tanedir?

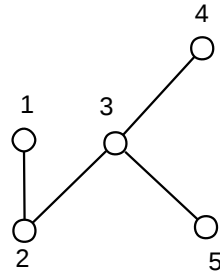
4. Zarardan sonra oluşan alt ağlar içinde, merkez sayısı en fazla olan alt ağın merkez sayısı kaç tanedir?
5. Zarar gören merkezlerle bağlantılı olan merkez sayısı kaç tanedir ?
6. Zarar gören hatlara bağlı olan merkezlerin diğer bağlantılarının sayısı kaç tanedir?
7. Zarar gören merkezler arasında birbirinden bağımsız olan merkezlerin sayısı kaç tanedir?

Amaca yönelik olarak yukarıdaki sorulara yenileri eklenebilir. Bu tarz sorularla, ağın gördüğü hasarın ölçülmesi ya da başlangıçtaki ağın ne kadar dayanıklı olduğunun analizinin yapılması mümkündür. Bu analizler ağ tasarımında yapılırsa, daha tasarım aşamasındayken en uygun ağ modeli seçilebilir ya da uygun önlemler alınabilir.

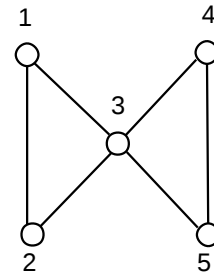
Ağlar; üretimden, taşımaya, iletişimden, lojistiğe birçok alanda etkin şekilde kullanıldığından, zedelenebilirlik araştırmaları da günden güne önem kazanmaktadır. Bir $G = (V(G), E(G))$ grafi, boş olmayan nesnelerin oluşturduğu bir $V(G)$ tepeler kümesi ile, $E(G)$ ile gösterilen sıralı olmayan tepe çiftlerinin birleştirilmesiyle elde edilen ayrıtlar kümesinden oluşur. Yukarıda bahsedilen ağlar bir G grafi ile modellenenebilir. Merkezleri grafin tepeleri, merkezler arasındaki bağlantılar da grafin ayrıtları olacak şekilde modellenen ağların zedelenebilirlik değerlerini araştırabilmek için graflarda çeşitli zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır.

Tanım 1. [4] *Bağlantılı bir G grafini, bağlantısız bir graf ya da sadece tek bir izole tepeden oluşan bir graf haline getirmek için graftan atılması gereken minimum tepe sayısına grafin tepe bağlantılılık sayısı (vertex connectivity) denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir.*

Bir grafin zedelenebilirlik değerini incelemek için akla gelen ilk parametre olan tepe bağlantılılık sayısı (connectivity), "Grafin bağlantısız bir graf haline gelmesi için graftan atılması gereken en az tepe sayısı kaçtır?" sorusuna cevap vermektedir.



Şekil 1.1. G_1



Şekil 1.2. G_2

Fakat bu parametre grafın bileşenlerine ayrıldığı bilgisi dışında geriye kalan grafın yapısının nasıl olduğu hakkında hiçbir bilgi vermemektedir. Ayrıca birden fazla graf için tepe bağlantılılık sayısı verildiğinde, bu değerlere bakılarak, bu parametrenin, graflar için ayırt edici olduğu söylenemez. Şekil 1.1 ve Şekil 1.2’de verilen eşit sayıda tepe sayısına sahip olan G_1 ve G_2 graflarını inceleyelim.

G_1 grafi bir ağaç(tree) olduğundan dolayı uç tepeler dışında kalan 2 veya 3 tepesini graftan çıkardığımızda graf bağlantısız olacaktır. Bu durumda $\kappa(G_1) = 1$ dir. G_2 grafinda ise 3 tepesini çıkardığımızda graf bağlantısız olacaktır $\kappa(G_2) = 1$. Yani G_1 ve G_2 graflarının tepe bağlantılılık sayıları $\kappa(G_1) = \kappa(G_2) = 1$ ’dir. Dolayısıyla sadece tepe bağlantılılık değerlerine bakılarak, bu ölçümün grafların farklı olduğunu belirttiği, yani graflar arasında ayırt edici olduğu söylenemez. Görüldüğü gibi, tepe bağlantılılık sayısı, sadece bir grafın bileşenlere ayrılması için, atılması gereken en az tepe sayısı hakkında bilgi vermektedir. İletişim ağı zarar gördükten sonra geriye kalan ağın bileşen sayısı ya da iletişime devam eden en çok elemana sahip alt ağın eleman sayısı hakkında herhangi bir bilgi vermemektedir. Bu durumda, geriye kalan grafın yapısı hakkında biraz daha bilgi edinmek için çeşitli ölçümler ortaya konmuştur. Bu ölçümlerden biri olan tepe saçılma sayısı (*scattering number*) Jung tarafından 1978 yılında tanımlanmıştır.

Tanım 2. [8] G bir graf ve G ’nin herhangi bir alt kümesi S , graftan atılan tepeler kümesi olsun. $G - S$ grafindaki kalan bileşen sayısı, $\omega(G - S)$ olmak üzere G grafının *scattering sayısı*

$$sc(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{ \omega(G - S) - |S| : S \subseteq V(G), \omega(G - S) > 1 \}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bir diğer ölçüm olan tepe bütünlük değeri (*integrity*) Barefoot ve Entringer tarafından 1987 yılında tanımlanmıştır.

Tanım 3. [2] Herhangi bir G grafindan, bir $S \subseteq V(G)$ tepeler kümesi atıldığında, geriye kalan $G - S$ grafının en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı $c(G - S)$ olmak üzere, G grafını tepe bütünlük değeri(*integrity*)

$$I(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{ |S| + c(G - S) \}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tepe saçılma sayısı ve tepe bütünlük değeri graflar için ayırt edici özelliğe sahip olmakla birlikte, sadece geriye kalan graftaki bileşen sayısı ya da kalan graftaki en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı ile ayrı ayrı ilgilenilmektedir. Her iki değeri aynı ölçüm içinde araştırmak amacıyla Li ve arkadaşları tarafından 2005 yılında rupture derecesi adıyla yeni bir zedelenebilirlik parametresi tanımlanmıştır.

Tanım 4. [12] *Tam graf olmayan bağlantılı bir G grafinin rupture derecesi*

$$r(G) = \max_{S \subset V(G)} \{ \omega(G - S) - |S| - c(G - S) : \omega(G - S) > 1 \}$$

şeklinde tanımlanır ve $r(G)$ ile gösterilir.

Ancak bu ölçümler, atılan tepelerin komşuları üzerindeki etkileriyle ilgilenmemektedir. Zedelenebilirlik ölçümlerinde, seçilen ağa bağlı olarak, zarar gören birimler merkezler ise, sadece bu merkezlerle bağlı olan hatlar değil, bitişik olan merkezler de zarar görebilir. Ya da benzer şekilde, zarar gören birimler hatlar ise, sadece bu hatların bağlı olduğu merkezler değil, komşu olduğu diğer hatlar da zarar görmüş olabilir. Yani, graflar üzerinde düşünülürse, bir grafin tepeleri zedelendiğinde bu tepelere komşu olan tepeler de zarar görüyor olabilir.

Gunther ve Hartnell çalışmalarında, bir casus ağını(spy network), tepeler ajanları, ayrıtlar ise aradaki iletişimi gösterecek şekilde, graflar ile modellemiştir. Bu casus ağında, bir ajan yakalandığında, bu ajanın ve onun direkt bağlantıya geçebildiği diğer ajanların artık güvenilmez olduğu açık olduğundan, ihbar edilen ajanlar da ağ için işlevsiz hale gelmiş olur. Bu nedenle, bu ağı temsil eden grafta, sadece tepeler yerine, tepelerle beraber tüm komşu tepeler de graftan atılır. Bu durumlar için, graflarda çeşitli komşu-zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır. Komşu-bağlantılılık değeri(*vertex-neighbor connectivity*) [6], komşu-bütünlük değeri(*vertex-neighbor integrity*) [10] ve komşu-scattering sayısı(*vertex-neighbor scattering*) [13] buna örnek olarak verilebilir.

Tanımlar için öncelikle aşağıdaki bilgilere ihtiyaç vardır. G grafinin herhangi bir u tepesinin açık komşuluğu $N_G(u) = \{w \in V(G) : uw \in E(G)\}$ ve kapalı komşuluğu $N_G[u] = \{u\} \cup N_G(u)$ şeklinde tanımlanır. $N_G[u]$ kapalı komşuluğunda atılan u tepesine *subverted tepe* denir. Tüm tepeleri subverted olan $S = u_1, u_2, \dots, u_m$ kümesine, G grafinin *subversion stratejisi* denir. G/S , S kümesinin tüm subverted tepeleri graftan atıldıktan sonra geriye kalan grafi, $c(G/S)$ ise geriye kalan bu graftaki en büyük bileşenin tepe sayısını ifade eder. S kümesindeki tüm tepeler, graftan subverted edildiğinde geriye kalan graf, bağlantısız bir graf, bir klik ya da boş graf olabilir. Bu çalışmada ele alınan graflar, basit, birleştirilmiş ve yönsüz graflardır. Ayrıca "*Graph Theory with Application*" [7] kitabındaki terminoloji ve notasyon kullanılmıştır.

Tanım 5. [6] *Bir G grafinin komşu bağlantılılık sayısı, S bir tepe subversion stratejisi olmak üzere;*

$$\kappa(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S|\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 6. [10] *Bir G grafinin komşu bütünlük değeri, herhangi bir tepe subversion*

stratejisi S ve G/S grafindeki en büyük bileşenin tepe sayısı $c(G/S)$ olmak üzere;

$$NI(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| + c(G/S)\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 7. [13] Bir G grafinin komşu scattering sayısı, S bir tepe subversion stratejisi ve $\omega(G/S)$ geriye kalan graftaki bileşen sayısı olmak üzere;

$$S(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{\omega(G/S) - |S| : \omega(G/S) \geq 1\}$$

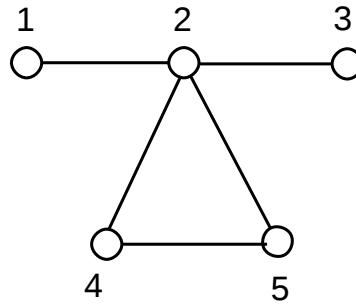
şeklinde tanımlanmıştır.

Fakat bu parametreler, zarar görmüş ağda atılan tepe sayısı, geriye kalan graftaki bileşen sayısı ve en büyük bileşendeki tepe sayısı ile aynı anda ilgilenmemektedir. Bu nedenle bu üç değeri birarada ele alan yeni bir parametre olan komşu rupture sayısı(vertex-neighbor rupture) G.Bacak Turan tarafından 2010 yılında tanımlanmıştır [1].

Tanım 8. Bir G grafinin komşu rupture derecesi, S bir tepe subversion stratejisi, G/S grafinin bileşen sayısı $\omega(G/S)$ ve en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı $c(G/S)$ olmak üzere;

$$Nr(G) = \max\{w(G/S) - |S| - c(G/S) : S \subset V(G), w(G/S) \geq 1\}$$

şeklinde ifade edilmiştir. n tepeli tam grafin komşu rupture derecesi $(1 - n)$ olarak tanımlanmıştır.



Şekil 1.3. 5 tepeli bir G grafi

ÖRNEK: Şekil 1.3’de verilen grafin komşu rupture derecesi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$S \subseteq V(G)$ kümesi, G grafinin bir subversion stratejisi olsun.

1. $|S| = 1$ olsun.

$S_1 = \{1\}, S_2 = \{3\}$ olduğunda $\omega(G/S) = 2, c(G/S) = 2$ olur. $Nr_1 = 2 - 1 - 2 = -1$

$S_3 = \{2\}$ olduğunda $\omega(G/S) = 0$ olur. Nr hesaplanamaz.

$S_4 = \{4\}, S_5 = \{5\}$ olduğunda $\omega(G/S) = 2, c(G/S) = 1$ olur. $Nr_2 = 2 - 1 - 1 = 0$

2. $|S| = 2$ olsun.

$S_1 = \{1, 2\}, S_2 = \{2, 3\}, S_3 = \{2, 4\}, S_4 = \{2, 5\}$ olduğunda $\omega(G/S) = 0$ olur ve Nr hesaplanamaz.

$S_1 = \{1, 4\}, S_2 = \{1, 5\}, S_3 = \{3, 4\}, S_4 = \{3, 5\}$ olduğunda $\omega(G/S) = 1, c(G/S) = 1$ olur. $Nr_3 = 1 - 2 - 1 = -2$

$S_1 = \{1, 3\}$, olduğunda $\omega(G/S) = 1, c(G/S) = 2$ olur. $Nr_4 = 1 - 2 - 2 = -3$

$S_1 = \{4, 5\}$ olduğunda $\omega(G/S) = 2, c(G/S) = 1$ olur. $Nr_5 = 2 - 2 - 1 = -1$

3. $|S| = 3$ olsun.

$S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{1, 3, 4\}, S_3 = \{1, 3, 5\}, S_4 = \{1, 2, 4\}, S_5 = \{1, 2, 5\}$ olduğunda $\omega(G/S) = 0$ olur. Nr hesaplanamaz.

$S_1 = \{1, 4, 5\}, S_2 = \{3, 4, 5\}$ olduğunda $\omega(G/S) = 1, c(G/S) = 1$ olur. $Nr_6 = 1 - 3 - 1 = -3$

Komşu rupture derecesinin tanımı gereği bulunan değerlerin maksimumu alındığında;

$$Nr(G) = \max\{Nr_1, Nr_2, Nr_3, Nr_4, Nr_5, Nr_6\} = \max\{-1, 0, -2, -3, -1, -3\} = 0$$

G grafinin komşu rupture derecesi 0 olarak bulunur.

Bilinen bazı graf ailelerinin komşu rupture dereceleri G. Bacak Turan tarafından "Neighbor rupture degree and the relations between other parameters" [1] adlı makalede verilmiştir.

Teorem 1. • P_n , n tepeli bir yol graf ve $n \geq 12$ olmak üzere,

$$Nr(P_n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 1(mod 4); \\ -1, & n \equiv 0, 2, 3(mod 4) \end{cases}$$

• n tepeli bir C_n çevre grafi için, $n \geq 15$ olmak üzere,

$$Nr(C_n) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0(mod 4); \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3(mod 4) \end{cases}$$

• $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, k -parçalı bir tam graf olmak üzere,

$$Nr(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\} - 3$$

– $K_{m, n}$ iki parçalı bir tam graf ise,

$$Nr(K_{m, n}) = \max\{m, n\} - 3$$

– $K_{1, n}$, bir yıldız graf ise,

$$Nr(K_{1, n}) = n - 3$$

- W_n , n tepeli bir tekerlek graf ve $n > 4$ ise,

$$Nr(W_n) = \begin{cases} -1, & n \equiv 1(mod 4); \\ -2, & n \equiv 0, 2, 3(mod 4) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

1962'de Frank Harary, p tepe ve $(l < p)$ l negatif olmayan tamsayı ise, $\kappa(G) = l$ ve mümkün olan en az ayırıt ile basit bir G grafi nasıl oluşturulabilir düşüncesiyle iletişim ağlarındaki güvenilirliği incelemiştir [5]. Bu araştırmada ortaya konan teoremlerden ilki aşağıdaki gibidir.

Bütün $G = (p, q)$ grafları arasında, $q < p - 1$ olduğu zaman maksimum connectivity değeri 0, $q \geq p - 1$ olduğu zaman maksimum connectivity değeri $\lfloor \frac{2q}{p} \rfloor$ 'dir.

Bir $G = (p, q)$ grafinin dereceleri toplamı ayırıt sayısının iki katı ve $\lfloor \frac{2q}{p} \rfloor$ değeri grafin derecelerinin ortalamasını vermek üzere Harary, teoremin ispatını açıklarken " $G = (p, q)$ grafinde $q \geq p$ olduğu zaman maksimum connectivity değeri $\lfloor \frac{2q}{p} \rfloor$ 'dir." ifadesini ileri sürmüş ve bu ifadeyi açıklamak amacıyla iki durum ortaya koymuştur.

1. Bir (p, q) grafinin connectivity değeri $\lfloor \frac{2q}{p} \rfloor$ değerini aşmaz,
2. Connectivity değeri $\lfloor \frac{2q}{p} \rfloor$ olan bir (p, q) grafi H vardır.

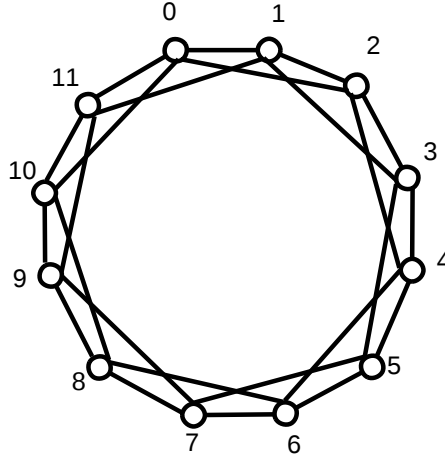
Bu iki durumun ispatında $\lfloor \frac{2q}{p} \rfloor = m$ ve m tamsayısı $2k$ ve $2k + 1$ olarak iki şekilde ele alınmıştır. Sonuçta $(n \geq m)$ ve m, n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere Harary, n tepeli bir graf üzerinde minimum ayırıtı sahip olan m -connected $H_{m,n}$ graf sınıflarını oluşturmuştur. Harary grafları minimum sayıdaki ayırıt ile mümkün olan maksimum bağlantılılık(connectivity) sayısına sahiptir. Bu kararlılık özelliği ile Harary grafi birçok zedelenebilirlik parametrelerine konu olmuş, araştırılmıştır. Frank Harary [3], $H_{m,n}$ Harary grafinin m -connected olduğunu kanıtlamıştır. Quyang ve arkadaşları [11], Harary grafinin scattering sayısını ortaya koymuştur. Cozzens [9], tenacity için iyi bir sınır veya tam değerini elde etmiştir. Li ve arkadaşları [5], Harary grafinin integrity değerini belirlemiştir. Bu tezin amacı da Harary grafinin bir zedelenebilirlik parametresi olan komşu rupture derecesini belirlemektir.

2. HARARY GRAFLARIN KOMŞU RUPTURE DERECEŚİ

Bu bölümde, Harary grafinin 3 durumu için komşu rupture dereceleri bulunup, ispatları verilmiştir. $H_{m,n}$ grafinin sınıfları ve oluşumu aşağıdaki gibidir. $H_{m,n}$ grafinin oluşumuna n çevre graf ile başlanır ve tepeler $0, 1, 2, \dots, n-1$ ile saat yönünde numaralandırılır. $H_{m,n}$ grafında i ve j herhangi iki tepe olmak üzere i ve j arasındaki $|j-i|_n = \min\{|j-i|, n-|j-i|\}$ uzaklık belirlenir.

2.1. Harary Grafının 1. Durumu

m çift ($m = 2k$) olsun. i ve j tepeleri için $|j-i|_n \leq k$ olan her iki tepe bir ayrıtla birleştirilir. $H_{2k,n}$ grafinin her tepesinin derecesi m 'dir. Şekil 2.1'de $H_{4,12}$ Harary grafinin gösterimi verilmiştir.



Şekil 2.1. $H_{4,12}$

Teorem 2. ($m = 2k$) ve ($k \geq 1$) olan $H_{m,n}$ Harary grafinin komşu rupture derecesi;
a) $n \geq 2k + 2$ için;

$$Nr(H_{m,n}) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{2k+2} \\ -2, & \text{diğer durumda.} \end{cases}$$

b) $n < 2k + 2$ için;

$$Nr(H_{m,n}) = 1 - n.$$

İspat. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $H_{m,n} \cong C_n^k$ olduğundan Teorem 3 ve Teorem 4'e göre ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3. ($n \geq 2k + 2$) ve ($k \geq 1$) olmak üzere C_n^k , n tepeli çevre grafin k . kuvvetinin komşu rupture derecesi aşağıdaki gibidir.

$$Nr(C_n^k) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{2k+2} ; \\ -2, & \text{diğer durumda.} \end{cases}$$

İspat. $S \subseteq V(C_n^k)$ kümesi, C_n^k grafinin subversion stratejisi ve $|S| = r$ graftan atılan tepe sayısı olmak üzere S 'nin eleman sayısına bağlı olarak 2 durum vardır.

Durum 1: $0 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2k+2} \rfloor$ olsun. Her C_n^k grafi için, $\omega(C_n^k/S) \leq r$ ve $c(C_n^k/S) \geq \left\lceil \frac{n-(2k+1)r}{r} \right\rceil$ olduğundan

$$Nr(C_n^k) = \omega(C_n^k/S) - |S| - c(C_n^k/S) \leq r - r - \left\lceil \frac{n-(2k+1)r}{r} \right\rceil$$

ve $Nr(C_n^k) \leq \max_r \{2k+1 - \frac{n}{r}\}$ elde edilir. $f(r) = 2k+1 - \frac{n}{r}$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan maksimum değerini $r = \lfloor \frac{n}{2k+2} \rfloor$ ' de alır.

$r = \lfloor \frac{n}{2k+2} \rfloor$ değerini fonksiyonda yerine yazdığımızda;

$$f(r) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2k+2} \right\rfloor\right) = 2k+1 - \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{2k+2} \right\rfloor}$$

olur.

Buradan; $n = (2k+2)s + p$, $s \geq 1$ ve $0 \leq p \leq 2k+1$ için;

$$f(r) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2k+2} \right\rfloor\right) = 2k+1 - \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{2k+2} \right\rfloor} = 2k+1 - \frac{(2k+2)s+p}{\left\lfloor \frac{(2k+2)s+p}{2k+2} \right\rfloor} = 2k+1 - \frac{(2k+2)s+p}{s + \left\lfloor \frac{p}{2k+2} \right\rfloor} = 2k+1 - \frac{(2k+2)s+p}{s} = 2k+1 - 2k - 2 - \frac{p}{s} = -1 - \frac{p}{s} = \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{2k+2}; \\ < -1, & n \not\equiv 0 \pmod{2k+2}. \end{cases} \text{ elde edilir.}$$

Böylece

$$\begin{cases} Nr(C_n^k) \leq -1, & n \equiv 0 \pmod{2k+2}, \\ Nr(C_n^k) < -1, & n \not\equiv 0 \pmod{2k+2}. \end{cases} \quad (2.1)$$

elde edilir.

Durum 2: $r > \lfloor \frac{n}{2k+2} \rfloor$ olsun. Bu durumda $\omega(C_n^k/S) \leq r-1$ ve $c(C_n^k/S) \geq 1$ olacağından;

$$\omega(C_n^k/S) - |S| - c(C_n^k/S) \leq r-1 - r - 1 \leq -2 \quad (2.2)$$

olur. Komşu rupture derecesinin tanımı gereği, (2.1) ve (2.2) ifadelerinin maksimum değeri alındığında;

$$Nr(C_n^k) \leq \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{2k+2}; \\ -2, & \text{diğer durumda.} \end{cases} \quad (2.3)$$

değeri bulunur.

Diğer taraftan $\omega(C_n^k/S^*) = \lfloor \frac{n}{2k+2} \rfloor$ ve $c(C_n^k/S^*) = 1$ olacak şekilde $|S^*| = \lfloor \frac{n}{2k+2} \rfloor$ elemanlı bir S^* kümesi seçilebilir ve böylece;

$$\omega(C_n^k/S^*) - |S^*| - c(C_n^k/S^*) \geq \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{2k+2}; \\ -2, & \text{diğer durumda.} \end{cases} \quad (2.4)$$

elde edilmiş olur. (2.3) ve (2.4) 'e göre sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

$$Nr(C_n^k) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{2k+2}; \\ -2, & \text{diğer durumda.} \end{cases}$$

□

Teorem 4. (C_n^k) , n tepeli çevre grafin k . kuvveti ($n < 2k+2, k \geq 1$) olmak üzere

$$Nr(C_n^k) = 1 - n$$

olarak elde edilir.

İspat. ($n < 2k+2$) olduğunda $\text{diam}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k$ olacağından $C_n^k \cong K_n$ olduğu açıktır. Böylece

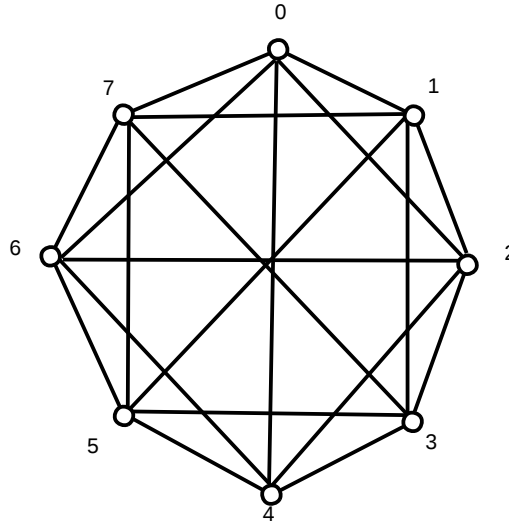
$$Nr(C_n^k) = Nr(K_n) = 1 - n$$

elde edilir.

□

2.2. Harary Grafının 2. Durumu

m tek ($m = 2k+1$) ve n çift olsun. İlk olarak $H_{2k,n}$ grafi çizilir ve $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$ için i ile $i + \frac{n}{2}$ tepeleri birer ayrıt ile birleştirilir. $H_{2k+1,n}$ grafinin her tepesinin derecesi m 'dir. Şekil 2.2'de $H_{5,8}$ Harary grafının gösterimi verilmiştir.



Şekil 2.2. $H_{5,8}$

Teorem 5. ($m = 2k+1$) ($k > 3$) ve n çift olan $H_{m,n}$ Harary grafi için komşu ruptüre derecesi aşağıdaki gibidir.

$$Nr(H_{m,n}) = \begin{cases} -3, & n \equiv 0 \pmod{4k+4}; \\ -2, & \text{diğer durumda.} \end{cases}$$

İspat. $S \subseteq V(H_{m,n})$ kümesi, $H_{m,n}$ grafinin bir subversion stratejisi ve $|S| = r$ graftan atılan tepe sayısı olsun. n 'nin eleman sayısına bağlı olarak 2 durum vardır.

Durum 1: $n \equiv 0 \pmod{4k+4}$ için;

(i) $r \leq \left\lceil \frac{n}{2k+2} \right\rceil - 1$ olduğu zaman $\omega(H_{m,n}/S) \leq r$ ve $c(H_{m,n}/S) \geq 3$ olur. Bu durumda;

$$Nr(H_{m,n}) = \omega(H_{m,n}/S) - |S| - c(H_{m,n}/S) \leq r - r - 3 \leq -3. \quad (2.5)$$

elde edilir.

(ii) $r \geq \left\lceil \frac{n}{2k+2} \right\rceil$ olduğu zaman ise, $\omega(H_{m,n}/S) \leq r - 1$ ve $c(H_{m,n}/S) \geq 2$ olur. Böylece;

$$\omega(H_{m,n}/S) - |S| - c(H_{m,n}/S) \leq r - 1 - r - 2 = -3 \quad (2.6)$$

bulunur ve komşu ruptüre derecesinin tanımı gereği (2.5) ve (2.6) ifadelerinin maksimum değeri alındığında;

$$Nr(H_{m,n}) \leq -3. \quad (2.7)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $|S^*| = \left\lceil \frac{n}{2k+2} \right\rceil$ elemanlı bir S^* subversion stratejisi seçilebilir ki,

$\omega(H_{m,n}/S^*) = \left\lceil \frac{n}{2k+2} \right\rceil - 1$ ve $c(H_{m,n}/S^*) = 2$ olur ve böylece;

$$\omega(H_{m,n}/S^*) - |S^*| - c(H_{m,n}/S^*) \geq \left\lceil \frac{n}{2k+2} \right\rceil - 1 - \left\lceil \frac{n}{2k+2} \right\rceil - 2 = -3. \quad (2.8)$$

elde edilir. (2.7) ve (2.8)'e bağlı olarak

$$Nr(H_{m,n}) = -3.$$

bulunur.

Durum 2: $n \not\equiv 0 \pmod{4k+4}$ için;

(i) $r \leq \left\lceil \frac{n}{2k+1} \right\rceil - 1$ olsun. Bu durumda $\omega(H_{m,n}/S) \leq r$, ve $c(H_{m,n}/S) \geq 2$ olur. Böylece;

$$Nr(H_{m,n}) = \omega(H_{m,n}/S) - |S| - c(H_{m,n}/S) \leq r - r - 2 \leq -2. \quad (2.9)$$

elde edilir.

(ii) $r \geq \left\lceil \frac{n}{2k+2} \right\rceil$ olsun. Bu durumda $\omega(H_{m,n}/S) \leq r - 1$, ve $c(H_{m,n}/S) \geq 1$ olur. Buradan;

$$\omega(H_{m,n}/S) - |S| - c(H_{m,n}/S) \leq r - 1 - r - 1 \leq -2. \quad (2.10)$$

elde edilir.

(2.9) ve (2.10) ifadelerinin maksimum değeri alındığında;

$$Nr(H_{m,n}) \leq -2. \quad (2.11)$$

olur.

$\omega(H_{m,n}/S^*) = \left\lceil \frac{n}{2k+2} \right\rceil - 1$ ve $c(H_{m,n}/S^*) = 1$ olacak şekilde $|S^*| = \left\lceil \frac{n}{2k+2} \right\rceil$ elemanlı bir S^* subversion stratejisi seçilebilir ve böylece;

$$\omega(H_{m,n}/S^*) - |S^*| - c(H_{m,n}/S^*) \geq \left\lceil \frac{n}{2k+2} \right\rceil - 1 - \left\lceil \frac{n}{2k+2} \right\rceil - 1 = -2. \quad (2.12)$$

elde edilir. (2.11) ve (2.12)'e göre

$$Nr(H_{m,n}) = -2.$$

bulunur. Durum 1 ve Durum 2'den ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 6. ($n \geq 126$) ve n çift olan $H_{7,n}$ grafinin komşu rupture derecesi aşağıdaki gibidir.

$$Nr(H_{7,n}) = -2.$$

İspat. $S \subseteq V(H_{m,n})$ kümesi $H_{m,n}$ grafinin bir subversion stratejisi ve $|S| = r$, graftan atılan tepe sayısı olsun. S kümesinin eleman sayısına bağlı olarak iki durum vardır.

Durum 1: $r \leq 2\left\lfloor \frac{n-14}{16} \right\rfloor + 3$ olsun. Bu durumda $\omega(H_{7,n}/S) \leq r - 1$ ve $c(H_{7,n}/S) \geq \frac{n-7r}{r-1}$ olur. Böylece;

$$Nr(H_{7,n}/S) \leq \omega(H_{7,n}/S) - |S| - c(H_{7,n}/S) \leq r - 1 - r - \frac{n-7r}{r-1} \leq 6 + \frac{7-n}{r-1}$$

$$Nr(H_{7,n}) \leq \max_r \left\{ 6 + \frac{7-n}{r-1} \right\}.$$

$f(r) = 6 + \frac{7-n}{r-1}$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan maximum değerini $r = 2\left\lfloor \frac{n-14}{16} \right\rfloor + 3$ 'de alır.

$n \equiv 16s + p$, $0 \leq p \leq 14$ ve $s \geq 7$ olmak üzere bu değerleri

$$r = 2\left\lfloor \frac{n-14}{16} \right\rfloor + 3$$

ifadesinde yerine yazalım.

$r = 2(s + \left\lfloor \frac{p-14}{16} \right\rfloor) + 3 = 2s + 2\left\lfloor \frac{p-14}{16} \right\rfloor + 3$ olur ve buradan;

$$r = \begin{cases} 2s + 3, & p = 14; \\ 2s + 1, & p < 14. \end{cases}$$

elde edilir.

(i) $p = 14$ için;

$r = 2s + 3$ olacağından $f(r) = f(2s + 3) = 6 - \frac{16s+7}{2s+2}$ olur. Böylece;

$$f(r) \leq -2 \quad (2.13)$$

bulunur.

(ii) $p < 14$ için;

$r = 2s + 1$ olacağından $f(r) = f(2s + 1) = 6 + \frac{7-16s-p}{2s}$ bulunur ve böylece;

$$f(r) \leq -2 \quad (2.14)$$

elde edilir. (2.13) ve (2.14)'e göre

$$Nr(H_{7,n}) \leq -2 \quad (2.15)$$

bulunur.

Durum 2: $r \geq 2\lfloor \frac{n-14}{16} \rfloor + 4$ olsun. Bu durumda $\omega(H_{7,n}/S) \leq r - 2$ ve $c(H_{7,n}/S) \geq 1$ olur ve böylece;

$$\omega(H_{7,n}/S) - |S| - c(H_{7,n}/S) \leq r - 2 - r - 1$$

$$Nr(H_{7,n}) \leq -3 \quad (2.16)$$

elde edilir.

Komşu rupture derecesinin tanımına göre (2.15) ve (2.16) ifadelerinin maksimum değeri alındığında;

$$Nr(H_{7,n}) \leq -2 \quad (2.17)$$

bulunur.

Öyle bir S^* subversion stratejisi seçilebilir ki, $|S^*| = 2\lfloor \frac{n-14}{16} \rfloor + 3$ olmak üzere;

$\omega(H_{7,n}/S^*) = 2\lfloor \frac{n-14}{16} \rfloor + 2$ ve $c(H_{7,n}/S^*) = 1$ olur. Bu durumda;

$$\omega(H_{7,n}/S^*) - |S^*| - c(H_{7,n}/S^*) \geq 2\lfloor \frac{n-14}{16} \rfloor + 2 - 2\lfloor \frac{n-14}{16} \rfloor - 3 - 1 \geq -2 \quad (2.18)$$

olur.

(2.17) ve (2.18)'den ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 7. ($n \geq 70$) ve n çift olan $H_{5,n}$ Harary grafinin komşu rupture derecesi aşağıdaki gibidir.

$$Nr(H_{5,n}) = -1.$$

İspat. $S \subseteq V(H_{5,n})$ kümesi, $H_{5,n}$ grafinin bir subversion stratejisi ve $|S| = r$ graftan atılan tepe sayısı olsun. S kümesinin eleman sayısına bağlı olarak iki durum vardır.

Durum 1: $r \leq 2\lfloor \frac{n-10}{12} \rfloor + 2$ olduğu durumlarda $\omega(H_{5,n}/S) \leq r$ ve $c(H_{5,n}/S) \geq \frac{n-5r}{r}$ olur. Böylece;

$$Nr(H_{5,n}/S) \leq \omega(H_{5,n}/S) - |S| - c(H_{5,n}/S) \leq r - r - \frac{n-5r}{r} \leq 5 - \frac{n}{r}$$

$$Nr(H_{5,n}) \leq \max_r \{5 - \frac{n}{r}\}$$

elde edilir. $f(r) = 5 - \frac{n}{r}$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan maximum değerini $r = 2\lfloor \frac{n-10}{12} \rfloor + 2$ ’de alır.

$n \equiv 12s + p$, $0 \leq p \leq 10$ ve $s \geq 5$ olmak üzere bu değerleri;

$$r = 2\lfloor \frac{n-10}{12} \rfloor + 2.$$

ifadesinde yerine yazalım.

$$r = 2\lfloor \frac{12s+p-10}{12} \rfloor + 2 = 2(s + \lfloor \frac{p-10}{12} \rfloor) + 2 = 2s + 2\lfloor \frac{p-10}{12} \rfloor + 2$$

Buradan;

$$r = \begin{cases} 2s+2, & p = 10; \\ 2s, & p < 10. \end{cases}$$

elde edilir.

(i) $p = 10$ olsun.

$r = 2s + 2$ olacağından $f(r) = f(2s+2) = 5 - \frac{12s+10}{2s+2}$ olur. Böylece ;

$$f(r) \leq -1 \tag{2.19}$$

elde edilir.

(ii) $p < 10$ olsun.

$r = 2s$ olacağından $f(r) = f(2s) = 5 - \frac{12s+p}{2s}$ bulunur. Buradan ;

$$f(r) \leq -2 \tag{2.20}$$

elde edilir, bu durumda; (2.19) ve (2.20)’e göre

$$Nr(H_{5,n}) \leq -1 \tag{2.21}$$

sonucuna ulaşılır.

Durum 2: $r \geq 2\lfloor \frac{n-10}{12} \rfloor + 3$ olsun. Bu durumda $\omega(H_{5,n}/S) \leq r-1$ ve $c(H_{5,n}/S) \geq 1$ olur ve böylece;

$$\omega(H_{5,n}/S) - |S| - c(H_{5,n}/S) \leq r-1 - r - 1$$

$$Nr(H_{5,n}) \leq -2 \quad (2.22)$$

bulunur. Komşu rupture derecesinin tanımı gereği (2.21) ve (2.22) ifadelerinin maksimum değeri alındığında;

$$Nr(H_{5,n}) \leq -1 \quad (2.23)$$

elde edilir.

Öyle bir S^* subversion stratejisi seçilebilir ki, $|S^*| = 2\lfloor \frac{n-10}{12} \rfloor + 2$, $\omega(H_{5,n}/S^*) = 2\lfloor \frac{n-10}{12} \rfloor + 2$ ve $c(H_{5,n}/S^*) = 1$ olur. Bu durumda

$$\omega(H_{5,n}/S^*) - |S^*| - c(H_{5,n}/S^*) \geq 2\lfloor \frac{n-10}{12} \rfloor + 2 - 2\lfloor \frac{n-10}{12} \rfloor - 2 - 1 \geq -1 \quad (2.24)$$

bulunur. (2.23) ve (2.24)'den ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 8. $m = 3$ ve n çift ($n \geq 12$) olan $H_{3,n}$ Harary grafinin komşu rupture derecesi aşağıdaki gibidir.

$$Nr(H_{3,n}) = \begin{cases} 2\lfloor \frac{n}{12} \rfloor - 3, & n \equiv 0 \pmod{12}; \\ 2\lfloor \frac{n}{12} \rfloor - 2, & n \equiv 2, 4 \pmod{12}; \\ 2\lfloor \frac{n}{12} \rfloor, & n \equiv 6, 10 \pmod{12}; \\ 2\lfloor \frac{n}{12} \rfloor - 1, & n \equiv 8 \pmod{12}. \end{cases}$$

İspat. $S \subseteq V(H_{3,n})$, $H_{3,n}$ grafinin subversion stratejisi ve $|S| = r$ graftan atılan tepe sayısı olsun. n 'nin eleman sayısına göre iki durum vardır.

Durum 1: $n \not\equiv 8 \pmod{12}$ olmak üzere;

Alt durum 1: $r \leq \lceil \frac{n}{6} \rceil - 1$ olsun. Bu durumda $\omega(H_{3,n}/S) \leq 2r - 1$ ve $c(H_{3,n}/S) \geq \frac{n-4r}{2r-1}$ olur. Böylece

$$Nr(H_{3,n}) \leq \max_r \{2r - 1 - 1 - (\frac{n-4r}{2r-1})\} \leq \max_r \{r + 1 + \frac{2-n}{2r-1}\}$$

elde edilir. $f(r) = r + 1 + \frac{2-n}{2r-1}$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan maximum değerini

$r = \lceil \frac{n}{6} \rceil - 1$ 'de alır. $r = \lceil \frac{n}{6} \rceil - 1$ değerini fonksiyonda yerine yazdığımızda

$f(r) = f(\lceil \frac{n}{6} \rceil - 1) = \lceil \frac{n}{6} \rceil + \frac{2-n}{2\lceil \frac{n}{6} \rceil - 3}$ olur. Böylece

$$Nr \leq \begin{cases} 2\lfloor \frac{n}{12} \rfloor - 4, & n \equiv 0 \pmod{12}; \\ 2\lfloor \frac{n}{12} \rfloor - 3, & n \equiv 2, 4, 6 \pmod{12}; \\ 2\lfloor \frac{n}{12} \rfloor - 2, & n \equiv 10 \pmod{12}. \end{cases} \quad (2.25)$$

elde edilir.

Alt durum 2: $r \geq \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil$ olsun. Böylece n 'nin eleman sayısına bağlı olarak 4 durum elde edilir.

(i) $n \equiv 0 \pmod{12}$ olsun. Bu durumda $r \geq \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil$, $\omega(H_{3,n}/S) \leq \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil - 1$ ve $c(H_{3,n}/S) \geq 2$ olur.

Bundan dolayı;

$$\omega(H_{3,n}/S) - |S| - c(H_{3,n}/S) \leq \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil - 1 - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 2 \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 3 \quad (2.26)$$

(2.25) ve (2.26)'e göre

$$Nr(H_{3,n}) \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 3 \quad (2.27)$$

elde edilir.

$|S^*| = \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil$ elemanlı bir S^* subversion stratejisi seçilebilir ve böylece $\omega((H_{3,n})/S^*) = \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil - 1$,
 $c((H_{3,n})/S^*) = 2$ elde edilir.

$$\omega((H_{3,n})/S^*) - |S^*| - c((H_{3,n})/S^*) \geq \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil - 1 - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 2 \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 3. \quad (2.28)$$

(2.27) ve (2.28)'e göre

$$Nr(H_{3,n}) = 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 3$$

bulunur.

(ii) $n \equiv 2 \pmod{12}$ veya $n \equiv 4 \pmod{12}$ olsun.

$r \geq \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil$ olduğu durumlarda $\omega(H_{3,n}/S) \leq \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil - 1$ ve $c(H_{3,n}/S) \geq 1$ 'dir. Bundan dolayı;

$$\omega(H_{3,n}/S) - |S| - c(H_{3,n}/S) \leq \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil - 1 - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1 \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 2. \quad (2.29)$$

(2.25) ve (2.29)'a göre

$$Nr(H_{3,n}) \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 2. \quad (2.30)$$

'dir.

Öyle bir S^* subversion stratejisi seçilebilir ki, $|S^*| = \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil$, $\omega(H_{3,n}/S^*) = \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil - 1$,
 $c(H_{3,n}/S^*) = 1$ olur. Böylece

$$Nr(H_{3,n}) \geq \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil - 1 - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1 \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 2 \quad (2.31)$$

bulunur. (2.30) ve (2.31) 'e bağılı olarak

$$Nr(H_{3,n}) = 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 2$$

sonucu elde edilir.

(iii) $n \equiv 6 \pmod{12}$ olsun. $r \geq \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil$ olduğunda $\omega(H_{3,n}/S) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ ve $c(H_{3,n}/S) \geq 1$ olur. Bundan dolayı

$$\omega(H_{3,n}/S) - |S| - c(H_{3,n}/S) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1 \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor. \quad (2.32)$$

(2.25) ve (2.32)'e göre

$$Nr(H_{3,n}) \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor. \quad (2.33)$$

bulunur.

$|S^*| = \frac{n}{6}$ elemanlı bir S^* subversion stratejisi seçilebilir ki, $\omega(H_{3,n}/S^*) = \frac{n}{3}$ ve $c(H_{3,n}/S^*) = 1$ olur. Bundan dolayı;

$$Nr(H_{3,n}) \geq \frac{n}{3} - \frac{n}{6} - 1 \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor. \quad (2.34)$$

bulunur. (2.33) ve (2.34)'e bağılı olarak

$$Nr(H_{3,n}) = 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor$$

sonucu elde edilir.

(iv) $n \equiv 10 \pmod{12}$ olsun. $r \geq \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil$ olduğu zaman, $\omega(H_{3,n}/S) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1$ ve $c(H_{3,n}/S) \geq 1$ elde edilir. Böylece

$$\omega(H_{3,n}/S) - |S| - c(H_{3,n}/S) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1 - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1 \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor. \quad (2.35)$$

(2.25) ve (2.35) 'den

$$Nr(H_{3,n}) \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor. \quad (2.36)$$

ifadesi bulunur.

$|S^*| = \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil$ elemanlı bir S^* subversion stratejisi seçilebilir ki, $\omega(H_{3,n}/S^*) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1$, $c(H_{3,n}/S^*) = 1$ elde edilir. Böylece

$$Nr(H_{3,n}) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1 - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1 \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor. \quad (2.37)$$

bulunur. (2.36) ve (2.37) ifadelerinden

$$Nr(H_{3,n}) = 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor.$$

sonucu elde edilir.

Durum 2: $n \equiv 8 \pmod{12}$ olsun. S kümesinin eleman sayısına bağlı olarak iki durum vardır.

Alt durum 1: $r \leq \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1$ olduğu durumlarda $\omega(H_{3,n}/S) \leq r+1$ ve $c(H_{3,n}/S) \geq \frac{n-4r}{r+1}$ 'dir. Böylece

$$Nr(H_{3,n}) \leq \max_r \{r+1 - r - (\frac{n-4r}{r+1})\} \leq \max_r \{5 - (\frac{n+4}{r+1})\}$$

elde edilir. $f(r) = 5 - (\frac{n+4}{r+1})$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan maksimum değerini

$r = \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1$ 'de alır. $r = \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1$ değerini fonksiyonda yerine yazdığımızda $f(r) = f(\left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1) = 5 - (\frac{n+4}{\left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil})$ elde edilir. Bundan dolayı;

$$Nr(H_{3,n}) \leq -1. \quad (2.38)$$

olur.

Alt durum 2: $r \geq \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil$ olduğu durumlarda $\omega(H_{3,n}/S) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1$ ve $c(H_{3,n}/S) \geq 1$ olur. Böylece;

$$\omega(H_{3,n}/S) - |S| - c(H_{3,n}/S) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1 - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1 \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 1. \quad (2.39)$$

bulunur. (2.38) ve (2.39)'a göre

$$Nr(H_{3,n}) \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 1 \quad (2.40)$$

sonucu elde edilir.

$|S^*| = \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil$ elemanlı S^* kümesi seçilebilir ki, $\omega(H_{3,n}/S^*) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1$ ve $c(H_{3,n}/S^*) = 1$ olur. Bu durumda

$$\omega(H_{3,n}/S^*) - |S^*| - c(H_{3,n}/S^*) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1 - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1 \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 1. \quad (2.41)$$

bulunur. (2.40) ve (2.41)'e bağlı olarak sonuç elde edilip ispat tamamlanır. $\square$

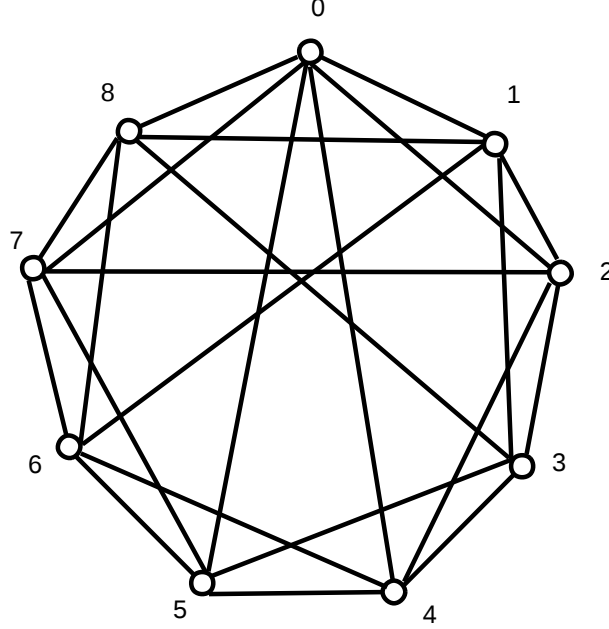
Tablo 2.1. n çift ve $(n < 12)$ için $H_{3,n}$ Harary grafının komşu rupture derecesi

n	4	6	8	10
$Nr(H_{3,n})$	-3	0	-1	0

Aşağıda Tablo 2.1'de $n < 12$ (n çift) için $H_{3,n}$ Harary grafının komşu rupture dereceleri verilmiştir.

2.3. Harary Grafının 3. Durumu

m ve n tek ise, ($m = 2k + 1$) olsun. İlk olarak $H_{2k,n}$ grafi çizilir, 0 tepesi ile $\frac{n-1}{2}$ ve $\frac{n+1}{2}$ tepeleri birer ayrıt ile birleştirilir, $1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}$ için i ile $i + \frac{n+1}{2}$ tepeleri de birer ayrıt ile birleştirilir. $H_{2k+1,n}$ grafinin 0 tepesi hariç her tepesinin derecesi m 'dir. 0 tepesinin derecesi ise $m + 1$ 'dir [5]. Şekil 2.3'de $H_{5,9}$ Harary grafinin gösterimi verilmiştir.



Şekil 2.3. $H_{5,9}$

Teorem 9. $m = 2k + 1$ ($k \geq 3$) ve $n \geq (2k + 1) \cdot (4k + 4) + (2k + 3)$, n tek olan $H_{m,n}$ Harary grafinin komşu rupture derecesi aşağıdaki gibidir.

$$Nr(H_{m,n}) = -1.$$

İspat. $S \subseteq V(H_{m,n})$ kümesi, $H_{m,n}$ grafinin bir subversion stratejisi, $|S| = r$, $H_{m,n}$ grafindan atılan tepe sayısı olsun. S deki tepe sayısına bağlı olarak iki durum vardır.

Durum 1: $r \leq \left\lceil \frac{n-(2k+3)}{4k+4} \right\rceil + 1$ olduğu durumlarda $\omega(H_{m,n}/S) \leq r$ ve $c(H_{m,n}/S) \geq \frac{n-(2k+1)r}{r}$ olacağından

$$\omega(H_{m,n}/S) - |S| - c(H_{m,n}/S) \leq r - r - \left(\frac{n-(2k+1)r}{r} \right) \leq (2k+1) - \frac{n}{r}$$

ve

$$Nr(H_{m,n}) \leq \max_r \left\{ (2k+1) - \frac{n}{r} \right\}$$

olur. $f(r) = (2k+1) - \frac{n}{r}$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan maksimum değerini $r = 2 \left\lceil \frac{n-(2k+3)}{4k+4} \right\rceil + 1$ 'de alır.

Buna göre $n \equiv (4k+4)s + p$ ve $1 \leq p \leq 4k+3$ olmak üzere r 'de yerine yazalım.

$$r = 2 \left\lceil \frac{n - (2k+3)}{4k+4} \right\rceil + 1 = 2 \left\lceil \frac{(4k+4)s + p - (2k+3)}{4k+4} \right\rceil + 1 = 2 \left(s + \left\lceil \frac{p - (2k+3)}{4k+4} \right\rceil \right) + 1.$$

Böylece;

$$r = \begin{cases} 2s+1, & p \leq 2k+3; \\ 2s+3, & p > 2k+3. \end{cases}$$

elde edilir.

(i) $p \leq 2k+3$ olsun.

Bu durumda $r = 2s+1$ olacağından $f(r) = f(2s+1) = (2k+1) - (\frac{(4k+4)s+p}{2s+1})$ bulunur.

Bundan dolayı;

$$f(r) \leq -2. \quad (2.42)$$

olur.

(ii) $p > 2k+3$ olsun.

Böylece $r = 2s+3$ elde edileceğinden $f(r) = f(2s+3) = (2k+1) - (\frac{(4k+4)s+p}{2s+3})$ olur ve bundan dolayı;

$$f(r) \leq -1. \quad (2.43)$$

elde edilir. (2.42) ve (2.43)'e göre

$$Nr(H_{m,n}) \leq -1. \quad (2.44)$$

sonucu bulunur.

Durum 2: $r > 2 \left\lceil \frac{n-(2k+3)}{4k+4} \right\rceil + 1$ olduğu durumlarda $\omega(H_{m,n}/S) \leq r-1$ ve $c(H_{m,n}/S) \geq 1$ olacağından

$$\omega(H_{m,n}/S) - |S| - c(H_{m,n}/S) \leq r-1 - r - 1 \leq -2. \quad (2.45)$$

olur. (2.44) ve (2.45)'e göre

$$Nr(H_{m,n}) \leq -1. \quad (2.46)$$

elde edilir.

$\omega(H_{m,n}/S^*) = 2 \left\lceil \frac{n-(2k+3)}{4k+4} \right\rceil + 1$ ve $c(H_{m,n}/S^*) = 1$ olacak şekilde $|S^*| = 2 \left\lceil \frac{n-(2k+3)}{4k+4} \right\rceil + 1$ elemanlı bir S^* subversion stratejisi seçilebileceğinden

$$\omega(H_{m,n}/S^*) - |S^*| - c(H_{m,n}/S^*) \geq 2 \left\lceil \frac{n-(2k+3)}{4k+4} \right\rceil + 1 - 2 \left\lceil \frac{n-(2k+3)}{4k+4} \right\rceil - 1 - 1 \geq -1 \quad (2.47)$$

bulunur. (2.46) ve (2.47) 'den ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 10. $m = 5$ ve n tek ($n > 31$) olan $H_{m,n}$ Harary grafi için $H_{5,n}$ 'nin komşu rupture derecesi aşağıdaki gibidir.

$$Nr(H_{5,n}) = \begin{cases} 0, & n \equiv 9 \pmod{12}; \\ -1, & \text{diğer.} \end{cases}$$

İspat. $S \subseteq V(H_{5,n})$ kümesi, $H_{5,n}$ grafinin bir subversion stratejisi ve $|S| = r$ graftan atılan tepe sayısı olsun. n 'nin eleman sayısına bağlı olarak iki durum vardır.

Durum 1: $n \equiv 9 \pmod{12}$ için;

(i) $r \leq \lceil \frac{n-3}{6} \rceil$ olduğu durumlarda $\omega(H_{5,n}/S) \leq r+1$ ve $c(H_{5,n}/S) \geq 1$ olacağından

$$\omega(H_{5,n}/S) - |S| - c(H_{5,n}/S) \leq r+1 - r - 1 \leq 0. \quad (2.48)$$

elde edilir.

(ii) $r \geq \lceil \frac{n-3}{6} \rceil + 1$ olduğunda $\omega(H_{5,n}/S) \leq r-1$ ve $c(H_{5,n}/S) \geq 1$ olacağından

$$\omega(H_{5,n}/S) - |S| - c(H_{5,n}/S) \leq r-1 - r - 1 \leq -2. \quad (2.49)$$

bulunur. (2.48) ve (2.49)'a göre

$$Nr(H_{5,n}) \leq 0. \quad (2.50)$$

olur.

$\omega(H_{5,n}/S^*) = \lceil \frac{n-3}{6} \rceil + 1$ ve $c(H_{5,n}/S^*) = 1$ olacak şekilde $|S^*| = \lceil \frac{n-3}{6} \rceil$ elemanlı bir S^* kümesi seçilebileceğinden

$$\omega(H_{5,n}/S^*) - |S^*| - c(H_{5,n}/S^*) \geq \left\lceil \frac{n-3}{6} \right\rceil + 1 - \left\lceil \frac{n-3}{6} \right\rceil - 1 \geq 0 \quad (2.51)$$

değeri bulunur. (2.50) ve (2.51)'e göre

$$Nr(H_{5,n}) = 0.$$

sonucu elde edilir.

Durum 2: $n \not\equiv 9 \pmod{12}$ için;

(i) $r \leq 2 \lfloor \frac{n-11}{12} \rfloor + 1$ olduğu durumlarda $\omega(H_{5,n}/S) \leq r+1$ ve $c(H_{5,n}/S) \geq 2$ olacağından

$$\omega(H_{5,n}/S) - |S| - c(H_{5,n}/S) \leq r+1 - r - 2 \leq -1. \quad (2.52)$$

elde edilir.

(ii) $r \geq 2 \left\lfloor \frac{n-11}{12} \right\rfloor + 2$ olduğu durumlarda $\omega(H_{5,n}/S) \leq r$ ve $c(H_{5,n}/S) \geq 1$ olacağından

$$\omega(H_{5,n}/S) - |S| - c(H_{5,n}/S) \leq r - r - 1 \leq -1. \quad (2.53)$$

olur. (2.52) ve (2.53)'e göre

$$Nr(H_{5,n}) \leq -1. \quad (2.54)$$

bulunur.

$\omega(H_{5,n}/S^*) = 2 \left\lfloor \frac{n-11}{12} \right\rfloor + 2$ ve $c(H_{5,n}/S^*) = 2$ olacak şekilde $|S^*| = 2 \left\lfloor \frac{n-11}{12} \right\rfloor + 1$ elemanlı $H_{5,n}$ grafinin bir S^* subversion stratejisi seçilebileceğinden

$$\omega(H_{5,n}/S^*) - |S^*| - c(H_{5,n}/S^*) \geq 2 \left\lfloor \frac{n-11}{12} \right\rfloor + 2 - (2 \left\lfloor \frac{n-11}{12} \right\rfloor + 1) - 2 \geq -1. \quad (2.55)$$

bulunur. (2.54) ve (2.55)'e göre

$$Nr(H_{5,n}) = -1.$$

olur. Durum 1 ve Durum 2 'den ispat tamamlanır. □

Tablo 2.2. n tek ve $n \leq 31$ olan $H_{5,n}$ Harary grafinin komşu rupture derecesi

n	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
$Nr(H_{5,n})$	-1	0	-1	-2	-2	-2	-1	0	-1	-1	-1	-2	-1

Yukarıda Tablo 2.2'de $n \leq 31$ (n tek) için $H_{5,n}$ Harary grafinin komşu rupture dereceleri verilmiştir.

Teorem 11. $m = 3$, n tek ve $(n > 12)$ olan $H_{m,n}$ Harary grafi için $H_{3,n}$ 'nin komşu rupture derecesi aşağıdaki gibidir.

a) $n \not\equiv 7 \pmod{12}$ için;

$$Nr(H_{3,n}) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 3, & n \equiv 1 \pmod{6}; \\ \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 2, & n \equiv 3 \pmod{6}; \\ \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 1, & n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

b) $n \equiv 7 \pmod{12}$ için;

$$Nr(H_{3,n}) = 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor.$$

İspat. $S \subseteq V(H_{3,n})$, $H_{3,n}$ grafinin bir subversion stratejisi ve $|S| = r$ graftan atılan tepe sayısı olsun.

a) $n \not\equiv 7 \pmod{12}$ için;

Durum 1: $n \equiv p \pmod{6}$ ve $1 \leq p \leq 5$ olsun.

$r \leq \lceil \frac{n}{6} \rceil - 1$ olduğu durumlarda $\omega(H_{3,n}/S) \leq 2r - 1$ ve $c(H_{3,n}/S) \geq \frac{n-4r}{2r-1}$ olacağından,

$$\omega(H_{3,n}/S) - |S| - c(H_{3,n}/S) \leq 2r - 1 - r - \left(\frac{n-4r}{2r-1}\right) \leq r + 1 + \frac{2-n}{2r-1}$$

$$Nr(H_{3,n}/S) \leq \max_r \left\{ (r+1) + \frac{2-n}{2r-1} \right\}$$

elde edilir.

$f(r) = (r+1) + \frac{2-n}{2r-1}$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan maksimum değerini $r = \lceil \frac{n}{6} \rceil - 1$ 'de alır. Buna göre $r = \lceil \frac{n}{6} \rceil - 1$ için

$$f(r) = f\left(\lceil \frac{n}{6} \rceil - 1\right) = \lceil \frac{n}{6} \rceil - 1 + 1 + \frac{2-n}{2\lceil \frac{n}{6} \rceil - 3} = \lceil \frac{n}{6} \rceil + \frac{2-n}{2\lceil \frac{n}{6} \rceil - 3}.$$

olur. Böylece;

$$Nr(H_{3,n}) < \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 2 \quad (2.56)$$

elde edilir.

Durum 2: $r \geq \lceil \frac{n}{6} \rceil$ olduğu durumlarda $\omega(H_{3,n}/S) \leq \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor$ ve $c(H_{3,n}/S) \geq 1$ olacağından

$$\omega(H_{3,n}/S) - |S| - c(H_{3,n}/S) \leq \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1$$

elde edilir. Bundan dolayı;

$$Nr(H_{3,n}) \leq \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 3, & n \equiv 1 \pmod{6}; \\ \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 2, & n \equiv 3 \pmod{6}; \\ \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 1, & n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases} \quad (2.57)$$

olur. (2.56) ve (2.57) 'den

$$Nr(H_{3,n}) \leq \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 3, & n \equiv 1 \pmod{6}; \\ \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 2, & n \equiv 3 \pmod{6}; \\ \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 1, & n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases} \quad (2.58)$$

bulunur.

$\omega(H_{3,n}/S^*) = \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor$ ve $c(H_{3,n}/S^*) = 1$ olacak şekilde $|S^*| = \lceil \frac{n}{6} \rceil$, elemanlı bir S^* subversion stratejisi seçilebilir ki,

$$\omega(H_{3,n}/S^*) - |S^*| - c(H_{3,n}/S^*) \geq \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1.$$

bulunur ve böylece;

$$Nr(H_{3,n}) \geq \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 3, & n \equiv 1 \pmod{6}; \\ \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 2, & n \equiv 3 \pmod{6}; \\ \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 1, & n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases} \quad (2.59)$$

elde edilir. (2.58) ve (2.59)'den ispat tamamlanır.

b) $n \equiv 7 \pmod{12}$ olduğunda $S = r$ 'nin eleman sayısına göre iki durum vardır.

Durum 1: $r \leq \left\lceil \frac{n-1}{6} \right\rceil - 1$ olduğu durumlarda $\omega(H_{3,n}/S) \leq 2r - 1$ ve $c(H_{3,n}/S) \geq \frac{n-4r}{2r-1}$ olacağından

$$\begin{aligned} \omega(H_{3,n}/S) - |S| - c(H_{3,n}/S) &\leq 2r - 1 - r - \left(\frac{n-4r}{2r-1}\right) \leq r - 1 - \left(\frac{n-4r}{2r-1}\right) \\ Nr(H_{3,n}) &\leq \max_r \left\{ (r+1) + \left(\frac{2-n}{2r-1}\right) \right\} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$f(r) = (r+1) + \frac{2-n}{2r-1}$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan maksimum değerini $r = \left\lceil \frac{n-1}{6} \right\rceil - 1$ 'de alır. r değerini fonksiyonda yerine yazdığımızda,

$$f(r) = f\left(\left\lceil \frac{n-1}{6} \right\rceil - 1\right) = \left\lceil \frac{n-1}{6} \right\rceil - 1 + 1 + \frac{2-n}{2\left\lceil \frac{n-1}{6} \right\rceil - 3} = \left\lceil \frac{n-1}{6} \right\rceil + \frac{2-n}{2\left\lceil \frac{n-1}{6} \right\rceil - 3}$$

sonucu bulunur.

Böylece;

$$Nr(H_{3,n}) < 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 2. \quad (2.60)$$

elde edilir.

Durum 2: $r \geq \left\lceil \frac{n-1}{6} \right\rceil$ olduğu durumlarda, $\omega(H_{3,n}/S) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$ ve $c(H_{3,n}/S) \geq 1$ olacağından

$$\omega(H_{3,n}/S) - |S| - c(H_{3,n}/S) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n-1}{6} \right\rceil - 1 \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor. \quad (2.61)$$

elde edilir.

(2.60) ve (2.61)'e göre

$$Nr(H_{3,n}) \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor \quad (2.62)$$

bulunur.

$H_{3,n}$ grafinın $|S^*| = \frac{n-1}{6}$ elemanlı bir S^* subversion stratejisi seçilebilir ki, $\omega(H_{3,n}/S^*) = \frac{n-1}{3}$ ve $c(H_{3,n}/S^*) = 1$ olacağından

$$\omega(H_{3,n}/S^*) - |S^*| - c(H_{3,n}/S^*) \geq \frac{n-1}{3} - \left(\frac{n-1}{6}\right) - 1 \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor \quad (2.63)$$

bulunur. (2.62) ve (2.63)'den ispat tamamlanır.

$$Nr(H_{3,n}) = 2 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor$$

□

Tablo 2.3. n tek ve $n < 12$ olan $H_{3,n}$ Harary grafinın komşu rupture derecesi

n	5	7	9	11
$Nr(H_{3,n})$	-1	0	-1	0

Yukarıda Tablo 2.3'de $n < 12$ (n tek) için $H_{3,n}$ Harary grafinın komşu rupture dereceleri verilmiştir.

3. SONUÇ

Bir iletişim ağında, bazı merkezler veya merkezler arasındaki hatlar hasar görsen bile iletişimin devam etmesi önemlidir. Zedelenebilirlik, ağın maruz kalabileceği bu tür bozulmalara karşı ağın dayanıklılığını gösterir. Bir ağın oluşabilecek bozulmalara karşı direncinin olabildiğince büyük olması istenir. Bu çalışmada, bu direncin ölçümünü yapabilmek için tanımlanan parametrelere yer verilmiştir.

Minimum ayrıt ile maksimum bağlantılılık sayısına sahip olan Harary Grafının her bir durumu için komşu rupture derecesi hesaplanmış ve ayrıntılı ispatları verilmiştir.

4. KAYNAKLAR

- [1] G. Bacak-Turan and A. Kirlangic, *Neighbor Rupture Degree and the Relations between other Paramaters*. ARS Combinatoria 102 (2011), pp. 333-352.
- [2] C. A. Barefoot and H. R. Entringer, *Vulnerability in graphs: a comparative survey*. J. Combin. Comput. (1987), 25-33pp
- [3] F. Harary, *The Maximum Connectivity of a Graph*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America Vol. 48, No. 7 (Jul. 15, 1962), pp. 1142-1146.
- [4] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 274p
- [5] F. Li, Q. Ye, B. Sheng, *On Integrity of Harary Graphs*. Combinatorial Optimization and Applications Lecture Notes in Computer Science, Volume 5573, 2009, pp 269-278.
- [6] G. Gunther, *Neighbor connectivity in regular graphs*. Discrete Applied Mathematics 11 (1985), pp. 233-243.
- [7] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Macmillan, London, 1976.
- [8] H. Jung, 1978, *On a class of posets and the corresponding comparability graphs*. J. Combin. Theory SE er.B., 1124, 125-133pp.
- [9] M.B. Cozzens, D. Moazzami, *The Tenacity of the Harary Graphs*. J. Combin. Math. Combin. Comput. 16 (1994), pp. 33-56.
- [10] M.B. Cozzens, S.S.Y. Wu, *Vertex-neighbor-integrity of trees*, Ars Combinatoria 43 (1996), pp. 169-180.
- [11] Ouyang, K.Z., Ouyang, K.Y., *Relative Breaktivity of Graphs*. J. Lanzhou University 29(3) (1993), pp. 43-49.
- [12] Y. Li, S. Zhang and X. Li, *Rupture degree of graphs*. International Journal of Computer Mathematics 82(7) (2005), pp. 793-803.
- [13] Z.T. Wei, *On the reliability parameters of networks*. MS Thesis, Northwestern Polytechnical University (2003), pp. 30-40.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ferhan Nihan ALTUNDAĞ

Doğum Yeri ve Yılı : Edirne/Keşan, 1987

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : ferhannihan@cbu.edu.tr

Eğitim Durumu

Lise : Konak Anadolu Lisesi, 2003

Lisans : Çanakkale 18 Mart Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2008

Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015