



GRAFİN UZAKLIK MATRİSİ İLE İLGİLİ SINIR ÇALIŞMALARI

Sevtap HAMURKOPARAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ŞUBAT 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Sevtap HAMURKOPARAN

22/01/2021

GRAFİN UZAKLIK MATRİSİ İLE İLGİLİ SINIR ÇALIŞMALARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Sevtap HAMURKOPARAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2021

ÖZET

Bu çalışmanın amacı herhangi bir G grafinin uzaklık matrisinin (Distance matrix) en büyük büyük özdeğeri için alt ve üst sınır geliştirmektir. Bu kapsamda öncelikle bazı temel tanım ve kavramlara değinilmiş sonrasında literatürdeki ifadeler derlenmiştir. Son olarak yapılan çalışmalardaki sınırlar daha da geliştirilerek yeni teorem ve sonuçlar ispatları ile verilmiştir.

Bilim Kodu : 20401
Anahtar Kelimeler : Graf teori, spektral yarıçap, uzaklık matrisi, randic index
Sayfa Adedi : 51
Danışman : Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

THE STUDY OF BOUNDS FOR DISTANCE MATRIX OF A GRAPH

(M. Sc. Thesis)

Sevtap HAMURKOPARAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2021

ABSTRACT

The aim of this study is to develop a lower and upper bound for the largest eigenvalue of the distance matrix of any G graph. In this context, some basic definitions and concepts were first addressed and then statements in the literature were complied. Finally, the bounds are also developed and exemplified with their proofs.

ScienceCode : 20401
KeyWords : Graph theory, spectral radius, distance matrix, randic index
PageNumber : 51
Supervisor : Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olmaya çalışan çok değerli hocam Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE'ye, hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden hiç esirgemeyen sevgili Aileme, bu süreçte hep birlikte çalıştığım, yardımı ile hep yanımda olan sevgili arkadaşım Özgür KOCAKERİMOĞLU'na teşekkürü borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	5
2.1. Genel Bilgiler.....	5
2.2. Graf Kavramı	8
2.3. Bazı Özel Graflar	11
2.4. Graflar İçin Bazı Matrisler ve Randic İndeksi.....	16
2.4.1. Komşuluk matrisi	16
2.4.2. Uzaklık (distance) matris.....	17
2.4.3. Ağırlıklı uzaklık (distance) matrisi.....	18
2.4.4. Randić index	19
3. YARDIMCI TEOREM VE LEMMALAR.....	21
4. UZAKLIK (DISTANCE) MATRİSİNİN EN BÜYÜK ÖZDEĞERİ İÇİN SINIRLAR.....	27
5. SONUÇ	47
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	51

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Königsberg'in yedi köprüsünün Euler gösterimi.....	2
Şekil 2.1. Graf örnekleri.....	8
Şekil 2.2. Ağırlıklı graf.....	10
Şekil 2.3. Basit graf.....	11
Şekil 2.4. Bağlantılı graf.....	12
Şekil 2.5. 2-Regüler graf.....	12
Şekil 2.6. Yol graf.....	13
Şekil 2.7. Devir graf.....	13
Şekil 2.8. Star graf	14
Şekil 2.9. Tam graf.....	14
Şekil 2.10. İki Parçalı Graf Örnekleri	15
Şekil 2.11. Ağaç Graf Örnekleri	15
Şekil 2.12. İki dereceli Graf Örnekleri.....	16
Şekil 2.13. G grafı	17
Şekil 2.14. G grafı	17
Şekil 2.15. Ağırlıklı G grafı	18
Şekil 2.16. G grafı.....	19

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu tezde kullanılmış, simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler

Açıklamalar

$ \lambda_1 (G)$	G grafının spektral yarıçapı
C_n	n noktalı devir
$K_{m,n}$	İki parçalı tam graf
K_n	n noktalı tam graf
S_n	n noktalı star graf
d_i	i noktasının derecesi
w_{ij}	i ve j noktaları arasındaki ağırlık
$\bar{x}$	Özvektör
$\lambda_1(G)$	G grafının en büyük özdeğeri
$A(G)$	G grafının komşuluk matrisi
$D(G)$	G grafının Distance matrisi
E	Kenarlar kümesi
$G = (V, E)$	Graf
V	Noktalar kümesi
$d(i, j)$	i ve j noktaları arasındaki en kısa uzaklık
e	Grafın kenar sayısı
$i \sim j$	i ve j noktalarının komşuluğu
n	Grafın nokta sayısı

1. GİRİŞ

Graf, günlük hayatta karşılaştığımız problemlerin şekilsel bir gösterimi ve bir modellemesi olup bu problemlerin çözümü için bize görsel olarak kolaylık sağlayan bir yapıdır.

Temel olarak noktalar ve bu noktaları birleştiren çizgilerden oluşmaktadır. Noktaların ve çizgilerin durumlarına göre çeşitli yapılar meydana gelmektedir. Meydana gelen bu yapılara özel graflar denilmiştir. Bunlar arasında tam graf, regüler graf, star graf, devir graf, sayılabilir. Bu yapılar farklılık gösterdiğinden üzerinde yapılan işlemler de farklıdır. Günümüze kadar graf teori üzerine yapılan çalışmalar artarak devam etmiş ve farklı yapılar oluşturulmuştur.

1736 yılında Leonard Euler, "Königsberg'in yedi köprüsü" adlı makalesini yayımlayarak graf teorisinin başlangıcını oluşturmuş ve topoloji ile ilişkisini göstermiştir[1].

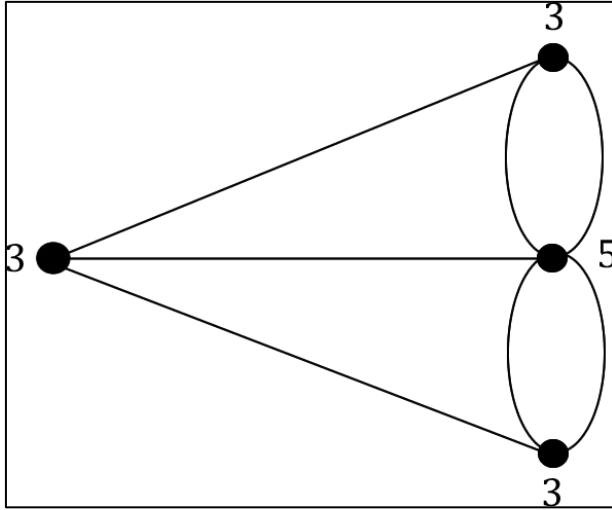
Graf teori 1700 yıllarda birçok matematikçi tarafından ilgi konusu olan "Königsberg'in yedi köprüsü" problemi ile ortaya çıkmıştır. Bu problemde belirtilen Königsberg, 7 ayrı köprü ile birbirine bağlanmış 4 farklı bölümden oluşan Pregel nehrinin kenarına kurulmuş bir şehirdir.

Amaç ise köprüleri yalnızca bir kez kullanarak tüm şehri dolaşmaktır. Bunun mümkün olup olmadığı matematikçiler dahil bir çok kişi tarafından araştırılmıştır.

Bu konuda çalışma yürüten dönemin meşhur matematikçilerinden Leonard Euler dahil kimse böyle bir rota çizememiştir. Fakat çalışmalarına devam eden Euler bunun mümkün olamayacağını teoremiyle ispatlamıştır.

Euler bu problemin ispatını görselleştirerek şu şekilde açıklamıştır. Köprüleri nokta ile belirtmiş, köprüleri birbirine bağlayan kısımları da çizgi ile göstermiştir.

Bu görseli aşağıdaki şekilde verildiği gibi ifade etmiştir.



Şekil 1.1. Königsberg'in yedi köprüsünün Euler gösterimi

Euler belirtilen gezintiyi yapabilmemiz için her noktaya ulaşan çizgilerin toplam sayısının çift sayıda olması gerektiğini savunmuştur. Böylelikle bir noktaya ulaşmak için köprülerden birisi girmek için diğeri ise çıkmak için kullanılacaktı. Fakat bu durumda başlangıç ve bitiş noktaları bu durumun dışında kalmalıydı. Bu şekilde iki durum ortaya çıkmıştır. Bunlar başlangıç ve bitiş noktaları aynı ya da farklı olabilir durumlarıdır. Eğer başlangıç ve bitiş noktaları farklı ise bu iki nokta yalnızca tek bir çizgi ile diğer noktalara yani köprülere bağlanmalıdır. Fakat başlangıç ve bitiş noktaları aynı ise bütün noktalara ulaşan nokta sayısı çift sayıda olması gerekir. Bunun üzerine Euler kendi ismiyle bilinen teoremini ortaya çıkarmıştır.

Bu teoremi Königsberg problemine uygulayan Euler şekildeki noktalara ulaşan çizgi sayılarını 3, 3, 3 ve 5 tane olarak göstermiştir. Yani teoremden belirtildiği gibi çift sayıda değildir. Diğer durumda ise en fazla iki noktaya ulaşan çizgi sayısı tek sayıda olmalıydı. Ancak bütün noktalara ulaşım tek sayıda olmuştur. Bu sebeple Euler ispatıyla bu gezintinin yapılamayacağını göstermiştir [2].

Graf sözcüğü ilk kez 1822 yılında J. J. Sylvester tarafından kullanılmıştır [1].

1845 yılında Gustav Kirchhoff, elektrik devrelerinde akım ve gerilimleri hesaplamaya yardımcı olan ve kendi ismiyle anılan ünlü devre kuramlarını graf gösterimiyle yayımlamıştır [1]. 1852 yılında Francis Guthrie, yanıtlanması zor olan grafta dört renk problemini ortaya atmıştır [1]. 1927 yılında Pontryagin, 1930 yılında ise K. Kuratovski VLSI

teknolojisinde önemli kullanım alanı bulunan düzlemsel grafların özelliklerini bulmuşlardır [1]. 1936 da D. König, graf teorisine ilişkin ilk kitabı yayımlanmıştır [1].

Graf Teori bünyesine daha birçok problemi dahil eder. Bunlar arasında pazarlamacı problemi, labirent problemleri, tesisat problemi, network problemleri, el sıkışma problemi, el kaldırmadan çizibilme problemi, postacı problemleri gösterilebilir. Graf teori ile bu problemlere farklı açıdan bakılmıştır.

Aynı zamanda graf teorisinin geniş bir kullanım alanı vardır. Matematik dışında Fizik, Kimya gibi temel bilim dallarında problemin basit bir şekilde gösterilmesine veya çözümüne yardımcı olur. Ulaşımda otoyolların ve havayollarının güzergahının gösterilmesinde; elektrik-elektronik mühendisliğinde devrelerin gösterilmesinde; bilgisayar bilimlerinde ağları, dosya dizinleri, internet, veri tabanı gibi alanlarda da graf teoriden yararlanılır.

Uzaklık matrisi ilk olarak 1969 yılında Frank Harary tarafından tanımlanmıştır. Randic index ise 1975 yılında Milan Randić tarafından tanımlanmıştır. Sonrasında üzerine yapılan çalışmalar gün geçtikçe artmıştır. Uzaklık, çeşitli mesafe ölçüleri kullanılarak hesaplanabilir. Böylece uzaklık matrisi sadece metre olarak bilinen öklid mesafelerini değil aynı zamanda örneğin topolojik mesafeleri veya ilintili mesafeleri de içerebilir. Uzaklık matrisi basit olarak bir kümenin elamanları arasında çift olarak alınan en kısa mesafeleri içeren bir kare matristir. İlgili uygulamaya bağlı olarak bu matrisi tanımlamak için kullanılan mesafe metrik olabilir veya olmayabilir. N eleman varsa bu matrisin boyutu $N \times N$ boyutunda olacaktır.

Uzaklık kavramının günümüzde birçok kullanım alanı mevcuttur. Mobil hesaplamının yaygın olarak benimsenmesinden önce, bir uzaklık matrisinin ana uygulaması, seyahatlar ve taşımacılığın planlanmasına yardımcı olmak için şehirlerarasındaki en kısa mesafeyi graf ile göstermekti. Veri analizinde uzaklık matrisleri temel olarak hiyerarşik kümeleme ve çok boyutlu örnekleme yapılırken veri formatı olarak kullanılır. Veriler toplama sırasında bir uzaklık matrisine kaydedilebilir. Örneğin, bazı algılama çalışmalarında, insanlardan nesne çiftleri arasındaki psikolojik mesafeyi derecelendirmeleri istenir ve bu uzaklıklar bir uzaklık matrisine kaydedilir. Bu şekilde veriler daha kolaylıkla yorumlanabilir.

Bir bütün olarak bakıldığında graf teori verilerin toplanması ve yorumlanmasında bizlere kolaylıklar sağlamaktadır.

Bu tezdeki amacımız ise Randic index ve Uzaklık matrisi için sınırlar bulmaktır.



2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Graf üzerine temel kavramlar ve grafin bazı temel özellikleri ile bazı lineer cebir bilgileri bu bölümde verilmiştir.

2.1. Genel Bilgiler

2.1. Tanım

A , bir $n \times n$ kare matris ve $x \neq 0$ bir $n \times 1$ tipinde matris olmak üzere,

$$Ax = \lambda x \quad (2.1)$$

olacak biçimde λ skaleri mevcut olsun. (2.1) denklemi, $I, n \times n$ birim matris olmak üzere,

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir. (2.2) denklem sisteminin aşıkâr olmayan çözümü,

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0 \quad (2.3)$$

olması halinde mevcuttur.

$\det(A - \lambda I)$ 'nın hesaplanması ile λ 'ya bağlı n -inci dereceden monik bir polinom elde edilir. Bu polinoma A 'nın karakteristik polinomu denir ve $K_A(\lambda)$ şeklinde gösterilir. Yani $K_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ 'dır.

Bu karakteristik polinomun köklerine A matrisinin öz değerleri denir.

$K_A(\lambda) = 0$, n -inci dereceden bir denklem olduğundan cebirin esas teoreminden n - tane köke sahiptir. Bu köklerin hepsinin farklı olma zorunluluğu yoktur.

$$Ax = \lambda x \text{ veya } (A - \lambda I)x = 0 \quad (2.4)$$

denkleminde sıfırdan farklı olan x çözümlerine A 'nın λ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri denir. Özdeğer ve özvektörlerin bu tanımından

$$Ax_i = \lambda x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

temel formülü elde edilir [3].

2.2. Tanım

A bir matris, A matrisine ait öz değerler $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olmak üzere bu matrise ait öz değerlerin kümesi;

$spek(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ şeklinde gösterilir.

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} \quad (2.6)$$

ifadesine ise A matrisinin spektral yarıçapı denir [3].

2.3. Tanım

A ve B $n \times n$ tipinde iki matris olmak üzere

$$B = P^{-1}AP \quad (2.7)$$

olacak şekilde tekil olmayan (yani $\det P \neq 0$) bir P matrisi varsa, o zaman A ve B matrislerine benzerdir denir.

Benzer matrisler denk matrislerin özel bir halidir ve determinantları aynıdır. Benzer matrisler aynı karakteristik polinoma sahiptir ve dolayısıyla aynı özdeğerlere sahiptir [3].

2.4. Tanım

$A = (a_{ij})$ matrisi elemanları karmaşık sayılar olan kare matris olmak üzere,

$$A^T = \bar{A} \quad (2.8)$$

eşitliği sağlanıyorsa, A matrisine hermityen matris denir [3].

2.5. Tanım

$A, n \times n$ Hermityen matris olsun. Sıfırdan farklı tüm $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$x^*Ax > 0 \quad (2.9)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa A matrisi pozitif tanımlı matristir. Eğer

$$x^*Ax \geq 0 \quad (2.9)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa A matrisi pozitif yarı tanımlı matristir. Pozitif tanımlı bir matris aynı zamanda pozitif yarı tanımlı matristir. Eğer A tekil olmayan pozitif yarı tanımlı matris ise pozitif tanımlı matristir [4].

2.6. Tanım

Bir $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisinin her elemanı negatif olmayan bir reel sayı ise A matrisine negatif olmayan matris denir. Yani her i, j için $a_{ij} \geq 0$ dır. Negatif olmayan matrisler bu nedenle pozitif matrislerin bir üst kümesidir [5].

2.7. Tanım

Herhangi bir $n \times n$ boyutunda A matrisi için P^TAP matrisi üst blok üçgen olacak şekilde aynı boyutta bir P matrisi varlığı söz konusu ise A matrisine indirgenebilir matris adı verilir. İndirgenebilirliğin varlığından söz edemediğimiz bir matrise ise indirgenemez matris denir [5].

2.2. Graf Kavramı

2.8. Tanım

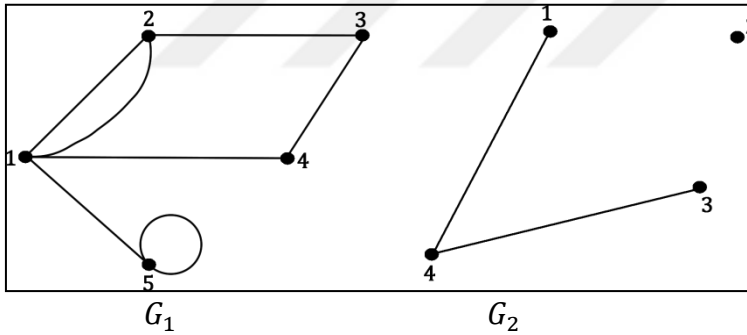
Elemanlarının nokta olarak belirlendiği sayılabilir sayıda, boştan farklı $V = \{1, 2, \dots, n\}$ noktalar kümesi ve elemanlarının kenar olarak isimlendirildiği sayılabilir sayıda E kenarlar kümesinden oluşan (V, E) ikili yapısına graf denir ve $G = (V, E)$ ya da kısaca G ile gösterilir.

Bu da

$$E = \{\{i, j\} : i, j \in V\} \text{ ya da } E = \{ij : i, j \in V\}$$

şeklinde tanımlanır [6].

Graf bakıldığında noktalar ve bu noktaların birbirine bağlayan kenarlardan oluşan bir yapıdır.



Şekil 2.1. Graf örnekleri

Şekil 2.1 ile verilen G_1 ve G_2 grafları sırasıyla 5 nokta 7 kenar ve 4 nokta 2 kenar içerir.

2.9. Tanım

G grafının herhangi iki noktası i ve j olsun. Bu noktalar arasında en az bir kenar varsa i ve j noktalarına komşudur denir ve $i \sim j$ ile gösterilir [6].

2.10. Tanım

Bir grafin herhangi bir i noktasına bağlı kenar sayısına i noktasının derecesi denir ve d_i şeklinde gösterilir [6].

Şekil 2.1 ile verilen G_1 grafi için $d_1=4$, $d_2=3$, $d_3=2$, $d_4=2$ ve $d_5=3$ ve

G_2 grafi için $d_1=1$, $d_2=0$, $d_3=1$, ve $d_4=2$ dir.

2.11. Tanım

Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan kenara ilmek(loop) denir [6].

Şekil 2.1 ile verilen G_1 grafi için e_5 bir ilmektir.

Bir grafta herhangi bir noktaya bağlı kenar sayısı 0 (sıfır) ise bu noktaya *izole nokta*, 1 (bir) ise bu noktaya *pendant nokta* denir [6].

Şekil 2.1 ile verilen G_2 grafi için e_2 bir izole nokta, e_1 ve e_3 bir pendant noktadır.

2.12. Tanım

Bir G grafında en az sayıda komşuya sahip olan noktaya *minimum dereceli nokta* denir ve bu noktanın derecesi $\delta(G)$ ile gösterilir. En fazla sayıda komşuya sahip olan noktaya ise *maksimum dereceli nokta* denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir [7].

2.13. Tanım

Bir graf sayılabilir sayıda nokta ve kenara sahip ise *sonlu graf*, aksi durumda *sonsuz graf* olarak adlandırılır [6].

Bir G grafinin m tane kenarı ve $v_1, v_2, \dots, v_n$ ile gösterilen n tane noktası olsun. Bu grafin noktalarının dereceleri toplamı kenar sayısının iki katına eşittir. Matematiksel olarak

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{i=1}^n d_i = 2m$$

şeklinde ifade edilebilir [6].

Bu tez çalışmamızda basit ve sonlu grafları kullanacağız.

2.14. Tanım

Bir $G=(V, E)$ grafinin i ve j noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğuna i ve j noktaları arasındaki *uzaklık (distance, mesafe)* denir ve $d(i, j)$ ya da d_{ij} şeklinde gösterilir [8].

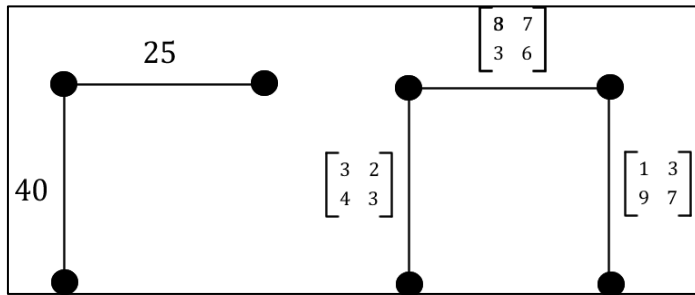
2.15. Tanım

Bir grafin bütün kenarlarına pozitif reel sayı yada pozitif tanımlı matris verilerek meydana getirilen grafa *ağırlıklı graf* denir. Kenar ağırlığı w_{ij} şeklinde gösterilir.

Bir noktanın ağırlığı ise;

$$w_i = \sum_{i \sim j} w_{ij}$$

biçiminde ifade edilir [6].



Şekil 2.2. Ağırlıklı graf

2.16. Tanım

G grafinin her nokta ikilisi arasındaki maksimum uzaklığa G grafinin *çapı (diameter)* denir ve *çap* (G) veya $diam(G)$ ile gösterilir [6].

2.17. Tanım

G grafının her nokta ikilisi arasındaki minimum uzaklığa G grafının yarıçapı (radius) denir ve $rad(G)$ ile gösterilir [6].

2.18. Tanım

Bir grafın noktalar kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun. Grafın herhangi v_i noktasından başlayıp ardı ardına p kenarın dizilmesiyle oluşan

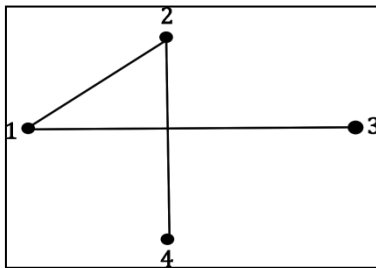
$$v_1 v_3, v_3 v_2, v_2 v_1, \dots, v_{n-1} v_n$$

formuna G 'de p -uzunluğundaki bir *yürüme* denir. Eğer bir yürümede $i \neq j$ için $v_i \neq v_j$ şartı sağlanıyorsa bu özel yürümeye *yol* denir. Herhangi bir G grafında herhangi bir noktadan başlayıp yine aynı noktada sonlanan yürümeye *kapalı yürüme*, başlangıç ve bitiş noktaları dışında kalan tüm noktaları farklı olan kapalı yürümeye de *devir* denir [9].

2.3. Bazı Özel Graflar

2.19. Tanım

Bir G grafında rastgele seçilen iki noktası arasında katlı kenar veya ilmek (loop) yoksa bu grafa basit graf denir [6].

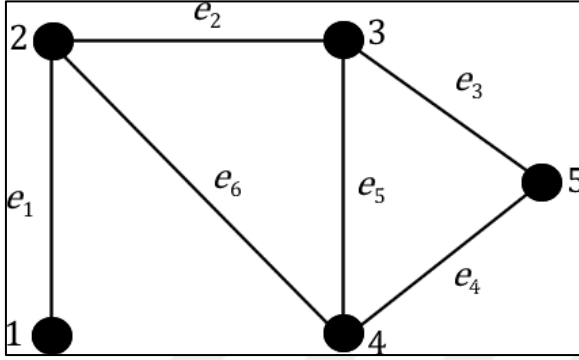


Şekil 2.3. Basit graf

Şekil 2.3 ile verilen grafa rastgele seçtiğimiz iki noktası arasında katlı kenar ve ilmek (loop) bulunmadığından basit graftır.

2.20. Tanım

Bir G grafi için $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ noktalar kümesi olsun. G grafinin v_i ve v_j noktaları arasında bir yol var ise v_i ve v_j noktalarına *bağlantılıdır* denir. Eğer G grafindeki bütün nokta ikilileri arasında bir yol çizilmiş ise G grafına *bağlantılı graf* denir. Bağlantılılık bağıntısı V üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $V_1, V_2, V_3, \dots, V_k, V$ nin denklik sınıfları olmak üzere $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$ alt graflarına G grafinin *bileşenleri* denir. $r = 1$ durumunda G grafi bağlantılıdır, aksi durumda ise G grafi için r tane bileşene sahip *bağlantısız* bir graftır denir [9].

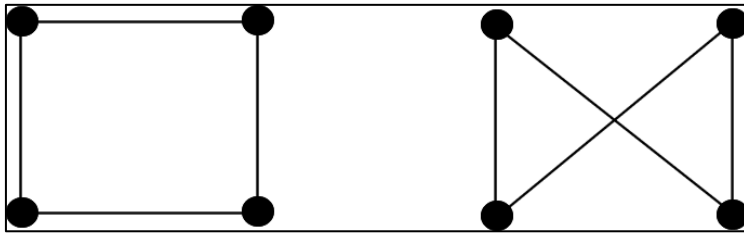


Şekil 2.4. Bağlantılı graf

Şekil 2.4 ile verilen G grafi için $1e_12e_23e_35e_44e_53e_22$ bir yürüme, $1e_12e_23e_35e_4$ bir yol ve $2e_23e_54e_62$ kapalı bir yoldur.

2.21. Tanım

Bir G grafinde tüm noktaların dereceleri birbirine eşit ise yani $\forall v_i \in V(G)$ için $d(v_i) = r$ ise G grafına *r -regüler graf* denir [6].



Şekil 2.5. 2-Regüler graf

Şekil 2.5 ile verilen grafların her bir noktasının derecesi 2 olduğundan bu graflar 2- dereceli regüler graflardır.

2.22. Tanım

$v_1, v_2, \dots, v_n$ birbirinden farklı noktaları olsun.

Ardışık $v_1v_3, v_3v_2, v_2v_1, \dots, v_{n-1}v_n$ kenarlarına sahip olan bir grafa *yol graf* denir.

n tane noktaya sahip bir yol grafi P_n ile gösterilir.

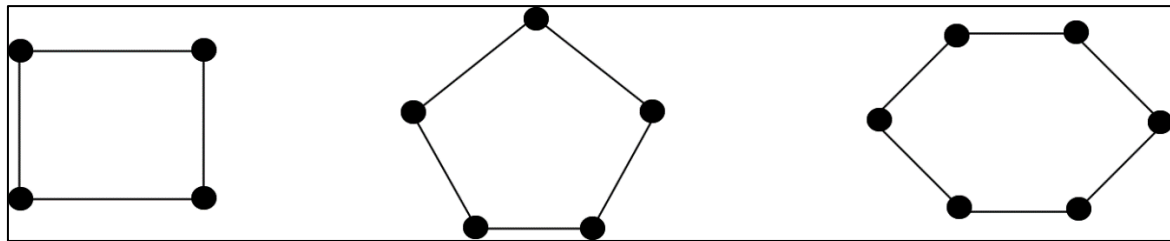
P_n grafında n nokta ve $n-1$ kenar bulunmaktadır. v_1 ve v_2 noktalarına P_n yol grafının uç noktaları veya uçları, kenar sayısına da P_n yol grafının uzunluğu denir [9].



Şekil 2.6. Yol graf

2.23. Tanım

Bir grafta seçilen bir noktadan başlayıp tekrar aynı noktada bitirilen yola devir denir ve n tane noktaya sahip bir devir C_n ile gösterilir [6].

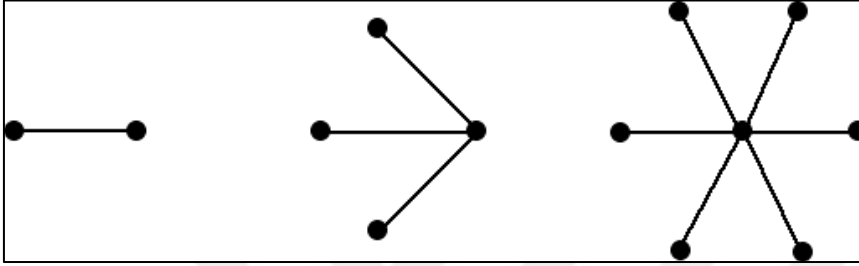


Şekil 2.7. Devir graf

2.24. Tanım

Bir merkezi nokta ile her biri sadece bu noktayı birleştirilen uç noktalardan oluşan grafa *yıldız (star) graf* denir. Nokta sayısı n olan bir yıldız grafi S_n ile gösterilir ve kenar sayısı da $n-1$ 'dir [6].

S_n grafinda merkezdeki köşenin derecesi $n-1$, diğerk köşelerin derecesi 1 olur.

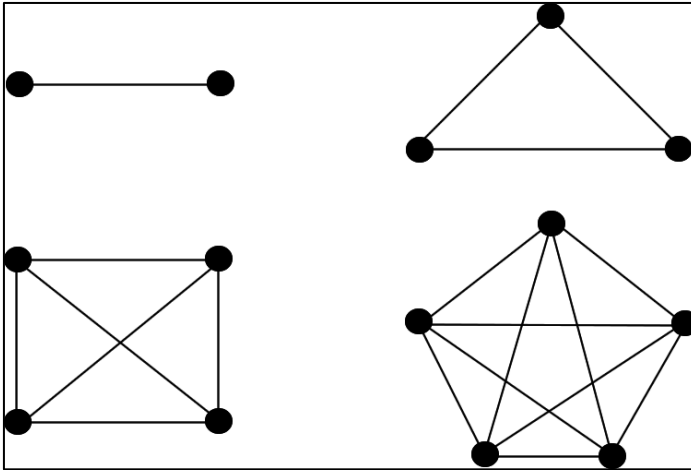


Şekil 2.8. Star graf

2.25. Tanım

Bir grafta her bir nokta ikilisi birbirine komřu olarak belirtilmiřse bu *tam graf* olarak isimlendirilir.

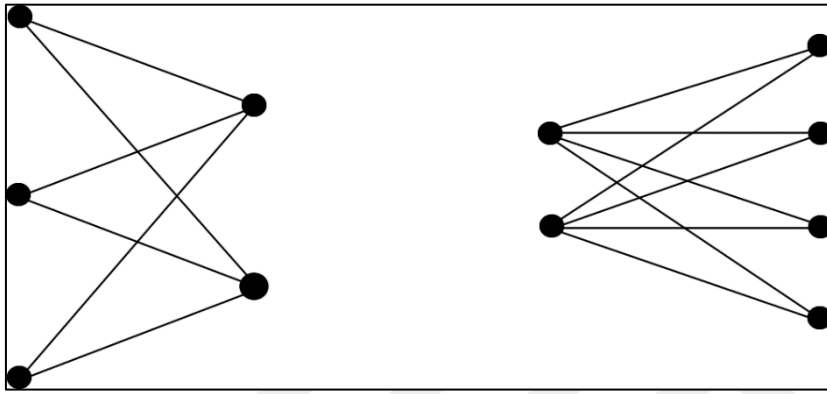
n noktaya sahip bir tam graf K_n ile gösterilir. n noktalı bir tam grafın kenar sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$ ve nokta derecesi de $n-1$ 'dir [6].



Şekil 2.9. Tam graf

2.26. Tanım

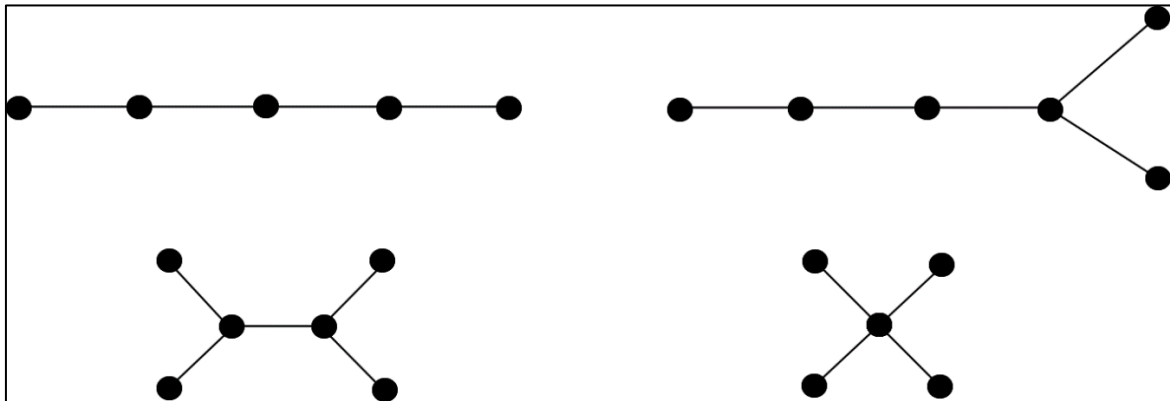
Bir grafın nokta kümesi V_1 ve V_2 şeklinde iki kümeye ayrılmış olsun. Eğer kenarları V_1 deki noktalarla V_2 deki noktaların birleştirilmesiyle oluşuyorsa, bu grafa *iki parçalı graf* denir. V_1 ve V_2 deki tüm noktalar karşılıklı olarak birbirleriyle birleştirilmiş ise bu tür graflara *iki parçalı tam graf* denir. $|V_1| = m$ ve $|V_2| = n$ olan iki parçalı tam graf, $K_{m,n}$ şeklinde gösterilir. Özel olarak $K_{1,n}$ grafına da star graf denir [6].



Şekil 2.10. İki Parçalı Graf Örnekleri

2.27. Tanım

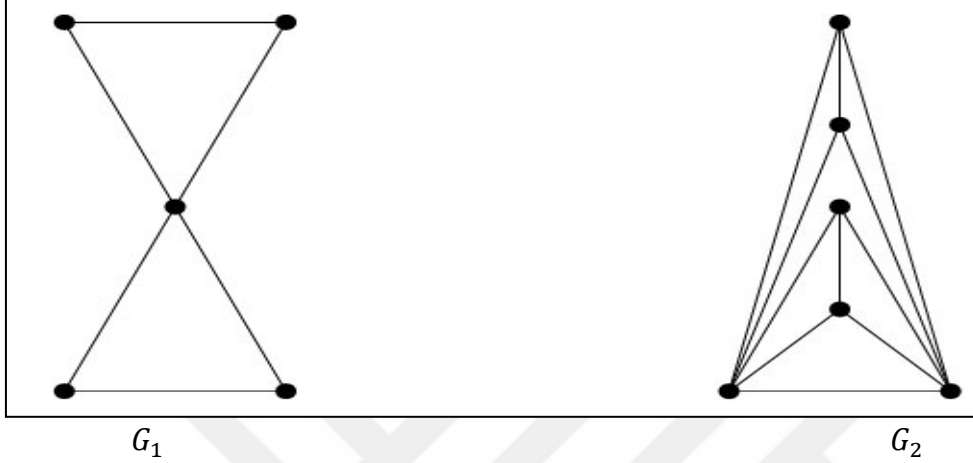
Bir bağlantılı graf içerisinde hiç devir yoksa buna *ağaç graf* denir. Ağaç graflar T ile gösterilir. Bir T ağaç grafının köşe sayısı n iken kenar sayısı $n-1$ 'e eşittir [6].



Şekil 2.11. Ağaç Graf Örnekleri

2.28. Tanım

Bütün noktaları sadece iki dereceye sahip olan graflara bidegreed graf (iki dereceli) denir [6].



Şekil 2.12. İki dereceli Graf Örnekleri

Şekil 2.12. de G_1 grafında dört noktasının derecesi 2 birinin derecesi 4'tür. G_2 grafında ise dört noktasının derecesi 3, iki noktasının derecesi 5'tir.

2.4. Graflar İçin Bazı Matrisler ve Randic İndeksi

2.4.1. Komşuluk matrisi

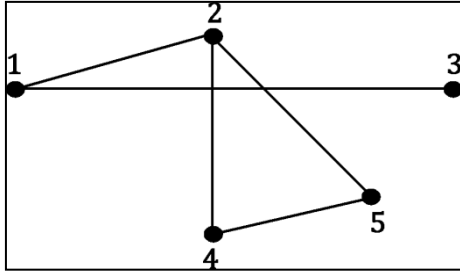
G , n tane noktaya sahip bir graf ise komşuluk matrisi $A(G)$

$A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ biçiminde ifade edilir. Elemanları ise;

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; & i \sim j \\ 0; & \text{aksi durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir. Komşuluk matrisi reel, simetrik bir matris olduğundan tüm öz değerleri reeldir [6].

Örneğin;



Şekil 2.13. G grafi

Şekildeki G grafinin komşuluk matrisi;

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi $A(G)$ komşuluk matrisi $n \times n$ boyutunda reel simetrik bir matristir.

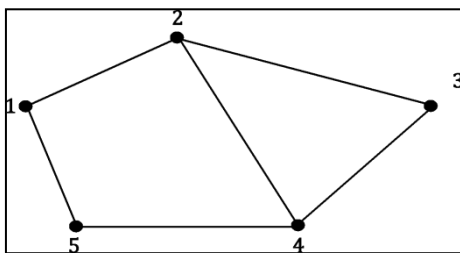
2.4.2. Uzaklık (distance) matris

Uzaklık matrisi 1969 yılında Frank Harary tarafından tanımlanmıştır.

G , bağlantılı bir graf noktalar kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve d_{ij} , i ve j noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğu ise G grafinin uzaklık matrisi $D(G)$ aşağıdaki gibi tanımlanır [8].

$$D(G) = \begin{cases} d_{ij} & , i \neq j \\ 0 & , i = j \end{cases}$$

Örneğin;



Şekil 2.14. G grafi

Şekildeki G grafinin uzaklık matrisi;

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi $D(G)$ uzaklık matrisi $n \times n$ boyutunda reel simetrik bir matristir.

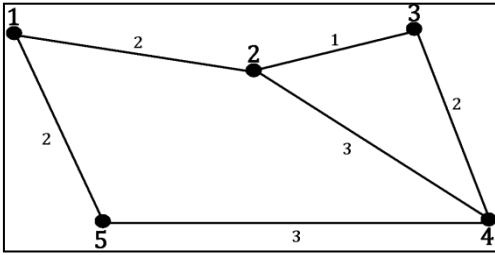
2.4.3. Ağırlıklı uzaklık (distance) matrisi

G ağırlıklı grafin uzaklık matrisi şu şekilde tanımlanır.

$$[D_{ew}]_{ij} = \begin{cases} w(P_{ij}) & ; i \neq j \\ 0 & ; d. d \end{cases}$$

$w(P_{ij})$, G ağırlıklı grafinde i ve j noktaları arasındaki yol boyunca ağırlıkların minimum olacak şekilde toplanmasıyla elde edilir [8].

Örneğin;



Şekil 2.15. Ağırlıklı G grafi

Şekildeki G ağırlıklı grafinin uzaklık matrisi;

$$[D_{ew}]_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi $[D_{ew}]_{ij}$ matrisi $n \times n$ boyutunda kare simetrik bir matristir.

2.4.4. Randić index

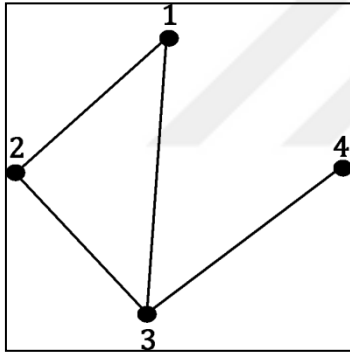
Randić indeksi ilk olarak 1975 yılında Milan Randić tarafından branching (dallanma) indeksi altında tanıtıldı. İlk olarak doymuş hidrokarbonların karbon-atom iskeletinin dallanma derecesini ölçmek için kullanılmıştır.

$G = (V, E)$ bağlantılı grafında $R(G)$ Randić indeksi şu şekilde tanımlanır:

$$R(G) = \sum_{i \sim j} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}$$

Burada d_i ve d_j sırasıyla i ve j noktalarının dereceleridir. Derece ise noktanın kendisini diğer noktalarla birleştiren kenar sayısına eşittir [6].

Örneğin;



Şekil 2.16. G grafi

Şekildeki G grafinın Randić indeksi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} R = R(G) &= \sum_{i \sim j} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{d_1 d_2}} + \frac{1}{\sqrt{d_1 d_3}} + \frac{1}{\sqrt{d_2 d_3}} + \frac{1}{\sqrt{d_3 d_4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1}} \cong 1,8938 \end{aligned}$$

Görüldüğü üzere Randić indeksi noktaların dereceleri ile ilgilidir.

Kimya dalında çok defa yararlanılan Randić indeksi bize özellikle karbon atomlarının doymuşluk durumu hakkında bilgi vermektedir.



3. YARDIMCI TEOREM VE LEMMALAR

Bu bölümde önce bazı temel lemmaları ve sonuçları belirtip ardından teoremleri vereceğiz.

3.1. Özellik

G , n tane nokta ve e tane kenara sahip basit yönsüz bir graf olsun. G grafinin nokta kümesi $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ve $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için v_i noktasının derecesi $d_i = \deg(v_i)$ olarak gösterilsin. $A(G)$, G grafinin komşuluk matrisi olduğunu düşünelim. Her $n \times n$ boyutunda A matrisi için $\sigma(A)$ spektrumu A nın bütün özdeğerlerinin ve özdeğerlerinin mutlak değerce en büyüğü olan $r_\sigma(A)$ spektral yarıçapının kümesidir. Reel ve simetrik bir matris olan $A(G)$ nin n tane reel özdeğeri vardır. Yani;

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_{i+1}(G), i = 1, 2, \dots, n - 1 \text{ dir.}$$

$\lambda_1(G)$, G nin spektral yarıçapıdır. Yani,

$$\lambda_1(G) = r_\sigma(A) \text{ dir.}$$

$W(A)$ olarak ifade edilen, $n \times n$ boyutlu reel simetrik A matrisinin sayısal ağırlığı şu şekilde gösterilir:

$$W(A) = \{x^t A x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1\}. \quad (3.1)$$

Her $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$ ile $x \in \mathbb{R}^n$ için $\lambda_n(G) \leq x^t A(G) x \leq \lambda_1(G)$ dir. Ayrıca

$$\lambda_1(G) = \sup \left\{ x^t A x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1 \right\}$$

ve

$$\lambda_n(G) = \{x^t A x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1\} \text{ dir [10].}$$

3.2. Lemma

A , $n \times n$ boyutlu negatif olmayan bir matrisi ve en büyük özdeğeri $\rho(A)$ için,

$$\min_{1 \leq i \leq n} r_i \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} r_i \quad (3.2)$$

dir. Eğer A indirgenemezse, eşitliğin sağlanması sadece her bir satır toplamının yani her r_i nin birbirine eşit olması durumunda sağlanır [11].

3.3. Lemma

En büyük öz değeri (mutlak olarak) ρ_1 olan $n \times n$ boyutlu Hermityen bir matris olsun. Her $\bar{x} \in \mathbb{R}^n (\bar{x} \neq \bar{0})$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^n (\bar{y} \neq \bar{0})$ için spektral yarıçap $|\rho_1|$ olmak üzere

$$|\bar{x}^t B \bar{y}| \leq |\rho_1| \sqrt{\bar{x}^t \bar{x}} \sqrt{\bar{y}^t \bar{y}} \quad (3.3)$$

dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $\bar{x}$ in ρ_1 e karşılık gelen B matrisinin bir özdeğeri olması ve bazı $\alpha \in \mathbb{R}$ ler için $\bar{y} = \alpha \bar{x}$ olmasıdır [12].

3.4. Lemma

$B_1, B_2, \dots, B_k$ n mertebeli pozitif tanımlı matrisler ve $B = \sum_{i=1}^k B_i$ olsun. Her i için $\bar{x}$, $\rho_1(B_i)$ en büyük özdeğerine karşılık gelen her B_i nin özvektörü ise, $\bar{x}$ aynı zamanda $\rho_1(B)$ en büyük özdeğerine karşılık gelen B nin de bir özvektörüdür [13].

3.5. Teorem

G basit, bağlantılı ve ağırlıklı bir graf ve ρ_1 , G nin en büyük özdeğeri (mutlak olarak) olsun. ρ_1 , G nin spektral yarıçapıdır. Öyleyse,

$$\rho_1 \leq \max_{i \sim j} \left\{ \sqrt{\sum_{k:k \sim i} \rho_1(w_{ik}) \sum_{k:k \sim j} \rho_1(w_{jk})} \right\} \quad (3.4)$$

şeklindedir. Burada w_{ij} , ij kenarının p mertebeli pozitif tanımlı ağırlık matrisidir. Ayrıca eşitliğin sağlanması için sadece;

- (i) G nin regüler-ağırlıklı veya G nin iki parçalı semiregüler-ağırlıklı bir graf olmasıdır.
- (ii) $\forall i, j$ için, w_{ij} nin $\rho_1(w_{ij})$ en büyük özdeğerine karşılık gelen ortak bir özvektöre sahip olması durumlarında sağlanır [13].

3.6. Lemma

G , n tane nokta ve e kenara sahip bir graf olsun. G nin komşuluk matrisinin bir özdeğeri λ olduğunu düşünelim. Bu λ özdeğerine karşılık gelen özvektör $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^t$ ise;

$$\lambda x_i = \sum_{j, v_i \sim v_j} x_j \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ için} \quad (3.5)$$

şeklindedir [10].

3.7. Teorem

G , n noktalı e kenarlı basit bir graf olduğunu düşünelim. $\lambda_1(G)$, $A(G)$ komşuluk matrisinin en büyük özdeğeri ve d_i , v_i noktasının derecesi ise;

$$\lambda_1(G) \leq \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j, v_i \sim v_j} d_j} \quad (3.6)$$

şeklindedir [10].

3.8. Teorem

G , n noktalı ve dereceleri $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ olan basit bağlantılı bir graf olduğunu düşünelim. G nin spektral yarıçapı $\rho(G)$ ise;

$$\rho(G) \leq \frac{d_i - 1 + \sqrt{(d_i + 1)^2 + 4(i-1)(d_1 - d_i)}}{2} \quad (3.7)$$

dir. Burada bahsedilen i , $1 \leq i \leq n$ aralığındadır. Burada i için iki durum söz konusudur.

- (i) $i = 1$ ise eşitlik yalnızca G nin regüler graf olması durumunda sağlanır.
- (ii) $2 \leq i \leq n$ ise eşitlik yalnızca G nin ya regüler graf ya da bidegreed graf

$(d_1 = d_2 = \dots = d_{i-1} = n - 1$ ve $d_i = \dots = d_n = \delta)$ olması ile sağlanır [14].

3.9. Teorem

G , n noktalı ve dereceleri $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ olan basit bağlantılı bir graf olsun.

G nin spektral yarıçapı $\rho(G)$ ise;

$$\rho(G) \leq \frac{d_i - 1 + \sqrt{(d_i + 1)^2 + 4 \sum_{l=1}^{i-1} (d_l - d_i)}}{2} \quad (3.8)$$

dir. Burada bahsedilen i , $1 \leq i \leq n$ aralığındadır. Burada i için iki durum söz konusudur.

- (i) $i = 1$ ise eşitlik yalnızca G nin regüler graf olması durumunda sağlanır.
- (ii) $2 \leq i \leq n$ ise eşitlik yalnızca G nin ya regüler graf ya da bidegreed graf

$(d_1 = d_2 = \dots = d_{i-1} = n - 1$ ve $d_i = \dots = d_n = \delta)$ olması ile sağlanır [15].

3.10. Teorem

$M = (m_{ij})$ köşegen elemanları 0 (sıfır) olan $n \times n$ boyutunda negatif olmayan indirgenemez bir matris, $\rho(M)$, M nin en büyük özdeğeri ve

$s_1, s_2, \dots, s_n$ ($s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$) satır toplamaları ve $a = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{m_{ij}\}$ olsun.

Bu durumda,

$$\rho(M) \leq \frac{s_i - a + \sqrt{(s_i + a)^2 + 4a(i-1)(s_1 - s_i)}}{2} \quad (3.9)$$

dir. Burada bahsedilen i , $1 \leq i \leq n$ aralığındadır. Burada i için iki durum söz konusudur. (i) $i = 1$ ise eşitlik yalnızca M nin bütün satır toplamalarının eşit olması durumunda sağlanır.

(ii) $2 \leq i \leq n$ ise eşitlik sadece $s_1 = s_2 = \dots = s_{i-1} > s_i = \dots = s_n$ ve $1 \leq l \leq n$ ve

$1 \leq j \neq l \leq i - 1$ için $m_{ij} = a$ olması durumlarında sağlanır[16].

3.11. Sonuç

G , n noktalı basit bağlantılı ve satır toplamaları $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ olan bir graf olsun. G nin çapı d olmak üzere

$$\rho(D(G)) \leq \frac{s_i - d + \sqrt{(s_i + d)^2 + 4d(i-1)(s_1 - s_i)}}{2} \quad (3.10)$$

dir. Burada bahsedilen i , $1 \leq i \leq n$ aralığındadır. Ayrıca eşitlik sadece G nin uzaklık regüler grafı olması ile sağlanır [16].

3.12. Teorem

$M = (m_{ij})$ köşegen elemanları 0 (sıfır) olan $n \times n$ boyutunda negatif olmayan indirgenemez bir matris, $\rho(M)$, M nin en büyük özdeğeri ve $s_1, s_2, \dots, s_n$ ($s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$) satır toplamaları ve $a = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{m_{ij}\}$ olsun. Bu durumda

$$\rho(M) \leq \frac{s_i - d + \sqrt{(s_i + d)^2 + 4d \sum_{l=1}^{i-1} (s_l - s_i)}}{2} \quad (3.11)$$

dir. Burada bahsedilen i , $1 \leq i \leq n$ aralığındadır. Burada i için iki durum söz konusudur.

(i) $i = 1$ ise eşitlik sadece M nin satır toplamalarının eşit olması ile sağlanır.

(ii) $2 \leq i \leq n$ ise eşitlik sadece $s_1 = s_2 = \dots = s_{i-1} > s_i = \dots = s_n$ ve $1 \leq l \leq n$ ve

$1 \leq j \neq l \leq i - 1$ için $m_{ij} = a$ olması durumlarında sağlanır [16].

3.13. Sonuç

G , n noktalı basit bağlantılı ve satır toplamaları $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ olan bir graf olsun.

G nin çapı d olmak üzere

$$\rho(M) \leq \frac{s_i - d + \sqrt{(s_i + d)^2 + 4d \sum_{l=1}^{i-1} (s_l - s_i)}}{2} \quad (3.12)$$

dir. Burada bahsedilen i , $1 \leq i \leq n$ aralığındadır. Ayrıca eşitlik yalnızca G nin uzaklık regüler grafi olması ile sağlanır [16].

4. UZAKLIK (DISTANCE) MATRİSİNİN EN BÜYÜK ÖZDEĞERİ İÇİN SINIRLAR

4.1. Özellik

G bir ağırlıklı graf olsun. G nin ağırlıklı Uzaklık matrisi için Randić indeksini

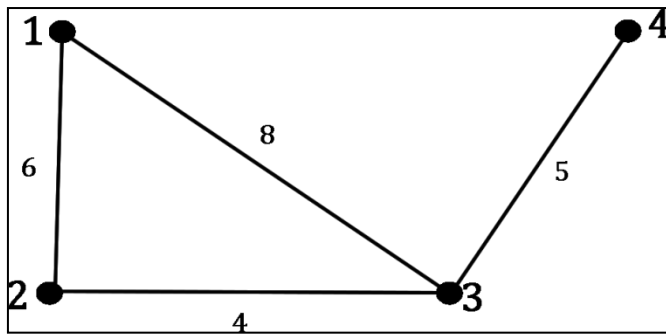
$$RI_w(G) = \sum_{i \sim j} \frac{1}{\sqrt{D_w(i) \cdot D_w(j)}}$$

şeklinde verebiliriz. Burada

$$D_w(i) = \sum_{e_k \in P(i,t)} w(e_k)$$

dir. Burada $w(e_k), t \neq i$ olacak şekilde i ve t noktaları arasındaki yol boyunca kenarların ağırlıklarının minumum olacak şekildeki toplamıdır.

Örnek



Resim 4.1. G basit graf

G grafının uzaklık matrisi

$$D(G)_w = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 & 13 \\ 6 & 0 & 4 & 9 \\ 8 & 4 & 0 & 5 \\ 13 & 9 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$RI_w(G) = \frac{1}{\sqrt{D_w(1) \cdot D_w(2)}} + \frac{1}{\sqrt{D_w(1) \cdot D_w(3)}} + \frac{1}{\sqrt{D_w(2) \cdot D_w(3)}} + \frac{1}{\sqrt{D_w(3) \cdot D_w(4)}}$$

$$D_w(1) = \sum_{e_k \in P(1,t)} w(e_k) = 6 + 8 + 13 = 27 \quad ; t = 2,3,4$$

$$D_w(2) = \sum_{e_k \in P(2,t)} w(e_k) = 6 + 4 + 9 = 19 \quad ; t = 1,3,4$$

$$D_w(3) = \sum_{e_k \in P(3,t)} w(e_k) = 8 + 4 + 5 = 17 \quad ; t = 1,2,4$$

$$D_w(4) = \sum_{e_k \in P(4,t)} w(e_k) = 13 + 9 + 5 = 27 \quad ; t = 1,2,3$$

$$RI_w(G) = \frac{1}{\sqrt{27 \cdot 19}} + \frac{1}{\sqrt{27 \cdot 17}} + \frac{1}{\sqrt{19 \cdot 17}} + \frac{1}{\sqrt{17 \cdot 27}} \cong 0,012$$

olarak bulunur.

4.2. Lemma

G , n noktalı, e kenarlı basit bir graf olsun. $D(G)$, Uzaklık matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özvektör $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ olmak üzere

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j \quad (4.1)$$

dir.

İspat

λ , $D(G)$, Uzaklık matrisinin özdeğeri ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ bu özdeğere karşılık gelen özvektör olmak üzere

$$Dx = \lambda x$$

$$x^t Dx = \lambda x^t x$$

$$2 \sum_{i,j=0, i < j}^n d_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Şimdi her iki tarafın x_i ye göre türevini alalım. O halde $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$2 \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j = 2\lambda x_i$$

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j$$

elde edilir. Bu da ispatı kanıtlar.

4.3. Teorem

G , n noktalı e kenarlı basit bir graf olsun. $\lambda_1, D(G) = (d_{ij})_{n \times n}$ uzaklık matrisinin en büyük özdeğeri olmak üzere

$$\lambda_1 \leq \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j}$$

dir. Burada L_{ij} , i ve j noktaları arasındaki en kısa mesafe $\tilde{d}_i = \sum_{j=1}^n d_{ij}$ dir.

İspat

$\lambda_1, D(G)$ Uzaklık matrisinin özdeğeri ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in R^n$, λ_1 özdeğerine karşılık gelen bir birim özvektör olduğunu düşünelim. (4.1)'den

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j$$

$$\begin{aligned}
\lambda^2 x_i^2 &= \left(\sum_{j=1}^n d_{ij} x_j \right)^2 \\
\lambda^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n d_{ij} x_j \right)^2 \\
\Rightarrow \lambda^2 &= \sum_{i=1}^n (d_{1i}^2 + d_{2i}^2 + \dots + d_{ni}^2) x_i^2 + 2 \sum_{i,j=1, i < j}^n x_i x_j (d_{1i} d_{1j} + d_{2i} d_{2j} + \dots + d_{ni} d_{nj}) \\
&\Rightarrow \lambda^2 \leq \sum_{i=1}^n \tilde{d}_i^2 x_i^2 + \sum_{i,j=1, i < j}^n (x_i^2 + x_j^2) (d_{1i} d_{1j} + d_{2i} d_{2j} + \dots + d_{ni} d_{nj})
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadenin ikinci kısmındaki x_i^2 nin kat sayısı

$$\begin{array}{ccccccc}
& d_{11}d_{1i} & + & d_{21}d_{2i} & + & \dots & + & d_{n1}d_{ni} \\
+ & d_{12}d_{1i} & + & d_{22}d_{2i} & + & \dots & + & d_{n2}d_{ni} \\
+ & \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots \\
+ & d_{1,i-1}d_{1i} & + & d_{2,i-1}d_{2i} & + & \dots & + & d_{n,i-1}d_{ni} \\
+ & d_{1,i+1}d_{1i} & + & d_{2,i+1}d_{2i} & + & \dots & + & d_{n,i+1}d_{ni} \\
+ & \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots \\
+ & d_{1n}d_{1i} & + & d_{2n}d_{2i} & + & \dots & + & d_{nn}d_{ni}
\end{array}$$

olup bu toplam $d_{1i}(\tilde{d}_1 - d_{1i}) + d_{2i}(\tilde{d}_2 - d_{2i}) + \dots + d_{ni}(\tilde{d}_n - d_{ni})$ e eşittir. Uzaklık matrisinin tanımını göz önüne alındığında;

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \lambda^2 &\leq \sum_{i=1}^n \tilde{d}_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} (\tilde{d}_j - L_{ij}) x_i^2 \\
&\Rightarrow \lambda^2 \leq \sum_{i=1}^n \left[\tilde{d}_i^2 + \sum_{j=1}^n L_{ij} (\tilde{d}_j - L_{ij}) \right] x_i^2 \\
&\Rightarrow \lambda^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j x_i^2 \\
&\Rightarrow \lambda^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j \sum_{i=1}^n x_i^2
\end{aligned}$$

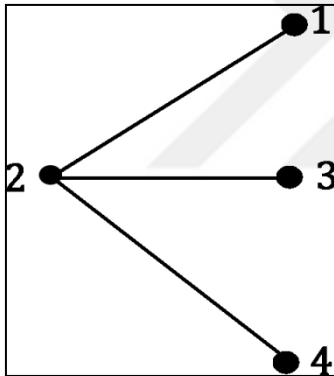
$$\Rightarrow \lambda \leq \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j}$$

λ keyfi olduğundan

$$\Rightarrow \lambda_1 \leq \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j}$$

elde edilir.

Örnek



Resim 4.2. G star graf

G star grafi için Uzaklık matrisi

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

G grafin da $\lambda_1 = 4,65$ ve

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j = 1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 = 43$$

dür.

Buradan;

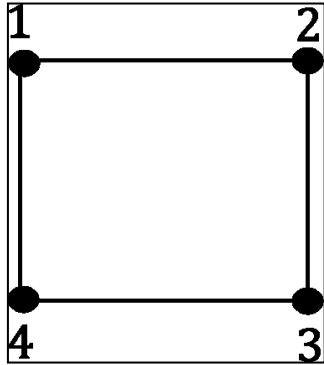
$$\sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j} = \sqrt{43} \cong 6,708$$

olup

$$\lambda_1 < 6,708$$

dir.

Örnek



Resim 4.3. G devir graf

G devir grafi için Uzaklık matrisi

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

G grafin da $\lambda_1 = 4$ ve

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j = 1^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 4 + 1^2 \cdot 4 = 24$$

dır. Buradan;

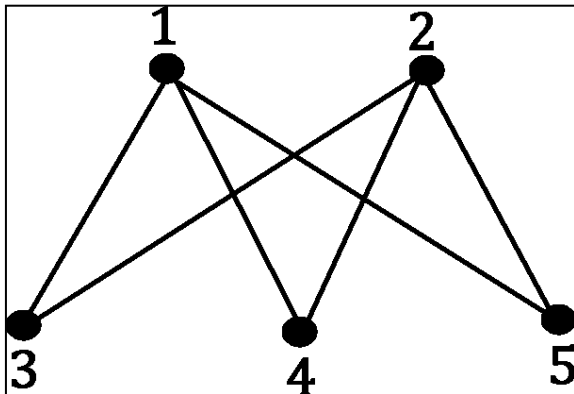
$$\sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j} = \sqrt{24} \cong 4,898$$

olup

$$\lambda_1 < 4,898$$

dir.

Örnek



Resim 4.4. G iki parçalı tam graf

G iki parçalı tam grafi için Uzaklık matrisi

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

G grafin da $\lambda_1 = 5,645$ ve

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j = 1^2 \cdot 6 + 1^2 \cdot 6 + 2^2 \cdot 6 + 2^2 \cdot 6 = 60$$

dır. Buradan;

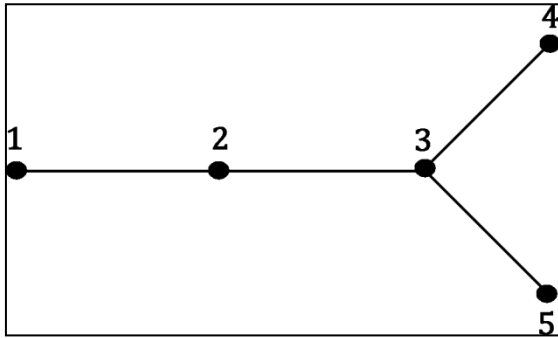
$$\sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j} = \sqrt{60} \cong 7,745$$

olup

$$\lambda_1 < 7,745$$

dir.

Örnek



Resim 4.5. G ağaç graf

G ağaç grafi için Uzaklık matrisi

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

G grafin da $\lambda_1 = 7,459$ ve

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j = 1^2 \cdot 9 + 2^2 \cdot 9 + 3^2 \cdot 9 + 3^2 \cdot 9 = 207$$

dır. Buradan;

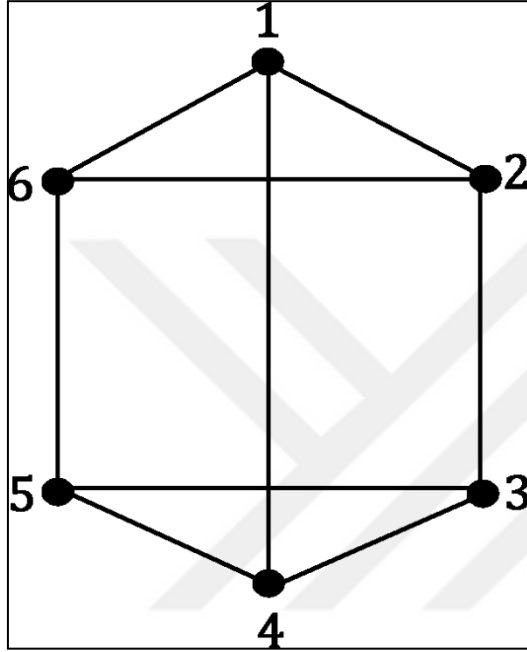
$$\sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j} = \sqrt{207} \cong 14,387$$

olup

$$\lambda_1 < 14,387$$

dir.

Örnek



Resim 4.6. G 6 noktalı 3-regüler graf

G 6 noktalı 3-regüler grafı için Uzaklık matrisi

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

G grafın da $\lambda_1 = 7$ ve

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j = 1^2 \cdot 7 + 2^2 \cdot 7 + 1^2 \cdot 7 + 2^2 \cdot 7 + 1^2 \cdot 7 = 77$$

dır. Buradan;

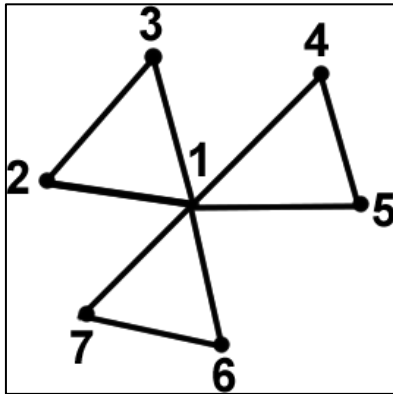
$$\sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j} = \sqrt{77} \cong 8,774$$

olup

$$\lambda_1 < 8,774$$

dir.

Örnek



Resim 4.7. G graf

G grafi için Uzaklık matrisi

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

G grafin da $\lambda_1 = 9,623$ ve

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j = 1^2 \cdot 10 + 2^2 \cdot 10 + 2^2 \cdot 10 + 2^2 \cdot 10 + 2^2 \cdot 10 + 1^2 \cdot 10 = 180$$

dır. Buradan;

$$\sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j} = \sqrt{180} \cong 13,416$$

olup

$$\lambda_1 < 13,416$$

dir.

4.4. Teorem

Bir G, n noktalı grafinin uzaklık (distance) matrisi $D = (d_{ij})$, $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_n$ uzaklıklar toplamı $(\tilde{d}_p = \sum_{i=1}^n d_{pi})$ ve $k = \min_p \tilde{d}_p$ olsun. P (D), D nin en büyük özdeğeri olmak üzere

$$\rho(D) \geq \frac{(i-1) \left(2ik - 2k^2 - 3k \pm 2\sqrt{\frac{k^2}{4}(4i^2 - 12i + 9) - ik(\tilde{d}_k + \tilde{d}_l) + k(2\tilde{d}_k + \tilde{d}_l) + \tilde{d}_k\tilde{d}_l} \right) + 2\tilde{d}_k(k-i+1)}{2(\tilde{d}_k - k(i-1))}$$

dir.

İspat

$i = 1$ ya da $\tilde{d}_k = \tilde{d}_l = k$ ise eşitsizlik sağlanır ve Lemma 3.3 ten eşitlik sadece G 'nin regüler olması durumunda sağlanır. Varsayalım ki $\tilde{d}_k \neq k$ ve $\tilde{d}_l \neq k$ olsun.

$2 \leq i \leq n$ için,

G grafinin uzaklık matrisi $D(G)$, $\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$ şeklinde ifade edilebilir. Burada

$D_{11}, (i-1)x(i-1)$ ve $D_{22}, (n-i+1)x(n-i+1)$ boyutunda matrislerdir.

$$U = \begin{pmatrix} xI_{i-1} & 0 \\ 0 & I_{n-i+1} \end{pmatrix} \text{ ve } U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x}I_{i-1} & 0 \\ 0 & I_{n-i+1} \end{pmatrix}, x > 0$$

$I_{i-1}, (i-1) \times (i-1)$ tipinde birim matris ve $I_{n-i+1}, (n-i+1) \times (n-i+1)$ tipinde birim matristir.

$$B = U^{-1}DU = \begin{pmatrix} D_{11} & \frac{1}{x}D_{12} \\ xD_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

D ve B benzer matrislerdir. Çünkü aynı karakteristik köklere sahiptirler. Bu sebeple

$$\rho(G) = \lambda_1(D) = \lambda_1(B)$$

B matrisinin satır toplamaları $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ olsun.

$1 \leq l \leq i - 1$ için,

$$\begin{aligned}
 r_l &= \sum_{j=1}^{i-1} d_{lj} + \frac{1}{x} \sum_{j=i}^n d_{lj} \\
 &= \frac{1}{x} \sum_{j=1}^n d_{lj} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sum_{j=1}^{i-1} d_{lj} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{x} \tilde{d}_l + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sum_{j=1}^{i-1} d_{lj}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$i \leq k \leq n$ için,

$$\begin{aligned}
 r_k &= x \sum_{j=1}^{i-1} d_{kj} + \sum_{j=i}^n d_{kj} \\
 &\Rightarrow x \sum_{j=1}^n d_{kj} + (1 - x) \sum_{j=1}^{i-1} d_{kj} \\
 &\Rightarrow x \tilde{d}_k + (1 - x) \sum_{j=1}^{i-1} d_{kj}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Buradan;

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{i-1} d_{lj} &\leq (i - 2) k, \quad 1 \leq l \leq i - 1 \\
 \sum_{j=1}^{i-1} d_{kj} &\leq (i - 1) k, \quad i \leq k \leq n
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$1 \leq l \leq i - 1 \text{ için } \tilde{d}_l = \min_l \sum_{a=1}^{i-1} d_{la}$$

$$i \leq k \leq n \text{ için } \tilde{d}_k = \min_k \sum_{a=i}^n d_{ka}$$

olduğundan (3) ifadesi (1) ve (2) de yerine yazılırsa

$$r_l \leq \frac{1}{x} \tilde{d}_l + \left(1 - \frac{1}{x}\right) (i-2) k, \quad 1 \leq l \leq i-1$$

$$r_k \leq x \tilde{d}_k + (1-x)(i-1) k, \quad i \leq k \leq n$$

elde edilir. Buradan;

$$\max\{r_1, r_2, \dots, r_n\} \leq \max\left\{\frac{1}{x} \tilde{d}_l + \left(1 - \frac{1}{x}\right) (i-2) k, x \tilde{d}_k + (1-x)(i-1) k\right\}$$

$$\frac{1}{x} \tilde{d}_l + \left(1 - \frac{1}{x}\right) (i-2) k, x \tilde{d}_k = x \tilde{d}_k + (1-x)(i-1) k$$

eşitliği çözüldüğünde,

$$x = \frac{-k \pm 2 \sqrt{\frac{k^2}{4}(4i^2 - 12i + 9) - ik(\tilde{d}_k + \tilde{d}_l) + k(2\tilde{d}_k + \tilde{d}_l) + \tilde{d}_k \tilde{d}_l}}{2(\tilde{d}_k - k(i-1))} \quad (14)$$

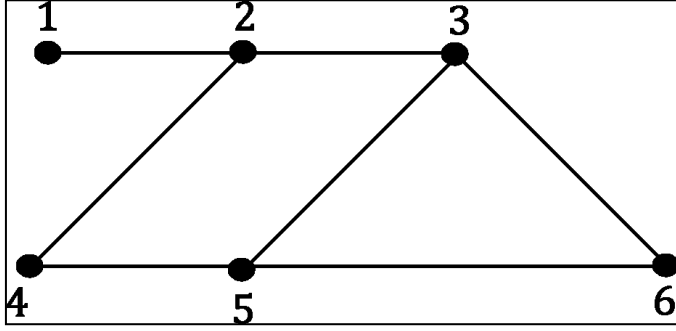
bulunur.

$x > 0$ ve $i \geq 2$ için

$\rho(D) \geq k + (x-1)(i-1)$ ifadesi (14) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\rho(D) \geq \frac{(i-1) \left(2ik - 2k^2 - 3k \pm 2 \sqrt{\frac{k^2}{4}(4i^2 - 12i + 9) - ik(\tilde{d}_k + \tilde{d}_l) + k(2\tilde{d}_k + \tilde{d}_l) + \tilde{d}_k \tilde{d}_l} \right) + 2\tilde{d}_k(k-i+1)}{2(\tilde{d}_k - k(i-1))}$$

elde edilir.

Örnek

Resim 4.8. G graf

G grafi için uzaklık matrisi

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

G grafında $\lambda_1 = 8,523$ ve

$\tilde{d}_1 = 11, \tilde{d}_2 = 7, \tilde{d}_3 = 7, \tilde{d}_4 = 8, \tilde{d}_5 = 8$ ve $\tilde{d}_6 = 9$ dur.

Burada $i = 4, k = 7, \tilde{d}_k = 7$ ve $\tilde{d}_l = 8$ için $x = 0,95$ bulunur.

Bu değerler

$$\lambda_1 \geq k + (x - 1)(i - 1)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$\lambda_1 \geq 7 + (0,95 - 1)(4 - 1) = 6,85$$

olarak bulunur.

Eğer burada $i = 5$, $k = 7$, $\tilde{d}_k = 7$ ve $\tilde{d}_l = 8$ alınırsa $x = 0,97$ bulunur.

Yine bu değerler

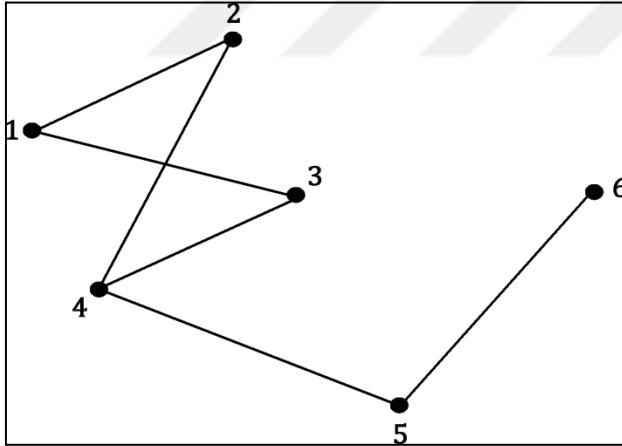
$$\lambda_1 \geq k + (x - 1)(i - 1)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$\lambda_1 \geq 7 + (0,97 - 1)(5 - 1) = 6,88$$

olarak bulunur.

Örnek



Resim 4.9. G graf

G grafi için uzaklık matrisi

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

G grafin da $\lambda_1 = 9,971$ ve

$\tilde{d}_1 = 9, \tilde{d}_2 = 11, \tilde{d}_3 = 9, \tilde{d}_4 = 7, \tilde{d}_5 = 9$ ve $\tilde{d}_6 = 13$ dur.

Burada $i = 3, k = 7, \tilde{d}_k = 9$ ve $\tilde{d}_l = 7$ için $x = 1,4$ bulunur.

Bu değerler

$$\lambda_1 \geq k + (x - 1)(i - 1)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$\lambda_1 \geq 7 + (1,4 - 1)(3 - 1) = 7,8$$

olarak bulunur.

Eğer burada $i = 4, k = 7, \tilde{d}_k = 9$ ve $\tilde{d}_l = 7$ alınırsa $x = 1,1$ bulunur.

Yine bu değerler

$$\lambda_1 \geq k + (x - 1)(i - 1)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$\lambda_1 \geq 7 + (1,1 - 1)(4 - 1) = 7,3$$

olarak bulunur.

Yine burada $i = 5, k = 7, \tilde{d}_k = 7$ ve $\tilde{d}_l = 9$ alınırsa $x = 0,94$ bulunur.

Yine bu değerler

$$\lambda_1 \geq k + (x - 1)(i - 1)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$\lambda_1 \geq 7 + (0,94 - 1)(5 - 1) = 6,76$$

olarak bulunur.





5. SONUÇ

Bu çalışmada ağırlıklı uzaklık matrisinin Randić indeksi hesaplanmıştır. Ayrıca basit bağlantılı grafların uzaklık matrisinin en büyük özdeğeri için alt ve üst sınırlar bulunmuştur. Daha sonra bu sınırlar bazı özel graflar ve genel birkaç graf için uygulanmıştır. Ve bulunan sınırlar, teoremlerde ifade edilen sınırları ispatlar niteliktedir. Ancak ispatlardaki bu sınırların yakınlığının, farklı graf yapılarında değişiklik gösterdiği gözlemlenmiştir. Halen uzaklık matrisinin en büyük (mutlak olarak) özdeğeri için sınırların (özdeğerinin sınırları için benzer çalışmalar tarafımızca yürütülmektedir) iyileştirilme, karşılaştırma ve eşitlik durumları ile ilgili çalışmalarımız devam etmektedir.





KAYNAKLAR

1. Diestel, R. (2005). Graph theory, *Graduate Text in Matematics*, 173, 1-3.
2. Doğansoy, A. (1993). 93. I, *Matematik Dünyası Dergisi*, 10-16.
3. Taşçı, D. (2011). *Lineer cebir*. Ankara: Gazi Yayınevi, 444-445.
4. Zhang, F. (1999). *Matrix theory: Basic results and techniques*. New York: Springer-Verlag, 159-217.
5. Cardon, D., and Tuckfield, B. (2011). The Jordan Canonical form for a class of zero-one matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 435, 2942-2954.
6. Büyükköse, Ş. G. K. G. (2019). *Graf teoriye giriş*, 2. Baskı, Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık, 12-56.
7. Erdős, P., Pach, J., Pollack, R., and Tuza, Z. (1989). Radius, diameter and minimum degree, *Journal of Combinatorial Theory B*, 47, 73–79.
8. Ivanciuc, O., Balaban, T. S., and Balaban, A. T., (1993), Reciprocal distance matrix, related local vertex invariants and topological indices, *Journal of Mathematical Chemistry*, 12, 309-318.
9. Saran, M. S. (2008). *Graf teorisinin bazı mühendislik uygulamaları*. Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir, 3-10.
10. Bhunia, P., Bag, S., and Paul, K. (2019). Bounds for eigenvalues of the adjacency matrix of a graph. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 22(4), 415-431.
11. Minc, H. (1988). *Nonnegative matrices*, New York: John and Sons, 62-126.
12. Horn, R. A., and Johnson, C. R. (1985). *Matrix analysis*, New York: Cambridge University Press, 34-57.
13. Das, K. C. and Bapat, R. B. (2008). A sharp upper bound on the spectral radius of weighted graphs. *Discrete Mathematics*, 308(15), 3180-3186.
14. Shu, J., and Wu, Y. (2004). Sharp upper bounds on the spectral radius of graphs. *Linear algebra and its applications*, 377, 241-248.
15. Liu, C. A., and Weng, C. W. (2013). Spectral radius and degree sequence of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, 438(8), 3511-3515.
16. Chen, Y., Lin, H., and Shu, J. (2013). Sharp upper bounds on the distance spectral radius of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, 439(9), 2659-2666.





GAZİ GELECEKTİR..