

GREEN FONKSİYONLARI ÜZERİNE

Berat KARAAĞAÇ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MART 2010
ANKARA**

Berat KARAAĞAÇ tarafından hazırlanan Green Fonksiyonları Üzerine adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

.....

Matematik A.. D., Gazi Üniversitesi.

Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

.....

Matematik A.. D., İzmir Üniversitesi

Doç. Dr. Fatma AYAZ

.....

Matematik A. D., Gazi Üniversitesi

Tarih:12/03/2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Berat KARAAĞAÇ

GREEN FONKSİYONLARI ÜZERİNE
(Yüksek Lisans Tezi)

Berat Karaağaç

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Mart 2010

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmıdır. İkinci bölüm Green fonksiyonunun tarihsel gelişimidir. Üçüncü bölüm diferensiyel denklemlere ilişkin problemler için Green Fonksiyonu, başlangıç değer problemlerine ve sınır değer problemlerine ilişkin Green fonksiyonlarını içerir. Dördüncü bölüm ise zamandan bağımsız problemlere ilişkin Green fonksiyonları ile ilgilidir.

Bilim Kodu	: 204.1.138
Anahtar Kelimeler	: Diferensiyel Denklem, Sınır Değer Problemleri, Dirac-Delta fonksiyonu, Fredholm Alternatifi, Sınır Koşulları, Özfonksiyonlar, Özfonksiyon Açılımı
Sayfa Adedi	: 79
Tez Yöneticisi	: Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

ON THE GREEN FUNCTIONS**(M.Sc. Thesis)****Berat Karaağaç****GAZI UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****March 2010****ABSTRACT**

This thesis consists of four chapters. The first chapter is introduction. The second chapter is historical development of Green's function. The third chapter is related to Green Function for differential equations and involves initial value problems and boundary value problems related to Green's function. The fourth chapter is related to the Green's functions for time-independent problems.

Bilim Kodu	: 204.1.138
Anahtar Kelimeler	: Differential Equation, Boundary Value Problem, Dirac-Delta Function, Fredholm Alternative, Boundary Conditions, Eigen Functions, Eigen Function Expansion.
Sayfa Adedi	: 78
Tez Yöneticisi	: Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca her adımda bilgi ve hoşgörüsünden yararlandığım, tez çalışmamın her safhasında emeği olan, değerli ilgi ve yardımlarını benden esirgemeyen, tecrübesi ile beni yönlendiren ve kendisinden pek çok şey öğrendiğim danışmanım Sayın Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ ye, bugünlere gelmemi sağlayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. GREEN FONKSİYONUNUN TARİHÇESİ.....	2
3. DİFERANSİYEL DENKLEMLERE İLİŞKİN PROBLEMLER İÇİN GREEN FONKSİYONU.	5
3.1. Başlangıç Değer Problemleri İçin Green Fonksiyonu	5
3.2. Sınır Değer Problemleri İçin Green Fonksiyonu.	11
3.2.1. İkinci basamaktan denklemler için green fonksiyonu	12
3.2.2. n inci Basamaktan Denklemlere İlişkin Sınır Değer Problemleri İçin Green Fonksiyonu.....	19
4. ZAMANDAN BAĞIMSIZ PROBLEMLERE İLİŞKİN GREEN FONKSİYONU	54
4.1. Bir Boyutlu Isı Denklemine İlişkin Green Fonksiyonu	54
4.2. Green Fonksiyonu İçin Özfonksiyon Açılımı Yöntemi	61
4.3. Fredholm Alternatifi ve Değiştirilmiş Green Fonksiyonu.	63
4.4. Fredholm Alternatifi.	67
4.5. Değiştirilmiş Green Fonksiyonları.....	71
KAYNAKLAR	78
ÖZGEÇMİŞ	79

ÇİZELGELERİN LİSTESİ**Çizelge****Sayfa**

Çizelge 4.1 Homojen Sınır Koşullarına Göre $Lu = f(x)$ çözümlerinin sayısı..... 68

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler çok geniş bir uygulama alanına sahiptir. Matematiksel Fiziğin önemli modellerinden biri de diferensiyel denklem içeren problemlerdir. Uygulamalı bilimlerde çok sık kullanılan problemler içinde Green Fonksiyonu kavramı ayrıca bir önem arz etmektedir. Genel olarak L diferensiyel operatörü, u da bulunması istenen fonksiyon ve f de verilmiş fonksiyon olmak üzere

$$Lu = f$$

denklemini göz önüne alalım L operatörü üzerindeki uygun koşullar altında başlangıç ve sınır koşullarına bağlı olarak da bir integral denklem biçiminde ifade edilebilir. u fonksiyonunun çözüm olduğu bu integral denklem Green Fonksiyonunu içerir. Bu tezin amacı diferensiyel denklemlere ilişkin başlangıç değer ve sınır değer problemlerinin çözümlerinin elde edilmesinde karşılaşılan Green fonksiyonunun tanıtılmasıdır. Bu amaçla tezde diferensiyel denklemlere ilişkin başlangıç değer problemleri için Green fonksiyonu, ikinci basamaktan sınır değer problemleri için Green fonksiyonu, n inci basamaktan sınır değer problemleri için Green fonksiyonu ve son olarak da zamandan bağımsız kısmi diferensiyel denklemlere ilişkin problemler için Green fonksiyonu irdelenmiştir.

2. GREEN FONKSİYONUNUN TARİHÇESİ

1828 de George Green (1793-1841) Matematiksel analizin Manyetizma ve Elektrik Teorisi üzerine uygulaması ile ilgili bir makale yayınlamıştır [1]. Daha sonraki gelişmeler için çok önemli veri sağlayan bu matematiksel fizik çalışmasında Green, belirlenmiş bir potansiyele sahip bir iletkenle çevrelenmiş bir hacim içerisindeki elektrik potansiyelini belirlemeyi düşünmüş ve bugünkü notasyonlarla, bu çalışmasında bir V hacmi içinde ve bu hacmi çevreleyen bir S yüzeyi üzerinde belirli sınır koşullarını sağlayan $\nabla^2 u = -f$ denkleminin çözümleri ile ilgilenmiştir.

Green, $\delta(r - r_0)$, Dirac-Delta fonksiyonu olmak üzere

$$\nabla^2 g(r, r_0) = -4\pi\delta(r - r_0) \quad (2.1)$$

Diferensiyel denkleminin çözümünden başlayarak işe koyuldu. Biliyoruz ki; $R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$ olmak üzere Eş. 2.1 eşitliğinin çözümü $g = \frac{1}{R}$ dir. Green aslında, g fonksiyonunun $r = r_0$ daki tekil yapısının farkında olmasına rağmen bu problemin çözümünde değişik bir yol izledi. Önce adını taşıyan aşağıdaki Green özdeşliğini ispatladı:

$$\iiint_V (\varphi \nabla^2 \chi - \chi \nabla^2 \varphi) dV = \oiint_S (\varphi \nabla \chi - \chi \nabla \varphi) n dS. \quad (2.2)$$

Burada, n yüzeyin dış normali χ ve φ ise sınırlı türevlere sahip skaler fonksiyonlardır. r_0 civarlarındaki tekillikten dolayı Eş. 2.2 uygulanamadığı için Green, r_0 noktası komşuluğunda küçük bir yuvar tanımladı ve bu küçük yuvarın hacmini V hacminden çıkararak

$$\iiint_V g \nabla^2 u dV + \oiint_S g \nabla u \cdot n dS = \iiint_V u \nabla^2 g dV + \oiint_S u \nabla g \cdot n dS - 4\pi u(r_0) \quad (2.3)$$

Eş. 2.3 özdeşliğini elde etti çünkü, tanımlanan yuvar üzerindeki yüzey integrali , yuvarın yarıçapı 0'a yaklaşırken $4\pi u(r_0)$ dı.. Daha sonra Green S yüzeyi boyunca, hem g hem de u nun $u = 0$ homojen sınır koşulunu sağlamalarını zorunlu tuttu. Bu durumda V hacminin içinde $\nabla^2 u = -f$ ve $\nabla^2 g = 0$ denklemleri sağlanmış oldu bu arada r_0 in V içinde olmadığını da göz önünde bulundurdu. $\bar{u}$, S sınırında u nun değeri olmak üzere S içerisinde herhangi bir r noktası için $f = 0$ olduğunda

$$u(r) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \bar{u} \nabla g \cdot n dS \quad (2.4)$$

Eş. 2.4 'ü elde etti. Bu ise g bilindiğinde sınır değer probleminin çözülebileceğini gösteriyordu Green g fonksiyonunun var olmak zorunda olduğunu biliyordu. Çünkü g fiziksel olarak r_0 da ki noktasal bir yükteki elektrik potansiyelini tanımlıyordu.

Green in makalesi 1850 ve 1854 yılları arasında yayınlanıncaya kadar bilinmiyordu. Makalenin yayınlanmasıyla, dikkatler matematiksel fiziğin incelendiği Alman Matematiksel Fizik okuluna döndü. Green, g fonksiyonu için kendisi isim vermemesine rağmen, Reimann (1826–1866) daha sonraları onu Green Fonksiyonu olarak isimlendirdi [1]. 1877 de Carl Neumann (1832–1925) düzlemde, Laplace denklemiyle ilgili çalışmasında Green fonksiyonu fikrini kullandı [1]. Neumann, Green fonksiyonunun iki boyutlu eşdeğerinin üç boyutlu durumda olduğu gibi

$\frac{1}{|r - r_0|}$ formu ile tanımlanamayacağını fakat $\log\left(\frac{1}{|r - r_0|}\right)$ formunda olduğunu keşfetti.

Green Fonksiyonunun Laplace denkleminin çözümündeki başarısı ile diğer denklemlerde de Green Fonksiyonu kullanılarak çözümler elde edilmeye başlandı. Isı denklemi için, Hobson (1856–1933) bir, iki ve üç boyutta Green Fonksiyonunu tanımladı ve Fransız matematikçi Appell (1855–1930) bir boyutlu ısı denklemi için Green formülüne benzer bir formül olduğunun farkına vardı [1]. Bununla birlikte, ısı

denklemini için fonksiyonunun modern teorisini tanıtmaya görevi Sommerfeld (1868–1951) e düştü[1].

Green Fonksiyonu alanında yol gösterici en büyük gelişme, üç boyutlu dalga denklemindeki çalışmaları ile Kirchhoff (1824–1887) olmuştur [1]. Kirchhoff, Green in ikinci formülüyle başlayarak $R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ olmak üzere üç boyutlu Green Fonksiyonunun (modern terminolojide)

$$g(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{\delta(t - \tau - R/c)}{4\pi R} \quad (2.5)$$

Eş. 2.5 şeklinde olduğunu gösterdi. Bu çözümü Green Fonksiyonu olarak isimlendirmemesine rağmen, açıkçası çözümün belirli bir fonksiyon içerdiği fikrini benimsedi ve şimdi bu fonksiyon Dirac-Delta fonksiyonu olarak bilinmektedir. . Bulduğu bu çözümü Huygen prensibi için matematiksel açıklamaların yer aldığı, ünlü Kirchhoff'un teoremini türetmek için kullandı.

Sınır Değer problemlerini içeren diferansiyel denklemler için Green Fonksiyonunun uygulaması Burkhardt'ın (1861–1914) çalışmalarıyla başladı [1]. Burkhardt Picard'ın adi türevli denklemler teorisi sonuçlarından faydalanarak Green fonksiyonunu türetti. Daha sonra, Bocher (1867–1918) bu sonuçları n inci basamaktan diferansiyel denklemlere ilişkin sınır değer problemlerine genişletti [1].

3. DİFERENSİYEL DENKLEMLERE İLİŞKİN PROBLEMLER İÇİN GREEN FONKSİYONU

3.1. Başlangıç Değer Problemleri İçin Green Fonksiyonu.

$A(t)$ $n \times n$ matris, $x(t)$ ve $b(t)$ $n \times 1$ vektör fonksiyonu olmak üzere

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t); x(t_0) = 0 \quad (3.1)$$

problemini ele alalım. Eş. 3.1 in genel çözümü

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

dır. Burada $x_h(t)$ homojen denklemin genel çözümü ve

$$x_p(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) b(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

özel çözümdür. $\Phi(t, \tau)$

$$\frac{d}{dx} \Phi(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau) \text{ ve } t \text{ sabiti için } \Phi(t, t) = I$$

başlangıç değer probleminin tek çözüm olup literatürde durum geçiş (state-transition) matrisi olarak bilinir ve

$$x(t) = \Phi(t, \tau) x(\tau)$$

eşitliğini sağlar. $x(t)$ ve $x(\tau)$ da $\dot{x}(t) = A(t)x(t); x(t_0) = x_0$ homojen probleminin sırasıyla t ve τ ya bağlı çözümlerini göstermektedir.

$\Phi(t, \tau)$ matrisi aşağıdaki özellikleri sağlar;

$$(i) \quad \Phi(t, t) = I$$

$$(ii) \quad \Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t)$$

$$(iii) \quad \Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0)$$

$$(iv) \quad \Phi(t, t_0) = x(t) x^{-1}(t_0)$$

Tanım 3.1.

Başlangıç değer problemi için Green Fonksiyonu $G(t, \tau)$

$$\frac{d}{dt} G(t, \tau) = A(t)G(t, \tau) + I\delta(t - \tau) \quad (3.3)$$

denklemini sağlayan ve $t < \tau$ için $G(t, \tau) = 0$ özelliğine sahip matris fonksiyonu olarak tanımlıdır. $\delta(t - \tau)$ Dirac-Delta fonksiyonu olup bu fonksiyonun bazı özellikleri

$$(i) \quad \delta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau \\ \infty, & t = \tau \end{cases}$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

$$(iii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau = 1$$

$$(iv) \delta(t-\tau) = \delta(\tau-t)$$

$$(v) u(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases} \text{ için, } \delta(t-\tau) = \frac{d}{dt} u(t-\tau)$$

$$(vi) \delta[c(t-\tau)] = \frac{1}{|c|} \delta(t-\tau)$$

dır [2].

Eş. 3.3 ün t üzerinden τ^- den τ^+ ya kadar integrali alınırsa

$$\int_{\tau^-}^{\tau^+} \frac{dG(t, \tau)}{dt} dt = \int_{\tau^-}^{\tau^+} A(t)G(t, \tau) dt + \int_{\tau^-}^{\tau^+} I \delta(t-\tau) dt$$

$$G(\tau^+, \tau) - G(\tau^-, \tau) = \int_{\tau^-}^{\tau^+} A(t)G(t, \tau) dt + I \int_{\tau^-}^{\tau^+} \frac{du(t-\tau)}{dt} dt$$

$$G(\tau^+, \tau) - G(\tau^-, \tau) = \int_{\tau^-}^{\tau^+} A(t)G(t, \tau) dt + I$$

elde edilir.

$t < \tau$ için $G(\tau^-, \tau) = 0$, $A(t)$ ve $G(t, \tau)$ sürekli olduğundan integralin sağ tarafı da sıfırdır. Böylece başlangıç koşulu

$$G(\tau^+, \tau) = I \tag{3.4}$$

dır.

$t > \tau$ için Eş. 3.3 ün çözümü

$$G(t, \tau) = \Phi(t, \tau)$$

olup Eş. 3.3 ve $u(t - \tau)$ birim basamak fonksiyon olmak üzere

$$G(t, \tau) = \Phi(t, \tau)u(t - \tau)$$

dur.

Başlangıç değer problemi için Green Fonksiyonu $G(t, \tau)$, $t = \tau$ üzerinde döndürülen state-transition $\Phi(t, \tau)$ matrisinden başka bir şey değildir. Ayrıca bu Eş. 3.2 i elde etmek için alternatif bir yaklaşımdır.

Eş. 3.3 ün her iki yanını $b(\tau)$ ile çarpılırsa

$$\frac{d}{dt}[G(t, \tau)b(\tau)] = A(t)G(t, \tau)b(\tau) + Ib(\tau)\delta(t - \tau)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau)b(\tau)d\tau \right] = A(t) \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau)b(\tau)d\tau + I \int_{-\infty}^{+\infty} b(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

ve δ fonksiyonunun $\int_{-\infty}^{+\infty} b(\tau)\delta(t - \tau)dx = b(t)$ özelliği kullanılırsa

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau)b(\tau)d\tau \right] = A(t) \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau)b(\tau)d\tau + b(t)$$

elde edilir. Bu ifade Eş. 3.1 ile karşılaştırıldığında

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) b(\tau) d\tau$$

bulunur.

$$G(t, \tau) = \Phi(t, \tau) u(t - \tau)$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$\chi_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) b(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t G(t, \tau) b(\tau) d\tau + \int_t^{+\infty} G(t, \tau) b(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \Phi(t, \tau) b(\tau) d\tau$$

elde edilir.

Böylece t_0 başlangıç noktasından bağımsız ve etki (forcing) fonksiyonun bir integrali olarak $x_p(t)$ özel çözümü elde edilir.

$$L[G(t, \tau)] := G^{(n)} + p_{n-1}(t)G^{(n-1)} + \dots + p_1(t)G' + p_0(t)G = \delta(t - \tau)$$

şeklindeki skaler denkleme bunu uygulamak kullanışlıdır.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} G \\ G' \\ G'' \\ \vdots \\ G^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & -p_{n-2} & -p_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ G' \\ G'' \\ \vdots \\ G^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta(t - \tau) \end{bmatrix}$$

dır. Buradan

$G := [G; G'; G''; \dots; G^{(n-1)}]$, $L[G(t, \tau)] = \delta(t - \tau)$ olmak üzere $t = \tau$ sabiti için $G = G' = G'' = \dots = G^{(n-2)} = 0$, $G^{(n-1)} = 1$ başlangıç şartlarını sağlamalıdır.

Örnek 3.1.

Sönümsüz harmonik salınımına ilişkin $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$ denklemini göz önüne alalım.

Denklemin homojen kısmının çözümü

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}t\right) + c_2 e^{-\frac{b}{2m}t} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}t\right)$$

dır. Green Fonksiyonu impulse denklemi sağlar. Yani

$$mG''(t, \tau) + bG'(t, \tau) + kG(t, \tau) = \delta(t - \tau)$$

$t = \tau$ için homojen denklemi göz önüne alarak $x(0) = 0$ ve $\dot{x}(0) = 1$ başlangıç şartları altında yukarıdaki $x(t)$ çözümü için c_1 ve c_2 sabitleri aşağıdaki gibi belirlenir.

$$c_1 e^{-\beta\tau} \cos \omega_1 \tau + c_2 e^{-\beta\tau} \sin \omega_1 \tau = 0$$

$$c_1 (-\beta \cos \omega_1 \tau - \omega_1 \sin \omega_1 \tau) e^{-\beta\tau} + c_2 (-\beta \sin \omega_1 \tau + \omega_1 \cos \omega_1 \tau) e^{-\beta\tau} = 1$$

denklemlerinden c_1 ve c_2

$$c_1 = e^{-\beta\tau} \frac{\sin \omega_1 \tau}{\omega_1} \text{ ve } c_2 = e^{-\beta\tau} \frac{\cos \omega_1 \tau}{\omega_1}$$

elde edilir. Böylece Green Fonksiyonu

$$G(t, \tau) = e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\sin \omega_1(t-\tau)}{\omega_1} u(t-\tau)$$

dır. Böylece

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

denkleminin özel çözümü

$$\chi_p(t) = \int_0^t F(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\sin \omega_1(t-\tau)}{\omega_1} d\tau$$

dır.

3.2. Sınır Değer Problemleri İçin Green Fonksiyonu

Bu kesimde homojen olmayan lineer diferensiyel denklemler ve homojen sınır şartlarına sahip sınır değer problemleri için Green Fonksiyonu üzerinde durulacaktır.

3.2.1. İkinci basamaktan denklemler için green fonksiyonu

$[a, b]$ kapalı aralığında $p(x) > 0$, q ve f sürekli fonksiyonlar olmak üzere homojen olmayan ikinci basamaktan Self-Adjoint

$$L[u(x)] := \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + q(x)u(x) = f(x) \quad (3.5)$$

denklemini göz önüne alalım. a_1, a_2, b_1 ve b_2 $|a_1|+|a_2|\neq 0$ ve $|b_1|+|b_2|\neq 0$ özelliklerine sahip reel sabitler olmak üzere denkleme ilişkin homojen sınır koşulları

$$\begin{aligned} B_L[u(x)] &:= a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0 \\ B_R[u(x)] &:= b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

biçiminde verilmiş olsun

Tanım 3.2.

Eş. 3.5 ve Eş. 3.6 probleminin $G(x, \tau)$, Green Fonksiyonu

$$L[G(x, \tau)] = \delta(x - \tau) \quad (3.7)$$

denklemini sağlar.

Eş. 3.7 yi $f(\tau)$ ile çarpıp, τ üzerinden a dan b ye integralini alınırsa

$$L\left[\int_a^b G(x, \tau) f(\tau) d\tau\right] = \int_a^b f(\tau) \delta(x - \tau) d\tau = f(x)$$

elde edilir. Burada Eş. 3.5 göz önüne alınırsa, Eş. 3.5 ve Eş. 3.6 problemin çözüm fonksiyonu

$$u(x) = \int_a^b G(x, \tau) f(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

dir. $G(x, \tau)$ nin x üzerinden sınır şartlarını sağlamasından dolayı, Eş. 3.8 in sağ tarafının da sınır şartlarını sağladığı açıktır.

Eş. 3.7 nin τ^- den τ^+ ya integrali alınırsa

$$\int_{\tau^-}^{\tau^+} \left[\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dG(x, \tau)}{dx} \right) + q(x) G(x, \tau) \right] dx = \int_{\tau^-}^{\tau^+} \delta(x - \tau) dx$$

$$\left[p(x) \frac{dG(x, \tau)}{dx} \right]_{\tau^-}^{\tau^+} + \int_{\tau^-}^{\tau^+} q(x) G(x, \tau) dx = \int_{\tau^-}^{\tau^+} \frac{du(x - \tau)}{dx} dx = 1$$

elde edilir. $G(x, \tau)$ sürekli olduğu için integralin sol tarafındaki ikinci terim sıfırdır.

İlk integralden

$$\left[p(x) \frac{dG(x, \tau)}{dx} \right]_{\tau^-}^{\tau^+} = 1$$

olup. $p(x)$ sürekli olduğu için $p(\tau^-) = p(\tau^+)$ dır. Böylece

$$\left[\frac{dG(x, \tau)}{dx} \right]_{\tau^-}^{\tau^+} = \frac{1}{p(\tau)} \quad (3.9)$$

bulunur.

Eş. 3.9 ; $G(x, \tau)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevinin sıçramalı süreksizliğe sahip olduğunu gösterir. Böylece $G(x, \tau)$ fonksiyonu, $x = \tau$ noktasında sürekli fakat bu noktada türevi bir sıçramalı süreksizliğe sahiptir.

$L[u(x)] = 0$ denkleminin sol sınır koşullarını sağlayan çözümü $u_L(x)$ ve sağ sınır koşullarını sağlayan çözümü $u_R(x)$ ile gösterilsin

$G(x, \tau)$ sınır şartlarını sağlamak zorunda olduğundan

$$G(x, \tau) = \begin{cases} k_1(\tau)u_L(x), & a \leq x \leq \tau \leq b \\ k_2(\tau)u_R(x), & a \leq \tau \leq x \leq b \end{cases}$$

dır.

$G(x, \tau)$ $x = \tau$ da sürekli olduğundan sağ ve sol limitler eşit olmalıdır. Yani;

$$k_2(\tau)u_R(\tau) - k_1(\tau)u_L(\tau) = 0.$$

$G'(x, \tau)$ fonksiyonu sıçramalı süreksizliğe sahip olduğundan

$$k_2(\tau)u'_R(\tau) - k_1(\tau)u'_L(\tau) = \frac{1}{P(\tau)}$$

elde edilir. $k_1(\tau)$ ve $k_2(\tau)$ için son iki denklem çözülürse

$$k_1(\tau) = \frac{u_R(\tau)}{P(\tau)W(\tau)} \text{ ve } k_2(\tau) = \frac{u_L(\tau)}{P(\tau)W(\tau)}$$

bulunur. Burada $W(\tau)$, $u_L(\tau)$ ve $u_R(\tau)$ nin Wronskiyenini göstermektedir. Yani

$$W := \begin{vmatrix} u_L(\tau) & u_R(\tau) \\ u'_L(\tau) & u'_R(\tau) \end{vmatrix} = u_L(\tau)u'_R(\tau) - u'_L(\tau)u_R(\tau)$$

dır. Yukarıda elde edilen $k_1(\tau)$ ve $k_2(\tau)$ yerine konulursa

$$G(x, \tau) = \frac{1}{P(\tau)W(\tau)} \begin{cases} u_L(x)u_R(\tau), & a \leq x \leq \tau \leq b \\ u_L(\tau)u_R(x), & a \leq \tau \leq x \leq b \end{cases}$$

elde edilir [3].

Örnek 3.2.

$$u''(x) = f(x)$$

$$u(0) = 0$$

$$u(L) = 0$$

sınır değer problemi için Green Fonksiyonunu bulalım. Homojen diferensiyel denklemin genel çözümü

$$u(x) = c_1 + c_2x$$

dir. Bu çözüm

$$G''(x, \tau) = \delta(x - \tau), \quad G(0, \tau) = 0 = G'(L, \tau)$$

şartlarını sağlayan Green Fonksiyonunu inşa etmek için kullanılır. Sol ve sağ sınır koşulları için çözümler sırasıyla

$$u_L(0) = x$$

$$u_R(L) = L - x$$

olup. $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ ve $W(\tau) = \begin{vmatrix} \tau & L - \tau \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -L$ olduğu durumu göz önüne

alınırsa homojen olmayan $u''(x) = f(x)$, $u(0) = 0 = u(L)$ sınır değer problemi için Green fonksiyonu;

$$G(x, \tau) = \begin{cases} -\frac{x(L-\tau)}{L}, & x < \tau \\ -\frac{x_0(L-\tau)}{L}, & x > \tau \end{cases} \quad (3.10)$$

şeklindedir.

Özetlersek verilen homojen sınır şartları altında $L(u)$ diferensiyeli için $G(x, \tau)$ Green fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

1. $G(x, \tau)$ fonksiyonu birinci ve ikinci mertebeden türevleri $a \leq x, \tau \leq b$ aralığındaki her $x \neq \tau$ için x ve t ye göre süreklidir.

2. $x = \tau$ noktasında $G(x, \tau)$ fonksiyonunun birinci türevi

$$\left[\frac{dG(x, \tau)}{dx} \right]_{x=\tau-\epsilon}^{x=\tau+\epsilon} = \frac{1}{p(\tau)}$$

bir sıçramalı süreksizliğe sahiptir.

3. Sabit τ için $G(x, \tau)$ verilen sınır şartlarını sağlar. Bununla birlikte $G(x, \tau)$, $x = \tau$ noktası hariç homojen denklem

$$L[u] = 0$$

ın çözümüdür.

Teorem 3.1.

Sınır değer problemleri için Green Fonksiyonu simetriktir. Yani $G(x, \tau) = G(\tau, x)$ dir.

İspat

$a < \tau < \eta < b$ için

$$G = G(x, \tau)$$

$$H = G(x, \eta)$$

Green Fonksiyonlarını ele alalım. L operatörü Self-Adjoint olduğu için

$$GL[H] - HL[G] = \frac{d}{dx} [p(H'G - HG')] \quad (3.11)$$

Lagrange özdeşliği sağlanır. G ve H Green Fonksiyonu olduğu için homojen denklemi sağlar. Yani;

$$L[G] = 0 \text{ ve } L[H] = 0$$

dır.

$[a, \tau]$, $[\tau, \eta]$ ve $[\eta, b]$ aralıkları üzerinden integral alınırsa

$$\left[p(H'G - HG') \right]_a^\tau + \left[p(H'G - HG') \right]_\tau^\eta + \left[p(H'G - HG') \right]_\eta^b = 0$$

dır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& p(\tau)G(\tau, \tau)[H'(\tau^-, \eta) - H'(\tau^+, \eta)] \\
& + p(\tau)H(\tau, \eta)[G'(\tau^+, \tau) - G'(\tau^-, \tau)] \\
& + p(\eta)G(\eta, \tau)[H'(\eta^-, \eta) - H'(\eta^+, \eta)] \\
& + p(\eta)H(\eta, \eta)[G'(\eta^+, \tau) - G'(\eta^-, \tau)] \\
& + [p(x)(H'G - HG')]_a^b = 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

sağlanır. $G'(x, \tau)$ ve $H'(x, \eta)$ fonksiyonlarının sırasıyla $x = \tau$ ve $x = \eta$ noktaları hariç her yerde sürekli olmasından

$$\begin{aligned}
G'(\eta^+, \tau) - G'(\eta^-, \tau) &= 0 \\
H'(\tau^+, \eta) - H'(\tau^-, \eta) &= 0
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca bu fonksiyonların $x = \tau$ ve $x = \eta$ noktalarında sıçrama süreksizliğine sahip olmasından

$$\begin{aligned}
G'(\tau^+, \tau) - G'(\tau^-, \tau) &= \frac{1}{p(\tau)} \\
H'(\eta^-, \eta) - H'(\eta^+, \eta) &= -\frac{1}{p(\eta)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Eş. 3.12 de kullanılırsa

$$G(\eta, \tau) = H(\tau, \eta)$$

elde edilir. H fonksiyonunun tanımından dolayı

$$G(\eta, \tau) = G(\tau, \eta)$$

sağlanır [4].

3.2.2. n inci Basamaktan Denklemlere İlişkin Sınır Değer Problemleri İçin Green Fonksiyonu

$0 \leq i \leq n$ için $p_i(x) \in C(I=[a, b])$ ve aynı aralık üzerinde $p_0(x) > 0$ olmak üzere n inci basamaktan

$$\begin{aligned} Ly &= p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \\ U_i(y) &\equiv \sum_{j=1}^n a_{ij}y^{(j-1)}(a) + \sum_{j=1}^n b_{ij}y^{(j-1)}(b) = 0, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (3.13)$$

homojen olmayan sınır değer problemine ilişkin

$$\begin{aligned} Ly &= 0 \\ U_i(y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

homojen sınır değer probleminin sadece aşıkâr çözüme sahip olduğunu varsayalım. Başka bir anlatımla $Ly = 0$ denkleminin lineer bağımsız $y_1, y_2, \dots, y_n$ çözümleri için

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

matrisinin rankı n ye eşit ya da $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$D(U) = \det(U_i(y_j)) \neq 0$$

olsun.

Bu durumda Eş. 3.13 probleminin bir tek çözümü vardır. Bu çözüm *Green Fonksiyonu* yardımı ile ifade edilebilir. [5].

Tanım 3.3.

$0 \leq i \leq n$ için $p_i(x) \in C(I)$ ve I kapalı sonlu aralığında $p_0(x) > 0$ olsun. $Ly = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin Wronskiyeni

$$w(y_1, y_2, \dots, y_n)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$H(x, t) = \frac{(-1)^{n-1}}{p_0(t)W(t)} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \end{vmatrix} \quad (3.16)$$

fonksiyonuna L operatörüne ilişkin tek yanlı Green Fonksiyonu denir [6].

Tek yanlı Green fonksiyonunun bazı özelliklerini vermeye çalışalım:

Teorem 3.2.

n inci basamaktan L lineer diferensiyel operatörüne ilişkin tek yanlı Green fonksiyonu $H(x, t)$ ise bu durumda

(i) $H(x, t)$ ve $1 \leq k \leq n$ için $\frac{\partial^k}{\partial x^k} H(x, t)$ türevleri $I \times I$ karesi üzerinde x ve t ye göre birlikte süreklidir.

$$(ii) \quad 0 \leq k \leq n-2 \quad \text{ için } \left. \frac{\partial^k}{\partial x^k} H(x, t) \right|_{x=t} = 0$$

$$(iii) \quad \left. \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} H(x, t) \right|_{x=t} = \frac{1}{p_0(t)}$$

(iv) $L_x H(x, t) = 0$ dır. Burada L_x, L operatörü üzerinde x e göre türev alınacağını göstermektedir.

Teorem 3.3.

L için tek yanlı Green Fonksiyonu $H(x, t)$ olsun. $f(x)$ I kapalı sonlu aralığı üzerinde sürekli olan herhangi bir fonksiyon ve $x_0 \in I$ olmak üzere

$$y(x) = \int_{x_0}^x H(x, t) f(t) dt \quad (3.17)$$

fonksiyonu, her $x \in I$ için $Ly = f(x)$ denklemini ve $0 \leq k \leq n-1$ için

$$y^{(k)}(x_0) = 0$$

koşullarını sağlar.

İspat

Sadelik açısından $0 \leq j \leq n$ için $\frac{\partial^j H(x, t)}{\partial x^j}$ türevlerini $H_j(x, t)$ sembolü ile gösterelim. Eş. 3.17 den $y'(x)$

$$\begin{aligned} y'(x) &= H(x, x)f(x) + \int_{x_0}^x H_1(x, t)f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^x H_1(x, t)f(t)dt \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} y''(x) &= H_1(x, x)f(x) + \int_{x_0}^x H_2(x, t)f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^x H_2(x, t)f(t)dt \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde devam edilirse $0 \leq k \leq n-1$ için

$$y^{(k)}(x) = \int_{x_0}^x H_k(x, t)f(t)dt \quad (3.18)$$

ve

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= H_{n-1}(x, x)f(x) + \int_{x_0}^x H_n(x, t)f(t)dt \\ &= \frac{f(x)}{p_0(x)} + \int_{x_0}^x H_n(x, t)f(t)dt \end{aligned}$$

elde edilir.

$0 \leq k \leq n$ için $y^{(k)}(x)$ türevleri $p_{n-k}(x)$ ile çarpılır ve toplamı k üzerinden alınır

$$\begin{aligned} Ly(x) &= f(x) + \int_{x_0}^x L_x H(x, t) f(t) dt \\ &= f(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Öte yandan Eş. 3.18 bağıntısına göre $0 \leq k \leq n-1$ için

$$y^{(k)}(x_0) = 0$$

olacağı açıktır.

Teorem 3.4.

$H(x, t)$, Eş. 3.16 ile tanımlandığı gibi ve $K(x, t)$ $I \times I$ karesi üzerinde x ve t ye göre sürekli fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki özelliğe sahip olsun:

I üzerinde sürekli olan her $f(x)$ için

$$y(x) = \int_{x_0}^x K(x, t) f(t) dt$$

fonksiyonu, $Ly = f$ denkleminde ve $y^{(k)}(x_0) = 0$ ($0 \leq k \leq n-1$) koşullarını sağlayan çözümdür. Bu durumda $I \times I$ üzerinde $K(x, t) = H(x, t)$ dir.

İspat

Varsayımlara göre

$$y(x) = \int_{x_0}^x H(x, t) f(t) dt \text{ ve } y(x) = \int_{x_0}^x K(x, t) f(t) dt \text{ olup her } x \in I \text{ için}$$

$$\int_{x_0}^x (H(x, t) - K(x, t)) f(t) dt = 0 \quad (3.19)$$

yazılabilir.

$$J(x, t) = H(x, t) - K(x, t)$$

alınırsa $J(x, t)$ nin $I \times I$ karesi üzerinde x ve t ye göre sürekli olacağı açıktır.

Şimdi, J nin özdeş olarak sıfır olmadığını varsayalım.

Buna göre

$$J(x_1, t_1) \neq 0$$

olacak şekilde $I \times I$ karesi içinde bir (x_1, t_1) noktası vardır. Ayrıca J nin sürekli olması nedeniyle bir $\delta > 0$ sayısı ve her $(x, t) \in N$ için $J(x, t) \neq 0$ olmak üzere

$$N = \{ |x - x_1| < \delta, \quad |t - t_1| < \delta \}$$

komşuluğu vardır.

$x_0 \leq t_1$ olduğu zaman $(t_1, t_1 + \delta)$ aralığında $f(x) \neq 0$ ve bu aralık dışında I nin her yerinde sıfır olan sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu seçilebilir. Bu durumda

$$\int_{x_0}^x J(x_1, t_1) f(t) dt = \int_{t_1}^{t_1+\delta} J(x_1, t_1) f(t) dt \neq 0$$

olacak şekilde bir $x_1 \in I$ noktası vardır. Bu ise Eş. 3.19 ile çelişir. Tersine $x_0 > t_1$ ise $(t_1 - \delta, t_1)$ aralığında $f(x) \neq 0$ ve bu aralığın dışında I nın her yerinde sıfır olan sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu seçilebilir.

Bu arada, $Ly = f(x)$ $0 \leq k \leq n-1$ için $y^{(k)}(x_0) = 0$ bir nokta sınır değer probleminin çözümü olan Eş. 3.17 fonksiyonu x_0 yerine $x=a$ ya da $x=b$ noktalarındaki koşulları sağlaması gerekiyorsa $y(x)$ in sırasıyla

$$y(x) = \int_a^x H(x, t) f(t) dt, \quad y(x) = -\int_x^b H(x, t) f(t) dt$$

biçiminde yazılabileceği açıktır.

$$\begin{aligned} g(x, t) &= \frac{1}{2} H(x, t), \quad t < x \\ g(x, t) &= -\frac{1}{2} H(x, t), \quad t > x \end{aligned} \tag{3.20}$$

ile tanımlanan $g(x, t)$ fonksiyonu bazı özelliklere sahiptir: $L_x H(x, t) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} L_x g(x, t) &= \frac{1}{2} L_x H(x, t) = 0, \quad t < x \\ L_x g(x, t) &= -\frac{1}{2} L_x H(x, t) = 0, \quad t > x \end{aligned}$$

ya da kısaca

$$\hat{L}_x g(x, t) = 0$$

olur. Burada $\hat{L}$, parçalı türevlenebilir fonksiyonlar üzerinde uygulanan L operatörüdür.

Ayrıca $I = [a, b]$ üzerinde $f(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b g(x, t) f(t) dt$$

ise $Ly(x) = f(x)$ dir. Gerçekten

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^x g(x, t) f(t) dt + \int_x^b g(x, t) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^x H(x, t) f(t) dt - \frac{1}{2} \int_x^b H(x, t) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^x H(x, t) f(t) dt + \frac{1}{2} \int_b^x H(x, t) f(t) dt \end{aligned}$$

şeklinde yazar ve iki yana L operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} Ly(x) &= \frac{1}{2} L \left(\int_a^x H(x, t) f(t) dt \right) + \frac{1}{2} L \left(\int_b^x H(x, t) f(t) dt \right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi Eş. 3.13 problemine dönelim. Burada Eş. 3.14 Homojen probleminin sadece aşıkâr çözüme sahip olduğu bir kez daha vurgulayarak

$$G(x, t) = g(x, t) + \sum_{j=1}^n \psi_j(t) y_j(x) \quad (3.21)$$

fonksiyonu göz önüne alalım. Burada $y_j(x)$ ler $Ly = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri ve $\psi_j(t)$ ler de bilinmeyen katsayılardır.

Yukarıdaki incelemelere göre

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt \quad (3.22)$$

ise, $Ly(x) = f(x)$ olacağı açıktır. Bununla birlikte $y(x)$ in $U_i(y) = 0$ koşullarını sağlayacak şekilde $1 \leq j \leq n$ için $\psi_j(t)$ leri bulalım. Bunun için

$$U_i(y) = \int_a^b U_i(G) f(t) dt = 0$$

ya da $1 \leq i \leq n$ için

$$U_i(G) = 0$$

olmalıdır. Burada U_i , G deki x değişkeni üzerinde sınır operatörü olması nedeniyle

$$U_i(G) = 0 = U_i(g) + \sum_{j=1}^n \psi_j(t) U_i(y_j) \quad (3.23)$$

$1 \leq i \leq n$ için

$$\sum_{j=1}^n \psi_j(t) U_i(y_j) = -U_i(g)$$

yazılabilir. Bu sistemin $1 \leq i, j \leq n$

$$U = (U_i(y_j))$$

katsayıları matrisinin rankı maksimal olduğundan Cramer kuralı yardımıyla Eş. 3.23 sistemi $\psi_j(t)$ için çözülebilir. Bu değerler $D(U) = \det U$ olmak üzere Eş. 3.21 de yerlerine konulursa

$$G(x, t) = \frac{1}{D(U)} \begin{vmatrix} g(x, t) & y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ U_1(g) & U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(g) & U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ U_n(g) & U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \quad (3.24)$$

elde edilir.

Tanım 3.4.

Eş. 3.24 ile tanımlanan $G(x, t)$ fonksiyonu, Eş. 3.14 homojen problemine ilişkin *Klasik Green Fonksiyonu* ya da kısaca *Green Fonksiyonu* adını alır.

Bu tanımın ve önceki incelemelerin sonucu olarak Green Fonksiyonuna ilişkin iki önemli teoremden söz edelim:

Teorem 3.5.

$G(x, t)$, n yinci basamaktan Eş. 3.14 lineer homojen problemi için Green Fonksiyonu olsun. Bu durumda

(i) $G(x, t)$ ve $1 \leq k \leq n-2$ için $\frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x, t)$ türevleri $I \times I$ karesi üzerinde x ve t ye göre süreklidir.

$$(ii) \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(x, t) \Big|_{x=t^+} - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(x, t) \Big|_{x=t^-} = \frac{1}{p_0(t)}$$

$$(iii) \hat{L}_x G(x, t) = 0$$

(iv) $1 \leq i \leq n$ için $U_i(G) = 0$ dir.

Teorem 3.6.

Eş. 3.14 homojen problemi sadece aşikar çözüme sahip ise, bu durumda ona ilişkin bir tek *Green Fonksiyonu* vardır [5].

İspat

$y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları $Ly = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. $G(x, t)$ fonksiyonu, $[a, t]$ aralığında $Ly = 0$ ın bir çözümü olduğundan $a \leq x < t$ için

$$G(x, t) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \dots + a_n y_n(x)$$

ve benzer düşünceler ile $t < x \leq b$ için

$$G(x, t) = b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + \dots + b_n y_n(x)$$

yazılabilir. Burada $a_1, a_2, \dots, a_n$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n$ ler t nin belli fonksiyonlarıdır. $G(x, t)$ ve onun ilk $(n-2)$ basamaktan türevleri $x=t$ noktasında sürekli olduklarından

$$\begin{aligned} (a_1 y_1(t) + \dots + a_n y_n(t)) - (b_1 y_1(t) + \dots + b_n y_n(t)) &= 0 \\ (a_1 y_1'(t) + \dots + a_n y_n'(t)) - (b_1 y_1'(t) + \dots + b_n y_n'(t)) &= 0 \\ \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots & \\ (a_1 y_1^{(n-2)}(t) + \dots + a_n y_n^{(n-2)}(t)) - (b_1 y_1^{(n-2)}(t) + \dots + b_n y_n^{(n-2)}(t)) &= 0 \end{aligned}$$

denklemlerine varılır. Ayrıca

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(t+0, t) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(t-0, t) = \frac{1}{p_0(t)}$$

özellği

$$(a_1 y_1^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y_n^{(n-1)}(t)) - (b_1 y_1^{(n-1)}(t) + \dots + b_n y_n^{(n-1)}(t)) = -\frac{1}{p_0(t)}$$

ile eşdeğer olduğu açıktır. Şimdi $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$C_i = b_i - a_i$$

denirse C_i ye göre

$$\begin{aligned}
C_1 y_1(t) + \dots + C_n y_n(t) &= 0 \\
C_1 y_1'(t) + \dots + C_n y_n'(t) &= 0 \\
&\vdots \\
C_1 y_1^{(n-2)}(t) + \dots + C_n y_n^{(n-2)}(t) &= 0 \\
C_1 y_1^{(n-1)}(t) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(t) &= \frac{1}{p_0(t)}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

sistemi elde edilir.

Bu sistemin katsayıları determinantı $y_1, y_2, \dots, y_n$ lineer bağımsız fonksiyonların $x = t$ noktasındaki Wronskiye'ni olduğundan sıfırdan farklıdır. Böylece Eş. 3.25 sisteminden C_i ler tek olarak bulunur.

Öte yandan a_i ve b_i fonksiyonlarını bulmak için $U_i(y)$ sınır koşulları

$$U_i(y) = U_{ia}(y) + U_{ib}(y) \tag{3.26}$$

biçiminde yazılsın, burada $U_{ia}(y)$ ve $U_{ib}(y)$ sırasıyla

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y^{(j-1)}(a), \quad \sum_{j=1}^n b_{ij} y^{(j-1)}(b)$$

toplamlarını göstermektedir. Buna göre

$$U_i(G) = a_1 U_{ia}(y_1) + \dots + a_n U_{ia}(y_n) + b_1 U_{ib}(y_1) + \dots + b_n U_{ib}(y_n) = 0 \quad \text{dır.} \quad a_k \text{ yerine}$$

$$a_k = b_k - C_k$$

yazıldığında

$$b_1 U_{ib}(y_1) + \dots + b_n U_{ib}(y_n) + (b_1 - C_1) U_{ia}(y_1) + \dots + (b_n - C_n) U_{ia}(y_n) = 0$$

elde edilir. Buradan Eş. 3.46 gösterimi nedeni ile

$$b_1 U_i(y_1) + \dots + b_n U_i(y_n) = C_1 U_{ia}(y_1) + \dots + C_n U_{ia}(y_n) \quad (3.27)$$

sonucuna varılır. Böylece $i = 1, 2, \dots, n$ için Eş. 3.27 den $b_1, b_2, \dots, b_n$ bilinmeyenlerine göre bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin katsayılar determinantı, varsayım nedeniyle sıfırdan farklı olduğundan sistemin, bir tek $b_1, b_2, \dots, b_n$ çözümü vardır ve dolayısıyla $a_i = b_i - C_i$ bağlantısı nedeniyle a_i fonksiyonları tek olarak tanımlanır. Böylece Green Fonksiyonunun varlığı ve tekliği kanıtlanmış olur [6].

Özel olarak $n = 2$ için Eş. 3.13 problemi

$$\begin{aligned} Ly &\equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \\ U_i(y) &\equiv \sum_{j=1}^2 a_{ij} y^{(j-1)}(a) + \sum_{j=1}^2 b_{ij} y^{(j-1)}(b) = 0 \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (3.28)$$

şeklinde ikinci basamaktan sınır değer problemine indirgenir. $Ly = 0$ in y_1 ve y_2 lineer bağımsız çözümlerinin Wronskiyeni

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

olmak üzere ikinci basamaktan L operatörüne ilişkin tek yanlı Green fonksiyonu

$$H(x, t) = -\frac{1}{p_0(t)} \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(t)} \quad (3.29)$$

dir.

Buradan

$$g(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}H(x, t), & t < x \\ -\frac{1}{2}H(x, t), & t > x \end{cases} \quad \text{ve} \quad D(U) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix}$$

olmak üzere Eş. 3.28 den elde edilen homojen probleme ilişkin Green Fonksiyonu

$$G(x, t) = \frac{1}{D(U)} \begin{vmatrix} g(x, t) & y_1(x) & y_2(x) \\ U_1(g) & U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(g) & U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} \quad (3.30)$$

şeklindedir.

Ayrıca, $U_i(y) = 0$ sınır koşulları

$$\begin{aligned} U_1(y) &\equiv \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ U_2(y) &\equiv \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

biçiminde ayrılmış ise y_1 ve y_2 , $Ly = 0$ denklemini ve sırasıyla

$U_1(y_1) = 0$ ve $U_2(y_2) = 0$ koşullarını sağlayan bağımsız çözümler olmak üzere,

Eş. 3.30 Green Fonksiyonu

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{y_1(t)y_2(x)}{p_0(t)W(y_1, y_2)(t)}, & a \leq t < x \\ \frac{y_1(x)y_2(t)}{p_0(t)W(y_1, y_2)(t)}, & x < t \leq b \end{cases} \quad (3.32)$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 3.3.

$$L(y) \equiv (1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1+x^2)^2$$

$$U_1(y) \equiv y(0) + y'(1) = 0$$

$$U_2(y) \equiv y'(0) + y(1) = 0$$

problemini göz önüne alalım.

$Ly = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri $y_1 = x$ ve $y_2 = 1 - x^2$ olduğundan

$U_1(y_1) = 1, U_1(y_2) = -1, U_2(y_1) = 2, U_2(y_2) = 0$ olmak üzere

$$D(U) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

dır. O halde verilen problemin bir tek çözümü vardır. Şimdi bu çözümü bulalım:

$$H(x, t) = \frac{(x-t)(1+xt)}{(1+t^2)^2}$$

ve buradan

$$g(x, t) = \begin{cases} \frac{(x-t)(1+xt)}{2(1+t^2)^2}, & 0 \leq t < x \leq 1 \\ \frac{(t-x)(1+xt)}{2(1+t^2)^2}, & 1 \geq t > x \geq 0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$U_1(g) = \frac{1+3t-t^2}{2(1+t^2)^2} \quad \text{ve} \quad U_2(g) = 0$$

dır. Eş. 3.30 den Green Fonksiyonu

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{x(1-t^2) + (x^2-1)(t^2-2t-1)}{2(1+t^2)^2}, & 0 \leq t < x \leq 1 \\ \frac{x(t^2-1) + (x^2-1)(t^2-4t-1)}{2(1+t^2)^2}, & 0 \leq x < t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Buradan verilen problemin çözümü

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^1 G(x, t) (1+t^2)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{x(1-t^2) + (x^2-1)(t^2-2t-1)}{(1+t^2)^2} (1+t^2)^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_x^1 \frac{x(t^2-1) + (x^2-1)(t^2-4t-1)}{(1+t^2)^2} (1+t^2)^2 dt \\ &= \frac{1}{6} (x^4 - 5x^2 - 2x + 8) \end{aligned}$$

biçimindedir.

Homojen olmayan sınır değer problemleri (koşullar homojen olmayan)

Şimdi homojen olmayan $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} Ly &= f(x) \\ U_i(y) &= \gamma_i \end{aligned} \tag{3.33}$$

sınır değer problemini göz önüne alalım.

Eş. 3.33 e ilişkin homojen problem sadece aşıkâr çözüme sahip ise, $H_i(x)$ fonksiyonları

$$\begin{cases} L(H_i) = 0 \\ U_1(H_i) = \dots = U_{i-1}(H_i) = U_{i+1}(H_i) = \dots = U_n(H_i) = 0 \\ U_i(H_i) = 1 \end{cases}$$

probleminin tek çözümü olmak üzere, Eş. 3.33 probleminin tek çözümü

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt + \gamma_1 H_1(x) + \gamma_2 H_2(x) + \dots + \gamma_n H_n(x) \quad (3.34)$$

şeklindedir [7].

$n = 2$ için Eş. 3.33

$$\begin{aligned} Ly &\equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \\ U_1(y) &\equiv a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = \gamma_1 \\ U_2(y) &\equiv a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = \gamma_2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

ikinci basamaktan sınır değer problemine indirgenir. $H_1(x)$ ve $H_2(x)$ sırası ile

$$\begin{cases} L(H_1) = 0 \\ U_1(H_1) = 1 \\ U_2(H_1) = 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} L(H_2) = 0 \\ U_1(H_2) = 0 \\ U_2(H_2) = 1 \end{cases}$$

problemlerinin çözümleri olmak üzere Eş. 3.35 in tek çözümü

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt + \gamma_1 H_1(x) + \gamma_2 H_2(x)$$

şeklindedir.

Örnek 3.4.

$$y'' = f(x)$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) + y'(1) = 2$$

problemini göz önüne alalım.

Buna ilişkin homojen problem sadece aşıkâr çözüme sahip olduğundan verilen problemin bir tek çözümü vardır. Green Fonksiyonu kullanılarak $y'' = 0$ denklemini ve sırasıyla $y(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$ homojen koşullarını sağlamak üzere bağımsız çözümler, $y_1 = x$ ve $y_2 = x - 2$ biçimindedir. $p_0(t)W(y_1, y_2)(t) = W(t, t - 2) = 2$ olduğundan homojen probleme ilişkin Green Fonksiyonu

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t(x - 2), & 0 \leq t < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x(t - 2), & 0 \leq x < t \leq 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

Öte yandan $\gamma_1 = 0$ ve $\gamma_2 = 2$ olduğundan sadece

$$y'' = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) + y'(1) = 2$$

problemini sağlayan $H_2(x) = \frac{x}{2}$ fonksiyonu bulmak yeterlidir.

Böylece verilen homojen olmayan problemin çözümü

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^1 G(x, t) f(t) dt + x \\ &= \frac{(x-2)}{2} \int_0^x t f(t) dt + \frac{x}{2} \int_x^1 (t-2) f(t) dt + x \end{aligned}$$

biçiminde bulunur.

Şimdi $D(U) = 0$ olmak üzere sınır değer problemine dönelim: Lineer denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği hakkında sonuçlar, sınır değer problemleri için de geçerlidir. Buradan, homojen olmayan $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} Ly &= f(x) \\ U_i(y) &= \gamma_i \end{aligned} \tag{3.36}$$

sınır değer problemini göz önüne alalım.

$y_1, y_2, \dots, y_n$ $Ly = 0$ nin lineer bağımsız çözümleri ve y_p , $Ly = f$ in bir özel çözümü olmak üzere $Ly = f$ denkleminin genel çözümü

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_p \tag{3.37}$$

dir. Sınır koşullarının uygulanmasıyla

$$\begin{array}{l} C_1 U_1(y_1) + C_2 U_1(y_2) + \dots + C_n U_1(y_n) = \gamma_1 - U_1(y_p) \\ C_1 U_2(y_1) + C_2 U_2(y_2) + \dots + C_n U_2(y_n) = \gamma_2 - U_2(y_p) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ C_1 U_n(y_1) + C_2 U_n(y_2) + \dots + C_n U_n(y_1) = \gamma_n - U_n(y_p) \end{array} \quad (3.38)$$

sistemi elde edilir.

Buradan katsayılar matrisi

$$A = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \dots U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \dots U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots \quad \dots \quad \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) \dots U_n(y_n) \end{pmatrix}$$

ve eklemeli matris

$$(A:\gamma) = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \dots U_1(y_n) & :\gamma_1 - U_1(y_p) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \dots U_2(y_n) & :\gamma_2 - U_2(y_p) \\ \vdots & \vdots \quad \dots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) \dots U_n(y_n) & :\gamma_n - U_n(y_p) \end{pmatrix}$$

olmak üzere $r \leq n$ için

$r = \text{rank}(A) = \text{rank}(A : \gamma)$ ise Eş. 3.38 ve dolayısıyla Eş. 3.36 problemi en az bir çözüme sahiptir. Buradan Eş. 3.36 problemi homojen ve $D(U) = 0$ olduğunda problemin en az bir çözümünün olacağı açıktır.

Örnek 3.5.

$$Ly \equiv (2x^2 + 1)y'' - 4xy' + 4y = (2x^2 + 1)^2$$

$$U_1(y) \equiv y(0) - y'(0) = 1$$

$$U_2(y) \equiv y(1) = 0$$

problemini gözönüne alalım.

$Ly = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri

$$y_1 = x \quad \text{ve} \quad y_2 = 2x^2 - 1$$

olduğundan

$$D(U) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dir. Buradan $Ly = 0$, $U_1(y) = U_2(y) = 0$ homojen problemin en az bir çözümü vardır. Ancak verilen problemin çözümü olabilir veya olmayabilir. Şimdi ona bakalım:

$Ly = (2x^2 + 1)^2$ nin özel bir çözümü $y_p(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^2$ olduğundan (A) ve $(A:\gamma)$

matrisleri sırasıyla

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad (A:\gamma) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -5/6 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Buna göre $\text{rank}(A)=1$ ve $\text{rank}(A:\gamma)=2$ olması nedeniyle verilen problemin çözümü yoktur. Ancak, L operatörü aynı kalmak üzere U_1 ve U_2 sınır operatörleri:

$$U_1(y) \equiv y(0) - y'(0) = 1$$

$$U_2(y) \equiv y(1) = -1/6$$

biçiminde değiştirilirse, bu kez elde edilen

$$Ly = (2x^2 + 1)^2$$

$$U_1(y) = 1$$

$$U_2(y) = -1/6$$

sınır değer probleminin en az bir çözümü vardır. Gerçekten, bu durumda

$$(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } (A:\gamma) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & : & 1 \\ 1 & 1 & : & -1 \end{pmatrix}$$

matrislerinin rankı 1 e eşittir. Buradan değiştirilmiş problemin genel çözümü, C keyfi olmak üzere

$$y(x) = C(2x^2 - x - 1) + (1/3)x^4 + (1/2)x^2 - x$$

biçiminde bulunur.

Özdeğer problemlerine ilişkin green fonksiyonu

n yinci basamaktan $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$Ly \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$$U_i(y) \equiv \sum_{j=1}^n a_{ij}y^{(j-1)}(a) + \sum_{j=1}^n b_{ij}y^{(j-1)}(b) = 0$$

sınır değer probleminde, $p_i(x)$ katsayılarının bir keyfi λ sabitine bağlı olması durumunda daha genel bir sınır değer problemi elde edilir. Böyle bir problem $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} Ly &\equiv p_0(x, \lambda)y^{(n)} + p_1(x, \lambda)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x, \lambda)y' + p_n(x, \lambda)y = 0 \\ U_i(y) &= 0 \end{aligned} \tag{3.39}$$

biçimindedir.

Tanım 3.5.

Eş. 3.39 probleminde olduğu gibi, x den bağımsız bir λ parametresi içeren sınır değer problemlerine *özdeğer problemleri* denir.

Eş. 3.39 özdeğer problemi açık olarak $y = 0$ aşıkâr çözümüne sahiptir. Ancak bu durumda $D(U)$ nun, λ ya göre bir fonksiyon olması gerektiğinden λ nın belli değerleri için sınır değer probleminin aşıkâr olmayan çözümleri olmayabilir.

Tanım 3.6.

aşıkâr olmayan çözümlerin var olduğu λ nın değerlerine özdeğerler ve bunlara karşılık gelen aşıkâr olmayan çözümlere de özfonksiyonlar denir[8].

Örnek 3.6.

$$(1 - \lambda x)y'' + \lambda^2 xy' - \lambda^2 y = 0$$

$$y'(0) + y'(1) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

özdeğer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulalım: Diferensiyel denklemin genel çözümü

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x$$

dir. Sınır koşulları uygulanırsa

$$\lambda(1 + e^\lambda)C_1 + 2C_2 = 0$$

$$\lambda C_1 + C_2 = 0$$

bulunur. Bu sisteme ilişkin

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda(1 + e^\lambda) & 2 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda(e^\lambda - 1)$$

katsayılar determinantı sadece $\lambda = 0$ için sıfırdır. Buradan $\lambda = 0$ için diferensiyel denklemin genel çözümü

$$y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 x = C_1 + C_2 x$$

olup sınır koşulları uygulanırsa $y = C$, $C = \text{keyfi}$ aşık ar olmayan çözümü elde edilir.

O halde $\lambda = 0$ özdeğer ve $C \neq 0$ için $y = C$ özfonksiyonlardır.

Şimdi $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), f(x)$ fonksiyonları $I = [a, b]$ kapalı sonlu aralığı üzerinde sürekli ve I da $p_0(x) \neq 0$ olmak üzere n inci basamaktan

$$Ly \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = \lambda y + f(x) \quad (3.40)$$

diferensiyel denklemi ile $1 \leq i \leq n$ için

$$U_i(y) \equiv \sum_{j=1}^n a_{ij}y^{(j-1)}(a) + \sum_{j=1}^n b_{ij}y^{(j-1)}(b) = 0 \quad (3.41)$$

iki nokta sınır koşullarından oluşan özdeğer problemini göz önüne alalım.

Homogen özdeğer problemleri

$f(x)=0$ olması durumunda Eş. 3.40 ve Eş. 3.41 den oluşan $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} Ly &= \lambda y \\ U_i(y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

homogen problem elde edilir.

Eş. 3.42 probleminin özdeğerleri için Eş. 3.42 aşıkâr olmayan çözümlere sahiptir. aşıkâr olmayan çözümlerin her biri, λ ya karşılık gelen özfonksiyonlardır. $y(x) \equiv 0$ çözümü bir özfonksiyon olamaz. $\lambda = 0$ bir özdeğer olabilir, ancak buna karşılık gelen çözümün aşıkâr olmaması gerekir.

Aynı λ özdeğerine karşılık gelen öz fonksiyonların bir lineer kombinasyonu yine o özdeğere karşılık olan bir özfonksiyondur. Gerçekten $Ly_1 = \lambda y_1$ ve $Ly_2 = \lambda y_2$ ise bu durumda C_1 ve C_2 sabitleri için $L(C_1y_1 + C_2y_2) = \lambda(C_1y_1 + C_2y_2)$ dir.

$Ly = \lambda y$ denklemi, verilen bir λ değeri için n den fazla lineer bağımsız çözüme sahip olmaz.

Önceki kısımda verilen $D(U)$ özdeğer problemi için λ ya bağlı olması gerektiğinden bu kez U ile $D(\lambda)$ ilişkisi aşağıdaki gibi verilebilir.

Eş. 3.42 probleminin aşıkâr olmayan çözümlere sahip olması

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{pmatrix}$$

matrisin rankının n den küçük yada

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix} = 0$$

olması ile eşdeğerdir.

$D(\lambda)$, Eş. 3.42 sınır değer probleminin özdeteminantı adını alır. Buradan aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.7.

Eş. 3.42 probleminin özdeğerleri, $D(\lambda)$ nın sıfırlarıdır. $D(\lambda)$ özdeş olarak sıfır ise, bu durumda her λ sayısı problemin bir özdeğeridir [5].

Bununla birlikte, $D(\lambda)$ özdeş olarak sıfır değil ise, Eş. 3.42 sınır değer problemi en fazla sayılabilir çoklukta özdeğerlere sahiptir.

λ , $D(\lambda)$ özdeteminatının katlı ya da basit kökü olabilir. Basit kökler durumunda yinelenme sayılarının bir olacağı açıktır. Öte yandan $D(\lambda)$ nın sıfırı olmayabilir ancak bu durumda Eş. 3.42 probleminin özdeğerleri yoktur.

Örnek 3.7.

$$-y'' = \lambda y$$

$$U_1(y) \equiv y(0) + y(1) = 0$$

$$U_2(y) \equiv y'(0) - y'(1) = 0$$

probleminde her λ sayısı bir özdeğerdir. Denklemin lineer bağımsız çözümleri

$$y_1(x) = e^{\sqrt{-\lambda}x} \text{ ve } y_2(x) = e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

olduğundan

$$U_1(y_1) = 1 + e^{\sqrt{-\lambda}}, \quad U_1(y_2) = 1 + e^{-\sqrt{-\lambda}}, \quad U_2(y_1) = \sqrt{-\lambda}(1 - e^{\sqrt{-\lambda}}), \quad U_2(y_2) = \sqrt{-\lambda}(e^{-\sqrt{-\lambda}} - 1)$$

bulunur. Buradan

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + e^{\sqrt{-\lambda}} & 1 + e^{-\sqrt{-\lambda}} \\ \sqrt{-\lambda} - \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}} & -\sqrt{-\lambda} + \sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix} = 0$$

dır.

Öte yandan U_1 ve U_2 sınır operatörleri

$$U_1(y) \equiv y(0) + 2y(1)$$

$$U_2(y) \equiv y'(0) - 2y'(1)$$

şeklinde değiştirilirse, bu durumda elde edilen

$$-y'' = \lambda y, \quad U_1(y) = U_2(y) = 0$$

özdeğer probleminin özdeğerleri yoktur. Çünkü

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + 2e^{\sqrt{-\lambda}} & 1 + 2e^{-\sqrt{-\lambda}} \\ \sqrt{-\lambda} - 2\sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}} & -\sqrt{-\lambda} + 2\sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix} = 6\sqrt{-\lambda}$$

dır. Her ne kadar $\lambda = 0$ için $D(\lambda) = 0$ ise de buna karşılık gelen çözüm, $y = 0$ aşıkâr çözüdür.

Uygulamalarda, zaman zaman aşağıda olduğu gibi daha genel özdeğer problemleri ile karşılaştırılabilir:

L diferensiyel operatörünün katsayıları ve aynı zamanda $i = 1, 2, \dots, n$ için $U_i(y) = 0$ sınır koşulları bir karmaşık λ sayısına bağlı olabilir. Bu durumda λ özdeğerleri, $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$Ly = 0; \quad U_i(y) = 0$$

sınır değer problemi aşıkâr olmayan bir çözüme sahip olacak şekilde bulunabilir. Böyle problemler, *genelleştirilmiş özdeğer problemleri* adını alır.

Örnek 3.8.

λ bir karmaşık sayı olmak üzere

$$y'' - 4\lambda y' + 4\lambda^2 y = 0$$

$$y(0) + y'(0) = 0$$

$$y(1) - y'(1) = 0$$

özdeğer problemini göz önüne alalım. Diferensiyel denklemin

$$y = C_1 e^{2\lambda x} + C_2 x e^{2\lambda x}$$

genel çözümüne, sınır koşulları uygulanırsa

$$(1 + 2\lambda)C_1 + C_2 = 0$$

$$(1 - 2\lambda)C_1 - 2\lambda C_2 = 0$$

sistemine varılır. Buradan

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + 2\lambda & 1 \\ 1 - 2\lambda & -2\lambda \end{vmatrix} = -(1 + 4\lambda^2)$$

olduğundan problemin özdeğerleri

$$\lambda_1 = \frac{i}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{i}{2}$$

ve bunlara karşılık gelen aşıkır olmayan çözümler sırasıyla

$$y_1 = A \left\{ (1-x) \cos x + x \sin x + i \left((1-x) \sin x - x \cos x \right) \right\}$$

$$y_2 = B \left\{ (1-x) \cos x + x \sin x - i \left((1-x) \sin x - x \cos x \right) \right\}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi Eş. 3.40 ve Eş. 3.41 den oluşan $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} Ly &= \lambda y + f(x) \\ U_i(y) &= 0 \end{aligned} \tag{3.43}$$

homojen olmayan sınır değer problemini ele alalım.

$$y_1 = y_1(x, \lambda), y_2 = y_2(x, \lambda), \dots, y_n = y_n(x, \lambda)$$

fonksiyonları $Ly = \lambda y$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Buna göre λ ,

$$\begin{aligned} Ly &= \lambda y \\ U_i(y) &= 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

homojen problemin özdeğeri değil ise $D(\lambda) \neq 0$ dır.

Bu durumda Eş. 3.43 probleminin bir tek çözümü vardır. Bu çözüm sınır değer problemlerindeki benzer düşünceden hareketle Green Fonksiyonu yardımıyla elde edilebilir:

$y_1, y_2, \dots, y_n$ çözümlerinin Wronskiyeni

$$W(t, \lambda) = \begin{vmatrix} y_1(t, \lambda) & y_2(t, \lambda) & \dots & y_n(t, \lambda) \\ y_1'(t, \lambda) & y_2'(t, \lambda) & \dots & y_n'(t, \lambda) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t, \lambda) & y_2^{(n-1)}(t, \lambda) & \dots & y_n^{(n-1)}(t, \lambda) \end{vmatrix}$$

olmak üzere $Ly = \lambda y$ denkleminin ilişkin tek yanlı Green Fonksiyonu

$$H(x, t, \lambda) = \frac{(-1)^{n-1}}{p_0(t)W(t, \lambda)} \begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & \dots & y_n(x, \lambda) \\ y_1(t, \lambda) & y_2(t, \lambda) & \dots & y_n(t, \lambda) \\ y_1'(t, \lambda) & y_2'(t, \lambda) & \dots & y_n'(t, \lambda) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t, \lambda) & y_2^{(n-2)}(t, \lambda) & \dots & y_n^{(n-2)}(t, \lambda) \end{vmatrix}$$

dir. $g(x, t, \lambda)$ fonksiyonu

$$g(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} H(x, t, \lambda), & t < x \\ -\frac{1}{2} H(x, t, \lambda), & t > x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmak üzere Eş. 3.44 problemine ilişkin Green Fonksiyonu

$$G(x, t, \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \begin{vmatrix} g(x, t, \lambda) & y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & \dots & y_n(x, \lambda) \\ U_1(g) & U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(g) & U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ U_n(g) & U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

dir. Buradan Eş. 3.43 probleminin tek çözümü

$$y(x) = \int_a^b G(x, t, \lambda) f(t) dt$$

şeklindedir.

$H(x, t, \lambda)$ ve $G(x, t, \lambda)$ fonksiyonları, aşağıdaki uyarıları sağlarlar:

Uyarı 3.1.

$H(x, t, \lambda)$ fonksiyonu ve $1 \leq k \leq n$ için

$\frac{\partial^k}{\partial x^k} H(x, t, \lambda)$ türevleri $[a, b]$ aralığındaki x, t ve her λ için (x, t, λ) üçlüsünün sürekli fonksiyonlarıdır.

Uyarı 3.2.

$\frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x, t, \lambda)$ türevleri $k = 0, 1, 2, \dots, n-2$ $a \leq x, t \leq b$ aralığındaki her x, t ve Eş.

3.44 ün bir özdeğeri olmayan λ değeri için (x, t, λ) nın sürekli fonksiyonlarıdır.

Örnek 3.9.

$$Ly \equiv x^2 y'' + xy' = \lambda y + 2x$$

$$U_1(y) \equiv y'(1) = 0$$

$$U_2(y) \equiv y(2) = 0$$

problemini ele alalım.

$Ly = \lambda y$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri

$$y_1 = x^{\sqrt{\lambda}} \text{ ve } y_2 = x^{-\sqrt{\lambda}}$$

dir. Buradan

$$U_1(y_1) = \sqrt{\lambda}, U_1(y_2) = -\sqrt{\lambda}, U_2(y_1) = 2^{\sqrt{\lambda}}, U_2(y_2) = 2^{-\sqrt{\lambda}}$$

olup

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \sqrt{\lambda} & -\sqrt{\lambda} \\ 2^{\sqrt{\lambda}} & 2^{-\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = \sqrt{\lambda} 2^{-\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\lambda} 2^{\sqrt{\lambda}}.$$

$D(\lambda)$ yı sıfır yapan $\lambda = 0$ incelenirse homojen problemin bir özdeğeri olmadığı görülür. O halde $x \in [1, 2]$ için homojen olmayan problemin bir tek çözümü vardır. Şimdi bu çözümü Green Fonksiyonu yardımıyla bulalım:

$$H(x, t, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}t} \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{\sqrt{\lambda}} - \left(\frac{t}{x} \right)^{\sqrt{\lambda}} \right)$$

Ve

$$g(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{\lambda}t} \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{\sqrt{\lambda}} - \left(\frac{t}{x} \right)^{\sqrt{\lambda}} \right), & t < x \\ \frac{-1}{4\sqrt{\lambda}t} \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{\sqrt{\lambda}} - \left(\frac{t}{x} \right)^{\sqrt{\lambda}} \right), & t > x \end{cases}$$

olduğuna göre

$$U_1(g) = -\frac{1}{4t} (t^{-\sqrt{\lambda}} + t^{\sqrt{\lambda}})$$

$$U_2(g) = -\frac{1}{4\sqrt{\lambda}t} \left(\left(\frac{2}{t} \right)^{\sqrt{\lambda}} - \left(\frac{t}{2} \right)^{\sqrt{\lambda}} \right)$$

dır. Buradan Green Fonksiyonu

$$G(x, t, \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \begin{vmatrix} g(x, t, \lambda) & y_1(x, t) & y_2(x, \lambda) \\ U_1(g) & U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(g) & U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix}$$

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2tD(\lambda)} \left(\left(x^{\sqrt{\lambda}} 2^{-\sqrt{\lambda}} - x^{-\sqrt{\lambda}} 2^{\sqrt{\lambda}} \right) t^{-\sqrt{\lambda}} + \left(x^{\sqrt{\lambda}} 2^{-\sqrt{\lambda}} - x^{-\sqrt{\lambda}} 2^{\sqrt{\lambda}} \right) t^{\sqrt{\lambda}} \right), & t < x \\ \frac{1}{2tD(\lambda)} \left(\left(-x^{\sqrt{\lambda}} 2^{\sqrt{\lambda}} - x^{-\sqrt{\lambda}} 2^{\sqrt{\lambda}} \right) t^{-\sqrt{\lambda}} + \left(x^{-\sqrt{\lambda}} 2^{-\sqrt{\lambda}} + x^{\sqrt{\lambda}} 2^{-\sqrt{\lambda}} \right) t^{\sqrt{\lambda}} \right), & t > x \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece verilen problemin çözümü $\lambda \neq 1$ için

$$y(x) = \int_1^2 G(x, t, \lambda) f(t) dt$$

$$= \frac{2}{1-\lambda} \left(x - \frac{(2^{-\sqrt{\lambda}} + 2\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}(2^{-\sqrt{\lambda}} + 2\sqrt{\lambda})} x^{\sqrt{\lambda}} + \frac{(2^{-\sqrt{\lambda}} - 2\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}(2^{-\sqrt{\lambda}} + 2\sqrt{\lambda})} x^{-\sqrt{\lambda}} \right)$$

biçiminde elde edilir [9].

4. ZAMANDAN BAĞIMSIZ PROBLEMLERE İLİŞKİN GREEN FONKSİYONU

4.1. Bir Boyutlu Isı Denkleminin İlişkin Green Fonksiyonu

Bu kesimde basit yapılarından dolayı önce kaynak içermeyen ve homojen sınır koşullarına sahip bir boyutlu ısı denkleminin ilişkin problemi göz önüne alacağız. Daha sonra kaynaklı Isı denklemi üzerinde duracağız. Her bir problem için Green Fonksiyonu elde etmeye çalışacağız.

Kaynaklı Laplace denkleminin ilişkin problemler ve diğer zamana bağlı problemler için Green fonksiyonunun elde edilmesi daha karmaşık olduğu için üzerinde durulmayacaktır [2,11].

Kaynak içermeyen ve homojen sınır koşullarına sahip bir boyutlu ısı denkleminin ilişkin

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) &= 0 \\ u(L, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= g(x)\end{aligned}$$

problemini göz önüne alalım. Değişkenlerine ayırma metodu kullanılırsa ve ilgili koşullar uygulanırsa, a_n ler Fourier sinüs serisinin katsayıları olmak üzere

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \quad (4.1)$$

dır.

Burada

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (4.2)$$

olmak üzere

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (4.3)$$

dir. Bu çözümün sınır şartlarını sağladığı kolaylıkla görülür. a_n in yukarıdaki değeri seride yerine konularak, gerekli düzenlemeler yapıldığında ve geçici bir x_0 değişkeni göz önüne alındığında

$$u(x, t) = \int_0^L g(x_0) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \right) dx_0$$

elde edilir.

Parantez içindeki ifade başlangıç koşulu için Etki Fonksiyonunu temsil eder ve x_0 noktasındaki başlangıç sıcaklığına bağlı olarak t zamanda x konumundaki sıcaklığı ifade eder. Bu sonucu ele almadan önce kaynakları içeren daha genel bir ısı denklemi için benzer bir analiz yapmak yararlıdır. Homojen denklemin sınır şartları aynı kalmak üzere homojen olmayan aşağıdaki problemi göz önüne alalım;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Psi(x, t)$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = 0$$

$$u(x, 0) = g(x).$$

Fiziksel olarak bu problem, bir sicimi hareket ettiren bir dış kuvvetin mevcut olduğunu ve sicimin denge konumundan (başlangıç konumu ve başlangıç hızı sıfır) dış kuvvetin etkisinde kalarak hareketi olarak da yorumlanabilir. Şimdi $a_n(t)$ ler belirlemek üzere problemin

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (4.4)$$

Formunda bir çözümünü arayalım.

$\sin \frac{n\pi x}{L}$ ve $u(x, t)$ aynı homojen sınır şartlarını sağladığından bu Fourier sinüs serisi terim terime diferensiyellenebilir. Böylece $a_n(t)$ çözümleri birinci basamaktan

$$\frac{da_n}{dt} + k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 a_n = q_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \Psi(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (4.5)$$

diferensiyel denklemini sağlar. Burada $q_n(t)$ fonksiyonları

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (4.6)$$

Fourier sinüs serisinin katsayılarıdır. Eş. 4.5 in çözümü

$$a_n(t) = a_n(0) e^{-k(n\pi/L)^2 t} + e^{-k(n\pi/L)^2 t} \int_0^t q_n(t_0) e^{k(n\pi/L)^2 t_0} dt_0 \quad (4.7)$$

dır.

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (4.8)$$

ve

$$a_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (4.9)$$

olmak üzere $a_n(0)$, $u(x, 0) = g(x)$ başlangıç koşulunun Fourier sinüs serisinin katsayılarıdır.

Böylece yukarıda elde edilenler Eş. 4.4 da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{L} \int_0^L g(x_0) \sin \frac{n\pi x_0}{L} dx_0 \right) e^{-k(n\pi/L)^2 t} \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-k(n\pi/L)^2 t} \int_0^t \left(\frac{2}{L} \int_0^L \Psi(x_0, t_0) \sin \frac{n\pi x_0}{L} dx_0 \right) e^{k(n\pi/L)^2 t_0} dt_0 \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \end{aligned}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^L g(x_0) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \right] dx_0 \\ & + \int_0^L \int_0^t \Psi(x_0, t_0) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 (t-t_0)} \right] dt_0 dx_0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$G(x, t; x_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 (t-t_0)} \quad (4.10)$$

ifadesine *Green Fonksiyonu* denir. Bu fonksiyon yardımı ile kaynak içeren ısı denkleminin ilişkin problemin çözümü

$$u(x, t) = \int_0^L g(x_0) G(x, t; x_0, 0) dx_0 + \int_0^L \int_0^t \Psi(x_0, t_0) G(x, t; x_0, t_0) dt_0 dx_0$$

dır.

$t_0 = 0$ anında Green Fonksiyonu $G(x, t; x_0, 0)$ t zamanda ve x konumunda sıcaklık üzerinde x_0 noktasındaki başlangıç sıcaklığının etkisini gösterir. İlaveten $G(x, t; x_0, t_0)$ t_0 zamanda x_0 konumunda $\Psi(x_0, t_0)$ etki teriminin t zamanında ve x konumundaki sıcaklık üzerine etkisini de gösterir.

Kararlı-durum ısı denkleminin ilişkin kaynak fonksiyonu zamandan bağımsız olan $(\psi(x, t) = \psi(x))$

$$0 = k \frac{d^2 u}{dx^2} + \psi(x) \quad (4.11)$$

problemini ele alalım. Bu durumda $f(x) = -\frac{\psi(x)}{k}$ olmak üzere

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x) \quad (4.12)$$

denkleminin ilişkin sınır koşulları

$$u(0) = 0 \quad \text{ve} \quad u(L) = 0 \quad (4.13)$$

olsun.

Daha önceki kesimlerde olduğu gibi hareket edilirse, yukarıdaki problemin çözümü

$$u(x, t) = \int_0^L g(x_0) G(x, t; x_0, 0) dx_0 + \int_0^L -kf(x_0) \left(\int_0^t G(x, t; x_0, t_0) dt_0 \right) dx_0 \quad (4.14)$$

dır.

Eş. 4.12, Eş. 4.13 probleminin çözümü

$$u(x, t) \rightarrow u(x) = \int_0^L f(x_0) G(x, x_0) dx_0 \quad (4.15)$$

dır. Burada G

$$G(x, x_0) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \frac{\sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}}{\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2} \quad (4.16)$$

dır.

$\psi(x) = -k f(x)$ olmak üzere zamana bağlı problemin $t \rightarrow \infty$ iken limitini alarak kararlı-durum sıcaklık dağılımı $u(x)$ elde edilir.

Kararlı-durum ısı denklemi için Eş. 4.16 ve Eş. 3.10 olmak üzere iki Green fonksiyonu belirledik. Birbirlerinden farklı görünmelerine rağmen tamamen aynı oldukları görülür. Özel olarak; Eş. 3.10 fonksiyonunun Fourier sinüs açılımının Eş. 4.16 fonksiyonu olduğu gösterilir;

$$G(x, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{n\pi x}{L}$$

olmak üzere Fourier sinüs serisinin b_k katsayıları;

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{L} \int_0^L G(x, x_0) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^{x_0} G(x, x_0) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{L} \int_{x_0}^L G(x, x_0) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= \frac{2}{L} \int_0^{x_0} -\frac{x(L-x_0)}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{L} \int_{x_0}^L -\frac{x_0(L-x)}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= \frac{2}{L} \int_0^{x_0} \left(-x + \frac{xx_0}{L}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{L} \int_{x_0}^L \left(-x_0 + \frac{xx_0}{L}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= -\frac{2}{L} \int_0^{x_0} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{L^2} \int_0^{x_0} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx - \frac{2x_0}{L} \int_{x_0}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2x_0}{L^2} \int_{x_0}^L x \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= -\frac{2}{L} \left[-\frac{L}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{L} + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} \right]_0^{x_0} + \frac{2x_0}{L^2} \left[-\frac{L}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{L} + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} \right]_0^{x_0} \\
&\quad + \frac{2x_0}{n\pi} \left[-\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_{x_0}^L + \frac{2x_0}{L^2} \left[-\frac{L}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{L} + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} \right]_{x_0}^L \\
&= -\frac{2}{L} \left[-\frac{L}{n\pi} x_0 \cos \frac{n\pi x_0}{L} + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi x_0}{L} \right] + \frac{2x_0}{L^2} \left[-\frac{L}{n\pi} x_0 \cos \frac{n\pi x_0}{L} + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi x_0}{L} \right] \\
&\quad + \frac{2x_0}{n\pi} \left[(-1)^n - \cos \frac{n\pi x_0}{L} \right] + \frac{2x_0}{L^2} \left[\frac{L^2}{n\pi} (-1)^n + \frac{Lx_0}{n\pi} \cos \frac{n\pi x_0}{L} - \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi x_0}{L} \right] \\
&= \frac{2x_0}{n\pi} \cos \frac{n\pi x_0}{L} - \frac{2}{L} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi x_0}{L} - \frac{2x_0^2}{Ln\pi} \cos \frac{n\pi x_0}{L} + \frac{2x_0}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \\
&\quad + \frac{2x_0}{n\pi} (-1)^n - \frac{2x_0}{n\pi} \cos \frac{n\pi x_0}{L} - \frac{2x_0}{n\pi} (-1)^n + \frac{2x_0^2}{Ln\pi} \cos \frac{n\pi x_0}{L} - \frac{2x_0}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \\
&= -\frac{2}{L} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi x_0}{L}
\end{aligned}$$

bulunur. b_k katsayıları Fourier serisinde yerine yazılırsa

$$G(x, x_0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

elde edilir.

4.2. Green Fonksiyonu İçin Özfonksiyon Açılımı Yöntemi

Bu kesimde homojen olmayan diferensiyel denklemlerden olan Sturm-Liouville denkleminin genel bir biçimine özfonksiyon açılımı yönteminin nasıl uygulanacağı üzerinde durulacaktır.

$$L(u) = f(x) \quad (4.17)$$

denklemini ve homojen sınır koşulları göz önüne alalım. Bu probleme ilişkin özdeğer problemi

$$L(\phi) = -\lambda \sigma \phi \quad (4.18)$$

aynı homojen sınır şartları ile verilsin. Burada σ ağırlığı sabit olarak seçilir. Eş. 4.17 probleminin çözümü,

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \quad (4.19)$$

özfonksiyonların genelleştirilmiş bir Fourier Serisi gibi araştırılarak çözülür. $\phi_n(x)$ ve $u(x)$ aynı homojen sınır koşullarını sağladığı için, her iki tarafın terim terime türevi alınır

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n L(\phi_n) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \sigma \phi_n = f(x).$$

σ ağırlığı ile özfonksiyonların ortogonalitesi göz önüne alınırsa

$$-a_n \lambda_n = \frac{\int_a^b f(x) \phi_n dx}{\int_a^b \phi_n^2 \sigma dx} \quad (4.20)$$

elde edilir.

Böylece gerekli düzenlemeler yapıldığında Homojen olmayan diferansiyel denklemler için sınır değer probleminin çözümü

$$u(x) = \int_a^b f(x_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x) \phi_n(x_0)}{-\lambda_n \int_a^b \phi_n^2 \sigma dx} dx_0 \quad (4.21)$$

dır. Bu problemde Green Fonksiyonu, özfonksiyonların terimleri ile

$$G(x, x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x) \phi_n(x_0)}{-\lambda_n \int_a^b \phi_n^2 \sigma dx} \quad (4.22)$$

şeklinde ifade edilir. λ_n özdeğerlerinin paydada oluşu önemlidir. Özdeğerlerden biri sıfır ise Green fonksiyonu yoktur. Bu durum daha sonra incelenecektir. Bu kısımda bütün λ_n özdeğerler sıfırdan farklı alınsın.

Örnek 4.1.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= f(x) \\ u(0) &= 0 \\ u(L) &= 0 \end{aligned}$$

sınır değer problemi ile ilgili özdeğer problemi

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2} &= -\lambda\phi \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0\end{aligned}$$

olmak üzere, özdeğerler $n=1,2,3,\dots$ için $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ ve bu değerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise $\sin(n\pi x/L)$ dir. $u(x)$ in Fourier sinüs serileri Eş. 4.19 de belirtildiği gibidir. Özel olarak;

$$u(x) = \int_0^L f(x_0) G(x, x_0) dx_0$$

dir. Burada Green Fonksiyonunun Fourier sinüs serileri Eş. 4.22 den

$$G(x, x_0) = -\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x_0}{L}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

dir. Bu ise zamana bağlı problemin $t \rightarrow \infty$ iken limiti alınarak elde edilen Eş. 4.16 ile aynıdır.

Daha önceki kısımlarda Green Fonksiyonunun farklı durumlarını ele aldık. Green fonksiyonu x noktasındaki çözümde kaynağın her x_0 konumundaki etkisini gösterir.

$f(x)$ kaynağı, sistemin bütün noktalarında bir kuvvetini gösterir.

4.3. Fredholm Alternatifi ve Değiştirilmiş Green Fonksiyonu

Eğer $\lambda = 0$ bir özdeğer ise Green Fonksiyonu yoktur. Bunun zorluğunu anlamak için homojen olmayan ve aynı sınır koşulları ile verilen

$$L(u) = f(x) \quad (4.23)$$

problemini tekrar ele alalım. Özfonksiyon açılım yönteminden

$$-a_n \lambda_n = \frac{\int_a^b f(x) \phi_n(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2 \sigma dx} \quad (4.24)$$

yerine yazılırsa önceki kısımlarda

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \quad (4.25)$$

elde edildi.

Eğer $\lambda_n = 0$ ise homojen olmayan sınır değer probleminin hiç çözümü olmayabilir.

Özellikle, $\lambda_n = 0$ a karşılık gelen özfonksiyon için

$$\int_a^b f(x) \phi_n(x) dx \neq 0$$

ise $\lambda_n = 0$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon Eş. 4.24 denklemi sağlanmaz.

Örnek 4.2.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= e^x \\ \frac{du(0)}{dx} &= 0 \\ \frac{du(L)}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

sınır değer problemini ele alalım. Eş. 4.26 problemini integral olarak çözmeye çalışırsak

$$\frac{du}{dx} = e^x + c$$

elde edilir. Sınır şartları uygulandığında

$$0 = 1 + c$$

$$0 = e^L + c$$

bulunur ki, bu bir çelişkidir. $\lambda = 0$, ilgili özdeğer problemi için bir özdeğer olduğunda homojen olmayan bir sınır değer problemi için herhangi çözümlerin olduğunu garanti etmez ($\frac{d^2\phi_n}{dx^2} = -\lambda_n\phi_n$; $\frac{d\phi_n(0)}{dx} = 0$, $\frac{d\phi_n(L)}{dx} = 0$).

Bu örnekte fiziksel bir açıdan bakıldığında denge sıcaklık dağıtımını araştırıyoruz. Kaynaklar ve sınır koşulları yalıtılmış biçimde olduğunda termal enerjinin net girdisi yok ise bir denge sıcaklığının var olabileceğini biliyoruz [10]. Yani;

$$\int_0^L e^x dx = 0$$

dır. Termal enerji sürekli hareket halinde olduğu için denge yoktur ($0 = \frac{d^2u}{dx^2} - e^x$).

Sıfır Özdeğer: Eğer $\lambda = 0$ bir özdeğer ise homojen sınır koşulları ile verilen

$$L(u) = f(x) \tag{4.27}$$

probleminin çözümünde oluşabilecek zorluklar gösterilebilir. Aynı homojen sınır koşulları ile verilen ϕ_n özfonksiyonları

$$L(\phi_n) = -\lambda_n \sigma \phi_n$$

sağlar.

Böylece $\lambda = 0$ bir özdeğer ise, bu özdeğere karşılık gelen $\phi_h(x)$ özfonksiyonu aynı homojen sınır koşulları ile birlikte

$$L(\phi_h) = 0 \tag{4.28}$$

denklemini sağlar. Böylece $\phi_h(x)$, Eş. 4.27 probleminin aşıkâr olmayan bir homojen çözümdür. *Aynı homojen sınır koşulları ile çözülen Eş. 4.27 probleminin aşıkâr olmayan çözümlerini bulmak ile sıfır özdeğeri karşılık gelen özfonksiyonları denktir.* Eğer aşıkâr olmayan çözümler yok ise $\lambda = 0$ bir özdeğer değildir. Eğer aşıkâr olmayan çözümler varsa $\lambda = 0$ bir özdeğerdir.

Bir homojen çözüm kavramı, bir sıfır özdeğerden daha kolaydır. Örneğin;

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \phi &= e^x \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{4.29}$$

problemini ele alalım. $\phi = \sin x$ bir homojen çözümdür. Bununla birlikte, $\lambda = 0$ bir özdeğer olduğu konusu bir karışıklığa yol sebep verir. Eş. 4.29 problemi için özdeğer problemi

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \phi &= -\lambda\phi \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(\pi) &= 0\end{aligned}$$

dır. $\frac{d^2\phi}{dx^2} + (\lambda + 1)\phi = 0$ şeklinde yazılır. Böylece $n = 1, 2, 3, \dots$ için $\lambda + 1 = \left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 = n^2$ bölüm olup bu durumda $n = 1$ için $\lambda = 0$ bir özdeğerdir.

4.4. Fredholm Alternatifi

Fredholm alternatifi homojen sınır koşulları ile verilen ve homojen olmayan

$$L(u) = f(x) \tag{4.30}$$

denklemini ve buna ilişkin homojen sınır koşullarından oluşan problem için Fredholm alternatifi aşağıdaki gibi özetlenebilir.

$\lambda = 0$ bir özdeğer değildir yani, $u = 0$ homojen problemin tek bir çözümüdür.

veya

$\lambda = 0$ bir özdeğerdir. Bu durumda $\phi_h(x)$ homojen problemin aşikar olmayan çözümleridir, öyle ki homojen olmayan problemin çözümleri yoktur veya problem sonsuz sayıda çözüme sahip ise aşikar olmayan $\phi_h(x)$ çözümleri vardır.

$\phi_h(x)$ çözümleri aşikar olmayan homjen bir çözüm ise nasıl sonuçlar elde edeceğimizi daha detaylı inceleyelim;

Eğer Eş. 4.24 ifadesindeki

$$\int_a^b f(x)\phi_h(x)dx = 0 \quad (4.31)$$

ise a_n sabit olduğu için, *sonsuz sayıda çözüm vardır*. Bu tek olmayan çözümler, bir homojen $\phi_h(x)$ çözümün bir sabitle çarpımının toplanmasına karşılık gelir. Eş. 4.31 denklemi, ağırlık 1 alındığında etki fonksiyonu ile homojen çözümlerin ortogonal olduğu anlamına gelir. Eğer

$$\int_a^b f(x)\phi_h(x)dx \neq 0$$

ise homojen sınır koşulları ile verilen, homojen olmayan problemin çözümü mevcut değildir. Bu sonuçlar bir tabloda örneklenirse

Çizelge 4.1. λ Homojen sınır koşullarına göre $Lu = f(x)$ çözümlerinin sayısı

	$\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx$	
	$=0$	$\neq 0$
$\phi_h = 0$ ($\lambda \neq 0$)	1	<i>uygulanamaz</i>
$\phi_h \neq 0$ ($\lambda = 0$)	∞	0

Fredholm alternatifi farklı bir şekilde ifade edilirse; *etki fonksiyonu bütün çözümlerle ortogonal ise homojen sınır koşulları ile verilen Eş. 4.30 homojen olmayan problemin çözümleri vardır*. Eğer $u = 0$ tek homojen çözüm ise $f(x)$ otomatik olarak ortogonaldır ve bir çözümün olduğuna dikkat edilmelidir.

Fredholm alternatifinin bir kısmı özfonksiyon açılım yöntemi kullanılmadan gösterilir. Homojen olmayan problem bir çözüme sahip ise

$$L(u) = f(x)$$

dir. Tüm homojen $\phi_h(x)$ çözümleri

$$L(\phi_h) = 0$$

ı sağlar. Green formülünde $v = \phi_h$ alınırsa,

$$\int_a^b [u \cdot 0 - \phi_h \cdot f(x)] dx = 0 \quad \text{veya} \quad \int_a^b f(x) \phi_h(x) dx = 0$$

elde edilir.

Örnekler 4.3.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= e^x \\ \frac{du(0)}{dx} &= 0 \\ \frac{du(L)}{dx} &= 0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

problemi ele alınırsa, $u=1$ bir çözümdür. Fredholm alternatifine göre, e^x ile bu çözüm ortogonal ise çözüm vardır. $\int_0^L e^x \cdot 1 dx \neq 0$ olduğundan Eş. 4.32 probleminin çözümü mevcut değildir.

Diğer bir örnek;

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 2u = e^x$$

$$u(0) = 0$$

$$u(\pi) = 0$$

problemi göz önüne alınırsa, bu problemin $u = 0$ dan farklı bir çözüme sahip olmadığı için Fredholm alternatifi bir tek çözüm olduğunu ifade eder. Ancak, bu çözümü belirlemek için, belirsiz katsayılar, parametrelerin değişimi veya özfonksiyon açılımı ($\sin nx$ kullanarak) gibi yöntemler kullanılmalıdır.

Son olarak;

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 u = \beta + x$$

$$u(0) = 0$$

$$u(L) = 0$$

problemini ele alalım.

$u = \sin \frac{\pi x}{L}$ homojen problemin bir çözümüdür. Eğer eşitliğin sağ tarafı $\sin \frac{\pi x}{L}$ ile ortogonal yani

$$0 = \int_0^L (\beta + x) \sin \frac{\pi x}{L} dx$$

ise homojen olmayan problem bir çözüme sahiptir. Bu bir çözümün varlığı için sadece β nın değerini bulmada kullanılır.

$$\beta = \frac{-\int_0^L x \sin \frac{\pi x}{L} dx}{\int_0^L \sin \frac{\pi x}{L} dx} = \frac{L}{2}$$

dır.

Ancak, $u(x)$ çözümünü elde etmek için Fredholm alternatifi kullanılmaz.

4.5. Değiştirilmiş Green Fonksiyonları

Bu kısımda, $\lambda = 0$ bir özdeğer olduğunda homojen sınır koşulları ile verilen

$$L(u) = f(x) \tag{4.33}$$

problemini ele alalım. Eğer bu problemin bir çözümü varsa değiştirilmiş bir Green fonksiyonu inşa ederek problemin bir özel çözümü bulunur.

Eğer $\lambda = 0$ bir özdeğer değil ise homojen sınır koşulları ile verilen Eş. 4.33 homojen olmayan sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır. Bir önceki kısımda aynı homojen sınır koşullarına sahip

$$L[G(x, x_0)] = \delta(x - x_0) \tag{4.34}$$

ı sağlayan bir $G(x, x_0)$ Green fonksiyonu kullanılarak çözüm gösterilir.

Şimdi, $\lambda = 0$ bir özdeğer olduğu durumu inceleyelim; Eş. 4.33 probleminin aşıkır olmayan çözümleri $\phi_h(x)$ olmak üzere $L(\phi_h) = 0$ dır. Eş. 4.33 probleminin çözümlerinin var olduğunu yani,

$$\int_a^b f(x) \phi_n(x) dx = 0 \quad (4.35)$$

sağladığı varsayalım.

Ancak, Eş. 4.34 da tanımlanan Green Fonksiyonu bütün x_0 değerleri için mevcut değildir. Çünkü $\delta(x - x_0)$, bütün x_0 değerleri için homojen problemin çözümleri ile ortogonal değildir.

$$\int_a^b \delta(x - x_0) \phi_h(x) dx = \phi_h(x_0) \neq 0$$

dır. Bu durumda, bir çözüme sahip olan basit bir karşılaştırma problemini tanımlamaya ihtiyaç vardır. Ancak, bu fonksiyon ile $\phi_h(x)$ ortogonal olacak şekilde c seçilir ise Forcing Fonksiyon

$$\delta(x - x_0) + c \phi_h(x)$$

için bir çözüm vardır. Yani;

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \phi_h(x) [\delta(x - x_0) + c \phi_h(x)] dx \\ &= \phi_h(x_0) + c \int_a^b \phi_h^2(x) dx \end{aligned}$$

dır.

Böylece; aynı homojen sınır koşulları ile verilen ve

$$L[G_m(x, x_0)] = \delta(x - x_0) - \frac{\phi_h(x)\phi_h(x_0)}{\int_a^b \phi_h^2(x) dx} \quad (4.36)$$

1 sağlayan değiştirilmiş $G_m(x, x_0)$ Green Fonksiyonu tanımlanır. Eş. 4.36 denkleminin sağ tarafı $\phi_h(x)$ ile ortogonal olduğu için, sonsuz sayıda çözüm vardır.

Değiştirilmiş Green Fonksiyonu simetrik

$$G_m(x, x_0) = G_m(x_0, x) \quad (4.37)$$

seçilir.

Eğer $g_m(x, x_0)$ simetrik bir değiştirilmiş Green Fonksiyonu ise,

$$G_m(x, x_0) = g_m(x, x_0) + \beta \phi_h(x_0)\phi_h(x)$$

fonksiyonu da simetrik değiştirilmiş bir Green Fonksiyonudur. Burada β , x ve x_0 dan bağımsız keyfi bir sabittir. Böylece sonsuz sayıda simetrik değiştirilmiş Green fonksiyonu vardır. Bunlardan herhangi birini kullanabiliriz.

Green formülü, değiştirilmiş Green Fonksiyonunu kullanarak $u(x)$ için bir formül oluşturmak için kullanılır. $u = u(x)$ ve $v = G_m(x, x_0)$ olsun.

$$\int_a^b \{u(x)L[G_m(x, x_0)] - G_m(x, x_0)L[u(x)]\}dx = 0$$

dır. Çünkü $u(x)$ ve $G_m(x, x_0)$ aynı sınır koşullarını sağladığı için Eş. 4.33 ve Eş. 4.36 tanımlanan diferensiyel denklemlerden

$$\int_a^b \left\{ u(x) \left[\delta(x-x_0) - \frac{\phi_h(x)\phi_h(x_0)}{\int_a^b \phi_h^2(\bar{x})d\bar{x}} \right] - G_m(x, x_0)f(x) \right\} dx = 0$$

dır.

Dirac-Delta Fonksiyonunun temel özelliği ve $G_m(x, x_0)$ Fonksiyonunun simetrikliği kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$u(x) = \int_a^b f(x_0)G_m(x, x_0)dx_0 + \frac{\phi_h(x)}{\int_a^b \phi_h^2(\bar{x})d\bar{x}} \int_a^b u(x_0)\phi_h(x_0)dx_0$$

elde edilir. Son ifade homojen çözümün bir katıdır. Böylece Eş. 4.33 probleminin özel bir çözümü;

$$u(x) = \int_a^b f(x_0)G_m(x, x_0)dx_0 \quad (4.38)$$

dır.

Örnek 4.4.

Aşık olmayan bir çözüme sahip bir problemin en basit örneği

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{du(0)}{dx} &= 0 \\ \frac{du(L)}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

dır. Fredholm alternatifine göre, bir çözümün var olması için $\int_0^L f(x) dx = 0$

olmalıdır. $f(x)$ fonksiyonunun bu tip olduğunu düşünelim ($f(x) = x - \frac{L}{2}$).

Değiştirilmiş Green Fonksiyonu $G_m(x, x_0)$ öz fonksiyonu bir sabit olduğundan

$$\frac{d^2 G_m}{dx^2} = \delta(x - x_0) + c \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{dG_m(0)}{dx} &= 0 \\ \frac{dG_m(L)}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

ı sağlar. Değiştirilmiş Green Fonksiyonunun var olması için, homojen çözümler ile etki fonksiyonu ortogonal olmalıdır. Yani;

$$\int_0^L [\delta(x - x_0) + c] dx = 0 \quad \text{veya} \quad c = -\frac{1}{L}$$

sağlanmalıdır. Eş. 4.48 i çözmek için Dirac-Delta fonksiyonunun özellikleri kullanılır. $x \neq x_0$ için

$$\frac{d^2 G_m}{dx^2} = -\frac{1}{L}$$

dır. İntegral sabitleri $x = 0$ ve $x = L$ deki sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilmek üzere integral alınırsa

$$\frac{dG_m}{dx} = \begin{cases} -\frac{x}{L}, & x < x_0 \\ -\frac{x}{L} + 1, & x > x_0 \end{cases} \quad (4.55)$$

elde edilir.

$G_m(x, x_0)$ fonksiyonunun türevi için sıçrama şartı ($\left. \frac{dG_m}{dx} \right|_{x_0^-}^{x_0^+} = 1$), Eş. 4.53 integrali ile belirlenir ve Eş. 4.55 şartını sağlar.

$G_m(x, x_0)$ Fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında sürekli olduğunu varsayıp tekrar integral alınırsa

$$G_m(x, x_0) = \begin{cases} -\frac{1}{L} \frac{x^2}{2} + x_0 + c(x_0), & x < x_0 \\ -\frac{1}{L} \frac{x^2}{2} + x + c(x_0), & x > x_0 \end{cases}$$

elde edilir.

$c(x_0)$, x_0 a bağlı keyfi bir ilave sabittir ve homojen çözümün bir sabit ile çarpımına karşılık gelir. Bu, bütün olası değiştirilmiş Green Fonksiyonlarının bir temsilidir. Genelde $G_m(x, x_0)$ fonksiyonunun simetrik olması istenir. Örneğin,

$x < x_0$ için $G_m(x, x_0) = G_m(x_0, x)$, β keyfi bir sabit olmak üzere

$$-\frac{1}{L} \frac{x_0^2}{2} + x_0 + c(x) = -\frac{1}{L} \frac{x^2}{2} + x_0 + c(x_0)$$

veya

$$c(x_0) = -\frac{1}{L} \frac{x_0^2}{2} + \beta$$

yı sağlar. Eş. 4.51 ve Eş. 4.52 in bir çözümü yukarıda verilen $G_m(x, x_0)$ a sahip Eş. 4.50 dir [2].

KAYNAKLAR

1. Duffy, D. G., "Green's Functions With Applications", **C.H.**, USA, 1-3 (2001).
2. Haberman, R., "Elementary Applied Partial Differential Equations With Fourier Series and Boundary Value Problems.", **P.H.**, New Jersey, 277-307 (1987)
3. Bugl, P., "Differential Equations Matrices and Models, " **P.H.**, Hartford University, 218-416 (1995)
4. Tyn, M., "Partial Differential Equations Of Mathematical Physics", **A.E.**, New York, 43-58 (1973)
5. Naimark, M. A., "Linear Differential Operators", **F.U.**, New York 43-58 (1967)
6. Miller, K.S., "Linear Differential Equations in the Real Domain", **W.W. Norton and Company**, New York, 37-69 (1986)
7. İnce, E.L., "Ordinary Differential Equations", **D.P. Inc.**, U.S.A, 47-79 (1983)
8. Bronson, R., "Modern Introductory Differential Equations", **M.H. Company Inc.**, New York, 39-65 (1963)
9. Bereketoglu, H., "Diferensiyel Denklemlerde Matematiksel Modeller", Yüksek Lisans, **Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Ankara, 37-69 (1983)
10. Porter, D., Stirling D., "Integral Equations A Practical Treatment, From Spectral Theory To Applications ", **Cambridge University Press.**, 61-65 (1990)
11. Anar İ.E., "Kısmi Diferensiyel Denklemler", **M.H. Palme yayıncılık**, Ankara, 252-256 (2005)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : KARAAĞAÇ, Berat
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 14.11.1983 Malatya
Medeni hali : Bekar

Eğitim Derece

Eğitim Birimi

Mezuniyet tarihi

Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2010
Lisans	İnönü Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2006
Lise	Orgeneral Eşref Bitlis Süper Lisesi	2001

Yabancı Dil

İngilizce