

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Ali Arslan ÖZKURT

GRUP ETKİLERİNİN DENKLİKLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2005

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRUP ETKİLERİNİN DENKLİKLERİ

Ali Arslan ÖZKURT
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**Bu tez/...../..... Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.**

İmza.....
Doç.Dr. Doğan DÖNMEZ
DANIŞMAN

İmza.....
Prof.Dr. Yusuf ÜNLÜ
ÜYE

İmza.....
Doç.Dr. Mustafa KORKMAZ
ÜYE

İmza.....
Doç.Dr. Hayrullah AYIK
ÜYE

İmza.....
Yrd.Doç.Dr. Leyla ONAT
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof.Dr Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

**Bu çalışma Çukurova Üniversitesi Araştırma Projesi Birimi tarafından
desteklenmiştir.**

Proje No: FBE2003D6

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

GRUP ETKİLERİNİN DENKLİKLERİ

Ali Arslan ÖZKURT

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Doç.Dr. Doğan DÖNMEZ

Yıl: 2005, Sayfa: 57

Jüri : Doç.Dr. Doğan DÖNMEZ

Prof.Dr. Yusuf ÜNLÜ

Doç.Dr. Mustafa KORKMAZ

Doç.Dr. Hayrullah AYIK

Yrd.Doç.Dr. Leyla ONAT

Bir topolojik grubun bir topolojik uzay üzerine etkilerinin denklikleri farklı şekillerde olmaktadır. Bu farklı denklikler arasındaki ilişkilerin incelenmesi, birbirleriyle ilişkili olup olmadıkları, veya "Hangi şartlar altında aralarında birtakım ilişkiler var ?" sorusuna cevap aramaya çalıştığımız bu çalışmada, özellikle torus gruplarının topolojik ve türevlenebilen manifoldlar üzerindeki etkilerinin farklı denklikleri, özel olarak da torus gruplarının kompleks projektif uzay ve küreler üzerindeki lineer etkilerinin denklikleri üzerinde çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Torus, Ağırlık sistemi, Kobordizm, Kohomoloji, Spektral dizi

ABSTRACT

PhD. THESIS

EQUIVALENCES OF GROUP ACTIONS

Ali Arslan ÖZKURT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor Assoc. Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ

Year: 2005, Pages: 57

Jury : Assoc. Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ

Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ

Assoc. Prof. Dr. Mustafa KORKMAZ

Assoc. Prof. Dr. Hayrullah AYIK

Asst. Prof. Dr. Leyla ONAT

Several different equivalences can be defined for actions of Lie groups on topological spaces. In this study, we investigated some relationships between different kinds of equivalences. We also investigated certain conditions which imply an equivalence of a different type. Generally we focused on topological and differentiable torus actions on manifolds. Especially we studied equivalences of linear torus group actions on complex projective spaces and spheres.

Key Words: Torus group, Weight system, Cobordism, Cohomology, Spectral sequence

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım değerli hocam sayın Doğan DÖNMEZ'e çok teşekkür ederim. Ayrıca manevi desteklerinden dolayı aileme ve tüm matematik bölümü personeline teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER	SAYFA
ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler.....	2
1.2. Ekivaryant Euler Sınıfı ve Tamsayı Sistemi.....	10
2. TORUS KOBORDANT KÜRELER.....	15
2.1. Torus Kobordant Kürelerin Kohomoloji Boyutları.....	15
2.2. Torus Kobordant Kürelerin Tamsayı Ağırlık Sistemleri.....	19
3. TORUS KOBORDANT KOHOMOLOJİ KÜRELER.....	25
3.1. Torus Kobordant Kohomoloji Kürelerin Tamsayı Ağırlık Sistemleri.....	25
3.2. Tamsayı Yükseltme.....	33
3.3. Bağlantılı Lie Gruplar İçin Smith Denklik Problemi.....	37
4. TORUS KOBORDANT KOMPLEKS PROJEKTİF UZAYLAR.....	40
4.1. Kohomoloji Kompleks Projektif Uzaylar Üzerindeki Dönüşüm Grupları....	40
4.2. Kohomoloji Kompleks Projektif Uzaylarda Torus Etkileri İçin Ağırlık Sistemi Ve Ayrışım Teoremi.....	40
4.3. Torus Kobordant Kompleks Projektif Uzaylar.....	42
5. GRUP ETKİLERİNİN DEFORMASYONU.....	47
5.1. Grup Etkilerinin Deformasyonlarının İncelenmesi.....	47
KAYNAKLAR.....	54
ÖZGEÇMİŞ.....	57

1. GİRİŞ

Kompakt dönüşüm gruplarının kohomoloji teorisi 1930'lu ve 1940'lı yıllarda P. A. Smith in çalışmaları ile başlar. P. A. Smith kohomolojik yöntemler geliştirerek torus ve p -torus gruplarının küreler ve kohomoloji küreler üzerindeki etkilerini farklı kategorilerde incelemiştir. Daha sonra 1960'lı yıllarda Atiyah-Segal equivariant K -teorisini oluşturarak kompakt dönüşüm gruplarında farklı bir kohomolojik metod kullanmışlardır. Borel ise equivariant kohomoloji teorisini oluşturarak birtakım çalışmalar yapmıştır. 1970'li yıllarda ise Hsiang ve Quillen equivariant kohomoloji teorisi fikrini geliştirerek torus ve p -torus gruplarının bir takım önemli test uzayları (kohomoloji küreler asiklik (acyclic) uzaylar gibi) üzerindeki etkilerini farklı kategorilerde incelemişlerdir.

Kompakt dönüşüm gruplarının kohomoloji teorisinde kohomoloji tipi bir kürenin kohomoloji tipi gibi olan (kohomoloji küre) veya tek noktanın kohomoloji tipi gibi olan (asiklik) uzaylar önemli test uzaylarıdır. Öte yandan bu uzayların dönüşüm grupları arasında direkt bir ilişki vardır. Örneğin X bir kohomoloji küre ve X üzerinde bir etki verilsin. O halde bu etki asiklik bir uzay olan CX (X üzerindeki koni) üzerinde bir etki belirler. Diğer yandan X asiklik bir uzay ve X üzerinde sabit noktası olan bir etki verilsin. O halde x sabit nokta olmak üzere bu etki $X - \{x\}$ kohomoloji küresi üzerinde bir etki belirler.

Bu çalışmada equivariant kohomoloji teknikleri kullanılarak özellikle torus veya p -torus gruplarının bazı önemli test uzayları üzerinde equivariant kobordizmleri incelenmiştir.

1. Bölümde bu çalışmada kullanılan bazı temel tanım ve teoremler fazla ayrıntıya girilmeden verilmiştir.

2. Bölümde torus kobordant ve sınır bileşenlerinin kohomolojisi kobordizmin kohomolojisine izomorfik kürelerin tamsayı ağırlık sistemlerinin aynı olduğu gösterilmiştir.

3. Bölümde 2. bölümde yapılanlar kohomoloji kürelere genişletilip kohomojenitesi 3 ten küçük olan ve sabit noktası olan torus kobordant ve sınır

bileşenlerinin kohomolojisi kobordizmin kohomolojisine izomorfik kürelerin üzerindeki etkilerin denk oldukları gösterilmiştir. Ayrıca Smith denklik probleminin bağlantılı Lie gruplar için bir çözümü verilmiştir.

4. Bölümde ise torus kobordant ve sınır bileşenlerinin kohomolojisi kobordizmin kohomolojisine izomorfik kompleks projektif uzaylar üzerindeki lineer etkilerin denk oldukları gösterilmiştir.

5. Bölümde ise izotopik dönüşüm gruplarının arasındaki benzerlikler incelenmiştir.

Şimdi bu çalışmada kullanılan bazı temel tanım ve teoremleri verelim.

Bu çalışmadaki kohomolojiler Alexander-Spanier veya sheaf kohomolojidir. (H_c^q : kompakt dayanaklı kohomoloji)

1.1 Temel Tanım Ve Teoremler

Tanım 1.1.1: X yerel kompakt, Hausdorff uzay olsun. L bir esas ideal bölgesi olmak üzere her U açık alt kümesi için;

$$H_c^{n+1}(U, L) = 0$$

ise X 'in kohomoloji boyutu n den küçük veya eşittir denir ve $\dim_L X \leq n$ şeklinde gösterilir. Kohomoloji boyut kavramı ilk olarak Cohen, (1954) tarafından verilmiştir.

Tanım 1.1.2 : X yerel kompakt Hausdorff uzayı ve U , X 'in açık alt kümesi ise;

$$J_{XU}^* : H_c^*(U, L) \rightarrow H_c^*(X, L)$$

standart homomorfizmi vardır. Ayrıca V , U 'da açık ise $J_{XV}^* = J_{XU}^* J_{UV}^*$ olur. Şimdi $x \in X$ alalım x 'in verilen bir U açık komşuluğu için $x \in W \subset V \subset U$ ve $\bar{W} \subset V \subset \bar{V} \subset U$ olacak şekilde açık komşuluklar var ve $x \in W' \subset W$ olacak

şeklindeki her W' açık komşuluğu için $\text{Im } J_{VW'}^i = \text{Im } J_{VW}^i$ rankı k olan serbest L -modül ise X 'in x civarındaki i . yerel Betti sayısı k dır denir ve $\rho^i(x, L) = k$ şeklinde gösterilir.

Yerel Betti sayısı tanımı ilk olarak 1935 yılında Alexandroff tarafından verilmiştir.

Tanım 1.1.3 : n pozitif tamsayı, L esas ideal bölgesi ve $\dim_L X$ sonlu olsun. Eğer her $x \in X$ ve $i \neq n$ için $\rho^i(x, L) = 0$ ve $\rho^n(x, L) = 1$ ise X 'e Wilder n -manifold denir.

Tanım 1.1.4 : X bağlantılı Wilder n -manifold olsun. Eğer her $x \in X$ için $\text{Im } J_{XU_x}^n = A$, $A \subset H_c^n(X, L)$ ve A rankı 1 olan serbest alt modül olacak şekilde;

$$\{U_x : U_x \text{ bağlantılı, açık ve } x \in U_x\}$$

komşuluk bazı varsa X, L -yönlendirilebilirdir denir.

Tanım 1.1.5 : L esas ideal bölgesi olmak üzere L üzerinde yerel yönlendirilebilir Wilder n -manifolda kohomoloji n -manifold denir.

Görüldüğü gibi kohomoloji manifoldlar genelleştirilmiş manifoldlardır. Yani sınırı olmayan yerel yönlendirilebilir topolojik manifoldlar kohomoloji manifold olurlar. Manifold olmayan bir kohomoloji manifold örneği olarak küre olmayan fakat $\mathbb{Z}$ katsayılı kohomolojisi bir kürenin kohomolojisi gibi olan n -manifoldların açık konilerini verebiliriz.

Tanım 1.1.6: G bir topolojik grup ve X Hausdorff uzay olsun. Bir $\theta : G \times X \rightarrow X$ sürekli dönüşümü;

- i. Her $g, h \in G$ ve her $x \in X$ için $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$
- ii. Her $x \in X$ için $\theta(e, x) = x$ (e, G 'nin birim elemanı)

özelliklerini sağlıyorsa (G, X, θ) veya kısaca (G, X) 'e bir dönüşüm grubu denir. θ 'ya G 'nin X üzerine etkisi, X 'e de bir G -uzay denir. Genelde $\theta(g, x) = gx$ ile gösterilir.

$H \subseteq G$ ve $A \subseteq X$ için $H(A) = \{gx : g \in H, x \in A\}$ olup eğer $H(A) = A$ oluyorsa A 'ya, X 'in H -invariant alt uzayı denir. Özel olarak $G(x)$ kümesine x 'in orbiti, $X/G = \{G(x) : x \in X\}$ 'ye üzerindeki bölüm topolojisi ile orbit uzayı denir. Öte yandan $x \in X$ olmak üzere $G_x = \{g \in G : gx = x\}$, x 'in izotropi alt grubudur. Her $x \in X$ için $G_x = \{e\}$ ise bu etkiye serbest etki, her $x \in X$ için $G_x = \{e\}$ veya G oluyorsa yarı serbest etki denir. Öte yandan $G_x = G$ ise x 'e bir sabit nokta denir. Tüm sabit noktaların kümesi;

$$F = F(G, X) = X^G = \{x \in X : gx = x, \text{ her } g \in G \text{ için}\} \text{ olur.}$$

Eğer G kompakt bir grup ise her $x \in X$ için $\alpha_x : G/G_x \rightarrow G(x)$ $\alpha_x(gG_x) = gx$ olarak tanımlanan fonksiyon bir homeomorfizmdir.

Teorem 1.1.1 (Smith) : X bir kohomoloji manifold ve $G = \mathbb{Z}_p$ ise $F(G, X)$ de bir kohomoloji manifold olur.

Tanım 1.1.7 : X ve Y G -uzayları olsun. Her $g \in G, x \in X$ için $\varphi(gx) = g\varphi(x)$ eşitliğini sağlayan sürekli $\varphi : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna G -uzayları arasında bir ekivaryant (equivariant) dönüşüm denir.

G kompakt grup H ve K , G 'nin kapalı alt grupları olsunlar. O halde $G/H \rightarrow G/K$ grup etkisini koruyan bir dönüşümün var olması için gerek ve yeter koşul H 'nin, K 'nin eşlenik alt grubu olmasıdır.

Öte yandan G -orbitlerin kategorisi denklilere göre ayrıldığında G -orbit tiplerinin kategorisi elde edilir. G kompakt bir grup, H ve K , G 'nin kapalı alt grupları olsun. O halde;

$$Tip(G/H) = Tip(G/K)$$

olması için gerek ve yeter koşul H ve K nın G 'de eşlenik olmasıdır.

$$Tip(G/H) \rightarrow Tip(G/K)$$

morfizmasının var olması için gerek ve yeter koşul $G/H \rightarrow G/K$ grup etkisini koruyan bir dönüşümün olmasıdır.

X ve Y , G orbitler ve $Tip(X) \rightarrow Tip(Y)$ bir morfizm var ise $Tip(X) \geq Tip(Y)$ dir denir. Dolayısıyla orbit tipleri üzerinde kısmi sıralama vardır. $Tip(*) = Tip(G/G)$ minimum orbit tipi $Tip(G)$ maksimum orbit tipidir. Öte yandan bağlantılı manifoldlar üzerinde yerel analitik(locally smooth) etkilerde ve başka bazı durumlarda maksimum orbit tipi vardır.

Teorem 1.1.2 : G kompakt Lie grubu ve M bağlantılı manifold olsun. O halde (G, M) dönüşüm grubunun bir G/H , maksimum orbit tipi vardır. Ayrıca tipleri G/H orbit tipine eşit olan orbitlerin birleşimi M 'de açık ve yoğun olup bu kümenin M/G deki görüntüsü bağlantılıdır.

Tanım 1.1.8 : Maksimum orbit tipine esas orbit tipi, bu tipteki orbitlere esas orbitler, bu orbitlere karşılık gelen izotropi alt gruplarına ise esas izotropi alt grupları denir.

Tanım 1.1.9 : G kompakt bir topolojik grup, X bir G uzayı, $P \subseteq X$, G/H ile aynı orbit tipinde bir orbit olsun A , H 'nin etki ettiği bir uzay olmak üzere P civarında bir tüp; P 'nin X içindeki bir açık komşuluğuna homeomorfizma olan bir $\varphi: G \times_H A \rightarrow X$ fonksiyonudur. Burada $G \times_H A$, H 'nin $G \times A$ üzerindeki $((g, a)h = (gh, h^{-1}a))$ ile tanımlı etkisinin orbit uzayıdır.

Öte yandan $G \times_H A$ daki her G orbiti her $a \in A$ için $[e, a]$ dan geçer. O halde $\varphi([e, a]) \in P$, $x = \varphi([e, a])$ ve $P = G(x)$ dir. Dolayısıyla $G_x = G_{[e, a]} = H_a \subset H$ olur. P ile G/H aynı orbit tipinde olduklarından G_x , H 'ye eşlenik olup $G_x = H_a = H$ dir. O halde G kompakt topolojik grup X bir G uzayı ve $P = G(x)$ civarında bir tüp, $G(x)$ 'in X içindeki bir komşuluğuna homeomorfik olan ve grup etkisini koruyan bir $\varphi: G \times_{G_x} A \rightarrow X$ fonksiyondur.

Tanım 1.1.10 : G kompakt topolojik grup, X bir G uzayı, $x \in S \subset X$ ve $G_x(S) = S$ olsun. Eğer $\varphi: G \times_{G_x} S \rightarrow X$, $\varphi([g, s]) = gs$ olarak tanımlanan fonksiyon $G(x)$ civarında bir tüp ise S 'ye X 'de bir dilim denir. Bu durumda $G(S)$, $G(x)$ 'in açık komşuluğu ve $f: G(S) \rightarrow G(x)$, $f^{-1}(x) = S$ olacak şekilde ekivaryant retrakt vardır.

Teorem 1.1.3 (Mostow-Palais) : X tam regüler G uzayı ve G kompakt Lie grup ise X 'in her noktasında bir dilim vardır.

Tanım 1.1.11 : Kompakt, bağlantılı ve abelyen Lie gruplarına torus denir. T bir torus ise $T = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ şeklindedir.

Teorem 1.1.4 : Boyutu k olan bir T torus grubunun indirgenemez kompleks temsillerinin denklik sınıflarının kümesi ile $\mathbb{R}^k$ 'nin tamsayı değerli lineer

fonksiyonelleri arasında, dolayısıyla $H^1(T, \mathbb{Z})$ 'nin elemanları arasında 1-1 bir eşleme vardır. Yani, $i \in H^1(S^1, \mathbb{Z})$ S^1 'in bir yönlendirmesi olmak üzere;

$$\{\varphi: T \rightarrow S^1\} \leftrightarrow \{\varphi^*: H^1(S^1, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(T, \mathbb{Z})\} \leftrightarrow \{\varphi^*(i) \in H^1(T, \mathbb{Z})\} \text{ dir.}$$

Teorem 1.1.5 (Milnor,1956) : G bir topolojik grup olsun. G 'nin serbest etki ettiği bir E_G uzayı vardır ve $p: E_G \rightarrow E_G/G = B_G$ bir demet uzayı olup bu demet uzayına universal G demeti denir. Burada B_G uzayı bir hücre kompleksi(cell-complex) olup B_G 'ye G 'nin sınıflandırma uzayı denir.

Tanım 1.1.12 : X bir G uzayı $E_G \rightarrow B_G$ universal G demeti olsun. O halde $X_G = X \times_G E_G$ orbit uzayını düşünürsek $X \rightarrow X_G \rightarrow B_G$ bir demetimsi (fibration) olur. Öte yandan X_G uzayının kohomolojisine X 'in Borel kohomolojisi(veya ekivaryant kohomolojisi) denir ve $H_G^*(-)$ ile gösterilir. O halde R bir değişmeli halka olmak üzere $H_G^*(X, R) = H^*(X_G, R)$ dir.

Teorem 1.1.6 : B bir hücre kompleksi olmak üzere $X \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} B$ demetimsisi verilsin. O halde;

$$\{(E_n^{p,q}, d_n); n \geq 1\}, \quad E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(X)), \quad d_n: E_n^{p,q} \rightarrow E_n^{p+n, q-n+1}, \quad d_n^2 = 0$$

ve $(E_n^{p,q}, d_n)$ 'nin kohomolojisi $(E_{n+1}^{p,q})$ olacak şekilde bir kohomoloji spektral dizi vardır. Bu spektral diziye Leray-Serre spektral dizisi denir.(Serre, 1951)

Tanım 1.1.13 : G kompakt Lie grup, X bir G -uzayı ve A , X 'in kapalı G -invariant alt uzayı olsun. Eğer $j^*: H_G^*(X, A) \rightarrow H^*(X, A)$ örten ise

(X, A) , (X_G, A_G) 'de sıfıra tamamen non homologdur denir.(totally non-homologous to zero) ve kısaca TNHZ ile gösterilir.

Teorem 1.1.7 : R değişmeli bir halka ve $H^*(X, A)$ sonlu doğrulmuş serbest R -modül olsun. O halde aşağıdakiler birbirine denktir.

- i. (X, A) , (X_G, A_G) 'de sıfıra tamamen non homologdur.
- ii. G , $H^*(X, A)$ üzerine aşıkarak etki eder ve $(X, A) \rightarrow (X_G, A_G) \rightarrow B_G$ relatif demetimsinin Leray-Serre spektral dizisi dejeneredir. Yani $E_2 = E_\infty$ dur.

Teorem 1.1.8 : B bir hücre kompleksi olmak üzere $X \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} B$ demetimsisi verilsin. $\{E_n, d_n\}$ bu demetimsinin Serre spektral dizisi olsun. O halde R bir değişmeli halka olmak üzere $x \in H^{r-1}(X, R) = E_2^{0, r-1}$ elemanı transgressif olması için gerek ve yeter koşul $x \in E_r^{0, r-1} \subseteq E_2^{0, r-1}$ olmasıdır. Bu durumda;

$$H^{r-1}(X, R) \xrightarrow{\delta} H^r(M, X, R) \xleftarrow{\pi^*} H^r(B, R), \quad \delta(x) = \pi^*(y)$$

olacak şekilde $y \in H^r(B, R)$ vardır. Bu $y \in H^r(B, R)$ elemanına x 'in bir transgresyonu denir ve $y = \tau(x)$ şeklinde gösterilir.

Kompakt dönüşüm gruplarının kohomoloji teorisinde sınıflandırma uzaylarının kohomoloji gupları önemli rol oynar.

Teorem: 1.1.9 :

$$H^*(B_G, K) = \begin{cases} K[t_1, \dots, t_r] & t_j \in H^2(B_G, K), K = \mathbb{Q}, G = T^r \\ K[t_1, \dots, t_r] & t_j \in H^1(B_G, K), K = \mathbb{Z}_2, G = \mathbb{Z}_2^r \\ K[t_1, \dots, t_r] \otimes \Lambda[v_1, \dots, v_r] & v_j \in H^1(B_G, K), t_j \in H^2(B_G, K), \\ & K = \mathbb{Z}_p, G = \mathbb{Z}_p^r, p \neq 2 \end{cases}$$

Teorem 1.1.10 (Lokalizasyon teoremi) : $G = T^r$ (veya $\mathbb{Z}_p^r$), $K = \mathbb{Q}$ (veya $\mathbb{Z}_p$), X parakompakt G uzayı ve X 'in kohomoloji boyutu sonlu olsun. $F = F(G, X)$ sabit noktalar kümesi, R , $H^*(B_G, K)$ nın polinom kısmı ve $S = R - \{0\}$ olmak üzere;

$$S^{-1}H_G^*(X, K) \rightarrow S^{-1}H_G^*(F, K) = H^*(F, K) \otimes_K S^{-1}H^*(B_G, K)$$

izomorfizmdir. (Hsiang, 1970)

Sonuç 1.1.1 (Sabit nokta kriteri) : $G = T^r$ (veya $\mathbb{Z}_p^r$), $K = \mathbb{Q}$ (veya $\mathbb{Z}_p$) ise $F = F(G, X) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul $H^*(B_G, K) \rightarrow H^*(X_G, K)$ monomorfizm olmasıdır.

Teorem 1.1.11 (P. A. Smith teoremi) : $G = T^r$ (veya $\mathbb{Z}_p^r$, $p \neq 2$), $K = \mathbb{Q}$ (veya $\mathbb{Z}_p$, $p \neq 2$) ve $H^*(X, K) = H^*(\{\bullet\}, K)$ ise yani X asiklik ise;

$$H^*(F, K) = H^*(\bullet, K)$$

olur.

Teorem 1.1.12 (P. A. Smith teoremi) : $G = T^r$ (veya $\mathbb{Z}_p^r$, $p \neq 2$), $K = \mathbb{Q}$ (veya $\mathbb{Z}_p$, $p \neq 2$) ve $H^*(X, K) = H^*(S^n, K)$ ise;

$$H^*(F, K) = H^*(S^r, K), \quad n \equiv r \pmod{2}$$

$G = T^r$ durumunda $K = \mathbb{Z}$ alınırsa Smith teoremi yine doğrudur. Yani $H^*(X, \mathbb{Z}) = H^*(S^n, \mathbb{Z})$ ise $H^*(F, \mathbb{Z}) = H^*(S^r, \mathbb{Z})$, $n \equiv r \pmod{2}$ olur.

Teorem 1.1.13 (Borel) : G torus (veya p -torus), $K = \mathbb{Q}$ (veya $\mathbb{Z}_p$) ve $H^*(X, K) = H^*(S^n, K)$ olsun. H koboyutu 1 olan alt torus olmak üzere $H^*(F(H, X), K) = H^*(S^{n(H)}, K)$ ve $r = n(G)$ olmak üzere;

$$n - r = \sum_H (n(H) - r)$$

olur.

1.2 Ekivaryant (Equivariant) Euler Sınıfı Ve Tamsayı Ağırlık Sistemi

G torus grubu ve X , $\mathbb{Q}$ -asiklik n -kohomoloji manifold olmak üzere X üzerinde bir G etkisi verilsin. Bu durumda bu etkinin sabit noktaları, F asiklik r -kohomoloji manifold olup $X - F$ 'nin kohomoloji tipi S^{n-r-1} 'in kohomoloji tipindendir. O halde;

$$X - F \rightarrow (X - F)_G \rightarrow B_G$$

spektral dizisini düşünelim. α , $H^{n-r-1}(X - F, \mathbb{Q})$ 'nun bir doğurayı ise α transgressif olur. α 'nın transgresyonu $E_G(X)$ ise $H_G^*(X - F, \mathbb{Q})$ 'yi sıfırlayan esas idealin

üreticidir. $E_G(X)$ 'e X 'in ekivaryant Euler sınıfı denir. Öte yandan $E_G(X)$ lineer polinomların çarpımı şeklinde yazılabilir. Yani;

$$E_G(X) = w_1^{k_1} \dots w_s^{k_s} \quad w_i \in H^2(B_G, \mathbb{Q})$$

olur. O halde $\Omega'(X) = \{\pm w_1; k_1, \dots, \pm w_s; k_s\}$ olmak üzere $\Omega(X) = \Omega'(X) \cup \{0; r\}$ X 'in geometrik ağırlık sistemidir. Burada $\{0; r\}$ sırasıyla sıfır ağırlık sistemini ve onun katlılığını gösterir. Dikkat edilirse $r = \dim F$ dir. (Hsiang, 1971)

$H^2(B_G, \mathbb{Q}) \simeq H^1(G, \mathbb{Q}) \simeq H^1(G, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ olup bağlantılı toruslarda $H^1(G, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(G, S^1)$ olur. Şimdi $0 \neq w_i \in H^2(B_G, \mathbb{Q})$ ağırlığı alalım. Sıfırdan farklı bir n tamsayısı için $nw \in H^2(B_G, \mathbb{Z}) \simeq H^1(G, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(G, S^1)$ olur. O halde $nw: G \rightarrow S^1$ olmak üzere bu homomorfizmin çekirdeğinin birim elemanı içeren bağlantılı bileşeni $(\text{Kern}nw)^o$ koboyutu 1 alt torus olup seçilen n tamsayısından bağımsızdır. Dolayısıyla $0 \neq w_i \in H^2(B_G, \mathbb{Q})$ ağırlıkları koboyutu 1 alt toruslara karşılık gelir.

Eğer X , $\mathbb{Z}$ -asiklik n -kohomoloji manifold ve $\mathbb{Q}$ -kohomoloji cebir yerine $\mathbb{Z}$ -kohomoloji cebir kullanılırsa X 'in ekivaryant Euler sınıfı;

$$E_G(X) = Cw_1^{k_1} \dots w_s^{k_s} \quad w_i \in H^2(B_G, \mathbb{Z}), \quad C \in \mathbb{Z}^*$$

şeklinde olur.

Golber 1973'te C 'nin, G 'nin bazı bağlantılı olmayan alt gruplarının sabit noktalarının boyutları olarak ifade edilebileceğini gösterdi.

Teorem 1.2.1 (Golber, 1973) : $T = T^r$ torus grubu, X T -uzayı ve $H^*(X, \mathbb{Z}) = H^*(S^n, \mathbb{Z})$ olsun. Öte yandan $T_{p,\alpha} = \mathbb{Z}_{p^\alpha}^r$ olmak üzere her p asal sayısı ve $\alpha \geq 1$ için $H^*(F(T_{p,\alpha}, X), \mathbb{Z})$ sonlu doğrulmuş olsun. $C = p^{e_p} C'$ ve p, C' 'yü bölmesin. O halde;

$$\sum_{\alpha \geq 1} (\dim_p F(T_{p,\alpha}, X) - \dim_{\mathbb{Z}} F(T, X)) = 2e_p \text{ olur.}$$

Öte yandan $H_i = w_i^\perp$ olmak üzere Borel formülü kullanılarak

$$E_T(X^{H_i}) = \pm C_i w_i^{k_i} \quad C_i \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } \prod C_i = C$$

olur. O halde;

$$\Omega'(X) = \left\{ E_T(X^{H_i}) \right\}_{i=1}^s = \left\{ \pm C_i w_i^{k_i} \right\}_{i=1}^s, \quad w_i \in H^2(B_T, \mathbb{Z})$$

olmak üzere;

$$\Omega(X) = \Omega'(X) \cup \{0, k_0\} = \left\{ \pm C_i w_i^{k_i} \right\}_{i=1}^s \cup \{0, k_0\}$$

X 'in tamsayı ağırlık sistemidir.(Straume, 1990)

Bir topolojik grubun bir topolojik uzay üzerine etkilerinin denklikleri farklı şekillerde tanımlanabilir. Şimdi birkaç farklı denklik tanımları verelim. $X, Y \in \text{Obj}(C)$, (C :diferensiyellenebilen manifoldlar, topolojik manifoldlar, topolojik uzaylar veya vektör uzayları kategorisi)

1. Eşlik (equivalence) : X ve Y iki G uzayı olsun. Eğer bir $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$ ve $g \in \text{Hom}_C(Y, X)$ (f, g ekivaryant) için $fg = 1_Y$ ve $gf = 1_X$ ise bu G uzayları eştir (equivalent) denir.
2. Konkordans (concordance) : $(G, X, \phi_0), (G, X, \phi_1)$ iki dönüşüm grubu olsun. Eğer $(G, X \times I, \Phi)$ bir dönüşüm grubu ve $X \times \{0\}, X \times \{1\}$ G invariant ve Φ 'nin $X \times \{0\}$ ve $X \times \{1\}$ 'e kısıtlamaları sırasıyla ϕ_0 ve ϕ_1 ise bu iki etki konkordanttır denir.

3. İzotopi (Isotopy) : $(X, \phi_0), (X, \phi_1)$ iki dönüşüm grubu olsun. Eğer $(G, X \times I, \Phi)$ bir dönüşüm grubu ve her $t \in I$ için $X \times \{t\}$ G invariant ve Φ 'nin $X \times \{0\}$ ve $X \times \{1\}$ 'e kısıtlamaları sırasıyla ϕ_0 ve ϕ_1 ise bu iki etki izotopiktir denir.
4. Kobordizm (cobordism) : X, Y n -manifoldlar ve $(G, X, \phi_0), (G, Y, \phi_1)$ iki dönüşüm grubu olsun. Eğer (G, Z, Φ) bir dönüşüm grubu, Z sınırı olan $n+1$ -manifold ve $\partial Z = X \amalg Y$, X ve Y G invariant ve X ve Y üzerindeki kısıtlanmış etkiler sırasıyla ϕ_0 ve ϕ_1 ise bu iki dönüşüm grubuna kobordanttır denir.
5. c -kobordizm (c -cobordism) : Kobordizm tanımına ek olarak $H^*(Z, X) = H^*(Z, Y) = 0$ ise bu iki G uzayına c -kobordanttır diyelim.
6. Genel c -kobordizm (general c -cobordism) : $(G, X, \phi_0), (G, Y, \phi_1)$ iki dönüşüm grubu olsun. Eğer $i: X \rightarrow Z, j: Y \rightarrow Z$ ekivaryant ve $i^*: H^*(Z) \rightarrow H^*(X)$ ve $j^*: H^*(Z) \rightarrow H^*(Y)$ izomorfizmler olacak şekilde bir (G, Z, Φ) dönüşüm grubu varsa (G, X, ϕ_0) ve (G, Y, ϕ_1) dönüşüm gruplarına genel c -kobordanttır diyelim.
7. Smith denkliği : $(G, S^n, \phi_0), (G, S^n, \phi_1)$ iki lineer dönüşüm grubu olsun. Eğer sadece iki sabit noktası olan bir (G, Σ^{n+1}, Φ) (Σ^{n+1} homotopi $n+1$ küre) dönüşüm grubu var ve bu noktalarda ki teğet küre temsilleri ϕ_0 ve ϕ_1 ise bu etkiler Smith denktirler denir.

Bu denklikler arasında;

- a. $1 \Rightarrow 2, 3, 4, 5, 6$
- b. $3 \Rightarrow 2$
- c. $4 \Rightarrow 2$
- d. $5 \Rightarrow 6$

ilişkileri aşıkardır. Bazı kategorilerde bu denklikler arasında birtakım ilişkiler olup olmadığı incelenmiştir: örneğin kompakt diferensiyellernebilir manifoldlar ve kompakt Lie grupları için $3 \Rightarrow 1$ olduğu Palais-Stewart tarafından gösterilmiştir.

$7 \Rightarrow 1$ olur mu sorusu ise 1960 yılında P.A. Smith tarafından ortaya atılmıştır ve Smith denklik problemi olarak bilinir. Kompakt Lie grupları için Smith denklik problemi, kürelerdeki lineer etkiler için c -kobordizmin eşlik olması problemi ile aynıdır. Bu çalışmada Kompakt Bağlantılı Lie gruplar için vektör uzayları kategorisinde $5 \Rightarrow 1$ olduğu gösterilmiştir.

2. TORUS KOBORDANT KÜRELER

Bu bölümde torus kobordant iki standart kürenin tamsayı ağırlık sistemlerinin aynı olduğu kohomoloji manifold kavramı yardımıyla gösterilmiştir.

Bilindiği gibi rasyonel kohomolojisi bir küreninki gibi olan uzayların, bağlantılı torus veya p -torus etkisi altında sabit kalan noktalar kümesinin rasyonel kohomolojisi koboyutu çift olan bir kürenin rasyonel kohomolojisi gibidir. Öte yandan bu durum $\mathbb{Z}$ -katsayılı kohomoloji kullanıldığında p -toruslar için doğru olmayabilir. Fakat bağlantılı toruslar için yine de doğrudur. Yani $\mathbb{Z}$ -katsayılı kohomoloji tipi bir küreninki gibi olan bir uzayın, bağlantılı torus etkisi altında sabit noktalarının $\mathbb{Z}$ -katsayılı kohomoloji tipi koboyutu çift olan bir kürenin $\mathbb{Z}$ -katsayılı kohomolojisi gibidir.

2.1 Torus Kobordant Kürelerin Kohomoloji Boyutları

Teorem 2.1.1 : T bağlantılı torus, X kompakt T kobordizm $\partial X = X_0 \amalg X_1 = S^n \amalg S^n$ ve X in T etkisi altında sabit kalan noktalarının yani X^T nin $\mathbb{Z}$ katsayılı kohomoloji grupları sonlu doğurulmuş olduğunu varsayalım. Eğer $i: X_0 \rightarrow X$ ve $j: X_1 \rightarrow X$ içermeleri $\mathbb{Z}$ katsayılı kohomoloji cebirinde izomorfizm belirliyorsa, yani;

$$i^*: H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X_0, \mathbb{Z}) \text{ ve } j^*: H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X_1, \mathbb{Z})$$

izomorfizm ise

$$H^*(X^T, \mathbb{Z}) = H^*(X_0^T, \mathbb{Z}) = H^*(X_1^T, \mathbb{Z}) = H^*(S^r, \mathbb{Z}) \quad n \equiv r \pmod{2}$$

olur.

İspat : Öncelikle şunu hatırlayalım: ϕ , S^n üzerinde bir etki ise ϕ 'nin $CS^n = D^{n+1}$ üzerinde $C(\phi)$ genişleme etkisi vardır. O halde $Y = X \cup CX_0 \cup CX_1$, T -uzayını düşünelim. Mayer-Vietoris dizisini kullanarak $H^*(Y, \mathbb{Z}) = H^*(S^{n+1}, \mathbb{Z})$ olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Şimdi $H^*(X_0^T, \mathbb{Z}) = H^*(S^r, \mathbb{Z})$ olsun. Y kohomoloji manifold olup Y 'nin T etkisi altında sabit noktaları, Y^T de kohomoloji manifold olur. Şimdi $x \in \text{Int}CX_0^T$ alalım. $\text{Int}CX_0^T$, $(r+1)$ -kohomoloji manifold olduğundan Y^T 'nin x civarındaki yerel Betti sayısı, $\rho^{r+1}(x)=1$ olur. O halde Y^T $(r+1)$ -kohomoloji manifold olup ayrıca $H^*(Y^T, \mathbb{Z}) = H^*(S^{r+1}, \mathbb{Z})$ dir. Benzer şekilde eğer $H^*(X_1^T, \mathbb{Z}) = H^*(S^l, \mathbb{Z})$ ise Y^T 'nin $(l+1)$ -kohomoloji manifold olduğu görülür. Böylelikle $l=r$ olup;

$$H^*(X_0^T, \mathbb{Z}) = H^*(X_1^T, \mathbb{Z}) = H^*(S^r, \mathbb{Z})$$

olur. Şimdi $H^*(X^T, \mathbb{Z}) = H^*(S^r, \mathbb{Z})$ olduğunu gösterelim.

$$U = X^T \cup \left\{ [x, t] : [x, t] \in CX_0^T, t > \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ [x, t] : [x, t] \in CX_1^T, t > \frac{1}{2} \right\}$$

$$V = \left\{ [x, t] : [x, t] \in CX_0^T, t < \frac{3}{4} \right\} \cup \left\{ [x, t] : [x, t] \in CX_1^T, t < \frac{3}{4} \right\}$$

olsun. $Y^T = U \cup V$ olup $X^T \rightarrow U$ deformasyon retrakt(deformation retract), V , S^0 'a homotopik ve $U \cap V$, $S^r \coprod S^r$ ye homotopik olur. O halde (U, V) ikilisi için $\mathbb{Z}$ -katsayılı Mayer-Vietoris dizisi uygularsak;

$$0 = H^r(Y^T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^r(X^T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^r(U \cap V, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{r+1}(Y^T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{r+1}(X^T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{r+1}(U \cap V, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

tam dizisini elde ederiz. Bu tam diziden;

$$0 \rightarrow H^r(X^T, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H^{r+1}(X^T, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

tam dizisini elde ederiz. O halde;

$$\text{rank} H^r(X^T, \mathbb{Z}) - 2 + 1 - \text{rank} H^{r+1}(X^T, \mathbb{Z}) = 0$$

olur. X^T 'nin $\mathbb{Z}$ -katsayılı kohomoloji tipi bir kürenin $\mathbb{Z}$ -katsayılı kohomoloji tipi gibi olduğundan $\text{rank} H^r(X^T, \mathbb{Z}) = 1$ ve $\text{rank} H^{r+1}(X^T, \mathbb{Z}) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $H^*(X^T, \mathbb{Z}) = H^*(S^r, \mathbb{Z})$ sonucu elde edilir.

Sonuç 2.1.1 : Önceki teoremdaki varsayımlar altında $i: X_0^T \rightarrow X^T$ ve $j: X_1^T \rightarrow X^T$ içermeleri $\mathbb{Z}$ -katsayılı kohomoloji cebirinde izomorfizm belirler. Bir başka ifade ile $H^*(X^T, \mathbb{Z}) \simeq H^*(X_j^T, \mathbb{Z})$, $j \in \{0, 1\}$ olur.

İspat : $H^*(X^T, \mathbb{Z}) = H^*(X_0^T, \mathbb{Z}) = H^*(X_1^T, \mathbb{Z}) = H^*(S^r, \mathbb{Z})$ $n \equiv r \pmod{2}$ olduğu teorem 2.1 de ispatlanmıştı. Şimdi $Y = X \cup CX_0 \cup CX_1$, T -uzayını düşünelim.

$$U = X^T \cup \left\{ [x, t] : [x, t] \in CX_0^T, t > \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ [x, t] : [x, t] \in CX_1^T, t > \frac{1}{2} \right\}$$

$$V = \left\{ [x, t] : [x, t] \in CX_0^T, t < \frac{3}{4} \right\} \cup \left\{ [x, t] : [x, t] \in CX_1^T, t < \frac{3}{4} \right\}$$

olmak üzere (U, V) ikilisi için $\mathbb{Z}$ -katsayılı Mayer-Vietoris dizisi uygularsak;

$$0 \rightarrow H^r(X^T, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H^{r+1}(X^T, \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (1)$$

kısa tam dizisini elde ederiz. Şimdi $Y_1 = X \cup CX_0$ T -uzayını düşünelim. Y_1 'in rasyonel kohomoloji tipi tek noktanın rasyonel kohomoloji tipinde olup Y_1^T 'nin de

bu şekildedir. Fakat $\mathbb{Z}$ -katsayılı kohomoloji kullanırsak bu durum doğru olmayabilir. Şimdi;

$$U = X^T \cup \left\{ [x, t] : [x, t] \in CX_0^T, t > \frac{1}{2} \right\}, \quad V = \left\{ [x, t] : [x, t] \in CX_0^T, t < \frac{3}{4} \right\}$$

olmak üzere (U, V) ikilisi için $\mathbb{Z}$ -katsayılı Mayer-Vietoris dizisi uygularsak;

$$0 \rightarrow H^r(Y_1^T, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i^r} \mathbb{Z} \rightarrow H^{r+1}(Y_1^T, \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (2)$$

tam dizisini elde ederiz. Benzer şekilde $Y_2 = X \cup CX_1$ T -uzayını düşünelim;

$$U = X^T \cup \left\{ [x, t] : [x, t] \in CX_1^T, t > \frac{1}{2} \right\}, \quad V = \left\{ [x, t] : [x, t] \in CX_1^T, t < \frac{3}{4} \right\}$$

ikilisi için Mayer-Vietoris dizisi uygulanırsa

$$0 \rightarrow H^r(Y_2^T, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{j^r} \mathbb{Z} \rightarrow H^{r+1}(Y_2^T, \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (3)$$

tam dizisini elde ederiz. Tüm $\mathbb{Z}$ -katsayılı kohomoloji grupları sonlu doğrulmuş olduğundan ve (1), (2) ve (3) birlikte düşünülürse;

$$H^r(Y_1^T, \mathbb{Z}) = H^{r+1}(Y_1^T, \mathbb{Z}) = H^r(Y_2^T, \mathbb{Z}) = H^{r+1}(Y_2^T, \mathbb{Z}) = 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla;

$$i^r : H^r(X^T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^r(X_0^T, \mathbb{Z}) \text{ ve } j^r : H^r(X^T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^r(X_1^T, \mathbb{Z})$$

izomorfizm olur.

2.2 Torus Kobordant Kürelerin Tamsayı Ağırlık Sistemleri

Teorem 2.2.1: T bağlantılı torus, X kompakt T -kobordizm $\partial X = X_0 \coprod X_1 = S^n \coprod S^n$ ve X in T etkisi altında sabit kalan noktalarının yani X^T nin $\mathbb{Z}$ katsayılı kohomoloji grupları sonlu doğurulmuş olduğunu varsayalım. Eğer $i: X_0 \rightarrow X$ ve $j: X_1 \rightarrow X$ içermeleri $\mathbb{Z}$ katsayılı kohomoloji cebirinde izomorfizm belirliyorsa, yani;

$$i^*: H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X_0, \mathbb{Z}) \text{ ve } j^*: H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X_1, \mathbb{Z})$$

izomorfizm ise X, X_0 ve X_1 uzaylarının tamsayı ağırlık sistemleri eşittir.

İspat : φ, T nin X üzerinde; φ_0 ve φ_1 ise sırasıyla T nin X_0 ve X_1 üzerindeki etkilerini gösterebiliriz. Öte yandan;

$$H^*(X^T, \mathbb{Z}) = H^*(X_0^T, \mathbb{Z}) = H^*(X_1^T, \mathbb{Z}) = H^*(S^r, \mathbb{Z}) \quad n \equiv r \pmod{2}$$

olduğunu biliyoruz. O halde r nin alabileceği değerlere göre ispat yapılacaktır.

1. durum : $r = -1$ ise;

$r = -1$ ise $X_0^T = X_1^T = X^T = \emptyset$ olur. Öte yandan $i^*: H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X_0, \mathbb{Z})$ in izomorfizm olmasından dolayı X_0 ve X in ekivaryant (equivariant) Euler sınıfları olan $E_T(X_0)$ ve $E_T(X)$ birbirine eşittir. O halde;

$$E_T(X_0) = E_T(X) = \pm C \prod_{i=1}^s w_i^{m_i}$$

olur. Benzer şekilde $E_T(X_1) = E_T(X) = \pm C \prod_{i=1}^s w_i^{m_i}$ olur. Şimdi koboyutu 1 olan $w_i^\perp$ alt torusun kısıtlama etkisini düşünelim. Sonuç 3.1 den dolayı $i: X_0^{w_i^\perp} \rightarrow X^{w_i^\perp}$ ve $j: X_1^{w_i^\perp} \rightarrow X^{w_i^\perp}$ içermeleri $\mathbb{Z}$ -katsayılı kohomoloji cebirinde izomorfizm belirler. Bir başka ifade ile $H^*(X_0^{w_i^\perp}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^*(X_j^{w_i^\perp}, \mathbb{Z})$, $j \in \{0,1\}$ olur. Şimdi φ_j^i , T nin $X_j^{w_i^\perp}$ ($j \in \{0,1\}$) üzerindeki; φ^i ise T nin $X^{w_i^\perp}$ üzerindeki etkileri gösterebiliriz. Bu etkiler için Borel formülünü uygularsak;

$$\Omega'(X_0^{w_i^\perp}) = \{E_T(X_0^{w_i^\perp})\} = \{\pm C_i w_i^{m_i}\}$$

$$\Omega'(X_1^{w_i^\perp}) = \{E_T(X_1^{w_i^\perp})\} = \{\pm C'_i w_i^{m_i}\}$$

$$\prod_{i=1}^s C_i = \prod_{i=1}^s C'_i = C$$

olur. Öte yandan;

$$(X_j^{w_i^\perp})^T = X_j^T = (X^{w_i^\perp})^T = X^T = \emptyset \quad j = 0,1$$

olur. Buna ek olarak;

$$H^*(X_j^{w_i^\perp}, \mathbb{Z}) = H^*(X^{w_i^\perp}, \mathbb{Z}) = H^*(S^k, \mathbb{Z}), \quad n \equiv k \pmod{2}, \quad j = 0,1$$

olduğundan $X_0^{w_i^\perp}$, $X_1^{w_i^\perp}$ ve $X^{w_i^\perp}$ uzaylarının Euler sınıfları birbirine eşittir. O halde her i için $C_i = C'_i$ olup;

$$\Omega'(X) = \Omega'(X_0) = \Omega'(X_1) = \left\{ \pm C_i w_i^{m_i} \right\}_{i=1}^s \text{ olur.}$$

2. durum : $r = 0$ ise;

$r = 0$ ise $H^*(X^T, \mathbb{Z}) = H^*(X_0^T, \mathbb{Z}) = H^*(X_1^T, \mathbb{Z}) = H^*(S^0, \mathbb{Z})$ olur. Şimdi;

$$(X_0, X_0^T) \rightarrow ((X_0)_T, B_T \times X_0^T) \rightarrow B_T$$

Relatif demetimsinin Leray-Serre spektral dizisini E ile gösterelim. Eğer α , $H^n(X_0, \mathbb{Z}) = H^n(X_0, X_0^T, \mathbb{Z})$ nin bir doğurayı ise α 'nın bu spektral dizinin n . diferansiyeli olan d_n altındaki görüntüsü, $d_n(\alpha) = E_T(X_0) \otimes \delta f \in E_n^{n,1}$ α 'nın transgresyonu olur. Burada f , $\tilde{H}^0(X_0^T, \mathbb{Z})$ nin (indirgenmiş kohomoloji) bir doğurayıdır. Benzer şekilde;

$$(X, X^T) \rightarrow (X_T, B_T \times X^T) \rightarrow B_T$$

Relatif demetimsinin Leray-Serre spektral dizisini D ile gösterelim.

$$\begin{array}{ccc} E_n^{0,n} = H^n(X_0, \mathbb{Z}) = \langle \alpha \rangle & \xleftarrow[\cong]{i^n} & D_n^{0,n} = H^n(X, \mathbb{Z}) \\ \downarrow d_n & & \downarrow d'_n \\ E_n^{n,1} & \xleftarrow[\cong]{} & D_n^{n,1} \\ \simeq \uparrow 1 \otimes \delta & & \simeq \uparrow 1 \otimes \delta \\ H^n(B_T, \mathbb{Z}) \otimes \tilde{H}^0(X_0^T, \mathbb{Z}) & \xleftarrow[\cong]{1 \otimes i^0} & H^n(B_T, \mathbb{Z}) \otimes \tilde{H}^0(X^T, \mathbb{Z}) \end{array}$$

değişmeli diyagramını düşünürsek $E_T(X_0) = E_T(X) = \pm C \prod_{i=1}^s w_i^{m_i}$ sonucu bulunur.

Benzer şekilde $E_T(X_1) = E_T(X) = \pm C \prod_{i=1}^s w_i^{m_i}$ olduğu gösterilir. O halde koboyutu 1

olan $w_i^\perp$ alt toruslar için

$$E_T(X_0^{w_i^\perp}) = \pm C_i w_i^{m_i}, \quad E_T(X_1^{w_i^\perp}) = \pm C'_i w_i^{m_i}, \quad \prod C_i = \prod C'_i = C$$

olur. Öte yandan

$$H^*(X_j^{w_i^\perp}, \mathbb{Z}) = H^*(X^{w_i^\perp}, \mathbb{Z}) = H^*(S^k, \mathbb{Z}), \quad n \equiv k \pmod{2}, \quad j = 0, 1$$

O halde;

$$\begin{aligned} (X_j^{w_i^\perp}, X_j^T) &\rightarrow ((X_j^{w_i^\perp})_T, B_T \times X_j^T) \rightarrow B_T \quad j = 0, 1 \\ (X^{w_i^\perp}, X^T) &\rightarrow (X_T^{w_i^\perp}, B_T \times X^T) \rightarrow B_T \end{aligned}$$

relatif demetimsilerinin Leray-Serre spektral dizilerini düşünürsek;

$$E_T(X_0^{w_i^\perp}) = E_T(X) = \pm C_i w_i^{m_i} = E_T(X_1^{w_i^\perp}) = \pm C'_i w_i^{m_i}$$

Olduğu kolayca görülür. O halde;

$$\Omega'(X) = \Omega'(X_0) = \Omega'(X_1) = \left\{ \pm C_i w_i^{m_i} \right\}_{i=1}^s \quad \text{olur.}$$

3. durum : $r > 0$ ise;

$r > 0$ ise $H^*(X^T, \mathbb{Z}) = H^*(X_0^T, \mathbb{Z}) = H^*(X_1^T, \mathbb{Z}) = H^*(S^r, \mathbb{Z}) \quad n \equiv r \pmod{2}$ olur.

$$\begin{aligned} (X_0, X_0^T) &\rightarrow ((X_0)_T, B_T \times X_0^T) \rightarrow B_T \\ (X, X^T) &\rightarrow (X_T, B_T \times X^T) \rightarrow B_T \end{aligned}$$

relatif demetimsilerin Leray-Serre spektral dizilerini sırasıyla E ve D ile gösterelim.

Eğer α , $H^n(X_0, \mathbb{Z}) = H^n(X_0, X_0^T, \mathbb{Z})$ nin bir doğurayı ise α 'nın bu spektral dizinin $(n-r)$. diferansiyeli olan d_{n-r} altındaki görüntüsü,

$$d_{n-r}(\alpha) = E_T(X_0) \otimes \delta f \in E_{n-r}^{n-r, r+1}$$

α 'nın “transgresyonu” olur. Burada $f, H^r(X_0^T, \mathbb{Z})$ nin bir doğurayıdır. (Hsiang, 1971) O halde;

$$\begin{array}{ccc} E_{n-r}^{0,n} = H^n(X_0, \mathbb{Z}) = \langle \alpha \rangle & \xleftarrow[\cong]{i^n} & D_{n-r}^{0,n} = H^n(X, \mathbb{Z}) \\ \downarrow d_{n-r} & & \downarrow d'_{n-r} \\ E_{n-r}^{n-r, r+1} & \xleftarrow[\cong]{} & D_{n-r}^{n-r, r+1} \\ \simeq \uparrow 1 \otimes \delta & & \simeq \uparrow 1 \otimes \delta \\ H^{n-r}(B_T, \mathbb{Z}) \otimes H^r(X_0^T, \mathbb{Z}) & \xleftarrow[\cong]{1 \otimes i^r} & H^{n-r}(B_T, \mathbb{Z}) \otimes H^r(X^T, \mathbb{Z}) \end{array}$$

değişmeli diyagramını göz önüne alarak $E_T(X_0) = E_T(X) = \pm C \prod_{i=1}^s w_i^{m_i}$ sonucu

bulunur. Benzer şekilde $E_T(X_1) = E_T(X) = \pm C \prod_{i=1}^s w_i^{m_i}$ olduğu gösterilebilir. Öte yandan;

$$H^*(X_j^{w_i^\perp}, \mathbb{Z}) = H^*(X^{w_i^\perp}, \mathbb{Z}) = H^*(S^k, \mathbb{Z}), \quad n \equiv k \pmod{2}, \quad j = 0, 1$$

O halde;

$$\begin{aligned} (X_0^{w_i^\perp}, X_0^T) &\rightarrow ((X_0^{w_i^\perp})_T, B_T \times X_0^T) \rightarrow B_T \\ (X^{w_i^\perp}, X^T) &\rightarrow (X_T^{w_i^\perp}, B_T \times X^T) \rightarrow B_T \end{aligned}$$

relatif demetimsilerinin Leray-Serre spektral dizilerini sırasıyla E ve D ile gösterelim. Eğer $\alpha, H^k(X_0^{w_i^\perp}, \mathbb{Z}) = H^k(X_0^{w_i^\perp}, X_0^T, \mathbb{Z}) = E_{k-r}^{0,k}$ in bir doğurayı ise;

$$d_{k-r}(\alpha) = E_T(X_0^{w_i^\perp}) \otimes \delta g \in H^{k-r}(B_T, \mathbb{Z}) \otimes H^{r+1}(X_0^{w_i^\perp}, X_0^T, \mathbb{Z})$$

α 'nın transgresyonu olup $\langle g \rangle = H^r(X_0^T, \mathbb{Z})$ dir. Şimdi;

$$\begin{array}{ccc}
 E_{k-r}^{0,k} = H^k(X_0^{w_i^\perp}, \mathbb{Z}) = \langle \alpha \rangle & \xleftarrow[\simeq]{i^k} & D_{k-r}^{0,k} = H^k(X^{w_i^\perp}, \mathbb{Z}) \\
 \downarrow d_{k-r} & & \downarrow d'_{k-r} \\
 E_{k-r}^{k-r, r+1} & \xleftarrow[\simeq]{} & D_{k-r}^{k-r, r+1} \\
 \simeq \uparrow 1 \otimes \delta & & \simeq \uparrow 1 \otimes \delta \\
 H^{k-r}(B_r, \mathbb{Z}) \otimes H^r(X_0^T, \mathbb{Z}) & \xleftarrow[\simeq]{1 \otimes i^r} & H^{k-r}(B_r, \mathbb{Z}) \otimes H^r(X^T, \mathbb{Z})
 \end{array}$$

değişmeli diyagramını göz önüne alırsak $E_T(X_0^{w_i^\perp}) = E_T(X^{w_i^\perp}) = \pm C_i w_i^{m_i}$ olur.

Benzer şekilde $E_T(X_1^{w_i^\perp}) = E_T(X^{w_i^\perp}) = \pm C_i w_i^{m_i}$ olur. Dolayısıyla;

$$\Omega'(X) = \Omega'(X_0) = \Omega'(X_1) = \left\{ \pm C_i w_i^{m_i} \right\}_{i=1}^s \text{ olur.}$$

3. TORUS KOBORDANT KOHOMOLOJİ KÜRELER

3.1 Torus Kobordant Kohomoloji Kürelerin Tamsayı Ağırlık Sistemleri

Bu bölümde $\mathbb{Z}$ - katsayılı kohomoloji kürelerin tamsayı ağırlık sistemlerinin aynı oldukları gösterilmiştir. Bunun sonucu olarak da kohomojenitesi (esas orbitin koboyutu) 3 den küçük olan ve sabit noktası olan torus kobordant kürelerin üzerinde ki torus etkilerinin denk oldukları gösterilmiştir. Bir başka sonuç olarak Smith denklik probleminin bağlantılı Lie gruplar için doğruluğu gösterilmiştir. Smith denklik probleminin bağlantılı Lie gruplar için doğruluğu Borel formülü ile gösterilebilir. Bu bölümde bu problemin çözümü farklı bir yaklaşımla verilmiştir.

Teorem 3.1.1.: X finitistik (her açık örtüsünün sonlu boyutlu bir inceltilmesi (refinement) var olan uzay) $\mathbb{Z}_p$ -uzayı, A , X in kapalı invaryant alt uzayı olmak üzere;

$$rank\check{H}_\sigma^n(X, A, \mathbb{Z}_p) + \sum_{i \geq n} rank\check{H}^i(X^{\mathbb{Z}_p}, A^{\mathbb{Z}_p}, \mathbb{Z}_p) \leq \sum_{i \geq n} rank\check{H}^i(X, A, \mathbb{Z}_p)$$

olur. Burada $\check{H}_\sigma^n(X, A, \mathbb{Z}_p)$ Smith kohomolojisi dir. X kompakt ise eşitsizliğin homoloji versiyonu da doğrudur. (Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups.)

Teorem 3.1.2: $T = S^1 \times \dots \times S^1 = (S^1)^r$ ve $\mathfrak{T} = \{T_{p,\alpha} : T_{p,\alpha} = \mathbb{Z}_{p^\alpha}^r \subset T, \alpha \geq 1\}$, T içindeki abelyen p -gruplarının ailesini göstere sin. X kompakt T -kobordizm olsun. Ayrıca $\partial X = X_0 \amalg X_1$ ve $i : X_0 \rightarrow X, j : X_1 \rightarrow X$ içermeleri $\mathbb{Z}_p$ -kohomoloji cebirinde izomorfizm belirlesin. Yani başka bir ifade ile

$$i^* : H^*(X, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H^*(X_0, \mathbb{Z}_p), \quad j^* : H^*(X, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H^*(X_1, \mathbb{Z}_p)$$

olsun. O halde $T_{p,\alpha} \in \mathfrak{S}$ olmak üzere;

$$i: X_0^{T_{p,\alpha}} \rightarrow X^{T_{p,\alpha}}, \quad j: X_1^{T_{p,\alpha}} \rightarrow X^{T_{p,\alpha}}$$

içermeleri $\mathbb{Z}_p$ katsayılı kohomoloji cebirinde izomorfizm belirler. Yani bir başka ifade ile;

$$i^*: H^*(X^{T_{p,\alpha}}, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H^*(X_0^{T_{p,\alpha}}, \mathbb{Z}_p) \text{ ve } j^*: H^*(X^{T_{p,\alpha}}, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H^*(X_1^{T_{p,\alpha}}, \mathbb{Z}_p)$$

olur.

İspat: İspatı $i: X_0^{T_{p,\alpha}} \rightarrow X^{T_{p,\alpha}}$ içirme dönüşümü için yapmak yeterlidir. İspatı α ve r üzerinden tümevarım ile yapacağız. Şimdi $\alpha=1$ olsun. Bu durumda $X_0^{\mathbb{Z}_p^r} \rightarrow X^{\mathbb{Z}_p^r}$ içirme dönüşümünün $\mathbb{Z}_p$ katsayılı kohomoloji cebirinde izomorfizm belirlediğini gösterelim. $T=S^1$ ise yani $r=1$ ise teorem 3.1 deki standart eşitsizliği düşünelim. O halde;

$$\sum_{i=0}^n \text{rank} \check{H}^i(X^{\mathbb{Z}_p}, X_0^{\mathbb{Z}_p}, \mathbb{Z}_p) \leq \sum_{i=0}^n \text{rank} \check{H}^i(X, X_0, \mathbb{Z}_p)$$

$$\text{rank} H^*(X^{\mathbb{Z}_p}, X_0^{\mathbb{Z}_p}, \mathbb{Z}_p) \leq \text{rank} H^*(X, X_0, \mathbb{Z}_p)$$

olduğu görülür. Öte yandan her i için $H^i(X, X_0, \mathbb{Z}_p) = 0$ olduğundan $\text{rank} H^i(X^{\mathbb{Z}_p}, X_0^{\mathbb{Z}_p}, \mathbb{Z}_p) = 0$ olup dolayısıyla $H^*(X^{\mathbb{Z}_p}, \mathbb{Z}_p) \simeq H^*(X_0, \mathbb{Z}_p)$ sonucuna varılır.

Şimdi $X_0^{\mathbb{Z}_p^r} \rightarrow X^{\mathbb{Z}_p^r}$ içermesinin $\mathbb{Z}_p$ katsayılı kohomoloji cebirinde izomorfizm belirlediğini varsayalım yani $H^*(X^{\mathbb{Z}_p^r}, \mathbb{Z}_p) \simeq H^*(X_0^{\mathbb{Z}_p^r}, \mathbb{Z}_p)$ olsun.

$\mathbb{Z}_p^{r+1} / \mathbb{Z}_p^r \simeq \mathbb{Z}_p$ bölüm grubunun $X^{\mathbb{Z}_p^r}$ üzerindeki etkisini düşünelim. Bu etkinin

sabit nokta kümesi $X^{\mathbb{Z}_p^{r+1}}$ dir. Bir başka ifade ile $\left(X^{\mathbb{Z}_p^r}\right)^{\mathbb{Z}_p^{r+1} / \mathbb{Z}_p^r} = X^{\mathbb{Z}_p^{r+1}}$ olur. Teorem 3.1 deki standart eşitsizliği bu etki için tekrar kullanırsak;

$$\text{rank} H^*(X^{\mathbb{Z}_p^{r+1}}, X_0^{\mathbb{Z}_p^{r+1}}, \mathbb{Z}_p) \leq \text{rank} H^*(X^{\mathbb{Z}_p^r}, X_0^{\mathbb{Z}_p^r}, \mathbb{Z}_p)$$

olur. Hipotezden dolayı eşitsizliğin sağ tarafının sıfır olduğunu biliyoruz. O halde her i için $\text{rank} H^i(X^{\mathbb{Z}_p^{r+1}}, X_0^{\mathbb{Z}_p^{r+1}}, \mathbb{Z}_p) = 0$ olup dolayısıyla $H^i(X^{\mathbb{Z}_p^{r+1}}, X_0^{\mathbb{Z}_p^{r+1}}, \mathbb{Z}_p) = 0$ olur. Dolayısıyla istenilen izomorfizma gösterilmiş olur.

Şimdi $i : X_0^{T_{p,\alpha}} \rightarrow X^{T_{p,\alpha}}$ içermesinin $\mathbb{Z}_p$ katsayılı kohomoloji cebirinde izomorfizm belirlediğini varsayalım yani $H^*(X^{T_{p,\alpha}}, \mathbb{Z}_p) \simeq H^*(X_0^{T_{p,\alpha}}, \mathbb{Z}_p)$ olsun. X ve X_0 yerine $X^{T_{p,\alpha}}$ ve $X_0^{T_{p,\alpha}}$ T uzaylarını düşünelim. Bu uzaylar üzerinde, sabit nokta kümeleri sırasıyla $X^{T_{p,\alpha+1}}$ ve $X_0^{T_{p,\alpha+1}}$ olan $T_{p,\alpha+1} / T_{p,\alpha} \simeq \mathbb{Z}_p^r$ etkileri vardır.

O halde yukarıda gösterildiği gibi $i : X_0^{T_{p,\alpha+1}} \rightarrow X^{T_{p,\alpha+1}}$ içermesi $\mathbb{Z}_p$ katsayılı kohomoloji cebirinde izomorfizm belirler. Bir başka ifade ile $H^*(X^{T_{p,\alpha+1}}, \mathbb{Z}_p) \simeq H^*(X_0^{T_{p,\alpha+1}}, \mathbb{Z}_p)$ olur. Aynı şekilde $j : X_1^{T_{p,\alpha}} \rightarrow X^{T_{p,\alpha}}$ içermesinin $\mathbb{Z}_p$ -kohomoloji cebirinde izomorfizm belirlediği gösterilebilir.

Teorem 3.1.3 : T bağlantılı torus, X kompakt T -kobordizm, $\partial X = X_0 \amalg X_1$ ve $H^*(X, \mathbb{Z}) = H^*(S^n, \mathbb{Z})$ ve $i : X_0 \rightarrow X$, $j : X_1 \rightarrow X$ içermeleri $\mathbb{Z}$ -kohomoloji cebirinde izomorfizm belirlesin. Yani;

$$i^* : H^*(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} H^*(X_0, \mathbb{Z}), \quad j^* : H^*(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} H^*(X_1, \mathbb{Z})$$

olsun. Bu durumda X_0, X_1 ve X uzaylarının tamsayı ağırlık sistemleri eşittir.

İspat : $H^*(X, \mathbb{Z}) = H^*(S^n, \mathbb{Z})$ olduğundan P. A. Smith teoremi gereğince X 'in T etkisi altında sabit nokta kümesinin $\mathbb{Z}$ katsayılı kohomoloji cebiri koboyutu çift olan bir kürenin kohomoloji tipindedir. Bir başka ifade ile

$$H^*(X^T, \mathbb{Z}) = H^*(S^r, \mathbb{Z}), \quad n \equiv r \pmod{2}$$

olur. Diğer yandan ϕ, X_0 üzerindeki etkiyi gösterebiliriz. Bu durumda X_0 üzerindeki $C(X_0)$ konisi üzerinde ϕ 'nin genişlemesi olan $C(\phi)$ etkisi vardır.

Şimdi $Y = C(X_0) \cup X$ olsun. Mayer-Vietoris dizisi kullanarak Y 'nin rasyonel katsayılı kohomoloji cebirinin tek noktanın rasyonel kohomoloji tipinde ($\mathbb{Q}$ -asiklik) olduğu kolayca görülür. P. A. Smith teoreminden Y 'nin, T altında sabit noktalarının rasyonel katsayılı kohomoloji cebiri tek noktanın rasyonel kohomoloji tipinde olur. Fakat $\mathbb{Z}$ katsayısı düşünüldüğünde bu doğru olmayabilir. Diğer yandan;

$$U = X^T \cup \left\{ [x, t] : [x, t] \in (CX_0)^T, t > \frac{1}{2} \right\}$$

$$V = \left\{ [x, t] : [x, t] \in (CX_0)^T, t < \frac{3}{4} \right\}$$

olmak üzere $Y^T = U \cup V$ olur. Şimdi (U, V) ikilisi için rasyonel katsayılı Mayer-Vietoris dizisini göz önüne alalım.

$$\rightarrow H^*(U \cup V, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(U, \mathbb{Q}) \oplus H^*(V, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(U \cap V, \mathbb{Q}) \rightarrow$$

Mayer-Vietoris dizisinden, $i : X_0^T \rightarrow X^T$ içermesi olmak üzere;

$$0 \rightarrow H^*(X^T, \mathbb{Q}) \xrightarrow{i^*} H^*(X_0^T, \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

sonucu bulunur. O halde $i^*: H^*(X^T, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X_0^T, \mathbb{Q})$ izomorfizmdir. Benzer şekilde $j: X_1^T \rightarrow X^T$ içermesinin de rasyonel kohomoloji cebirinde izomorfizm belirlediği, yani $j^*: H^*(X^T, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X_1^T, \mathbb{Q})$ in izomorfizm olduğu gösterilir. Dolayısıyla X^T , X_0^T ve X_1^T uzaylarının $\mathbb{Z}$ katsayılı kohomolojileri koboyutu aynı olan kürelerin $\mathbb{Z}$ katsayılı kohomolojilerine eşittir. Bir başka ifade ile;

$$H^*(X^T, \mathbb{Z}) = H^*(X_0^T, \mathbb{Z}) = H^*(X_1^T, \mathbb{Z}) = H^*(S^r, \mathbb{Z}), \quad n \equiv r \pmod{2}$$

olur. Öte yandan H, T nin koboyutu 1 olan alt torusu olsun. Eğer H, X 'in geometrik ağırlıklarından biri değilse yani $H \notin \Omega'(X)$ ise $\dim X^H = \dim X^T$ olur. O halde $X^H = X^T$ olup dolayısıyla $X_0^H = X_0^T$ olur. Böylece tamsayı sabitini düşünmeksizin $\Omega'(X_0) \subset \Omega'(X)$ olur. Şimdi;

$$(X, X^T) \rightarrow (X_T, X_T \times B_T) \rightarrow B_T$$

relatif demetimsinin Leray-Serre spektral dizisini düşünelim. Bu dizinin $(n-r)$. diferansiyelini d_{n-r} ile gösterelim. Eğer $\alpha, H^n(X, \mathbb{Z}) = H^n(X, X^T, \mathbb{Z})$ nin bir doğurayı ise;

$$d_{n-r}(\alpha) = E_T(X) \otimes \delta f$$

α 'nın transgresyonu olur. Burada $E_T(X)$, X in ekivaryant (equivariant) Euler sınıfı olup

$$E_T(X) = \pm C_X \prod_{i=1}^s w_i^{m_i} \in H^{n-r}(B_T, \mathbb{Z}), \quad C_X \in \mathbb{Z}^+$$

$$w_i \in H^2(B_T, \mathbb{Z}), \quad m_i = \frac{1}{2}(\dim X^{w_i^\perp} - \dim X^T)$$

olur. Burada f ise $H^r(X^T, \mathbb{Z})$ nin bir doğurayıdır. (Straume, 1990)

Öte yandan $H^*(X^{w_i^\perp}, \mathbb{Z}) = H^*(X_0^{w_i^\perp}, \mathbb{Z})$ ve $\Omega'(X_0) \subset \Omega'(X)$ olmasından dolayı;

$$E_T(X_0) = \pm C_{X_0} \prod_{i=1}^s w_i^{m_i} \in H^{n-r}(B_T, \mathbb{Z}), C_{X_0} \in \mathbb{Z}^+$$

olur. Şimdi $C_X \neq C_{X_0}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda sırasıyla a doğal sayısı, p^a , C_X 'i, b doğal sayısı ise p^b C_{X_0} 'ı bölecek şekilde en büyük dereceler ve $a \neq b$ olacak şekilde bir p asal sayısı bulabiliriz. Öte yandan her $\alpha \geq 1$ için teorem 3. 2 den

$$H^*(X^{T_{p,\alpha}}, \mathbb{Z}_p) = H^*(X_0^{T_{p,\alpha}}, \mathbb{Z}_p)$$

olduğunu biliyoruz. Öte yandan;

$$H^*(X^T, \mathbb{Z}) = H^*(X_0^T, \mathbb{Z}) = H^*(S^r, \mathbb{Z})$$

olup X ve X_0 üzerindeki T etkileri için Golber formülünü uygulayalım. O halde;

$$2a = \sum_{\alpha \geq 1} \dim_p X^{T_{p,\alpha}} - \dim_{\mathbb{Z}} X^T = \sum_{\alpha \geq 1} \dim_p X_0^{T_{p,\alpha}} - \dim_{\mathbb{Z}} X_0^T = 2b$$

olur. Bu ise $a \neq b$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $C_X = C_{X_0}$ olup $E_T(X) = E_T(X_0)$

olur. Benzer şekilde $E_T(X) = E_T(X_1)$ olduğu gösterilir.

Şimdi X_0 ve X 'in tamsayı ağırlık sistemleri sırasıyla;

$$\Omega'(X_0) = \left\{ \pm C_i w_i^{m_i} \right\}_{i=1}^s \quad \text{ve} \quad \Omega'(X) = \left\{ \pm C'_i w_i^{m_i} \right\}_{i=1}^s$$

olsun. O halde;

$$\prod_{i=1}^s C_i = \prod_{i=1}^s C'_i = C_X$$

$$E_T(X^{w_i^\perp}) = \pm C'_i w_i^{m_i}, E_T(X_0^{w_i^\perp}) = \pm C_i w_i^{m_i}, C'_i, C_i \in \mathbb{Z}^+$$

olur. O halde X ve X_0 yerine $X^{w_i^\perp}$ ve $X_0^{w_i^\perp}$ uzaylarını ve bunlar üzerindeki T etkisini düşünürsek $C_i = C'_i$ olduğu benzer şekilde gösterilir. Dolayısıyla X_0 ve X in ağırlık sistemleri eşittir. Başka bir ifade ile;

$$\Omega'(X_0) = \Omega'(X) = \left\{ \pm C_i w_i^{m_i} \right\}_{i=1}^s$$

Benzer şekilde $\Omega'(X_1) = \Omega'(X) = \left\{ \pm C_i w_i^{m_i} \right\}_{i=1}^s$ olduğu da gösterilebilir.

Sonuç 3.1.1 : T bağlantılı torus, X kompakt T -kobordizm $\partial X = X_0 \amalg X_1$ ve $H^*(X, \mathbb{Z}) = H^*(S^n, \mathbb{Z})$ ve $i: X_0 \rightarrow X, j: X_1 \rightarrow X$ içermeleri $\mathbb{Z}$ -kohomoloji cebirinde izomorfizm belirlesin. Yani;

$$i^*: H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X_0, \mathbb{Z}), j^*: H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X_1, \mathbb{Z})$$

izomorfizm olsun. Bu durumda $i: X_0^T \rightarrow X^T$ ve $j: X_1^T \rightarrow X^T$ içermeleri $\mathbb{Z}$ -kohomoloji cebirinde izomorfizm belirler. Başka bir ifade ile;

$$H^*(X^T, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^*(X_i^T, \mathbb{Z}), i = 0, 1$$

olur.

İspat : Teorem 3.1.3 de gösterildiği gibi $i: X_0^T \rightarrow X^T$ ve $j: X_1^T \rightarrow X^T$ içermeleri rasyonel katsayılı kohomoloji cebirinde izomorfizm belirler. Şimdi tüm kohomolojileri $\mathbb{Z}$ katsayılı düşünelim.

$$(X_0, X_0^T) \rightarrow ((X_0)_T, X_0^T \times B_T) \rightarrow B_T$$

$$(X, X^T) \rightarrow (X_T, X^T \times B_T) \rightarrow B_T$$

relatif demetimsilerinin Leray-Serre spektral dizilerini düşünelim. Bu spektral dizileri sırasıyla E ve D ile gösterelim. Eğer α , $H^n(X_0, \mathbb{Z}) = H^n(X_0, X_0^T, \mathbb{Z})$ nin bir doğurayı ise, α transgressiftir. Böylece;

$$d_{n-r}(\alpha) = E_T(X_0) \otimes \delta f$$

α 'nın “transgresyonu” olur. Burada $E_T(X_0)$, X_0 'ın ekivaryant (equivariant) Euler sınıfı olur. Öte yandan f ise $H^r(X_0^T, \mathbb{Z})$ nin bir doğurayıdır. Şimdi;

$$\begin{array}{ccc} E_{n-r}^{0,n} = H^n(X_0, X_0^T, \mathbb{Z}) = \langle \alpha \rangle & \xleftarrow[\simeq]{i^n} & D_{n-r}^{0,n} = H^n(X, \mathbb{Z}) \\ \downarrow d_{n-r} & & \downarrow d'_{n-r} \\ E_{n-r}^{n-r, r+1} & \xleftarrow{\quad} & D_{n-r}^{n-r, r+1} \\ \simeq \uparrow 1 \otimes \delta & & \simeq \uparrow 1 \otimes \delta \\ H^{n-r}(B_T, \mathbb{Z}) \otimes \check{H}^r(X_0^T, \mathbb{Z}) & \xleftarrow[1 \otimes \check{i}^r]{\quad} & H^{n-r}(B_T, \mathbb{Z}) \otimes \check{H}^r(X^T, \mathbb{Z}) \end{array}$$

değişmeli diyagramını düşünelim. $E_T(X) = E_T(X_0)$ olduğundan $\check{i}^r$, $\check{H}^r(X^T, \mathbb{Z})$ in bir doğurayını $\check{H}^r(X_0^T, \mathbb{Z})$ in bir doğurayına götürür. Dolayısıyla;

$$i^*: H^*(X^T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X_0^T, \mathbb{Z})$$

izomorfizm olur. Benzer şekilde;

$$H^*(X^T, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^*(X_1^T, \mathbb{Z})$$

olur.

3.2 Tamsayı Yükseltme

$X^T = \emptyset$ durumunda tamsayı ağırlık sistemini biraz daha genişletebiliriz. Bu durumda $w_{i,j} = C_{i,j} w_i$ ve $\prod C_{i,j} = C_i$ olacak şekilde m_i tane $w_{i,j}$ tamsayı ağırlıkları seçebiliriz. Açıkça görüldüğü gibi bu seçim tek olmayabilir. Hatta anlamlı bile olmayabilir. Öte yandan;

$$\Gamma = \left\{ \pm C_{i,1} w_i, \pm C_{i,2} w_i, \dots, \pm C_{i,m_i} w_i \right\}_{i=1}^s$$

kümesine X 'in tamsayı ağırlık sistemi, $\Omega'(X)$ in bir tamsayı yükseltmesi (integral lifting) denir. Eğer her i için $m_i=1$ ise bu seçim tektir. Yani;

$$\Gamma = \left\{ \pm C_{i,1} w_i, \pm C_{i,2} w_i, \dots, \pm C_{i,m_i} w_i \right\}_{i=1}^s = \Omega'(X)$$

olur. Öte yandan T 'nin S^n üzerinde bir ortogonal temsili için tamsayı yükseltmesi tektir ve bu temsilin lineer ağırlık sistemine eşittir.

T bağlantılı torus, X türevlenebilir T -uzayı ve $X^T \neq \emptyset$ olsun. Ayrıca $H^*(X, \mathbb{Z}) = H^*(S^n, \mathbb{Z})$ olsun. Bu durumda T 'nin her K alt grubu için X^K 'nin kohomoloji boyutu;

$$\dim X^K = \# \left\{ \pm C_i w_i : (C_i w_i)|_K = 0 \right\} + (m_0 - 1)$$

olur. Burada m_0 , sıfır ağırlığının katlılığıdır. Bu formül gerçekleşiyorsa $\dim X^K$, $\Omega'(X)$ den hesaplanabilir denir. (Straume, 1990)

Topolojik etkilerde durum daha karışıktır. İntegral yükseltmesi tek olduğu halde bu formülün sağlanmadığı etkiler vardır.

Tanım 3.2.1 : $\bar{\Omega}, \Omega'(X)$ in bir tamsayı yükseltmesi olsun. Eğer T 'nin her T' alt torusu için $X^{T'} \neq \emptyset$ ve $\Omega'(X|_{T'}) = \bar{\Omega}|_{T'}$ koşulu sağlanırsa $\bar{\Omega}, \Omega'(X)$ in 0-tutarlı (0-consistent) tamsayı yükseltmesidir.

Tanım 3.2.2 : $\bar{\Omega}, \Omega'(X)$ in bir tamsayı yükseltmesi olsun. Eğer $H_i = w_i^\perp$ olmak üzere her $\alpha \geq 1$ için $\dim(X^{H_i})^{T_{p,\alpha}}, \bar{\Omega}$ den hesaplanabilirse $\bar{\Omega}$ ye $\Omega'(X)$ in p -tutarlı (p -consistent) tamsayı yükseltmesi denir. Aşağıdaki teoremler Straume (1990) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.2.1 : K, T 'nin bir alt p -torusu $\bar{\Omega}, \Omega'(X)$ in 0-tutarlı veya p -tutarlı tamsayı yükseltmesi ise $\dim X^K, \bar{\Omega}$ den hesaplanabilir.

Teorem 3.2.2 : Her p asalı için $\Omega'(X)$ in p -tutarlı tamsayı yükseltmesi vardır.

Şimdi kohomojenitesi 3 den küçük olan, ve sabit noktası olan torus kobordant küreler üzerindeki etkilerin denk olduklarını gösterelim.

Yardımcı Teorem 3.2.1 : G kompakt Lie grup, X kompakt türevlenebilir G -kobordizm $\partial X = X_0 \coprod X_1 = S^n \coprod S^n$ olsun. O halde (G, X_0) 'in kohomojeneitesi $= (G, X_1)$ 'in kohomojeneitesi $= (G, X)$ 'in kohomojeneitesi -1 olur.

İspat : $p \in X_0$ ve $G(p), (G, X_0)$ dönüşüm grubunun esas orbiti ve $\dim G(p) = r$ olsun. Bu durumda $G([p, 1]), (G, CX_0)$ dönüşüm grubunun esas orbitidir. Burada CX_0, X_0 üzerindeki koni olup üzerinde G genişleme etkisi vardır.

$$Y = X \cup CX_0 \cup CX_1$$

olsun. Y sınırı olmayan $(n+1)$ boyutlu manifolddur. Şimdi S_p , $S_p \cap (Y - X_0) \neq \emptyset$ olacak şekilde $[p, 1]$ de lineer dilim olsun. O halde $\dim S_p = n+1-r$ olur. Şimdi S_p içinde bir s noktası alalım öyle ki $G(s)$, (G, X) dönüşüm grubunun esas orbiti ve $\dim G(s) = v$ olsun. Eğer S_s , s de lineer dilim ise aynı zamanda p de lineer dilim olur. Dolayısıyla;

$$\dim S_s = n+1-v = \dim S_p = n+1-r$$

olup $v = r$ dir. O halde (G, X_0) dönüşüm grubunun kohomojenitesi $= n-r = (G, X)$ dönüşüm grubunun kohomojenitesi -1 olur. Benzer şekilde (G, X_1) dönüşüm grubunun kohomojenitesi $= (G, X)$ dönüşüm grubunun kohomojenitesi -1 olduğu gösterilir.

Teorem 3.2.3 : T bağlantılı torus, X kompakt türevlenebilir T -kobordizm

$$\partial X = (\partial X)_+ \coprod (\partial X)_- = S^n \coprod S^n$$

olsun. Ayrıca $i : (\partial X)_+ \rightarrow X$ ve $j : (\partial X)_- \rightarrow X$ içermeleri $\mathbb{Z}$ -kohomoloji cebirinde izomorfizm belirlesin. Bir başka ifade ile;

$$i^* : H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*((\partial X)_+, \mathbb{Z}), j^* : H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*((\partial X)_-, \mathbb{Z})$$

izomorfizm olsun. Eğer (T, X) dönüşüm grubunun kohomojenitesi 4 den küçük ise $(T, (\partial X)_+)$ dönüşüm grubu $(T, (\partial X)_-)$ dönüşüm grubuna topolojik denktir.

İspat : T nin X üzerindeki etkisini ϕ ile gösterelim. Bu ϕ etkisinin $(\partial X)_+$ ve $(\partial X)_-$ üzerindeki kısıtlama etkilerini ise sırasıyla ϕ_+ ve ϕ_- ile gösterelim. Öte yandan $(T, (\partial X)_+)$ ve $(T, (\partial X)_-)$ dönüşüm gruplarının kohomojeniteleri 3 den

küçük olduğu için ϕ_+ ve ϕ_- sırasıyla ψ_+ ve ψ_- ortogonal etkilere topolojik denktir (Montgomery, Yang, 1960).

Bununla beraber teorem 3.1.3 den dolayı (T, X) , $(T, (\partial X)_+)$ ve $(T, (\partial X)_-)$ dönüşüm gruplarının tamsayı ağırlık sistemleri aynı olup bu ağırlık sistemi $\{\pm c_i w_i^{m_i}\}_{i=1}^s$ olsun. Şimdi $X^{w_i^\perp}$, T kobordizmini göz önüne alalım

$$\partial X^{w_i^\perp} = (\partial X)_+^{w_i^\perp} \amalg (\partial X)_-^{w_i^\perp} \quad \text{ve} \quad \phi_\pm^i : T \times (\partial X)_\pm^{w_i^\perp} \rightarrow (\partial X)_\pm^{w_i^\perp}$$

etkileri $\psi_\pm^i : T \times (S_\pm^n)^{w_i^\perp} \rightarrow (S_\pm^n)^{w_i^\perp}$ ortogonal etkilerine topolojik denktir. Şimdi ϕ_+^i nin bir tamsayı yükseltmesini, ψ_+^i nin lineer ağırlık sistemi olarak, benzer şekilde ϕ_-^i nin bir tamsayı yükseltmesini, ψ_-^i nin lineer ağırlık sistemi olarak seçelim. Başka bir ifade ile;

$$\Gamma = \{\pm C_{i,j} w_i : \prod C_{i,j} = C_i\} = \Omega(\psi_+^i), \quad \Gamma' = \{\pm C'_{i,j} w_i : \prod C'_{i,j} = C_i\} = \Omega(\psi_-^i)$$

sırasıyla ϕ_+^i ve ϕ_-^i nin birer tamsayı yükseltmeleridir. Diğer yandan $K = \mathbb{Z}_n^r \subset T$ olmak üzere;

$$\dim((S_+^n)^{w_i^\perp})^K = \dim((\partial X)_+^{w_i^\perp})^K = \dim((\partial X)_-^{w_i^\perp})^K = \dim((S_-^n)^{w_i^\perp})^K$$

olduğundan;

$$\#\{\pm C_{i,j} : n \mid C_{i,j}\} = \#\{\pm C'_{i,j} : n \mid C'_{i,j}\}$$

olur. O halde $C_{i,j}$ ve $C'_{i,j}$ sayılarının asal çarpanlarını düşünürsek her j için $C_{i,j} = C'_{i,j}$ olduğu görülür. Dolayısıyla ψ_+ ve ψ_- ortogonal etkilerinin lineer ağırlık sistemleri eşit olur. Dolayısıyla ψ_+ ve ψ_- lineer denk olup ϕ_+ ve ϕ_- topolojik denktir.

3.3 Bağlantılı Lie Gruplar İçin Smith Denklik Problemi

Bilindiği gibi bir kompakt Lie grubunun bir türevlenebilen manifold üzerinde türevlenebilen bir etkisinde sabit noktaların aynı yol bileşeninde olan iki sabit noktasındaki teğet temsilleri izomorfiktir.

1960 yılında P. A. Smith “Sonlu bir grubun bir homotopi küre üzerinde iki izole sabit noktası olacak şekilde analitik etkisinde bu sabit noktalardaki teğet temsilleri izomorfik midir?” sorusunu sormuştur. Bu sorunun cevabı asal dereceli devirli gruplar ve yarı serbest etki eden kompakt Lie grupları için evettir. (Atiyah-Bott, Milnor, 1968). 1976 yılında Sanchez bu sonucu biraz daha genelleştirerek p ve q asal tek sayılar olmak üzere derecesi pq olan devirli gruplar için, 1969 yılında Bredon bazı 2-gruplar için bu probleme olumlu cevap vermişlerdir. İlk negatif cevap 1979 yılında Petrie tarafından verilmiştir. Petrie Smith denk ama izomorfik olmayan tek dereceli abelyen grup etkisi örnekleri vermiştir. Öte yandan derecesi çift (Dovermann, 1982) ve derecesi tek (Dovermann, Petrie, 1984) olan devirli gruplarda da her zaman cevap olumlu değildir.

Şimdi Smith probleminin bağlantılı Lie gruplar için bir çözümünü vereceğiz.

Teorem 3.3.1 (Bağlantılı Lie gruplar için Smith denklik problemi) : G kompakt bağlantılı Lie grup $\Sigma = \Sigma^{n+1}$ homotopi G -küre ve Σ^{n+1} in G etkisi altında sabit kalan noktaları sadece p ve q olsun. Yani $\Sigma^G = \{p, q\}$ olsun. Bu durumda G nin p ve q noktalarındaki teğet temsilleri lineer denktir.

İspat : İspatı bağlantılı toruslar için yapmak yeterlidir. Çünkü T , G ’ nin bir maksimal torusu ise Σ^T bağlantılı veya $\Sigma^T = \{p, q\} = \Sigma^G$ olur. O halde G ’yi, $\dim G = r$ olan bir bağlantılı torus varsayabiliriz. S_p ve S_q sırasıyla p ve q daki dilimler olsun. S_p ve S_q , G -invariant açık diskler olarak düşünülebilir. Bu dilimleri

Σ dan çıkartırsak $S(T_p\Sigma)$ ile $S(T_q\Sigma)$ arasında bir kobordizm elde ederiz. Bir başka ifade ile;

$$\partial(\Sigma - (S_p \cup S_q)) = S(T_p\Sigma) \cup S(T_q\Sigma)$$

olur. Burada $S(T_p\Sigma)$ ve $S(T_q\Sigma)$ sırasıyla $T_p\Sigma$ ve $T_q\Sigma$ nin birim küreleridir. Şimdi φ_+ ve φ_- sırasıyla $S(T_p\Sigma)$ ve $S(T_q\Sigma)$ üzerindeki temsilleri gösterebiliriz. Bu temsillerin lineer denk olduklarını göstermek yeterlidir. Diğer taraftan dikkat edilirse;

$$S(T_p\Sigma) \rightarrow \Sigma - (S_p \cup S_q) \text{ ve } S(T_q\Sigma) \rightarrow \Sigma - (S_p \cup S_q)$$

içermeleri $\mathbb{Z}$ – kohomoloji cebirinde izomorfizm belirler. O halde teorem 3.1.3 gereği $(G, S(T_p\Sigma))$ ve $(G, S(T_q\Sigma))$ temsillerinin tamsayı ağırlık sistemleri aynıdır. Bu ortak ağırlık sistemi $\{\pm c_i w_i^{m_i}\}_{i=1}^s$ olsun. Şimdi benzer işlemleri Σ yerine $\Sigma^{w_i^\perp}$ için yaparsak $S(T_p\Sigma^{w_i^\perp})$ ile $S(T_q\Sigma^{w_i^\perp})$ birim kürelerinin tamsayı ağırlık sistemlerinin aynı olduğunu görürüz. Bir başka ifade ile $\Omega'(S(T_p\Sigma^{w_i^\perp})) = \Omega'(S(T_q\Sigma^{w_i^\perp})) = \{\pm c_i w_i^{m_i}\}$ olur. O halde her i için $\Omega'(S(T_p\Sigma^{w_i^\perp}))$ nin tamsayı yükseltmelerinin birleşimi $S(T_p\Sigma)$ ’nin lineer ağırlık sistemine eşittir. Bir başka ifade ile;

$$\bigcup_{i=1}^s \left\{ \Omega'(S(T_p\Sigma^{w_i^\perp})) \text{ nin integral yükseltmesi } \right\} = \Omega(S(T_p\Sigma)) = (G, S(T_p\Sigma))$$

nin lineer ağırlık sistemidir. Benzer şekilde;

$$\bigcup_{i=1}^s \left\{ \Omega'(S(T_q\Sigma^{w_i^\perp})) \text{ nin integral yükseltmesi } \right\} = \Omega(S(T_q\Sigma)) = (G, S(T_q\Sigma))$$

nin lineer ağırlık sistemidir.

$$\Gamma_i = \{\pm C_{i,j} w_i : j = 1, 2, \dots, m_i\}, \quad \Gamma'_i = \{\pm C'_{i,j} : j = 1, 2, \dots, m_i\}$$

sırasıyla $\Omega'(S(T_p \Sigma^{w_i^\perp}))$ ve $\Omega'(S(T_q \Sigma^{w_i^\perp}))$ nin tamsayı yükseltmeleri olsun.

$$\prod C_{i,j} = \prod C'_{i,j} = C_i$$

olup $\Gamma_i = \Gamma'_i$ olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. $K \subset T$ ve $K \simeq \mathbb{Z}_k$ ($k \in \mathbb{N}$) olsun. O halde

$$\dim(S(T_p \Sigma^{w_i^\perp}))^K = \#\{\pm C_{i,j} w_i : (C_{i,j} w_i)|_K = 0\} + (m_0 - 1) = \#\{\pm C_{i,j} : n|C_{i,j}\} + (m_0 - 1)$$

İkinci eşitlik lineer durumda geçerlidir. Benzer şekilde ;

$$\dim(S(T_q \Sigma^{w_i^\perp}))^K = \#\{\pm C'_{i,j} w_i : (C'_{i,j} w_i)|_K = 0\} + (m_0 - 1) = \#\{\pm C'_{i,j} : n|C'_{i,j}\} + (m_0 - 1)$$

olup $\dim(S(T_p \Sigma^{w_i^\perp}))^K = \dim(S(T_q \Sigma^{w_i^\perp}))^K$ olduğundan $C_{i,j}$ ve $C'_{i,j}$ sayılarının asal çarpanlarını düşünürsek her j için $C_{i,j} = C'_{i,j}$ olduğu görülür. O halde $(G, S(T_p \Sigma))$ ve $(G, S(T_q \Sigma))$ ortogonal temsillerinin lineer ağırlık sistemleri aynı olup G nin p ve q daki teğet temsilleri lineer denktir.

4. TORUS KOBORDANT KOMPLEKS PROJEKTİF UZAYLAR

Bu bölümde torus kobordant kompleks projektif uzayların etkilerin lineer olması durumunda denk etkiler olduğu gösterilmiştir.

4.1 Kohomoloji Kompleks Projektif Uzaylar Üzerindeki Dönüşüm Grupları:

Tanım 4.1.1: Rasyonel katsayılı kohomoloji tipi bir kompleks projektif uzayın rasyonel katsayılı kohomoloji tipi ile aynı olan uzaylara kohomoloji kompleks projektif uzaylar denir.

Dönüşüm grupları teorisinde torus, $\mathbb{Z}_p$ -torus gibi elementer abelyen grupların kohomoloji kompleks projektif uzaylar üzerindeki etkileri önemli rol oynar. Su, J. C. (1963) bir kohomoloji kompleks projektif uzayın torus etkisi altında sabit nokta kümesinin bağlantılı bileşenlerinin de kohomoloji kompleks projektif uzay olduğunu göstermiştir. Öte yandan torus ve $\mathbb{Z}_p$ -torus gruplarının kohomoloji kompleks projektif uzaylar üzerindeki etkilerinde asiklik manifoldlarda tanımlandığı gibi geometrik ağırlık sistemi tanımlanabilir.

4.2 Kohomoloji kompleks Projektif Uzaylarında Torus Etkileri İçin Ağırlık Sistemi Ve Ayrışım Teoremi

G bir torus grubu olsun X kohomoloji n -kompleks projektif uzay, bir başka ifadeyle $H^*(X, \mathbb{Q}) = H^*(CP^n, \mathbb{Q})$ olsun ve X üzerinde bir G etkisi verilsin.

$$H^*(X, \mathbb{Q}) \simeq \frac{\mathbb{Q}[\xi_0]}{\langle \xi_0^{n+1} \rangle}, \quad \xi_0 \in H^2(X, \mathbb{Q})$$

Olup $X, X_G \rightarrow B_G$ demetimsisinde (fibration) sıfıra tamamen non-homologdur(TNHZ). Ayrıca sabit nokta kümesi $X^G \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla $X_G \rightarrow B_G$

demetisisinin Leray-Serre spektral dizisi dejeneredir yani dizinin E_2 -terimi, E_∞ limit terimine eşittir. Bir başka ifadeyle $i : X \rightarrow X_G$ olmak üzere $i^* : H^*(X_G, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$ örtendir. $\xi \in (i^*)^{-1}(\xi_0)$ olmak üzere;

$$H_G^*(X, \mathbb{Q}) = H^*(B_G, \mathbb{Q})[\xi] / \langle f(\xi) \rangle \text{ şeklindedir.}$$

$f(\xi)$ polinomu lokalizasyon teoreminden lineer çarpanlarına ayrılabilir. Yani

$$f(\xi) = (\xi - w_1)^{k_1} \dots (\xi - w_s)^{k_s}, \quad w_j \in H^2(B_G, \mathbb{Q})$$

Bu ayrışım ile sabit nokta kümesi X^G nin bağlantılı bileşenleri arasında bire-bir eşleme vardır. O halde $\{F^j : 1 \leq j \leq s\}$, X^G nin bağlantılı bileşenleri olmak üzere

$$H^*(F^j, \mathbb{Q}) = H^*(CP^{k_j-1}, \mathbb{Q}) \text{ (Su, 1963)}$$

$$q_j \in F^j \text{ ve } i_j^* : H_G^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_G^*(q_j, \mathbb{Q}) \text{ olmak üzere;}$$

$$i_j^*(\xi) = w_j \text{ ve } \sum_{j=1}^s k_j = n+1 \text{ dir.}$$

X in $\mathbb{Q}$ katsayılı kohomoloji kompleks projektif uzay olması yerine $\mathbb{Z}$ katsayılı kohomoloji kompleks projektif uzay olması durumunda kohomolojilerde $\mathbb{Z}$ katsayısı kullanabiliriz. Bu durumda

$$H_G^*(X, \mathbb{Z}) \simeq H^*(B_G, \mathbb{Z})[\xi] / \langle f(\xi) \rangle$$

$$f(\xi) = \xi^{n+1} + c_1 \xi^n + \dots c_{n+1} \in H^*(B_G, \mathbb{Z})[\xi]$$

Gauss Lemması gereğince $f(\xi)$, $H^*(B_G, \mathbb{Z})[\xi]$ polinom halkasında lineer çarpanlarına ayrışır. Bir başka ifadeyle;

$$f(\xi) = (\xi - w_1)^{k_1} \dots (\xi - w_s)^{k_s}, \quad w_j \in H^2(B_G, \mathbb{Z}) \text{ olur. (Hsiang, 1975)}$$

Tanım 4.2.1: G kompakt bağlantılı Lie grup, T , G nin bir maksimal torusu, X kohomoloji kompleks projektif uzay ve X üzerinde bir G etkisi verilsin. X üzerinde T nin kısıtlama etkisini düşünürsek $f(\xi)=0$ eşitliğinin kökleri w_j ve bu köklerin katlılıkları k_j olmak üzere $\{w_j, k_j : 1 \leq j \leq s\}$ kümesi X in geometrik ağırlık sistemidir ve $\Omega(X)$ ile gösterilir. Burada $w_j \in H^2(B_T, \mathbb{Q})$ dur. Dikkat edilirse X in bir geometrik ağırlık sistemi ξ , liftingine bağlıdır.

Teorem 4.2.1: G_1 , G_2 kompakt bağlantılı Lie grupları, $h: G_1 \rightarrow G_2$ homomorfizma ve T_1 , T_2 sırasıyla G_1 ve G_2 nin birer maksimal torusları ve $h(T_1) \subseteq T_2$ olsun. X kohomoloji kompleks projektif uzay ve X üzerinde bir G_2 etkisi verilsin. $h^*(X)$, X üzerinde h ile belirlenen G_1 etkisinin yapısını göstermek üzere;

$$\Omega(h^*(X)) = h^*(\Omega(X)) = \{h^* w_j : w_j \in \Omega(X)\}$$

Özel olarak G_1 , G_2 nin alt grubu, h , içirme dönüşümü ise $\Omega(X)|_{G_1} = \Omega(h^*(X))$ olur. (Hsiang, 1975)

4.3 Torus Kobordant Kompleks Projektif Uzaylar

Teorem 4.3.1: T , torus grubu ve X kompakt T -kobordizm olsun öyle ki $\partial X = X_0 \amalg X_1 = CP^n \amalg CP^n$ Ayrıca $i: X_0 \rightarrow X$ ve $i: X_1 \rightarrow X$ içermeleri $\mathbb{Q}$ katsayılı kohomoloji cebirinde izomorfizm belirlesin. Yani;

$$i^* : H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X_0, \mathbb{Q}) \text{ ve } j^* : H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X_1, \mathbb{Q})$$

izomorfizm olsun. O halde X_0 ve X_1 üzerindeki T etkileri lineer ise bu etkiler denktir.

İspat: G bağlantılı Lie grubu, (X, A) G uzayı ve $H^{tek}(X, A, \mathbb{Q}) = 0$ ise $(X, A) \rightarrow (X_G, A_G) \rightarrow B_G$ relatif demetimsinin Leray-Serre spektral dizisi dejeneredir. Öte yandan G bağlantılı olduğundan G , $H^*(X, A, \mathbb{Q})$ üzerinde aşıkarak etkir. Dolayısıyla (X, A) , (X_G, A_G) içinde tamamen sıfıra non-homolog olur. Başka bir ifadeyle $H^*(X, A, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X_G, A_G, \mathbb{Q})$ örtendir. Bunun sonucunda (X, X_0) , $(X_T, (X_0)_T)$ içinde tamamen sıfıra non-homologdur. Benzer şekilde (X, X_1) , $(X_T, (X_1)_T)$ içinde tamamen sıfıra non-homolog olur. O halde $i : X_0^T \rightarrow X^T$ ve $j : X_1^T \rightarrow X^T$ içermeleri $\mathbb{Q}$ katsayılı kohomoloji cebirinde izomorfizm belirler. Bir başka ifade ile;

$$H^*(X_k^T, \mathbb{Q}) \simeq H^*(X^T, \mathbb{Q}); k = 0, 1 \text{ dir.}$$

Bu sonuç aslında Bredon bölüm 7, Teorem 1.6'nın bir genellemesidir. Bredon bu teoremin ispatını $G = S^1$ ve $\mathbb{Z}_p$ için yapmıştır fakat tümevarım ile daha yüksek ranklı torus ve $\mathbb{Z}_p$ -toruslar içinde ispat yapılabilir. Öte yandan Bredon $G = S^1$ durumunda orbit uzayını finitistik varsayarak ispat yapmıştır fakat artık bu varsayıma gerek yoktur çünkü orbit uzayının finitistik olacağı Deo ve Tripathi tarafından gösterilmiştir.

φ_0 , X_0 üzerindeki φ_1 ise X_1 üzerindeki kısıtlama etkilerini gösterebilir. φ_0 ve φ_1 lineer olduklarından $\tilde{\varphi}_0 : T \rightarrow U(n+1)$ ve $\tilde{\varphi}_1 : T \rightarrow U(n+1)$ kompleks temsilleri vardır öyle ki bu temsillerin lineer ağırlık sistemleri;

$$\Omega(\tilde{\varphi}_0)=\{w_i, m_i : 1 \leq i \leq s\} \text{ ve } \Omega(\tilde{\varphi}_1)=\{w_j, m_j : 1 \leq j \leq r\}$$

olup bu temsiller X_0 ve X_1 üzerinde sırasıyla φ_0 ve φ_1 etkilerini belirler. Dikkat edilirse $r = s$ olmak zorundadır çünkü r ve s sayıları sırasıyla X_0^T ve X_1^T nin bağlantılı bileşenlerinin sayılarıdır.

Şimdi $S^1 \rightarrow S_T^{2n+1} \rightarrow CP_T^n$ demetimsinin Leray-Serre spektral dizisini düşünelim. α , $H^1(S^1, \mathbb{Q})$ nun bir doğurayı olsun o halde α , transgressiftir. $\tau(\alpha) = a \in H_T^2(CP^n, \mathbb{Q})$, α 'nın transgresyonu olmak üzere $H_T^*(X_0, \mathbb{Q}) = H^*(B_T, \mathbb{Q})[a] / \langle f(a) \rangle$ dir. Burada $f(a) = \prod_{i=1}^s (a - w_i)^{m_i}$ şeklinde çarpanlarına ayrılır. $F_1, F_2, \dots, F_s$, X_0^T nin bağlantılı bileşenleri olmak üzere $H^*(F_i, \mathbb{Q}) = H^*(CP^{m_i-1}, \mathbb{Q})$ dur. Şimdi;

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^2(B_T, \mathbb{Q}) & \rightarrow & H_T^2(X_0, \mathbb{Q}) & \rightarrow & H^2(X_0, \mathbb{Q}) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & i_T^2 \uparrow \simeq & & i^2 \uparrow \simeq \\ 0 & \rightarrow & H^2(B_T, \mathbb{Q}) & \rightarrow & H_T^2(X, \mathbb{Q}) & \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow 0 \end{array}$$

tam dizilerini göz önüne alalım $b = (i_T^2)^{-1}(a)$ olsun. O halde;

$$H_T^*(X, \mathbb{Q}) = H^*(B_T, \mathbb{Q})[b] / \langle g(b) \rangle$$

$$g(b) = \prod_{i=1}^s (b - w_i'')^{m_i''} \text{ dir.}$$

$X_0^T \rightarrow X^T$ içermesi $\mathbb{Q}$ katsayılı kohomoloji cebirinde izomorfizm verdiğinden X_0^T ile X^T nin bağlantılı bileşenleri arasında bire-bir eşleme vardır. Yani

$F_1'', \dots, F_s'', X^T$ 'nin bağlantılı bileşenleri ise $H^*(F_i'', \mathbb{Q}) = H^*(CP^{m_i-1}, \mathbb{Q})$ olur. Bir başka ifade ile $q_j \in F_j \subseteq F_j''$ gelişigüzel seçelim. Bu içermeye;

$$H^*(F_j, \mathbb{Q}) \simeq H^*(F_j'', \mathbb{Q}) = H^*(CP^{m_j-1}, \mathbb{Q})$$

izomorfizmi belirler öyle ki bu homomorfizma altında a 'nın görüntüsü w_j dir. O halde;

$$\begin{array}{ccc} H_T^*(X_0, \mathbb{Q}) & \rightarrow & H_T^*(q_j, \mathbb{Q}) \\ i_T^* \uparrow \simeq & & \parallel \\ H_T^*(X, \mathbb{Q}) & \rightarrow & H_T^*(q_j, \mathbb{Q}) \end{array}$$

değişmeli diagramı göz önüne alınırsa $w_j = w_j''$ olduğu kolayca görülür. O halde;

$$f(a) = \prod_{i=1}^s (a - w_i)^{m_i} \text{ ve } g(b) = \prod_{i=1}^s (b - w_i)^{m_i} \text{ dir.}$$

Öte yandan;

$$\begin{array}{ccc} H_T^2(X, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{j_T^2} & H_T^2(X_1, \mathbb{Q}) \\ i_T^* \downarrow \simeq & & \uparrow \tau \\ H_T^2(X_0, \mathbb{Q}) & \xleftarrow{\tau} & H^1(S^1, \mathbb{Q}) \end{array}$$

değişmeli diagramını düşünelim. $c = j_T^2(b) \in H_T^2(X_1, \mathbb{Q})$ olmak üzere

$$H_T^*(X_1, \mathbb{Q}) = H^*(B_T, \mathbb{Q})[c] / \langle h(c) \rangle, \quad h(c) = \prod_{i=1}^s (c - w_i')^{m_i}$$

Benzer şekilde yapılarak $w_i' = w_i'' = w_i$ olduğu kolayca gösterilebilir. O halde

$$\Omega(\tilde{\varphi}_0)=\Omega(\tilde{\varphi}_1)=\{w_i, m_i : 1 \leq i \leq s\}$$

olup $\tilde{\varphi}_0$ ve $\tilde{\varphi}_1$ lineer denktir. Dolayısıyla φ_0 ve φ_1 denk etkilerdir.

5. GRUP ETKİLERİNİN DEFORMASYONU

Bu bölümde bir dönüşüm grubunun başka bir dönüşüm grubuna deformasyonu, başka bir ifade ile izotopik dönüşüm grupları incelendi.

5.1 Grup Etkilerinin Deformasyonlarının İncelenmesi

Tanım 5.1.1 : X bir topolojik uzay, G kompakt Lie grup olsun. G 'nin $X \times I$ üzerinde seviye koruyan bir etkisine bir G -izotopi denir. Bir başka ifade ile θ bir G -izotopi ise her $t \in I$ seviyesinde G 'nin X üzerinde;

$$\theta_t(g, x) = \theta(g, x, t), \quad g \in G, x \in X$$

olacak şekilde θ_t etkisi vardır.

θ bir G -izotopi ise θ_0 ile θ_1 izotopik etkilerdir, veya θ 'ya, θ_0 etkisinin θ_1 etkisine bir deformasyonu denir. Öte yandan G 'nin $X \times I$ üzerinde $X \times \{0\}$ ve $X \times \{1\}$ 'i invaryant bırakan bir etkisine G -konkordans denir. $X \times \{0\}$ ve $X \times \{1\}$ üzerindeki etkilere ise konkordant etkiler denir. Görüldüğü gibi G -izotopi, G -konkordansın özel bir halidir. O halde temel problemlerden biri bir G -konkordansın ne zaman bir G -izotopi olmak zorunda kalacağıdır. Bu problem için aşağıdaki kısmi cevabı verebiliriz.

Teorem 5.1.1 : $T = T^r$ bağlantılı torus ve $\varphi, X \times I$ üzerinde bir T -konkordans olsun. Eğer her $\mathbb{Z}_p^r \subset T$ için $\varphi|_{\mathbb{Z}_p^r \times X \times I}$ kısıtlama etkisi bir $\mathbb{Z}_p^r$ -izotopi ise φ, T -izotopidir.

İspat : $\varphi: T \times X \times I \rightarrow X \times I$ bir T -konkordans olsun. Şimdi φ 'nin T -izotopi olmadığını varsayalım. O halde $\varphi, X \times I$ üzerinde seviye koruyan bir etki değildir. Bir başka ifade ile $t \neq t'$ olmak üzere $\varphi(g, x, t) = (y, t')$ olacak şekilde

$(g, x, t) \in T \times X \times I$ vardır. Öte yandan T bağlantılı olduğundan 1 ile g 'yi T içinde bağlayan bir yol vardır. Yani;

$$f: I \rightarrow T, f(0) = 1, f(1) = g$$

Olacak şekilde bir f eğrisi vardır. Öte yandan abelyen p -grupları T içinde yoğun olduğundan $(f(I) \cap \mathbb{Z}_p^r) - T_x \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $\mathbb{Z}_p^r \subset T$ vardır. Şimdi $g' \in (f(I) \cap \mathbb{Z}_p^r) - T_x$ alalım. $\varphi(g', x, t) \notin X \times \{t\}$ olur. Fakat bu durum $\varphi|_{\mathbb{Z}_p^r \times X \times I}$ kısıtlama etkisinin bir $\mathbb{Z}_p^r$ -izotopi olmasıyla çelişir. O halde φ bir T -izotopidir.

Bir başka temel problemlerden biri ise izotopik etkilerin birbirlerine ne kadar benzer olduklarıdır.

Teorem 5.1.2 : T bağlantılı torus, φ_0 ve φ_1 T 'nin S^n üzerinde iki ortogonal temsili olsun. O halde aşağıdakiler birbirine denktir.

- I. φ_0 ve φ_1 lineer denktir.
- II. φ_0 'ın φ_1 'e, her seviyede lineer olan bir deformasyonu vardır.

İspat : (I $\Rightarrow$ II)

φ_0, φ_1 T 'nin lineer denk iki ortogonal temsili olsun. O halde ;

$$\begin{array}{ccc} T \times S^n & \xrightarrow{\varphi_0} & S^n \\ \downarrow 1 \times f & & \downarrow f \\ T \times S^n & \xrightarrow{\varphi_1} & S^n \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $f: S^n \rightarrow S^n$ lineer homeomorfizmi vardır. T kompakt ve f lineer olduğundan $f \in O(n+1)$ varsayabiliriz. $O(n+1)$ 'in bağlantılı bileşen sayısı 2 dir. Bunlar;

$$SO(n+1) = \{A \in O(n+1) : \det A = 1\}$$

$$SO^-(n+1) = \{A \in O(n+1) : \det A = -1\}$$

O halde $\det f = 1$ ise I_{n+1} ile f yi $SO(n+1)$ de bir yol ile bağlayabiliriz. Yani;

$$\phi: I \rightarrow SO(n+1), \quad \phi(0) = I_{n+1} \quad \phi(1) = f$$

olacak şekilde $SO(n+1)$ de bir ϕ eğrisi vardır. O halde $\bullet$ matris çarpımını göstermek üzere;

$$\begin{aligned} \Phi: T \times S^n \times I &\rightarrow S^n \times I \\ \Phi(g, x, t) &= (\phi(t) \bullet (\phi_0(g, (\phi(t))^{-1} \bullet x)), t) \end{aligned}$$

istenilen deformasyonu verir. Benzer şekilde $\det f = -1$ ise I_{n+1} in 1. satırının -1 ile çarpımından oluşan matrisi I_{n+1}^- ile gösterirsek, I_{n+1}^- ile f yi $SO^-(n+1)$ de birleştiren bir yol vardır. Yani;

$$\phi: I \rightarrow SO^-(n+1), \quad \phi(0) = I_{n+1}^-, \quad \phi(1) = f$$

olacak şekilde $SO^-(n+1)$ de bir ϕ eğrisi vardır. O halde;

$$\begin{aligned} \Phi: T \times S^n \times I &\rightarrow S^n \times I \\ \Phi(g, x, t) &= (\phi(t) \bullet (\phi_0(g, (\phi(t))^{-1} \bullet x)), t) \end{aligned}$$

φ_0 'ın φ_1 'e her seviyede lineer olan bir deformasyonudur.

(II $\Rightarrow$ I):

φ_0 'ın φ_1 'e her seviyede lineer olan bir $\{\varphi_t\}_{t \in I}$ deformasyonu verilsin. Her $t \in I$ için φ_t lineer temsillerinin Euler sınıfları aynıdır. Bir başka ifade ile $t, t' \in I$ ise $E_T(S^n \times \{t\}) = E_T(S^n \times \{t'\})$ olur. Euler sınıfı tamsayı ağırlıklara ayrıştığından her $t, t' \in J$ için $\Omega'(\varphi_t) = \Omega'(\varphi_{t'})$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ vardır. Burada $\Omega'(\varphi_t)$ ve $\Omega'(\varphi_{t'})$ sırasıyla φ_t ve $\varphi_{t'}$ temsillerinin tamsayı ağırlık sistemleridir.

Dolayısıyla her $t, t' \in J$ için φ_t ve $\varphi_{t'}$ temsillerinin lineer ağırlık sistemleri aynıdır. O halde her $g \in T$ için;

$$\begin{aligned} tr : I &\rightarrow R \\ t &\rightarrow tr(\varphi_t(g)) \end{aligned}$$

sürekli olup, J de sabit olduğundan $\bar{J}$ da sabit olur. Dolayısıyla J kapalı kümedir. O halde bu şekildeki $\{J\}$ ailesi I nın parçalanışını verir. Şimdi φ_0 'ın lineer ağırlık sistemine eşit olan seviyeleri düşünelim. Yani;

$$A = \{t \in I : \varphi_0' \text{ in lineer ağırlık sistemi} = \varphi_t' \text{ nin lineer ağırlık sistemi}\}$$

$A \in \{J\}$ olup I bağlantılı olduğundan $A = I$ dır. Dolayısıyla her $t \in I$ seviyesinde φ_t temsillerinin lineer ağırlık sistemi φ_0 'ın lineer ağırlık sistemine eşit olur. O halde her $t \in I$ için φ_0 ile φ_t lineer denk iki temsildir.

Teorem 5.1.3 (Palais-Stewart,1960) : X kompakt türevlenebilen manifold, G kompakt Lie grup ve θ , $X \times I$ üzerinde türevlenebilen bir G -izotopi olsun. Yani;

$$\theta : G \times X \times I \rightarrow X \times I \quad \text{ve} \quad \theta_t : G \times X \times \{t\} \rightarrow X \times \{t\}$$

türevlenebilir olsun. Bu durumda $(X \times I, \theta_0 \times 1) \rightarrow (X \times I, \theta)$ türevlenebilir, grup etkisini koruyan ve $X \times \{0\}$ 'a kısıtlaması içermeye dönüşümü olan bir diffeomorfizm vardır.

Palais-Stewart teoremi; kompakt Lie grupların kompakt türevlenebilir bir manifold üzerindeki türevlenebilir izotopik olan iki etkinin denk olduğunu söylediği gibi aslında bu izotopinin her seviyesindeki etkilerin başlangıç seviyesindeki etkiyle aynı olduğunu söyler. Hipotezdeki kompaktlık ve türevlenebilirlik şartlarından biri kaldırılırsa sonuç doğru olmayabilir.

Topolojik kategoride ise G -izotopik etkiler çok farklılık gösterebilir. Bununla ilgili birkaç örnek vermeden önce aşağıdaki önermeleri verelim.

Önerme 5.1.1 : ϕ , G 'nin S^{n-1} üzerindeki bir etkisi ise G 'nin D^n kapalı n -disk üzerinde $C(\phi): G \times D^n \rightarrow D^n$ koni etkisi vardır ve;

$$C(\phi)(g, y) = \begin{cases} |y|\phi(g, \frac{y}{|y|}) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

dir.

Önerme 5.1.2 : ϕ , G 'nin D^n üzerinde bir etkisi ise ϕ ile $C(\phi|_{S^{n-1}})$ arasında kanonik bir G -izotopi vardır. Bu izotopi;

$$\Phi: G \times D^n \times I \rightarrow D^n \times I$$

$$\Phi(g, y, t) = \begin{cases} 0 & y = 0 \text{ ve } t = 1 \\ (1-t)\phi(g, \frac{y}{1-t}) & 0 \leq |y| \leq 1-t \text{ ve } t \neq 1 \\ |y|\phi(g, \frac{y}{|y|}) & 1-t \leq |y| \leq 1 \text{ ve } y \neq 0 \end{cases}$$

Görüldüğü gibi D^n üzerindeki her G etkisi sabit noktaları ve orbit uzayları büzülebilir olan bir G etkisine G izotopiktir. (Edmonds, 1975)

Örnek 5.1.1 : M kompakt büzülebilir n -manifold ($n \geq 4$) ve ∂M basit bağlantılı olmasın. O halde $M \times D^1$, D^{n+1} 'e homeomorfiktir (Curtis, 1961). Şimdi $\mathbb{Z}_2$ 'nin D^{n+1} üzerine aşıkâr olmayan etkisini düşünelim. Bu etkinin sabit noktaları $M \times \{0\}$ dır. Öte yandan $C(\phi|_{S^n})$ koni etkisinin sabit noktaları $C(\partial M)$ ye

homeomorfiktir. Dolayısıyla $\phi, C(\phi|_{S^n})$ koni etkisine $\mathbb{Z}_2$ -izotopiktir fakat denk değildir.

Örnek 5.1.2 : G izohedral(icosahedral) grup olsun. G derecesi 60 olan sonlu gruptur. O halde yeterince büyük n için G 'nin D^n üzerinde sabit noktası olmayan bir etkisi vardır(Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups, 1972, Sayfa 58). Öte yandan $\phi, C(\phi|_{S^{n-1}})$ koni etkisine G -izotopiktir fakat denk değildir. Çünkü $C(\phi|_{S^{n-1}})$ etkisinin sabit noktası vardır.

Teorem 5.1.4 : G kompakt Lie grup, X kompakt topolojik uzay ve $\varphi, X \times I$ üzerine bir G -izotopi olsun Eğer φ 'nin $t = 0$ seviyesinde sabit noktası yoksa öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki her $t' \in [0, \varepsilon)$ için φ 'nin $t = t'$ seviyesinde sabit noktası yoktur.

İspat : T_G, φ 'nin orbit tiplerinin kümesi olsun. T_G üzerindeki topoloji $H \subseteq G$ olmak üzere $[G/H] = \text{Tip}(G/H)$ den küçük veya eşit orbit tiplerinin kümesini kapalı küme kabul eden minimum topoloji olsun. O halde;

$$\tau : X \times I / G \rightarrow T_G$$

sürekli. Dolayısıyla her $x \in X$ için;

$$\phi_x : I \rightarrow X \times I \rightarrow X \times I / G \rightarrow T_G \quad \phi_x(t) = [G(x, t)]$$

olarak tanımlanan fonksiyon sürekli. Ayrıca φ 'nin $t = 0$ seviyesinde sabit noktası olmadığından her $x \in X$ için;

$$\phi_x(0) \neq [*] = \text{Tip}(G/G) \in T_G$$

olur. O halde $U = T_G - \{[*]\}$ açık olup $0 \in \phi_x^{-1}(U)$ olur. Dolayısıyla her $x \in X$ için bir $\varepsilon_x > 0$ vardır öyle ki $V_x = [0, \varepsilon_x) \subset I$ ve $[*] \notin \phi_x(V_x)$ dir.

$$X \times I \rightarrow X \times I / G \rightarrow T_G$$

sürekli olduğundan her $y \in W_x$ ve her $s \in V_x$ için $\phi_y(s) \neq [*]$ olacak şekilde $x \in W_x \subset X$ açık kümesi vardır. Öte yandan φ 'nin $t = 0$ seviyesinde sabit noktası olmadığından her $x \in X$ için $G_{(x,0)} \neq G$ dir. Şimdi $(x,0)$ 'ın $X \times I$ da bir S_x dilimini alalım. Dolayısıyla GS_x , $G(x,0)$ 'ın açık komşuluğudur. Dolayısıyla;

$$W_x \times V_x \subset GS_x \subset X \times I$$

varsayabiliriz. Ayrıca S_x , $(x,0)$ 'ın $X \times I$ daki bir dilimi olduğundan her $(y,t) \in GS_x$ için $G_{(y,t)} \subseteq G_{(x,0)} \neq G$ lur. Dolayısıyla her $(y,t) \in GS_x$ için $G_{(y,t)} \neq G$ dir. Öte yandan $\{W_x\}_{x \in X}$ X 'in bir açık örtüsü ve X kompakt olduğundan $\{W_{x_1}, \dots, W_{x_n}\}$ X 'in sonlu alt örtüsü olur. O halde $V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n} = [0, \varepsilon)$ $\varepsilon = \{\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_n}\}$ olup her $x \in X$ ve her $t \in V = [0, \varepsilon)$ için $G_{(x,t)} \neq G$ olur. O halde her $t' \in V = [0, \varepsilon)$ için φ 'nin $t = t'$ seviyesinde sabit noktası yoktur.

KAYNAKLAR

- ALEXANDROFF, P., (1935).** On local properties of closed sets, The Annals of Mathematics 36, 1-35.
- ALLDAY, C., PUPPE, V., (1993).** Cohomological Methods in Transformation Groups. Cambridge University Pres.
- ATYAH, M. F., BOTT, R. A., (1968).** Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes:II, Applications, The Annals of Mathematics, 88, 451-491.
- BILLER, H., (2003).** Proper actions on cohomology manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 355, 407-432.
- BOREL, A., (1961).** Seminar on transformation groups. Ann. of Math studies 46, Princeton University Pres.
- BREDON, G. E.,(1969).** Representations at fixed points of smooth actions of compact groups, The Annals of Mathematics, 89, 515-532.
- BREDON, G. E., (1972).** Introduction to compact transformation groups. Academic Press, New York.
- BREDON, G. E.,(1997).** Sheaf Theory, 2nd ed. Graduate texts in mathematics 170, Springer, New York.
- COHEN, H., (1954).** A cohomological definition of dimension for locally compact Hausdorff spaces, Duke M. J., 21, 209-224.
- CURTIS, M., (1961).** Cartesian products with intervals, Proc. Amer. Math. Soc., 12, 819-820.
- DEO, S., TRIPATHI, H. S., (1982).** Compact Lie group actions on finitistic spaces, Topology, 21, 393-399.
- DIECK, TAMMO, T., (1987).** Transformation groups, de Gruyter Studies in Math.
- DOVERMANN, K. H., (1982).** Even dimensional Smith equivalent representations, Algebraic topology, Aarhus, Springer LNM, 587-602.
- DOVERMANN, K. H., PETRIE, T., (1985).** Smith equivalence of representations for odd order cyclic groups, Topology, 24, 283-305.

- EDMONDS, A. L., (1975).** Deformations of group actions, Trans. Amer. Math., 201, 147-160.
- GOLBER, D., (1973).** The cohomological description of a torus action, Pacific Journal of Mathematics, 46, 149-154.
- HATCHER, A., (2002).** Algebraic topology, Cambridge university press, Cambridge.
- HSIANG, W.-Y., (1970).** On some fundamental theorems in cohomology theory of topological transformation groups, Taita J. Of Math, 2, 61-87.
- HSIANG, W.-Y., (1971).** On the splitting principle and the geometric weight system of topological transformation groups I Proc. 2nd conf. On Compact Trans. Groups. Amherst. Mass.
- HSIANG, W.-Y., (1975).** Cohomology Theory of Compact Transformation Groups, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- HUSEMOLLER, D., (1966).** Fibre Bundles, McGraw-Hill, New York.
- McCLEARY, J., (1985).** User's guide to spectral sequences, Publish or Perish Inc., Berkeley, California.
- MILNOR, J., (1956).** Construction of universal bundles:I, Ann. Math, 63, 272-284.
- MILNOR, J., (1956).** Construction of universal bundles:II, Ann. Math, 63, 430-436.
- MONTGOMERY, D., YANG, C. T., (1960).** Groups on S^n with principal orbits of dimension $n-3$:I, Illinois J. Math, 4, 507-517.
- MONTGOMERY, D., YANG, C. T., (1961).** Groups on S^n with principal orbits of dimension $n-3$:II, Illinois J. Math, 5, 206-211.
- PALAIS, R., STEWART, T., (1960).** Deformations of compact differentiable transformation groups, Amer. J. Math, 82, 935-937.
- PETRIE, T., (1983).** Smith equivalence of representations, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 94, 61-99.
- SANCHEZ, C., (1976).** Actions of groups of odd order on compact orientable manifolds, Proc. AMS, 54, 445-448.
- SERRE, J. P., (1951).** Homologie singuliere des espaces fibres, Ann. of Math, 54, 425-505.

- SMITH, P. A., (1960).** New results and old problems in finite transformation groups, Bull. AMS., 66, 401-415.
- STRAUME, E., (1990).** The integral weight system for torus actions on spheres with no fixed point, Math. Scand., 66, 91-109.
- STRAUME, E., (1996).** Compact connected Lie transformation groups on spheres with low cohomogeneity, I, Memoirs of AMS.
- SU, J. C., (1963).** Transformation groups on cohomology projective spaces, Trans. Amer. Math., 112, 305-318.
- WILDER, R. L., (1949).** Topology of manifolds, Amer. M. S. Coll. Publ, 32.

ÖZGEÇMİŞ

21. 05. 1974 Adana da doğdum. İlk orta ve lise öğrenimimi Adana da yaptıktan sonra 1997 yılında Çukurova üniversitesi matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Ç.Ü matematik bölümünde yüksek lisansa başlayıp yine aynı yıl Ç.Ü matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladım. 2000 yılında Ç.Ü matematik bölümünde yüksek lisans programını tamamladım ve aynı yıl aynı bölümde doktora programına başladım. Halen Ç.Ü matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak görevime devam etmekteyim.