

28460

Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan Yrd.Doç.Dr. Doğan DÖNMEZ

Doğan Dönmez

Üye Prof.Dr. Melih BORAL

M Boral

Üye Yrd.Doç.Dr. Bilal VATANSEVER

Bilal Vatansever

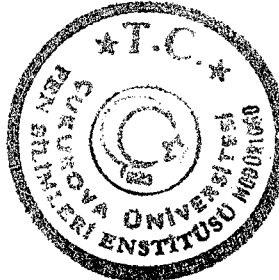
Kod No: 722

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait
olduğunu onaylarım.

Ural Dinç

Prof.Dr. Ural DİNÇ

Enstitü Müdürü



28460

GRUP GENİŞLEMELERİ PROBLEMİNE
HOMOLOJİK CEBİR UYGULAMASI

ELA AYDIN

Ç.Ü.

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADANA

EYLÜL 1993

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İçindekiler	I
Öz	II
Abstract	III
Giriş	IV
1. BÖLÜM : Temel Bilgiler	1
2. BÖLÜM : Genişleme Problemi	3
3. BÖLÜM : Parçalanmış Genişlemeler	7
4. BÖLÜM : Normalleştirilmiş Faktör Kümesi	11
5. BÖLÜM : Genişlemelerin Denkliği	14
6. BÖLÜM : Türetme Fonksiyonu Ve Sabit Bırakan Otomorfizmler.....	18
7. BÖLÜM : Grup Kohomolojisi Ve Genişleme Problemine Uygulanması	21
8. BÖLÜM : Örnekler	26
Özet	IV
Summary	V
Kaynaklar.	VI
Teşekkür	VII
Özgeçmiş	VIII

ÖZ

Bu çalışmada abelyen bir grubun genişlemeleri ile bu grubun kohomolojisi arasındaki ilişkiler incelenmiş, bazı grupların kohomolojileri hesaplanıp böylelikle grup genişlemeleri bulunmuştur.



ABSTRACT

The purpose of this work is to study the relationship between the extensions of abelian group by a (not necessarily abelian) group. Afterwords we calculate some cohomology groups and thus obtain some results on the group extensions.



GİRİŞ

Eilenberg ve MacLane ' in ele alış tarzına göre grupların kohomolojileri standart cocycle ve coboundary' ler ile direkt olarak tanımlanmıştır. Ve Hochschild tarafından yapılan uygulamaların bu konuyu teşvik etmekte büyük payı vardır.

Grupların (serbest, abelyen, devirli) kohomolojilerinin hesabı için kullanılan yöntem Z ' in bir serbest açılımını elde etmektir. Bu metod sonlu doğuraylı abelyen gruplar için de kullanışlıdır. Ve amacımıza uygun açılımlar Tate tarafından yapılmıştır.

Birinci bölümde çalışmaya ilgili temel bazı tanım ve kavramlar, ikinci bölümde A abelyen ve G herhangi bir grup iken A ile G ' nin genişlemesi, Integral Grup Halkası, Aşık Sol Modül ve bunların özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde parçalanma genişlemesi, yükseltme fonksiyonu tanımlanmış ve özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde Normalleştirilmiş Faktör Kümesi tanımı verilmiş ve özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde Esas Faktör Kümesi tanımı verilmiş ve $B^2(G,A)$ ' nın $Z^2(G,A)$ ' nın alt grubu olduğu gösterilmiştir. Daha sonra $e(G,A)$ tanımlanmış ve A üzerindeki iki genişlemenin denklik koşulu verilmiştir.

Altıncı bölümde türetme (çarpım homomorfizmi), Sabit Bırakan Otomorfizm tanımlanıp özellikleri incelenmiştir.

Yedinci bölümde Normalleştirilmiş Faktör Kümesi ve Esas Faktör Kümeleri arasındaki ilişkiye bakılmış, $e(G,A) \approx H^2(G,A)$ gösterilmiş ve $H^2(G,A)$ ' nın bazı özel hallerde hesaplanması için formüller verilmiştir.

Sekizinci bölümde örneklerle yer verilmiş ve son örnekte 18 elemanlı grupların sayısı için bir üst sınır bulunmuştur. Aynı yöntem " $2p^2$ " elemanlı gruplar için de geçerlidir.

1.BÖLÜM

TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde bazı temel bilgileri ve daha sonraki bölümlerde kullanacağımız kavramları inceleyeceğiz.

Tanım 1.1: M , toplamaya göre abelyen grup; R , birimli bir halka olsun. $R \times M \longrightarrow M$ olan ve $(r, m) \longrightarrow r.m$ olarak tanımlanan dönüşüm aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa M 'ye bir sol R -modül denir. $m_1, m_2, m \in M$ ve $r, r_1, r_2 \in R$ için;

- M1-) $r.(m_1+m_2) = r.m_1 + r.m_2$
- M2-) $(r_1+r_2).m = r_1.m + r_2.m$
- M3-) $(r_1 r_2).m = r_1(r_2.m)$
- M4-) $1.m = m$

Tanım 1.2: M ve N aynı R halkası üzerinde R -modüller olsunlar. $\theta: M \longrightarrow N$ bir R -modül homomorfizmidir eğer ki, $m, m_1, m_2 \in M$ ve $r \in R$ için aşağıdaki koşulları sağlıyor ise.

- MH-1) $\theta(m_1+m_2) = \theta(m_1) + \theta(m_2)$,
- MH-2) $\theta(r.m) = r.\theta(m)$

Tanım 1.3: M ve N R -modüller olsunlar. R -modül olan M 'den R -modül olan N içine olan tüm homomorfizmlerin kümesi $\text{Hom}_R(M, N)$ ' dir.

Lemma 1.1: $\text{Hom}_R(M, N)$, abelyen bir gruptur.

Tanım 1.4: M bir R -modül ve X , M 'nin bir altkümesi olsun. M, X üzerinde (X bazı ile) bir serbest R -modüldür (Free R -module) deriz eğer ki N , herhangi bir R -modül ve $f: X \longrightarrow N$ bir fonksiyon iken $f^*: M \longrightarrow N$ $f^*|_X = f$ yani, her $x \in X$ için $f^*(x) = f(x)$ olacak şekilde bir tek R -modül homomorfizmi var ise.

Tanım 1.5: Herhangi bir R halkası için R -modüllerin K kompleks zinciri; R -modül olan K_n ve R -modül homomorfizmi $d_n: K_n \longrightarrow K_{n-1}$ ($-\infty < n < \infty$) ve $d_n d_{n+1} = 0$ sağlayan $\{K_n, d_n\}$ ailesidir. $d_n d_{n+1} = 0$ olması koşulu $\text{Im} d_{n+1} \subset \text{Ker} d_n$ ile eşdeğerdir.

Tanım 1.6: M, N, P R -modüller ve $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ R -modül homomorfizmlerinin bir dizisi olsun. Bu dizi $\text{Im}f = \text{Ker}g$ olduğunda N 'de tamdır denir.

Genel olarak, $\dots M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \xrightarrow{\dots} \dots$ dizisi M_{i+1} 'de tamdır eğer ki, $\text{Im}f_i = \text{Ker}f_{i+1}$ ise.

$0 \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} B \xrightarrow{\gamma} C \xrightarrow{\delta} 0$ dizisi tam ise Kısa Tam Dizi olarak isimlendirilir. Bu dizinin tam olması için α bire-bir, β örten ve $\text{Im}\alpha = \text{Ker}\beta$ olmalıdır.

Tanım 1.7: P bir R -modül olsun. P , projektif R -modüldür eğer ki, aşağıdaki satırı tam olan diyagram değişmeli ise.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow \mu & \downarrow \alpha & & \\ B & \xrightarrow{\beta} & C & \xrightarrow{\gamma} & 0 \end{array}$$

Diyagramın değişmeli olması demek; $\beta\mu = \alpha\gamma$ demektir.

Tanım 1.8: Bir R -modül olan A 'nın Projektif Açılımı (Projective Resolution), P_i ' ler projektif modül iken $\dots \xrightarrow{d_n} P_n \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} P_{n-2} \xrightarrow{\dots} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \xrightarrow{\gamma} 0$ olan tam bir dizidir.

Tanım 1.9: Bir sol modül olan A 'nın serbest açılımı (free resolution), F_i ' ler serbest modül iken $\dots \xrightarrow{d_n} F_n \xrightarrow{d_{n-1}} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} F_{n-2} \xrightarrow{\dots} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} A \xrightarrow{\gamma} 0$ olan tam bir dizidir.

Kolayca görülür ki, her serbest modül bir projektif modüldür ve A gibi her modül bir serbest (dolayısıyla projektif) açılıma sahiptir.

Tanım 1.10: (SHORT FIVE LEMMA) :

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{\quad} & B & \xrightarrow{\quad} & C & \xrightarrow{\quad} & D & \xrightarrow{\quad} & E \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ A'' & \xrightarrow{\quad} & B'' & \xrightarrow{\quad} & C'' & \xrightarrow{\quad} & D'' & \xrightarrow{\quad} & E'' \end{array}$$

Satırları tam olan bu diyagram değişmeli olsun. Eğer α_1 , α_2 , α_4 ve α_5 izomorfizm iseler α_3 de izomorfizmdir.

2.BÖLÜM

GENİŞLEME PROBLEMİ

Tanım 2.1: A'nın G ile bir genişlemesi,

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

olan tam bir dizidir. Bu dizide E (abelyen olması gerekmeyen) herhangi bir grup; A, E'nin abelyen normal altgrubu ve $G = E/A$ olan bölüm grubudur. E ve A gruplarını toplamsal, G'yi ise çarpımsal olarak yazacağız. Bu nedenle solda 0, sağda 1 kullanacağız.

Lemma 2.1: A'nın G ile olan bir genişlemesi, G'den $\text{Aut}(A)$ 'ya bir homomorfizm belirler. $\theta: G \longrightarrow \text{Aut}(A)$. (Burada $\text{Aut}(A)$, A'nın tüm otomorfizmlerinin grubu).

İspat: $x \in G$ elemanı için x'in $\pi(\delta x) = x$ olan bir $\delta x \in E$ elemanını alalım. $\theta_x: A \longrightarrow A$ dönüşümünü şöyle tanımlayalım:

$$\theta_x(a) = \delta x + a - \delta x.$$

(E abelyen olmadığından sadeleştiremiyoruz.) $\text{Im} \theta_x \subset A$ dır. Çünkü A, E'nin normal altgrubu idi. θ_x , bir endomorfizmdir ve $\theta_{x^{-1}}$ onun tersi olduğu için θ_x , A'nın bir otomorfizmidir. $\theta: G \longrightarrow \text{Aut}(A)$ olan ve $\theta(x) = \theta_x$ şeklinde tanımlanan fonksiyon iyi tanımlanmıştır. A bir abelyen grup olduğundan θ fonksiyonu, δx seçiminden bağımsızdır. Çünkü, eğer $\delta''x$ x'in bir başka yükseltmesi ise, bir $a_0 \in A$ için

$$\delta''x = a_0 + \delta x$$

olur.

$$\theta(x)(a) = \theta_x(a) = \delta x + a - \delta x \in A$$

ve

$$\theta_x(a) = \delta''x + a - \delta''x \in A$$

olup her $a \in A$ için de

$$\begin{aligned} \delta''x + a - \delta''x &= (a_0 + \delta x) + a - (a_0 + \delta x) \\ &= a_0 + \delta x + a - \delta x - a_0 \\ &= \delta x + a - \delta x \end{aligned}$$

olduğundan θ_x , δx lerden bağımsızdır. δx , $x \in G$ için δy , $y \in G$ için yükseltmeler olsunlar. O zaman " $\delta x + \delta y$ " de $xy \in G$ için bir yükseltme olur.

$$\theta_x \cdot \theta_y = \theta_{xy} \text{ olduğunu gösterelim:}$$

Her $a \in A$ için;

$$\begin{aligned}
(\theta_x \cdot \theta_y)(a) &= \theta_x(\theta_y(a)) \\
&= \theta_x(\delta y + a - \delta y) \\
&= (\delta x + \delta y) + a - (\delta x + \delta y) \\
&= \theta_{xy}(a)
\end{aligned}$$

(Çünkü $\delta x + \delta y$, xy için bir yükseltme ve yükseltme seçimden bağımsız idi.)

Tanım 2.2: G bir çarpımsal grup olduğunda $Z(G)$ ile Integral Grup Halkasını gösteririz. $Z(G)$ halkasının toplamsal grubu, G kümesini baz alan serbest abelyen grup; $Z(G)$ halkasındaki çarpma ise, G grubunun çarpması kullanılarak dağılma özelliğini sağlayacak şekilde tanımlanır. $Z(G)$ halkasının elemanları $\sum_{x \in G} m_x x$ şeklindedir. O halde $x \in Z(G)$ ise;

$$x = m_1 g_1 + m_2 g_2 + \dots + m_k g_k \text{ şeklindedir. } (g_k \in G)$$

$Z(G)$ 'deki çarpma işlemini şöyle tanımlarız:

$$(\sum n_k g_k)(\sum m_t h_t) = \sum n_k m_t (g_k h_t) ; n_k, m_t \in \mathbb{Z} \text{ ve } g_k, h_t \in G.$$

$Z(G)$ halkasının birim elemanı vardır:

$1_G = e$ olsun. $1.e \in Z(G)$ dir.

$$\begin{aligned}
(\sum n_k g_k)(1.e) &= \sum (n_k \cdot 1)(g_k \cdot e) \\
&= \sum n_k g_k \text{ olup } 1.e = 1_{Z(G)} \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde; $(1.e)(\sum n_k g_k) = \sum n_k g_k$ olur. G grubu abelyen olduğunda $Z(G)$ halkası değişmelidir. Aksi halde değildir.

Teorem 2.1: Eğer $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ bir genişleme ise, A bir sol $Z(G)$ -modül olur.

İspat: $g \in G$ ve $a \in A$ için $g.a = \theta_g(a) = \delta g + a - \delta g$ olarak tanımlayalım. O zaman $\Phi: Z(G) \times A \longrightarrow A$ $x = n_1 g_1 + \dots + n_k g_k$ ise, $\Phi(x, a) = n_1(g_1.a) + n_2(g_2.a) + \dots + n_k(g_k.a)$ olup $\theta: G \longrightarrow \text{Aut}(A)$ bir homomorfizm olduğundan $1.a = a$ ve $(xy).a = x(y.a)$ dir.

$Z(G)$ 'nin herhangi bir elemanı için $(\sum m_x x).a = \sum m_x (x.a)$ dir.

O halde ;

$$\begin{aligned}
[(\sum m_x x)(\sum n_y y)].a &= (\sum m_x n_y (xy)).a \\
&= \sum m_x n_y [(xy).a] \\
&= \sum m_x n_y [x(y.a)] \\
&= (\sum m_x x)(\sum n_y (y.a)) \\
&= (\sum m_x x)[(\sum n_y y).a] \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Ayrıca ;

$$\begin{aligned}
(\sum m_x x)(a+b) &= \sum m_x [x.(a+b)] \\
&= \sum m_x (x.a + x.b) \\
&= \sum m_x (x.a) + \sum m_x (x.b) \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Yani, A bir $Z(G)$ -modül yapısındadır.

Örnek 2.1 : $\theta^*(x)(a) = \theta_x^*(a) = -\delta x + a + \delta x$ olarak tanımlayalım. Bu durumda, eğer $x \in G$ ise $\theta_x^* = \theta_x^{-1}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\theta_x: A \longrightarrow A$, $\theta_x = \theta(x) \in \text{Aut}(A)$ dır.
 $\theta_x^*(a) = -\delta x + a + \delta x$ ve $\theta_x^{-1}(a) = \delta(x^{-1}) + a - \delta(x^{-1})$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\ & & & & \delta x & \longrightarrow & x \\ & & & & \delta x^{-1} & \longrightarrow & x^{-1} \end{array}$$

Yani x^{-1} için $-(\delta x)$ bir yükseltme olur. Çünkü θ , δx lerden bağımsızdır. O halde, $-(\delta x) = \delta(x^{-1})$ dir ve her $a \in A$ için
 $\theta_x^*(a) = -(\delta x) + a + (\delta x)$ ve $\theta_x^{-1}(a) = \delta(x^{-1}) + a - \delta(x^{-1})$
 $= -(\delta x) + a - (-\delta x)$
 $= -\delta x + a + (\delta x)$

olup $\theta_x^* = \theta_x^{-1}$ bulunur. Fakat $\theta^*(xy) = \theta^*(y)\theta^*(x)$ olduğundan θ^* , bir anti homomorfizmdir.

Tanım 2.3 : A bir sol $Z(G)$ -modül iken her $x \in G$ ve $a \in A$ için $x.a = a$ eşitliği sağlanıyor ise, A ' ya "aşıkarak (trivial)" sol $Z(G)$ -modül denir.

Teorem 2.3: $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ A 'nın G ile bir genişlemesi olduğunda sol $Z(G)$ -modül A için aşağıdaki ifadeler denktirler:

- i) A aşıkardır,
- ii) $A \subset Z(E)$ dir,
- iii) $\theta: G \longrightarrow \text{Aut}(A)$ "aşıkarak" homomorfizmdir. Yani, her $x \in G$ için $\theta_x = 1_A$ olur.

İspat: i) $\implies$ ii) : A bir aşıkarak sol $Z(G)$ -modül olsun. $Z(E) = \{e \in E: e+e^* = e^*+e, \text{ her } e^* \in E\}$ kümesi E 'nin merkezidir. $e \in E$ ve $a \in A$ elemanlarını ele alalım.

$a = (\pi e).a = \delta(\pi e) + a - \delta(\pi e) = e+a-e$
 (Çünkü $\delta\pi = 1_E$ dir.) O halde , $a = e+a-e$ ise her $a \in A$ için $a+e = e+a$ elde edilir. Yani, $a \in Z(E)$ dir. Böylece $A \subset Z(E)$ bulunur.

ii) $\implies$ iii) : $\theta: G \longrightarrow \text{Aut}(A)$ her $a \in A$ için $a \in E$ dir. Kabulümüz; A , E 'nin merkezi tarafından kapsansın. Yani, her $e \in E$ ve $a \in A$ için $e+a = a+e$ dir. $\delta: G \longrightarrow E$ ve $x \in G$ için $\delta x \in E$ idi. O halde, her $a \in A$ için

$\delta x + a = a + \delta x$ olup $a = \delta x + a - \delta x = \theta_x(a)$ dır. Böylece; $a = \theta_x(a)$ ve $\theta_x = 1_A$ elde edilir.

iii) $\implies$ i) : Her $x \in G$ için $\theta_x = 1_A$ olsun. O halde her $a \in E$ için $\theta_x(a) = a$ dır. Biliyoruz ki; $\theta_x(a) = x.a$ idi. Her $a \in A$ ve $x \in G$ için $a = x.a$ elde edilir. Bu ise bize A 'nın aşıkâr sol $Z(G)$ -modül olduğunu gösterir.

Tanım 2.4: A bir sol $Z(G)$ -modül olsun.

Bir $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ genişlemesi eğer her $x \in G$ ve her $a \in A$ için $x.a = \delta x + a - \delta x$ koşulunu sağlıyorsa bu genişleme için; " $Z(G)$ operatörlerini gerçekleştirir" deriz.

***Genişleme problemi şudur : Bir sol $Z(G)$ -modül A verildiğinde operatörleri gerçekleyen A 'nın G ile tüm genişlemelerini belirlemektir. Bundan sonra " $Z(G)$ -modül" yerine " G -modül" kullanacağız.

3.BÖLÜM

PARÇALANMIŞ GENİŞLEMELER

Tanım 3.1: $\delta: G \longrightarrow E$ ve $\pi\delta = 1_G$ sağlayan bir homomorfizm olduğunda, $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ genişlemesi bir parçalanmış (parçalı) genişlemedir deriz. A'nın G ile bu parçalanmış genişlemesinde ortadaki E grubuna Yarı Direkt Çarpım denir. Ve $A \ltimes G$ ile gösterilir.

A bir sol $Z(G)$ -modül olsun. O zaman ,
 $E' = \{(a, x) : a \in A, x \in G\}$ kümesinin toplama işlemini şu şekilde tanımlayalım: $(a, x) + (a', y) = (a + x.a', xy)$.
 Bu tanım grup aksiyomlarını sağlar ve $e = (0, 1)$ birim elemandır. E' , A ile G'nin yarı direkt çarpımı olur. Burada $A < E'$ olur. $\pi: E' \longrightarrow G$ $\pi(a, x) = x$ olan dönüşüm bir homomorfizmdir. $\delta: G \longrightarrow E'$ olan dönüşüm bir grup homomorfizmidir.

$$\delta(xx') = (0, xx') = (0, x) + (0, x') = \delta(x) + \delta(x') \text{ olur.}$$

NOT 3.1: $A \subset E'$, $\delta(G) \subset E'$ ve A, E' 'nin normal alt grubudur. Fakat genelde; $\delta(G)$, E' 'nin normal alt grubu olmak zorunda değildir.

Teorem 3.1: $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ genişlemesi A'nın G ile bir parçalanmış genişlemesidir ancak ve yalnız E, $A + C = E$ ve $A \cap C = \{0\}$ olan $C \approx G$ sağlayan bir C alt grubunu içeriyor ise. (Burada C'nin normal olması gerekmiyor) Ve bu şartları sağlayan C alt gruplarını A'nın E' deki Tümleneni diye isimlendiririz.

İspat: $\implies$: $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ parçalanmış genişleme ve $\delta: G \longrightarrow E$, $\pi\delta = 1_G$ olacak şekildeki δ homomorfizmini alalım. Genişleme parçalanmış olduğu için $C = \text{Im}\delta$ olarak tanımlayalım.

$\pi\delta = 1_G$ olduğundan δ , bire-birdir. $\delta: G \longrightarrow C$ örten olduğu için de δ , G'den C'ye bir izomorfizm ve $G \approx C$ dir.

Şimdi de $A + C = E$ olduğunu gösterelim:

Bir $e \in E$ elemanı verildiği zaman öyle $a \in A$ ve $g \in G$ elemanları bulacağız ki, $e = a + \delta(g)$ olacak. $e \in E$ ise, $\pi(e) \in G$ olup $\delta(\pi(e)) \in E$ dir. $\pi(\delta(\pi(e))) = \pi\delta(\pi(e)) = \pi(e)$ olur. O halde,

$e - \delta(\pi(e)) \in \ker\pi = \text{Im}A = A$ olduğu için $e = \delta(\pi(e)) + A$ olur. Bir $a \in A$ için $e = \delta(\pi(e)) + a$ olarak alalım.

$e = a + \delta(\pi(e))$ olup $E = A + C$ ' dir. ($\delta(\pi(e)) \in C$ dir.)

$A \cap C = \{0\}$ olduğunu gösterelim:

$a \in A$ ise; $\pi(a)=1$ dir. Çünkü $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ dizisi tam olduğundan $\pi(a) = 1$ dir.

$a \in C$ ise; bir $x \in G$ için $a = \delta x$ şeklindedir.

$\pi(a) = \pi(\delta x) = (\pi\delta)x = x$ olur. $\pi(a) = 1$ olduğundan $\pi(\delta x)=1$ ve $x = 1$ olur. O halde, eğer $a \in A \cap C$ ise $a = \delta x = \delta 1 = 0$ olup $A \cap C = \{0\}$ elde edilir.

$\Leftarrow$: Tersine olarak; kabul edelim ki, $A \cap C = \{0\}$ ve $A + C = E$ iken $C \cong G$ olacak şekilde $C \subseteq E$ olsun. Bu gösterimin tek olduğunu gösterelim:

Her $e \in E$ elemanı $e = a + c$ formunda idi. $a' \in A$ ve $c' \in C$ için $e = a' + c'$ olarak yazılabilirdi. O zaman, $a + c = a' + c'$ ve $a = a' + c' - c$ olup $c'' = c' - c \in C$ iken $a = a' + c''$ dır.

$-a' + a = c'' \in A \cap C$ ve $A \cap C = \{0\}$ kabulümüzden dolayı $a' = a$ olur. $a + c = a' + c'$ eşitliğinde a ve a' kısaltılırsa $c = c'$ elde edilir. Yani, bu bize her $e \in E$ elemanının $e = a + c$ formunda yazılmasının tek türlü olduğunu gösterir.

Biliyoruz ki, $\pi: E \longrightarrow G$ ve $C \subseteq E$ idi.

$\pi|_C$ 'nin C 'ye kısıtlanması olan $\pi|_C: C \longrightarrow G$ bir izomorfizm olduğunu gösterelim:

Öncelikle $\pi|_C$ 'nin bire-birliğine bakalım. Farzedelim ki, $\pi(c') = \pi(c'')$ olsun.

$\pi(c') \cdot \pi(c'')^{-1} = \pi(c' - c'') = 1$ ise $c' - c'' \in \ker \pi$ ve dizi tam olduğu için $\ker \pi = \text{Im } A = A$ dır. O halde, $c' - c'' \in A$ olur. Aynı zamanda $c - c' \in C$ idi. Biliyoruz ki, $A \cap C = \{0\}$ idi. Yani, $c' = c''$ olur ve dolayısıyla $\pi|_C$ bire-bir.

İkinci olarak; $\pi|_C$ 'nin örtenliğine bakalım:

$g \in G$ alalım. $\pi(e) = g$ olacak şekilde $e \in E$ elemanı vardır ve biliyoruz ki, $e = a + c$ formundadır.

$\pi(e) = \pi(a + c) = \pi(a)\pi(c) = g$ olur. $\pi(a) = 1$ olduğundan; her $g \in G$ için $\pi(c) = g$ olup $\pi|_C$ örtendir. Dolayısıyla de $\pi|_C: C \longrightarrow G$ bir izomorfizmdir. $\delta: G \longrightarrow E$ 'yi $(\pi|_C)^{-1}$ olacak şekilde tanımlayalım. O zaman δ , bir homomorfizmdir ve $\pi\delta = 1_C$ sağlanır, genişlememiz parçalanmış genişleme olur.

Tanım 3.2: $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ A 'nın G ile olan bir genişlemesi olsun. G 'den E 'ye olan bir Yükseltme $\delta: G \longrightarrow E$ $\pi\delta = 1_C$ ve $\delta 1 = 0$ olan bir fonksiyondur. Bu şartları sağlayan δ ' ya Yükseltme Fonksiyonu denir. (δ ' nin bir homomorfizm olması gerekli değildir.)

Teorem 3.2: $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ olan bir genişleme parçalanmış genişlemedir ancak ve yalnız elemanları $(a,x) \in A \rtimes G$ şeklinde olan ve toplaması

$$(a,x) + (a',y) = (a+x.a',xy)$$

olarak tanımlanan E^* grubu ile E grubu arasında $\phi(a+\delta x) = (a,x)$ olacak şekilde bir ϕ izomorfizmini veren bir $\delta: G \longrightarrow E$ yükseltme fonksiyonu varsa.

İspat : $\implies$: Kabul edelim ki, genişlememiz bir parçalanma genişlemesi ve $\delta: G \longrightarrow E$ homomorfizm olan bir yükseltme fonksiyonu olsun. $E^* = \{(a,x): a \in A, x \in G\}$ 'nin

$$(a,x) + (a',y) = (a+x.a',xy) \quad (1)$$

toplaması ile bir grup oluşturduğunu gösterelim, birim ve ters elemanları bulalım :

(i) $a, a' \in A$ ve $x, y \in G$ için

$$(a,x) + (a',y) = (a+x.a', xy) \in A \rtimes G$$

olup kapalılık özelliği vardır.

(ii) $1_{E^*} = (0,1)$ birim elemandır.

$$(a,x) + (0,1) = (0,1) + (a,x) = (a,x) \text{ dir.}$$

(iii) $(a,x) \in E^*$ olsun. $(-x^{-1}.a, x^{-1})$, (a,x) 'in ters elemanıdır.

$$(a,x) + (-x^{-1}.a, x^{-1}) = (0,1)$$

ve

$$(-x^{-1}.a, x^{-1}) + (a,x) = (0,1)$$

dır.

$$(iv) [(a,x) + (a',y)] + (a'',z) = (a+x.a',xy) + (a'',z)$$

$$= (a+x.a' + (xy).a'', xy(z))$$

$$G \text{ birleşmeli olduğundan, } = (a+x.a' + (xy).a'', x(yz))$$

$$(a,x) + [(a',y) + (a'',z)] = (a,x) + (a'+y.a'',yz)$$

$$= (a+x.(a'+y.a''), x(yz))$$

$$= (a+x.a' + (xy).a'', x(yz))$$

Buradan kolayca görülür ki,

$$[(a,x) + (a',y)] + (a'',z) = (a,x) + [(a',y) + (a'',z)]$$

olup birleşme özelliği vardır. O halde E^* tanımlanan toplama altında bir grup olur.

$\phi: E \longrightarrow E^*$ bir izomorfizmdir:

$$(a + \delta x) + (a' + \delta y) = a + \delta x + a' - \delta x + \delta x + \delta y$$

$$= a + (\delta x + a' - \delta x) + \delta x + \delta y$$

$$= a + x.a' + \delta xy$$

olup

$$(a+\delta x) + (a'+\delta y) = a + x.a' + \delta xy$$

(2)

bulunur.

$$\begin{aligned}\emptyset((a + \delta x) + (a' + \delta y)) &= (a + x.a', \delta xy) \quad , (2)'den \\ &= (a, x) + (a', y) \quad , (1)'den\end{aligned}$$

O halde ,

$$\emptyset((a+\delta x)+(a'+\delta y)) = \emptyset(a+\delta x)+\emptyset(a'+\delta y)$$

ve $\emptyset$ bir izomorfizmdir.

$\Leftarrow$: Tersine olarak , $\delta:G \longrightarrow E$ 'nin bir homomorfizm olduğunu göstermeliyiz:

$\delta x + \delta y = \delta xy$ eşitliği sağlanmalı.

$$(a+\delta x) + (a'+\delta y) = (a+x.a'+\delta x+\delta y)$$

ve $\emptyset$ bir homomorfizm olduğundan;

$$\begin{aligned}\emptyset((a+\delta x) + (a'+\delta y)) &= \emptyset(a+\delta x) + \emptyset(a'+\delta y) \\ &= (a, x) + (a', y) \\ &= (a+x.a', xy)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\emptyset(a+x.a'+\delta x+\delta y) &= (a+x.a', xy) \\ &= \emptyset(a+x.a'+\delta xy) \quad \text{ve}\end{aligned}$$

$$a+x.a'+\delta x+\delta y = a+x.a'+\delta xy$$

dir. O halde ; $\emptyset$ 'nin birebirliğinden $\delta x + \delta y = \delta xy$ olup δ , bir homomorfizmdir.

4.BÖLÜM

NORMALLEŞTİRİLMİŞ FAKTÖR KÜMESİ

$0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$, bir genişleme olsun Bir $\delta: G \longrightarrow E$ yükseltme fonksiyonunu alalım. Biliyoruz ki, $\delta x + \delta y = a' + \delta xy$ idi. O halde; $x, y \in G$ iken $[x, y] \in A$ elemanını alarak,

$$\delta x + \delta y = [x, y] + \delta xy \quad (**)$$

eşitliğini yazalım ve aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 4.1: (**) formunda tanımlanan ve $[,]: G \times G \longrightarrow A$ olan bir fonksiyon Normalleştirilmiş Faktör Kümesi olarak isimlendirilir. Biliyoruz ki, sol $Z(G)$ -modül olan A abelyen grupları $x.a = \delta x + a - \delta x$ idi. O halde, bir ikinci formülü:

$$x.a + \delta x = \delta x + a \quad (***)$$

olarak yazalım.

Teorem 4.1: A bir G -modül olsun. $[,]: G \times G \longrightarrow A$ olan bir fonksiyonun faktör kümesi olması için gerek ve yeter koşul;

- i) $[x, 1] = 0 = [1, x]$
- ii) $x.[y, z] - [xy, z] + [x, yz] - [x, y] = 0$

İspat: $\implies$: $[,]: G \times G \longrightarrow A$ fonksiyonunun bir faktör kümesi olduğunu kabul edelim. Biliyoruz ki, bir $\delta: G \longrightarrow E$ için $\delta x + \delta y = [x, y] + \delta xy$ ve $x.a + \delta x = \delta x + a$ idi. O halde,

$$i) [x, 1] = \delta x + \delta 1 - \delta x = 0$$

(Çünkü δ , yükseltme fonksiyonu ve $\delta 1 = 0$). Benzer olarak, $[1, x] = \delta 1 + \delta x - \delta x = 0$ olur.

ii) Bir $x \in G$ ve $[y, z] \in A$ için $x.[y, z] = \delta x + [y, z] - \delta x$ dir.

$[x, y] \in A$, $[xy, z] \in A$, $[x, yz] \in A$, $[y, z] \in A$ ve A değişmeli olduğundan terimler aralarında yer değiştirebilir.

$$\begin{aligned} x.[y, z] - [xy, z] + [x, yz] - [x, y] &= x.[y, z] + [x, yz] - [xy, z] - [x, y] \\ &= \delta x + [y, z] - \delta x + \delta x + \delta(yz) - \delta(xyz) + \delta(xyz) - \delta z - \delta xy + \delta xy - \delta y - \delta x \\ &= \delta x + \delta y + \delta z - \delta yz + \delta yz - \delta z - \delta y - \delta x = 0 \end{aligned}$$

Sonuç olarak i) ve ii) şartları sağlanır.

$\longleftarrow$: Tersine olarak, operatörleri sağlayan A 'nın G ile bir genişlemesini inşa etmeliyiz, sonra da $[x, y] = \delta x + \delta y - \delta xy$ olacak şekilde bir δ yükseltme fonksiyonu bulmalıyız. E kümesini tüm $(a, x) \in A \times G$ sıralı ikililerinin kümesi olarak alalım ve toplama işlemini şöyle tanımlayalım :

$$(a, x) + (a', y) = (a+x.a'+[x,y], xy).$$

Şimdi bu E kümesinin toplama altında bir grup olduğunu gösterelim:

i): $(0,1)$, E' nin birim elemanıdır.

$(a,x) \in A \times G$ için,

$$(a,x) + (0,1) = (a+x.0+[x,1], x1) = (a,x)$$

ve benzer olarak,

$$(0,1) + (a,x) = (0+1.a+[1,x], 1x) = (a,x)$$

olur.

ii): $(a,x) \in A \times G$ için $(-x^{-1}.a - x^{-1}[x,x^{-1}], x^{-1})$

$$(a,x) + (-x^{-1}.a - x^{-1}[x,x^{-1}], x^{-1}) = (0,1)$$

ve benzer olarak,

$$(-x^{-1}.a - x^{-1}[x,x^{-1}], x^{-1}) + (a,x) = (0,1) \text{ olur.}$$

iii): $[(a, x) + (a', y)] + (a'', z)$

$$= (a+x.a'+[x,y], xy) + (a'', z)$$

$$= (a+x.a'+[x,y]+(xy).a''+[xy,z], (xy)z)$$

$$= (a+\delta x+a'-\delta x+[x,y]+\delta xy+a''-\delta xy+[xy,z], x(yz))$$

$$= (a+\delta x+a'+\delta y+a''+\delta z-\delta((xy)z), x(yz)) \quad (1)$$

$$(a,x)+[(a',y)+(a'',z)] = (a,x)+(a'+y.a''+[y,z], yz)$$

$$= (a+x.(a'+y.a''+[y,z])+[x,yz], x(yz))$$

$$= (a+\delta x+a'+y.a''+[y,z]-\delta x+\delta x+\delta yz-\delta(x(yz)), x(yz))$$

$$= (a+\delta x+a'+\delta y+a''-\delta y+\delta y+\delta z-\delta(yz)+\delta(yz)-\delta(x(yz)), x(yz))$$

$$= (a+\delta x+a'+\delta y+a''+\delta z-\delta(x(yz)), x(yz))$$

$$= (a+\delta x+a'+\delta y+a''+\delta z-\delta(x(yz)), x(yz)) \quad (2)$$

(1) ve (2) ' den E' de birleşme özelliği vardır ve E bir gruptur. $\pi: E \longrightarrow G$ fonksiyonunu $\pi(a,x) = x$ olarak tanımlayalım:

Eğer $A \longrightarrow E$ olarak $a \longrightarrow (a,1)$ yapan dönüşümü alırsak; $\ker \pi = \{e \in E : \pi(e) = 1\} = \{(a,x) \in E : \pi(a,x) = x = 1\}$
 $\ker \pi = \{(a,1) : a \in A\}$ olur.

$\theta : A \longrightarrow E$ $\theta(a) = (a,1)$ şeklinde ise, θ bir grup homomorfizmidir.

$$\theta(a_1+a_2) = (a_1+a_2, 1)$$

$$= (a_1+1.a_2+[1,1], 1)$$

$$= \theta(a_1) + \theta(a_2).$$

$\pi: E \longrightarrow G$ $\pi(a,x) = x$ ise π bir grup homomorfizmidir.

$$\pi[(a,x)+(a',y)] = \pi(a+x.a'+[x,y], xy)$$

$$= xy$$

$$= \pi(a,x)\pi(a',y).$$

Eğer $\delta x = (0,x)$ olarak tanımlarsak, A grubu operatörleri sağlar. Yani,

$$x.a + \delta x = (\delta x+a-\delta x) + \delta x = \delta x + a \text{ olur.}$$

Tanım 4.2: $Z^2(G,A)$, bilinen toplama işlemi altında tüm faktör kümelerinin bir abelyen grubudur. Şimdi bunu gösterelim:

$[,] \in Z^2(G,A)$ ve $\langle , \rangle \in Z^2(G,A)$ olduğunu kabul edelim.

i) Tüm $x,y \in G$ için $\langle x,y \rangle = [x,y] + (x,y)$ olarak alalım ve Teorem 5 'i kullanalım.

$$\langle x,1 \rangle = [x,1] + (x,1) = 0 \quad (\text{Teorem 5 'den dolayı})$$

Benzer olarak, $\langle 1,x \rangle = [1,x] + (1,x) = 0$ olur.

ii) $x.\langle y,z \rangle - \langle xy,z \rangle + \langle x,yz \rangle - \langle x,y \rangle = 0$ olmalıdır.

$$x.\{[y,z] + (y,z)\} - \{[xy,z] + (xy,z)\} + \{[x,yz] + (x,yz)\} - \{[x,y] + (x,y)\}$$

$= x.[y,z] - [xy,z] + [x,yz] - [x,y] + x.(y,z) - (xy,z) + (x,yz) - (x,y) = 0$ elde edilir. Böylece; $Z^2(G,A)$ toplama altında kapalı olur.

$[,] \in Z^2(G,A)$ olduğunda her $x,y \in G$ iken $[x,y] = 0$ birim olur.

$-[x,y]$ ise, $[x,y]$ 'nin ters elemanı olur.

A bir abelyen grup olduğundan; $\langle , \rangle + [,] = [,] + \langle , \rangle$ dir.

($Z^2(G,A)$ ' nın elemanlarına " cocycle " da denir.)

Teorem 4.2: $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$, A'nın G ile bir genişlemesi, $\delta: G \longrightarrow E$ ve $\delta': G \longrightarrow E$ iki yükseltme fonksiyonu olsun. Eğer $[,]$ ve $\langle , \rangle$ bunlara karşılık gelen faktör kümeleri ise , o zaman $\langle \rangle: G \longrightarrow A$ olan ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon vardır:

$$i) \langle 1 \rangle = 0$$

$$ii) (x,y) - [x,y] = x.\langle y \rangle - \langle xy \rangle + \langle x \rangle$$

İspat: $\delta: G \longrightarrow E$ olan ve $[,]$ faktör kümesini belirleyen yükseltme fonksiyonu , $\delta': G \longrightarrow E$ olan ve $\langle , \rangle$ faktör kümesini belirleyen yükseltme fonksiyonu olsun. Herhangi bir $x \in G$ için δx ve $\delta' x$ A'nın aynı kosetine düşerler. Böylece $\langle x \rangle = \delta' x - \delta x$ olacak şekilde bir $\langle x \rangle \in A$ elemanı vardır. Şimdi de (i) ve (ii) koşullarının sağlandığını gösterelim:

i) δ ve δ' yükseltme fonksiyonları olduğundan $\delta 1 = 0$ ve $\delta' 1 = 0$ dır. O halde , $\langle 1 \rangle = \delta' 1 - \delta 1$ olup $\langle 1 \rangle = 0$ dır.

$$ii) \delta' x + \delta' y = \langle x \rangle + \delta x + \langle y \rangle + \delta y = \langle x \rangle + \delta x + \langle y \rangle - \delta x + \delta x + \delta y$$

$$= \langle x \rangle + x.\langle y \rangle + \delta x + \delta y$$

$$= \langle x \rangle + x.\langle y \rangle + [x,y] + \delta xy \quad ([x,y] = \delta x + \delta y - \delta xy)$$

$$\delta' x + \delta' y = \langle x \rangle + x.\langle y \rangle + [x,y] - \langle xy \rangle + \delta' xy$$

($\langle xy \rangle = \delta' xy - \delta xy$ olduğu için)

O halde; $\delta' x + \delta' y - \delta' xy = \langle x \rangle + x.\langle y \rangle + [x,y] - \langle x,y \rangle$ olur.

$(x,y) = \langle x \rangle + x.\langle y \rangle + [x,y] - \langle x,y \rangle$ dir.

Tüm elemanlar A' nın elemanı ve A değişmeli olduğundan;

$$(x,y) - [x,y] = \langle x \rangle - \langle xy \rangle + x.\langle y \rangle \text{ olur.}$$

5.BÖLÜM

GENİŞLEMELERİN DENKLİĞİ VE $e(G,A)$

Tanım 5.1: $B^2(G,A)$ ile $\langle \rangle : G \longrightarrow A$, $\langle 1 \rangle = 0$ sağlayan bir fonksiyon olduğunda $f : G \times G \longrightarrow A$

$$f(x,y) = x \cdot \langle y \rangle - \langle xy \rangle + \langle x \rangle$$

ile tanımlı tüm f fonksiyonlarının kümesi gösterilir. $B^2(G,A)$ 'nın elemanları Esas Faktör Kümesi ("coboundaries") olarak isimlendirilir.

Teorem 5.1: $B^2(G,A)$ kümesi, $Z^2(G,A)$ ' in bir altgrubudur.

İspat: $f \in B^2(G,A)$ için faktör kümesi özelliklerinin sağlandığını göstermeliyiz:

$$i) f(x,1) = x \langle 1 \rangle - \langle x \rangle + \langle x \rangle = 0$$

ve $f(1,x) = 1 \langle x \rangle - \langle x \rangle + \langle 1 \rangle = 0$ olup $f(x,1) = f(1,x) = 0$ dır.

$$\begin{aligned} ii) x \cdot f(y,z) - f(xy,z) + f(x,yz) - f(x,y) &= 0 \text{ olmalıdır.} \\ &= x \cdot (y \langle z \rangle - \langle yz \rangle + \langle y \rangle) - xy \langle z \rangle + \langle (xy)z \rangle - \langle xy \rangle + x \cdot \langle yz \rangle \\ &\quad - \langle x(yz) \rangle + \langle x \rangle - x \cdot \langle y \rangle + \langle xy \rangle - \langle x \rangle \\ &= xy \langle z \rangle - x \langle yz \rangle + x \langle y \rangle - xy \langle z \rangle + \langle x(yz) \rangle - \langle xy \rangle + x \langle yz \rangle \\ &\quad - \langle x(yz) \rangle + \langle x \rangle - x \langle y \rangle - \langle x \rangle \\ &= 0 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Böylece; $f : G \times G \longrightarrow A$ (i) ve (ii) koşullarını sağlar ve $B^2(G,A)$, $Z^2(G,A)$ 'nın bir alt kümesi olur. $\langle \rangle : G \longrightarrow A$ her $x \in G$ için $\langle x \rangle = 0$ olarak alalım. Bu durumda; $1 \in G$ olup $\langle 1 \rangle = 0$ dır.

$\phi : G \times G \longrightarrow A$ her $x,y \in G$ için $\phi(x,y) = 0$ olarak alırsak; f fonksiyonu, $B^2(G,A)$ 'nın birim elemanı olur. Eğer f ve $g \in B^2(G,A)$ ise o zaman ; $f - g \in B^2(G,A)$ 'dır.

$f \in B^2(G,A)$ ise ; $f(x,y) = x \langle y \rangle - \langle xy \rangle + \langle x \rangle$ dir.

$g \in B^2(G,A)$ ise ; $g(x,y) = x \langle y \rangle - \langle xy \rangle + \langle x \rangle$ dir.

$(f-g)(x,y) = x \langle y \rangle - \langle xy \rangle + \langle x \rangle - \langle x \rangle + \langle xy \rangle - x \langle y \rangle = 0$ olup $f - g \in B^2(G,A)$ ' dir. Bu ise $B^2(G,A)$ 'nın , $Z^2(G,A)$ 'nın bir altgrubu olduğunu gösterir.

Tanım 5.2: $e(G,A) = Z^2(G,A) / B^2(G,A)$ olan bölüm grubudur. $B^2(G,A)$, $Z^2(G,A)$ 'nın normal altgrubudur.

Sonuç 5.1: Aynı genişlemede farklı δ yükseltme fonksiyonlarının seçimi ile belirlenen iki faktör kümesi $e(G,A)'$ nin aynı elemanını belirler.

Tanım 5.3: A üzerinde aynı $Z(G)$ -modül yapısını veren $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ ve $0 \longrightarrow A \longrightarrow E' \longrightarrow G \longrightarrow 1$ genişlemelerini alalım. Bu iki genişleme "denktirler" eğer ki, $[,]$ faktör kümesi ve $(,)$ faktör kümesi için $[,] - (,) \in B^2(G,A)$ oluyorsa.

Yani, A' 'nin G 'de olan iki genişlemesi denktir, eğer iki faktör kümesinin farkı bir esas faktör kümesi ise.

Teorem 5.2: A' 'nin G ile olan iki genişlemesi denktir ancak ve yalnız bu genişlemeler değişmeli bir diyagram oluşturuyorsa. ($\emptyset$ bir izomorfizm)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \emptyset & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \end{array}$$

İspat: $\implies$: Kabul edelim ki, genişlemeler denk olsun. O zaman, E' 'yi " $a+\delta x$ " formunda ifade edebiliriz ve toplama da şu eşitliği sağlar:

$$\begin{aligned} (a+\delta x) + (a'+\delta y) &= a+x.a'+[x,y]+\delta xy \\ (\text{Çünkü } (a+\delta x) + (a'+\delta y) &= a+\delta x+a'-\delta x+\delta x+\delta y \\ &= a+x.a'+\delta x+\delta y \\ &= a+x.a'+[x,y]+\delta xy \text{ dir.}) \end{aligned}$$

Benzer şekilde, E' ' den ise tüm " $a + \delta'x$ " ler olarak söz edebiliriz. Buradaki faktör kümesini $(,)$ ile gösterelim. Toplama ise şu bağıntıyı sağlar.

$$(a+\delta x) + (a'+\delta'y) = a+x.a'+(x,y)+\delta'xy$$

olarak tanımlayalım.

Şimdi de $\emptyset: E \longrightarrow E'$ $\emptyset(a+\delta x) = a+\langle x \rangle + \delta'x$ olarak tanımlayıp $\emptyset$ ' nin bir homomorfizm olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} \emptyset[(a+\delta x) + (a'+\delta y)] &= \emptyset(a+x.a'+[x,y]+\delta xy) \\ &= a+x.a'+[x,y]+\langle xy \rangle + \delta'(xy) \\ &= a+\delta x+a'-\delta x+\delta x+\delta y-\delta xy+\delta xy-\delta'xy+\delta'xy \\ &= a+\delta x+a'+\delta y \end{aligned}$$

$$\emptyset[(a+\delta x) + (a'+\delta y)] = a+\langle x \rangle + \delta'x+a'+\langle y \rangle + \delta'y \quad (1)$$

Çünkü, $\langle x \rangle = \delta x - \delta'x$ ve $\delta y = \langle y \rangle + \delta'y$ idi.

$$\emptyset(a+\delta x) + \emptyset(a'+\delta y) = a + \langle x \rangle + \delta'x + a' + \langle y \rangle + \delta'y \quad (2)$$

Açıkça görülür ki, $\emptyset[(a+\delta x)+(a'+\delta y)] = \emptyset(a+\delta x) + \emptyset(a'+\delta y)$ olur. Dolayısıyla ; $\emptyset$ bir homomorfizm , 1_A ve 1_G izomorfizm olduğundan da " Short Five Lemma " dan dolayı $\emptyset$, izomorfizm olmak zorundadır.

$\langle \implies$: Tersine olarak, $[,] : G \times G \longrightarrow A$ olan faktör kümesi $\delta : G \longrightarrow E$ yükseltme fonksiyonu ile tanımlanmış olsun. Birinci karenin değişmeli oluşundan $\emptyset[x, y] = [x, y]$ yani, $\emptyset[,] = [,]$ elde edilir. İkinci kare de değişmeli olduğu için, $\emptyset\delta : G \longrightarrow E'$ yine bir yükseltme fonksiyonu olur. Tanımlanan eşitliğe $\emptyset'$ yi uygularsak;
 $\delta x + \delta y = [x, y] + \delta xy$ 'dan $\emptyset(\delta x) + \emptyset(\delta y) = \emptyset[x, y] + \emptyset(\delta xy)$ elde ederiz ve bu bize $\emptyset[,]$ faktör kümesinin, $\emptyset\delta$ yükseltme fonksiyonu tarafından belirlendiğini gösterir.
 Sonuç 1 'den dolayı; eğer $(,)$ E' 'nün herhangi bir faktör kümesi ise, $(,)$ kümesi $\emptyset[,]$ faktör kümesine denktir. $\emptyset[,] = [,]$ olduğu için de bu iki genişleme eşdeğerdir.

Uyarı 5.1: Genişlemeler arasındaki eşdeğerlik bağıntısının doğal yolla tanımlanmasına rağmen, A 'nın G ile ortadaki grupları izomorfik, fakat eşdeğer olmayan genişlemeleri olabilir.

Örneğin; p bir asal sayı olsun. Eğer $0 \longrightarrow Z/pZ \longrightarrow E \longrightarrow Z/pZ \longrightarrow 1$ bir genişleme ise, o zaman E , p^2 derecesine sahiptir ve dolayısıyla E grubu abelyendir. $E \approx Z/p^2Z$ veya $E \approx Z/pZ + Z/pZ$ dir.

p tek bir asal (p , 2'den farklı) ve A , p _ yinci dereceden " a " üreticisi ile devirli grup, E ise " x " üreticisi ile p^2 _ yinci dereceden bir devirli grup olsun. Şimdi

$i : A \longrightarrow E$ $i(a) = px$ ve $j : A \longrightarrow E$ $j(a) = 2px$ olarak tanımlayıp bu tanımların bizi eşdeğer genişlemelere götürdüğünü kabul edelim. Yani, $\beta : E \longrightarrow E$ izomorfizmi olsun.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{\pi} & E/iA \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \beta & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & E & \xrightarrow{\pi} & E/jA \longrightarrow 1 \end{array}$$

Birinci karenin değişmeli oluşundan β , her elemanı " 2 " ile çarpmalı, fakat bu durum ikinci karenin değişmeli olması ile çelişir.

Teorem 5.3: δ ve $\mu : G \longrightarrow \text{Aut}(A)$ iki homomorfizm olsun. Eğer bir $\theta \in \text{Aut}(A)$ ve her $g \in G$ için $\delta(g) = \theta\mu(g)\theta^{-1}$ yani δ ve μ conjugate ise, $A \rtimes_{\delta} G \approx A \rtimes_{\mu} G$ olur.

Sonuç 5.2: Eğer $e(G, A) = 0$ ise, her genişleme bir parçalanma genişlemesidir ve E , bir yarıdirekt çarpımdır.

İspat: E^* bir yarıdirekt çarpım iken, herhangi bir genişleme $0 \longrightarrow A \longrightarrow E^* \longrightarrow G \longrightarrow 1$ genişlemesine eşdeğer olur. Teorem 9 ' dan dolayı, $\emptyset: E \longrightarrow E^*$ olan bir izomorfizm vardır ve dolayısıyla de $E \approx E^*$ olup Teorem 4 ' ün (ii) kısmından dolayı, genişleme bir parçalanma genişlemesidir.

6.BÖLÜM

TÜRETME FONKSİYONU VE SABİT BIRAKAN OTOMORFİZMLER

Tanım 6.1: Bir türetme (veya çarpım homomorfizmi) $\langle \rangle : G \longrightarrow A$ olan ve $\langle xy \rangle = x\langle y \rangle + \langle x \rangle$ eşitliğini sağlayan bir fonksiyondur. ($x\langle y \rangle - \langle xy \rangle + \langle x \rangle = 0$ olan) Tüm türetmelerin kümesi olan $\text{Der}(G, A)$ toplama altında bir değişmeli gruptur. Çünkü , $x\langle y \rangle$, $\langle xy \rangle$, $\langle x \rangle$ ' lerin herbirisi değişmeli olan A grubunun bir elemanıdır.

(**) Eğer A bir G -trivial modül ise , o zaman $\text{Der}(G, A) = \text{Hom}(G, A)$ dir. Bunu gösterelim: Biliyoruz ki, A bir G -trivial modül ise her $x \in G$ ve her $a \in A$ için $x.a = a$ sağlanır. Göstermeliyiz ki, tüm $\langle \rangle \in \text{Der}(G, A)$ G 'den A 'ya bir homomorfizmdir:

$\langle xy \rangle = \langle x \rangle + \langle y \rangle$ olması gereklidir.

$\langle xy \rangle = x\langle y \rangle + \langle x \rangle$ idi.

A , bir G -trivial modül olduğundan $x\langle y \rangle = \langle y \rangle$ dir.

O halde, $\langle xy \rangle = \langle y \rangle + \langle x \rangle = \langle x \rangle + \langle y \rangle$ olup açıkça görülür ki, her $\langle \rangle \in \text{Der}(G, A)$ bir homomorfizmdir.

Yani, $\text{Der}(G, A) = \text{Hom}(G, A)$ dir.

Örnek 6.1: E , A ile G 'nin yarıdirekt çarpımı ve $\delta : G \longrightarrow E$ bir yükselme fonksiyonu olsun. $\langle \rangle : G \longrightarrow A$ $\delta(x) = (\langle x \rangle, x)$ koşulunu sağlayan tek fonksiyon olsun. Bu durumda δ , bir homomorfizmdir ancak ve yalnız $\langle \rangle$ bir türetme fonksiyonu ise.

Cözüm : E , A ile G 'nin yarıdirekt çarpımı , $E = \{(a, x) : a \in A, x \in G\}$ ve $(a, x) + (a', y) = (a+x.a', xy)$ idi. Kabul edelim ki; $\delta : G \longrightarrow E$ bir yükseltme homomorfizmi olsun. $x, y \in G$ için $\langle xy \rangle = x\langle y \rangle + \langle x \rangle$ eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz:

δ bir homomorfizm olduğundan ; $\delta(xy) = \delta x + \delta y$

$(\langle xy \rangle, xy) = (\langle x \rangle, x) + (\langle y \rangle, y)$

$(\langle xy \rangle, xy) = (\langle x \rangle + x\langle y \rangle, xy)$, (yarıdirekt çarpım tanımından)

O halde, $\langle xy \rangle = \langle x \rangle + x\langle y \rangle$ olup $\langle \rangle$ bir türetme fonksiyonudur.

Tersine olarak kabul edelim ki; $\langle \rangle : G \longrightarrow A$ bir türetme fonksiyonu olsun. O zaman $x, y \in G$ için $\langle xy \rangle = x\langle y \rangle + \langle x \rangle$ dir.

$\delta : G \longrightarrow E$ $\pi\delta = 1_A$ olacak şekilde bir δ bulmamız yeterli olacaktır.

Farzedelim ki $\delta x = (\langle x \rangle, x)$ olan bir $\delta: G \longrightarrow E$ fonksiyonu olsun. ($\delta 1 = 0$ iken) $\delta(xy) = \delta x + \delta y$ eşitliği sağlanmalıdır:

$$\begin{aligned}\delta(xy) &= (\langle xy \rangle, xy) \\ &= (x\langle y \rangle + \langle x \rangle, xy) \\ &= (\langle x \rangle + x\langle y \rangle, xy) \\ &= (\langle x \rangle, x) + (\langle y \rangle, y) = \delta x + \delta y\end{aligned}$$

Böylece, $\delta(xy) = \delta x + \delta y$ sağlandığından δ bir homomorfizmdir.

Tanım 6.2: E 'nin bir $\emptyset$ otomorfizmi ,
 $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$
 genişlemesini Sabit Bırakan Otomorfizm (Stabilizing Automorphism) eğer ki, aşağıdaki diyagram değişmeli ise ;

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \emptyset & & \parallel \\ 0 & \xrightarrow{1_A} & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G \xrightarrow{1_G} 1 \end{array}$$

E 'nin tüm sabit bırakma otomorfizmlerinin kümesini $s(E)$ ile gösterelim. $s(E)$, $\text{Aut}(E)$ 'nin bir alt grubudur.

NOT 6.1: $s(E)$, ortada E grubunu bulunduran genişlemenin seçimine bağlıdır.

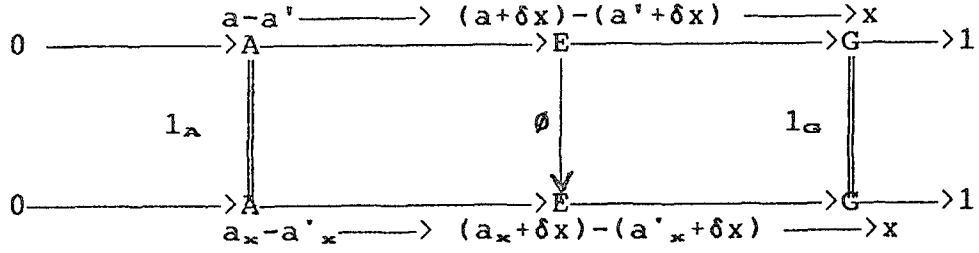
Teorem 6.1: $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ dizisi bir genişleme olsun. O zaman, $s(E) \approx \text{Der}(G, A)$ olacak şekilde bir izomorfizm vardır.

İspat: $\delta: G \longrightarrow E$ bir yükseltme fonksiyonu olsun. Biliyoruz ki, $E = \{a + \delta x : a \in A, x \in G\}$ idi. O halde; eğer $\emptyset \in s(E)$ ise bir $\langle \rangle : G \longrightarrow A$ fonksiyonu için $\emptyset(a + \delta x) = a + \langle x \rangle + \delta x$ dir.

Şimdi gösterelim ki, $\langle \rangle$ bir türetme fonksiyonudur:

$$\begin{aligned}\emptyset[(a + \delta x) + (a' + \delta y)] &= \emptyset(a + \delta x) + \emptyset(a' + \delta y) \\ \emptyset(a + x.a' + [x, y] + \delta xy) &= \emptyset(a + \delta x) + \emptyset(a' + \delta y) \\ \implies a + x.a' + [x, y] + \langle xy \rangle + \delta xy &= a + \langle x \rangle + \delta x + a' + \langle y \rangle + \delta y \\ \implies a + x.a' + \langle xy \rangle + [x, y] + \delta xy &= a + \langle x \rangle + \delta x + a' - \delta x + \delta x + \langle y \rangle + \delta y \\ \implies a + x.a' + \langle xy \rangle + \delta x + \delta y - \delta xy + \delta xy &= a + \langle x \rangle + x.a' + \delta x + \langle y \rangle + \delta y \\ \implies x.a' + \langle xy \rangle + \delta x + \delta y &= x.a' + \langle x \rangle + \delta x + \langle y \rangle + \delta y \\ \implies \langle xy \rangle + \delta x &= \langle x \rangle + x.\langle y \rangle + \delta x \\ \implies \langle xy \rangle &= \langle x \rangle + x.\langle y \rangle \quad \text{bulunur.}\end{aligned}$$

Yani, $\langle \rangle$ bir türetme fonksiyonudur. $\langle \rangle$ türetme fonksiyonu, δ yükseltme fonksiyonunun seçiminden bağımsızdır. $a_x \in A$ ve $a'_x \in A$ için ;
 $\emptyset(a + \delta x) = a_x + \delta x$ ve $\emptyset(a' + \delta x) = a'_x + \delta x$ olsun.



Bu diyagramın değişmeli olmasından $a_x = a'_x$ elde edilir.

Şimdi şu ana kadar verdiğimiz formülleri tekrar hatırlayalım:

Normalleştirilmiş Faktör Kümesi:

$$x.[y,z] - [xy,z] + [x,yz] - [x,y] = 0$$

Asıl Faktör Kümesi : $f(x,y) = x.\langle y \rangle - \langle xy \rangle + \langle x \rangle$

Türetme Fonksiyonu : $x.\langle y \rangle - \langle xy \rangle + \langle x \rangle = 0$

Sabit bırakan Otomorfizm: $f(x) = x.a - a$

7.BÖLÜM

GRUP KOHOMOLOJİSİ VE GENİŞLEME PROBLEMİNE UYGULANMASI

Tanım 7.1: A bir G-modül olsun. $f: G \times G \longrightarrow A$ olan ve $f(x,1) = 0 = f(1,x)$ koşulunu sağlayan bir faktör kümesi olsun. Bu şekildeki tüm fonksiyonların kümesi Normalleştirilmiş Faktör Kümesi (Normalized Factor Set) olarak isimlendirilir.

Normalleştirilmiş Esas Faktör Kümesi (Normalized Coboundary) ise ;

$g: G \times G \longrightarrow A$ olan ve $h: G \longrightarrow A$ $h(1) = 0$ olan ve $g(x,y) = x.h(y) - h(xy) + h(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyondur. Biliyoruz ki,

$$e(G,A) = Z^2(G,A)/B^2(G,A) = \text{cocycles/coboundaries}$$

Tanım 7.2: Z aşikar bir G-modül iken

$$H^n(G,A) = \text{Ext}_{Z(G)}^n(Z,A) \text{ dir.}$$

Teorem 7.1: (COHEN [1]) G , x tarafından üretilen n-yinci dereceden devirli bir grup olsun. O zaman integral grup halkası $Z(G) = Z[x]/(x^n - 1)$ dir. $Z(G)$ halkası değişmelidir. Z , aşikar G-modül olsun.

δ , "x-1" ile çarpmak ve σ , " $1+x+ \dots + x^{n-1}$ " ile çarpmak olduğunda

$$\dots \longrightarrow Z(G) \xrightarrow{\sigma} Z(G) \xrightarrow{\delta} Z(G) \xrightarrow{\sigma} Z(G) \xrightarrow{\delta} Z(G) \xrightarrow{\epsilon} Z \longrightarrow 0$$

projektif açılımı elde edilir. (Burada $\delta\sigma = \sigma\delta = x^{n-1} = 0$)
Böylece , $H^{2i}(G,Z) = Z/nZ$ ($i>0$) ve G, n elemanlı sonlu bir devirli grup olduğunda $H^*(G,Z) = G$ olur.

$$H^n(Z_m, Z) = \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ tek ise} \\ Z_m & , \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

Teorem 7.2: (ROTMAN [5]) $G=Z_n$ ve A sonlu doğuraylı bir G-modül ise , $H^*(G,A) = A^G/NA$ olup burada $N = (1+x+ \dots + x^{n-1})$ ve $A^G = \{a \in A: x.a=a, \text{ her } x \in G \text{ için}\}$ dir.

NOT 7.1: A ' nın aşikar $Z(G)$ -modül olması $e(G,A) = 0$ olmasını gerektirmez. $e(G,A) = 0$ ise genişleme parçalanma genişlemesi olup E, A ile G ' nin yarıdirekt çarpımı; $e(G,A)$ sıfırdan farklı ise , E, A ile G'nin direkt çarpımı olmayabilir.

NOT 7.2: $0 \longrightarrow Z_P \longrightarrow E \longrightarrow Z_P \longrightarrow 1$
genişlemesi alınır, $H^*(Z_P, Z_P) = Z_P / pZ_P = Z_P$ elde edilir.

Tanım 7.3: $G^{(n)}$ ile G 'nin n -defa kendisi ile çarpımını gösterelim. P_n , $G^{(n+1)}$ üzerinde serbest abelyen grup olsun. P_n ; $x.(x_0, \dots, x_n) = (x.x_0, \dots, x.x_n)$ modül çarpımı ile bir G -modül olur. ($x_i \in G$ için)

Aynı zamanda $Y = \{(1, x_1, \dots, x_n) : x_k \in G\} \subset X$ üzerinde bir serbest G -modüldür.

$\delta_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}$ dönüşümünü $n \geq 1$ için ;
 $(x_0, \dots, x_n) \longrightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k (x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ olarak tanımlayalım.

Teorem 7.3: (ROTMAN [5])

$P : \dots \xrightarrow{\delta_1} P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} Z \longrightarrow 0$ aşıkâr G -modül olan Z 'in bir serbest G -ayrışımıdır.

[$(\Sigma_n g) = \Sigma_n g$ olup " ϵ " Ekleme Dönüşümü (Augmentation map) olarak isimlendirilir.]

İspat: $P_0 = Z(G)$ dir. $\epsilon(\Sigma_n x) = \Sigma_n x$ dönüşümü altında ϵ örten olur.

P_n , tüm $(1, x_1, \dots, x_n)$ formundaki $(n+1)$ -lilerin üzerinde bir serbest G -modüldür. P , bir komplekstir.

İhtiyacımız olan şey ;

$\dots \longleftarrow P_2 \xleftarrow{s_1} P_1 \xleftarrow{s_0} P_0 \xleftarrow{s_{-1}} Z$ şeklinde olan ve

$$(i) \quad \delta_{n+1} s_n + s_{n-1} \delta_n = 1_{P_n} \quad (\delta_0 = \epsilon)$$

(ii) $\epsilon s_{-1} = 1_Z$ sağlayan dönüşümleri inşa etmektir.

$(1) = 1_G$ iken $s_{-1} : Z \longrightarrow P_0$ $s_{-1}(1) = (1)$ yapan dönüşümü tanımlayalım. Eğer $n \geq 0$ ise,

$s_n(x_0, \dots, x_n) = (1, x_0, \dots, x_n)$ olarak tanımlayalım.

Şimdi (i) ve (ii) koşullarını sağlatalım:

$$(i) \quad \epsilon s_{-1}(1) = \epsilon(1) = 1$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad & (\delta_{n+1} s_n + s_{n-1} \delta_n)(x_0, \dots, x_n) = \delta_{n+1}(1, x_0, \dots, x_n) \\ & + s_{n-1} \sum_{k=0}^n (-1)^k (x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ & = (x_0, \dots, x_n) + \sum_{t=0}^n (-1)^{t+1} (1, x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_n) \\ & + \sum_{k=0}^n (-1)^k (1, x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ & = (x_0, \dots, x_n) \text{ olup } \delta_{n+1} s_n + s_{n-1} \delta_n = 1_{P_n} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Tanım 7.4: $n > 0$ için Q_n ile G 'nin elemanlarının $\{x_1, \dots, x_n\}$ n -lilerini baz kabul eden serbest G -modülü alalım. Q_0 ile tek (single) üretici olan $[]$ üzerindeki serbest G -modülü gösterelim. Her $n \geq 0$ için $P_n \cong Q_n$ dir. $\tau : P_n \longrightarrow Q_n$ dönüşümünü baz elemanları üzerinde $\tau(x_0, \dots, x_n) = x_0[x_0^{-1}x_1, x_1^{-1}x_2, \dots, x_{n-1}^{-1}x_n]$ olarak ve $\sigma : Q_n \longrightarrow P_n$ dönüşümünü de baz elemanları üzerinde $\sigma[x_1, \dots, x_n] = (1, x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \dots, x_1x_2 \dots x_n)$ olarak tanımlayalım. σ ve τ birbirlerinin tersidirler. O halde, $d_n : Q_n \longrightarrow Q_{n-1}$ olan bir tek dönüşümleri vardır ki, aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} P_n & \xrightarrow{\tau} & Q_n \\ \delta_n \downarrow & & \downarrow d_n \\ P_{n-1} & \xrightarrow{\tau} & Q_{n-1} \end{array}$$

$\tau^{-1} = \sigma$ olduğu için $d_n = \tau \delta_n \sigma$ elde edilir.

$$d_n[x_1, \dots, x_n] = x_1[x_2, x_3, \dots, x_n] + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k [x_1, \dots, x_k x_{k+1}, \dots, x_n] + (-1)^n [x_1, \dots, x_{n-1}]$$

formülü ile sonuçta

$$d_1[x] = x[] - [] ,$$

$$d_2[x, y] = x[y] - [xy] + [x] ,$$

$$d_3[x, y, z] = x[y, z] - [xy, z] + [x, yz] - [x, y] \text{ elde ederiz.}$$

Böylece; Q , Z 'in bir serbest ayrışımı olur ve Z 'in Normalleştirilmiş Olmayan (Unnormalized) Standart Ayrışımı olarak isimlendirilir.

Her G -modül A için $H^n(G, A) = \text{Ext}_{Z(G)}^n(Z, A)$ idi.

$n=2$ için:

$$\text{Ker} d^2 = \{ f : f : G \times G \longrightarrow A, \quad d^2 f = 0 \}$$

$$= \{ f : G \times G \longrightarrow A, \quad xf(y, z) - f(xy, z) + f(x, yz) - f(x, y) = 0 \}$$

$\text{Ker} d^2$, normal olması gerekmeyen tüm faktör kümelerini içerir.

$$\text{Im} d^1 = \{ d^1 f : f : G \longrightarrow A \}$$

$$= \{ g : g(x, y) = xf(y) - f(xy) + f(x), \text{ bir } f : G \longrightarrow A \text{ için} \}$$

$\text{Im} d^1$, normal olması gerekmeyen tüm esas faktör kümelerini (principle factor set) içerir.

Şimdi de P kompleksine $\text{Hom}_G(-, A)$ functorunu uygulayalım:

$$\dots \longrightarrow \text{Hom}_G(P_1, A) \xrightarrow{d_2^*} \text{Hom}_G(P_2, A) \xrightarrow{d_3^*} \text{Hom}_G(P_3, A) \longrightarrow \dots$$

kompleksini elde ederiz. Ve $H^2(G, A) = \text{ker} d_3^* / \text{Im} d_2^*$ dir.

$f : P_2 \longrightarrow A$ bir cocycle olsun. O zaman, $d_3^* f = 0$

$$d_3^* f = fd_3 = fd_3[x, y, z] = xf(y, z) - f(xy, z) + f(x, yz) - f(x, y) = 0$$

(Buradaki f , G -modül homomorfizmi olduğundan

$f(x[y,z]) = xf(y,z)$ dir.)

$\text{Hom}_G(P_n, A)$, tüm $G \times G \times G \dots \times G$ (n -defa) $\longrightarrow A$ dönüşümü üzerinde bir serbest G -modül olarak düşünülebilir.

$(d_1 * f)(x,y) = xf(y) - f(xy) + f(x)$ ve

$(d_2 * g)(x,y,z) = xg(y,z) - g(xy,z) + g(x,yz) - g(x,y)$

olarak alalım. Dolayısıyla ;

$$H^2(G,A) = \frac{(\text{normalleştirilmiş olmayan})\text{faktör kümesi}}{(\text{normalleştirilmiş olmayan})\text{asıl faktör kümesi}}$$

Şimdi de $e(G,A) \approx H^2(G,A)$ olduğunu gösterelim:

Her zaman için normalleştirilmiş olmayan faktör kümesi normalleştirilmiş faktör kümelerini içerir.

$\theta: e(G,A) = Z^2_N / B^2_N \longrightarrow H^2(G,A) = Z^2 / B^2$ doğal dönüşümünü alalım. θ , bir izomorfizmdir.

Örtenlik için; $f: G \times G \longrightarrow A$ bir normalleştirilmiş olmayan faktör kümesi olsun. O zaman,

$x.f(y,z) - f(xy,z) + f(x,yz) - f(x,y) = 0$ koşulu vardır.

$f_1(x,y) = f(x,y) - [xf(y,1) - f(xy,1) + f(x,1)]$ olarak tanımlayıp f_1 'in bir normalleştirilmiş faktör kümesi olduğunu gösterelim:

(i) $f_1(x,1) = f(x,1) - [xf(1,1) - f(x,1) + f(x,1)]$

$xf(1,1) = f(x,1) - f(x,1) + f(x,1)$ olup $f_1(x,1) = 0$ olur.

$f_1(1,x) = f(1,x) - [1f(x,1) - f(x,1) + f(1,1)]$

$x=y=1$ ve $z=x$ için $f(x,1) = xf(y,z) - f(xy,z) + f(x,yz)$ den

$f_1(1,x) = f(1,x) - 1f(1,x) = 0$ olur.

(ii) $xf_1(y,z) - f_1(xy,z) + f_1(x,yz) - f_1(x,y) = 0$ olmalıdır.

$x[f(y,z) - yf(z,1) - f(yz,1) + f(y,1)] - f(xy,z)$

$+ [xyf(z,y) - f(xyz,1) + f(xy,1)] + f(x,yz)$

$- [x.f(yz,1) - f(xyz,1) + f(x,1)] - f(x,y)$

$- [x.f(y,1) - f(xy,1) + f(x,1)] = 0$ olup sonuçta,

$xf_1(y,z) - f_1(xy,z) + f_1(x,yz) - f_1(x,y) = 0$ olur. Böylece de faktör kümelerinin (i) ve (ii) şartları sağlanır. Yani,

$f_1: G \times G \longrightarrow A$ normalleştirilmiş bir faktör kümesi olur.

$f_1(x,y) = f(x,y) - [x.f(y,1) - f(xy,1) + f(x,1)]$ eşitliğinden

$f - f_1(x,y) = x.f(y,1) - f(xy,1) + f(x,1)$ olup bu bir esas faktör kümesidir.

Bire-birlik için; $f: G \times G \longrightarrow A$ normalleştirilmiş bir faktör kümesi olsun. Ve öyle bir $g: G \longrightarrow A$ olsun ki , $f(x,y) = xg(y) - g(xy) + g(x)$ sağlansın. ($g(1)=0$ olmayabilir)

Şimdi $g^*: G \longrightarrow A$ olan $g^*(1) = 0$ yapan ve $f(x,y) = xg^*(y) - g^*(xy) + g^*(x)$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon bulmamız gerekir:

$g^*(x) = g(x) - xg(1)$ olarak tanımlayalım.

$$(i) \quad g^*(1) = g(1) - 1g(1) = 0.$$

$$(ii) \quad xg^*(y) - g^*(xy) + g^*(x) = f(x,y) \text{ olmalıdır.}$$

$$= x[g(y) - yg(1)] - [g(xy) - xyg(1)]$$

$$+ [g(x) - xg(1)]$$

$$= xg(y) - g(xy) + g(x)$$

$$= f(x,y) \text{ bulunur.}$$

Böylece, θ izomorfizm olup $e(G,A) \approx H^2(G,A)$ bulunur.

NOT 7.3: (ROTMAN [5])

Schur-Zassenhaus Lemması: E , sonlu dereceli bir grup ; A da E 'nin normal altgrubu ve $(s(A), s(E/A)) = 1$ yani, A 'nın derecesi ile E/A 'nın derecesi aralarında asal olsun. O zaman E , A ile E/A 'nın yarıdirekt çarpımıdır ve A 'nın E 'deki iki tümleyeni birbirine karşılık gelir (conjugate olur). O halde, bu Lemma bize A ile G 'nin derecelerinin aralarında asal olmasının $e(G,A) = 0$ olmasını yani, E 'nin A ile G 'nin yarıdirekt çarpımı olması gerektiğini gösterir.

8.BÖLÜM

ÖRNEKLER

Şimdi de bazı örneklerle genişleme hesapları yapalım: $e(G,A)$ hesaplanırken herşeyden önce bir modül yapısı belirtmek gerekir. Buradaki modül yapısından kasıt G 'den $\text{Aut}(A)$ 'ya olan homomorfizmlerdir. Farklı modül yapıları için farklı $e(G,A)$ 'lar bulunur ve bunlar arasında bir bağlantı olması gerekmez. Aşık ar modül yapısında $e(G,A) = A/kA$ eşitliği; aşık ar olmayan modül yapısında ise, $e(G,A)=H^2(G,A)=A^G/NA$ eşitliği kullanılır. (Eğer G , sonlu ve devirli ise). Eğer A G -trivial ise $A^G = A$ ve $NA = kA$ olur.

Örnek 8.1: $0 \longrightarrow Z_3 \longrightarrow E \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 1$ genişlemesini ele alalım. Z_2 'den $\text{Aut}(Z_3)$ 'e iki farklı homomorfizm vardır. $\phi_1(\theta)(1) = 1$ veya $\phi_2(\theta)(1) = 2$ dir. Z_3 , bir aşık ar Z_2 -modül iken; Schur-Zassenhaus Lemmasından dolayı $(2,3) = 1$ olduğundan aşık ar modül yapısı için $e_1(Z_2, Z_3) = 0$ olur. Bu durumda, $E \cong Z_6$ dir. Aşık ar olmayan modül yapısı için $e_2(Z_2, Z_3)$ 'e bakalım: $G = Z_2$ olup $k = 2$ dir. $A^G = \{0\}$ dir. Çünkü, yalnızca $0 \in Z_2$ elemanı her $x \in Z_3$ için $x.a = a$ eşitliğini sağlar. NA, A^G 'nin altgrubu olduğundan $NA = \{0\}$ dir ve $H^2(G,A) = A^G/NA = \{0\}$ olur. O halde E grubu 6 elemanlı abelyen olmayan grup S_3 dür.

Örnek 8.2 : $0 \longrightarrow Z_3 \longrightarrow E \longrightarrow Z_4 \longrightarrow 1$ genişlemesini ele alalım. Z_4 'den $\text{Aut}(Z_3)$ 'e iki tane farklı modül yapısı vardır. $\phi_1(1)(1) = 1$ veya $\phi_2(1)(1) = 2$ dir. $(3,4) = 1$ olduğundan aşık ar modül yapısı için $e_1(Z_4, Z_3) = 0$ dir. Bu durumda, E grubu Z_{12} ' dir. Aşık ar olmayan durumda ise, $H^2(G,A) = A^G/NA$ 'yı kullanalım. $A^G = \{0\}$ ve dolayısıyla $NA = \{0\}$ olur. $e(G,A) = 0$ olup bu durumda E grubu, A_4 'e izomorfiktir.

Örnek 8.3: $0 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow E \longrightarrow Z_4 \longrightarrow 1$ genişlemesini ele alalım. $\text{Aut}(Z_2) = \{1\}$ olduğundan, yalnızca aşık ar modül yapısı vardır. $G = Z_4$ olup $k = 4$ olduğundan $e(Z_4, Z_2) = Z_2/4Z_2 = Z_2$ olur. Yani, iki tane genişleme vardır. Bunlar, $E = Z_8$ ve $E = Z_2 \oplus Z_4$ dür.

Örnek 8.4: $0 \longrightarrow Z_4 \longrightarrow E \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 1$ genişlemesini ele alalım. $\text{Aut}(Z_4)$ 'ün eleman sayısı $\text{Aut}(Z_4)=Z_2$ dir. Yani, $\emptyset:Z_2 \longrightarrow \text{Aut}(Z_4)$ 'e iki farklı homomorfizm vardır. $\emptyset_1(\emptyset)(1) = 1$ veya $\emptyset_2(\emptyset)(1) = 3$ dür. Aşık ar modül yapısında ;
 $e_1(Z_2, Z_4) = Z_4/2Z_4 = Z_2$ olup bu ise $E = Z_8$ veya $E = Z_4 \oplus Z_2$ olmasını gerektirir.
 Aşık ar olmayan modül yapısında ise, sabit bırakan elemanlar 0 ve 2 olup $e(Z_2, Z_4) = \{0, 2\}/\{0, 2\} = Z_2$ olur. Dolayısıyla $E = Q_8$ (quarternions) veya $E = D_8$ (dihedral grup) olur.

Örnek 8.5: $0 \longrightarrow Z_{15} \longrightarrow E \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 1$ genişlemesini ele alalım. $\emptyset = 1 \in Z_2$ iken $\emptyset:Z_2 \longrightarrow \text{Aut}(Z_{15})$ olan dönüşüm ve $\emptyset(\emptyset)(1) = n$ olsun. Şimdi $n^2 \equiv 1 \pmod{15}$ olacak elemanlara bakalım:
 $n^2 \equiv 1 \pmod{15}$ ise ; $n=1$, $n=4$, $n=11$, $n=14$ olup dört farklı modül yapısı vardır.

$n=1$ iken aşık ar olan modül yapısı için $(2, 5)=1$ olduğundan $e(Z_2, Z_{15}) = 0$ olup 30 elemanlı tek abelyen grup $E=Z_{30}$ olur.

$n=4$ iken $H^2(G, A) = A^G/NA$ eşitliğinden yararlanılır. $A^G=\{0, 5, 10\}$ ve NA , A^G 'nin alt grubu olup $NA=\{0, 5, 10\}$ dur. O halde, $H^2(Z_2, Z_{15}) = 0$ olur. Bu durumda, $E=D_{10} \times Z_3$ dür.

$n=11$ iken $A^G = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ ve $NA = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ olup $H^2(Z_2, Z_{15}) = 0$ olup bu durumda , $E = S_3 \times Z_5$ dir.

$n=14$ iken $A^G = \{0\}$ ve $NA = \{0\}$ olup $H^2(Z_2, Z_{15}) = 0$ olur. Bu durumda , $E = D_{30}$ dur.

NOT 8.1: Ortadaki E grubunun eleman sayısı " $2p^2$ " olan kaç tane genişleme olduğunu tam olarak bilmesek bile bir üst sınır koyabiliriz. (p asal ve $p>2$)

Örneğin ; 18 elemanlı bir grup için : $18 = 2.9 = 2.3^2$ olup $p=3$ dür. (Sylow Teoremi'nden 9 elemanlı conjugate olan alt gruplar vardır ve bunların sayısı $\equiv 1 \pmod{3}$ dür.

$$n = \left| \frac{G}{N(A)} \right| = A' \text{ nın (conjugate) elemanları sayısı}$$

$|N(A)| = 9$ veya $|N(A)| = 18$ dir.

$|N(A)| = 9$ ise , $|G/N(A)| = 2$ dir.

$|N(A)| = 18$ ise , $|G/N(A)| = 1 \pmod{3}$ olup $|A| = 9$ ve A , G ' nin normal altgrubu olur.

O halde , $A = Z_9$ veya $A = Z_3 \oplus Z_3$ dür.

$A = Z_9$ ise ; $0 \longrightarrow Z_9 \longrightarrow E \longrightarrow Z_2 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 1$ olan genişlemeyi alalım. $\emptyset: Z_2 \longrightarrow \text{Aut}(Z_9)$ dönüşümü altında $\emptyset \in Z_2$ ve $\emptyset, e'$ den farklı iken $\emptyset(\emptyset)1 = n1$ ise ; $(n,9) = 1$ ve $n^2 \equiv 1 \pmod{9}$ olmalıdır. $n=1$ ve $n=8$ için olan homomorfizmler bunu sağlarlar. $(\emptyset_1(\emptyset))1=1$ ise $\emptyset_1(\emptyset)=\text{Id}_{Z_9}$ ve $\emptyset_2(\emptyset)1 = 8$ dir.

Aşık ar olan modül yapısı için $e_1(Z_2, Z_9) = 0$ olup $E = Z_{18}$ dir. Aşık ar olmayan modül yapısı için de $A^G = \{0\}$ ve dolayısıyla $e_2(G, A) = 0$ olup $E = D_{18}$ dir.

$A = Z_3 \oplus Z_3$ ise ; $\emptyset: Z_2 \longrightarrow \text{Aut}(Z_3 \oplus Z_3)$ durumunda ; $(0,1)$ ve $(1,0)$ $Z_3 \oplus Z_3$ ' ü ürettiği için her eleman bunlar cinsinden yazılabilir. $0 \leq p, q, m, n \leq 2$ iken $\emptyset(\emptyset)(1,0) = (p,q)$ ve $\emptyset(\emptyset)(0,1) = (m,n)$ olsun. $\emptyset^2(\emptyset) = \text{Id}$ olmalı.

$\emptyset(\emptyset)(1,0) = (p,q) = (p,0) + (0,q) = p(1,0) + q(0,1)$ olduğundan ,

$\emptyset^2(\emptyset)(1,0) = (p^2, pq) + (mq, nq) = (p^2 + mq, pq + nq) = (1,0)$ olacak şekildeki m, n, p, q elemanlarına bakalım.

$p^2 + mq \equiv 1 \pmod{3}$ ve $q(n+p) \equiv 0 \pmod{3}$ denklem sistemleri çözülür. Benzer şekilde , $\emptyset(\emptyset)(0,1) = (m,n)$ idi. $\emptyset^2(\emptyset)(0,1) = (0,1)$ olmalı.

$\emptyset(\emptyset)(0,1) = (m,n) = (m,0) + (0,n) = m(1,0) + n(0,1)$

$\emptyset^2(\emptyset)(0,1) = m(p,q) + n(m,n)$

$= (mp, mq) + (mn, n^2)$

$= (mp + mn, mq + n^2) = (0,1)$

olup $m(p+n) \equiv 0 \pmod{3}$ ve $mq + n^2 \equiv 1 \pmod{3}$ denklem sistemleri çözülür. Bu sistemlerin çözümü sonucunda :

(p,q)	(m,n)
(1,0)	(2,2) , (1,2) , (0,1)
(1,1)	(0,2)
(1,2)	(0,2)
(0,1)	(1,0)
(0,2)	(2,0)
(2,0)	(1,1) , (2,1)
(2,1)	(0,1)
(2,2)	(0,1)

olup (p,q,m,n) dörütlüleri $Z_3 \otimes Z_3$ ' ün karesi birim olan otomorfizmlerinin kümesini oluşturur. Şimdi bu 11 tane modül yapısı için genişlemeleri hesaplayalım:

Aşık ar modül yapısı $(1,0,0,1)$ için ;

$$e_1(Z_2, Z_3 \otimes Z_3) = A/kA = Z_3 \otimes Z_3 / Z_3 \otimes Z_3 = \{0\} \text{ dır.}$$

Bu durumda , $E = Z_3 \otimes Z_3 \otimes Z_2$ dir.

$(1,0,2,2)$ otomorfizmi için ; $A^\otimes = \{(2,0)\}$ ve $NA = \{(2,0)\}$ olup $e_2(Z_2, Z_3 \otimes Z_3) = \{0\}$ dır.

$(1,0,1,2)$ otomorfizmi için ; $A^\otimes = \{(2,0)\}$ ve $NA = \{(2,0)\}$ olup $e_3(Z_2, Z_3 \otimes Z_3) = \{0\}$ dır.

$(1,0,0,1)$ otomorfizmi için ; $e_4(Z_2, Z_3 \otimes Z_3) = \{0\}$ dır.

$(1,1,0,2)$ otomorfizmi için ; $A^\otimes = \{(1,2), (2,1)\}$ ve $NA = \{(1,2), (2,1)\}$ olup $e_5(Z_2, Z_3 \otimes Z_3) = \{0\}$ dır.

$(1,2,0,2)$ otomorfizmi için ; $A^\otimes = \{(1,1), (2,2)\}$ ve $NA = \{(1,1), (2,2)\}$ olup $e_6(Z_2, Z_3 \otimes Z_3) = \{0\}$ dır.

$(0,1,1,0)$ otomorfizmi için ; $A^\otimes = \{(1,1), (2,2)\}$ ve $NA = \{(1,1), (2,2)\}$ olup $e_7(Z_2, Z_3 \otimes Z_3)$ dır.

$(0,2,2,0)$ otomorfizmi için ; $A^\otimes = \{(1,2), (2,1)\}$ ve $NA = \{(1,2), (2,1)\}$ olup $e_8(Z_2, Z_3 \otimes Z_3) = \{0\}$ dır.

$(2,0,1,1)$ otomorfizmi için ; $A^\otimes = \{(1,2), (2,1)\}$ ve $NA = \{(1,2), (2,1)\}$ olup $e_9(Z_2, Z_3 \otimes Z_3) = \{0\}$ dır.

$(2,0,2,1)$ otomorfizmi için ; $A^\otimes = \{(1,1), (2,2)\}$ ve $NA = \{(1,1), (2,2)\}$ olup $e_{10}(Z_2, Z_3 \otimes Z_3) = \{0\}$ dır.

$(2,1,0,1)$ otomorfizmi için ; $A^{\alpha} = \{(0,2)\}$ ve $NA = \{(0,2)\}$ olup $e_{11}(Z_2, Z_3 \oplus Z_3) = \{0\}$ dır.

$(2,2,0,1)$ otomorfizmi için ; $A^{\alpha} = \{(0,2)\}$ ve $NA = \{(0,2)\}$ olup $e_{12}(Z_2, Z_3 \oplus Z_3) = \{0\}$ dır.

O halde , 18 elemanlı izomorfik olmayan en çok 14 tane grup olur. Aslında bu sayı daha azdır,çünkü, bu grupların bazıları izomorfiktir.

Örneğin; eğer $\theta: Z_3 \oplus Z_3 \longrightarrow Z_3 \oplus Z_3$ $\theta(p,q) = (q,p)$ ise; $\delta_1 = (1,0,2,2)$ otomorfizmi ve $\mu_1 = (2,2,0,1)$ otomorfizmini alalım.

Kolayca görebiliriz ki, $\delta_1(g) = \theta \mu_1(g) \theta^{-1}$ olur. Bu demektir ki, bu iki otomorfizm için bulunan gruplar izomorfiktir. Benzer şekilde; $\delta_2 = (2,1,0,1)$ ve $\mu_2 = (1,0,1,2)$

$\delta_3 = (1,1,0,2)$ ve $\mu_3 = (2,0,1,1)$

$\delta_4 = (1,2,0,2)$ ve $\mu_4 = (2,0,2,1)$ olur.

ÖZET

Genel olarak E bir grup, A da E 'nin abelyen normal altgrubu ve $G = E/A$ olduğunda E grubu A 'nın G ile bir genişlemesidir deriz. Bu durum $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ şeklinde tam bir dizinin varlığı ile eşdeğerdir. A 'nın G ile olan genişlemesi G 'den $\text{Aut}(A)$ 'ya bir homomorfizm belirler. Bu ise A için bir $Z(G)$ -modül yapısı verir.

$[,]: G \times G \longrightarrow A$ olan her $x, y, z \in G$ için

i) $[x, 1] = [1, x] = 0$ ve

ii) $x.[y, z] - [xy, z] + [x, yz] - [x, y]n = 0$ koşullarını sağlayan fonksiyonların kümesine Normalleştirilmiş Faktör Kümesi denir ve bu kümenin elemanları "cocycles" olarak isimlendirildi.

$\langle \rangle: G \longrightarrow A$, $\langle 1 \rangle = 0$ koşulunu sağlayan bir dönüşüm olduğunda $f: G \times G \longrightarrow A$ $f(x, y) = x.\langle y \rangle - \langle xy \rangle + \langle x \rangle$ olarak tanımlanan f fonksiyonuna Normalleştirilmiş Olmayan Faktör Kümesi denir ve bu fonksiyonların oluşturduğu kümenin elemanları "coboundaries" olarak isimlendirildi. $e(G, A) = Z^2_N / B^2_N$ ile tanımlı grubun elemanlarının, A 'nın G ile genişlemelerinin eşlik sınıflarına karşılık geldiği gösterildi. Daha sonra $e(G, A) \approx H^2(G, A)$ izomorfizmi ispatlanıp bilinen bazı teoremler yardımıyla $H^2(G, A)$, dolayısıyla A 'nın G ile genişlemeleri bulunmuş oldu.

SUMMARY

In general if E is a (possibly nonabelian) group, A is an abelian subgroup of E and $G = E/A$ is a quotient group, then we say the group E is an extension of A by G . This is equivalent to exactness of the sequence

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

An extension of A by G determines a homomorphism from G to $\text{Aut}(A)$. The homomorphism gives a $Z(G)$ -module structure.

A Normalized Factor Set is a function $[,]: G \times G \longrightarrow A$ such that for all $x, y, z \in G$

$$\text{i) } [x, 1] = 0 = [1, x]$$

$$\text{ii) } x.[y, z] - [xy, z] + [x, yz] - [x, y] = 0$$

$Z^2(G, A)$ is the abelian group of all normalized factor sets.

$B^2(G, A)$ is the set of all functions $f: G \times G \longrightarrow A$ for which there is a function $\langle \rangle: G \longrightarrow A$ with $\langle 1 \rangle = 0$ such that $f(x, y) = x.\langle y \rangle - \langle xy \rangle + \langle x \rangle$.

The elements of $B^2(G, A)$ are called Principle Factor Set.

We have shown that the elements of $e(G, A) = Z^2_N / B^2_N$ are in one to one correspondence with the equivalence classes of A by G for a suitably defined equivalence. Later it is shown that $e(G, A)$ is isomorphic to $H^2(G, A)$. By the help of some theorems we have computed $H^2(G, A)$ for some special G and A .

KAYNAKLAR

- [1] COHEN, E.D., (1972). Lecture Notes In Mathematics. Springer-Verlag Berlin. Heidelberg. 245 New York. (99 syf.)
- [2] FUCHS, L., (1960). Abelian Groups. Pergamon Press. (368 syf.)
- [3] MAC LANE, S., (1975). Homology. Springer - Verlag. (424 syf.)
- [4] NORTHCOTT, D.G., (1972). An Introduction To Homological Algebra. Cambridge At University Press. (282 syf.)
- [5] ROTMAN, J.J., (1979). An Introduction To Homological Algebra. Academic Press (377 syf.)

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve değerli zamanlarını harcayarak yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yard. Doç. Dr. Doğan DÖNMEZ 'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmamın hazırlanması sırasında gerekli kolaylığı sağlayan Matematik Ana Bilim Başkanı hocam sayın Prof. Dr. Fikri AKDENİZ 'e tezimi yazarken yardımlarını esirgemeyen Uzm. Hamza EROL'a ve tüm matematik bölümü akademik personeline teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

1967 yılında Adana'da doğdum. İlk öğrenimimi Kazım Karabekir İlkokulunda, orta öğrenimimi Ziyapaşa Ortaokulunda ve lise öğrenimimi Paksoy Kız Lisesinde tamamlayarak 1986 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdim. 1990 yılında mezun olup yine aynı yıl master programına başladım. 1991 yılı Temmuz ayında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladım ve halen aynı görevimde çalışmaktayım.