



**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GRUP HALKALARINDA AUGMENTASYON
İDEALLER YARDIMIYLA ALT GRUP, ALT MODÜL
VE İDEAL İLİŞKİLERİ**

Ahmet TATLI

BURDUR, 2023

**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GRUP HALKALARINDA AUGMENTASYON
İDEALLER YARDIMIYLA ALT GRUP, ALT MODÜL
VE İDEAL İLİŞKİLERİ**

Ahmet TATLI

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet UC

BURDUR, 2023

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **“Grup Halkalarında Augmentasyon İdealler Yardımıyla Alt Grup, Alt Modül ve İdeal İlişkileri”** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

19 / 01 / 2023

(İmza)

Ahmet TATLI

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Dr. Öğr. Üyesi Mehmet UC'a teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen babam Mustafa TATLI'ya, annem Hacer TATLI'ya ve ağabeyim İsa TATLI'ya sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Ocak, 2023

Ahmet TATLI

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iii
ÖZET.....	vi
SUMMARY	vii
1. GİRİŞ.....	8
2. GENEL BİLGİLER	13
2.1. Grup Halkaları.....	13
2.2. Augmentasyon İdealleri	25
2.3. Grup Halkalarında Polinom İdealler ve Bir Polinom İdeal Olarak Augmentasyon İdeal.....	30
2.4. Augmentasyon Sıfırlayıcıları	37
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	40
3.1. Normal Alt Grup Uyuşumları.....	40
3.2. Metabeliyan Gruplar.....	41
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	47
5. SONUÇ.....	54
KAYNAKLAR.....	57

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$A_{f,R}(G)$	: $a^* : \mathbb{Z}F(X) \rightarrow RG$ ve $f(x) \in \mathbb{Z}F(X)$ ise $a^*(f(x))$ elemanları ile üretilen RG 'nin iki taraflı ideali
$Ann_R(M)$	: M 'nin R halkasındaki sıfırlayıcısı
$\{C_i\}_{i \in I}$	: G 'nin eşlenik sınıfları kümesi
$\Delta_R(G)$	: RG 'nin augmentasyon ideali
$\Delta_R^i(G)$	: $\Delta_R(G)$ 'nin i 'inci Lie kuvveti
$\Delta_R(G, H)$	: $\omega^* : RG \rightarrow R(G/H)$ şeklinde tanımlanan epimorfizmin çekirdeği
E	: R üzerinde bir cebir
$End_R M$	: M 'nin endomorfizm halkası
F	: Cisim
FG	: G grubunun F cismi üzerinde bir grup cebiri
$F(X)$	: $x_i \in X$ serbest üreteçleri üzerinde bir serbest grup
G	: Sonlu ya da sonsuz grup
$GF(p)$	: p elemanlı Galois cismi
$GL(n, F)$	: Bileşenleri F 'den alınan $n \times n$ tipindeki tersinir matrislerin grubu
G'	: G grubunun komütatör alt grubu
$G = \langle x \rangle$	: Devirli grup
G/H	: Bölüm grubu
$ G $	: G grubunun mertebesi
H	: G grubunun bir alt grubu
$Hom(F(X), G)$	: $F(X)$ 'den G 'ye tüm homomorfizmaların kümesi
$\hat{H}$	: G 'nin alt grubu olan H 'nin elemanlarının RG 'deki toplamı
$H < G$	: H grubu G grubunun alt grubu
$H \triangleleft G$	: H grubu G grubunun normal alt grubu
I	: İdeal
$I(RG)$	: RG 'nin tüm sol ideallerinin kümesi

$kar R$	: R halkasının karakteristiği
$Ker\varepsilon$	: Augmentasyon fonksiyonunun çekirdeği
L	: RH 'nin bir G -invariant ideali
$\ell_R(S) = \ell(S)$	: R 'nin bir alt kümesi olan S 'nin R 'deki sol sıfırlayıcısı
MH	: $H = \sum_{h \in H} h$ olmak üzere M 'nin bir RG -alt modülü
N	: G grubunun normal alt grubu
NG	: N 'yi içeren minimal RG -alt modül
$(NG :_{RG} M)$	: $Ann_{RG}(NG / M) = \{r \in RG : rNG \subset M\}$
$(NG :_R M)$	: $Ann_R(NG / M) = \{r \in R : rNG \subset M\}$
R	: Halka
RG	: G grubunun R halkası üzerindeki grup halkası
$R[\zeta]$	: ζ değişkenindeki polinom halkası
$R(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$	: Rasyonel fonksiyonlar cismi
$R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G$	: R 'nin $\mathbb{Z}G$ ile tensör çarpımı
$Soc_{RG}(RG)$	: RG 'nin basit sağ ideallerinin toplamı
$supp \alpha$	: $\alpha \in RG$ olmak üzere α 'nın dayanağı
$S(G)$	: G 'nin tüm alt gruplarının kümesi
$\langle supp \alpha \rangle$	: α 'nın dayanağının ürettiği alt grup
$U(E)$	: E 'nin üniter grubu
$V = F^n$	: Vektör uzayı
$\mathbb{Z}F(X)$	: $F(X)$ serbest grubunun integral grup halkası
$\mathbb{Z}G$	: G grubunun integral grup halkası
$\mathbb{Z}H$	: H grubunun integral grup halkası
$\mathbb{Q}G$	: G grubunun $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi üzerindeki grup halkası
$\bar{x} = xH$	: $H < G$ ve $x \in G$ için H 'nin G 'deki sol koseti
1_G	: G 'nin birimi
1_R	: R 'nin birimi
ε	: Augmentasyon fonksiyonu

$\mathcal{U}_R(S) = \mathcal{U}(S)$	: R 'nin bir alt kümesi olan S 'nin R 'deki sağ sıfırlayıcısı
$\{\gamma_i\}_{i \in I}$	: G 'nin sınıf toplamları
$\Upsilon = \{q_i\}_{i \in I}$	: G 'de H 'nin sol kosetlerinin tam bir temsilcileri kümesi
Γ	: RG 'nin iki taraflı idealleri kümesi
$\Psi(I)$	: $G \cap (1+I)$
$\Pi(N)$	: $\Delta_R(G, N)$
Λ	: RG 'nin $\Psi(I)$ ve $\Pi(N)$ ile tanımlanan normal alt grupları kümesi
Ω	: G 'nin tüm normal alt gruplarının kümesi
Φ	: M 'nin $\Delta_M(H)$ tarafından tanımlanan tüm alt modüllerinin kümesi
$\star$	: Bir A halkasının I, J idealleri için A –modül V 'nin A için $VI \subseteq VJ$ ise $I \subseteq J$ olma özelliği

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Grup Halkalarında Augmentasyon İdealler Yardımıyla Alt Grup, Alt Modül ve İdeal İlişkileri

Ahmet TATLI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet UC

Ocak, 2023

Bu tez çalışmasının amacı, grup halkalarında, augmentasyon idealler yardımı ile grup halkasının üzerinde tanımlı olduğu grubun alt grupları, grup halkasının üzerinde tanımlı olan alt modülleri ve grup halkasının idealleri arasındaki uyumları ve ilişkileri araştırmaktır. Bu amaç ile tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür. Bu bölümde, grup halkalarının yapısı ve grup halkalarının gelişmesi ile ortaya çıkan cebirsel yapıların tarihsel gelişimine yer verilmiştir.

İkinci bölüm genel bilgiler bölümüdür. Bu bölümde, grup halkaları ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilerek başlanmıştır. Daha sonra, G nin alt-grupları ile RG nin idealleri arasındaki ilişkileri görmek amacı ile RG nin augmentasyon ideali incelenmiştir. Ayrıca, grup halkalarında polinom idealler ve bir polinom ideal olarak augmentasyon ideali ele alınmıştır. Son olarak, augmentasyon ideallerin grup halkaları ile olan ilişkilerini incelemek için augmentasyon sıfırlayıcıları ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm materyal ve yöntem bölümüdür. Bu bölüme, normal alt grup uyumları incelenerek başlanmıştır. Normalleşmiş izomorfizma ile sonlu G ve H gruplarının sınıf toplamları arasındaki uyum gösterilmiştir. Bu uyum ile G nin normal alt gruplarının latisi ile H nin normal alt gruplarının latisi arasındaki ilişkiyi gösterecek tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bölümün devamında bir grup halkasının augmentasyon ideali ve grup halkasının üzerinde tanımlandığı grup arasında bazı temel karakterizasyonlar ve metabeliyan gruplarının sınıfı için izomorfizma problemi incelenmiştir.

Dördüncü bölüm araştırma bulguları ve tartışma bölümüdür. Bu bölümde, R –modül sınıfları ile RG –modül sınıfları arasındaki bazı ilişkiler araştırılmıştır. Ayrıca, G nin normal alt grupları ile RG –alt modüller ve RG –alt modüller ile G nin bir normal alt grupları arasındaki uyumlar ve ilişkiler araştırılmıştır.

Beşinci bölüm ise tez çalışmasının özetlendiği sonuç bölümüdür.

Anahtar Kelimeler: grup halkası, augmentasyon ideal, alt grup, alt modül, metabeliyan grup, polinom idealleri, augmentasyon sıfırlayıcıları

SUMMARY

M. Sc. Thesis

Subgroup, Submodule and Ideal Relationships with the Help of Augmentation Ideals in Group Rings

Ahmet TATLI

Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mehmet UC

January, 2023

The aim of this thesis study is to investigate the correspondences and relations between the subgroups of the group on which the group ring is defined, the sub-modules defined on the group ring and the ideals of the group ring, with the help of augmentation ideals in group rings. For this purpose, the thesis study consists of five chapters.

The first part is the introductory part. In this section, the structure of group rings and the historical development of algebraic structures that emerged with the development of group rings are given.

The second section is the general information section. In this section, the basic definitions and theorems related to group rings are given. Then, the augmentation ideal of RG was examined in order to see the relationships between the sub-groups of G and the ideals of RG . Also, polynomial ideals in group rings and augmentation ideal as a polynomial ideal are discussed. Finally, basic definitions and theorems about augmentation annihilators are given in order to examine the relations of augmentation ideals with group rings.

The third section is the material and method section. This chapter begins by examining normal subgroup congruences. The agreement between the normalized isomorphism and the class sums of the finite G and H groups is shown and definitions and theorems showing the relationship between the lattice of normal subgroups of G and the lattice of normal subgroups of H are given. In the remainder of the chapter, some basic characterizations between the augmentation ideal of a group ring are given and the isomorphism problem for the group and the class of metabelian groups in which the group ring is defined are examined.

The fourth section is the research findings and discussion section. In this section, some relationships between R -module classes and RG -module classes are examined. In addition, the similarities and relationships between normal subgroups of G and RG -submodules and between RG -submodules and a normal subgroup of G were examined.

The fifth chapter is the conclusion part in which the thesis is summarized.

Keywords: group ring, augmentation ideal, subgroup, submodule, metabelian group, polynomial ideals, augmentation annihilators

1. GİRİŞ

Cebir ve sayılar teorisinin en temel konusu olan grup halkaları konusu üzerindeki ilk çalışma Cayley (Cayley, 1854) tarafından ortaya atılmış olmasına rağmen grup halkaları konusu üzerine çalışmalarda bulunan T. Molien, bu konunun tam anlamıyla tanınmasını sağlamıştır. Grup halkalarının tanınmasını sağlamanın yanı sıra Molien, hiperkompleks sistemler ve grup temsilleri teorisini de geliştirmiştir. Özellikle sonlu grupların kompleks temsilleri teorisi üzerine olan çalışmaları, bu alanın en temel sonuçlarını ortaya koymuştur (Molien, 1893). Molien, yarı-basit grup halkalarının yapısı ile ilgili önceki çalışmaları incelemiş, elde ettiği verileri değerlendirmiş ve bu konu üzerine çalışabileceğini fark etmiştir. Bu sayede grup halkaları konusu üzerine çalışmalara tekrar başlamıştır.

Yarı-basit grup halkalarının yapısı ile ilgilenen F.G. Frobenius, Frobenius Karşılıklılık Teorisini ortaya atmıştır (Frobenius, 1896). H. Maschke tarafından da Maschke Teorisi ortaya atılmıştır (Maschke, 1898). Bu iki teori grup halkalarının en temel iki teorisidir. Ayrıca F.G. Frobenius, grup temsilleri teorisi üzerine çalışmalarda bulunmuş ve temsil teorisi ile grup halkalarının arasında bir ilişkinin varlığını göstermiştir (Frobenius, 1896; 1897). Grup halkaları ile grup temsil teorisi arasındaki ilişki kısaca şöyle anlatılabilir: G , bir grup ve $F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$ olsun. $GL(n, F)$, bileşenleri F den alınan $n \times n$ tipindeki tersinir matrislerin grubudur. $\rho: G \rightarrow GL(n, F)$ bir homomorfizma ise ρ fonksiyonuna G nin bir temsili (gösterimi) denir. $\rho: G \rightarrow GL(n, F)$; G nin bir temsili ve $V = F^n$, bir vektör uzayı olsun. $v \in V$, $g \in G$ olmak üzere $gv = \rho(g)v$ şeklinde tanımlanırsa gv çarpımı ile V , bir RG -modüldür. Modül kavramı ile ilgili bu ilişkiyi göz önüne alarak G grubunun temsili ile RG -modül arasında bir ilişki vardır. Ayrıca, E. Noether (Noether, 1929) ve R. Brauer (Brauer, 1927), yayınladıkları makalelerinde grup halkalarının yapısı ve grup temsilleri teorisi arasındaki ilişkilere ait önemli temel sonuçları ortaya koymuşlardır.

Grup halkaları ile temsil teorisi arasındaki ilişki ile daha rağbet görür hale gelen grup halkaları konusu, dönemin matematikçileri arasında değer kazanmaya başlamıştır. Grup halkaları konusu üzerine, G. Higman (Higman, 1940), M. Auslander (Auslander, 1957), I. Kaplansky (Kaplansky, 1957; 1970), J.E. Mclaughlin (Mclaughlin, 1958), I.G. Connell (Connell, 1963), J. Lambeck (Lambeck, 1966), P. Ribenboim (Ribenboim, 1969), A.A. Bovdi (Bovdi, 1974), I.B.S. Passi'nin (Passi, 1974), D.S. Passman (Passman, 1974; 1976; 1977; 1979; 1983; 1984; 2011), C. P. Milies (Milies, 1976), S.K. Sehgal (Sehgal, 1978;

1990), D. Farkas (Farkas, 1980), G. Karpilovsky (Karpilovsky, 1983; 1986; 1987; 1989; 1990), N.D. Gupta'nın (Gupta, 1987), J. Ritter ve S.K. Sehgal (Ritter ve Sehgal, 1990), V.A. Artamonov ve A.A. Bovdi (Artamonov ve Bovdi, 1991), S.K. Sehgal ve C.P. Milies (Sehgal ve Milies, 2002) gibi matematikçilerin yazmış oldukları makaleler ve kitaplar konunun gelişimini hızlandırmıştır.

I. Kaplansky, halka teorisindeki ünlü sorulara, grup halkası sorularının dahil olmasını sağlamıştır (Kaplansky, 1957; 1970). Bunun sonucunda halka teorisinin önem verilen alanlarından biri de grup halkaları olmuştur. I.G. Connell, "On the group rings" makalesinde grup halkalarının idealleri, regüler grup halkaları ve grup halkasının augmentasyon ideali gibi konunun en temel kavramlarını anlattığı için bu makale grup halkaları alanında konuşulmaya en değer çalışmalardandır (Connell, 1963).

Daha sonraki dönemlerde J. Lambeck ve P. Ribenboim yazmış oldukları kitaplarında, grup halkaları konusuna da yer vermişlerdir (Lambeck, 1966; Ribenboim, 1969). Bu kitaplarda grup halkasının gelişimini açık bir şekilde göstermişlerdir. Grup halkaları konusu üzerine yapılan çalışmalar ile farklı cebirsel yapıların gelişimi ve farklı cebirsel yapıların birbiri ile ilişkilendirilmesi sağlanmıştır.

Cebirsel yapılar ile cebirsel topoloji yakından ilişkilidir. Cebirsel topoloji, topolojik uzayları cebirsel gereç ve yöntemlerle inceleyip topolojik bir problemi cebir problemine dönüştürerek çözülmesini amaçlayan bir matematik alanıdır. Örnek olarak, bu anlamda, topolojik uzayları cebirsel nesne haline çeviren izleç kavramı verilebilir. İzleç, topolojik kategoriden cebirsel kategoriye geçmeyi sağlar. Buradan cebirsel bir yapı olan grup halkaları üzerine kurulan izleçler, grup halkalarının gelişmesiyle ilişkilendirilmiştir. Bu sayede cebirsel topoloji de grup halkaları konusu ile birlikte gelişim göstermiştir.

Grup halkaları teorisi ve grup temsil teorisi ile ilişkili olan Mackey izleçleri grup cebiri ve grup halkaları için önemli bir konudur. Mackey izleçleri en temel anlamda, R bir değişmeli halka olmak üzere, G nin alt grupları kümesinden, R -modüllerin kümesine ($M : \{G \text{'nin alt grupları}\} \rightarrow R - \text{mod}$) bir fonksiyon olarak tanımlanır. Mackey izleçlerinin özellikleri ile Mackey izleçlerinin üzerinde tanımlandıkları G grubunun ve G nin alt gruplarının temsilleri arasında bir ilişki vardır. Mackey izleçleri, sonlu boyutlu grup cebirinin temsilleri ile aynı şeydir. Mackey izleçleri sonlu boyutlu grup cebirlerinin temsilleri ile aynı şey olması grup temsil teorisi ile Mackey izleci arasında bir bağ olduğunu gösterir. Böylece, Mackey izleci tanımından yola çıkılarak Mackey izleçleri ile grup halkaları birbiri ile ilişkilidir. Green izleçleri, Green tarafından tanıtılmıştır (Green, 1964).

Benzer bir ilişki grup halkaları ve Green izleçleri arasında da vardır. Buradan da anlaşılacağı üzere grup halkaları konusu cebirin ve cebirsel topolojinin önemli konularının ortaya konulmalarını ve gelişimlerini sağlamıştır.

Günümüze yakın dönemdeki grup halkaları ile ilgili olan bazı yeni cebirsel yapılar, grup halkalarında kullanılan yöntemlerle ele alınmıştır. Bu yeni cebirsel yapılar üzerinden farklı kavramlar arasında önemli ve kullanışlı uyumlar ve ilişkiler elde edilmiştir. Bu nedenle grup halkaları ve grup halkalarının birer genişlemesi olan grup modül ve benzeri yeni cebirsel yapıların incelenmesi gerekmektedir. Bu yeni yapıların, grup halkaları ile olan ilişkilerinin ortaya konulması için grup halkalarında augmentasyon idealler yardımıyla alt grup, alt modül ve ideal ilişkileri incelenmeye başlanmıştır. Grup halkalarında augmentasyon idealler yardımı ile alt grup, alt modül ve ideal ilişkileri ile ilgili en önemli çalışmalara ise “The Algebraic Structure of Group Rings” adlı kitap ile giriş yapılmıştır (Passman, 1977). I.B.S. Passi’nin “Group rings and their augmentation ideals” kitabı ve N.D. Gupta’nın “Free Group Rings” kitabı, grup halkalarında augmentasyon idealler yardımı ile alt grup, alt modül ve ideal ilişkileri ile ilgili en önemli çalışmaların bir araya toplanıp derlendiği kitaplardır (Passi, 1974; Gupta, 1987).

Grup halkaları ile ilgili çok kapsamlı ve derin bir çalışma, S.K. Sehgal ve C.P. Milies’in “An Introduction to Group Rings” adlı kitabı ile etkili bir şekilde sağlanmıştır (Sehgal ve Milies, 2002). Ancak konu üzerine çalışmalar halen devam etmektedir. Konu üzerine son dönemdeki çalışmalardan bazıları M. Uc, O. Öneş ve M. Alkan (Uc vd., 2016), M. Alkan (Alkan, 2017), O. Öneş, M. Alkan, M. Uc (Öneş vd., 2020) dir.

Bu tezde grup halkalarında, augmentasyon idealler yardımı ile alt grup, alt modül ve idealler arasındaki ilişkileri üzerinde durulacaktır. Bu konu üzerine detaylı bir Türkçe araştırma yayını literatürde çok azdır. Bu tez ile bu konularda bir Türkçe araştırma yayınının literatüre dahil olması ve grup halkalarını çalışmak isteyen matematikçiler için tutarlı, temel ve oldukça yeterli sayıda konuyu içeren Türkçe bir yayına ulaşmalarını sağlamak hedeflenmektedir.

Tez çalışmasında ilk olarak grup halkaları ele alınmıştır. Grup halkalarının tanımı ve bu cebirsel yapı ile ilgili temel tanımlara, teoremlere ve bu teoremlerin ispatlarına yer verilmiştir. Grup halkalarının tanıtılmasının hemen ardından augmentasyon fonksiyonu ve bu fonksiyon ile ilişkili olan augmentasyon idealleri üzerinde durulmuştur. Bir G grubu ve R halkası verildiğinde, G nin tüm alt-gruplarının kümesi ile RG nin ideallerinin kümesi arasındaki ilişkileri göstermek için kullanılan temel tanımlar, teoremler ve bu teoremlerin ispatlarına yer verilmiştir.

Grup halkaları ve augmentasyon idealinin tanım ve teoremlerinden sonra grup halkalarında polinom idealler ve bir polinom ideal olarak augmentasyon ideali ele alınmıştır. Burada polinom ideal ile augmentasyon ideal arasındaki ilişki gösterilmiş; grup halkalarının augmentasyon ideallerinin bulunabilmesi adına bir örnek verilmiştir ve verilen örnek iki farklı yöntem ile çözülmüştür. Tezin devam eden sürecinde, augmentasyon sıfırlayıcıları ile ilgili temel teorem ve bu teoremlerin ispatlarına yer verilmiştir. Bu teoremlerin önemli uygulamaları gösterilmiştir.

Bir G grubu ve R halkası verildiğinde, G nin tüm alt-gruplarının kümesi $S(G)$ ile ve RG nin tüm sol ideallerinin kümesi $I(RG)$ ile gösterilmek üzere G nin normal alt gruplarını, RG nin iki taraflı ideallerine eşleyecek şekilde, $S(G)$ den $I(RG)$ ye bir fonksiyon vardır. Bu fonksiyonun tersi de bazı özel şartlar ile birlikte bir fonksiyon oluşturur. G nin normal alt gruplarının ve RG nin iki taraflı ideallerini karşılıklı olarak birbirlerine eşlenmesi ile elde edilen uyum, grup halkalarında alt gruplar, idealler ve alt modüller arasındaki başka uyumların araştırılması ile ilgili soruların sorulmasını sağlamıştır. Bu sorular ile ilgili problemlerin çözümlerinin incelenmesi ve bu çözümlerin anlaşılabilmesi için daha sonra başka normal alt grup uyumları ve metabeliyan gruplar üzerinde durulmuştur. Normal alt grup uyumlarında, normalleşmiş izomorfizma ile sonlu olan G ve H gruplarının, sınıf toplamları arasındaki uyum gösterilmiştir. Bu uyum ile G nin normal alt gruplarının latisi ile H nin normal alt gruplarının latisi arasında bir ilişki gösterilmiştir. Bu ilişkiyi göstermek adına gerekli olan tanımlar, teoremler ve bu teoremlerin ispatlarına yer verilmiştir. Normal alt grup uyumlarının ardından, bir grup halkasının augmentasyon ideali ve grup halkasının üzerinde tanımlandığı grup arasında bazı temel karakterizasyonlar ve metabeliyan grupları sınıfı için izomorfizma problemleri incelenmiştir. Ayrıca, teoremlerden elde edilen sonuçlar ifade edilmiştir.

Bir R –modül M nin bir RG –modül yapılmasını sağlayan ve R –modül sınıfları ile RG –modül sınıfları arasındaki bazı ilişkilerin incelenmesini sağlayan bir cebirsel bir yapı vardır (Uc vd., 2016). Bu yapı ile hem G nin bir normal alt grubu için bir RG –alt modülü hem de bir RG –alt modülü için G nin bir normal alt grubu bulunmuştur.

Bu tez hazırlanırken Passi’nin 1974 yılında basılan “Group Rings and their Augmentation Ideals” isimli kitabından, Sehgal ve Milies’in 2002 yılında basılan “An Introduction to Group Rings” isimli kitabından, Passman’ın 2011 yılında basılan “The Algebraic Structure of Group Rings” isimli kitabından ve M. Alkan’ın 2017 yılında

yayınlanan “On the relations between subgroups of a group and submodules of modules over group rings” makalesinden etraflıca yararlanılmıştır.



2. GENEL BİLGİLER

2.1. Grup Halkaları

R , bir cisim ve G , sonlu ya da sonsuz bir çarpımsal grup olsun. O halde RG grup halkası, temel olarak G nin elemanlarıyla ve G deki grup çarpması kullanılarak, dağılımlı olarak tanımlanan çarpma ile ilişkisel bir R -cebiri. Daha kesin olmak gerekirse RG , $a_x \in R$ ile

$$\alpha = \sum_{x \in G} a_x x \quad (2.1)$$

formunun tüm sonlu formal toplamlarından oluşur. Burada, toplamın sonluluğu, a_x katsayılarının yalnızca sonlu sayıda ve sıfırdan farklı olabileceği anlamına gelir. Eğer

$\beta = \sum_{y \in G} b_y y$, RG 'nin ikinci bir elemanı ise toplama ve çarpma,

$$\alpha + \beta = \left(\sum_{x \in G} a_x x \right) + \left(\sum_{x \in G} b_x x \right) = \sum_{x \in G} (a_x + b_x) x \quad (2.2)$$

ve

$$c_z = \sum_{xy=z} a_x b_y = \sum_x a_x b_{x^{-1}z} = \sum_y a_{zy^{-1}} b_y \quad (2.3)$$

olmak üzere

$$\alpha\beta = \left(\sum_{x \in G} a_x x \right) \left(\sum_{y \in G} b_y y \right) = \sum_{x,y \in G} a_x b_y xy = \sum_{z \in G} c_z z \quad (2.4)$$

ile tanımlanır.

Bu işlemler ile birlikte,

$$a\alpha = a\left(\sum_{x \in G} a_x x\right) = \sum_{x \in G} (aa_x) x \quad (2.5)$$

şeklinde verilen skaler çarpma ile bir R -cebiri tanımlar.

Son olarak $x \in G$, $1 \cdot x \in RG$ ile tanımlanır ise aslında $G \subseteq RG$ dir ve G nin elemanları RG için bir baz oluşturur. Ayrıca, $1_G \cdot 1_R \in G$, RG nin birim elemanıdır.

$G = \langle x \rangle$, bir devirli grup olsun. Eğer $|G| = n$ sonlu ise $1, x, \dots, x^{n-1}$, RG için bir baz oluşturur ve kesinlikle RG nin her elemanı benzersiz bir şekilde

$$\alpha = \sum_{t=0}^{n-1} a_t x^t \quad (2.6)$$

biçimindedir. $R[\zeta]$, ζ değişkenindeki polinom halkasını gösterebilir. O halde, $\zeta \rightarrow x$ tarafından tanımlanan $R[\zeta] \rightarrow RG$ fonksiyonu, çekirdeği $(1 - \zeta^n)$ olan, yani $1 - \zeta^n$ tarafından üretilen temel ideal olan bir epimorfizmadır. Böylece, $RG \cong R[\zeta]/(1 - \zeta^n)$ dir. Öte yandan, $G = \langle x \rangle$ sonsuz elemanlı olsun. Daha sonra RG nin elemanları,

$$\alpha = \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_t x^t \quad (2.7)$$

formunun sonlu toplamları olarak benzersiz bir şekilde yazılır ve artık $\zeta \rightarrow x$ tarafından tanımlanan $R[\zeta] \rightarrow RG$ doğal homomorfizması üzerine değil, bir gömmedir.

Teorem 2.1.1 G sonlu üretilmiş burulmasız bir abelyen grup olsun. O halde, n bir tamsayı olmak üzere RG , $R[\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n]$ polinom halkası ile $R(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ rasyonel fonksiyonlar cismi arasında izomorfik olarak bulunur. Ayrıca, RG bir tamlık bölgesidir.

Kanıt: Abelyen grupların temel teoremi ile $G = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle \times \dots \times \langle x_n \rangle$, n bir tam sayı olmak üzere n sonsuz devirli grubun direkt çarpımıdır. G nin elemanları o zaman benzersiz bir şekilde $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ biçimindedir ve $R[\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n] \rightarrow RG$, $\zeta_i \rightarrow x_i$ şeklinde verilen

doğal homomorfizma bir gömmedir. Böylece $RG \supseteq R[\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n]$ dir. Son olarak, eğer $\alpha \in RG$ ise yeterince büyük bir m tam sayısı için $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^m \alpha \in R[\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n]$ dir. Buradan RG nin tamlık bölgesi olduğu ve $RG \subseteq R[\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n]$ olduğu sonucu elde edilir (Pasman, 2011). ■

Grup halkalarının temel bir özelliği sağ-sol simetrileridir. $*$: $RG \rightarrow RG$,

$$\left(\sum a_x x \right)^* = \sum a_x x^{-1} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon için $x, y \in G$ olmak üzere $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ olduğundan

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g, \beta = \sum_{g \in G} b_g g \in RG \text{ için;}$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^* &= \left(\sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g \right)^* = \left(\sum_{g \in G} (a_g + b_g) g \right)^* = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g^{-1} \\ &= \sum_{g \in G} a_g g^{-1} + \sum_{g \in G} b_g g^{-1} = \sum_{g \in G} a_g g^{-1} + \sum_{g \in G} b_g g^{-1} \\ &= \alpha^* + \beta^* \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)^* &= \left(\sum_{g \in G} a_g g \sum_{g \in G} b_g g \right)^* = \left(\sum_{g \in G} (a_g b_g) g g \right)^* = \sum_{g \in G} (b_g a_g) g^{-1} g^{-1} \\ &= \sum_{g \in G} (b_g g^{-1}) (a_g g^{-1}) \\ &= \sum_{g \in G} b_g g^{-1} \sum_{g \in G} a_g g^{-1} \\ &= \beta^* \alpha^* \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\alpha^{**} = \left(\left(\sum_{g \in G} a_g g \right)^* \right)^* = \left(\sum_{g \in G} a_g (g^{-1}) \right)^*$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{g \in G} a_g (g^{-1})^{-1} \right) \\
&= \sum_{g \in G} a_g g \\
&= \alpha
\end{aligned} \tag{2.11}$$

olur. Böylece $*$, 2. dereceden bir antiotomorfizmdir, bir involüsyondur ve bundan RG nin benzer sağ ve sol özelliklere sahip olduğu sonucu çıkarılır. Örneğin, RG nin sağ Artin olması için gerek ve yeter şart sol Artin olmasıdır.

$\alpha = \sum a_x x \in RG$ olmak üzere

$$\text{supp } \alpha = \{x \in G \mid a_x \neq 0\} \tag{2.12}$$

kümesi α 'nın dayanağı olarak tanımlanır. Böylece $\text{supp } \alpha$ 'nın G nin bir boş sonlu alt kümesi olması için gerek ve yeter şart $\alpha = 0$ olmasıdır. α nın dayanağının ürettiği alt grup $\langle \text{supp } \alpha \rangle$, $\text{supp } \alpha$ nın elemanları tarafından üretilen G nin sonlu üretilmiş alt gurubudur. H , G nin bir alt grubu olsun. O halde $H \subseteq G \subseteq RG$ ve H nin RG deki R -lineer germe kümesi RH dir. Böylece RH , RG de doğal olarak gömülüdür ve

$$RH = \{a \in RG \mid \text{supp } \alpha \subseteq H\} \tag{2.13}$$

dir. $\alpha \in RG$ için $\langle \text{supp } \alpha \rangle$, G nin $\alpha \in RH$ olacak şekilde en küçük H alt grubudur.

Eğer $\alpha \in RG$, $\alpha \neq 0$ ve $g \in G$ ise $\text{supp } g\alpha = g(\text{supp } \alpha)$ ve $\text{supp } \alpha g = (\text{supp } \alpha)g$

dir. Özellikle, $x \in \text{supp } \alpha$ ise $1 \in \text{supp } x^{-1}\alpha$ ve $1 \in \text{supp } \alpha x^{-1}$ dir.

H , G nin bir alt grubu olsun. RH , RG nin bir alt halkası olduğundan, RG sıradan çarpma işlemine göre hem sağ hem de sol RH -modüldür. Bu modüller serbest modüllerdir.

G de H için sağ transversal, G de H için sağ koset temsilcilerinin bir tam kümesidir. Benzer şekilde G de H için sol transversal, G de H için sol koset temsilcilerinin bir tam kümesidir.

$\pi_H : RG \rightarrow RH$ olmak üzere

$$\pi_H \left(\sum_{x \in G} a_x x \right) = \sum_{x \in H} a_x x \quad (2.14)$$

şeklinde bir izdüşüm fonksiyonu vardır. Başka bir deyişle eğer, $\alpha \in RG$ ise $\text{supp } \alpha'$, H den ayrık ve $\text{supp } (\alpha - \alpha') \subseteq H$ olmak üzere $\alpha = \pi_H(\alpha) + \alpha'$ dir.

Teorem 2.1.2 H, G nin bir alt grubu ve $\alpha, \beta \in RG$, $\gamma \in RH$ olsun.

- i. $a, b \in R$ için, $\pi_H(a\alpha + b\beta) = a\pi_H(\alpha) + b\pi_H(\beta)$ dir.
- ii. $\pi_H(\gamma\alpha) = \gamma\pi_H(\alpha)$, $\pi_H(\alpha\gamma) = \pi_H(\alpha)\gamma$ dir.
- iii. Eğer $H \triangleleft G$ ve $x \in G$ ise $\pi_H(x^{-1}\alpha x) = x^{-1}\pi_H(\alpha)x$ dir.

Kanıt: (i) $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$, $\beta = \beta_0 + \beta_1$, $\text{supp } \alpha_1$ ve $\text{supp } \beta_1$, H den ayrık olacak ve $\alpha_0 = \pi_H(\alpha)$, $\beta_0 = \pi_H(\beta)$ şeklinde tanımlansın. O halde,

$$a\alpha + b\beta = (a\alpha_0 + b\beta_0) + (a\alpha_1 + b\beta_1) \quad (2.15)$$

ve bu iki terimin dikkate alırsa

$$\pi_H(a\alpha + b\beta) = a\alpha_0 + b\beta_0 \quad (2.16)$$

dir.

(ii) $\gamma\alpha = \gamma\alpha_0 + \gamma\alpha_1$ dir ve $\gamma\alpha_0 \in RH$ dir. Öte yandan, $x \in \text{supp } \gamma\alpha_1$ ise x , $\text{supp } \gamma$ nin bir elemanı ile $\text{supp } \alpha_1$ in bir elemanının çarpımıdır. H deki bir elemanın H dışında bir elemanla çarpımı her zaman H nin dışında olduğu için $\text{supp } \gamma\alpha_1$, H den ayrıktır ve buradan $\pi_H(\gamma\alpha) = \gamma\alpha_0$ dir.

(iii) Eğer $H \triangleleft G$ ise

$$x^{-1}\alpha x = x^{-1}(\alpha_0 + \alpha_1)x = x^{-1}\alpha_0 x + x^{-1}\alpha_1 x \text{ ve } \text{supp } x^{-1}\alpha_0 x \subseteq x^{-1}Hx = H \quad (2.17)$$

dir. $\text{supp } x^{-1}\alpha_1 x$, H den ayrıktır. Böylece $\pi_H(x^{-1}\alpha x) = x^{-1}\pi_H\alpha_0 x$ olur (Pasman, 2011). ■

Teorem 2.1.3 Y , G de H için bir sol transversal olsun. O zaman, her $\alpha \in RG$ elemanı, $\alpha_y \in RH$ olmak üzere

$$\alpha = \sum_{y \in Y} y\alpha_y \quad (2.18)$$

formunun sonlu toplamı olarak tek bir şekilde yazılır. Hatta, $\alpha_y = (y^{-1}\alpha)$ dir. Böylece, RG , Y serbest bir baz olmak üzere, bir serbest sağ RH –modülüdür. Benzer şekilde, X , G de H için bir sağ transversal ise RG , X serbest baz ve $\alpha_x = \pi_H(\alpha x^{-1})$ olmak üzere, bir serbest sol RH –modülüdür.

Kanıt: $\alpha \in RG$ olsun. $\text{supp } \alpha$ sonlu olduğundan H nin yalnızca sonlu sayıda sol kosetinde bulunur. Yani, $y_1H, y_2H, \dots, y_nH$, $y_i \in Y$ dir. $x \in y_iH$ ve $a_i, a_x x$ in kısmi toplamı olmak üzere $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ dir. $x \in y_iH$ için $y^{-1}x \in H$ dir. Böylece,

$$\alpha = \sum_{i=1}^n y_i(y_i^{-1}\alpha_i) \quad (2.19)$$

ifadesinde $y_i^{-1}\alpha_i \in RH$ dir. Buradan $\alpha, \alpha_y \in RH$ olmak üzere, $\sum y\alpha_y$ şeklinde bir toplam olarak yazılır. Tekliğini kanıtlamak için ve $y_0 \in Y$ olsun. $y_0^{-1}\alpha = \sum y_0^{-1}y\alpha_y$ ve $y_0^{-1}y \in H$ olması için gerek ve yeter şart $y = y_0$ olmasıdır. Böylece,

$$\pi_H(y_0^{-1}\alpha) = y_0^{-1}y_0\alpha_{y_0} = \alpha_{y_0} \quad (2.20)$$

dir (Pasma, 2011). ■

Teorem 2.1.4 H , G nin bir alt grubu ve $\alpha \in RH$ olsun. O halde, α nın RH 'de tersinir olması için gerek ve yeter şart α nın RG de tersinir olmasıdır. Ayrıca, α , RH de sağ veya sol sıfır bölen olması için gerek ve yeter şart α nın RG de sağ veya sol sıfır bölen olmasıdır.

Kanıt: α , RH de tersinir ise, $RH \subseteq RG$ olduğundan, α , RG de de tersinirdir. α , RG de tersinir olsun. Böylece, $\alpha\beta = 1 = \beta\alpha$ olacak şekilde $\beta \in RG$ vardır. O zaman, Teorem 2.1.2'ye göre

$$\alpha\pi_H(\beta) = \pi_H(\alpha\beta) = \pi_H(1) = 1 \quad (2.21)$$

ve

$$\pi_H(\beta)\alpha = \pi_H(\beta\alpha) = \pi_H(1) = 1 \quad (2.22)$$

dir. Buradan, $\alpha^{-1} = \pi_H(\beta) \in RH$ dir.

Öte yandan, $\beta \in RG$, $\beta \neq 0$ için $\alpha\beta = 0$ ise $1 \in \text{supp } \beta x$ olacak şekilde $x \in G$ bulunur. $\alpha(\beta x) = 0$ olduğundan dolayı

$$\alpha\pi_H(\beta x) = \pi_H(\alpha\beta x) = \pi_H(0) = 0 \quad (2.23)$$

dir ve $1 \in \text{supp } \beta x$ olduğundan $\pi_H(\beta x) \neq 0$ dir (Pasma, 2011). ■

RG deki belirli ideallerin yapısı ve bu idealler ile G nin belirli normal alt gruplarıyla ilişkilerini incelemek önemlidir. G , RG ye konjugasyon ile etki eder. Gerçekten her $x \in G$ için $*$: $RG \rightarrow RG$ olmak üzere

$$\alpha^* = x^{-1}\alpha x \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlansın. O halde, $\alpha = \sum_{y \in G} a_y y$, $\beta = \sum_{y \in G} b_y y \in RG$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)^* &= x^{-1}(\alpha + \beta)x = x^{-1}\left(\sum_{y \in G} a_y y + \sum_{y \in G} b_y y\right)x \\
&= x^{-1}\left(\sum_{y \in G} (a_y + b_y)y\right)x \\
&= \sum_{y \in G} (a_y + b_y)(x^{-1}yx) \\
&= \sum_{y \in G} a_y (x^{-1}yx) + \sum_{y \in G} b_y (x^{-1}yx) \\
&= x^{-1}\left(\sum_{y \in G} a_y y\right)x + x^{-1}\left(\sum_{y \in G} b_y y\right)x \\
&= x^{-1}\alpha x + x^{-1}\beta x \\
&= \alpha^* + \beta^*
\end{aligned} \tag{2.25}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)^* &= x^{-1}\alpha\beta x = x^{-1}\left(\sum_{y \in G} a_y y \cdot \sum_{y \in G} b_y y\right)x \\
&= x^{-1}\left(\sum_{y \in G} (a_y b_y)yy\right)x \\
&= \left(\sum_{y \in G} (a_y b_y)(x^{-1}yyx)\right) \\
&= \left(\sum_{y \in G} (a_y b_y)(x^{-1}yxx^{-1}yx)\right) \\
&= \left(\sum_{y \in G} a_y (x^{-1}yx)\right) \cdot \left(\sum_{y \in G} b_y (x^{-1}yx)\right) \\
&= \left(x^{-1}\left(\sum_{y \in G} a_y y\right)x\right) \cdot \left(x^{-1}\left(\sum_{y \in G} b_y y\right)x\right) \\
&= (x^{-1}\alpha x)(x^{-1}\beta x) \\
&= \alpha^* \beta^*
\end{aligned} \tag{2.26}$$

dir. Böylece, x ile konjugasyon RG nin endomorfizmidir. Ayrıca $x, y \in G$ için

$$(\alpha^x)^y = y^{-1}(x^{-1}\alpha x)y = (xy)^{-1}\alpha(xy) = \alpha^{xy} \quad (2.27)$$

dir. Bu nedenle, bu G nin bir etkisidir ve 1 ile konjugasyon birim fonksiyon olduğundan, konjugasyon her zaman RG nin bir otomorfizmasıdır. S , RG nin bir alt kümesi olmak üzere her $x \in G$ için $S^x = S$ ise S ye G -invariant denir. $H \triangleleft G$ ise RG , G -invarianttır. I , RG nin bir ideali ise I , G -invarianttır.

Teorem 2.1.5 $H \triangleleft G$ olsun.

- i. L , RH nin bir G -invariant ideali ise $L.RG = RG.L$, RG nin bir idealidir.
- ii. I , RG nin bir ideal ise $(I \cap RH).RG \subseteq I \subseteq \pi_H(I).RG$ dir. $I \cap RH$ ve $\pi_H(I)$ in her ikisi de RH nin G -invariant idealleridir.

Kanıt: (i) $I = L.RG$, RG de bir sağ idealdir ve R ile sol çarpma altında kapalıdır. Bu nedenle sadece G ile sol çarpma altında kapalı olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. $x \in G$ olmak üzere,

$$xI = xL.RG = x(x^{-1}Lx)x^{-1}RG = L.RG = I \quad (2.28)$$

dir. I bir idealdir. Böylece, $I = L.RG \supseteq RG.L$ dir. $RG.L \supseteq L.RG$ olduğu benzer şekilde gösterilir.

(ii) I , G -invariant olduğu için Teorem 2.1.2'den hem $I \cap RH$ hem de $\pi_H(I)$, RH 'nin G -invariant idealleridir. Ayrıca, $(I \cap RH).RG \subseteq I$ olduğu açıktır. Eğer $\alpha \in I$ ise Teorem 2.1.3'den G deki H için bir sağ transversal X üzerinden $\alpha = \sum \pi_H(\alpha x^{-1})x$ dir. I bir ideal olduğundan $\alpha x^{-1} \in I$ ve $\pi_H(\alpha x^{-1}) \in \pi_H(I)$ dir. Bu nedenle, $\alpha \in \pi_H(I).RG$ dir (Pasan, 2011). ■

Teorem 2.1.6 $H \triangleleft G$ ve I , RG nin bir ideali olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

- i. RH nin G -invariant ideali L için $I = L.RG$ dir.
- ii. $I = (I \cap RH).RG$ dir.
- iii. $I = \pi_H(I).RG$ dir.

Bu üç durumdan herhangi biri oluşursa

$$L = I \cap RH = \pi_H(I) \quad (2.29)$$

dir.

Kanıt: Teorem 2.1.5 kullanılarak ii. ve iii.'den ayrı ayrı i. elde edilir. Bu nedenle, $I = L.RG$ olduğu varsayılır ve $L = I \cap RH = \pi_H(I)$ olduğu gösterilebilir. Bu, teoremin ii. ve iii. maddelerini ve teoremin sonundaki iddiayı gösterir.

$\pi_H(I)$ nin hesaplanması gerekir. I nin bir α elemanı, tanım gereği $\alpha = \sum \beta_i \gamma_i$,

$\beta_i \in L$, $\gamma_i \in RG$ şeklindedir. Bu yüzden, $L \subseteq RH$ ve L bir ideal olduğu için

$$\pi_H(\alpha) = \sum \pi_H(\beta_i \gamma_i) = \sum \beta_i \pi_H(\gamma_i) \in L \quad (2.30)$$

dir ve dolayısı ile $\pi_H(I) \subseteq L$ dir. Öte yandan, $L \subseteq I \cap RH \subseteq I$ dir ve dolayısı ile $\pi_H(L) \subseteq \pi_H(I \cap RH) \subseteq \pi_H(I)$ dir. Fakat, $\pi_H(L) = L$ ve $\pi_H(I \cap RH) = I \cap RH$ olduğundan sonuç elde edilir (Pasman, 2011). ■

$H \triangleleft G$ ve I, RG 'nin bir ideali ise $I = \pi_H(I).RG$ olduğunda H , I yı kontrol eder denir. RG ile ilgili başka alt halkalar da vardır. Örneğin, K , R nin bir alt halkası olsun. KG ile

$$KG = \left\{ \sum a_x x \in RG \mid a_x \in K \right\} \quad (2.31)$$

kümesi ifade edilir. Eğer $K = F$ bir cisim ise FG , G üzerinde F nin grup halkasıdır. Eğer R , karakteristiği 0 olan bir cisim ise $RG \supseteq \mathbb{Q}G \supseteq \mathbb{Z}G$ dir. Burada $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar cismi ve $\mathbb{Z}$, tamsayılar halkasıdır. Eğer R nin karakteristiği $p > 0$ ise

$$RG \supseteq GF(p)G \quad (2.32)$$

dir; burada $GF(p)$, p elemanlı Galois cismidir.

Teorem 2.1.7 E , R üzerinde bir cebir olsun ve $\tau: G \rightarrow U(E)$, yani G 'den E nin üniter grubuna bir grup homomorfizması olsun. O zaman, τ grup homomorfizması $\tau: RG \rightarrow E$ olmak üzere

$$\tau\left(\sum a_x x\right) = \sum a_x \tau(x) \quad (2.33)$$

şeklinde tanımlanan bir R -cebir homomorfizmasına genişler.

Kanıt: $\sum a_x x, \sum b_x x \in RG$ ve $\sum a_x x = \sum b_x x$ ise

$$\tau\left(\sum a_x x\right) = \sum a_x \tau(x) = \sum b_x \tau(x) = \tau\left(\sum b_x x\right) \quad (2.34)$$

dir. O halde, τ , RG den E ye iyi tanımlanmış bir fonksiyondur.

$\sum a_x x \in RG$ ve $k \in R$ olsun.

$$\tau\left(k\left(\sum a_x x\right)\right) = \tau\left(\sum (ka_x)x\right) = \sum (ka_x)\tau(x) = k\left(\sum a_x \tau(x)\right) = k\tau\left(\sum a_x x\right) \quad (2.35)$$

dir. O halde, τ , R -doğrusaldır.

Ayrıca $x, y \in G$ için $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$ olduğundan τ , RG üzerinde çarpımsaldır (Pasman, 2011). ■

Eğer $H \triangleleft G$ ise G nin G/H 'ye, dolayısıyla G nin $R(G/H)$ 'nin birimlerinin grubuna doğal homomorfizma vardır. Bu nedenle yukarıda belirtilenlerle, $\bar{x} = xH$, G/H 'deki x in görüntüsü olmak üzere

$$\rho_H \left(\sum a_x x \right) = \sum a_x \bar{x} \quad (2.36)$$

ile verilen bir doğal homomorfizma vardır.

$H = G$ ise her $x \in G$ için $G/H = \langle 1 \rangle$ ve $\bar{x} = 1$ dir.

$$\rho_G \left(\sum a_x x \right) = \left(\sum a_x \right) 1 \quad (2.37)$$

ve bu fonksiyonun çekirdeği

$$\Delta_R(G) = \left\{ \sum a_x x \mid \sum a_x = 0 \right\} \quad (2.38)$$

dir. Bu fonksiyonun çekirdeğine RG nin *augmentasyon ideali* denir ve RG de 1 eş boyutuna sahiptir.

Teorem 2.1.8 $H \triangleleft G$ olsun. $\Delta_R(H)$, RH nin bir G -invariant idealidir ve $\Delta_R(H).RG$, ρ_H nin bir çekirdeğidir.

Kanıt: X , G de H için bir sağ transversal olsun ve $\alpha \in RG$ 'yi $\alpha_x \in RG$ ile Teorem 2.1.3'deki gibi $\alpha = \sum \alpha_x x$ olarak yazılsın. Buradan

$$\rho_H(\alpha) = \sum \rho_H(\alpha_x) \rho_H(x) \quad (2.39)$$

ve $\rho_H(\alpha_x) \in R$ dir. Ayrıca, tanım gereği $x \in X$ için $\rho_H(x)$ elemanları, $R(G/H)$ nin bir bazını oluşturur. Böylece, α nin ρ_H nin çekirdeğinde olması için gerek ve yeter şart her x için $\rho_H(\alpha_x) = 0$ olmasıdır. Ayrıca, ρ_H, H yi $\langle 1 \rangle$ e gönderdiği için $\rho_H(\alpha_x) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha_x \in \Delta_R(H)$ olmasıdır. Böylece, $\Delta_R(H).RG$ nin ρ_H nin çekirdeğidir. Son olarak, $\Delta_R(H), G$ -invarianttır; çünkü $H \triangleleft G$ dir. (Pasman, 2011). ■

2.2. Augmentasyon İdealleri

Bu bölümde G nin alt-grupları ile RG nin idealleri arasındaki ilişkileri görmek amacı ile RG nin augmentasyon ideali incelenecektir. Kendi başına ilgi çekici olan bu ilişki RG nin yapısı ve özellikleri ile ilgili birçok problemin incelenmesinde de faydalı olacaktır.

$\varepsilon: RG \rightarrow R, \sum_{g \in G} r_g g \rightarrow \sum_{g \in G} r_g$ şeklinde tanımlanan fonksiyona *augmentasyon fonksiyon*

denir. $\text{Ker } \varepsilon = \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \in RG : \varepsilon \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) = 0 \right\} = \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \in RG : \sum_{g \in G} r_g = 0 \right\}$ şeklinde verilen

augmentasyon fonksiyonun çekirdeği $\Delta_R(G)$ ile gösterilen augmentasyon idealdir. Buradan

$\sum_{g \in G} r_g g \in \text{Ker } \varepsilon$ ise $\sum_{g \in G} r_g g - \sum_{g \in G} r_g = \sum_{g \in G} r_g g$ dir. Böylece, $\sum_{g \in G} r_g (g-1) = \sum_{g \in G} r_g g$ dir. O halde,

$\text{Ker } \varepsilon = \Delta_R(G) = \left\{ \sum_{g \in G} r_g (g-1) : r_g \in R, g \neq 1 \right\}$ dir. Ayrıca, $\{g-1 : g \in G, g \neq 1\}$ kümesi R

üzerinde $\Delta_R(G)$ nin bir bazıdır.

Bir G grubu ve R halkası verildiğinde, G nin tüm alt-gruplarının kümesini $S(G)$ ile ve RG nin tüm sol ideallerinin kümesini $I(RG)$ ile gösterilsin.

Tanım 2.2.1 Bir $H \subseteq S(G)$ alt grubu için, $\{h-1 : h \in H\}$ kümesi tarafından üretilen RG nin sol ideali $\Delta_R(G, H)$ ile gösterilir. Yani:

$$\Delta_R(G, H) = \left\{ \sum_{h \in H} a_h (h-1) : a_h \in RG \right\} \quad (2.40)$$

(Sehgal ve Milies, 2002).

Sabit bir R halkası ile çalışılırken, bu ideal sadece $\Delta_R(G, H)$ ile gösterilir. $\Delta_R(G, G)$ idealinin, önceki bölümde tanıtilan $\Delta_R(G)$ ideali ile çakışır.

Teorem 2.2.2 H, G grubunun bir alt grubu ve S, H nin bir üreteç kümesi olsun. O halde, $\{s-1: s \in S\}$ kümesi RG nin sol ideali olarak $\Delta_R(G, H)$ nin bir üreteç kümesidir.

Kanıt: S, H nin bir üreteç kümesi olduğundan, bazı pozitif r tamsayıları için her $h \in H$ elemanı, $s_i \in S, 1 \leq i \leq r$ ile $h = s_1 s_2 \cdots s_r$ şeklinde yazılır. h için böyle bir ayrıştırmada görünen minimum faktör sayısına h nin uzunluğu denir. Bu teoremin önemini kanıtlamak için, $h-1 \in H, h \in H$ formunun tüm elemanlarının $\{s-1, s \in S\}$ kümesi tarafından üretilen sol ideal, $s_i \in S, 1 \leq i \leq r$ ye ait olduğunu gösterilmelidir. Bu, h uzunluğunda tümevarım yöntemi ile ispatlanacaktır. h uzunluğu 1 ise iddia doğrudur. O halde, verilen bir pozitif tam sayısından daha kısa uzunluktaki her $x \in H$ elemanı için $x-1 \in I$ ve h nin n uzunluğunda bir elemanı olsun. $h = s_1 s_2 \cdots s_n$ olduğundan, $h-1 = s_1 s_2 \cdots s_n - 1 = s_1 (s_2 \cdots s_n) + s_1 - 1$ dir. Tümevarım yoluyla, hem $(s_2 \cdots s_n - 1)$ hem de $s_1 - 1, I$ ya aittir. Dolayısı ile $h-1 \in I$ dir (Sehgal ve Milies, 2002). ■

$\Delta_R(G, H)$ nin daha iyi bir tanımını vermek için, G de H nin sol kosetlerinin tam bir temsilcileri kümesi $\Upsilon = \{q_i\}_{i \in I}$ ile gösterilsin. Bu kümeye, H nin G de bir transversali denir ve Υ de H kosetinin bir temsilcisi olarak, G nin birim elemanının seçildiği varsayılır. Böylece, her $g \in G$ elemanı, $q_i \in \Upsilon$ ve $h_j \in H$ ile $g = q_i h_j$ biçiminde tek türlü olarak yazılır.

Teorem 2.2.3 $B_H = \{q(h-1): q \in \Upsilon, h \in H, h \neq 1\}$ kümesi R üzerinde $\Delta_R(G, H)$ nin bir bazıdır.

Kanıt: İlk olarak, bu kümenin R üzerinde lineer bağımsız olduğu gösterilmelidir. Lineer bir kombinasyon $\sum_{i,j} r_{ij} q_i (h_j - 1) = 0$, $r_{ij} \in R$ olsun. O zaman,

$$\sum_{i,j} r_{ij} q_i h_j = \sum_i \left(\sum_j r_{ij} \right) q_i \quad (2.41)$$

dir.

j nin tüm değerleri için $h_j \neq 1$ olduğundan, yukarıdaki denklemdeki ifadelerin ayrık desteğe sahip olduğu sonucu çıkar. G deki elemanlar, R den lineer bağımsız olduğundan, tüm katsayıların 0 olması gerekir. Özellikle her i, j için $r_{ij} = 0$ dir.

B_H nin de $\Delta_R(G, H)$ yi ürettiğini göstermek için $g \in G, h \in H$ olmak üzere $g(h-1)$ şeklindeki her elemanı B_H deki elemanların bir lineer birleşimi olarak yazılabileceğini kanıtlamak yeterli olacaktır. Bazı $q_i \in Y$ ve bazı $h_j \in H$ için $g = g_i h_j$ dir. Buradan,

$$g(h-1) = q_i h_j (h-1) = q_i (h_j h - 1) - q_i (h_j - 1) \quad (2.42)$$

dir (Sehgal ve Milies, 2002). ■

H, G nin bir normal alt grubu olduğunda $\Delta_R(G, H)$ için bir yorum yapılır. Eğer, $H \triangleleft G$ ise $\omega: G \rightarrow G/H$ doğal homomorfizmi, $\omega^*: RG \rightarrow R(G/H)$,

$$\omega^* \left(\sum_{g \in G} a(g) g \right) = \sum_{g \in G} a(g) \omega(g) \text{ epimorfizmine genişletilebilir.}$$

Teorem 2.2.4 $\text{Ker}(\omega^*) = \Delta_R(G, H)$ dir.

Kanıt: Y, H nin, G de bir transversali olsun. O halde, her $\alpha \in RG$ elemanı $r_{ij} \in R, q_i \in Y$

, $h_j \in H$ olmak üzere $\alpha = \sum_{i,j} r_{ij} q_i h_j$ sonlu bir toplamı olarak yazılabilir.

q_i nin G/H bölüm grubundaki görüntüsü $\bar{q}_i$ ile gösterilir ise

$$\omega^*(\alpha) = \sum_i \left(\sum_j r_{ij} \right) \bar{q}_i \quad (2.43)$$

dir. Dolayısıyla, $\alpha \in \text{Ker}(\omega^*)$ olması için gerek ve yeter şart i nin her değeri için $\sum_j r_{ij} = 0$ olmasıdır. Eğer, $\alpha \in \text{Ker}(\omega^*)$ yazılabilir ise (bazı sıfırlar ekleyerek)

$$\alpha = \sum_{i,j} r_{ij} q_i h_j = \sum_{i,j} r_{ij} q_i h_j - \sum_i \left(\sum_j r_{ij} \right) q_i = \sum_{i,j} r_{ij} q_i (h_j - 1) \in \Delta(G, H) \quad \text{dir.} \quad \text{Böylece}$$

$\text{Ker}(\omega^*) \subset \Delta_R(G, H)$ dir. Ayrıca, $\Delta_R(G, H) \subset \text{Ker}(\omega^*)$ olduğu açıktır (Sehgal ve Milies, 2002). ■

Sonuç 2.2.5 H , bir G grubunun bir normal alt grubu olsun. O halde, $\Delta_R(G, H)$, RG nin iki taraflı idealidir ve

$$\frac{RG}{\Delta_R(G, H)} \cong R(G/H) \quad (2.44)$$

dir. (Sehgal ve Milies, 2002).

Özel bir durum olarak, $\Delta_R(G)$, $G \rightarrow G/G = \{1\}$ fonksiyonu ile verilen ε epimorfizminin çekirdeği olduğu açıktır.

Buraya kadar G nin normal alt gruplarını, RG nin iki taraflı ideallerine eşleyecek şekilde, $S(G)$ den $I(RG)$ ye bir fonksiyon oluşturulmuştur. Bu fonksiyonun tersi de bir fonksiyon oluşturur.

Bir sol ideal $I \in I(RG)$ verildiğinde,

$$\nabla(I) = \{g \in G : g - 1 \in I\} \quad (2.45)$$

kümesi ele alınır ve

$$\nabla(I) = G \cap (1+I) \quad (2.46)$$

dir. $\nabla(I)$, G nin bir alt grubudur. Gerçekten, eğer $g, h \in \nabla(I)$ ise $1 = g(h-1) + g-1 \in \nabla(I)$ dir. Böylece, $gh \in \nabla(I)$ dir. Ayrıca, eğer $g \in \nabla(I)$ ise $g^{-1}-1 = -g^{-1}(g-1) \in I$ dir. Dolayısıyla $g^{-1} \in \nabla(I)$ dir. I , RG nin iki taraflı ideali ise $\nabla(I)$, G nin normal alt grubudur. Söz konusu olan iki eşleme arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.2.6 $H \in S(G)$ ise $\nabla(\Delta_R(G, H)) = H$ dir.

Kanıt: $1 \neq g \in \nabla(\Delta_R(G, H))$ olsun. O zaman, $g-1 \in \Delta_R(G, H)$ dir ve

$$g-1 = \sum_{i,j} r_{ij} q_i (h_j - 1) \quad (2.47)$$

şeklinde yazılabilir. 1 eşitliğin sol tarafında görüldüğü için sağ tarafta da görülmesi gerekir. Bu nedenle, q_i elemanlarından biri $q_1 = 1$ olmalıdır.

Sonuç olarak eşitliğin sağ tarafında $r_{1j} (h_j - 1)$ şeklinde bir terim vardır. G nin sağ taraftaki tüm elemanları ikili olarak farklı olduğundan, $g = h_j \in H$ dir. Bu nedenle, $\nabla(\Delta_R(G, H)) \subset H$ dir. Ayrıca, $H \subset \nabla(\Delta_R(G, H))$ dir (Sehgal ve Milies, 2002). ■

Bu eşlemedeki fonksiyonlar birbirinin tersi değildir. $I \in I(RG)$ olmak üzere $\Delta_R(G, \nabla(I)) \subset I$ dir. Eşitliğin geçerli olması gerekmediğini görmek için $I = RG$ yazılır ise $\nabla(RG) = \{g \in G : g-1 \in RG\} = G$ dir. Dolayısıyla $\Delta_R(G, \nabla(RG)) = \Delta_R(G) \neq RG$ dir.

Teorem 2.2.7 G ve H , $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H$ olacak şekilde iki grup olsun. Herhangi bir değişmeli R halkası için $RG \cong RH$ dir (R -cebirleri olarak).

Kanıt: G ve H için $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H$ ve R herhangi bir halka olsun. Buradan

$$RG \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}H \cong RH \quad (2.48)$$

dir (Sehgal ve Milies, 2002). ■

Tanım 2.2.8 $\sigma : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$ izomorfizması, her $\alpha \in \mathbb{Z}G$ elemanı için $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\sigma(\alpha))$ ise (veya eşdeğer olarak her $g \in G$ için $\varepsilon(\sigma(g)) = 1$ ise) *normalleşmiş izomorfizma* olarak adlandırılır (Sehgal ve Milies, 2002).

Eğer bir $\sigma : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$ izomorfizması varsa, bu halkalar arasında normalize edilmiş bir izomorfizma vardır. Gerçekten, yeni bir $\psi : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$ fonksiyonunu şu şekilde tanımlamak yeterli olacaktır: Her $\alpha = \sum_{i=1}^n r_i g_i \in \mathbb{Z}G$ elemanı için
$$\psi(\alpha) = \sum_{i=1}^n \varepsilon(\sigma(g_i))^{-1} r_i \sigma(g_i). \quad (g \in G \text{ tersinir ve } \varepsilon \text{ bir epimorfizm olduğundan } \varepsilon(\sigma(g)) \in \mathbb{Z} \text{ 'de tersinirdir.})$$
 ψ , bir normalleşmiş izomorfizmadır.

G ve H sonlu gruplar ve $\sigma : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$, bir normalleşmiş izomorfizma olsun. $\sigma(g) \in H$ ise her $g \in G$ için σ nun kendisi, kısıtlama yoluyla, H ve G grupları arasında bir izomorfizma verir.

2.3. Grup Halkalarında Polinom İdealler ve Bir Polinom İdeal Olarak Augmentasyon İdeal

Serbest bir grubun integral grup halkasının her elemanı, yerine koyma yoluyla, keyfi bir grup halkasında bir ideal tanımlar. Bu tür ideallere *polinom idealler* denir. Bir augmentasyon idealinin hem birleşmeli hem de Lie kuvvetleri polinom idealleridir.

G bir grup ve R birimli ve değişmeli bir halka olsun. RG , G deki grup çarpımı dağılımlı olarak kullanılıp tanımlanan çarpma ile G kümesi üzerinde serbest R -modüldür. Bu bölümde, R nin birimi 1_R ve G nin birimi 1_G ile gösterilir. Ancak bir karışıklık olmuyorsa sondaki R veya G eki kaldırılabilir. $r \in R$ için $r.1_G \in RG$ olduğundan R , RG nin bir alt halkasıdır.

$X = \{x_i : i \in I\}$ olmak üzere $F(X)$, x_i serbest üreteçleri üzerinde bir serbest grup olsun. $\mathbb{Z}F(X)$, $F(X)$ serbest grubunun integral grup halkası olsun. O zaman, her $\alpha : F(X) \rightarrow G$ homomorfizmi bir $\alpha^* : \mathbb{Z}F(X) \rightarrow RG$ halka homomorfizmasına,

$$\alpha^* \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}, w \in F} nw \right) = \sum (n1_R) \alpha(w) \quad (2.49)$$

şeklinde genişletilebilir. $f(x) \in \mathbb{Z}F(X)$ ve $a \in \text{Hom}(F(X), G)$ olmak üzere $a^*(f(x))$ elemanları tarafından üretilen RG nin iki taraflı ideali $A_{f,R}(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.1. $f \in \mathbb{Z}F(X)$ ve $F(X)$ bir serbest grup olmak üzere $I = A_{f,R}(G)$ ise I idealine, RG 'nin *polinom ideali* denir (Passi, 1974). ■

Örnek 2.3.2 G nin her elemanının 1_R ye eşlenmesiyle indüklenen $\varepsilon: RG \rightarrow R$, R –homorfizmi augmentasyon fonksiyonudur ve ε nun çekirdeği $\Delta_R(G)$, RG nin iki taraflı bir ideali olan augmentasyon idealidir. Bir R –modül olarak $\Delta_R(G)$, $g-1$ ($1 \neq g \in G$) elemanlarının kümesi baz olmak üzere bir serbest modüldür. Augmentasyon ideali $\Delta_R(G)$, bir polinom idealdir. Çünkü $\Delta_R(G)$, $g \in G$ elemanlarının $x-1$ polinom değerleri $g-1_R$ elemanları tarafından bir R –modül olarak üretilir (Passi, 1974).

Ayrıca, $\Delta_R(G)$ nin tüm birleşmeli kuvvetleri $i \geq 1$ olmak üzere $\Delta_R^i(G)$ polinom idealerdir. $f = (x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)\dots(x_i-1)$ olmak üzere $\Delta_R^i(G) = A_{f,R}(G)$ dir.

Augmentasyon idealinin Lie kuvvetleri $\Delta_R^i(G)$, tümevarımsal yolla şu şekilde tanımlanır: $n \in N$ ve $m \in M$ olmak üzere $[M, N]$, $[m, n] = mn - nm$ şeklinde elemanlar ile üretilen RG nin R –alt modülünü; $K \subseteq RG$ için $K.RG$, K tarafından RG de üretilen sağ ideali ($RG.K$, K tarafından üretilen sol ideali) göstermek üzere

$$\Delta_R^{(1)}(G) = \Delta_R(G), \Delta_R^{(i+1)}(G) = [\Delta_R(G), \Delta_R^{(i)}(G)]R(G). \quad (2.50)$$

dir. $g[\alpha, \beta] = [g\alpha g^{-1}, g\beta g^{-1}]g$, $g \in G$, $\alpha, \beta \in RG$ olduğundan, sağ $\Delta_R^{(i)}(G)$ idealinin her $i \geq 1$ için iki taraflı bir RG idealidir. Her $i \geq 1$ için $\Delta_R^{(i)}(G)$ bir polinom idealidir.

Örnek 2.3.4 $R = \mathbb{Z}_3$ ve $G = \mathbb{C}_3$ ise $\Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)$ şu yöntemlerle bulunur:

Birinci yöntem;

$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, $\mathbb{C}_3 = \{e, a, a^2\}$ ve $RG = \mathbb{Z}_3\mathbb{C}_3 = \left\{ \sum_{g \in G} r_g g : r_g \in \mathbb{Z}_3, g \in \mathbb{C}_3 \right\}$ dir. O halde,

$$\mathbb{Z}_3\mathbb{C}_3 = \left\{ \begin{array}{l} (\bar{0}e + \bar{0}a + \bar{0}a^2), (\bar{0}e + \bar{0}a + \bar{1}a^2), (\bar{0}e + \bar{0}a + \bar{2}a^2), \\ (\bar{0}e + \bar{1}a + \bar{0}a^2), (\bar{0}e + \bar{1}a + \bar{1}a^2), (\bar{0}e + \bar{1}a + \bar{2}a^2), \\ (\bar{0}e + \bar{2}a + \bar{0}a^2), (\bar{0}e + \bar{2}a + \bar{1}a^2), (\bar{0}e + \bar{2}a + \bar{2}a^2), \\ (\bar{1}e + \bar{0}a + \bar{0}a^2), (\bar{1}e + \bar{0}a + \bar{1}a^2), (\bar{1}e + \bar{0}a + \bar{2}a^2), \\ (\bar{1}e + \bar{1}a + \bar{0}a^2), (\bar{1}e + \bar{1}a + \bar{1}a^2), (\bar{1}e + \bar{1}a + \bar{2}a^2), \\ (\bar{1}e + \bar{2}a + \bar{0}a^2), (\bar{1}e + \bar{2}a + \bar{1}a^2), (\bar{1}e + \bar{2}a + \bar{2}a^2), \\ (\bar{2}e + \bar{0}a + \bar{0}a^2), (\bar{2}e + \bar{0}a + \bar{1}a^2), (\bar{2}e + \bar{0}a + \bar{2}a^2), \\ (\bar{2}e + \bar{1}a + \bar{0}a^2), (\bar{2}e + \bar{1}a + \bar{1}a^2), (\bar{2}e + \bar{1}a + \bar{2}a^2), \\ (\bar{2}e + \bar{2}a + \bar{0}a^2), (\bar{2}e + \bar{2}a + \bar{1}a^2), (\bar{2}e + \bar{2}a + \bar{2}a^2) \end{array} \right\}$$

$\varepsilon : RG \rightarrow R$, $\sum_{g \in G} r_g g \rightarrow \sum_{g \in G} r_g$ ile tanımlanan augmentasyon fonksiyonunda

$$Ker\varepsilon = \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \in RG : \varepsilon \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) = 0 \right\} = \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \in RG : \sum_{g \in G} r_g = 0 \right\} \quad (2.51)$$

şeklinde verilen augmentasyon fonksiyonun çekirdeği, $\Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)$ ile gösterilen

augmentasyon idealdir. $\mu = \sum_{g \in G} r_g g \in RG = \mathbb{Z}_3\mathbb{C}_3$ olsun. $\varepsilon(\mu) = \varepsilon \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) = \sum_{g \in G} r_g = 0$ ise

μ augmentasyon idealinin bir elemanıdır. O halde,

$$\varepsilon(\bar{0}e + \bar{0}a + \bar{0}a^2) = \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} = 0 \text{ olduğundan } \bar{0}e + \bar{0}a + \bar{0}a^2 \in Ker\varepsilon \text{ dir.}$$

$$\varepsilon(\bar{0}e + \bar{1}a + \bar{2}a^2) = \bar{0} + \bar{1} + \bar{2} = 0 \text{ olduğundan } \bar{0}e + \bar{1}a + \bar{2}a^2 \in Ker\varepsilon \text{ dir.}$$

$$\varepsilon(\bar{0}e + \bar{2}a + \bar{1}a^2) = \bar{0} + \bar{2} + \bar{1} = 0 \text{ olduğundan } \bar{0}e + \bar{2}a + \bar{1}a^2 \in Ker\varepsilon \text{ dir.}$$

$$\varepsilon(\bar{1}e + \bar{0}a + \bar{2}a^2) = \bar{1} + \bar{0} + \bar{2} = 0 \text{ olduğundan } \bar{1}e + \bar{0}a + \bar{2}a^2 \in Ker\varepsilon \text{ dir.}$$

$$\varepsilon(\bar{1}e + \bar{1}a + \bar{1}a^2) = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = 0 \text{ olduğundan } \bar{1}e + \bar{1}a + \bar{1}a^2 \in Ker\varepsilon \text{ dir.}$$

$$\varepsilon(\bar{1}e + \bar{2}a + \bar{0}a^2) = \bar{1} + \bar{2} + \bar{0} = 0 \text{ olduğundan } \bar{1}e + \bar{2}a + \bar{0}a^2 \in \text{Ker}\varepsilon \text{ dir.}$$

$$\varepsilon(\bar{2}e + \bar{0}a + \bar{1}a^2) = \bar{2} + \bar{0} + \bar{1} = 0 \text{ olduğundan } \bar{2}e + \bar{0}a + \bar{1}a^2 \in \text{Ker}\varepsilon \text{ dir.}$$

$$\varepsilon(\bar{2}e + \bar{1}a + \bar{0}a^2) = \bar{2} + \bar{1} + \bar{0} = 0 \text{ olduğundan } \bar{2}e + \bar{1}a + \bar{0}a^2 \in \text{Ker}\varepsilon \text{ dir.}$$

$$\varepsilon(\bar{2}e + \bar{2}a + \bar{2}a^2) = \bar{2} + \bar{2} + \bar{2} = 0 \text{ olduğundan } \bar{2}e + \bar{2}a + \bar{2}a^2 \in \text{Ker}\varepsilon \text{ dir.}$$

$$\Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3) = \left\{ \begin{array}{l} (\bar{0}e + \bar{0}a + \bar{0}a^2), (\bar{1}e + \bar{0}a + \bar{2}a^2), \\ (\bar{2}e + \bar{0}a + \bar{1}a^2), (\bar{0}e + \bar{1}a + \bar{2}a^2), \\ (\bar{1}e + \bar{1}a + \bar{1}a^2), (\bar{2}e + \bar{1}a + \bar{0}a^2), \\ (\bar{0}e + \bar{2}a + \bar{1}a^2), (\bar{1}e + \bar{2}a + \bar{0}a^2), \\ (\bar{2}e + \bar{2}a + \bar{2}a^2) \end{array} \right\} \text{ dir.}$$

İkinci yöntem;

$$\sum_{g \in G} r_g g \in \text{Ker}\varepsilon \text{ ise } \sum_{g \in G} r_g g - \sum_{g \in G} r_g = \sum_{g \in G} r_g g \text{ dir. Böylece, } \sum_{g \in G} r_g (g-1) = \sum_{g \in G} r_g g \text{ dir. O halde,}$$

$$\text{Ker}\varepsilon = \Delta_R(G) = \left\{ \sum_{g \in G} r_g (g-1) : r_g \in R \right\} \text{ dir. O halde,}$$

$$\Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3) = \{r_e(e-1) + r_a(a-1) + r_{a^2}(a^2-1), r_e, r_a, r_{a^2} \in \mathbb{Z}_3\} \text{ dir. Buradan,}$$

$$\begin{aligned} \bar{0}(e-1) + \bar{0}(a-1) + \bar{0}(a^2-1) &= \bar{0}e - \bar{0} + \bar{0}a - \bar{0} + \bar{0}a^2 - \bar{0} \\ &= \bar{0}e + \bar{0}a + \bar{0}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{0}(e-1) + \bar{0}(a-1) + \bar{1}(a^2-1) &= \bar{0}e - \bar{0} + \bar{0}a - \bar{0} + \bar{1}a^2 - \bar{1} \\ &= \bar{0}e + \bar{0}a + \bar{1}a^2 - \bar{1}e \\ &= \bar{2}e + \bar{0}a + \bar{1}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{0}(e-1) + \bar{0}(a-1) + \bar{2}(a^2-1) &= \bar{0}e - \bar{0} + \bar{0}a - \bar{0} + \bar{2}a^2 - \bar{2} \\ &= \bar{0}e + \bar{0}a + \bar{2}a^2 - \bar{2}e \\ &= \bar{1}e + \bar{0}a + \bar{2}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{0}(e-1) + \bar{1}(a-1) + \bar{0}(a^2-1) &= \bar{0}e - \bar{0} + \bar{1}a - \bar{1} + \bar{0}a^2 - \bar{0} \\
&= \bar{0}e + \bar{1}a - \bar{1}e + \bar{0}a^2 \\
&= \bar{2}e + \bar{1}a + \bar{0}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{0}(e-1) + \bar{1}(a-1) + \bar{1}(a^2-1) &= \bar{0}e - \bar{0} + \bar{1}a - \bar{1} + \bar{1}a^2 - \bar{1} \\
&= \bar{0}e + \bar{1}a - \bar{1}e + \bar{1}a^2 - \bar{1}e \\
&= \bar{1}e + \bar{1}a + \bar{1}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{0}(e-1) + \bar{1}(a-1) + \bar{2}(a^2-1) &= \bar{0}e - \bar{0} + \bar{1}a - \bar{1} + \bar{2}a^2 - \bar{2} \\
&= \bar{0}e + \bar{1}a - \bar{1}e + \bar{2}a^2 - \bar{2}e \\
&= \bar{0}e + \bar{1}a + \bar{2}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{0}(e-1) + \bar{2}(a-1) + \bar{0}(a^2-1) &= \bar{0}e - \bar{0} + \bar{2}a - \bar{2} + \bar{0}a^2 - \bar{0} \\
&= \bar{0}e + \bar{2}a - \bar{2}e + \bar{0}a^2 \\
&= \bar{1}e + \bar{2}a + \bar{0}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{0}(e-1) + \bar{2}(a-1) + \bar{1}(a^2-1) &= \bar{0}e - \bar{0} + \bar{2}a - \bar{2} + \bar{1}a^2 - \bar{1} \\
&= \bar{0}e + \bar{2}a - \bar{2}e + \bar{1}a^2 - \bar{1}e \\
&= \bar{0}e + \bar{2}a + \bar{1}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{0}(e-1) + \bar{2}(a-1) + \bar{2}(a^2-1) &= \bar{0}e - \bar{0} + \bar{2}a - \bar{2} + \bar{2}a^2 - \bar{2} \\
&= \bar{0}e + \bar{2}a - \bar{2}e + \bar{2}a^2 - \bar{2}e \\
&= \bar{2}e + \bar{2}a + \bar{2}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{1}(e-1) + \bar{0}(a-1) + \bar{0}(a^2-1) &= \bar{1}e - \bar{1} + \bar{0}a - \bar{0} + \bar{0}a^2 - \bar{0} \\
&= \bar{1}e - \bar{1}e + \bar{0}a + \bar{0}a^2 \\
&= \bar{0}e + \bar{0}a + \bar{0}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{1}(e-1)+\bar{0}(a-1)+\bar{1}(a^2-1) &= \bar{1}e-\bar{1}+\bar{0}a-\bar{0}+\bar{1}a^2-\bar{1} \\
&= \bar{1}e-\bar{1}e+\bar{0}a+\bar{1}a^2-\bar{1}e \\
&= \bar{2}e+\bar{0}a+\bar{1}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{1}(e-1)+\bar{0}(a-1)+\bar{2}(a^2-1) &= \bar{1}e-\bar{1}+\bar{0}a-\bar{0}+\bar{2}a^2-\bar{2} \\
&= \bar{1}e-\bar{1}e+\bar{0}a+\bar{2}a^2-\bar{2}e \\
&= \bar{1}e+\bar{0}a+\bar{2}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{1}(e-1)+\bar{1}(a-1)+\bar{0}(a^2-1) &= \bar{1}e-\bar{1}+\bar{1}a-\bar{1}+\bar{0}a^2-\bar{0} \\
&= \bar{1}e-\bar{1}e+\bar{1}a-\bar{1}e+\bar{0}a^2 \\
&= \bar{2}e+\bar{1}a+\bar{0}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{1}(e-1)+\bar{1}(a-1)+\bar{1}(a^2-1) &= \bar{1}e-\bar{1}+\bar{1}a-\bar{1}+\bar{1}a^2-\bar{1} \\
&= \bar{1}e-\bar{1}e+\bar{1}a-\bar{1}e+\bar{1}a^2-\bar{1}e \\
&= \bar{1}e+\bar{1}a+\bar{1}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{1}(e-1)+\bar{1}(a-1)+\bar{2}(a^2-1) &= \bar{1}e-\bar{1}+\bar{1}a-\bar{1}+\bar{2}a^2-\bar{2} \\
&= \bar{1}e-\bar{1}e+\bar{1}a-\bar{1}e+\bar{2}a^2-\bar{2}e \\
&= \bar{0}e+\bar{1}a+\bar{2}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{1}(e-1)+\bar{2}(a-1)+\bar{0}(a^2-1) &= \bar{1}e-\bar{1}+\bar{2}a-\bar{2}+\bar{0}a^2-\bar{0} \\
&= \bar{1}e-\bar{1}e+\bar{2}a-\bar{2}e+\bar{0}a^2 \\
&= \bar{1}e+\bar{2}a+\bar{0}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{1}(e-1)+\bar{2}(a-1)+\bar{1}(a^2-1) &= \bar{1}e-\bar{1}+\bar{2}a-\bar{2}+\bar{1}a^2-\bar{1} \\
&= \bar{1}e-\bar{1}e+\bar{2}a-\bar{2}e+\bar{1}a^2-\bar{1}e \\
&= \bar{0}e+\bar{2}a+\bar{1}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{1}(e-1) + \bar{2}(a-1) + \bar{2}(a^2-1) &= \bar{1}e - \bar{1} + \bar{2}a - \bar{2} + \bar{2}a^2 - \bar{2} \\
&= \bar{1}e - \bar{1}e + \bar{2}a - \bar{2}e + \bar{2}a^2 - \bar{2}e \\
&= \bar{2}e + \bar{2}a + \bar{2}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{2}(e-1) + \bar{0}(a-1) + \bar{0}(a^2-1) &= \bar{2}e - \bar{2} + \bar{0}a - \bar{0} + \bar{0}a^2 - \bar{0} \\
&= \bar{2}e - \bar{2}e + \bar{0}a + \bar{0}a^2 \\
&= \bar{0}e + \bar{0}a + \bar{0}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{2}(e-1) + \bar{0}(a-1) + \bar{1}(a^2-1) &= \bar{2}e - \bar{2} + \bar{0}a - \bar{0} + \bar{1}a^2 - \bar{1} \\
&= \bar{2}e - \bar{2}e + \bar{0}a + \bar{1}a^2 - \bar{1}e \\
&= \bar{2}e + \bar{0}a + \bar{1}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{2}(e-1) + \bar{0}(a-1) + \bar{2}(a^2-1) &= \bar{2}e - \bar{2} + \bar{0}a - \bar{0} + \bar{2}a^2 - \bar{2} \\
&= \bar{2}e - \bar{2}e + \bar{0}a + \bar{2}a^2 - \bar{2}e \\
&= \bar{1}e + \bar{0}a + \bar{2}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{2}(e-1) + \bar{1}(a-1) + \bar{0}(a^2-1) &= \bar{2}e - \bar{2} + \bar{1}a - \bar{1} + \bar{0}a^2 - \bar{0} \\
&= \bar{2}e - \bar{2}e + \bar{1}a - \bar{1}e + \bar{0}a^2 \\
&= \bar{2}e + \bar{1}a + \bar{0}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{2}(e-1) + \bar{1}(a-1) + \bar{1}(a^2-1) &= \bar{2}e - \bar{2} + \bar{1}a - \bar{1} + \bar{1}a^2 - \bar{1} \\
&= \bar{2}e - \bar{2}e + \bar{1}a - \bar{1}e + \bar{1}a^2 - \bar{1}e \\
&= \bar{1}e + \bar{1}a + \bar{1}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{2}(e-1) + \bar{1}(a-1) + \bar{2}(a^2-1) &= \bar{2}e - \bar{2} + \bar{1}a - \bar{1} + \bar{2}a^2 - \bar{2} \\
&= \bar{2}e - \bar{2}e + \bar{1}a - \bar{1}e + \bar{2}a^2 - \bar{2}e \\
&= \bar{0}e + \bar{1}a + \bar{2}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{2}(e-1) + \bar{2}(a-1) + \bar{0}(a^2-1) &= \bar{2}e - \bar{2} + \bar{2}a - \bar{2} + \bar{0}a^2 - \bar{0} \\
&= \bar{2}e - \bar{2}e + \bar{2}a - \bar{2}e + \bar{0}a^2 \\
&= \bar{1}e + \bar{2}a + \bar{0}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{2}(e-1) + \bar{2}(a-1) + \bar{1}(a^2-1) &= \bar{2}e - \bar{2} + \bar{2}a - \bar{2} + \bar{1}a^2 - \bar{1} \\
&= \bar{2}e - \bar{2}e + \bar{2}a - \bar{2}e + \bar{1}a^2 - \bar{1}e \\
&= \bar{0}e + \bar{2}a + \bar{1}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{2}(e-1) + \bar{2}(a-1) + \bar{2}(a^2-1) &= \bar{2}e - \bar{2} + \bar{2}a - \bar{2} + \bar{2}a^2 - \bar{2} \\
&= \bar{2}e - \bar{2}e + \bar{2}a - \bar{2}e + \bar{2}a^2 - \bar{2}e \\
&= \bar{2}e + \bar{2}a + \bar{2}a^2 \in \Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3)
\end{aligned}$$

Buradan, $\mathbb{Z}_3\mathbb{C}_3$ grup halkasının augmentasyon ideali

$$\Delta_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{C}_3) = \left\{ \begin{aligned} &(\bar{0}e + \bar{0}a + \bar{0}a^2), (\bar{1}e + \bar{0}a + \bar{2}a^2), \\ &(\bar{2}e + \bar{0}a + \bar{1}a^2), (\bar{0}e + \bar{1}a + \bar{2}a^2), \\ &(\bar{1}e + \bar{1}a + \bar{1}a^2), (\bar{2}e + \bar{1}a + \bar{0}a^2), \\ &(\bar{0}e + \bar{2}a + \bar{1}a^2), (\bar{1}e + \bar{2}a + \bar{0}a^2), \\ &(\bar{2}e + \bar{2}a + \bar{2}a^2) \end{aligned} \right\}$$

dir.

2.4. Augmentasyon Sıfırlayıcıları

Grup halkaları üzerindeki ilk çalışmaların çoğu augmentasyon idealinin özellikleriyle ilgiliydi. Ancak, grup halkaları, bu tezde daha cebirsel bir çalışılmıştır. Augmentasyon sıfırlayıcıları ile ilgili verilecek olan temel teoremler, çok sayıda önemli uygulamalara sahiptir.

R , bir halka ve S , R nin bir alt kümesi ise $\ell_R(S) = \ell(S)$, S nin R deki sol sıfırlayıcısı, yani;

$$\ell(S) = \{a \in R \mid aS = 0\} \quad (2.52)$$

dir. $\ell(S)$, R nin bir sol idealidir ve $\ell(S) = \ell(SR)$ dir.

Benzer şekilde, $\mathcal{U}_R(S) = \mathcal{U}(S)$ R de S nin sağ sıfırlayıcısını göstermek üzere $\mathcal{U}(S) = \mathcal{U}(RS)$ dir.

Teorem 2.4.1 $\{g_i\}$, G nin bir alt kümesi ve H , $\{g_i\}$ nin ürettiği G nin alt grubu olsun. O zaman;

$$\sum (g_i - 1).RG = \Delta_R(H).RG \quad (2.53)$$

ve

$$\sum RG.(g_i - 1) = RG.\Delta_R(H) \quad (2.54)$$

dir.

Kanıt: Sadece ilk ifade düşünülecek olursa bunu kanıtlamak için $I = \sum (g_i - 1).RH$ nin ve

$\Delta_R(H)$ nin eşit olduğunu göstermek yeterlidir. H_0 , $h-1 \in I$ olacak şekilde bu $h \in H$ elemanlarının kümesini gösterebiliriz. Eğer $h \in H_0$ ise

$$g_i h - 1 = (h - 1) + (g_i - 1)h \in I \quad (2.55)$$

ve

$$g_i^{-1} h - 1 = (h - 1) - (g_i - 1)g_i^{-1} h \in I \quad (2.56)$$

den $g_i h, g_i^{-1} h \in H_0$ dir. Buradan, her i için $g_i H_0 = g_i^{-1} H_0 = H_0$ dir ve dolayısıyla $HH_0 = H_0$ dir; çünkü H , g_i elemanları tarafından üretilmektedir. Son olarak, $1 \in H_0$ ise $H = H_0$ dir ve dolayısıyla $I = \Delta_R(H)$ dir (Pasman, 2011). ■

Teorem 2.4.2 H , G nin bir alt grubu olsun. Eğer H sonsuz ise $\ell(\Delta_R(H)) = 0 = \mathcal{U}(\Delta_R(H))$ dir. H , sonsuz ise $\hat{H}$, RG deki H nin elemanlarının toplamını göstermek üzere

- i. $\ell(\Delta_R(H)) = RG.\hat{H}$
 $\mathcal{U}(\Delta_R(H)) = \hat{H}.RG$
- ii. $\ell(\hat{H}) = RG.\Delta_R(H)$
 $\mathcal{U}(\hat{H}) = \Delta_R(H).RG$

Kanıt: Sadece sol sıfırlayıcılar üzerinden ispat ele alınsın. $\alpha \in \ell(\Delta_R(H))$ ve $\alpha \neq 0$ olsun. Bu durumda, her $h \in H$ için, $\alpha(h-1) = 0$ dir, dolayısıyla $\alpha = \alpha h$ dir. Bu, sağ çarpım ile H nin $Supp \alpha$ nın sonlu birçok elemanı ile değiştiğini gösterir ve H , bu nedenle sonludur. Eğer $\alpha = \sum a_x x$ ise $\alpha = \alpha h$ olması her x için $a_x = a_{xh}$ sonucunu verir. Böylece a_x , H nin sol kosetlerinde sabittir ve $\alpha \in RG.\hat{H}$ olur. Çünkü her $h \in H$ için $\hat{H}(h-1) = 0$, $\ell(\Delta_R(H)) = RG.\hat{H}$ dir.

H sonlu ve $\alpha \in \ell(\hat{H})$ olsun. X , G 'de H için bir sol transversal ise α , $\alpha_x \in RH$ olmak üzere $\alpha = \sum x a_x$ şekilde tek türlü yazılabilir. Böylece, $0 = \alpha \hat{H} = \sum x a_x \hat{H}$ denkleminin her x için geçerli olması için gerek ve yeter şart $\alpha_x \hat{H} = 0$ olmasıdır. Eğer, $\alpha_x = \sum a_h h$ ise $\alpha_x \hat{H} = \left(\sum a_h \right) \hat{H}$ ve $\alpha_x \hat{H} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha_x \in \Delta_R(H)$ olmasıdır (Pasman, 2011). ■

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Normal Alt Grup Uyuşumları

Sonlu bir G grubunun integral grup halkası $\mathbb{Z}G$ nin merkezi için bir baz, $\{C_i\}_{i \in I}$

G nin eşlenik sınıfları kümesi olmak üzere, $i \in I$ için $\gamma_i = \sum_{x \in C_i} x$ elemanları tarafından verilir.

Teorem 3.1.1 G ve H sonlu gruplar ve $\sigma: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$, bir normalleşmiş izomorfizma olsun. G ve H nin sınıf toplamalarını sırasıyla $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ ve $\{\delta_j\}_{j \in J}$ belirtsin. O halde, her γ_i için, $\sigma(\gamma_i) = \delta_j$ olacak şekilde tek türlü bir δ_j vardır. Yani, sırasıyla G ve H nin sınıf toplamaları arasında bire-bir bir uyum vardır (Sehgal ve Milies, 2002).

Teorem 3.1.1, G nin normal alt gruplarının latisi ile H nin normal alt gruplarının latisi arasında bire-bir uyum olduğunu kanıtlamak için kullanılır. Bir G grubunun belirli bir N alt kümesi için $\hat{N} = \sum_{x \in N} x$ dir.

Teorem 3.1.2 $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H$ ve N , G nin bir normal alt grubu olacak şekilde G ve H sonlu grup olsun. $\theta: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$ bir normalleşmiş izomorfizma olsun. O zaman, $\theta(\hat{N}) = \hat{M}$ ve $|N| = |M|$ olacak şekilde $M \triangleleft H$ vardır. $N \rightarrow M$ latislerin bir morfizmdir; öyle ki içermeleri ve böylece kesişimleri ve çarpımları korur.

Kanıt: N , G nin bir normal alt grubu olduğundan belirli eşlenik sınıflarının ayrık bir birleşimidir. Yani, $N = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_t$, $1 \leq i \leq t$ karşılık gelen sınıf toplamalarını gösteriyor ise $\hat{N} = \sum_{i=1}^t \gamma_i$ dir.

H nin bir sınıf toplamı $\theta(\gamma_i) = \omega_i$ olsun. $\hat{N}\hat{N} = |N|\hat{N}$ ve $\theta(\hat{N}) = \theta\left(\sum_{i=1}^t \gamma_i\right) = \sum_{i=1}^t \omega_i = \hat{M}$ olduğundan H nin bir M alt kümesi için $\hat{M}\hat{M} = |N|M$ dir.

Bu şu anlama gelir: M çarpma altında kapalıdır ve dolayısıyla, M bir alt gruptur.

Son olarak, M bir alt grup olduğundan $\hat{M}\hat{M} = |M|\hat{M} = |N|\hat{M}$ dir. Böylece, $|N| = |M|$ dir. $N \rightarrow M$ eşlemesinin içermeleri koruduğu doğrudan tanımından görülür (Sehgal ve Milies, 2002). ■

3.2. Metabeliyan Gruplar

Bu bölümde, bir grup halkasının augmentasyon ideali ve grup halkasının üzerinde tanımlandığı grup arasında bazı temel karakterizasyonlar ve metabeliyan grupları sınıfı için, izomorfizma problemleri incelenmiştir. Ayrıca, metabeliyan grupların kendi integral grup halkaları tarafından belirlendiği görülmüştür.

Tanım 3.2.1 Bir G grubunun hem A hem de G/A abelyen olacak şekilde normal bir A alt grubu içeriyor ise G grubuna, *metabeliyan grup* denir (Milies ve Sehgal, 2002).

$g, h \in G$ için aşağıda verilen özdeşlikler doğrulanmıştır:

$$3.2.2 \quad gh - 1 = (g - 1) + (h - 1) + (g - 1)(h - 1) \text{ dir.}$$

$(g - 1)(h - 1) \in \Delta_R^2(G)$ olduğu için, bu 3.2.3 anlamına gelir.

$$3.2.3 \quad gh - 1 \equiv (g - 1) + (h - 1) \pmod{\Delta_R^2(G)} \text{ dir.}$$

$h = g^{-1}$ ise 3.2.4 elde edilir.

$$3.2.4 \quad g^{-1} - 1 \equiv -(g - 1) \pmod{\Delta_R^2(G)}.$$

Buradan herhangi bir a tamsayısı için 3.2.5 elde edilir.

$$3.2.5 \quad g^a - 1 \equiv a(g - 1) \pmod{\Delta_R^2(G)} \text{ dir (Sehgal ve Milies, 2002).}$$

Bu nedenle, $G \ni g \mapsto (g - 1) + (\Delta_R^2(G))$ şeklinde verilen $\phi: G \rightarrow \Delta_R(G)/\Delta_R^2(G)$ fonksiyonu aslında G nin $\Delta_R(G)/\Delta_R^2(G)$ toplamsal grubuna bir homomorfizmadır. Bu açıklama, grup halka izomorfizmaları altında G/G' grubunun invariant olduğunu göstermek için kullanılır.

Teorem 3.2.6 G bir grup ve G' , G grubunun komütatör alt grubu olsun. O zaman,

$$\frac{G}{G'} \cong \frac{\Delta_{\mathbb{Z}}(G)}{\Delta_{\mathbb{Z}}^2(G)} \quad (3.1)$$

dir.

Kanıt: G grubu için $G \ni g \mapsto (g-1) + (\Delta_{\mathbb{Z}}^2(G))$ şeklinde verilen $\phi: G \rightarrow \Delta_{\mathbb{Z}}(G)/\Delta_{\mathbb{Z}}^2(G)$ fonksiyonu tanımlansın. ϕ 'nin görüntüsü abelyen bir grup olduğundan $G' \subset \text{Ker}(\phi)$ dir. Dolayısıyla, $\phi, \phi^*: G/G' \rightarrow \Delta_{\mathbb{Z}}(G)/\Delta_{\mathbb{Z}}^2(G)$ fonksiyonunu indükler. ϕ^* ın bir izomorfizma olduğunu ispatlamak bu homomorfizmanın tersinin var olduğunu göstermek ile mümkündür.

$\{g-1: g \in G\}$ elemanlarının kümesi, $\mathbb{Z}$ üzerinde $\Delta_{\mathbb{Z}}(G)$ nin bir bazıdır. Bu baz üzerinden düşünülür ise baz elemanlarına değerleri verilerek bir $\psi: \Delta_{\mathbb{Z}}(G) \rightarrow G/G'$; $\psi: (g-1) \mapsto gG', \forall g \in G$ fonksiyon tanımlanır.

$\alpha = -(a-1)(b-1) \in \Delta_{\mathbb{Z}}^2(G)$ alınır ise buradan, $\alpha = (a-1) + (b-1) - (ab-1)$ dir. Bu,

$$\psi(\alpha) = aG'.bG'.(ab)^{-1}G' = ab^{-1}ba^{-1}G' = G' \quad (3.2)$$

dir. Dolayısıyla, $\alpha \in \text{Ker}(\psi)$ dir. Bu $\Delta_{\mathbb{Z}}^2(G) \subset \text{Ker}(\psi)$ olduğunu gösterir. Böylece, $\psi, \psi^*: \Delta_{\mathbb{Z}}(G)/\Delta_{\mathbb{Z}}^2(G) \rightarrow G/G'$ homomorfizmasını indükler. ϕ^* ile ψ^* ın birbirinin tersi olduğunu görülür (Sehgal ve Milies, 2002). ■

Teorem 3.2.6'nın ispatından $\text{Ker}(\phi) = G'$ olduğu görülür.

$\text{Ker}(\phi) = \{g \in G: g-1 \in \Delta_{\mathbb{Z}}^2(G)\} = G \cap (1 + \Delta_{\mathbb{Z}}^2(G))$ olduğundan şu sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.7 G bir grup olsun ve G', G nin komütatör alt grubunu gösterebilir. Buradan

$$G \cap (1 + \Delta_{\mathbb{Z}}^2(G)) = G' \quad (3.3)$$

dir (Sehgal ve Milies, 2002).

Sonuç 3.2.8 G ve H , $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H$ olacak şekilde gruplar olsun. Buradan,

$$\frac{G}{G'} \cong \frac{H}{H'} \quad (3.4)$$

dir.

Kanıt: $\theta: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$ bir normalleşmiş izomorfizma olsun. $\Delta_{\mathbb{Z}}(G)$ ve $\Delta_{\mathbb{Z}}(H)$, ilgili augmentasyon fonksiyonların çekirdekleri olduklarından ve θ normalize edildiğinden, $\theta(\Delta_{\mathbb{Z}}(G)) = \Delta_{\mathbb{Z}}(H)$ ve $\theta(\Delta_{\mathbb{Z}}^2(G)) = \Delta_{\mathbb{Z}}^2(H)$ dir. Böylece,

$$\frac{G}{G'} \cong \frac{\Delta_{\mathbb{Z}}(G)}{\Delta_{\mathbb{Z}}^2(G)} \cong \frac{\Delta_{\mathbb{Z}}(H)}{\Delta_{\mathbb{Z}}^2(H)} \cong \frac{H}{H'} \quad (3.5)$$

dir (Sehgal ve Milies, 2002).

Teorem 3.2.9 N , bir G grubunun normal bir alt grubu olsun. Eğer bir $g \in G$ elemanı $g-1 \in \Delta_{\mathbb{Z}}(G)\Delta_{\mathbb{Z}}(G, N)$ şeklinde ise $g \in N'$ dir.

Kanıt: $g-1 \in \Delta_{\mathbb{Z}}(G)\Delta_{\mathbb{Z}}(G, N)$ elemanı $(x-1)y(n-1)$ $x, y \in G, n \in N$ biçimindeki elemanların çarpımlarının bir lineer birleşimidir. $(x-1)y = (xy-1) - (y-1)$ olduğundan

$$g-1 = \sum_{i,j} a_{ij} (x_i-1)(n_j-1), a_{ij} \in \mathbb{Z}, x_i \in G, n_j \in N \text{ dir.}$$

Υ , G de N nin birim elemanı içeren transversali olsun. O zaman, her $x \in G, t \in \Upsilon$ ve $n \in N$ olmak üzere $x = tn$ şeklinde tek türlü yazılır. $\mathbb{Z}G$ ye lineer olarak genişleyen $\theta: G \rightarrow N$ fonksiyonu

$$\theta: x = tn \rightarrow n \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlansın. O halde, $\theta: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}N$ lineer bir eşlemedir ancak çarpma altında muhtemel bir homomorfizm değildir.

$$g-1 = \sum_{i,j} a_{ij} (x_i - 1)(n_j - 1), a_{ij} \in \mathbb{Z}, x_i \in G, n_j \in N \quad \text{eşitliğinde} \quad x_i = t_i m_i, m_i \in N$$

yazılıp bu denklemin iki tarafına da θ uygulanırsa

$$\theta(g) - 1 = \sum_{i,j} a_{ij} (m_i - 1)(n_j - 1) \quad (3.7)$$

dir. Bunun nedeni ise

$$\begin{aligned} \theta((t_i m_i - 1)(n_j - 1)) &= \theta(t_i m_i n_j - t_i m_i - n_j + 1) \\ &= m_i n_j - m_i - n_j + 1 \\ &= (m_i - 1)(n_j - 1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

dir.

$$\text{Mod } N \text{ ye düşünülecek olursa } g-1 = \sum_{i,j} a_{ij} (x_i - 1)(n_j - 1), a_{ij} \in \mathbb{Z}, x_i \in G, n_j \in N$$

eşitliğinden $\bar{g} - \bar{1} = 0$ elde edilir. Böylece $g \in N$ dir. Dolayısıyla, $\theta(g) = g$ ve

$$g-1 = \sum_{i,j} a_{ij} (m_i - 1)(n_j - 1) \in \Delta_R^2(N) \quad (3.9)$$

dir. Sonuç olarak, $g \in N \cap (1 + \Delta_{\mathbb{Z}}^2(N)) = N'$ dir (Sehgal ve Milies, 2002). ■

Sonuç 3.2.10 N , bir G grubunun bir normal alt grubu olsun. O halde,

$$N / N' \cong \Delta_{\mathbb{Z}}(N) / \Delta_{\mathbb{Z}}(G) \Delta_{\mathbb{Z}}(G, N) \quad (3.10)$$

dir.

Kanıt: $\phi: N \rightarrow \Delta_{\mathbb{Z}}(N) / \Delta_{\mathbb{Z}}(G) \Delta_{\mathbb{Z}}(G, N)$ fonksiyonu

$$n \mapsto 1 - n + \Delta_{\mathbb{Z}}(G)\Delta_{\mathbb{Z}}(G, N) \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlansın. ϕ örtendir ve Teorem 3.2.9'dan $\text{Ker}(\phi) = N'$ dir. Bu nedenle,

$$N / N' \cong \Delta_{\mathbb{Z}}(N) / \Delta_{\mathbb{Z}}(G)\Delta_{\mathbb{Z}}(G, N) \quad (3.12)$$

dir (Sehgal ve Milies, 2002). ■

Teorem 3.2.11 G ve H , $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H$ olacak şekilde sonlu gruplar olsun. N , G nin bir normal alt grubu ve M , H nin N ye karşılık gelen normal alt grubu olsun. Buradan:

- i. $\mathbb{Z}[G/N] \cong \mathbb{Z}[H/M]$ dir.
- ii. $N/N' \cong M/M'$ dir.
- iii. Eğer N abelyen ise M de abelyendir.

Kanıt: (i) $\hat{N}$ nin sıfırlayıcısı

$$\text{Ann}(\hat{N}) = \{x \in \mathbb{Z}G : x\hat{N} = 0\} = \Delta_{\mathbb{Z}}(G, N) \quad (3.13)$$

dir. Eğer, $\theta: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$ bir normalleşmiş izomorfizmayı ifade ediyorsa $\theta(\hat{N}) = \hat{M}$ dir ve

bu yüzden, $\theta(\Delta_{\mathbb{Z}}(G, N)) = \Delta_{\mathbb{Z}}(H, M)$ dir. Böylece θ , bir

$\theta^*: (\mathbb{Z}G / \Delta_{\mathbb{Z}}(G, N)) \rightarrow \mathbb{Z}H / \Delta_{\mathbb{Z}}(H, M)$ izomorfizmasına indükler, yani

$$\mathbb{Z}[G/N] \cong \mathbb{Z}G / \Delta_{\mathbb{Z}}(G, N) \cong \mathbb{Z}H / \Delta_{\mathbb{Z}}(H, M) \cong \mathbb{Z}[H/M] \quad (3.14)$$

dir.

(ii) Sonuç 3.2.10'dan

$$N / N' \cong \Delta_{\mathbb{Z}}(N) / \Delta_{\mathbb{Z}}(G)\Delta_{\mathbb{Z}}(G, N) \cong \Delta_{\mathbb{Z}}(M) / \Delta_{\mathbb{Z}}(H)\Delta_{\mathbb{Z}}(H, M) \cong M / M' \quad (3.15)$$

dir.

(iii) N abelyen ise $N' = 1$ dir ve ii.'den $N \cong M / M'$ dir. $|N| = |M|$ olduğu için $M' = 1$ olduğu görülür ve buradan M nin abelyendir (Sehgal ve Milies, 2002). ■

Teorem 3.2.12 G bir sonlu grup ve H , $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H$ olacak şekilde başka bir grup olsun. O halde,

$$\frac{G}{G''} \cong \frac{H}{H''} \quad (3.16)$$

dir (Sehgal ve Milies, 2002).

Sonuç 3.2.13 G bir sonlu metabeliyen grup ve H , $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H$ olacak şekilde başka bir grup olsun. O halde, $G \cong H$ dir.

Kanıt: G metabeliyen grup olduğundan G' abelyendir. Verilen $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H$ izomorfizması nedeniyle $|G| = |H|$, $G / G' \cong H / H'$ dir. Böylece, $|G'| = |H'|$ dir. Ayrıca, Sonuç 3.2.10'dan

$$G' \cong \frac{\Delta_{\mathbb{Z}}(G, G')}{\Delta_{\mathbb{Z}}(G) \Delta_{\mathbb{Z}}(G, G')} \cong \frac{\Delta_{\mathbb{Z}}(H, H')}{\Delta_{\mathbb{Z}}(H) \Delta_{\mathbb{Z}}(H, H')} \cong \frac{H'}{H''} \quad (3.17)$$

dir. Buradan, $H'' = 1$ dir ve $G \cong H$ dir (Sehgal ve Milies, 2002). ■

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Grup halkaları teorisinin grup teorisi ve halka teorisi ile doğrudan bağlantıları vardır; çünkü grup halkaları üzerindeki sonuçlar ile gruplar ve halkalar hakkındaki sonuçlar arasında yakın ilişkiler vardır. Öte yandan, bir R -modül M nin bir RG -modül yapılmasını sağlayan ve R -modül sınıfları ile RG -modül sınıfları arasındaki bazı ilişkilerin incelenmesini sağlayan bir cebirsel yapı ortaya konmuştur (Uc vd., 2016). Bu tezde, hem G nin bir normal alt grubu için bir RG -alt modül hem de bir RG -alt modül için G nin bir normal alt grubunun bulunması ile ilgili yöntemler incelenmiştir. Ayrıca, G nin her normal alt grubu H için $|H|$, R de terslenebilir ise M nin bir RG -alt modül direkt toplananın olduğu araştırılmıştır.

N , G nin bir normal alt grubu olmak üzere RG den $R(G/N)$ ye $\pi\left(\sum_{g \in G}(r_g g)\right) = \sum_{g \in G}(r_g gN)$ şeklinde verilen doğal halka epimorfizmasını π nin çekirdeği $\Delta_R(G, N)$ dir ve $\Delta_R(G, N)$, RG de iki taraflı idealdir. Ayrıca, N nin normal alt grup olması nedeniyle,

$$\Delta_R(G, N) = \Delta_R(N).RG = RG.\Delta_R(N) \quad (4.1)$$

dir.

I , RG nin iki taraflı ideali olsun. O halde;

$$G \cap (1+I) = \{g \in G : 1-g \in I\} \quad (4.2)$$

dir ve $G \cap (1+I)$, bir normal alt gruptur. Buradan, Γ , RG nin iki taraflı idealler kümesi ve Λ , G nin normal alt gruplarının kümesi olmak üzere, sırasıyla, $\Psi(I) = G \cap (1+I)$ ve $\Pi(N) = \Delta_R(G, N)$ ile tanımlanan Γ dan Λ ya bir Ψ fonksiyonu ve Λ dan Γ ya bir Π fonksiyonu tanımlanabilir. Burada, $\Delta_R(G, N)$, halka homomorfizmasının çekirdeği olduğu için $g-1 \in \Delta_R(G, N)$ olduğu zaman $g \in N$ dir. G nin bir normal N alt grubu için:

$$\Psi(\Pi(N)) = \Psi(\Delta_R(G, N)) = G \cap (1 + \Delta_R(G, N)) = N \quad (4.3)$$

dir. O zaman $\Psi\Pi$ birimdir. Ancak $\Pi\Psi$ birim değildir. RG nin kendisi düşünüldüğünde $\Psi(RG) = G$ ama $\Pi(G) = \Delta_R(G, G) = \Delta_R(G) \neq RG$ dir. Bu tezde, $\Pi\Psi$ nin hangi alt grup ve idealler sınıfı için birim olduğu ile ilgili yapılan çalışmalar araştırılmıştır.

Bu noktadan sonra, RG , RG nin sıfırdan farklı bir I ideali için $G \cap (1 + I) \neq \{e\}$ koşulunu sağlayan bir grup halkasını göstermektedir.

Teorem 4.1 I , RG nin sıfırdan farklı bir basit ideali olsun. O halde, $H = G \cap (1 + I)$ bir basit gruptur.

Kanıt: $H \neq \{e\}$ ve sıfırdan farklı bir $r \in \Delta_R(G, H)$ seçilsin. Buradan, $r_h \in RG$ ve $h-1 \in I$ olmak üzere $r = \sum_{h \in H} r_h(h-1)$ dir. O halde, $\Delta_R(G, H) \subseteq I$ dir. Öte yandan, I basit olduğundan dolayı $e-1 \in \Delta_R(G, H)$ ve $\Delta_R(G, H) = I$ dir. H_2, H_1 in bir öz normal alt grubu olsun. O halde, $\Delta_R(G, H_2)$ sıfırdan farklıdır ve $\Delta_R(G, H_2) = \Delta_R(G, H) = I$ dir. Böylece,

$$H_2 = \Psi(\Pi(H_2)) = \Psi(\Delta_R(G, H_2)) = \Psi(\Delta_R(G, H)) = H \quad (4.4)$$

dir (Alkan, 2017). ■

Teorem 4.2 H basit bir grup olsun. O zaman, $I = \Delta_R(G, H)$, RG nin bir basit idealidir.

Kanıt: H bir basit grup ve $I_1, \Delta_R(G, H)$ nin bir ideali olsun. O zaman

$$H_1 = G \cap (1 + I_1) \subseteq G \cap (1 + I) = \Psi(\Delta_R(G, H)) = H \quad (4.5)$$

oldüğundan dolayı $H_1 = \{e\}$ veya $H_1 = H$ dir.

Eğer $H_1 = \{e\}$ olması hipoteze göre I_1 sıfır ideal olmadığı için imkansızdır.

Eğer $H_1 = H$ ise o zaman $I = \Delta_R(G, H) = \Delta_R(G, H_1) \subseteq I_1$ dir. Bu, I nin basit olduğu anlamına gelir (Alkan, 2017). ■

Teorem 4.3 S , G nin basit alt gruplarının bir kümesi olsun. $\sum_{H \in S} \Delta_R(G, H) \subseteq Soc_{RG}(RG)$ dir; burada, $Soc_{RG}(RG)$, RG nin basit sağ ideallerinin toplamıdır.

Kanıt: H , G nin bir basit alt grubu olsun. $\Delta_R(G, H)$ bir basit idealdir ve dolayısıyla

$\sum_{H \in S} \Delta_R(G, H) \subseteq Soc_{RG}(RG)$ dir (Alkan, 2017). ■

Teorem 4.3'te ifade edilen kapsamanın tersi doğru değildir. Basit ve abelyen bir G grubunu için $S = \{G\}$ 'dir ve $\Delta_R(G, G) = \Delta_R(G) \neq RG$ dir.

M , değişmeli R halkası üzerinde bir modül olsun. $End_R M$, M nin endomorfizm halkasını belirtmek üzere R -modül M yi bir RG -modül yapan cebirsel yapı şu şekildedir: τ , G den $End_R(M)$ ye bir grup homorfizması olsun. Her $g \in G, m \in M$ için mg çarpımı $mg = \tau(g)m$ olarak tanımlanır. Bu çarpma ile $m_1, m_2 \in M$ için $(m_1 + m_2)g = m_1g + m_2g$ dir. Böylece, bir R -modül bir RG -modül olarak düşünebilir (Uc vd., 2016).

Eğer her $g \in G$ için $\tau(g) = 1_{End_R(M)}$ ise RG -modülünün yapısı R -modülünün yapısı ile aynıdır. $\tau(G) \subseteq End_R(M)$ dir. Ayrıca, RG -modül M nin bir R -alt modülü N olmak üzere, her $f \in \tau(G)$ için $f(N) \subseteq N$ oluyor ise N , τ -tam invariant olarak adlandırılır (Uc vd., 2016).

Teorem 4.4 N , RG -alt modül M nin bir R -alt modülü olsun. O halde, $NG = \sum_{g \in G} Ng$,

N yi içeren bir minimal RG -alt modüldür.

Kanıt: NG bir RG –alt modüldür. NG nin N yi içeren minimal bir RG –alt modül olduğunu gösterilmelidir. N_1 in $N \subseteq N_1 \subseteq NG$ olacak şekilde bir RG –alt modül olsun. N_1 , N yi içeren bir RG –alt modülü olduğundan bir $n \in N$ elemanı ve her $g \in G$ için $ng \in N_1$ dir. Dolayısıyla, $N_1 = NG$ olduğu anlamına gelir (Alkan, 2017). ■

Teorem 4.5 N , M nin bir R –alt modülü olsun. O zaman, N nin bir RG –alt modül olması için gerek ve yeter şart N nin τ –tam invaryant olmasıdır (Alkan, 2017). ■

Teorem 4.6 N , M nin bir R –alt modülü olsun. O zaman, $(NG :_R M)G \subseteq (NG :_{RG} M)$ dir.

Kanıt: r , $(N :_R M)$ ve $g \in G$ olsun. $Mr \subseteq N$ olduğundan dolayı $Mrg \subset Ng$ dir. Buradan, $(NG :_R M)G \subseteq (NG :_{RG} M)$ dir (Alkan, 2017). ■

Teorem 4.7 H , G nin bir normal alt grubu ve M , bir RG –modül olsun. O zaman, MH , M nin bir RG –alt modülüdür.

Kanıt: $m_h \in M$ olmak üzere $x = \sum_{h \in H} m_h h \in MH$ ve $g \in G$ olsun. O zaman, $xg = \sum_{h \in H} m_h hg$ dir ve böylece her $h \in H$ için $hg = gh_g$ olacak şekilde $h_g \in H$ vardır. $h_1, h_2 \in H$ için $h_{1g} \neq h_{2g}$ ise $h_1 \neq h_2$ dir. Buradan, $H = \{h_g : h \in H\}$ dir ve $xg = \sum_{h \in H} m_h h_g$ dir. $m_h g \in M$ olduğundan dolayı $xg \in MH$ dir ve MH bir RG –alt modüldür (Alkan, 2017). ■

Belirli bir normal alt grup $H = \{h_1 = e, h_2, \dots, h_t\}$ için $H = \sum_{h \in H} h = e + h_2 + \dots + h_t$ ve

$|H| = t.1_R$ gösterimleri ile $H.H = H.|H|$ dir.

Teorem 4.8 H , G nin bir normal alt grubu ve M , bir RG –modül olsun. O zaman, MH , M nin bir RG –alt modülüdür. Özel olarak, $|H|$, R ' de terslenebilir ise MH , M nin direk toplam RG –alt modülüdür.

Kanıt: Öncelikle, $g \in G$ için $Hg = gH$ olduğunun gösterilmesi gerekmektedir.

$Hg = (e + h_2 + \dots + h_t)g = eg + h_2g + \dots + h_tg$ dir. Her $h_i \in H$ için $h_i g = gh_{ig}$ olacak şekilde $h_{ig} \in H$ vardır ve $Hg = ge + gh_{2g} + \dots + gh_{tg} = gH$ dir.

$g \in G$ ve $m \in M$ olmak üzere $x = mH \in MH$ olsun. $xg = mHg = mgH \in MH$ dir.

Buradan, MH nin M nin bir RG –alt modülü olduğu anlamına gelir.

$e_H(m) = \frac{mH}{|H|}$ olarak tanımlayalım. Bir $g \in G$ için

$$e_H(mg) = \frac{mgH}{|H|} = \frac{mHg}{|H|} = \left(\frac{mH}{|H|} \right) g = e_H(m)g \quad (4.6)$$

dir. Buradan, e_H , bir RG –homorfizmadır. İspatı tamamlamak için e_H nin idempotent olduğunu kanıtlamak yeterlidir.

$m \in M$ olsun. Buradan

$$e_H^2(m) = e_H(e_H(m)) = \frac{e_H(m)H}{|H|} = \left(\frac{mH}{|H|} \right) \left(\frac{H}{|H|} \right) = \frac{mH|H|}{|H||H|} = e_H(m) \quad (4.7)$$

O halde, $e_H(M) = MH|H|^{-1}$, M nin direkt toplanan RG –alt modülüdür (Alkan, 2017). ■

Teorem 4.9 M , bir RG –modül ve H , G nin bir normal alt grubu olsun. O halde,

$$\Delta_M(H) = \left\{ \sum_{h \in H} a_h(h-1) \mid a_h \in M \right\} \quad (4.8)$$

M nin bir RG –alt modülüdür ve $\Delta_M(H) = M \cdot \Delta_R(G, H)$.

Kanıt: $\sum_{h \in H} a_h(h-1) \in \Delta_M(H)$ ve $g \in G$ olsun. H , G nin bir normal alt grubu olduğundan

her $h \in H$ için $gh_g = hg$ olacak şekilde $h_g \in H$ vardır. O halde,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{h \in H} a_h (h-1) \right) &= \sum_{h \in H} a_h (hg - g) \\
&= \sum_{h \in H} a_h (gh_g - g) \\
&= \sum_{h \in H} a_h g_h (h_g - 1) \in \Delta_M(H)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Bu nedenle, $\Delta_M(H)$, M nin bir RG –alt modülüdür.

$x = \sum_{h \in H} r_h (h-1) \in \Delta_R(G, H)$ olsun. $m \in M$ için, $mx = \sum_{h \in H} mr_h (h-1) \in \Delta_M(H)$ dir. $\sum_{h \in H} a_h (h-1) \in \Delta_M(H)$ olsun. O zaman, $\sum_{h \in H} a_h (h-1) \in M \cdot \Delta_R(G, H)$ dir. Buradan, $\Delta_M(H) = M \cdot \Delta_R(G, H)$ dir (Alkan, 2017). ■

Ω , G nin tüm normal alt gruplarının kümesi ve Φ , M nin $\beta(H) = \Delta_M(H)$ ile tanımlanan tüm alt modüllerinin kümesi olmak üzere Ω dan Φ ye bir β fonksiyonu tanımlansın. M_1 , M nin bir RG –alt modülü olsun. O zaman, $I = (M_1 :_{RG} M)$, RG nin iki taraflı bir idealidir ve buradan, $H = G \cap (1 + I) = G \cap (1 + (M_1 :_{RG} M))$, G nin bir normal alt grubudur.

Φ den Ω ya bir δ fonksiyonu $\delta(N) = G \cap (1 + (N_1 :_{RG} M))$ şeklinde tanımlansın. $M = RG$ ise $\delta(\beta)$ fonksiyonu ψ fonksiyonuna (sırasıyla Π) eşittir. Bu nedenle, $\beta\delta$ birim olmak zorunda değildir. Diğer yandan, $\delta\beta$ nın ne zaman birim olduğu incelenebilir.

Modül teorisinde, A halkasının I , J idealleri ve bir A –modül V için $VI \subseteq VJ$ ise $I \subseteq J$ olmak zorunda değildir. Bir A halkasının I , J idealleri için $VI \subseteq VJ$ ise $I \subseteq J$ oluyor ise A –modül V , A için $\star$ özelliğine sahiptir. Değişmeli bir A halkası üzerinde sonlu olarak üretilmiş bir çarpım modülü A için $\star$ özelliğine sahiptir. Buradan, aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 4.10 M , RG için $\star$ özelliğine sahip bir RG –modül ve δ, β , yukarıda ifade edilen fonksiyonlar olsun. O zaman, $\delta\beta$ birimdir.

Kanıt: H , G nin bir normal alt grubu olsun. Teorem 4.9' dan $\Delta_R(G, H) \subseteq (\Delta_M(H) :_{RG} M)$ dir. Diğer yandan,

$$M \cdot (\Delta_M(H) :_{RG} M) \subseteq \Delta_M(H) = M \cdot \Delta_R(G, H) \quad (4.10)$$

ve RG için $\star$ özelliğine göre $(\Delta_M(H) :_{RG} M) \subseteq \Delta_R(G, H)$ dir. Böylece, $(\Delta_M(H) :_{RG} M) = \Delta_R(G, H)$ ve buradan,

$$\delta\beta(H) = G \cap (1 + (\Delta_M(H) :_{RG} M)) = G \cap (1 + \Delta_R(G, H)) = H \quad (4.11)$$

dir (Alkan, 2017). ■

Teorem 4.11 H , $\Delta_M(G) \neq \Delta_M(H)$ olacak şekilde G nin bir maksimal normal alt grubu ve δ, β , yukarıda ifade edilen fonksiyonlar olsun. O zaman, $\delta\beta(H) = H$ dir.

Kanıt: H , $\Delta_M(G) \neq \Delta_M(H)$ olacak şekilde G nin bir maksimal normal alt grubu olsun. O zaman, $\Delta_R(G, H) \subseteq (\Delta_M(H) :_{RG} M)$ dir ve $\Delta_M(H)$ öz ideal olduğundan $(\Delta_M(H) :_{RG} M)$ RG nin bir öz idealidir. Bu nedenle,

$$H = G \cap (1 + \Delta_R(G, H)) \subseteq G \cap (1 + (\Delta_M(H) :_{RG} M)) \quad (4.12)$$

dir. Buradan, $H = G \cap (1 + (\Delta_M(H) :_{RG} M))$ veya $G = G \cap (1 + (\Delta_M(H) :_{RG} M))$ dir. Eğer $G = G \cap (1 + (\Delta_M(H) :_{RG} M))$ ise $G \subseteq (1 + (\Delta_M(H) :_{RG} M))$ dir ve her $g \in G$ için $M(g-1) \subseteq \Delta_M(H)$ dir. Bu, $\Delta_M(G) \subseteq \Delta_M(H)$ olduğu anlamına gelir. Ancak, bu bir çelişkidir. Buradan, $\delta\beta(H) = G \cap (1 + (\Delta_M(H) :_{RG} M)) = H$ dir (Alkan, 2017). ■

5. SONUÇ

Grup halkalarında augmentasyon idealler yardımıyla grup halkasının üzerinde tanımlı olduğu grubun alt grupları, grup halkasının bazı idealleri ve grup halkasının üzerinde tanımlanan modüller ve alt modüller arasındaki ilişkiler cebirde ilgi duyulan problemler ortaya koymuştur. Bu problemler üzerinde çalışılarak, grup halkaları ve grup halkalarının üzerinde tanımlı olduğu grupların arasındaki ilişkileri belirleyen, alt grup, modül, alt modül ve idealler arasında temel bazı uyumlar elde edilmiştir. Bu tezde, grup halkalarını ve grup halkalarının üzerinde tanımlı olduğu grupların karakterize edilmesini sağlayan bu uyumlardan bahsedilmiştir.

Öncelikle, bir G grubu ve R halkası verildiğinde, G nin tüm alt-gruplarının kümesi $S(G)$ ile ve RG nin tüm sol ideallerinin kümesi $I(RG)$ ile gösterilmek üzere G nin normal alt gruplarını, RG nin iki taraflı ideallerine eşleyecek şekilde, $S(G)$ den $I(RG)$ ye bir fonksiyon vardır. Bu fonksiyonun tersi de bazı özel şartlar ile birlikte bir fonksiyon oluşturur. G nin normal alt gruplarının ve RG nin iki taraflı ideallerini karşılıklı olarak birbirlerine eşlenmesi ile elde edilen uyum, grup halkalarında alt gruplar, idealler ve alt modüller arasındaki başka uyumların araştırılması ile ilgili soruların sorulmasını sağlamıştır.

“ H , bir G grubunun bir normal alt grubu olsun. O halde, $\Delta_R(G, H)$, RG nin iki taraflı idealidir ve $\frac{RG}{\Delta_R(G, H)} \cong R(G/H)$ (Milies ve Sehgal, 2002) dir.” sonucu ile G nin normal alt gruplarını, RG nin iki taraflı ideallerine eşleyecek şekilde, $S(G)$ den $I(RG)$ ye bir fonksiyon oluşturulmuştur. Bu fonksiyonun tersi de bir fonksiyon oluşturur. Bir sol ideal $I \in I(RG)$ verildiğinde $\nabla(I) = G \cap (1 + I)$, G nin bir alt grubudur. Anlatılan bu iki eşleme arasındaki ilişki “ $H \in S(G)$ ise $\nabla(\Delta_R(G, H)) = H$ dir.” ile verilmiştir. Burada ifade edilen normal alt gruplar ve idealler arasındaki uyum, grup halkalarında başka uyum ve karakterizasyonların araştırılmasına neden olmuştur.

G ve H , $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H$ olacak şekilde iki grup ve herhangi bir değişmeli R halkası için $RG \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}H \cong RH$ dir. $RG \cong RH$ ise $G \cong H$ dir. G ve H , sonlu gruplar olduğunda $\sigma: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$, bir normalleşmiş izomorfizma ise $\sigma(g) \in H$ ve $g \in G$ elemanı için σ nun kendisi, kısıtlama yoluyla, H ve G grupları arasında bir izomorfizma

verir. Sırasıyla G ve H nin sınıf toplamları $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ ve $\{\delta_j\}_{j \in J}$ ile gösterilmek üzere her γ_i için, $\sigma(\gamma_i) = \delta_j$ olacak şekilde tek bir δ_j vardır. Yani sırasıyla G ve H 'nin sınıf toplamları arasında bire-bir bir uyum vardır. Bu sonuç, G nin normal alt grupları ile H nin normal alt grupları arasında bir uyum olduğunu kanıtlamak için kullanılır. G nin normal alt grupları ile H nin normal alt grupları arasındaki uyum incelendiğinde “ $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H$ ve N , G nin bir normal alt grubu olacak şekilde G ve H sonlu grup olsun. $\theta: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$ bir normalleşmiş izomorfizma olsun. O zaman, $\theta(\hat{N}) = \hat{M}$ ve $|N| = |M|$ olacak şekilde $M \triangleleft H$ vardır. $N \rightarrow M$ latislerin bir morfizmdir; öyle ki içermeleri ve böylece kesişimleri ve çarpımları korur.” sonucu elde edilir.

Grup halkasının üzerinde tanımlandığı grup ile grup halkasının idealleri arasındaki temel bazı ilişkiler “ G bir grup ve G' , G grubunun komütatör alt grubu olsun. O halde, $\frac{G}{G'} \cong \frac{\Delta_{\mathbb{Z}}(G)}{\Delta_{\mathbb{Z}}^2(G)}$ dir.” ve “ G bir grup olsun ve G' , G nin komütatör alt grubunu gösterebilir. Buradan $G \cap (1 + \Delta_{\mathbb{Z}}^2(G)) = G'$.” sonuçları ile ifade edilmiştir.

$\theta: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$ bir normalleşmiş izomorfizma olsun. $\Delta_{\mathbb{Z}}(G)$ ve $\Delta_{\mathbb{Z}}(H)$ augmentasyon fonksiyonun çekirdeği olduğundan ve θ normalize edildiğinden, $\theta(\Delta_{\mathbb{Z}}(G)) = \Delta_{\mathbb{Z}}(H)$ ve $\theta(\Delta_{\mathbb{Z}}^2(G)) = \Delta_{\mathbb{Z}}^2(H)$ dir. Buradan $\frac{G}{G'} \cong \frac{\Delta_{\mathbb{Z}}(G)}{\Delta_{\mathbb{Z}}^2(G)} \cong \frac{\Delta_{\mathbb{Z}}(H)}{\Delta_{\mathbb{Z}}^2(H)} \cong \frac{H}{H'}$ dir ve “ G ve H grup olmak üzere $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H$ olacak şekilde gruplar olsun. Buradan, $\frac{G}{G'} \cong \frac{H}{H'}$ dir.” sonucu elde edilir.

Bu teorem geliştirilerek “ N , bir G grubunun normal alt grubu olsun. $N/N' \cong \Delta_{\mathbb{Z}}(N)/\Delta_{\mathbb{Z}}(G)\Delta_{\mathbb{Z}}(G, N)$.” sonucu elde edilir.

Sonlu gruplar üzerine tanımlanan integral grup halkalarının alt halkaları ile bu integral grup halkalarının üzerinde tanımlandığı grupların ve bu grupların normal alt gruplarının arasındaki önemli bir karakterizasyon da “ N , G nin normal bir alt grubu ve M , H nin normal alt grubu olsun. O halde; $\mathbb{Z}[G/N] \cong \mathbb{Z}[H/M]$ dir. Ayrıca $N/N' \cong M/M'$ dir. Eğer N abelyen ise M de abelyendir.” şeklinde ifade edilir.

Yukarıda ifade edilen grup halkalarının idealleri ve grup halkalarının üzerinde tanımlı olduğu grubun alt grupları ve normal alt grupları arasındaki uyumların sayesinde

grup halkaları üzerinde tanımlı modüller ile grup halkalarının üzerinde tanımlı olduğu grupların normal alt grupları arasında da “ M , bir RG –modül ve H , G nin bir normal alt grubu olsun. O halde, $\Delta_M(H) = \left\{ \sum_{h \in H} a_h (h-1) \mid a_h \in M \right\}$, M nin bir RG –alt modülüdür ve $\Delta_M(H) = M \cdot \Delta_R(G, H)$ dir.” sonuçları elde edilmiştir.

G nin tüm normal alt gruplarının kümesinden M nin $\beta(H) = \Delta_M(H)$ tarafından tanımlanan tüm alt modüllerinin kümesine bir β fonksiyonu tanımlansın. M_1 , M nin bir RG –alt modülü ve $I = (M_1 :_{RG} M)$, RG ’nin iki taraflı idealidir ve $H = G \cap (1 + I) = G \cap (1 + (M_1 :_{RG} M))$, G nin bir normal alt grubudur. $\delta(N) = G \cap (1 + (N_1 :_{RG} M))$ ile tanımlanan M nin $\beta(H) = \Delta_M(H)$ tarafından tanımlanan tüm alt modüllerinin kümesinden G ’nin tüm normal alt gruplarının kümesine bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonlar yardımı ile “ H , $\Delta_M(G) \neq \Delta_M(H)$ olacak şekilde G nin bir maksimal normal alt grubu ve δ, β , yukarıda ifade edilen fonksiyonlar olsun. O zaman, $\delta\beta(H) = H$ dir.” sonucu elde edilir.

Sonuç olarak, bu tezde G ve H bir grup olmak üzere G nin normal alt grupları ile H nin normal alt grupları arasında, grup halkasının üzerinde tanımlandığı grup ve bu grubun normal alt grupları ile grup halkasının idealleri arasında ve grup halkasının üzerinde tanımlandığı grubun normal alt grupları ile grup halkası üzerinde tanımlanan modüllerin arasında uyumlar anlatılmıştır. Ayrıca sonlu gruplar üzerine tanımlanan integral grup halkalarının alt halkaları ile bu integral grup halkalarının üzerinde tanımlandığı grupların ve bu grupların normal alt grupları arasında olan uyum gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- Alkan, M., 2017. On the relations between subgroups of a group and submodules of modules over group rings. *Book Series: AIP Conference Proceedings*, 1863, 300008.
- Anderson, F.W., Fuller, K.R., 1992. *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York.
- Artamonov, V.A., Bovdi, A.A., 1991. Integral group rings: Group of units and classical K-Theory. *Journal of Soviet Mathematics*, 57, 2931-2958.
- Auslander, M., 1957. On regular group rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8, 658-664.
- Brauer, R., 1927. *Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen*, Sitzungsberichte Akademie Berlin, 221-228.
- Cayley, A., 1854. VII. On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 7, 40-47.
- Connell, I.G., 1963. On the group ring. *Canadian Journal of Mathematics*, 15, 650-685.
- Çallıalp, F., 2009. *Değişmeli halkalar ve modüller*, Birsen Yayınevi, İstanbul, 111-182.
- Çallıalp, F., 2013. *Örneklerle Soyut Cebir*, Birsen Yayınevi, İstanbul, 70-252.
- Deskins, W.E., 1956. Finite abelian groups with isomorphic group algebras. *Duke Mathematical Journal*, 23, 35-40.
- Farkas, D., 1973. Self-injective group algebras. *Journal of Algebra*, 25, 313-315.
- Frobenius, F.G., 1897. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, Sitz. Kön. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 944-1015.
- Gupta, N.D., 1987. *Free Group Rings*, A.M.S. Contemporary Mathematics, Series 66.
- Higman, G., 1940. The units of group-rings. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2, 231-248.
- Jennings, S.A., 1941. The structure of the group ring of a p-group over a modular field. *Transactions of the American mathematical society*, 50, 175-185.
- Kaplansky, I., 1957. *Problems in the theory of rings*, Nas-NRC Published 502, Washington, 1-3.
- Kaplansky, I., 1970. *Problems in the theory of rings*, revisited, The American Mathematical Monthly, 77, 445-454.

- Karpilovsky, G., 1986. *Group and Semigroup Rings*, North-Holland, Amsterdam.
- Karpilovsky, G., 1987. *The Jacobson Radical of Group Algebras*, North-Holland, Amsterdam.
- Karpilovsky, G., 1989. *Unit groups of group rings*, Longman Scientific and Technical, New York.
- Karpilovsky, G., 1990. *Induced modules over group algebras*, Elsevier.
- Lam, T.Y., 1991. *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag, New York.
- Lambeck, J., 1966. *Lectures on Rings and Modules*, Blaisdell Publishing Company Waltham, Toronto, London.
- Lang, S., 1984. *Algebra*, Addison-Wesley, Redwood.
- McLaughlin, J.E., 1958. A note on regular group rings. *Michigan Mathematical Journal*, 5, 127-128.
- Milies, C.P., 1976. Integral group rings with nilpotent unit groups. *Canadian Journal of Mathematics*, 28, 954-960.
- Milies, C.P., 1981. *A glance at the early history of group rings*, in Groups-St. Andrews ed. By Campbell C.M. and Robinson, E.F., 1982. London Mathematical Society Lecture Notes Series 71, Cambridge Univ. Press, London, 270-280.
- Molien, T., 1892. Ueber Systeme höherer complexer Zahlen. *Mathematische Annalen*, 41, 83-156.
- Nicholson, W.K., Yousif, M.F., 2003. *Quasi-frobenius rings*, Cambridge University Press.
- Osofsky, B.L., 1966. A generalization of quasi-Frobenius rings. *Journal of Algebra*, 4, 373-387.
- Öneş, O., Alkan, M., Uc, M., 2020. On submodules of modules over group rings. *Filomat*, 34, 575-582.
- Parmenter, M.M., 1984. Indecomposability of ideals in group rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 91, 543.
- Passi, I.B.S., 1974. *Group Rings and their augmentation ideals*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.
- Passman, D.S., 1965. *Isomorphic groups and group rings*, Pacific Journal of Mathematics, 15, 561-583.
- Passman, D.S., 1976. *What is a group ring?*, The American Mathematical Monthly, 83, 173-185.

- Passman, D.S., 1977. Observations on group rings. *Communications in Algebra*, 5, 1119-1162.
- Passman, D.S., 1977. *The Algebraic Structure of Group Rings*, Wiley-Interscience, New York.
- Passman, D.S., 1979. The Jacobson Radical of a Group Ring of a Locally Solvable Group. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3, 169-192.
- Passman, D.S., 1979. The Jacobson radical of a group ring of a locally solvable group. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3, 208-210.
- Passman, D.S., 1983. It's essentially Maschke's theorem. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 13, 37-54.
- Passman, D.S., 1984. Infinite crossed products and group-graded rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 284, 707-727.
- Passman, D.S., 2011. *The algebraic structure of group rings*. Courier Corporation.
- Ritter, J., Sehgal, S.K., 1990. Integral group rings with trivial central units. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 327-329.
- Sasaki, H., 1982. Green correspondence and transfer theorems of Wielandt type for G -functors. *Journal of Algebra*, 79, 98-120.
- Sehgal, S.K., 1975. Certain algebraic elements in group rings. *Archiv der Mathematik*, 26, 139-143.
- Sehgal, S.K., 1978. *Topics in group rings*, Marcel Dekker Incorporated.
- Sehgal, S.K., Milies, C.P., 2002. *An introduction to group rings*, Kluwer Academic Publishers.
- Thévenaz, J., Webb, P., 1995. The structure of Mackey functors. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1865-1961.
- Uc, M., Ones, O., Alkan, M., 2016. On modules over groups. *Filomat*, 30, 1021-1027.
- Whitcomb, A., 1968. *The group ring problem*, Doctoral dissertation, University of Chicago, Department of Mathematics.