

GRUPLAR ve GEOMETRİLER

BARIŞ ÇAĞRI BAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRUPLAR ve GEOMETRİLER

BARIŞ ÇAĞRI BAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

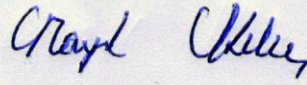
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. NAYİL KILIÇ

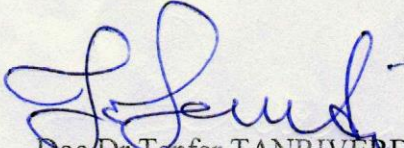
SİNOP – 2015

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

Bariş Çağrı BAL, tarafından hazırlanan “Gruplar ve Geometriler” başlıklı bu çalışma, 03.08.2015 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.



Doç.Dr.Nayil KILIÇ
Jüri Başkanı

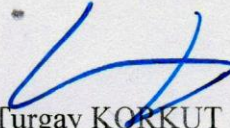


Doç.Dr.Tanfer TANRIVERDİ
Jüri Üyesi



Yrd.Doç.Dr.Yılmaz Mehmet DEMİRCİ
Jüri Üyesi

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.



Doç.Dr.Turgay KORKUT
Enstitü Müdürü

GRUPLAR ve GEOMETRİLER

ÖZET

Grup teorisinde, sonlu gruplar üzerinde birçok çalışma yapılmıştır. Önemli çalışmalardan birisi de bütün sonlu ve basit grupların geometrik incelenmesidir. Bu tezde de sonlu gruplar ve geometriler üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, soyut cebirde yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Bu tezde kullanılan bazı temel bilgiler ikinci bölümde verilmektedir. Üçüncü bölümde, projektif özel lineer gruplar tanımlanmakta ve bunlarla ilgili özellikler verilmektedir. Dördüncü bölümde, ilişki ve koset geometrinin tanım ve önermeleri verilmektedir. Beşinci bölümde, bilinen bir sonlu geometriden yeni bir geometri elde etmek için kullanılan iki yöntem verilmektedir. Son bölümde ise bu yöntemlerden biri kullanılarak M_{23} grubunun rank-5 geometrisinden yeni bir geometri elde edilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Projektif Özel Lineer Grup, İlişki Geometri, Koset Geometri, Sonlu Gruplar

GROUPS and GEOMETRIES

ABSTRACT

In group theory, there have been many studies on finite groups. One of important studies is geometric examination of all finite and simple groups. In this thesis, finite groups and geometries are studied.

This thesis consists of six chapters. In the first part, studies of abstract algebra are given. Some basic information used in this thesis is presented in the second part. In the third part, projective special linear groups are defined and properties related to them are given. In the fourth chapter, definitions and propositions of incidence and coset geometries are given. In the fifth section, two methods are given that are used to obtain a new geometry of a finite known geometry. In the last section, using one of these methods, a new geometry is obtained from rank-5 geometry of the group M_{23} .

Key Words: Projective Special Linear Group, Incidence Geometry, Coset Geometry, Finite Groups

TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca bana her konuda sonsuz özveri ve gönüllülükle yardımcı olan, her zaman desteğini hissettiren, değerli fikirleriyle çalışmalarına yön vererek tezimin her aşamasında bana ışık tutan ve kendisi gibi değerli bir insanla çalışma fırsatını bana sunduğu için minnettar olduğum çok değerli hocam sayın Doç. Dr. Nayıl KILIÇ'a sonsuz teşekkür ederim.

Tezimin değerlendirilmesinde katkılarını sunan çok değerli hocalarım Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ ve Yrd. Doç. Dr. Yılmaz Mehmet DEMİRCİ'ye teşekkür ederim.

Eğitim hayatımın en büyük mimarları olan, aldığım her kararda bana sonuna kadar maddi ve manevi destek olarak her daim yanımda duran, girdiğim hiçbir yolda beni yalnız bırakmayan, sonsuz ilgi ve sevgileriyle sıcacık aileme; annem Permin BAL'a, babam Erdal BAL'a, kardeşim Ahmet Onur BAL'a ve değerlim Didem ÖZDEMİR'e sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOLLER ve KISALTMALAR	vi
ŞEKİLLER ve ÇİZELGELER LİSTESİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. BAZI TANIM ve KAVRAMLAR	3
3. PROJEKTİF ÖZEL LİNEER GRUPLAR	6
4. İLİŞKİ GEOMETRİ ve KOSET GEOMETRİ	23
4.1. Grup Teori Notasyonları	23
4.2. İlişki Sistemleri ve Geometriler	24
4.3. Alt Geometriler ve Kesmeler	27
4.4. Morfizmalar	27
4.5. Rezidüler	28
4.6. Temel Özellikler	30
4.7. Bir Geometrinin Buekenhout Diyagramı	32
4.8. Koset Geometriler ve Tits Algoritması	36
4.9. Bir Koset Geometrinin Özellikleri	38
5. SONLU GRUPLAR İÇİN YENİ GEOMETRİLER	46
5.1. Giriş	46
5.2. Terimler ve Notasyonlar	50
5.3. Bir Graphın Komşu Geometrisi	51
5.4. Ana Sonuç	55

	Sayfa No
5.5. $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in Özellikleri ve İnşası: Teorem 5.4.3'ün İspatı	59
5.6. Neumaier Teoreminin Bir Genellemesi	68
6. UYGULAMA	78
7. TARTIŞMA ve SONUÇ	80
KAYNAKLAR	81
ÖZGEÇMİŞ	84

SEMBOLLER ve KISALTMALAR

SEMBOLLER

S_n	Simetrik grup
A_n	Alterne grup
C_n	Mertebesi n olan cyclic grup
$ X $	X 'in eleman sayısı
(a, b)	a ve b sayılarının en büyük ortak böleni
$\mathbb{Z}_n$	Denklik sınıfı kümesi
$\langle a, b \rangle$	a ve b elemanları tarafından üretilen grup
Hg	Sağ koset
$Aut(G)$	G 'nin otomorfizmalar grubu
G/H	Bölüm grubu
$[G : H]$	H 'nin G içindeki indexi
G_x	x 'in G içindeki sabitleyeni (stabilizerı)
$A \times B$	A ve B 'nin direk çarpımı
Γ_F	F 'nin rezidüsü
$\cong$	İzomorfizma
$*$	İlişki bağıntısı
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter şart
$\Rightarrow$	İse
$\emptyset$	Boş küme
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim

ŞEKİLLER ve ÇİZELGELER LİSTESİ

ŞEKİLLER	Sayfa No
Şekil 2.1 Petersen graphı	5
Şekil 2.2 Complete graph örnekleri	5
Şekil 4.1 Küpün chamber sistemi	26
Şekil 4.2 Bir geometrinin Buekenhout diyagramı	33
Şekil 4.3 Küpün rank-3 Buekenhout diyagramı	36
Şekil 4.4 Küpün rank-2 {köşe, kenar}-kesiminin ilişki diyagramı	36
Şekil 4.5 Petersen graphının diyagramı	36
Şekil 5.1 Icosahedronun diyagramı	46
Şekil 5.2 Icosahedron	47
Şekil 5.3 Icosahedronun kenarlarının çıkarılması ile oluşan yeni geometrinin diyagramı	47
Şekil 5.4 Great Dodecahedron	48
Şekil 5.5 Small Stellated Dodecahedron	48
Şekil 5.6 Dodecahedron	49
Şekil 5.7 Dodecahedronun diyagramı	49
Şekil 5.8 Dodecahedronun kenarlarının çıkarılması ile oluşan yeni geometrinin diyagramı	49
Şekil 5.9 Icosahedronun Neumaier teoremine göre diyagramı	50
Şekil 5.10 Dodecahedronun Neumaier teoremine göre diyagramı	50
Şekil 6.1. M_{23} grubunun M_{22} , $L_3(4):2$, $2^4:(3 \times S_5)$, $2^4:((A_4 \times 3):2)$, A_8 alt gruplarından oluşan rank-5 diyagramı	78
Şekil 6.2. M_{23} grubunun M_{22} , M_{22} , $2^4:(3 \times S_5)$, $2^4:((A_4 \times 3):2)$, A_8 alt gruplarından oluşan yeni geometrinin rank-5 diyagramı	78

SONLU GRUPLAR

1. GİRİŞ

Sonlu grup teorisinde geometrik izahla ilgili birçok çalışma yapılmıştır. İlk defa gruplar geometrisi kavramını Tits ortaya atmış ve daha sonra Tits, Lie-Chevalley tipteki sonlu basit grupların geometrileri üzerinde çalışmıştır. Buekenhout 1979'da geometri ve gruplar için diyagramlar oluşturmuş ve Buekenhout 1985'te sporadik gruplar için diyagramlar sunmuştur. Dehon ve Leemans 2002'de koset geometrilerinin inşasını yapmıştır. İlk önce Cayley paket programı ile grupların uygulamalı geometri hesaplamalarını yapmış ve daha sonra bu programın gelişmiş şekli olan Magma bilgisayar programını kullanarak çalışmışlardır.

$PSL(2, q)$ grupları 1830'lu yıllarda Galois tarafından inşa edildi. $PSL(n, q)$ grupları Camille Jordan tarafından 1870'te oluşturuldu. Leemans, $PSL(3, 4)$ grubunun geometrilerini incelemiştir.

C. Lefevre-Percsy, N. Percsy ve D. Leemans 1993'te sonlu gruplar için yeni geometrilerin nasıl elde edilebileceği konusunda çalışmışlardır. Oberwolfach'ın Mayıs 1989'da sunduğu "Sonlu Gruplar", beşinci bölümde yer alan ana teoremler arasında verilmektedir (başlık: "Sonlu gruplar için yeni geometriler"). Leemans sonlu grup geometrileri üzerinde yaptığı son araştırmalarda bu sonuçların ayrıntılı ispatlarıyla ve onların uygulamaları ile daha detaylı ilgilenmiştir.

Ayrıca Leemans 2001'de bilinen sonlu geometri olan M_{23} Mathieu grubunun rank-5 geometrisinden yeni geometri elde etme üzerine çalışmıştır.

Nayil Kılıç 2006 yılında M_{23} için rankı 3 olan rezidülü bağlantılı geometriler, yine 2006 yılında M_{23} için bazı rank-3 rezidülü bağlantılı geometriler, 2010 yılında M_{23} ve M_{24} Mathieu gruplarının rank-2 geometrileri, 2014 yılında M_{11} Mathieu grubunun tüm rank-2 primitif geometrileri üzerine çalışmalar yapmıştır. Nayil Kılıç ve Rowley 1997 yılında M_{11} ve M_{12} için sonlu grup geometrileri, 2002 yılında M_{22} için rezidülü bağlantılı geometriler, 2003 yılında M_{22} için rank-2 ve rank-3 rezidülü bağlantılı geometriler, 2010 yılında M_{22} için rezidülü primitif bağlantılı geometrilerin maksimal rankları üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Bu tezin amacı, sonlu gruplardan nasıl yeni geometriler elde edilebileceğidir. Üçüncü bölümde, son bölümde verilen örnekte adı geçen projektif özel lineer gruplar açıklanmıştır. Dördüncü bölümde, ilişki ve koset geometrinin tanımları ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Beşinci bölümde, yeni geometrilerin nasıl üretilebileceği konusunda ayrıntılı bir şekilde çalışılmıştır. Son bölümde ise beşinci bölümde verilen bir teorem için bir örnek verilmiştir.

2. BAZI TANIM ve KAVRAMLAR

Tanım 2.1. Sonlu sayıda elemana sahip olan gruplara sonlu gruplar denir (Humphreys J.F., 1996).

Tanım 2.2. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, n elemanlı bir kümenin tüm permütasyonları grubuna, n elemanlı simetrik grup denir ve $S(n)$ veya S_n şeklinde gösterilir. n elemanlı simetrik grubun eleman sayısı $n!$ 'dir (Humphreys J.F., 1996).

Tanım 2.3. $n > 2$ olmak üzere, bir $S(n)$ grubunun çift permütasyonlarının oluşturduğu alt gruba alterne grup denir ve $A(n)$ veya A_n ile gösterilir. Bir alterne grubun eleman sayısı $\frac{n!}{2}$ 'dir (Humphreys J.F., 1996).

Tanım 2.4. Bir grubun birim ve kendisinden başka normal alt grubu yoksa bu gruba simple (basit) grup denir (Humphreys J.F., 1996).

Tanım 2.5. G bir grup ve $a \in G$ olsun. Bu durumda $C(a) = \{xax^{-1} : x \in G\}$ kümesi G içinde a elemanının conjugacy classı (eşlenik sınıfı) olarak adlandırılır (Humphreys J.F., 1996).

Tanım 2.6. G sonlu abelyen bir p -grup olsun. G grubunun her bir elemanının orderı p ile bölünüyorsa G grubunun elementary abelyen olduğu söylenir. Ayrıca bir elementary abelyen p -grubunun formu $C_p \times \dots \times C_p$ şeklindedir (Humphreys J.F., 1996).

Önerme 2.7. $\mathbb{F}$ sonlu bir cisim olsun. Bir p asalı ve bir n pozitif tamsayısı var öyle ki $\mathbb{F}$ cisminin p^n elemanı vardır. $\mathbb{F}$ cisminin toplamsal grubu elementary abelyen p -gruptur (Humphreys J.F., 1996).

Önerme 2.8. Bir sonlu cismin çarpımsal grubu cyclictir (Humphreys J.F., 1996).

Önerme 2.9. G orderı n olan sonlu cyclic bir grup olsun. n 'nin herhangi d bölüneni için G , tam olarak d elemanlı bir G_d alt grubuna sahiptir. $x^d = 1$ denklemini sağlayan x grup elemanlarının sayısı d 'dir ve bunlar tam olarak G_d alt grubunun elemanlarıdır (Humphreys J.F., 1996).

Tanım 2.10. H ve N bir grup olsun. H ile N 'nin cyclic genişlemesi H 'nin bir cyclic grup olması durumunda meydana gelir (Humphreys J.F., 1996).

Önerme 2.11. “Cayley Teoremi” Her grup simetrik grubun bir alt grubuna izomorftur (Humphreys J.F., 1996).

Tanım 2.12. G bir grup ve $a \in G$ olsun. $N(a) = \{x \in G : xax^{-1} = a\}$ kümesi G içinde a elemanının normalizerı (normalleyeni) olarak adlandırılır (Humphreys J.F., 1996).

Tanım 2.13. Bir G grubu için bir composition serisi bir subnormal seri olup, tekrarlanmalar içermez. Yalnızca tekrarlanan terimlerde inceltiler (Humphreys J.F., 1996).

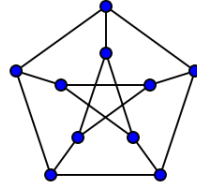
Teorem 2.14. “Jordan-Hölder Teoremi” Eğer bir grup composition serisine sahipse herhangi iki composition serileri izomorf olur (Humphreys J.F., 1996).

Tanım 2.15. “Afin Uzak” V vektör uzak olmak üzere, bir afin uzak bir $l: V \times A \rightarrow A$, (v, a) elemanlarını $v + a$ 'ya götüren dönüşüm ile aşağıdaki şartları sağlayan bir A nokta kümesidir (Anonim, 2015).

1. $\forall a \in A$ için $0 + a = a$ 'dır.
2. $\forall v, w \in V$, $\forall a \in A$ için $v + (w + a) = (v + w) + a$ 'dır.
3. $\forall a \in A$ için $V \rightarrow A: v \rightarrow v + a$ bir birebir-örten dönüşümdür.

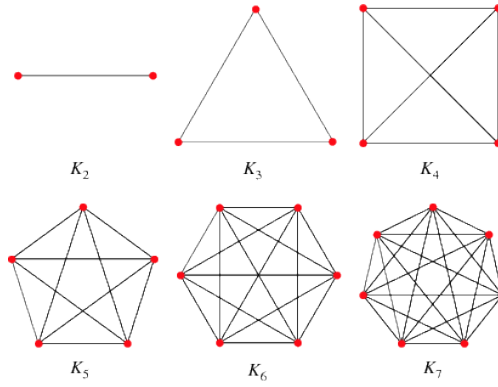
Tanım 2.16. “Graph” Kenarlar olarak adlandırılan farklı köşelerin (sıralanmamış) çiftlerinin bir ailesi ile köşelerinin bir kümesidir. Eğer $\{x, y\}$ bir kenar ise x ve y köşeleri komşudur denir. Ayrıca y , x 'in komşuluğudur denir. Bir graph (V, E) ikilisi ile tanımlanır ki burada V köşelerin kümesi, E kenarların kümesidir. Ayrıca $(V, \sim)$ ile de tanımlanabilir, burada $\sim$ komşuluk bağıntısıdır. $x \sim y$ ile $\{x, y\} \in E$ aynı anlamdadır (Anonim, 2015).

Tanım 2.17. “Petersen Graphı” Graph teoride 10 köşeye ve 15 kenara sahip doğrusal olmayan bir graphtır (Anonim, 2015).



Şekil 2.1. Petersen graphı

Tanım 2.18. Bir complete graph basitçe doğrusal olmayan bir graph olup, bu graph içinde farklı köşelerin her bir çifti bir tek kenar ile birleştirilir. Burada N pozitif tamsayı olmak üzere K_N ile gösterilir (Anonim, 2015).



Şekil 2.2. Complete graph örnekleri

Tanım 2.19. $(G, \bullet)$ ve $(H, *)$ iki grup ve $f : G \rightarrow H$ bir fonksiyon olsun. $\forall a, b \in G$ için $f(a \bullet b) = f(a) * f(b)$ ise f 'ye G 'den H 'ye bir homomorfizma denir.

Tanım 2.20. G ve H iki grup ve $f : G \rightarrow H$ bir dönüşüm olsun. Eğer,

i) f birebir ve örten,

ii) f homomorfizma

koşulları sağlanıyorsa f 'ye G ile H arasında bir izomorfizma denir. Eğer G ve H grupları arasında bir izomorfizma varsa bu gruplara izomorf gruplar denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

3. PROJEKTİF ÖZEL LİNEER GRUPLAR

Önerme 3.1. $\mathbb{F}$ sonlu bir cisim olsun. $\mathbb{F}$ ’nin karakteristiği olan bir p asal tamsayısı var öyle ki $\mathbb{F}$ toplama işlemi altında bir elementary abelyen p -grup olsun. Buradan hareketle bazı pozitif k tamsayısı için $\mathbb{F}$ ’nin $q = p^k$ elemanı vardır. $\mathbb{F}$ orderı $q-1$ olan çarpımsal cyclic gruptur ve $\mathbb{F}$ ’nin sıfırdan farklı herhangi bir elemanının orderı $q-1$ ’i böler. Ayrıca, $q-1$ ’in herhangi bir d böleni için $\mathbb{F}$ ’nin içinde orderı d olan bir elemanı vardır. $\mathbb{F}$ ’de $\lambda^n = 1$ denkleminin çözümlerinin sayısı n ve $q-1$ ’in ortak bölenlerinin en büyüğüdür.

İspat: Önerme 2.7 ve Önerme 2.8’den $\mathbb{F}$ ’nin toplamsal grubu bir elementary abelyen p -grup ve çarpım grubunun orderı $q-1$ olan cyclic gruptur. Ayrıca, Önerme 2.9’dan orderı n olan bir cyclic grubun n ’nin her d böleni için orderı d olan elemanın var olduğu biliniyor. $\mathbb{F}$ ’de $\lambda^n = 1$ denkleminin çözümlerinin sayısı bulunsun:

Önce, t ’nin $q-1$ ile ortak böleni olmayan bir tamsayı olduğu farz edilsin. Yani, t ve $q-1$ aralarında asal iki sayı olsun. $(t, q-1) = 1$ ’dir. r ve s tamsayıları vardır öyle ki

$$rt + s(q-1) = 1 \quad (1.1)$$

yazılabilir. Eğer $\mu \in \mathbb{F}$ için $\mu^t = 1$ şartı sağlanıyor ise ve ayrıca grup cyclic olup, $\mu^{q-1} = 1$ olduğundan

$$\mu = \mu^1 = \mu^{rt+s(q-1)} = (\mu^t)^r (\mu^{q-1})^s = 1^r 1^s = 1 \quad (1.2)$$

eşitliği elde edilir. Buradan, eğer t , $q-1$ ile aralarında asal ise $\lambda^t = 1$ denkleminin tek çözümü vardır ve bu çözüm $\mathbb{F}$ ’de $\lambda = 1$ çözümüdür.

Şimdi d , n ve $q-1$ ’in ortak bölenlerinin en büyüğü olsun. Buradan, herhangi d tamsayısı için $(n, q-1) = d$ yazılabilir. En büyük ortak bölen özelliğinden $n = md$ yazılabilir, burada m tamsayıdır. n ve $q-1$ bu iki sayının en büyük ortak böleni olan d ’ye bölündüğünde elde edilen m ve $\frac{q-1}{d}$ ’nin 1’den başka ortak böleni yoktur. Yani, bu iki sayı aralarında asal olur. Önceki tartışmada aralarında asal olan sayıların tek çözümünün olduğu gösterilmişti. $\mathbb{F}$ ’de $\lambda^n = 1$ denkleminin çözümleri $(\lambda^d)^m = 1$

denkleminin çözümleridir. Bu durum için bu çözüm $\lambda^d = 1$ denkleminin çözümleridir. Önerme 2.9'dan $\lambda^d = 1$ denkleminin çözümlerinin sayısı d 'dir.

Tanım 3.2. Herhangi pozitif k tamsayısı ve herhangi p asal tamsayısı için $\mathbb{F}$ orderı $q = p^k$ olan sonlu bir cisim olsun. Herhangi pozitif n tamsayısı için genel lineer grup, elemanları $\mathbb{F}$ 'den alınan $n \times n$ tipindeki terslenebilir matrislerin kümesi olup, matrislerdeki çarpma işlemi ile bir grup oluşturur. Bu grup $GL(n, q)$ ile gösterilir.

Önerme 3.3. $GL(n, q)$ grubunun orderı

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \dots (q^n - q^{n-1}) \text{ 'dir.} \quad (1.3)$$

İspat: $GL(n, q)$ grubunun elemanları terslenebilir matrisler olduğundan determinantı sıfırdan farklı $n \times n$ tipindeki matrisler dikkate alınmalıdır. Bu ispat yapılırken matrisin bütün sütunları ele alınarak yapılacaktır. İlk olarak, eğer A matrisinin determinantı sıfırdan farklı ise A matrisinin ilk sütunu sıfır vektörü olamaz. Bu nedenle, ilk sütun için $q^n - 1$ tane farklı hal mevcuttur. Eğer ikinci sütun ilkinin bir katı ise ikinci sütundan bu ilkinin katı çıkarılırsa determinantı sıfır olan bir matris elde edilir. Bu nedenle, ikinci sütun için $q^n - q$ tane farklı hal mevcuttur. Bu yolla devam edilirse görülebilir ki A 'nın i . sütunu önceki $i - 1$ sütunun bir lineer kombinasyonu olmayacak şekilde $q^n - q^{i-1}$ yolla seçilebilir. Bu yolla ispat tamamlanır.

Örnek 3.4. $GL(2, 2)$ grubu 6 elemana sahip ve simetrik grup olan S_3 grubuna izomorftur. $GL(2, 3)$ grubunun 48, $GL(2, 4)$ grubunun 180 elemanı vardır.

$$|GL(2, 2)| = (2^2 - 1)(2^2 - 2) = 6$$

$$|GL(2, 3)| = (3^2 - 1)(3^2 - 3) = 48$$

$$|GL(2, 4)| = (4^2 - 1)(4^2 - 4) = 180$$

Tanım 3.5. Determinantı 1 olan matrislerden oluşan ve $SL(n, q)$ ile gösterilen özel lineer grup, $GL(n, q)$ grubunun bir alt grubudur.

Açıklama 3.6. Herhangi sonlu bir cisim q orderına sahip olsun, burada $q = p^k$ şeklinde bir asalın kuvvetidir. Eleman sayıları aynı olan herhangi iki cisim izomorftur (Fraleigh B., 1967). Bu cisim genellikle $GF(q)$ olarak gösterilir ve $GF(q)$ grubunun sıfırdan farklı elemanları ile oluşan bir çarpımsal grup $GF(q)^*$ ile gösterilir. Ayrıca, $SL(n, q)$, $A \rightarrow \det A$ ile tanımlanan $GL(n, q) \rightarrow GF(q)^*$ homomorfizmasının çekirdeğidir. Determinantları sıfırdan farklı olan $q-1$ tane matris ihtimali mevcut olduğundan homomorfizma teoremi $GL(n, q)$ içinde $SL(n, q)$ grubunun indexinin $q-1$ olduğunu söyler ve $SL(n, q)$, $GL(n, q)$ grubunun bir normal alt grubudur. Ayrıca, $GF(q)^*$ çarpım grubu $GL(n, q) / SL(n, q)$ bölüm grubuna izomorftur. Yani, $SL(n, q)$ grubunun orderı;

$$|SL(n, q)| = \frac{|GL(n, q)|}{q-1}, \text{ dir.} \quad (1.4)$$

Örnek 3.7. 3 elemanlı cisim içinde 2 tane sıfırdan farklı eleman vardır. Böylece $SL(2, 3)$ 'ün $GL(2, 3)$ grubunun içindeki indexi 2 ve orderı 24'tür. 4 elemanlı cisim içinde 3 tane sıfırdan farklı eleman var ve $SL(2, 4)$, 60 elemanlıdır.

$$|SL(2, 3)| = \frac{|GL(2, 3)|}{3-1} = \frac{48}{2} = 24$$

$$|SL(2, 4)| = \frac{|GL(2, 4)|}{4-1} = \frac{180}{3} = 60$$

Tanım 3.8. Herhangi n pozitif tamsayısı için $n \times n$ tipindeki skaler matrisler, bazı $\lambda \in GF(q)^*$ için λI_n formunda olup, $SL(n, q)$ grubu içindedir.

Açıklama 3.9. Skaler matrisler her bir matris ile değişmelidir ve skaler matrislerden oluşan herhangi alt grup, $GL(n, q)$ grubunun herhangi alt grubunun bir normal alt grubudur.

Tanım 3.10. Projektif özel lineer grup, $SL(n, q) / Z$ bölüm grubudur ki burada Z , $SL(n, q)$ içinde skaler matrislerin alt grubudur. $PSL(n, q)$ ile gösterilir.

Eğer λI_n matrisinin determinanı 1 ise, Önerme 3.1'den ($\lambda^n = 1$) Z alt grubunun elemanlarının sayısının n ve $q-1$ 'in en büyük ortak böleni olan d olduğu biliniyor. Böylece $PSL(n, q)$ grubunun orderı

$$|PSL(n, q)| = \frac{(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \dots (q^n - q^{n-1})}{(q-1)d} \quad (1.5)$$

olur. Özellikle $n=2$ ve bir q tek sayısı için,

$$|PSL(2, q)| = \frac{q(q^2 - 1)}{2} \quad (1.6)$$

olur.

Örnek 3.11. $PSL(2, 3)$ grubunun orderı $|PSL(2, 3)| = \frac{3 \cdot (3^2 - 1)}{2} = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12$ 'dir. Bu grup A_4 alterne grubuna izomorftur. Bunu görmek için $\mathbb{Z}_3$ üzerinde determinanı 1 olan iki matris alınsın.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Buradan $A^2 = B^2 = -I$ ve $BAB^{-1} = A^{-1}$ eşitlikleri vardır. Bu matrisler orderı 8 olan Quaternion grupların şartlarını sağlar. Yani, orderı 8 olan Quaternion grubunu üretir. Şimdi $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alınsın, burada $X^3 = I$ 'dir. Buradan $XAX^{-1} = B$ ve $XBX^{-1} = AB$ denklemlerinin sağlandığı da görülebilir.

$\langle A, B, X \rangle$, $SL(2, 3)$ grubunun bir alt grubudur ki orderı 8 olan bir grup ile orderı 3 olan bir grubun cyclic genişlemesidir. $\langle A, B, X \rangle$, $SL(2, 3)$ grubuna eşittir.

Şimdi Z , $SL(2, 3)$ grubu içerisinde skaler matrislerin kümesini belirtsin öyle ki burada $Z = \{I, -I\}$ 'dir. $PSL(2, 3)$, $\mathcal{G}: PSL(2, 3) \rightarrow A_4$ bir dönüşüm olmak üzere;

$$\mathcal{G}(AZ) = (12)(34), \quad \mathcal{G}(BZ) = (14)(23) \text{ ve } \mathcal{G}(XZ) = (123)$$

dönüşümleri ile A_4 alterne grubuna izomorftur. Bunlar aşağıda gösterilmiştir:

$$\mathcal{G}(AZ) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z\right) \rightarrow (12)(34)$$

$$\mathcal{G}(BZ) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Z\right) \rightarrow (14)(23)$$

$$\mathcal{G}(XZ) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z\right) \rightarrow (123)$$

$$\mathcal{G}(ABZ) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Z\right) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Z\right) \rightarrow (12)(34)(14)(23) = (13)(24)$$

$$\mathcal{G}(X^2Z) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z\right) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z\right) \rightarrow (123)(123) = (132)$$

$$\mathcal{G}(AXZ) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z\right) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Z\right) \rightarrow (12)(34)(123) = (243)$$

$$\mathcal{G}(BXZ) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z\right) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z\right) \rightarrow (14)(23)(123) = (134)$$

$$\mathcal{G}(XAXZ) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Z\right) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Z\right) \rightarrow (123)(243) = (124)$$

$$\mathcal{G}(XAXBZ) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Z\right) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} Z\right) \rightarrow (124)(14)(23) = (234)$$

$$\mathcal{G}(XBZ) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Z\right) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Z\right) \rightarrow (123)(14)(23) = (142)$$

$$\mathcal{G}(AX^2Z) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z\right) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Z\right) \rightarrow (12)(34)(132) = (143)$$

$$\mathcal{G}(A^2Z) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z\right) = \mathcal{G}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Z\right) \rightarrow (12)(34)(12)(34) = 1$$

Buradan $\{1, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

elemanlarının oluşturduğu grup A_4 grubu olur.

Örnek 3.12. $\lambda^3=1$ denklemini 4 elemanlı cisim içerisindeki sıfırdan farklı elemanların her biri sağlar. Determinantı 1 olan 2×2 tipindeki skaler matris sadece I olsun. Buradan $PSL(2,4) = SL(2,4)$ olur.

Önerme 3.13. $PSL(2,5)$ grubu değişmeli olmayan basit gruptur.

İspat: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}Z, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}Z \in PSL(2,5)$ için

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}Z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}Z = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}Z \text{ ve } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}Z \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}Z$$

bulunur. Bu çarpımlar eşit olmadığından $PSL(2,5)$ grubunun değişmeli değildir.

Bu ispatta $G = SL(2,5)$ grubunun normal alt gruplarının sadece; G grubunun kendisi, $\{-I, I\}$ ve $\{I\}$ kümelerinin olduğu gösterilecektir. Sonra, $PSL(2,5)$ bölüm grubunun değişmeli olmayan basit grup olduğu söylenecektir.

İlk adım, G grubunun conjugacy classlarını hesaplamak olsun.

I ve $-I$ elemanlarının her ikisi merkezde ve her biri kendi conjugacy classını oluşturur.

Şimdi orderı 4 olan $T = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ elemanının merkezleyicisini belirleyerek T

elemanının conjugacy classı hesaplınsın. G ’de bu merkezleyici matrisler $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

matrisi formundadır öyle ki merkez tanımından

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ise bu matrisler çarpılırsa $\begin{pmatrix} 4c & 4d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 4a \\ d & 4c \end{pmatrix}$ eşitliği elde edilir. Matris eşitliğinden

$$4c = b, \quad a = d, \quad 4d = 4a \text{ ve } b = 4c \quad (1.7)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, T matrisinin merkezleyicisi $\begin{pmatrix} a & 4c \\ c & a \end{pmatrix}$ formundadır.

$a^2 + c^2 = 1$ denklemini sağlar. Bu merkezleyiciler,

$$a = 0 \text{ ve } c = 1 \text{ için } \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T,$$

$$a = 1 \text{ ve } c = 0 \text{ için } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$a = 4 \text{ ve } c = 0 \text{ için } \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = T^2 \text{ ve}$$

$$a = 0 \text{ ve } c = 4 \text{ için } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = T^3 \text{ matrisleridir.}$$

Böylece, T matrisi $\frac{120}{4} = 30$ conjugate sahiptir.

Benzer şekilde orderı 3 olan $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ elemanın merkezleyicileri hesaplınsın:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

ise bu matrisler çarpılırsa $\begin{pmatrix} c & d \\ 4a+4c & 4b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4b & a+4b \\ 4d & c+4d \end{pmatrix}$ eşitliği elde edilir.

Matris eşitliğinden

$$c = 4b, d = a + 4b, a + c = d \text{ ve } 4b = c \quad (1.8)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, S matrisinin merkezleyicisi $\begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a+4b \end{pmatrix}$ formundadır.

$a^2 + 4ab + b^2 = 1$ denklemini sağlar. Bu merkezleyiciler,

$$a = 0 \text{ ve } b = 1 \text{ için } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = S,$$

$$a=1 \text{ ve } b=0 \text{ için } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$a=4 \text{ ve } b=0 \text{ için } \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -I,$$

$$a=0 \text{ ve } b=4 \text{ için } \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -S,$$

$$a=1 \text{ ve } b=1 \text{ için } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = -S^2 \text{ ve}$$

$$a=4 \text{ ve } b=4 \text{ için } \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S^2 \text{ matrisleridir.}$$

Böylece, S matrisi $\frac{120}{6} = 20$ conjugate sahiptir.

$-S$ ve S matrislerinin orderları farklı olduğundan $-S$, S 'nin conjugacy classının içinde olmaz ama $-S$ ile S 'nin merkezleyicilerinin aynı olduğu görülür:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ise bu matrisler çarpılırsa $\begin{pmatrix} 4c & 4d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 4a+b \\ d & 4c+d \end{pmatrix}$ eşitliği elde edilir. Matris eşitliğinden

$$4c = b, 4d = 4a + b, a + c = d \text{ ve } b = 4c \quad (1.9)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, $-S$ matrisinin merkezleyicisi $\begin{pmatrix} a & 4c \\ c & a+c \end{pmatrix}$ formundadır.

$a^2 + ac + c^2 = 1$ denklemini sağlar. Bu merkezleyiciler,

$$a=0 \text{ ve } c=1 \text{ için } \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -S,$$

$$a=1 \text{ ve } c=0 \text{ için } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$a = 4 \text{ ve } c = 0 \text{ için } \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -I,$$

$$a = 0 \text{ ve } c = 4 \text{ için } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = S,$$

$$a = 1 \text{ ve } c = 4 \text{ için } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = -S^2 \text{ ve}$$

$$a = 4 \text{ ve } c = 1 \text{ için } \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S^2 \text{ matrisleridir.}$$

Böylece, $-S$ matrisi de $\frac{120}{6} = 20$ conjugate sahiptir.

Şimdi de orderı 5 olan $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin merkezleyicileri hesaplınsın:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ise bu matrisler çarpılırsa $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$ eşitliği elde edilir. Matris eşitliğinden

$$a+c=a, a=d, c=c \text{ ve } c=0 \quad (1.10)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, R matrisinin merkezleyicisi $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ formundadır.

$a^2 = 1$ denklemini sağlar. Bu merkezleyiciler,

$$a = 1 \text{ ve } b = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ için } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = 4 \text{ ve } b = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ için } \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisleridir. Böylece, R matrisi $\frac{120}{10} = 12$ conjugate sahiptir.

R ve R^2 matrislerinin orderları farklı olduğundan R^2 , R 'nin conjugacy classının içinde olmaz ama R^2 ile R matrislerinin merkezleyicilerinin aynı olduğu görülebilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ise bu matrisler çarpılırsa $\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$ eşitliği elde edilir. Matris eşitliğinden

$$a+2c=a, b+2d=2a+b, c=c \text{ ve } d=2c+d \quad (1.11)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, R^2 matrisinin merkezleyicisi $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ formundadır.

$a^2=1$ denklemini sağlar. Bu merkezleyiciler,

$$a=1 \text{ ve } b=0,1,2,3,4 \text{ için } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a=4 \text{ ve } b=0,1,2,3,4 \text{ için } \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisleridir. Böylece, R^2 matrisi $\frac{120}{10}=12$ conjugate sahiptir.

Benzer şekilde R ile $-R$ 'nin orderları farklıdır fakat merkezleyicilerinin aynı oldukları görülebilir:

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ise bu matrisleri çarpılırsa $\begin{pmatrix} -4a-4c & -4b-4d \\ -4c & -4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a & -4a-4b \\ -4c & -4c-4d \end{pmatrix}$ eşitliği elde edilir.

Matris eşitliğinden

$$4a+4c=4a, 4a+4b=4b+4d, 4c=4c \text{ ve } 4d=4c+4d \quad (1.12)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, $-R$ matrisinin merkezleyicisi $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ formundadır.

$a^2 = 1$ denklemini sağlar. Bu merkezleyiciler,

$$a = 1 \text{ ve } b = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ için } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = 4 \text{ ve } b = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ için } \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisleridir. Böylece, $-R$ matrisi $\frac{120}{10} = 12$ conjugate sahiptir.

Yine benzer şekilde R ile $-R^2$ 'nin orderları farklıdır ama merkezleyicilerinin aynı oldukları görülebilir:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ise bu matrisler çarpılırsa $\begin{pmatrix} 4a+3c & 4b+3d \\ 4c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 3a+4b \\ 4c & 3c+4d \end{pmatrix}$ eşitliği elde edilir.

Matris eşitliğinden

$$4a+3c=4a, 4b+3d=3a+4b, 4c=4c \text{ ve } 4d=3c+4d \quad (1.13)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $-R^2$ matrisinin merkezleyicisi $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ formundadır.

$a^2 = 1$ denklemini sağlar. Bu merkezleyiciler,

$$a = 1 \text{ ve } b = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ için } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = 4 \text{ ve } b = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ için } \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisleridir. Böylece, $-R^2$ matrisi $\frac{120}{10} = 12$ conjugate sahiptir.

Elde edilen bu sınıflar alt alta yazılırsa,

$$C_1 = \{I\}$$

$$C_2 = \{-I\}$$

$$C_3 = \{ \text{orderı 4 olan } T \text{ elemanının 30 conjugate } \}$$

$$C_4 = \{ \text{orderı 3 olan } S \text{ elemanının 20 conjugate } \}$$

$$C_5 = \{ \text{orderı 6 olan } -S \text{ elemanının 20 conjugate } \}$$

$$C_6 = \{ \text{orderı 5 olan } R \text{ elemanının 12 conjugate } \}$$

$$C_7 = \{ R \in C_6 \text{ için orderı 5 olan } R^2 \text{ elemanının 12 conjugate } \}$$

$$C_8 = \{ R \in C_6 \text{ için orderı 10 olan } -R \text{ elemanının 12 conjugate } \}$$

$$C_9 = \{ R \in C_6 \text{ için orderı 10 olan } -R^2 \text{ elemanının 12 conjugate } \}$$

Böylece, bu classlar toplamda 120 matris içerir ve bunlar G 'nin conjugacy classlarının listesini tamamlar.

N , G 'nin $\{I, -I\}$ 'yı içeren bir normal alt grubu olsun ve $N \neq \{I, -I\}$ olduğu farz edilsin. N , orderı 5 olan bir elemanı içerdiği kabul edilsin. N , conjugacy classların bir birleşimini ve $-I$ 'yı içerdiğinden N çarpma işlemine göre kapalı olur. Bu alt grup C_6 , C_7 , C_8 ve C_9 'un her birini içermelidir. Böylece, N en az $2 + 4 \cdot 12 = 50$ eleman içerir. 10 elemanlı bir conjugacy class olmadığından ve G 'nin bir alt grubu içindeki elemanların sayısı 120'yi bölmesi gerektiğinden N için tek olanak G 'nin kendisidir.

Şimdi de N 'nin orderı 5 olan elemanı olmadığı ve $|N|$ 'nin 24'ü böldüğü farz edilsin. N , I ve $-I$ 'yı içerdiğinden ve conjugacy classların bir birleşimi olduğundan N için tek olanağın $\{I, -I\}$ kümesi olduğu görülebilir.

Sonuç olarak, G 'nin $Z = \{I, -I\}$ 'yı içeren normal alt grupları sadece Z ve G 'dir. Böylece G/Z bölüm grubu basittir.

Açıklama 3.14. $PSL(2,4) = SL(2,4)$ olduğundan Önerme 3.13 kullanılarak $PSL(2,4)$ grubunun basitliği kolayca gösterilebilir. w , 0 ve 1'den farklı ve 4 elemanlı cismin bir elemanı olsun ki burada $w^3 = 1$ 'dir. Böylece, G orderı 60 olan $SL(2,4)$ grubunu belirtirse, G 'nin conjugacy classları

$$C_1 = \{I\}$$

$$C_2 = \left\{ \text{hepsi } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ matrisine conjugate 2 orderlı 15 eleman} \right\}$$

$$C_3 = \left\{ \text{hepsi } \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2 \end{pmatrix} \text{ matrisine conjugate 3 orderlı 20 eleman} \right\}$$

$$C_4 = \left\{ \text{hepsi } R = \begin{pmatrix} 1 & w \\ w & w \end{pmatrix} \text{ matrisine conjugate 5 orderlı 12 eleman} \right\}$$

$$C_5 = \left\{ \text{hepsi } R^2 \text{ matrisine conjugate 5 orderlı 12 eleman} \right\}$$

Bu classlar 60 elemanın tamamını içerdiğinden G 'nin conjugacy classlarının listesi tamamlanır. C_1 'i içeren ve 60 sayısını bölen $\{I\}$ ve G alt grupları dışında G grubunun conjugacy classlarının kümesinin alt kümesi olmadığından bu grup basittir.

Açıklama 3.15. 60 elemanlı üç basit grup A_5 , $PSL(2,4)$ ve $PSL(2,5)$ gruplarıdır. Bu üç grup izomorftur.

Önerme 3.16. $PSL(2,4)$ ve $PSL(2,5)$ gruplarının her ikisi A_5 alterne grubuna izomorftur.

İspat: $PSL(2,4)$ ve $PSL(2,5)$ gruplarının her biri orderı 2 olan 15 elemanlı bir conjugacy classa sahiptir ve orderı 4 olan elemanları yoktur. Bir sylow-2 alt grubunun orderı 4 olduğundan bu 4, sylow-2 alt grupla alakalı normalizerin orderını bölmeli ve bu normalizerin orderı da grubun orderı olan 60'ı bölmelidir. Buna göre normalizerin orderı ya 12 ya da 20 olabilir. Grup içindeki 5 orderlı herhangi bir eleman orderı 4 olan sylow-2 alt grubunu normallemediğinden bu normalizerin orderı 5'in katı olamaz yani 20 olamaz. Bu nedenle, normalizerin orderı 12'dir. Buradan, herhangi sylow-2 alt grubunun normalizerinin indexi 5'tir sonucuna varırız. $PSL(2,4)$ ve $PSL(2,5)$ grupları

aşık olmayan normal alt grupları olmadığından basit grup oldukları biliniyor. Bu gruplar Cayley Teoreminden S_5 grubunun bir alt grubuna izomorftur. S_5 'in orderı 60 olan A_5 alt grubunun indexi 2 olduğundan bu alt grup normaldir. A_5 grubu da simple olduğundan $G = PSL(2,4)$ veya $G = PSL(2,5)$ olmak üzere, $1 \leq G \leq S_5$ ve $1 \leq A_5 \leq S_5$ composition serileri Jordan-Hölder Teoremine göre birbirine izomorf olup, G grubu A_5 alterne grubuna izomorf olur.

Açıklama 3.17. Önerme 3.16'nın sonucu, herhangi 60 elemanlı bir grubun basit olmasına dayanır. İspat yöntemi kanıt için sadece 15 sylow-2 alt gruplu bir gruba ihtiyaç olduğunu gösterir.

Bu kısmın ana sonucu, tüm $q = p^k$ asal kuvvetleri için $q < 4$ olması dışında $PSL(2, q)$ grubunun basit olmasıdır. $q < 4$ olduğunda $PSL(2, 2)$ ve $PSL(2, 3)$ grupları için bu sonuç istisnadır ve ayrıca, gerçekten $PSL(2, 4)$ ve $PSL(2, 5)$ basittir.

Tanım 3.18. Eğer $B_{i,j}(\lambda) = I + E_{i,j}(\lambda)$ formunda ise $GL(n, q)$ grubunun bir elemanı transvectiondır, burada I , $n \times n$ tipinde birim matris ve $E_{i,j}(\lambda)$ bir elementary matristir. $((i, j)$ konumunda λ 'ya eşit ama diğer konumları sıfıra eşit olan matris). Herhangi transvectionun determinanı 1'dir, çünkü $SL(n, q)$ içindedir.

Matrislerin bu özel tiplerinin önemi şudur: Herhangi A matrisi için $B_{i,j}(\lambda)A$ çarpımı A matrisinin j . satırını i . satırına λ kez eklemekle elde edilir. Örneğin A matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ olsun. } B_{2,3}(2) \text{ transvectionı bu matrise uygulansın:}$$

$$B_{2,3}(2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Burada, A matrisinde 3. satır 2. satıra 2 defa eklendi ya da A matrisi $B_{2,3}(2) = I + E_{2,3}(2)$ transvectionu tarafından soldan çarpıldı.

Önerme 3.19. $GL(2, q)$ 'nun her A elemanı TD çarpımı olarak yazılabilir, burada T transvectionların çarpımı ve D ise $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}$ matrisidir.

Özellikle, $SL(2, q)$ 'nun her bir elemanı transvectionların bir çarpımıdır.

İspat: Bu ispattaki amaç, $GL(2, q)$ içindeki herhangi A matrisini transvectionlar ile çarparak D matrisini elde etmektir. Önce, A 'nın a_{11} girişinin sıfır olduğu farz edilsin. Yani, $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$ formunda olsun. Burada, $\det(A) = -bc$ 'dir. A terslenebilir olduğundan a_{21} girişi sıfır olamaz. Bu durumda, ilk satıra ikinci satırı eklemek a_{11} girişi

sıfır olamayan bir $B = \begin{pmatrix} c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisini üretir. Burada, $\det(B) = -bc$ 'dir. Şimdi

A 'nın a_{11} girişi sıfırdan farklı olan A matrisine benzer bir A_1 matrisi tanımlansın. Eğer A 'nın a_{11} girişinde sıfır varsa $A_1, A_1 = B = B_{1,2}(1)A$ olarak tanımlanır. Buradan, her iki

durumda da $\det(A_1) = \det(A)$ 'dır. Şimdi $A, A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ formunda olsun ki burada

$a \neq 0$ 'dır. Burada, $\det(A_1) = ad - bc$ 'dir. A_1 matrisinin ilk satırının uygun bir katı onun ikinci satırına eklenirse a_{21} girişi sıfır olan bir matris elde edilir. Burada,

$A_2 = B_{2,1}(-\frac{c}{a})A_1, \alpha$ 'sı sıfırdan farklı olan $A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ formundaki bir

matris olur. Burada, $\det(A_2) = ad - bc$ ve $a = \alpha, b = \beta$ ve $\frac{ad-bc}{a} = \delta$ olur.

$\det(A_2) = \det(A_1)$ 'e eşit olduğundan δ sıfırdan farklıdır. Şimdi ikinci satırın uygun bir

katı ilkinde eklenirse $A_3 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = B_{1,2}(-\frac{\beta}{\delta})A_2$ formundaki bir

köşegen matrisi elde edilir ki burada, $\det(A_3) = \alpha\delta = ad - bc = \det(A)$ ve

$-\frac{\beta}{\delta} = -\frac{ab}{ad-bc}$ 'dir. Sonuç olarak satır işlemlerinin bir serisi tarafından D matrisine

dönüştürülebilir (Transvectionlar tarafından soldan çarpılarak). Bu satır işlemleri şunlardır:

(1) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & \delta \end{pmatrix}$ matrisini elde etmek için ikinci satıra birinci satırı eklemek

(2) bazı θ için $\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \alpha & \delta \end{pmatrix}$ matrisini elde etmek için ilk satıra ikinci satırı $\frac{1-\alpha}{\alpha}$

kez eklemek (burada $\theta = \frac{1-\alpha}{\alpha} \delta$ ’dır.)

(3) $\sigma = \det(A) = \alpha\delta$ olmak üzere $\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ matrisini elde etmek için ikinci

satırdan ilk satırı α kez çıkarmak

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}$ matrisini elde etmek için ilk satırdan ikinci satırı $\frac{\theta}{\sigma}$ kez

çıkarmak

A matrisi $SL(2, q)$ ’nın içinde olduğunda $\sigma = \det(A) = 1$ ’dir. Buradan, A transvectionların bir çarpımıdır.

Önerme 3.20. q asal tek sayı olsun. $SL(2, q)$ içerisindeki merkez elemanları sadece I ve $-I$ matrisleridir.

İspat: $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisinin $SL(2, q)$ grubunun merkezinde olduğu farz

edilsin. W matrisi $B_{1,2}(1)$ ve $B_{2,1}(1)$ transvectionları ile değişmelidir. Bu transvectionlar

$$B_{1,2}(1) = I + E_{1,2}(1), \quad E_{1,2}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ olur ki } B_{1,2}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$B_{2,1}(1) = I + E_{2,1}(1), \quad E_{2,1}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ olur ki } B_{2,1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dir.

Buradan, transvectionlar ile W değişmeli olduklarından,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Bu matrisler çarpılırsa,

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

eşitlikleri elde edilir. Matris eşitliğinden,

$a = a+c$, $a+b = b+d$, $c = c$, $c+d = d$ ve $a+b = a$, $b = b$, $c+d = a+c$, $d = b+d$ eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklerden,

$$c = 0, a = d \text{ ve } b = 0$$

bulunur. Yani, W matrisimiz $W = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ formundadır. $\det(W) = 1$ olduğundan $a^2 = 1$ yazılabilir. $SL(2, q)$ içinde bu a değerleri 1 ve -1 olarak bulunur.

$$\text{Sonuç olarak, } W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ ya da } W = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \text{ olur.}$$

Teorem 3.21. $q > 3$ ise $PSL(2, q)$ grubu basittir.

İspat: A Course in Group Theory (Humphreys, J.F., 1996) kitabında ispatı bulunabilir.

Açıklama 3.22. Bu bölümdeki sonuçlar keyfi boyutlu matrislere genellenebilir. Bu durumda, herhangi $n > 2$ ve herhangi q asal kuvveti için $PSL(n, q) = SL(n, q)/Z$ grubu abelyen olmayan basit gruptur ki burada, Z determinantı 1 olan skaler matrislerin kümesidir.

4. İLİŞKİ GEOMETRİ ve KOSET GEOMETRİ

Bu bölümde, bu tezde sonradan ihtiyaç duyulacak olan kavramlar tanıtılmaktadır. Bu kavramlar örneklerle açıklanmakta ve onların nasıl daha faydalı ve doğal oldukları görülmeye çalışılmıştır. Ayrıca, ilişki geometride bu kavramların rollerini anlamak için okuyucuya yardımcı olacak bazı temel sonuçlar ve bu sonuçları kontrol etmek için gerek ve yeter şartlar verilmektedir. Bu sonuçların çoğu bir ispat ile tamamlanmıştır.

Bu tezde graph kavramı sık sık kullanılmıştır. Okuyucunun graph notasyonları ile birlikte graph içindeki yol, kenar, köşe, vb. gibi kavramları bildiği farz edilmektedir. Graph teorisinin bazı temel terimleri burada tanımlanmamıştır (Diestel, 2000).

4.1. Grup Teori Notasyonları

Grup teorideki notasyonlar ve bilinen gerçekler kullanılmıştır, örneğin onlar (ATLAS, 1985) içerisinde verilmiştir. Ancak, anlam belirsizliğini önlemek amacıyla burada bazı notasyonları sabitlemek uygun görülmüştür.

$G = A \cdot B$ yazıldığında A 'nın G içinde bir normal alt grup olduğu söylenir ve burada $\frac{G}{A} \cong B$ 'dir. A ve B gibi iki grubun direk çarpımını göstermek için $A \times B$ kullanılır. $A : B$ ile bir yarı direk çarpım gösterilir.

Orderı p olan bir cyclic grup C_p ile veya karışıklık olmadığı durumda basitçe p ile gösterilir. p^a notasyonu elementery abelyen grup için kullanılır, yani a , C_p cyclic grupların bir direk çarpımıdır. p^{a+b} notasyonunun anlamı $p^a \cdot p^b$ 'dir.

D_{2n} ile orderı $2n$ olan dihedral grup gösterilir. Ayrıca D_4 ile *Klein Vierergruppe* adı ile bilinen grup gösterilir. Bu grup bir digonun simetri grubuna benzerdir. Bir G grubunun bir sylow- p alt grubu $Syl_p(G)$ ile gösterilir.

Ayrıca, aşağıdaki gösterim şekli kabul edilir.

- $PSL(n, q)$ için $L_n(q)$ kullanılır.

4.2. İlişki Sistemleri ve Geometriler

Pregeometrinin tanımı ile başlansın, ayrıca pregeometri bazı kaynaklarda ilişki sistemi veya ilişki yapısı olarak da adlandırılır (Buekenhout, 1995; Buekenhout ve Cohen, 2009; Pasini, 1994).

Tanım 4.2.1. “Pregeometri” Γ bir $(X, *, t, I)$ dördlüsü olsun.

- X , elemanları Γ ’nın elemanları olarak adlandırılan bir kümedir.
- I , elemanları Γ ’nın tipleri olarak adlandırılan bir kümedir.
- t , tip fonksiyonları olarak adlandırılan X ’ten I ’ya bir dönüşümdür.
- $*$, Γ ’nin ilişki bağıntısı olarak adlandırılan $X \times X$ üzerinde simetri ve yansıma bağıntısıdır.

$\Gamma = (X, *, t, I)$ dördlüsü içinde X tüm $X_i = t^{-1}(i)$ ’lerin ayrık birleşimidir ve burada $i \in I$ ’dır. Γ dördlüsü aşağıdaki koşulu sağlıyor ise I üzerinde bir ilişki sistemi veya bir pregeometri olarak adlandırılır: t tip fonksiyonunun Γ geometrisinin herhangi bir bayrağına kısıtlaması bir birebir dönüşümdür. Bu önemli durum aynı tipin herhangi iki elemanının ilişkili olamayacağını belirtir. Yani, bir bayrakta her tipten sadece bir eleman olmak zorundadır.

Eğer $A \subseteq X$ ise A kümesinin tipi $t(A)$ olup, rankı $t(A)$ tipinin eleman sayısına eşit olduğu söylenir. A kümesinin cotipi $I - t(A)$ olarak tanımlanır. I tip kümesinin eleman sayısı Γ geometrisinin rankı olarak adlandırılır. A kümesinin corankı $I - t(A)$ kümesinin eleman sayısıdır.

Γ geometrisinin bayrağı Γ geometrisinin elemanlarının herhangi bir kümesi olup, çiftleri ilişkilidir. Cotipi $i \in I$ olan bir bayrak bir panel olarak adlandırılır. Γ geometrisinin bir chamberı tipi I olan bir bayraktır.

Γ geometrisinin herhangi x ve y elemanının ilişkili olduğunu göstermek için $x * y$ kullanılır. Bu bölümdeki graph yapısı Tanım 2.19’da açıklanmıştır. Bu bölümde bu graph özel olarak $(X, *)$ ile gösterilecektir.

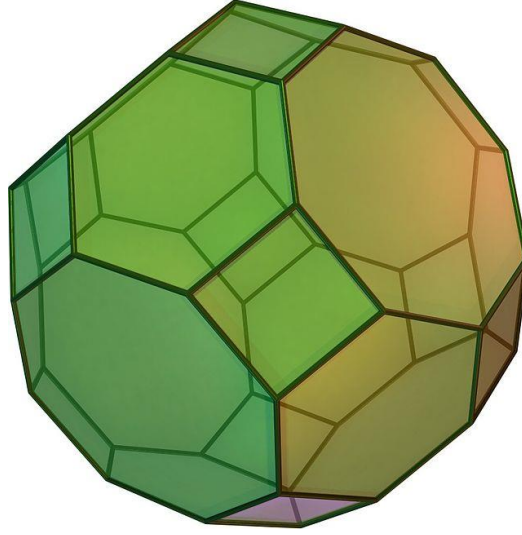
Tanım 4.2.2. “Geometri” I üzerindeki bir geometri, herhangi maksimal bayrağı bir chamber olan Γ pregeometrisidir. Bunun anlamı, herhangi maksimal olmayan bayrak en az bir chambera genişletilebilir ifadesine denktir. Eğer corankı 1 olan herhangi bir bayrak Γ geometrisinin en az iki farklı chamberı tarafından içeriliyorsa bu geometri firm olarak adlandırılır. Eğer corankı 1 olan herhangi bir bayrak Γ geometrisinin tam olarak iki farklı chamberı tarafından içeriliyorsa bu geometri thin geometri olarak adlandırılır. Ayrıca, eğer corankı 1 olan herhangi bir bayrak Γ geometrisinin en az üç farklı chamberı tarafından içeriliyorsa bu geometri thick geometri olarak adlandırılır.

Aşağıdaki tanım (Pasini, 1994)’den alınmıştır.

Tanım 4.2.3. “Chamber (Odacık) Sistemi” Γ bir geometri olsun. Γ geometrisinin $C(\Gamma)$ chamber sistemi bir graph olup, Γ geometrisinin chamberları bu graphın köşeleri olmaktadır. Ayrıca chamber sistemi şu şartı sağlamalıdır: C ve D gibi iki farklı chamber verilsin. $C \cap D$ bir panel olduğunda ilişkili köşeler bir kenar ile birleştirilir. İlaveten, kenarların bir renklendirilmesidir: Verilen iki farklı C ve D komşu chamberları için $(C \cup D) - (C \cap D)$ ’nin iki elemanı aynı tipe aittir. Bu, $C \sim_i D$ şeklinde yazılır. Bu yazılış C ve D ’nin i -komşu olduğunu söyler. Ayrıca, $C \sim_i C$ olduğu kabul edilir. $\sim_i$ ifadesinin bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. $(\sim_i)_{i=1}^n$ denklik bağıntısının sistemi $C(\Gamma)$ graphının her bir kenarına $i = 1, 2, \dots, n$ onun uygun renkleri verilerek elde edilen bir renk graphı olarak görülebilir.

$C(\Gamma)$ chamber sistemi içindeki bir $C = C_0$ chamberından bir $D = C_m$ chamberine bir $\gamma = (C_0, C_1, \dots, C_m)$ yolu C ’den D ’ye uzunluğu m olan bir gallery olarak adlandırılır.

Pasini, $C(\Gamma)$ chamber sisteminin bağlantılı olduğunu ispatladı. ((Pasini, 1994), Teorem 1.9)



Şekil 4.1. K    n chamber sistemi

  nek 4.2.4. Γ , $I = \{\text{k    , kenar, yüzey}\}$ üzerinde k    n rank-3 geometrisi olsun. Bu geometride 8 k    , 12 kenar ve 6 yüzey vardır. İlişki bağıntısı simetri kapsaması ile meydana gelir.

Bir bayrak, boş, herhangi tek elemanlı ve herhangi tiplerin çiftleri ilgili olan elemanlarının ikilisi veya          olur. Bir chamber bir        olup bir k    , bir kenar ve bir yüzeyden oluşup bunlar ikişer ikişer ilgili olur. Corankı 1 olan herhangi bayra  n tam olarak 2 chamber içinde içerildiği kolayca görülebilir. Bu nedenle, Γ thindir.

Buradaki $C(\Gamma)$ chamber sistemi, k    leri Γ geometrisinin chamberları olan kesik cuboctahedron olduğu kolayca görülebilir (bakınız Şekil 4.1). Kenarların 3 farklı tipini belirleyelim. Onlar kare-altıgen tip, kare-sekizgen tip ve altıgen-sekizgen tip olsun. Her k     her bir tipin bir kenarı ile tamamen ilişkidir. Γ thindir.

Γ geometrisinin ilişki graphını görmek amacıyla, bir kesik cuboctahedron alınır, her bir yüzeyin ortasında bir nokta   zilir ve komşu olan eş yüzeylerden herhangi ikisi birleştirilir.

4.3. Alt Geometrilere ve Kesmeler

Bu bölümde bir alt geometrinin tanımı ifade edilmiştir. Aslında, verilen bir geometriden elde edilen bir alt yapının iki kavramı tanımlanmıştır: Alt geometrilere ve kesmeler (Buekenhout ve Cohen, 2009).

Tanım 4.3.1. “Altgeometri” $\Gamma = (X, *, t, I)$ bir pregeometri ve $\Gamma' = (X', *, t', I')$ ikinci bir pregeometri olsun öyle ki $X' \subseteq X$, $*$ ilişkisi bağıntısı $*$ ilişkisi bağıntısının $X' \times X'$ kümesine kısıtlamasıdır. Ayrıca, $I' \subseteq I$ ve t' tip fonksiyonu t tip fonksiyonunun X' kümesine kısıtlamasıdır. Γ , Γ' geometrisinin bir alt pregeometrisidir. Eğer Γ' bir geometri ise Γ geometrisinin bir alt geometrisi olduğu söylenir.

Önerme 4.3.2. Verilen bir Γ geometrisinin herhangi Σ alt geometrisi bir geometridir.

Tanım 4.3.3. “Kesme” Γ bir geometri ve $J \subseteq I$ olsun. Γ geometrisinin bir J -kesmesi ilişkisi bağıntısını ve tip fonksiyonlarını içeren $t^{-1}(J)$ tarafından içerilen alt geometridir. Genellikle ${}^J\Gamma$ ile gösterilir.

Örnek 4.3.4. Küpün rank-3 geometrisi tekrar ele alınsın. Bir yüzey seçilsin ve yüzeye komşu 4 kenar ve 4 köşe ele alınsın. O, Γ geometrisinin bir rank-3 alt geometrisini sağlar: Onun iç yüzeyi ile birlikte bir kare oluşturulur. Şimdi yüzey ihmal edilirse küpün bir alt geometrisi olan karenin iyi bilinen rank-2 geometrisi olur.

Şimdi Γ geometrisini ve tip kümesinin $I' = \{\text{köşe}, \text{kenar}\}$ alt kümesi ele alınsın. Γ geometrisinin I' -kesmesi aslında küpün 1-iskeleti olan bir rank-2 geometrisidir.

4.4. Morfizmalar

Bu bölümde geometrilere arasında bir morfizma kavramı verilmiştir (Buekenhout, 1995).

$\Gamma = (X, *, t, I)$ ve $\Gamma' = (X', *, t', I')$ iki geometri olsun. Bir $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ morfizması $\alpha : X \rightarrow X'$ dönüşümüdür öyle ki

1. $t(x) = t(y)$ olması için gerek ve yeter şart $t'(\alpha(x)) = t'(\alpha(y))$

2. Eğer $x * y$ ise $\alpha(x) *' \alpha(y)$
3. Eğer $\alpha(x) *' \alpha(y)$ ise $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$ vardır öyle ki $\alpha(\tilde{x}) = \alpha(x)$, $\alpha(\tilde{y}) = \alpha(y)$ ve $\tilde{x} * \tilde{y}$ şartlarını sağlamalıdır.

Γ geometrisinden Γ' geometrisi üzerine bir α izomorfizması bir $\alpha: X \rightarrow X'$ birebir-örten dönüşümüdür öyle ki $t(x) = t(y)$ olması için gerek ve yeter şart $t'(\alpha(x)) = t'(\alpha(y))$ ve $x * y$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha(x) *' \alpha(y)$ olmasıdır.

Γ geometrisinin bir otomorfizması Γ geometrisinden Γ geometrisi üzerine bir izomorfizmadır. Bir Γ geometrisinin otomorfizmalar kümesi açıkça bir grup formundadır ve $Aut(\Gamma)$ ile gösterilir. $Aut(\Gamma)$ otomorfizmasının bir normal alt grubunu kolayca belirleyebiliriz: Tipleri koruyan otomorfizmaların alt grubu Γ geometrisinin bir elemanını Γ geometrisinin aynı tipteki bir elemanına gönderen tüm otomorfizmaların grubu olarak tanımlanır. Bu alt grup $Aut_I(\Gamma)$ ile belirtilir. Tarih boyunca $Aut(\Gamma)$ grubu Γ geometrisinin korelasyonları grubu olarak adlandırılırdı ve $Cor(\Gamma)$ ile gösterilirdi. $Aut(\Gamma)$, Γ geometrisinin tipi koruyan otomorfizmaları grubunu gösterir.

4.5. Rezidüler

Burada geometri kavramları içindeki bir rezidünün temel kavramı tanımlanmıştır. Bu kavram daha genel olarak pregeometri içinde tanımlanabilir ama bu tezin daha sonraki bölümlerinde sadece geometriler ele alınmıştır (Buekenhout, 1995; Buekenhout ve Cohen, 2009; Pasini, 1994).

Tanım 4.5.1. “Rezidü” $\Gamma = (X, *, t, I)$ bir geometri ve F ise Γ geometrisinin bir bayrağı olsun. Γ içindeki F bayrağının rezidüsü aşağıdaki şartları sağlayan $\Gamma_F = (X_F, *_F, t_F, I_F)$ dördlüsüdür:

- X_F , F bayrağının her bir elemanı ile ilişkili olan $X - F$ ’in elemanlarının kümesidir.
- $*_F$ ve t_F sırası ile $*$ ve t tip fonksiyonunun $X_F \times X_F$ ve X_F ’e kısıtlamasıdır.
- $I_F = I - t(F)$

Eğer $x \in X$ için $F = \{x\}$ ise $X_F, *_F, t_F, I_F$ ve Γ_F yerine $X_x, *_x, t_x, I_x$ ve Γ_x yazılabilir.

Önerme 4.5.2. $\Gamma = (X, *, t, I)$ herhangi bir geometri ve Γ geometrisinin herhangi F bayrağı için aşağıdaki 3 önerme sağlanır:

1. Γ_F rezidüsü Γ geometrisinin bir alt geometrisidir.
2. $A \subset X_F$ kümesi Γ_F rezidüsünün bir bayrağı olması için gerek ve yeter şart $F \cup A$ kümesi Γ geometrisinin bir bayrağı olmasıdır.
3. A, Γ_F rezidüsünün bir bayrağı ise $(\Gamma_F)_A = \Gamma_{F \cup A}$ olur.

İspat:

1. Γ_F içinde bir A maksimal bayrağı ele alınsın ve bu bayrağın Γ_F içinde bir chamber olmadığı farz edilsin. Önerme 4.5.2-2'den $F \cup A, \Gamma$ geometrisinin bayrağı olur. A chamber olmadığından $F \cup A$ bayrağı da bir chamber olmaz. Γ bir geometri olduğundan $F \cup A$ bir chamber olmadığından uygun bir B bayrağı ile $F \cup A \cup B$ chamberına genişletilebilir. Tekrar 2'den $A \cup B, \Gamma_F$ rezidüsünün bayrağıdır. $A \cup B, \Gamma_F$ içinde hem A bayrağını hem de B bayrağını içeren bir bayrak olduğundan A 'nın Γ_F içinde maksimal bayrak olması ile çelişir. O halde, kabulümüz yanlış hükmümüz doğrudur.

2. $(\Rightarrow)$: $A \subset X_F, \Gamma_F$ rezidüsünün bir bayrağı olsun. Rezidü tanımından $F \cup A$ 'nın elemanlarının çiftleri ilişkili ve bu çiftler farklı tiptendir. Buradan, $F \cup A$ Γ geometrisinin bir bayrağıdır.

$(\Leftarrow)$: Farz edelim ki $F \cup A, \Gamma$ geometrisinin bir bayrağı olsun. $A \subset X_F$ 'tir çünkü A 'nın her elemanı F 'nin her bir elemanı ile ilişkilidir. Diğer taraftan, A 'nın elemanları hipotezden çiftleri ilişkilidir. Buradan A, Γ_F rezidüsünün bir bayrağıdır.

3. A, Γ_F rezidüsünün bayrağı olsun. Burada

$$(\Gamma_F)_A = \{x \in X_F : x * a, \forall a \in A\} \quad \text{ve} \quad \Gamma_{F \cup A} = \{x \in X : x * f, \forall f \in F \cup A\} \quad \text{kümeleridir.}$$

Buradan, $(\Gamma_F)_A \subseteq \Gamma_{F \cup A}$ olduğu açıktır.

Şimdi $x \in \Gamma_{F \cup A}$ olsun. $x * f, \forall f \in F \cup A$ olduğundan özellikle $x * f, \forall f \in F$, yani $x \in X_F$ ve $x * a, \forall a \in A$ olur. Bu yüzden, $(\Gamma_F)_A \supseteq \Gamma_{F \cup A}$ 'dir.

Böylece, $(\Gamma_F)_A = \Gamma_{F \cup A}$ olur.

İspatlar tamamlanır.

Örnek 4.5.3. Küpün rank-3 geometrisinde sadece bir yüzeyi oluşturan rankı 1 olan bir bayrak ele alınsın. Onun rezidüsü karedir ve aslında karenin rank-2 geometrisidir. Bir kenarın rezidüsü bir digondur, yani çiftleri ilişkili olan iki yüzey ve iki köşedir ve köşenin rezidüsü bir üçgendir.

4.6. Temel Özellikler

Şimdi Brüksel Üniversitesi'nde geliştirilen aksiyomun iki temel özelliğini tanıtmıştır. Onlar, doğal düzenlilik özellikleridir ve Buekenhout tarafından başlatılan programın başlangıç evresinde aksiyomun temeli olmuştur.

4.6.1. Bağlantılık

(Buekenhout, 1995; Buekenhout ve Cohen, 2009; Pasini, 1994).

Tanım 4.6.1.1. “Bağlantılık, Rezidülü Bağlantılık ” $\Gamma = (X, *, t, I)$ bir geometri olsun. Eğer $(X, *)$ ilişki graphı bağlantılı ise Γ bağlantılıdır denir. Γ geometrisinin corankı en az 2 olan herhangi F bayrağı için $(X_F, *_F)$ bağlantılı ise Γ rezidülü bağlantılıdır.

Eğer Γ geometrisinin rankı 2 ise Γ geometrisi boş bayrağın rezidüsüdür denir. Bu nedenle, Γ geometrisinin rezidülü bağlantılığı onun bağlantılığını ima eder.

Tanım 4.6.1.2. “Kuvvetli Bağlantılık” i ve j , I içinde farklı tipte iki eleman olsun ve Γ geometrisinin herhangi F bayrağı ne i ne de j tipinde eleman içermesin. Γ_F rezidüsünün $\{i, j\}$ -kesmesi boştan farklı ve bağlantılı ise $\Gamma = (X, *, t, I)$ geometrisi kuvvetli bağlantılı olur.

Önerme 4.6.1.3 (Buekenhout ve Schwartz, 1984)'tandır. Sonlu ranklı geometrilerde kuvvetli bağlantılık ve rezidülü bağlantılık ifadelerinin denkliğini belirtir.

Önerme 4.6.1.3. $\Gamma = (X, *, t, I)$ sonlu ranklı bir geometri olsun. Γ 'nın rezidülü bağlantılı olması için gerek ve yeter şart Γ 'nın kuvvetli bağlantılı olmasıdır.

İspat: ($\Leftarrow$): Γ kuvvetli bağlantılı olsun. F , Γ geometrisinin corankı en az 2 olan bir bayrağı olsun ve F bayrağının ne i ne de j tipinde elemanı olmadığı farz edilsin. Hipotezden, Γ_F rezidüsünün $\{i, j\}$ -kesmesi herhangi i, j için bağlantılı olduğundan X_F bağlantılı olur. Bu, herhangi F bayrağı için doğrudur, bu yüzden Γ rezidülü bağlantılı olur.

($\Rightarrow$): Γ geometrisinin rezidülü bağlantılı olduğu farz edilsin. Eğer F corankı 2 olan bir bayrak ise X_F bağlantılı olur ve ispatlanacak bir şey yoktur. F bayrağının corankının en az 3 olduğu farz edilsin. $i, j \in I$ iki tip olsun öyle ki F , i ve j tipinden elemana sahip olmasın. Γ_F içinde i ve j tipinin sırasıyla herhangi a ve b iki elemanı arasında bir yol dikkate alınsın (Γ geometrisinin rezidülü bağlantılı olmasından dolayı bir yol vardır). Bu yolun i ve j tiplerinden farklı k tipini içerdiği farz edilsin. Yol içinde y ilk eleman olsun. x , bu tipten önce olan bir i -eleman olsun. z , y elemanından sonra gelen l denilen tipin elemanı olsun. Şimdi, Γ_F içinde y bayrağının R_y rezidüsü ele alınsın. Γ rezidülü bağlantılı olduğundan R_y rezidüsü bağlantılı olur. Böylece, $(\Gamma_F)_y$ içinde k tipinin herhangi elemanını kullanmadan x ve z arasında bir yol bulunabilir. Şimdi tümevarımdan devam edilirse hipotezden, I sonlu olduğundan i ve j tiplerinin köşelerini kullanarak a ve b arasında bir yol bulunabilir. Bu, Γ_F rezidüsünün $\{i, j\}$ -kesmesinin bağlantılı olduğunu ispatlar. Bu, yukarıdaki herhangi i ve j için doğru olduğundan Γ kuvvetli bağlantılı olur.

Örnek 4.6.1.4. Küpün rank-3 geometrisi alınsın. Örnek 4.2.4'de onun ilişki graphının bağlantılı olduğu tanımlanmıştı. Böylece, Γ bağlantılı olur. Corankı 2 veya 3 olan herhangi rezidü alınsın ve bu rezidülerden bir küp, bir kare, bir üçgen veya bir digon elde edilir. Bu dördü bağlantılı olur. Bu nedenle, Γ rezidülü bağlantılı olur.

4.6.2. Bayrak Geçişlilik

Tipi koruyan $Aut_I(\Gamma)$ otomorfizmalar grubu Γ geometrisinin chamberlarında geçişli olmayı sağlıyor ise $\Gamma = (X, *, t, I)$ geometrisinin bayrak geçişli (flag transitive) olduğu söylenir. Bu, verilen bir tipten bayraklar üzerinde geçişli olduğunu söyler. Bayrak geçişli bir geometri içinde verilen bir tipin rezidüsü hakkında konuşmak mümkündür. Çünkü verilen bir tipin tüm bayrakları $Aut_I(\Gamma)$ otomorfizmasının aynı orbitinin içindedir.

Burada bu önemli özellikten bahsedilmesine rağmen bu kavram üzerinde durulmamıştır. Çünkü koset geometriler için grupların tanıtımı bu kavramın gelişmesi için daha iyi bir zemin sağlar.

4.7. Bir Geometrinin Buekenhout Diyagramı

Burada firm, rezidülü bağlantılı ve bayrak geçişli olduğu farz edilen bir geometriye bir diyagram ilişkilendirilmeye çalışılmıştır. Böyle bir kavramın önemi, bir geometrinin diyagramının bu geometrinin rank-2 rezidüleri hakkında birçok bilgiyi kapsamasıdır. Onun diyagramını basitçe inceleyerek geometrilerin yapılarının çoğunu anlamak mümkündür. (Pasini, 1994) şunu söyler:

“Kimyadan bir örnek alınırsa, rankı 2 olan geometriler atomlara benzer. Ama ben moleküllerle ilgileniyorum ki bunları atomların iki veya daha fazlasını birleştirerek oluşturabiliriz.”

Okuyucu bu konulara daha detaylı çalışmak için (Buekenhout ve Cohen, 2009) veya (Pasini, 1994)’ü tercih edebilir.

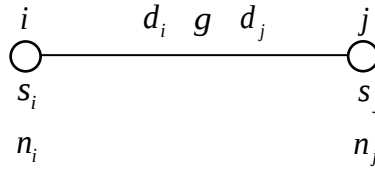
Tanım 4.7.1. “Diyagram” $\Gamma = (X, *, t, I)$ firm, bayrak geçişli ve rezidülü bağlantılı bir geometri olsun. Γ ile ilişkili diyagramın köşeleri, I ’nın elemanları tarafından isimlendirilir ve $|I|$ ’nin bir yönlendirilmemiş graphından oluşur. $i, j \in I$ elemanları ile ilişkili iki köşe aşağıdaki 2 şartı sağlıyorsa graph içinde bir kenar ile birleştirilir:

1. Γ içinde $I - \{i, j\}$ tipinden bir F bayrağı vardır.
2. Γ_F içinde ilişkili olmayan i ve j tipinden iki eleman var.

4.7.1. Rankı 2 Olan Geometriler İçin Parametreler

Γ geometrisinin bayraklarını ve rezidülerini karakterize etmek için bazı parametrelerle rankı 2 olan Γ geometrisinin diyagramını incelemek mümkündür.

Tanım 4.7.1.1. “Diyametre, Gonality, Orderlar” $\Gamma = (X, *, t, I)$ firm ve rankı 2 olan bağlantılı geometri olsun. Eğer $x, y \in X$ elemanları $(X, *)$ ilişki graphında k mesafede ise bu elemanların k mesafede olduğu söylenir. $j \in I$ için Γ geometrisinin d_j , j -diyametresi $(X, *)$ ilişki graphının bir diyametresi olup, tipi j olan bir elemandan başlayan ve herhangi elemana olan en büyük mesafe olmaktadır. Γ geometrisinin diyametresi $d = \max\{d_i : i \in I\}$ olarak tanımlanır. Gonality $g > 0$ olan en küçük sayıdır öyle ki $(X, *)$ graphı uzunluğu $2g$ olan bir devire sahiptir. Tipi j olan bir x elemanının orderı $s_j = |\Gamma_x| - 1$ 'dir.



Şekil 4.2. Bir geometrinin Buekenhout diyagramı

Şekil 4.2'nin diyagramında n_k sayısı, k tipinden elemanların sayısını söyler.

Tanım 4.7.1.2. “Buekenhout Diyagramı” Bir geometrinin Buekenhout diyagramı Şekil 4.2'de verilen parametreler ile birlikte Tanım 4.7.1.1'deki gibi diyagramdır.

Bir Γ geometrisinin Coxeter diyagramı, kenarı sadece g ile numaralandırılarak elde edilir ve $\text{Cox}(\Gamma)$ ile gösterilir.

Önerme 4.7.1.3 diyametre ve gonality arasındaki genel bağıntıları verir. Bu sonuç (Buekenhout, 1983)'ten alınmıştır. Ama onun formüle edilmesi ve ispatı (Pasini, 1994)'ten alınmıştır.

Önerme 4.7.1.3. Γ , $I = \{p, l\}$ üzerinde bir rank-2 geometrisi olsun. Burada $g \leq \min(d_p, d_l)$ ve $d \leq 1 + \min(d_p, d_l)$ eşitsizlikleri vardır. Ayrıca, eğer d bir tek tamsayı veya $d = \infty$ ise $d = d_p = d_l$ olur.

İspat: Eğer $g = \infty$ ise Γ bir treedir, yani ilişki graphı sonsuza kadar uzar. Bu nedenle, $g = d_p = d_l = \infty$ olur. $g < \infty$ olsun. Önce $g \leq \min(d_p, d_l)$ eşitsizliği ispatlansın. $(v_0, v_1, \dots, v_{2g} = v_0)$, Γ geometrisinin maksimal uzunluğu $2g$ olan bir devri olsun. Eğer gerekirse p ve l 'nin rollerinin yer değiştirilir, daima $d_p \leq d_l$ olduğu farz edilebilir ve $v_0 \in P$ olur. $g > d_p$ olduğunda bir $(v_0, v_1', \dots, v_k' = v_g)$ yolu bulunabilir öyle ki burada $k \leq d_p$ 'dir. Bu, uzunluğu $2g$ 'den daha küçük olan bir $(v_0, v_1, \dots, v_g, v_{k-1}', \dots, v_1', v_0)$ kapalı yolunu verir, bu bir çelişkidir.

$d \leq 1 + \min(d_p, d_l)$ eşitsizliğine bakılsın. Bir $x \in l$ doğrusu ve x 'ten maksimal d_l uzaklıktaki bir v elemanı verilsin. $(x = v_0, v_1, \dots, v_m)$ x 'ten v 'ye uzunluğu minimum $m = d_l$ olan bir yol olsun. $(v_1, v_2, \dots, v_m)$, v_1 noktasından v 'ye minimum uzaklıkta bir yol olsun. Bu nedenle, $d_p \geq d_l - 1$ olur. Benzer şekilde p ve l 'nin yerleri değiştirilirse $d_l \geq d_p - 1$ olur. Bu nedenle, $d \leq 1 + \min(d_p, d_l)$ olur. Özellikle $d = d_p = d_l = \infty$ ise d_p veya d_l 'nin biri sonsuzdur.

Son olarak, d bir tek tamsayı, x ve y Γ geometrisinin d mesafedeki elemanları olsun. Γ bipartite graph olduğundan Γ geometrisinin elemanları tek uzaklıkta farklı tiplere aittir. Bu nedenle x ve y 'nin biri nokta diğeri ise doğrudur. Bundan dolayı, $d = d_p = d_l$ olur.

İspat tamamlanır.

4.7.2. Rankı $n \geq 3$ Olan Geometrilere İçin Genelleme

Rankı $n \geq 3$ olan geometriler için Bölüm 4.7.1'de tanıtılan notasyonlar genelleştirilmiştir (Buekenhout ve Cohen, 2009; Leemans, 2008).

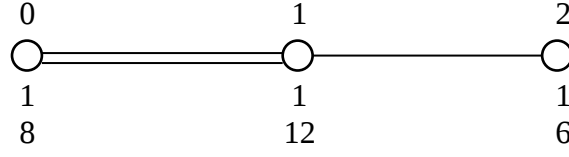
Tanım 4.7.2.1. “Diyagram” I tiplerinin bir kümesi üzerinde D diyagramı, $\{i, j\}$ üzerinde rank-2 geometrisinin bir $D(i, j) = D(j, i)$ sınıfıdır. Bu diyagram I ’nın farklı elemanlarının herhangi $\{i, j\}$ çifti için belirlenen $\binom{I}{2} = \{\{i, j\} \subseteq I : i \neq j\}$ üzerinde tanımlanan bir D uygulamasında içerilir.

Eğer Γ geometrisinin herhangi F bayrağı ve I ’nin farklı elemanlarının herhangi $\{i, j\}$ çifti için Γ_F , $\{i, j\}$ tipinde ise bir Γ geometrisi I üzerinde D diyagramına aittir. Buradan $\Gamma_F \in D(i, j)$ vardır. Bu durumda, Γ geometrisinin D tipinde olduğu söylenir.

J , I tip kümesinin bir alt kümesi olsun. I üzerindeki bir Γ geometrisi bir $(s_j)_{j \in J}$ J -orderına sahiptir ve burada s_j bir tamsayıdır. Herhangi $j \in J$ ve Γ geometrisinin tipi $I - \{j\}$ olan herhangi F bayrağı için X_F kümesinin büyüklüğü $s_j + 1$ ’dir.

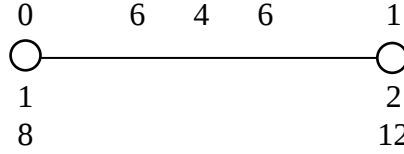
Herhangi $i, j \in I$ için bir kenarın numaralandırması $d_i = g = d_j = n$ olduğunda kenar üzerine sadece n yazılır. $d_0 = g = d_1 = n$ ile bir rank-2 geometrisi olan genelleştirilmiş bir n -gon veya daha genel olarak genelleştirilmiş bir poligon tanımlanır. $n=2$ olduğu durumda herhangi bir kenar çizilmez. $n=3$ ise herhangi numaralandırma yapmadan bir kenar çizilir ve $n=4$ ise herhangi numaralandırma yapmadan iki paralel kenar çizilir. Eğer numaralandırmalar $d_i = 3, g = 3$ ve $d_j = 4$ ise L yazılır. Çünkü ilgili rezidü bir lineer uzaydır, yani bir nokta-doğru geometrisidir. Burada iki nokta en çok bir ortak doğru içindedir. Bir l doğrusu verilsin ve p noktası l ile ilişkili olmasın, l için ilişkili bir l' doğrusu ve p' noktası var öyle ki p ve p' noktalarının ikisi de l' ile ilişkilidir. Diğer taraftan $s_i = s_j - 1$ ise L ’nin yerine Af yazarız. Çünkü rezidü bir affine uzaya izomorftur. Son olarak $s_i = 1$ ise s_j ’nin değeri ne olursa olsun L yerine c yazarız. Çünkü rezidü bir complete grapha izomorftur. $g_{i,j} = d_{i,j} = d_{j,i} - 1 = 5$ ve $s_i = s_j - 1 = 1$ ise bu 3 sayının yerine P yazarız çünkü ilgili rezidü Peterson graphı olarak adlandırılan grapha izomorftur.

Örnek 4.7.2.2. Küpün rank-3 Γ geometrisi tekrar ele alınsın. O, aşağıdaki diyagrama sahiptir.



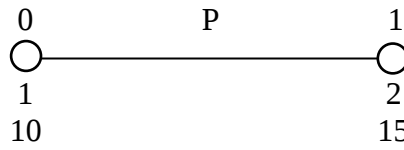
Şekil 4.3. Küpün rank-3 ilişki geometrisinin diyagramı

Şimdi küpün $\{köşe, kenar\}$ -kesmesi ele alınsın. Bu geometriden aşağıdaki diyagram elde edilir.



Şekil 4.4. Küpün rank-2 $\{köşe, kenar\}$ -kesiminin ilişki diyagramı

Örnek 4.7.2.3. İyi bilinen Petersen graphı 15 kenar ve 10 nokta ile bir rank-2 geometrisidir ve aşağıdaki diyagrama sahiptir.



Şekil 4.5. Petersen graphının diyagramı

Bu geometri karşılıklı noktaların çiftleri belirlenerek 12 yüzlüden elde edilebilir.

4.8. Koset Geometriler ve Tits Algoritması

(Tits, 1961), bir grup ve onun alt gruplarının bir ailesinden bir geometri tanımlamak için standart bir yolun var olduğunu söylemiştir.

$\Gamma = (X, *, t, I)$ bir geometri olsun ve G chamberlarda geçişmeli olan Γ geometrisinin otomorfizmalarının bir grubu olsun. Herhangi F bayrağı için G içinde G_F stabilizerı bir parabolik alt grup olarak adlandırılır. Bir elemanın stabilizerı bir maksimal parabolik alt grup olarak adlandırılır. Bir panelin stabilizerı bir minimal parabolik alt grup olarak adlandırılır. Bir chamberın stabilizerı bir Borel alt grup olarak adlandırılır ve genellikle B ile gösterilir.

F bir bayrak ve Γ_F rezidüsünün rankı j olsun. G_F parabolik alt grubu ele alınsın. Γ_F rezidüsünün elemanını eleman olarak sabitleyen G_F 'in alt grubu $P(G_F)$ ile gösterilir. Tezin aşağıdaki bölümlerinde o parantezler arasına yerleştirerek gösterilecektir:

$$G_i = [P(G_i)] \cdot \frac{G_i}{P(G_i)}$$

Sabit bir $F = \{x_i : i \in I, t(x_i) = i\}$ chamberı alınsın. $P_i = G_{x_i}$ olsun. Γ içinde i tipinden her bir y_i elemanı için $g(x_i) = y_i$ olacak şekilde bazı $g \in G$ var ve y_i elemanı $P_i g$ koseti ile belirlenebilir. Şimdi y_i elemanı $P_i g$ koseti ile z_j elemanı $P_j h$ koseti ile belirlensin. Bu durumda, $y_i * z_j$ olması için gerek ve yeter şart G içinde $P_i g \cap P_j h \neq \emptyset$ olmasıdır. Diğer taraftan, $a \in G$ ise a elemanı $y_i = P_i g$ 'yi $P_i ga$ 'ya dönüştürür. Bundan dolayı, Γ geometrisi tamamen $P_i, i \in I$ alt gruplarının ve G grubunun verileri ile tanımlanır.

Tersine, bir G grubu ve $(G_i)_{i \in I}$ alt gruplarının bir ailesi verilsin. I üzerinde bir $\Gamma = \Gamma(G, \{G_i : i \in I\})$ pregeometrisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir: $i \in I$ için i tipinin elemanları $G_i g$ sağ kosetleri olsun. $G_i g$ ve $G_j h$ elemanları ilişkili olması için gerek ve yeter şart $G_i g \cap G_j h \neq \emptyset$. G grubu Γ üzerine sol taraftan bir otomorfizmalar grubu olarak etki eder. G grubunun etkisi verilen bir tipin eleman sayısı 2 olan tüm bayraklarında geçişlidir ama bayrak geçişli olmasına gerek yoktur.

Önerme 4.8.1. (Tits, 1961) G bir grup ve $(G_i)_{i \in I}$ 'lar G grubunun alt gruplarının bir ailesi olsun. $X = \{G_i g : i \in I, g \in G\}$, $*$ = $\{(G_i g, G_j h) : G_i g \cap G_j h \neq \emptyset\}$ ve $t : X \rightarrow I$ tip fonksiyonu $G_i g$ elemanını i 'ye götürsün. Bu durumda, Γ bir chambera sahip bir pregeometri olur. Diğer taraftan, G grubu Γ geometrisinin bir otomorfizma grubu

olarak sağdan etki etsin. G grubu rankı 2'ye eşit veya daha az olan bayraklarda geçişli olur.

G grubunun etkisinin bayrak geçişli olması için gerek ve yeter şart $J \subseteq I$ için $(x_i G_i)_{i \in J}$ 'lerin çiftlerinin boştan farklı bir kesişime sahip olmasıdır. Yani, kosetlerin her ailesi bazı ortak elemanlara sahiptir.

Şimdi bir G grubu ve onun $\{G_i : i \in I\}$ alt gruplarının bir ailesi verilsin. Yukarıda tanımlanan pregeometri $\Gamma(G, \{G_i : i \in I\})$ ile gösterilecektir. Bundan sonra bu pregeometri basitçe Γ ile temsil edilecektir. Eğer Γ bir geometri ise o bir koset geometri olarak adlandırılacaktır.

Yapıları bayrak geçişli olan geometrilere çalışmak için Tits algoritması güçlü bir kavramdır.

Bu bölüm boyunca aşağıdaki gösterimler kullanılacaktır.

$\Gamma(G, (G_i)_{i \in I})$ bir koset geometri olsun. $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq I$ için $i_1, \dots, i_k$ ifadesi α ile gösterilir ise $G_{i_1, \dots, i_k}$ için G_α yazılabilir. Aslında buradaki $G_{i_1, \dots, i_k}$ ifadesi $G_{i_1} \cap \dots \cap G_{i_k}$ 'ya eşittir. Bu $G_{\{i_1, \dots, i_k\}}$ için kendi içinde bir kısaltmadır. Γ geometrisinin minimal parabolik alt gruplarının kümesi olan $\{G_{I-\{i\}} : i \in I\}$ için kısaca $\{G_{I-i} : i \in I\}$ yazılabilir.

4.9. Bir Koset Geometrinin Özellikleri

Bu bölümde koset geometrilere ait bazı özellikler tanıtılmakta ve çalışılmaktadır (Buekenhout, 1995; Buekenhout ve ark., 1998; Buekenhout ve ark., 2003; Buekenhout ve Cohen, 2009; Pasini, 1994).

4.9.1. Bayrak Geçişlilik

G bir grup, $\{G_i : i \in I\}$ kümesi G grubunun alt gruplarının bir ailesi ve $\Gamma(G, \{G_i : i \in I\})$ bir koset geometri olsun. Γ geometrisi içinde J tipinden bir bayrak F_J ile gösterilir. Aşağıdaki sonuç, Γ geometrisinin bayrak geçişli geometri olup olmadığını kontrol etmek için verilmiştir.

Lemma 4.9.1.1. (Buekenhout ve Hermand, 1991) $\mathcal{P}(I)$, I tip kümesinin tüm alt kümelerinin bir kümesi olsun ve $\alpha: \mathcal{P}(I) - \{\emptyset\} \rightarrow I$ bir fonksiyon olsun öyle ki her $J \subset I, J \neq \emptyset$ için $\alpha(J) \in J$ 'dir. Γ 'nın bayrak geçişli olması için gerek ve yeter şart her $J \subset I$ için öyle ki burada $|J| \geq 3$ olmak üzere

$$\bigcap_{j \in J - \alpha(J)} (G_j G_{\alpha(J)}) = \left(\bigcap_{j \in J - \alpha(J)} G_j \right) G_{\alpha(J)}$$

Ayrıca (Pasini, 1994), geometrinin bağlantılı olması durumunda bayrak geçişliliği kontrol etmek için gerek ve yeter şart vermiştir. Bu, Lemma 4.9.1.2'dir (Pasini, 1994).

Lemma 4.9.1.2. G grubunun bayrak geçişli olması için gerek ve yeter şart her $i \in I$ için G_{I-i} alt grubunun F_{I-i} panelini içeren chamberların kümesi üzerinde geçişli olmasıdır.

İspat: Soldan sağa içerme aşıkârdır. Diğer içerme ispatlansın. Her $i \in I$ için G_{I-i} alt grubu F_{I-i} panelini içeren chamberların kümesi üzerinde geçişli olsun. Bir C chamberı verilsin. $C_0, C_1, \dots, C_m = C$, C_0 'dan C 'ye bir gallery olsun. C_0 'ı C 'ye götüren bir $g \in G$ 'nin var olduğu m üzerinden tümevarımla ispatlanacaktır. $m=0$ ise ispatlanacak bir şey yoktur. $m \geq 1$ olsun. Tümevarım hipotezinden C_0 'ı C_{m-1} 'e götüren bir $g_1 \in G$ elemanı vardır. i , $C_{m-1} \cap C_m$ panelinin cotipi olsun. $C_0 = g_1^{-1}(C_{m-1})$ ve $g_1^{-1}(C_m)$ chamberları i -komşudur. Bu nedenle, varsayımdan C_0 'ı $g_1^{-1}(C_m)$ 'e götüren bir $g_2 \in G_{I-i}$ elemanı vardır. Bundan dolayı $g_1 g_2$, C_0 'ı C_m 'e götürür. İspat tamamlanır.

(Tits, 1974) kolay bir örnek vermişti. Birçok matematikçi bu örneği çözmeye çalıştı ama bu örneğin görüldüğü kadar kolay olmadığını anladılar. O, Lemma 4.9.1.3'te verildi. Bu lemma, bayrak geçişlilik kavramına ilişkin son derece kullanışlı bir sonuçtur. Örneğin (Dehon, 1994) Lemma 4.9.1.1'e dayandırılan bir algoritma uygulamasından sonra oluşturulan hesaplamayı basitleştirmek için Lemma 4.9.1.3'ü kullandı. Lemma 4.9.1.3'ün ispatı Horn'dan alınmıştır.

Lemma 4.9.1.3. (Tits, 1974) G_1, G_2, G_3 bir G grubunun üç alt grubu olsun. Aşağıdaki durumlar denktir.

1. $G_2 G_1 \cap G_3 G_1 = (G_2 \cap G_3) G_1$
2. $(G_1 \cap G_2)(G_1 \cap G_3) = (G_2 G_3) \cap G_1$
3. Eğer xG_1 , yG_2 ve zG_3 kosetlerinin ikişer ikişer kesişimi boştan farklı ise $xG_1 \cap yG_2 \cap zG_3 \neq \emptyset$ olur.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2): Gerçekten, (2)'nin sol tarafı açıkça sağ tarafı içinde içerilir. Bu yüzden, keyfi bir $h = g_2 g_3 = g_1 \in (G_2 G_3) \cap G_1$ seçilsin. Şimdi $g_3 = g_2^{-1} g_1$, $G_2 G_1$ içinde içerilir ama aynı zamanda $G_3 G_1$ içinde içerilir ve bundan dolayı, (1)'den h elemanı $(G_2 \cap G_3) G_1$ içindedir. Ayrıca, $g_{23} \in G_2 \cap G_3$ ve $\tilde{g}_1 \in G_1$ var öyle ki $g_3 = g_2^{-1} g_1 = g_{23} \tilde{g}_1$ 'dir. Böylece $g_2 g_{23} = g_1 \tilde{g}_1^{-1} \in G_1 \cap G_2$ ve $g_{23}^{-1} g_3 = \tilde{g}_1 \in G_1 \cap G_3$ olur. Bu nedenle, $h = g_2 g_3 = (g_2 g_{23})(g_{23}^{-1} g_3) \in (G_1 \cap G_2)(G_1 \cap G_3)$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (3): Genelliği bozmadan $x = 1$ farz edilsin. $G_1 \cap y G_2 \neq \emptyset$ 'dan $y \in G_1 G_2$ 'dir ve benzer şekilde $z \in G_1 G_3$ bulunabilir. Böylece, $\tilde{g}_1, g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, $g_3 \in G_3$ uygun elemanları için $y = g_1 g_2$ ve $z = \tilde{g}_1 g_3$ olur.

$y G_2 \cap z G_3 \neq \emptyset$ 'tan $y^{-1} z \in G_2 G_3$ yazılabilir. Bundan dolayı, $g_2^{-1} g_1^{-1} \tilde{g}_1 g_3 \in G_2 G_3$ ise $g_1^{-1} \tilde{g}_1 \in (G_2 G_3) \cap G_1$ olur. Ama (2) kullanılarak, genelliği bozmadan $g_1 \in G_1 \cap G_2$ ve $\tilde{g}_1 \in G_1 \cap G_3$ olduğu farz edilebilir. Böylece $y \in G_2$ ve $z \in G_3$ olur. Bu yüzden, $x G_1 \cap y G_2 \cap z G_3 = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \neq \emptyset$ olur.

(3) $\Rightarrow$ (1): (1)'in sağ tarafı açıkça sol tarafında içerilir. Bu yüzden, içermenin ters tarafı ispatlanacaktır. $h \in G_2 G_1 \cap G_3 G_1$ olduğu farz edilsin. Uygun $y, z \in G_1$ için $h \in G_2 y \cap G_3 z$ olur. Böylece $y \in G_1 \cap y G_2$ ve $z \in G_1 \cap z G_3$ olur. Böylece, (3)'ten $g_1 \in G_1 \cap G_2 y \cap G_3 z$ vardır ve $1 \in G_2 y g_1^{-1} \cap G_3 z g_1^{-1}$ olur. Bu durum, $y g_1^{-1} \in G_2$ ve $z g_1^{-1} \in G_3$ olduğunu ima eder. Bundan dolayı, $h g_1^{-1} \in G_2 y g_1^{-1} \cap G_3 z g_1^{-1} = G_2 \cap G_3$ ve böylece istenilen $h \in (G_2 \cap G_3) G_1$ bulunur.

Böylece lemma'nın ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 4.9.1.3'ün (1) ifadesi Lemma 4.9.1.1'in özel bir durumu olduğunu açıklar.

(MAGMA, 1997) yazılımında Leemans, Lemma 4.9.1.4 ve Teorem 4.9.1.5'te bayrak geçişliliği kontrol etmek için bir algoritma yaptı. Lemma 4.9.1.3, Lemma 4.9.1.4 ve Teorem 4.9.1.5'i ispatlamak için kullanılacaktır (Leemans, 1994; Leemans, 2003).

Lemma 4.9.1.4. $\Gamma(G, \{A, B, C\})$ rankı 3 olan bayrak geçişli bir koset geometri ve H , G grubunun bir alt grubu olsun. $\Gamma_A(G, \{A, B, H\})$, $\Gamma_B(G, \{A, H, C\})$ ve $\Gamma_C(G, \{H, B, C\})$ pregeometrilerinin bayrak geçişli geometriler olması için gerek ve yeter şart $\Gamma''(G, \{A, B, C, H\})$ pregeometrisinin bir bayrak geçişli geometri olmasıdır.

İspat: Sağdan sola içerme, Γ'' pregeometrisi bayrak geçişli ve Γ_A , Γ_B ve Γ_C kesmeleri Γ'' geometrisinin kesmeleri olduğundan bu kesmeler de bayrak geçişlidir.

Tersine, $\Gamma'(H, \{A \cap H, B \cap H, C \cap H\})$ olsun ve bu geometrinin bayrak geçişli olduğu gözlemlensin. Sonucu görmek amacıyla aşağıdaki (4.1) ifadesinin sağlandığı görülsün:

$$AC \cap BC \cap HC \subseteq (A \cap B \cap H)C \quad (4.1)$$

Şimdi buradan

$$\begin{aligned} (A \cap B \cap H)C &= ((A \cap H) \cap (B \cap H))(C \cap H)C \\ &= ((A \cap H)(C \cap H) \cap (B \cap H)(C \cap H))C \\ &= (H \cap AC \cap BC)C \end{aligned}$$

olur ki bu eşitlikler sağlanır. Çünkü Γ' , Γ_A , Γ_B ve Γ_C bayrak geçişlidir. Bu yüzden, (4.1) aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$AC \cap BC \cap HC \subseteq (H \cap AC \cap BC)C \quad (4.2)$$

$t \in AC \cap BC \cap HC$ olsun. Bazı $h \in H$, $c \in C$ için açıkça $t = hc$ olur. Özellikle $t \in AC$ ve $t \in BC$ 'dir. Bundan dolayı, $tc^{-1} = hcc^{-1} = h$ olur. Sonuç olarak $h \in AC$ ve $h \in BC$ olur. O halde, $AC \cap BC \cap HC \subseteq (H \cap AC \cap BC)C$ olduğu görülür ve ispat biter.

Teorem 4.9.1.5. $\Gamma = (G, \{G_1, G_2, \dots, G_n\})$ rankı n olan bayrak geçişli bir koset geometri, H grubu G grubunun bir alt grubu ve $\Gamma'(H, \{G_1 \cap H, \dots, G_n \cap H\})$ bayrak geçişli bir geometri olsun. $\Gamma_{(ij)}(G, \{G_i, G_j, H\})$ pregeometrisinin her $i, j \in I$, $i \neq j$ için bayrak geçişli geometri olması için gerek ve yeter şart $\Gamma''(G, \{G_1, \dots, G_n, H\})$ pregeometrisinin bir bayrak geçişli geometri olmasıdır.

İspat: Sağdan sola içerme bayrak geçişli bir geometrinin kesmesinin bayrak geçişli olmasından dolayı açıktır. Ters için tümevarım ile devam edilsin. Lemma 4.9.1.4'ten $n = 2$ için sağlanır. Sonuç $n - 1$ için doğru ise

$$(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap H)A_n \supseteq A_1A_n \cap \dots \cap A_{n-1}A_n \cap HA_n \quad (4.3)$$

ifadesinin sağlandığını görelim:

(4.3) eşitliğinin sol kısmı

$$(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap H)A_n = ((A_1 \cap H) \cap \dots \cap (A_{n-1} \cap H))(A_n \cap H)A_n \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir. Çünkü $(A_n \cap H)A_n = A_n$ 'dir. Varsayımdan Γ' bayrak geçişli olduğundan (4.4) eşitliğinin sağ tarafı

$$((A_1 \cap H)(A_n \cap H) \cap \dots \cap (A_{n-1} \cap H)(A_n \cap H))A_n \quad (4.5)$$

ifadesine eşittir. Şimdi $\Gamma_{(ij)}$ 'ler bayrak geçişlidir, bu yüzden (4.5) ifadesi

$$(H \cap A_1 A_n \cap \dots \cap A_{n-1} A_n)A_n \quad (4.6)$$

ifadesine eşittir. Burada (4.3)'ün sağ tarafının (4.6)'da içerildiği görülmek isteniyor. t , (4.3) eşitliğinin sağ tarafının bir elemanı olsun. Yani, $t \in A_1 A_n \cap \dots \cap A_{n-1} A_n \cap H A_n$ olsun. Bazı $\alpha \in A_n$, $h \in H$ için $t = h\alpha$ vardır. Diğer taraftan, $h = t\alpha^{-1}$ ki $\alpha^{-1} \in A_n$ olur ve bu yüzden, $h \in A_i A_n$ olur ki burada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ 'dir. Bu, t 'nin (4.6)'ya ait olduğunu söyler.

4.9.2. Firmness

$\Gamma(G, \{G_i : i \in I\})$ bir koset geometri olsun. Her $j \in I$ için bir $F_j = \{G_i : i \in I - \{j\}\}$ bayrağının G içindeki stabilizerı $H_j = \bigcap_{i \in I - \{j\}} G_i$ alt grubudur ve H_j içinde G_j 'nin stabilizerı B Borel alt grubudur. Bu yüzden, F_j 'yi içeren chamberların sayısı H_j içinde B 'nin indexine eşittir. Bundan dolayı,

$$\Gamma \text{ 'nin firm olması için gerek ve yeter şart her } j \in I \text{ için } \frac{|H_j|}{|B|} \geq 2 \text{ olmasıdır.}$$

4.9.3. Rezidülü Bağlantılık

Bölüm 4.6.1'deki rezidülü bağlantılık kavramı tanıtılmaktadır. Aşağıdaki sonuç rankı n olan bir koset geometrinin rezidülü bağlantılı olması için gerek ve yeter şartı vermektedir. Diğer taraftan, kuvvetli bağlantılık ve rezidülü bağlantılık sonlu ranklı geometrilerde birbirini gerektirir (bakınız Önerme 4.6.1.3).

Lemma 4.9.3.1. (Buekenhout, Hermand, 1991) $\Gamma(G, \{G_i : i \in I\})$ rankı 2'ye eşit veya daha büyük olan sonlu ranklı bayrak geçişli bir geometri olsun.

1. Γ 'nin bağlantılı olması için gerek ve yeter şart G grubunun G_i 'ler tarafından üretilmesidir.

2. Γ 'nın rezidülu bağlantılı olması için gerek ve yeter şart her $J \subset I$ için öyle ki burada $|J| \leq n-2$, $\bigcap_{j \in J} G_j$ alt grubunun $\bigcup_{k \in I-J} \left(\bigcap_{j \in J \cup \{k\}} G_j \right)$ tarafından üretilmesidir.

İspat: 1. Γ bağlantılı ve $g \in G$ olsun. $x = G_i$ ve $y = G_j g$ elemanları ele alınsın. Bir $x = G_i * G_1 x_1 * G_2 x_2 * \dots * G_n x_n * G_j g = y$ yolu vardır. Komşuluk tanımından $G_1 G_i$ içinde x_1 , $G_2 G_1 G_i$ içinde x_2 , $G_3 G_2 G_1 G_i$ içinde x_3 , ..., $G_{n-1} \dots G_1 G_i$ içinde x_n ve $G_n \dots G_1 G_i$ içinde g seçilebilir. Sonuç olarak, G_i 'ler G 'yi üretir. Tersine, G 'ler G_i 'ler tarafından üretiliyorsa ve $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ için $g = g_n \dots g_1 g_i$, $g_k \in G_k$ ise $x = G_i$ ve $y = G_j g$, $x * G_1 g_i * G_2 g_1 g_i * \dots * G_n g_{n-1} \dots g_1 g_i * y$ yolu tarafından bağlanır.

Γ geometrisi bayrak geçişli olduğundan herhangi iki eleman bir yol ile bağlanır.

İkincisi için her rezidüye ilk durumu uygulamak yeterlidir.

4.9.4. Primitivity

Permütasyon gruplarında primitivity kavramı için (Cameron, 1999) referans alınabilir. Geometrilere çerçevesinde primitivity (Buekenhout ve ark., 1999)'da çalışılabilir.

Eğer G permütasyon grubu X kümesi üzerine geçişmeli olarak etki ediyorsa ve G, X 'in aşıkâr olmayan bir parçasını korumuyorsa bir X kümesi üzerine etki eden bir G grubu primitive olarak adlandırılır. Aksi halde, G geçişmeli ve G, X 'in aşıkâr olmayan bir parçasını koruyorsa G imprimitive olarak adlandırılır.

$\Gamma(G, \{G_i : i \in I\})$ rankı $n \geq 2$ olan bir koset geometri olsun. G , geometri içinde verilen her bir tipin elemanlarında primitive olarak etki ediyorsa Γ geometrisinin primitive olduğu söylenir ve (PRI) ile gösterilir. Lemma 4.9.4.1 bir geometrinin primitive olup olmadığını kontrol etmek için gerek ve yeter şartı vermektedir (Wielandt, 1964; (Cameron, 1999, Teorem 1.7)).

Lemma 4.9.4.1. G grubunun verilen bir G_i alt grubunun kosetleri üzerinde primitive olarak etki etmesi için gerek ve yeter şart G_i 'nin G içinde maksimal olmasıdır.

İspat: G içinde G_i alt grubunun maksimal olmadığı farz edilsin. Yani, G grubunun H alt grubu var öyle ki $G_i < H < G$ olur. Şimdi $H = \{G_i h : h \in H\}$ vardır. Böylece, $g \in G$ için $Hg = \{G_i hg : h \in H\}$ olur. Bunun anlamı, G aşıkâr olmayan bir

parçayı korur. Sonuç olarak, G grubunun etkisi G_i alt grubunun kosetleri üzerinde imprimitive olur. Dolayısıyla, kabulümüz yanlış hükmümüz doğrudur.

Tersine, G grubunun etkisinin G_i alt grubunun kosetleri üzerinde imprimitive olduğu farz edilsin. Δ aşikâr olmayan bir eşlenik sınıfı olsun. Δ 'nın G_Δ stabilizeri ele alınsın. G_Δ , açıkça G_i ve G arasında içerilen bir gruptur. Dolayısıyla, kabulümüz yanlış hükmümüz doğrudur. İspat tamamlanır.

Sonuç olarak, ispatı aşikâr olan Sonuç 4.9.4.2 elde edilir.

Sonuç 4.9.4.2. Bir $\Gamma(G, \{G_i : i \in I\})$ koset geometrisinin primitive olması için gerek ve yeter şart her bir G_i 'nin G içinde maksimal olmasıdır.

4.9.5. (RPri), (WPri) ve (RWPri) Özellikleri

(Buekenhout ve ark., 1999; Leemans, 2009).

Bir F bayrağının her bir Γ_F rezidüsüne, G içinde F 'nin G_F stabilizeri primitive olarak etki ediyorsa $\Gamma(G, \{G_i : i \in I\})$ geometrisi rezidülü primitive olarak adlandırılır ve (RPRI) ile gösterilir.

Bazı $i \in I$ var öyle ki G , Γ 'nin i -elemanlarının kümesi üzerinde primitive olarak etki ediyorsa Γ geometrisi weakly primitive olarak adlandırılır ve (WPRI) ile gösterilir.

Herhangi $\emptyset \subseteq J \subseteq I$ için ez az bir $i \in I - J$ var öyle ki $G_{J \cup \{i\}}$, G_J içinde maksimaldir şartını sağlayan bir $\Gamma(G, \{G_i : i \in I\})$ geometrisi rezidülü weakly primitive olarak adlandırılır ve (RWPRI) ile gösterilir. Eğer Γ bayrak geçişli ise bu şu şekilde de yorumlanabilir: Bir F bayrağının G_F stabilizeri her bir Γ_F rezidüsüne G içinde weakly primitive olarak etki ediyordur.

(RWPRI) şartı alt grup örgüsünün tüm alt gruplarının ikişer ikişer ayrık ve tüm $i \in I$ için $\bigcap_{j \in I} G_j$ kesişiminin $\bigcap_{j \in I - \{i\}} G_j$ 'nin bir maksimal alt grubu olduğunu söyler. Ayrıca, uygun bir şekilde indisler düzenlenirse $i = 2, \dots, n$ için $\bigcap_{j \in \{1, \dots, i\}} G_j$ kesişimi $\bigcap_{j \in \{1, \dots, i-1\}} G_j$ 'nin bir maksimal alt grubudur.

Şimdi yukarıda tanımlanan primitivelik kavramları arasındaki farklı içermeler Lemma 4.9.5.1 altında özetlenebilir.

Lemma 4.9.5.1. Aşağıdaki içermeler sağlanır.

1. $(RPRI) \Rightarrow (PRI)$
2. $(RPRI) \Rightarrow (RWPRI) \Rightarrow (WPRI)$

4.9.6. $(IP)_2$ Kesişim Özelliği

Γ , elemanları noktalar ve doğrular olarak adlandırılan bir rank iki geometrisi olsun. İki farklı nokta en fazla bir ortak doğru ile ilişkili oluyorsa Γ 'nın bir partial linear space olduğu söylenir.

Γ 'nın her rank iki rezidüsü bir genelleştirilmiş digon veya partial linear spaceden herhangi biri ise Γ tüm rank iki rezidüleri üzerinde kesişim özelliğini sağladığı söylenir ve $(IP)_2$ ile gösterilir.

Kesişim özellikleri daha detaylı olarak (Pasini, 1994)'te çalışılabilir. Ayrıca, (Buekenhout, 1979) ve (Buekenhout, 1982) referans alınabilir.

5. SONLU GRUPLAR İÇİN YENİ GEOMETRİLER

Bu bölümde, geometrilerin sınıflarından yeni geometriler elde etmek için iki yöntem tanımlanacaktır. Bu yöntemler sonlu gruplar için yeni geometrilerin çoğunda, özellikle sporadic gruplar için geçerlidir. Ayrıca bu yöntemler, politoplarla ilgili yeni thin (ince) geometriler üretir.

5.1. Giriş

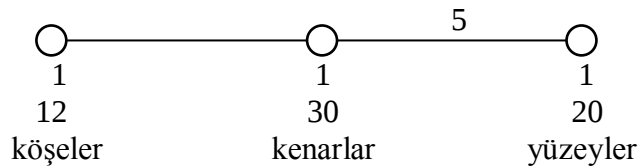
Bazı özel geometrilerden başlansın. Bu bölümde tanımlanmış iki genel yapı kullanılarak yeni geometriler elde edilebilir. Ayrıca, bu yapılar bazı geometrilerin kuvvetle diğerleri ile ilgili olduğunu gösterir.

Bu bölümde ispatlanan sonuçlar iki yönden önemlidir:

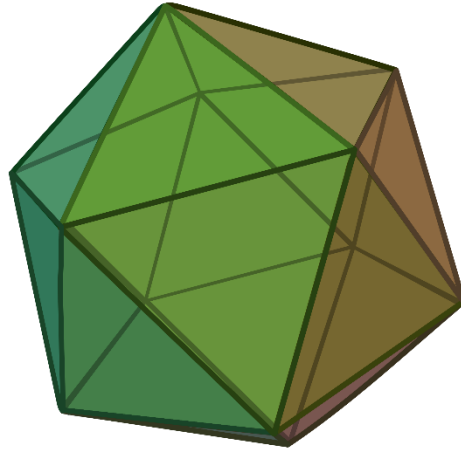
Birincisi, yöntemler bilinen geometrilerden yeni geometriler üretir. Özellikle sporadic gruplar için politoplarla ve yeni geometrilerle ilgili yeni thin geometriler elde edilir.

İkincisi, hangi geometrilerin hangilerinden türetildiğini göstererek sınıflandırma işlemi basitleştirilebilir. Aksiyomları sağlayan tüm geometrileri listelemek yerine sadece temel olanları listelemek yeterlidir. Çünkü diğerleri temel olanlardan türetilmiştir. Örneğin, tüm düzenli thin geometriler üzerine bayrak geçişli olarak etki eden A_5 grubuna bakılırsa (Leemans, 1999) izomorfizmaya uygun dört tane rank-3 geometrisi elde edilir. Eğer bu bölümde tanımlanan yapı kullanılarak başkalarından elde edilemeyen bu geometriler sayılırsa aslında sadece iki tane rank-3 geometrisi vardır. $PSL(2,8)$ için 24 geometri yerine 16 geometri olur.

Amacı örneklemek için icosahedron ve $2 \times A_5$ grubu ile ilgili basit bir örnek alınsın. Γ_1 icosahedronun köşe, kenar ve yüzeylerini içeren bir rank-3 geometrisi olsun. Γ_1 genellikle H_3 olarak da adlandırılan aşağıdaki iyi bilinen diyagrama sahiptir:

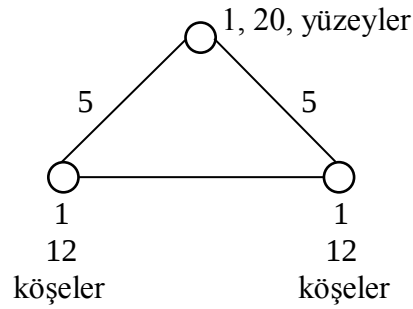


Şekil 5.1. Icosahedronun diyagramı



Şekil 5.2. Icosahedron

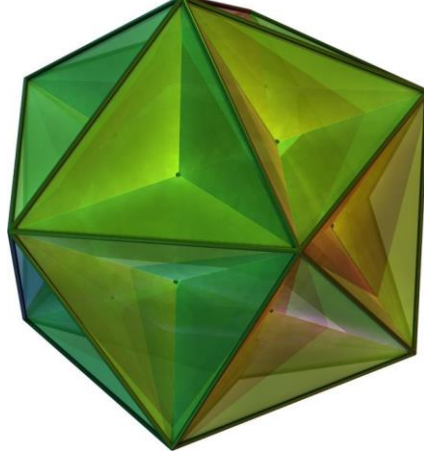
Yukarıdaki icosahedrondan yeni bir $\tilde{\Gamma}_1$ geometrisi inşa edilebilir. Bu geometri şu şekilde inşa edilecektir: Icosahedronun kenarları çıkarılacak ve köşelerinin bir kopyası kenarların yerine koyulacaktır. Farklı tiplerin iki köşesinin ilişkili olması için gerek ve yeter şart onların, icosahedronun kenarlarının biri üzerinde bulunan farklı köşelerinin kopyaları olmasıdır. Köşelerin iki kopyasını ve yüzeyleri içeren $\tilde{\Gamma}_1$ 'nin diyagramı aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.3. Icosahedronun kenarlarının çıkarılması ile oluşan yeni geometrinin diyagramı

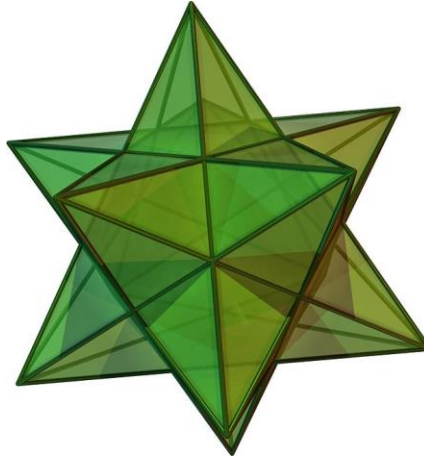
$\tilde{\Gamma}_1$ 'nin güzel bir temsili olarak “great dodecahedron” gösterilebilir. Bu yıldız polihedron, icosahedron gibi aynı köşelere ve kenarlara sahiptir ve yüzeyleri, beş köşesi ortak bir köşeye komşu olan konveks pentagonlardır. $\tilde{\Gamma}_1$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir: Tipi 0 olan elemanlar great dodecahedronun köşeleridir, tipi 1 olan elemanlar onun

beşgen şeklindeki yüzeyleridir ve tipi 2 olan elemanlar icosahedron ile ilişkili bir yüzeye sınırlandırılan üç beşgen yüzeyi içeren hücredir ve ilişki kapsamadır.



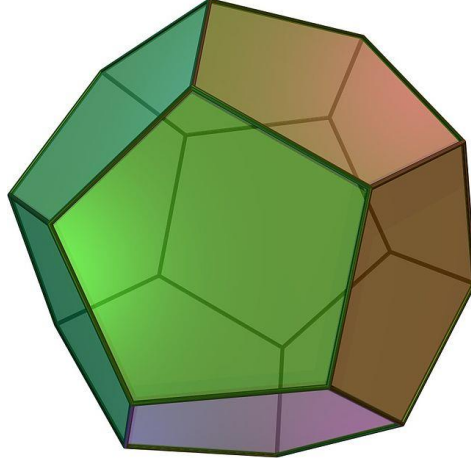
Şekil 5.4. Great Dodecahedron

$\tilde{\Gamma}_1$ 'nın başka bir temsilcisi de small stellated dodecahedron olarak gösterilebilir.

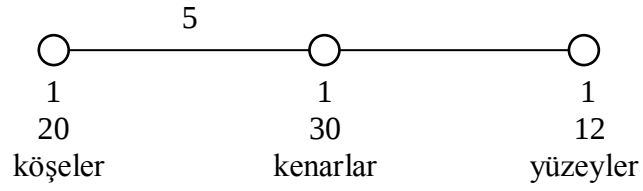


Şekil 5.5. Small Stellated Dodecahedron

Benzer şekilde bir dodecahedronun köşelerini, kenarlarını ve yüzeylerini içeren Γ_2 geometrisi ele alınsın.

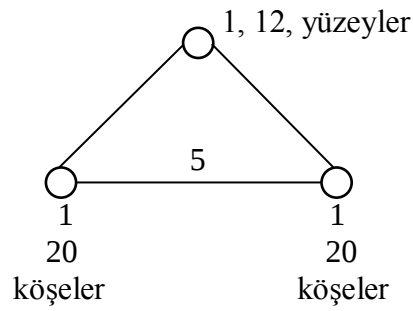


Şekil 5.6. Dodecahedron



Şekil 5.7. Dodecahedronun diyagramı

$\tilde{\Gamma}_2$ geometrisinin diyagramı aşağıdaki gibi olur:

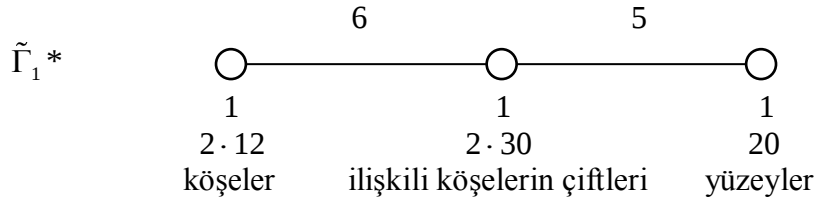


Şekil 5.8. Dodecahedronun kenarlarının çıkarılması ile oluşan yeni geometrinin diyagramı

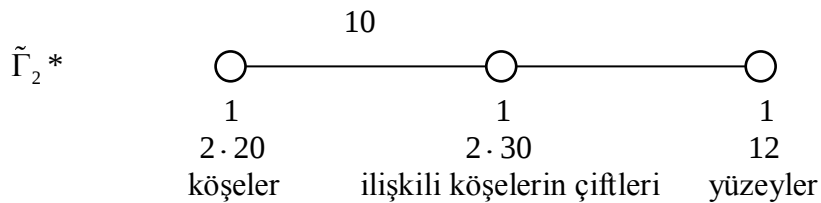
$2 \times A_5$ grubu Γ_1 , $\tilde{\Gamma}_1$ ve $\tilde{\Gamma}_2$ geometrileri üzerine bayrak geçişli olarak etki eder: Bu üç geometri bu grup için geometrilerin bir denklik sınıfı olarak düşünülebilir. Benzer şekilde Γ_1 , $\tilde{\Gamma}_1$ ve $\tilde{\Gamma}_2$ 'ya karşılık gelen $2 \times A_5$ grubunun karşılıklı köşelerinin çiftlerini permüte eden otomorfizma ile bölümleri A_5 için geometrilerin bir denklik sınıfını sağlar (yani A_5 için (Leemans, 1999)'da listelenen dört geometrinin üçü). Bu diyagramlar, yukarıdaki Γ_1 , $\tilde{\Gamma}_1$ ve $\tilde{\Gamma}_2$ geometrilerinin diyagramları ile aynıdır.

Mevcut bölümün ikinci görüşü, Neumaier tarafından yapılan (bakınız (Neumaier, 1982), Teorem 4) önceki yapıyı daha öncekine eklemektir. Gerçekten, Neumaier teoreminin bir genişlemesine ihtiyaç vardır ve bu genişleme Bölüm 5.6'da ispatlanacaktır. Bu genişleme, politoplar ve gruplar için daha fazla geometri inşa etmeyi sağlayacaktır.

İkinci görüş, yukarıda elde edilen $\tilde{\Gamma}_1$ ve $\tilde{\Gamma}_2$ geometrileri ile örneklensin. İnşa şu şekilde yapılacaktır: Köşelerin iki çeşidi 0-eleman gibi bir araya getirilecek, ilişkili köşelerin çiftleri 1-eleman olarak eklenecek ($\tilde{\Gamma}_1$ ve $\tilde{\Gamma}_2$ içinde tipi $\{0,1\}$ olan bayraklar) ve yüzeyler 2-eleman gibi tutulacaktır; ilişki kapsamadır. Geometriler sırası ile



Şekil 5.9. Icosahedronun Neumaier teoremine göre diyagramı



Şekil 5.10. Dodecahedronun Neumaier teoremine göre diyagramı

$2 \times S_5$ grubu bu geometriler üzerine chamber geçişli olarak etki eder.

5.2. Terimler ve Notasyonlar

Geometrilere hakkındaki temel tanımlar bu bölümde (Tits, 1981) veya (Buekenhout, 1981) içinde tanıtıldığı gibi alınmıştır (ilişki, tip, rank, bayrak, rezidü, shadow,...). Aksi belirtilmedikçe (Buekenhout, 1983) ile birlikte (Buekenhout, 1985) veya (Tits, 1980) içinde kullanılan notasyonlar kullanılmıştır. Konuya genel bir giriş için (Buekenhout, 1995) tercih edilmiştir.

Δ tiplerinin bir kümesi üzerinde bir ilişki yapısı $\Gamma = (X, I, t)$ üçlüsüdür. Burada;

- X , varyete olarak adlandırılan elemanların bir kümesidir.
- $t: X \rightarrow \Delta$ tip fonksiyonları olarak adlandırılan bir dönüşümdür öyle ki $\forall x \in X$ için $t(x) = i \in \Delta$ x elemanının tipidir. Tipi i olan eleman bir i -eleman olarak adlandırılır.
- I bir ilişki bağıntısıdır. Elemanların kümesi üzerinde simetri ve yansıma şartını sağlar ve $\forall x, y \in X$ için $t(x) = t(y)$ ve xIy ise $x = y$ 'dir.

Γ 'nın her bayrağı bir chamber içinde içerildiğinde Γ 'ya bir geometri denir.

Γ 'nın her bayrağı için F 'nin J -shadowu veya J üzerinde F 'nin shadowu F ile ilişkili olan J tipinden tüm bayrakların $Sh_J(F)$ kümesidir. Herhangi $i \in \Delta$ için i tipinin elemanları üzerinde bir F bayrağının shadowu $\sigma_i(F)$ ile gösterilir.

F 'nin rezidüsü $Res(F)$ ile gösterilir. Farklı $i, j \in \Delta$ verilsin. $\{i, j\}$ tipi için Γ geometrisinin tüm rezidülerinin sınıfı Γ_{ij} ile gösterilir.

J , Δ 'nın herhangi alt kümesi olsun. Γ 'nın J -kesmesi $t^{-1}(J)$ kümesinde J üzerinde Γ 'nın alt sistemidir. Bu bölümde, Γ 'nın $\{i, j\}$ -kesmesi kullanılacaktır ki bu kesme, farklı $i, j \in \Delta$ için Γ 'nın ilişki bağıntısını sağlayan Γ geometrisinin tüm i -elemanları ve j -elemanlarının oluşturduğu alt sistemdir.

(Tits, 1981)'e göre, eğer Γ 'nın rankı en az 2 olan her rezidüsü bir bağlantılı geometri ise Γ geometrisi rezidülü bağlantılıdır.

Eğer Γ 'nın rankı en az 2 olan her kesmesi bir bağlantılı geometri ise ve eğer aynı özellik rankı en az 2 olan her rezidü için sağlanırsa Γ geometrisi kuvvetli bağlantılıdır (Buekenhout, 1981).

5.3. Bir Graphın Komşu Geometrisi

Bu bölüm boyunca, yönsüz ve çoklu kenarsız her graphın doğrusal olmadığı farz edilecektir. Onun köşe kümesi boş değildir ve her köşesi en az bir kenarı üzerindedir. Graph tek bir kenara indirgenemez.

G bir graph olsun. Onun köşelerinin kümesi G_0 ve kenarlarının kümesi G_1 ile gösterilsin. Farklı $p, q \in G_0$ için $\{p, q\} \in G_1$ olduğunda p ve q 'nun komşu olduğu söylenir ve $p \sim q$ ile gösterilir. G 'nin m uzunluğundaki bir devri, farklı köşelerin çiftlerinin bir $p_1, p_2, \dots, p_m$ dizisidir öyle ki $i = 1, \dots, m \pmod{m}$ için $p_i \sim p_{i+1}$ olur. $\{0, 1\}$ kümesi üzerinde G , bir $(G_0 \cup G_1, t, I)$ rank-2 geometrisi olarak düşünülebilir. Burada t $i = 0, 1$ için $t(G_i) = i$ olarak tanımlanan tip fonksiyonudur ve I , köşeler ve kenarlar arasında doğal ilişki bağıntısıdır. G graphı ile ilgili rank-2 geometrisi aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 5.3.1. Herhangi $G = (G_0 \cup G_1, t, I)$ graphına G 'nin komşuluk geometrisi olarak adlandırılan yeni bir $\tilde{G}$ rank-2 geometrisi ilişkilendirilir. Onun elemanları köşeler ve G 'nin köşelerinin komşuluklarıdır. Daha açık olarak, $\tilde{G} = (G_0 \times \{0\} \cup G_0 \times \{1\}, \tilde{t}, \tilde{I})$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

1. $i = 0, 1$ için $\tilde{t}(G_0 \times \{i\}) = i$
2. $p, q \in G_0$ için $p \sim q$ olması için gerek ve yeter şart $(p, 0) \tilde{I} (q, 1)$ sağlanır.

Eğer $\mathcal{G}$ graphların bir sınıfı ise $\tilde{\mathcal{G}}$, $G \in \mathcal{G}$ için tüm $\tilde{G}$ 'ların sınıfını gösterir.

$\tilde{G}$ 'nın bazı faydalı özellikleri aşağıda listelenmiştir.

Lemma 5.3.2. $\tilde{G}$ bir self-dual geometri olup, $p \in G_0$ ve $i = 0, 1$ için $\Pi : (p, i) \rightarrow (p, i + 1 \pmod{2})$ polaritisini sağlar.

Lemma 5.3.3. $\tilde{G}$ 'nin bağlantılı olması için gerek ve yeter şart G 'nin bağlantılı ve uzunluğu tek sayı olan bir devir olmasıdır.

Lemma 5.3.4. $\tilde{G}$ 'nin tekrarlayan bloğu yoktur, yani 0-elemanların aynı kümesi ile ilişkili $\tilde{G}$ 'nin iki farklı 1-elemanının olmaması için gerek ve yeter şart G 'nin indirgenemez olmasıdır, yani iki farklı köşe bulunamaz ki her ikisi bu köşelerin aynı kümesine komşu olsun.

Lemma 5.3.5. $\tilde{G}$ kesişim özelliğini sağlar, yani (aşıkâr olmayan rank-2 geometrileri için) iki farklı 1-elemanın her ikisiyle ilişkili olan iki farklı 0-elemanın olmaması için gerek ve yeter şart G 'nin uzunluğu 4 olan bir devire sahip olmamasıdır.

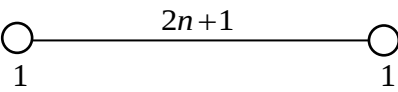
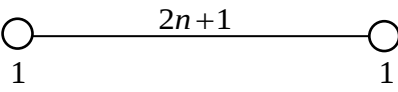
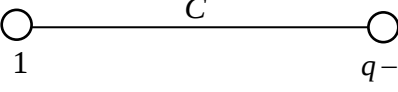
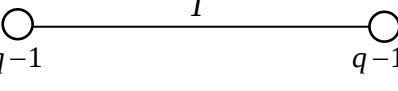
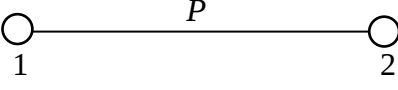
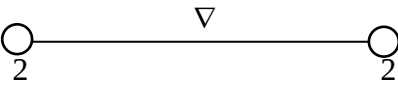
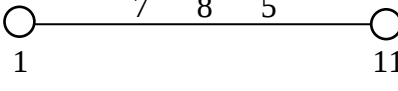
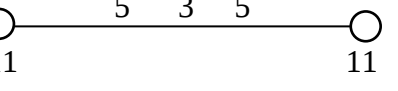
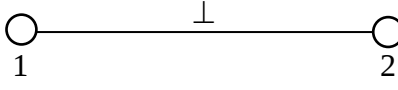
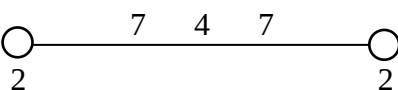
Lemma 5.3.6. G 'nin herhangi α otomorfizması $p \in G_0$ ve $i \in \{0,1\}$ için $\tilde{\alpha}(p,i) = (\alpha(p),i)$ olarak tanımlanan $\tilde{G}$ 'nin bir $\tilde{\alpha}$ Δ -otomorfizmasına neden olur. Tersine, $\tilde{G}$ 'nin herhangi Δ -otomorfizması $\tilde{G}$ 'nin 0-elemanları üzerine kısıtlaması G 'nin bir otomorfizmasına neden olur. Lemma 5.3.2'den $Aut(\tilde{G}) = Aut(G):2$ elde edilir.

Tüm G 'ler için Lemma 5.3.2'nin Π polaritisi $Z(Aut(\tilde{G}))$ içinde olmadığı için genel olarak $Aut(\tilde{G}) \neq Aut(G) \times 2$ olur.

$\tilde{G}$ 'nin parametreleri (Buekenhout, 1983), G 'nin parametrelerinden genel bir formül ile hesaplanamaz. Yine de, aşağıdaki lemma gonality hakkında bir şeyler söyler.

Lemma 5.3.7. Eğer G geometrisinin g gonaltisi çift sayı ise $\tilde{G}$ 'nin $\tilde{g}$ gonaltisi $\frac{g}{2}$ 'dir. Eğer G geometrisinin g gonaltisi tek sayı ise iki durum vardır. İlk durumda, G graphı $2g$ 'den küçük çift uzunlukta bir devire sahip olmadığında $\tilde{g} = g$ olur. İkinci durumda ise, G graphı $k < 2g$ çift uzunlukta bir devir olduğunda $\tilde{g} = \frac{k}{2}$ 'dir ve k bu özellik için minimaldir ($g < k$).

G ve $\tilde{G}$ graphlarının rank-2 diyagramlarının bazı örnekleri Tablo 5.1'de listelenmiştir.

G	$\tilde{G}$
$n \geq 1$ için $(2n+1)$ -gon 	$(2n+1)$ -gon 
$q \geq 3$ için K_{q+1} complete graphı $(g_{01} = 3 = d_{01}, d_{10} = 4)$ 	Tüm q -alt kümelerini sağlayan $q+1$ noktalarının bir kümesinin aşıkâr yapısı $(g_{01} = 2, d_{01} = d_{10} = 3)$ 
Petersen graphı $(g_{01} = 5 = d_{01}, d_{10} = 6)$ 	Desergues yapılandırmasının kenarları ve noktaları (S_5 grubu chamber-geçişli olarak etki eder.) $(g_{01} = 3, d_{01} = d_{10} = 5)$ 
J_1 grubu ile ilişkili (Buekenhout, 1985)'teki (34) diyagramı $(g_{01} = 5, d_{01} = 7, d_{10} = 8)$ 	J_1 grubu ile ilişkili (Buekenhout, 1985)'teki (35) diyagramı $(g_{01} = 3, d_{01} = d_{10} = 5)$ 
$PG(2, 7)$ 'de bir koniğe 28 nokta dışında diklik bağıntısının graphı ((Coxeter, 1983; Buekenhout, 1985)'te (99) grubuna bakınız)) $(g_{01} = 7, d_{01} = 9, d_{10} = 10)$ 	$PG(2, 7)$ 'de bir koniğe 28 nokta dışında projektif uzay tarafından içerilen nokta-kenar geometrisi $(PGL_2(7)$ grubu chamber-geçişli olarak etki eder) $(g_{01} = 4, d_{01} = d_{10} = 7)$ 

Tablo 5.1. G graphlarının ve onların $\tilde{G}$ geometrileri ile ilişkili bazı örnekler. -T'yi sağlayan- tümü kesişim özelliğini sağlar ve tekrarlanan bloklar olmaksızın tüm $\tilde{G}$ 'lar bağlantılıdır

5.4. Ana Sonuç

Ana teorem, aşağıda verilen şartları sağlayan geometriler için de geçerlidir. Bu şartlar birbirine denktir ve bu şartların denliğini gösteren ispat verilmiştir.

Lemma 5.4.1. Γ bir Δ kümesi üzerinde rankı $n \geq 3$ olan (sonsuz da olabilir) bir geometri ve $\{0,1\} \subset \Delta$ olsun. (A_1) , (A_2) ve (A_3) şartları aşağıda verilen (B_1) ve (B_2) şartlarına denktir.

(A_1) Tipi $\{0,1\}$ olan tüm rezidülerin Γ_{01} sınıfı graphların (rank-2) geometrilerinin bir $\mathcal{G}$ sınıfıdır (Bölüm 5.3'ün ifadesinde).

(A_2) e bir 1-eleman ve x ise $i \in \Delta - \{0,1\}$ olan bir i -elemen olsun. Eğer e ve x 'in her ikisi ile ilişkili olan farklı iki p ve q 0-elemanları varsa eIx 'tir.

(A_3) e bir 1-eleman ve x ise $i \in \Delta - \{0,1\}$ olan bir i -elemen olsun. Bu durumda eIx ima eder ki $\sigma_0(e)$, $\sigma_0(x)$ içinde içerilir.

(B_1) Γ 'nin $\{0,1\}$ -kesmesi bir graphın geometrisidir.

(B_2) e bir 1-eleman ve x ise $i \in \Delta - \{0,1\}$ olan bir i -elemen olsun. Bu durumda, eIx olması için gerek ve yeter şart $\sigma_0(e)$, $\sigma_0(x)$ içinde olmasıdır.

İspat: (B_1) ve (B_2) 'nin (A_1) , (A_2) ve (A_3) 'ü ima ettiği açıktır. Tersî ispatlansın.

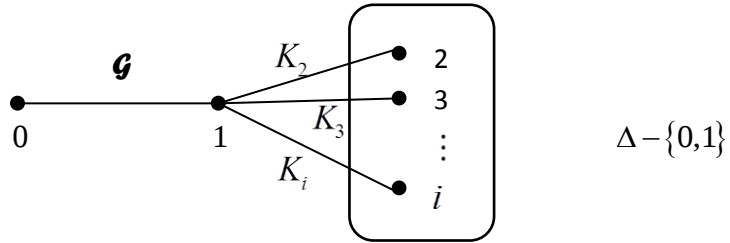
(B_1) 'in ispatı: e bir 1-eleman olsun. Γ bir geometri olduğundan e 'yi içeren bir C chamberı vardır. (A_3) 'ten e ile ilişkili herhangi 0-eleman x ile de ilişkilidir, burada $x \in C$ ve $t(x) \neq 0,1$ 'dir. C içinde cotipi $\{0,1\}$ olan bayrak ele alınsın ve onun rezidüsüne (A_1) uygulansın. $\sigma_0(e)$ 'nin iki elemana sahip olduğu sonucu çıkarılabilir. Eğer $\sigma_0(e) = \sigma_0(e')$ ise $e' = e$ olduğu gösterilmelidir. (A_2) ve (A_3) şartları kullanılarak e' ve e 'nin her ikisinin aynı x i -elemenları ile ilişkili olduğu söylenir, burada $i \neq 0,1$ 'dir. Bundan dolayı eğer F , e ile ilişkili cotipi $\{0,1\}$ olan bir bayrak ise bu F bayrağı e' ile de ilişkilidir. (A_1) 'den $e' = e$ olur. Her köşe boyunca köşelerin ve kenarların varlığı Γ 'nin bir geometri olması gerçeğindendir.

(B₂)'nin ispatı: $\sigma_0(e)$ 'nin iki elemanlı olduğu görüldüğünden (B₂), (A₂) ve (A₃)'ün bir sonucudur.

Lemma 5.4.2. Γ , Lemma 5.4.1'deki gibi olsun. (A₃) şartı $i \in \Delta - \{0,1\}$ için tüm Γ_{0i} 'lerin genelleştirilmiş digonların sınıfları olduğunu söyler.

İspat: (A₃) şartı, tipi 1 olan herhangi e elemanının rezidüsünde bulunan tipi i olan her x elemanının tüm 0-elemanlarla ilişkili olduğunu söyler. Buradan, tipi $\{0,i\}$ olan herhangi rank-2 rezidüsü bir genelleştirilmiş digondur.

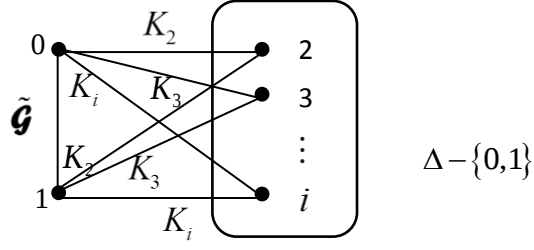
Lemma 5.4.2'nin çift taraflı versiyonu Lemma 5.4.5'te ispatlanacaktır. Önceki lemmanın ifadesindeki (A₁), (A₂) ve (A₃)'ü sağlayan bir geometrinin diyagramı aşağıdaki gibi çizilebilir:



burada K_i 'ler rank-2 geometrisinin keyfi sınıfları ve $\Delta - \{0,1\}$ üzerinde diyagram keyfidir.

(B₁)'den Γ 'nin herhangi e 1-elemanı e ile ilişkili 0-elemanların $\{p, q\}$ çifti ile tanımlanabilir. (B₂)'den $\{p, e\}$ ve $\{q, e\}$ bayraklarının rezidülerinin çakışması gerekir. Ayrıca, $\{0,1\}$ tipini içeren herhangi rezidü açıkça (B₁) ve (B₂)'yi sağlar (bundan dolayı (A₁), (A₂) ve (A₃)'ü de).

Teorem 5.4.3. Γ bir Δ kümesi üzerinde rankı $n \geq 3$ (sonsuz da olabilir) olan bir geometri olsun. Eğer bazı $\{0,1\} \subset \Delta$ için Γ , (A₁), (A₂) ve (A₃)'ü veya denkleri olan (B₁) ve (B₂)'yi sağlıyorsa ve Γ 'nin diyagramını yukarıdaki gibi belirtiyorsa



diyagramına sahip bir $\tilde{\Gamma}(0,1)$ geometrisi vardır. Burada $\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{G}$ 'nin üyelerinin komşuluk geometrilerinin sınıfıdır (bakınız Tanım 5.3.1) ve $\Delta - \{0,1\}$ üzerinde diyagram $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in Γ 'ya kısıtlamasıdır. Ayrıca aşağıdaki ana özellikler sağlanır:

(i) $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'nin rezidülü (veya kuvvetli) bağlantılı olması için gerek ve yeter şart aşağıdakiler sağlanmalıdır:

$\tilde{\mathcal{G}}$ bağlantılı geometrilerin bir sınıfıdır ve Γ rezidülü (veya kuvvetli) bağlantılıdır.

(ii) Eğer Σ Γ geometrisinin Δ -otomorfizmalarının bir grubu olup chamberler üzerinde geçişmeli olarak etki ediyorsa Σ $\tilde{\Gamma}(0,1)$ geometrisinin de Δ -otomorfizmalarının chamber-geçişli bir grubu olur.

(iii) Eğer Γ içinde (B_1) ve (B_2) şartlarını sağlayan bazı $\{k,l\} \subset \Delta - \{0,1\}$ çifti varsa $\tilde{\Gamma}(0,1)$ de bu çift için (B_1) ve (B_2) 'yi sağlar.

$\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in yapısı ve Teorem 5.4.3'ün ispatı Bölüm 5.5'te verildi.

(A_2) şartı kesişim özelliğinin çok özel bir durumu olarak belirtilir (örnek için (Buekenhout, 1981)'de tanımlandı). (A_2) şartı kesişim özelliğinin aşağıdaki zayıf versiyonu kullanılarak ispatlanacaktır.

(I_{01}) e bir 1-eleman ve x bir i -eleman olup $i \in \Delta - \{0,1\}$ olsun. Bu durumda, ya $\sigma_0(x) \cap \sigma_0(e) = \emptyset$ 'tur ya da e ve x ile ilişkili bir F bayrağı var öyle ki $\sigma_0(x) \cap \sigma_0(e) = \sigma_0(F)$ olur.

Lemma 5.4.4. Γ , Lemma 5.4.1'deki gibi olsun. Eğer Γ , (A_1) ve (I_{01}) 'ı sağlıyorsa Γ , (A_2) 'yi sağlar.

İspat: e bir 1-eleman ve x bir i -elemen olup, $i \in \Delta - \{0,1\}$ olsun öyle ki $|\sigma_0(x) \cap \sigma_0(e)| \geq 2$; eIx olduğu ispatlanmalıdır. Karşıtı farz edilsin; (I_{01}) 'de bahsedilen özellikle e ve x ile ilişkili bir F bayrağı e 'yi içermeyebilir. Γ bir geometri olduğundan, F ayrıca e ile ilişkili cotipi $\{0,1\}$ olan bazı F' bayrağında içerilir. (I_{01}) 'den $\sigma_0(F) \subset \sigma_0(e)$ olduğundan $Res(F')$ içindeki tüm 0-elemanlar e ile ilişkilidir. Fakat Bölüm 5.3'te farz edildiği gibi, bir graph tek bir kenara indirgenemez ve çoklu kenar olmaz ifadesi ve (A_1) 'den $Res(F')$ bir graphtır, bu bir çelişkidir. İspat tamamlanır.

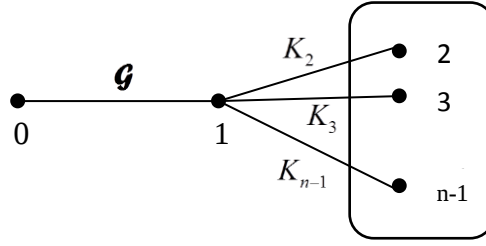
Özellikle sonlu ranklı rezidülü bağlantılı bir Γ geometrisinin özel bir durumu olarak (A_3) şartı $i \in \Delta - \{0,1\}$ için $\{0,i\}$ tipinin tüm rank iki rezidülerinin genelleştirilmiş digon olmasına denktir.

Lemma 5.4.5. Γ sonlu ranklı bir Δ kümesi üzerinde rezidülü bağlantılı bir geometri olsun. (A_3) 'ün sağlanması için gerek ve yeter şart $i \in \Delta - \{0,1\}$ için tüm Γ_{0i} 'lerin genelleştirilmiş digonların sınıfları olmasıdır.

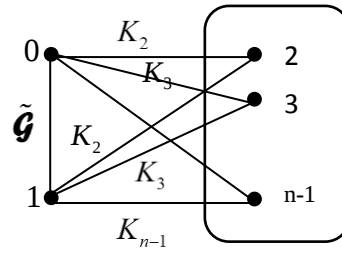
İspat: Lemma 5.4.2'den soldan sağa içerme kolaylıkla söylenebilir. Tersine, tüm Γ_{0i} 'ler digonların sınıfları olduğu farz edilsin. Γ sonlu rankı ile rezidülü bağlantılı olduğundan Tits'in bir teoremi (bakınız (Buekenhout, 1981), Lemma 7.2) herhangi e 1-elemanı için $Res(e)$ 'ye uygulaması (A_3) 'ü ispatlar.

Kesişim özelliğini sağlayan sonlu ranklı rezidülü bağlantılı geometrilere odaklanılsın. Bu durumda, yukarıdaki 5.4.4 ve 5.4.5 lemmaları sayesinde ana teorem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 5.4.6. Γ kesişim özelliğini sağlayan (veya belirtilen (I_{01}) zayıf versiyon) $n \geq 3$ sonlu ranklı rezidülü bağlantılı bir geometri olsun. Γ 'nın diyagramı aşağıdaki gibi farz edilsin.



burada $\mathcal{G}$ graphların bir sınıfıdır(Bölüm 3'te olduğu gibi). Bu durumda, aşağıdaki diyagrama sahip bir $\tilde{\Gamma}(0,1)$ geometrisi vardır.



burada $\tilde{\mathcal{G}}$, $\mathcal{G}$ 'nin komşu geometrilerinin bir sınıfıdır (bak. Tanım 5.3.2) ve burada $\{2,3,\dots,n-1\}$ üzerinde diyagram $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'nin Γ 'ya kısıtlamasıdır. Ayrıca, Teorem 5.4.3'ün (i), (ii), (iii)'si sağlanır.

5.5. $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in Özellikleri ve İnşası: Teorem 5.4.3'ün İspatı

İnşa 5.5.1. Γ , Teorem 5.4.3'ün hipotezini sağlayan bir geometri olsun ve $\Gamma = (\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i, t, I)$ alınsın, burada tüm $i \in \Delta$ için $S_i = t^{-1}(i)$ 'dir. Teorem 5.4.3'te varlığı iddia edilen Δ üzerindeki $\tilde{\Gamma}(0,1)$ geometrisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{\Gamma}(0,1) = (\bigcup_{i=0}^{n-1} \tilde{S}_i, \tilde{t}, \tilde{I}) \text{ burada,}$$

1. $i \neq 0,1$ için $\tilde{S}_i = S_i$ ve $i = 0,1$ için $S_0 \times \{i\}$
2. $\tilde{t}(\tilde{S}_i) = i$
3. $i \neq j$ için $x \in \tilde{S}_i$ ve $y \in \tilde{S}_j$ verilsin.
 - a. Eğer $i, j \notin \{0,1\}$ ise $x \in S_i$ ve $y \in S_j$ 'dir. $x\tilde{I}y$ olması için gerek ve yeter şart xIy olmasıdır.

- b. Eğer $i \in \{0,1\}$ ve $j \notin \{0,1\}$ ise bazı $p \in S_0$ için $x = (p, i)$ 'dir. $x\tilde{I}y$ olması için gerek ve yeter şart pIy olmasıdır.
- c. Eğer $i, j \in \{0,1\}$ ise bazı $p, q \in S_0$ için $x = (p, i)$ ve $y = (q, j)$ 'dir. $x\tilde{I}y$ olması için gerek ve yeter şart Γ 'nın $\{0,1\}$ -kesmesi içinde $p \sim q$ olmasıdır.

(1) $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in Bayrakları

Burada, Γ 'nın bayrakları ve $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in bayrakları arasında bir ilişki kurulacaktır.

F , Γ 'nın ve $\tilde{F}$ $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in bayrakları olmak üzere H (sırasıyla $\tilde{H}$) tipi $\{0,1\}$ 'den farklı olan F 'nin (sırasıyla $\tilde{F}$) maksimal alt bayrağı olsun. Bu durumda, H (sırasıyla $\tilde{H}$) cotipi $\{0,1\}$ 'i içeren $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in (sırasıyla Γ) bir bayrağıdır.

İnşa 5.5.2. Γ 'nın her bir F bayrağına $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in aynı tipli bir $\tilde{F}$ bayrağı aşağıdaki gibi ilişkilendirilir.

1. Eğer $F = H$ ise $\tilde{F} = H$ 'tır.
2. Bazı $p \in S_0$ için $F = \{p\} \cup H$ ise $\tilde{F} = \{(p, 0)\} \cup H$ tanımlanır.
3. Bazı $e \in S_1$ için $F = \{e\} \cup H$ ise $\tilde{F} = \{(p, 1)\} \cup H$ tanımlanır burada pIe ; (A_3) 'ten $\tilde{F}$ bir bayraktır.
4. Bazı $p \in S_0$ ve $e \in S_1$ için $F = \{p, e\} \cup H$ ise $\tilde{F} = \{(p, 0), (q, 1)\} \cup H$ tanımlanır ki burada $e = \{p, q\}$ 'dur (bakınız (B_1)).

İnşa 5.5.3. Tersine, $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in her bir $\tilde{F}$ bayrağına Γ 'nın bir F bayrağı aşağıdaki gibi ilişkilendirilir:

1. $\tilde{F} = \tilde{H}$ ise $F = H$ 'dır.
2. Bazı $p \in S_0$ için $\tilde{F} = \{(p, i)\} \cup \tilde{H}$ ve $i \in \{0,1\}$ ise açıkça Γ 'nın bir bayrağı olan $F = \{p\} \cup H$ tanımlanır.

3. $p, q \in S_0$ için $\tilde{F} = \{(p, 0), (q, 1)\} \cup \tilde{H}$ ise p ve q 'lar farklıdır ve bazı ortak $e \in S_1$ ile ilişkilidir. (A_2) 'den $F = \{p, e\} \cup \tilde{H}$, Γ 'nın bir bayrağıdır sonucuna varılır.

Son inşa, $\tilde{\Gamma}(0, 1)$ 'in bir ilk özelliğini ispatlamaya izin verir.

Önerme 5.5.4. $\tilde{\Gamma}(0, 1)$ bir geometridir.

İspat: $\tilde{\Gamma}(0, 1)$ 'in herhangi $\tilde{F}$ bayrağının bir chamber içinde içerildiği gösterilmelidir. F , İnşa 5.5.3'ten $\tilde{F}$ ile ilişkili Γ 'nın bayrağı olsun. Γ bir geometri olduğundan F bayrağını içeren Γ 'nın bir C chamberı vardır. $p' \in S_0$, $e' \in S_1$ için $C = \{p', e'\} \cup H$ yazılsın, burada H cotipi $\{0, 1\}$ olan bir bayraktır. (B_1) 'den bazı $q' \in S_0$ için $\sigma_0(e') = \{p', q'\}$ 'dür, $\{(p', 0), (q', 1)\} \cup H$ ve $\{(q', 0), (p', 1)\} \cup H$ birleşimleri $\tilde{\Gamma}(0, 1)$ 'in chamberlarıdır. Onlardan en az bir tanesi $\tilde{F}$ 'yi içerir, çünkü İnşa 5.5.3-(2) (veya (3))'deki $\tilde{F}$ 'dan sonuca varılırsa $p = p'$ (veya $p' = p$, $q' = q$)'dür. Böylece, ispat tamamlanır.

(2) $\tilde{\Gamma}(0, 1)$ 'in Rezidüleri

Γ 'nın bir F bayrağı verilsin. Γ içinde F 'in rezidüsü $Res(F)$ ile gösterilir. Benzer şekilde $R\tilde{e}s(\tilde{F})$, $\tilde{\Gamma}(0, 1)$ 'in bir $\tilde{F}$ bayrağının $\tilde{\Gamma}(0, 1)$ içindeki rezidüsüdür.

Lemma 5.5.5. $p \in S_0$ ve $i \in \{0, 1\}$ için $x = (p, i) \in \tilde{S}_i$ olsun. $\Delta - \{i\}$ üzerindeki $R\tilde{e}s(x)$ geometrisinden $\Delta - \{0\}$ üzerindeki $Res(p)$ geometrisine bir α izomorfizması vardır. α , $\Delta - \{0, 1\}$ üzerinde birim dönüşümde ve $i + 1 \pmod{2}$ 'yi 1 üzerine götürür.

İspat: $y \in R\tilde{e}s(x)$ olsun. Eğer $\tilde{t}(y)$ 0 ve 1'den farklı ise $\alpha(y) = y$ tanımlanabilir. Eğer $\tilde{t}(y) = i + 1 \pmod{2}$ ise $y = (q, i + 1 \pmod{2})$ olup burada $p \sim q$ ve bazı $q \in S_0$ 'dir. (B_1) 'den bir tek $e \in S_1$ var öyle ki $\sigma_0(e) = \{p, q\}$ ve $\alpha(y) = e \in Res(p)$ tanımlanabilir. α fonksiyonu birebir ve örtendir çünkü, verilen $e' \in S_1$ $Res(p)$ içinde içerilir, (B_1) şartı $q' \in S_0$ 'ın tekliğini ima eder öyle ki $e' = \{p, q'\}$ 'dür. Böylece, bir tek $z = (q', i + 1 \pmod{2}) \in R\tilde{e}s(x)$ var öyle ki $\alpha(z) = e'$ olur. Ayrıca, α ilişki koruyan bir

dönüşümdür. Bu, tipi $\{0,1\}$ ’den farklı olan bir ilişki çifti için aşikârdır. Şimdi, eğer $z \in R\tilde{e}s(x)$ olup $\tilde{t}(z) \notin \{0,1\}$ için $y = (q, i+1(\bmod 2)) \in R\tilde{e}s(x)$ ise İnşa 5.5.1 (3)-b’den $y\tilde{I}z$ olması için gerek ve yeter şart qIz olmasıdır. Son ilişki, $\alpha(y)I\alpha(z)$ ’ye denktir.

Lemma 5.5.6. $\tilde{F} \tilde{\Gamma}(0,1)$ ’in cotypei $\{0,1\}$ olan bir bayrağı olsun. Bu durumda, $\tilde{F}$ ayrıca Γ içinde bir F bayrağıdır ve $R\tilde{e}s(\tilde{F}) = Res(F)$ ’nin $R\tilde{e}s(F)$ komşuluk geometrisidir.

İspat: $\tilde{\Gamma}(0,1)$ ’in tanımından $R\tilde{e}s(\tilde{F}) = \{(p,0), (q,1) : p, q \in S_0 \cap Res(F)\}$ ve $(p,0)\tilde{I}(q,1)$ olması için gerek ve yeter şart $p \sim q$ olmasıdır. Bu gösterir ki $R\tilde{e}s(F)$ Tanım 5.3.1’de bahsedildiği üzere $Res(F)$ ’in komşuluk geometrisidir.

Önerme 5.5.7. $\tilde{\Gamma}(0,1)$ geometrisi Teorem 5.4.3’te bahsedilen diyagrama sahiptir.

İspat: Lemma 5.5.5 ve 5.5.6’dan açıktır.

Lemma 5.5.8. $p \sim q$, $p, q \in S_0$ için $\tilde{F} = \{(p,0), (q,1)\}$ $\tilde{\Gamma}(0,1)$ içinde tipi $\{0,1\}$ olan bir bayrak olsun. Eğer F , $\{p,e\}$ bayrağı ise, burada $e = \{p,q\}$ ise $\Delta - \{0,1\}$ üzerinde birim dönüşümü içeren $R\tilde{e}s(\tilde{F})$ ’den $Res(F)$ ’e bir izomorfizma vardır.

İspat: Bu, Lemma 5.5.5’in doğrudan bir sonucudur. Bölüm 4 içinde ifade edildiği üzere $Res(\{p,e\}) = Res(\{q,e\})$ ’dir.

Lemma 5.5.9. $\tilde{F}$, $\tilde{\Gamma}$ içinde cotypei tam olarak $\{0,1\}$ ’i içeren bir bayrak olsun. Bu durumda, $R\tilde{e}s(\tilde{F})$ (Bölüm 5.4’te bahsedildiği gibi (B_1) ve (B_2) ’yi sağlasın) Lemma 5.5.5’deki $Res(F)$ ’den elde edilen $R\tilde{e}s(F)(0,1)$ geometrisidir.

İspat: İspatı Lemma 5.5.6’nın ispatına benzerdir.

Lemma 5.5.10. $e \in S_1$ ve $p, q \in S_0$ için $e = \{p,q\}$ olsun. F , p ve q ile ilişkili cotypei $\{0,1\}$ ’i içeren Γ ’nin bir bayrağı olsun. Bu durumda, $i \in \{0,1\}$ için $F \cup \{(p,i)\}$ bayrağının $\tilde{\Gamma}(0,1)$ içindeki rezidüleri $Res(F \cup \{p\})$ ’ye izomorftur ve

$F \cup \{(p,i), (q, i+1 \pmod{2})\}$ 'nin $\tilde{\Gamma}(0,1)$ içindeki rezidüleri $Res(F \cup \{p,e\})$ 'ye izomorftur.

İspat: Lemma 5.5.5'in doğrudan bir sonucudur.

(3) $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in Bağlantılığı

$\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in bağlantılığını çalışmak amacıyla, $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in yolları ve Γ 'nın yolları arasında bir ilişki bulunmalıdır. Bir geometrinin yolu $m \geq 2$ için $(x_1, \dots, x_m)$ farklı elemanların çiftlerinin bir dizisidir öyle ki x_l ve x_{l+1} tüm $l \in \{1, \dots, m-1\}$ için ilişkilidir. Farklı iki $i, j \in \Delta$ için eğer tüm x_l 'ler i veya j tipinde ise böyle bir yol $\{i, j\}$ -yolu olarak adlandırılır. Eğer x_m, x_1 ile ilişkili ise bu yol bir devir olarak adlandırılır.

İnşa 5.5.11. Γ 'nın herhangi P yoluna $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in bir $\tilde{P}$ yolu aşağıdaki gibi ilişkilendirilebilir.

1. P içindeki tipi 0 ve 1 'den farklı olan her bir eleman değişmez.
2. P içindeki iki 0-eleman arasındaki her bir 1-eleman silinir.
3. P içindeki her bir e 1-elemanı Γ 'nın bir p 0-elemanı ile yer değiştirir öyle ki burada pIe 'dir. p P içinde e yanında olmaz.
4. 1, 2 ve 3 kuralları Γ 'nın elemanlarının bir dizisini oluşturur. Bu, Γ 'nın her bir p 0-elemanı $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in bir (p,i) 'si ile yer değiştirerek $\tilde{\Gamma}(0,1)$ içinde bir dizi içine dönüştürülen öyle bir dönüştürme işlemidir ki aynı i tipine sahip iki ardışık (p,i) yoktur.
5. Son olarak, eğer aynı bir (p,i) elemanı $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in bu dizisinde iki kez meydana gelirse, iki (p,i) arasındaki tüm elemanlar ve bir (p,i) silinerek dizi kısaltılır. Diğer taraftan, eğer iki (p,i) dizinin sınırlarıysa son (p,i) silinir.

Bu yolla elde edilen $\tilde{P}$ dizisi $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in bir yolu olduğu iddia edilir. 5'ten ve $|\tilde{P}| \geq 2$ olmasından $\tilde{P}$ 'nın elemanları farklıdır. $\tilde{P}$ 'nın herhangi iki ardışık x_l ve x_{l+1} elemanlarının $\tilde{\Gamma}(0,1)$ içinde ilişkili olduğu kontrol edilmelidir:

Eğer x_l ve x_{l+1} 'in her ikisinin tipleri 0 ve 1'den farklı ise bu 1'den elde edilir. Eğer x_l ve x_{l+1} elemanlarının tam olarak biri 0 veya 1 tipinde ise $x_l = (p, i)$ denilen x_l P içinde, p 0-elemanına veya p ile ilişkili bir e 1-elemanından biri ile ilişkilidir; ilk durumda, x_l ve x_{l+1} arasındaki ilişki p ve x_{l+1} arasındaki ilişkiden elde edilir; ikinci durumda, (A_3) 'ten x_{l+1} ile e 'nin ilişkili olması, x_{l+1} ile p 'nin ilişkili olmasını ve böylece de x_l ile x_{l+1} 'in ilişkisini ima eder. Son olarak, eğer x_l ve x_{l+1} 'in her ikisi 0 veya 1 tipinde ise ilişki 4, 2 ve 3'ten elde edilir.

İnşa 5.5.12. $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in her bir $\tilde{P}$ yoluna Γ 'nın bir P yolu ilişkilendirilsin:

1. $\tilde{P}$ içinde 0 ve 1'den farklı tipli elemanlar değişmez.
2. $\tilde{P}$ 'nin herhangi (p, i) elemanı Γ 'nın p 0-elemanı ile yer değişir.
3. Eğer (p, i) ve (q, j) $\tilde{P}$ içinde ardışık iki elemanı ise p ve q ile ilişkili e 1- elemanı P içinde p ve q arasına sokulur ($\tilde{\Gamma}(0,1)$ içinde ilişki tanımı ile $p \sim q$ 'dan böyle bir eleman var).
4. Eğer bazı 0-eleman veya 1-eleman iki kez ortaya çıkmışsa onların arasındaki elemanlar ve meydana gelenlerden biri silinerek dizi kısaltılır.

Önerme 5.5.13. $\tilde{\Gamma}(0,1)$ geometrisinin bağlantılı olması için gerek ve yeter şart Γ 'nın bağlantılı olmasıdır.

İspat: Γ 'nın bağlantılı olduğu farz edilsin. Önerme 5.5.4'ten $\tilde{\Gamma}$ 'nin her bir elemanı, tipi $i \in \{0,1\}$ olan bazı elemanla ilişkilidir. Bu yüzden, $\tilde{\Gamma}$ 'nin bağlantılılığını ispatlamak için herhangi iki i -elemanı birleştirecek $\tilde{\Gamma}$ 'nin bir yolunu göstermek yeterlidir, burada $i \neq 0,1$ 'dir. Γ içinde böyle bir P yolu vardır; gerekli olan yol İnşa 5.5.11'den $\tilde{\Gamma}$ 'nin $\tilde{P}$ yolu ile ilişkilidir. Tersine, eğer $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in bağlantılı olduğu farz edilirse İnşa 5.5.12 ile tanımlanan ilişki kullanılarak benzer yolla Γ da bağlantılı olur.

Önerme 5.5.14. $\tilde{\Gamma}(0,1)$ geometrisinin rezidülü bağlantılı olması için gerek ve yeter şart aşağıdakiler sağlanmalıdır:

Komşuluk geometrilerin $\tilde{\mathcal{G}}$ sınıfı bağlantılı geometrilerin bir sınıfıdır ve Γ rezidülü bağlantılıdır.

İspat: Önerme 5.5.13'ten $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'nın bağlantılı olması için gerek ve yeter şart Γ 'nın bağlantılı olmasıdır. Aynı eşitlik corankı ≥ 2 olan boştan farklı bayrakların rezidüleri için ispatlanmalıdır. Bu, 0 tipini içeren Γ 'nın bayrakları ve tipi $\{0,1\}$ 'de kesişen $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in bayrakları için 5.5.5, 5.5.8 ve 5.5.10 lemmalarından doğrudan elde edilir. Ayrıca, Lemma 5.5.6 ile veya Önerme 5.5.13 ile birlikte Lemma 5.5.9'dan cotipi $\{0,1\}$ olan Γ ve $\tilde{\Gamma}$ 'nin bayrakları için de açıktır. Son olarak, 0 tipini içermeyen ve 1 tipini içeren bayrakların Γ içindeki rezidüleri için özellik (A_3) şartından olduğu açıktır.

Önerme 5.5.15. $\tilde{\Gamma}(0,1)$ geometrisinin kuvvetli bağlantılı olması için gerek ve yeter şart aşağıdakiler sağlanmalıdır:

$\tilde{\mathcal{G}}$ bağlantılı geometrilerin bir sınıfıdır ve Γ kuvvetli bağlantılıdır.

İspat: Eğer Γ kuvvetli bağlantılı ve $\tilde{\mathcal{G}}$ bağlantılı geometrilerin bir sınıfı (ya da $\tilde{\Gamma}(0,1)$ kuvvetli bağlantılı) ise $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in (ya da Γ) herhangi $\{i, j\}$ -kesmesinin bağlantılı olduğunu ispatlamak yeterlidir. Rezidüler için ilişkili özellik, 5.5.5'ten 5.5.10'a kadar olan lemmaları ve (A_3) şartını kullanarak Önerme 5.5.14'ün ispatındaki gibi elde edilir.

$\tilde{\Gamma}(0,1)$ ve Γ 'nin $\{i, j\}$ -kesmeleri $i, j \notin \{0,1\}$ olduğunda çakışır. $\tilde{\Gamma}(0,1)$ ile Γ , $i = 0$ ve $j \neq 1$ için izomorftur. Ayrıca, herhangi $j \notin \{0,1\}$ için $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in $\{1, j\}$ -kesmesi Γ 'nin $\{0, j\}$ -kesmesine izomorftur.

$\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in $\{0,1\}$ -kesmesine bakılsın. Eğer Γ 'nin $\{0,1\}$ -kesmesi bağlantılı ise İnşa 5.5.11'in 2 ve 4 özelliklerinden görülür ki $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in herhangi $(p, 0)$ 0-elemanı Γ 'nin herhangi q elemanı için $(q, 0)$ veya $(q, 1)$ 'in herhangi birine bir $\{0,1\}$ yolu ile birleştirilir. Şimdi, Γ içinde q ile ilişkili cotipi $\{0,1\}$ olan bir F bayrağı göz önüne alınsın: $\tilde{\Gamma}(0,1)$ içinde F 'nin $R\tilde{e}s(F)$ rezidüsü $(q, 0)$ ve $(q, 1)$ 'i içerir; bundan dolayı, eğer $\tilde{\mathcal{G}}$ bağlantılı geometrilerin bir sınıfı olduğu farz edilirse $R\tilde{e}s(F)$ bağlantılıdır ve $(q, 0)$ ve $(q, 1)$ elemanları bir $\{0,1\}$ yolu ile birleştirilir. Böylece $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in $\{0,1\}$ -kesmesi bağlantılıdır sonucuna varılır. Buradan $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in (ve onun rezidülerinin)

her $\{i, j\}$ -kesmesi bağlantılıdır ve bu yüzden, $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in kuvvetli bağlantılığı $\tilde{\mathcal{G}}$ içinde komşu geometrilerin bağlantılığundan ve Γ 'nın bağlantılığundan elde edilir.

Tersine, $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in kuvvetli bağlantılı olsun. Buradan, Γ 'nın $\{0,1\}$ -kesmesi bağlantılıdır; Γ 'nın p ve q gibi iki 0-elemanı verilsin. $(p,0)$ 'dan $(q,0)$ 'a $\tilde{\Gamma}(0,1)$ geometrisinin bir $\{0,1\}$ yolu vardır; bu yol p 'den q 'ya Γ 'nın bir $\{0,1\}$ yoluna neden olur (İnşa 5.5.12'nin 2 ve 3). p 'den q 'ya bu yolun varlığı $\{0,1\}$ -kesmesinin bağlantılığını garantiye almak için yeterlidir. Bu, Γ 'nın geometri olması gerçeğindendir.

Yalnızca, tüm $j \notin \{0,1\}$ için Γ 'nın $\{1, j\}$ -kesmesinin bağlantılığına bakmak kaldı. e ve f Γ 'nın iki 1-elemanı olsun. İlk olarak, e ve f bazı p 0-elemanı için $Res(p)$ 'ye ait olduğu farz edilsin. Hipotezden, $Res(p,0)$ 'ın $\{1, j\}$ -kesmesi bağlantılı olduğundan İnşa 5.5.12, Lemma 5.5.5 ve (A_2) şartını kullanarak Γ içinde e 'yi f 'ye birleştiren bir $\{1, j\}$ elde etmek kolaydır. Şimdi, eğer e ve f aynı bir 0-elemanla ilişkili değilse Γ içinde bir $(e, p, e_1, p_1, e_2, \dots, p_m, f)$ $\{0,1\}$ yolu vardır. Çünkü Γ 'nın kesmesi yukarıdaki ispattaki gibi bağlantılıdır. Önceki çıkarımdan $\{e, e_1\}$, $\{e_1, e_2\}$, ..., $\{e_m, f\}$ çiftlerinin her biri uygun bir yol ile birleştirilir ve bu yüzden Γ 'nın kuvvetli bağlantılığı ispatlanır.

(4) $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in Otomorfizma Grubu

Önerme 5.5.16. $i \notin \{0,1\}$ ile $x \in \tilde{S}_i$ için $\alpha(x) = x$ ve $i = 0,1$ için $\alpha(p, i) = (p, i+1 \pmod{2})$ ile $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in elemanlarının üzerinde tanımlanan α fonksiyonu $\tilde{\Gamma}(0,1)$ geometrisinin dualitisidir.

σ , Γ 'nın herhangi Δ -otomorfizması olsun. Bu durumda σ , $\tilde{\Gamma}(0,1)$ 'in üzerinde aşağıdaki gibi bir $\tilde{\sigma}$ fonksiyonuna neden olur: Eğer $x \in \tilde{S}_i$ olup $i \notin \{0,1\}$ ise $x \in S_i$ ve $\tilde{\sigma}(x) = \sigma(x)$ ve eğer $x \in \tilde{S}_i$ olup $i \in \{0,1\}$ ise $\tilde{\sigma}(p, i) = (\sigma(p), i)$ olur. $\tilde{\sigma}$ fonksiyonu $\tilde{\Gamma}(0,1)$ geometrisinin bir Δ -otomorfizması olur.

Önerme 5.5.17. Σ chamberlar üzerinde geçişmeli olarak etki eden Γ geometrisinin Δ -otomorfizmalarının bir grubu olsun. Bu durumda Σ , $\tilde{\Gamma}(0,1)$ geometrisinin de Δ -otomorfizmalarının chamber geçişli bir grubudur.

İspat: $\tilde{\Gamma}(0,1)$ üzerinde yukarıdaki gibi tanımlanan Σ ’nın etkisi ele alınsın. $\tilde{C}$ $\tilde{\Gamma}(0,1)$ ’in bir chamberi olsun. $\tilde{C}$ bir $\{(p,0),(q,1),x_2,...,x_i,...\}$ kümesi olsun, burada $p,q \in S_0$, $i \notin \{0,1\}$ için $x \in \tilde{S}_i = S_i$ ve $i,j \notin \{0,1\}$ ve $i \neq j$ için $e = \{p,q\} \in S_1$, $x_i I p$, $x_i I q$, $x_i I x_j$ ’dir. $\tilde{\Gamma}(0,1)$ ’in bir $\tilde{C}$ chamberı için Γ ’nın bir C chamberı ilişkilendirilir: $C = \{p,e,x_2,...,x_i,...\}$ ((A₂) şartı). $\tilde{C}' = \{(p',0),(q',1),...,x_i',...\}$ $\tilde{\Gamma}(0,1)$ geometrisinin başka bir chamberı olsun ve $C' = \{p',e',x_2',...,x_i',...\}$ Γ içinde bununla ilişkili olan bir chamber olsun. Σ , Γ ’nın chamberları üzerinde geçişmeli olarak etki ettiğinden; C ’den C' üzerine dönüşen bir σ otomorfizması var öyle ki $\sigma(p) = p'$, $\sigma(e) = e'$ ve $\sigma(x_i) = x_i'$ olur. (B₁) şartından bu $\sigma(q) = q'$ olduğunu ima eder ve böylece σ otomorfizması $\tilde{C}$ ’dan $\tilde{C}'$ üzerine dönüşen bir $\tilde{\sigma}$ otomorfizmasına neden olur.

(5) $\tilde{\Gamma}(0,1)$ bazı $k,l \notin \{0,1\}$ için (B₁) ve (B₂)’yi sağlar mı?

Γ bazı $k,l \notin \{0,1\}$ için (B₁) ve (B₂)’yi sağladığı farz edilsin. Aynılarının $\tilde{\Gamma}(0,1)$ için de sağlandığı gösterilmelidir.

Önerme 5.5.18. Γ , $\{0,1\} \subset \Delta$ (Lemma 5.4.1’deki gibi) için ve ayrıca bazı $\{k,l\} \subset \Delta - \{0,1\}$ çifti için (B₁) ve (B₂) şartlarını sağladığı farz edilsin. Bu durumda $\tilde{\Gamma}(0,1)$, $\{k,l\}$ çifti için (B₁) ve (B₂)’yi sağlar.

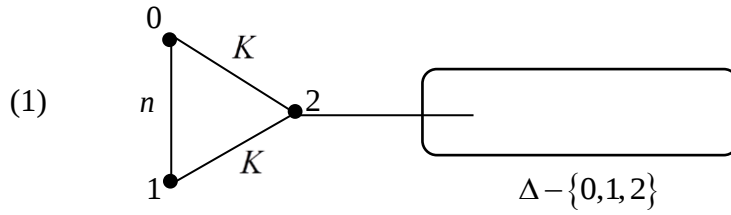
İspat: Eğer (B₁) şartı Γ içinde sağlanırsa bu geometrilerin $\{k,l\}$ -kesmeleri çakıştığından $\tilde{\Gamma}(0,1)$ için de bu şart aşikâr olarak sağlanır. (B₂) ispatlansın. e , $\tilde{\Gamma}(0,1)$ ’in bir l -elemanı olsun. Eğer $i \notin \{0,1,k,l\}$ için x bir i -eleman ise e ve x ’ler de Γ ’nın elemanlarıdır ve iddia Γ ve $\tilde{\Gamma}(0,1)$ ’in ikisi için de sağlanır. Şimdi eğer $i \in \{0,1\}$ için x bir i -eleman ise bazı $p \in S_0$ için $x = (p,i)$ ’dir ve $e\tilde{x}$ eIp ’ye denktir; Γ içinde

(B₂) sağlandığından bu, Γ içinde $\sigma_k(e) \subset \sigma_k(p)$ anlamına gelir. $\tilde{\Gamma}(0,1)$ içindeki ilişki tanımından bu, $\sigma_k(e) \subset \sigma_k(x)$ 'e neden olur ve önerme ispatlanır.

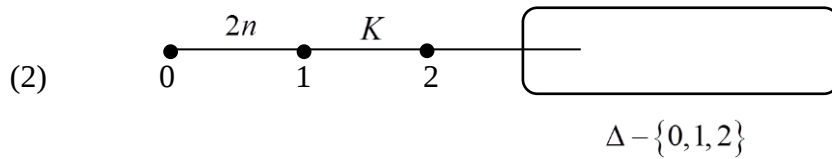
Teorem 5.4.3'ün ispatı tamamlanır.

5.6. Neumaier Teoreminin Bir Genellemesi

1982'de ((Neumaier, 1982), Teorem 4)



geometrilerin sınıfının diyagramı ile



geometrilerin sınıfının diyagramı arasında bir denklik kurdu, burada K rank-2 geometrilerin keyfi bir sınıfı, $2n$ -gon bir graph olup $\Delta - \{0,1,2\}$ 'de diyagram keyfidir.

Teorem 5.4.3'ün uygulaması, diyagramı (1) veya bir şekilde daha genel olan yeni geometrilere neden olur. Neumaier teoreminin bir benzer sonucuyla burada ilgilenilecektir: Teorem 5.4.3'e onun uygulanması ile diyagram (2)'ye benzeyen yeni geometriler tekrar elde edilir. Ayrıca, eğer bir chamber geçişli otomorfizma grubu baştaki geometri üzerinde etki ederse, o sonuncu üzerine de etki eder. Gerçekten, Teorem 5.4.3'ün uygulanması ile elde edilen tüm olası diyagramları üretmek için aşağıda ispatlanan (bakınız 5.6.1) Neumaier'in sonucunun bir genişletilmiş versiyonuna ihtiyaç vardır. Bu genişleme, shadowlar üzerindeki ((Buekenhout, 1981) ve (Pasini, 1994), Bölüm 5) genel sonuçlardan elde edilebilir. Onu, Teorem 5.4.3 ile birleştirmek amacıyla Teorem 5.6.1'de verilen bazı ek özelliklere ihtiyaç vardır. Bundan dolayı, tüm teoremin temel bir ispatı verilebilir.

Son olarak, dikkat edilmeli ki (2) diyagramı ile geometrilerin rank-2 kesmeleri (veya daha genel olarak diyagram (4), aşağıda) graphların geometrileridir: Teorem 5.4.3 veya sonuç 5.4.6 onlara tekrar uygulanabilir. Muhtemelen, Lemma 5.3.3 ve Teorem 5.4.3 1'den (bakınız Lemma 5.6.2) rezüdüli bağlantılı olmayan geometriler elde edilir.

Tanım 5.6.1. $R = (R_0 \cup R_1, t, I)$ herhangi rank-2 geometrisi olsun. R , köşelerinin kümesi $R_0 \cup R_1$ ve kenarları $x \in R_0$ ve $y \in R_1$ için (x, y) ilişki çiftleri olup, onun ilişki graphı ile tanımlanır. Sonuncu graph R geometrisinin bayrak geometrisi olarak adlandırılan ve $\mathcal{F}(R)$ ile gösterilen yeni bir rank iki geometrisi olarak düşünülebilir: Onun 0-elemanları kümesi $R_0 \cup R_1$ 'dir, onun 1-elemanları R 'nin chamberlarıdır ve ilişki içermedir.

Tersine, herhangi $\mathcal{F}$ bipartite graphı bir R rank iki geometrisi tanımlar: Köşelerin iki kümesi elemanların iki tipidir ve kenarlar chamberlardır. Açıkça, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(R)$ 'dir.

Bazı yararlı özellikler aşağıda listelenmiştir.

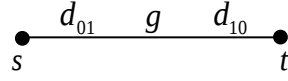
Lemma 5.6.2. Herhangi R rank iki geometrisi için (tek chambera indirgenmemiş) $\mathcal{F}(R)$ bayrak geometrisi bir bipartite graphtır.

Lemma 5.6.3. $\mathcal{F}(R)$ kesişim özelliğini sağlar.

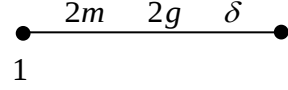
Lemma 5.6.4. $\mathcal{F}(R)$ 'nin bağlantılı olması için gerek ve yeter şart R 'nin bağlantılı olmasıdır.

Lemma 5.6.5. R 'nin $Aut(R)$ otomorfizma grubu Δ -otomorfizmalarının bir grubu olarak $\mathcal{F}(R)$ üzerine etki eder. İlaveten, eğer Ω , R için bir chamber-geçişli Δ -otomorfizma grubunu ve R bir dualityi sağlarsa (tipleri permüte eden otomorfizma) bu durumda $\Omega : 2$, $\mathcal{F}(R)$ üzerine bir chamber-geçişli Δ -otomorfizma grubu olarak etki eder. Özellikle, eğer chamber-geçişli Ω Δ -otomorfizma grubu bir Γ graphına etki eder ise bu durumda $\Omega : 2$ grubu da $\mathcal{F}(\tilde{\Gamma})$ üzerine benzer şekilde etki eder. Burada $\tilde{\Gamma}$, Γ 'nin komşuluk geometrileridir.

Lemma 5.6.6. Eğer R

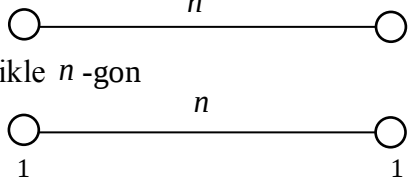
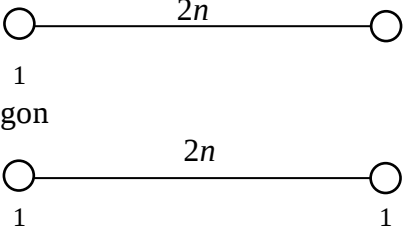
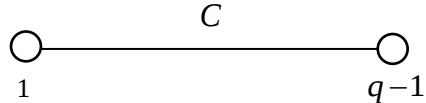
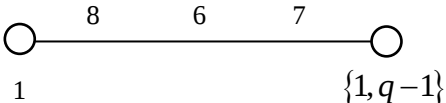
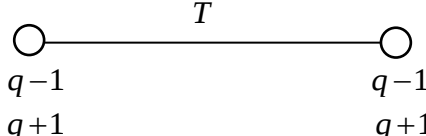
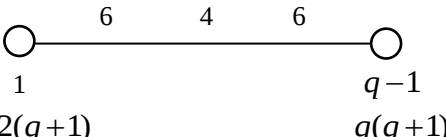
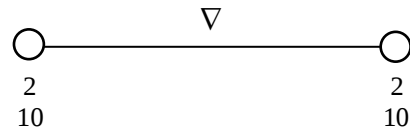
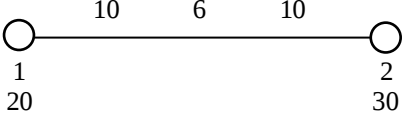
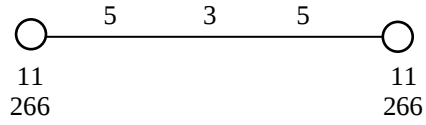
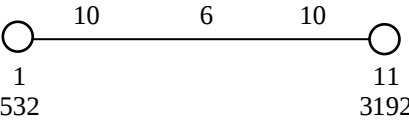


diyagramına sahip ise, $\mathcal{F}(R)$



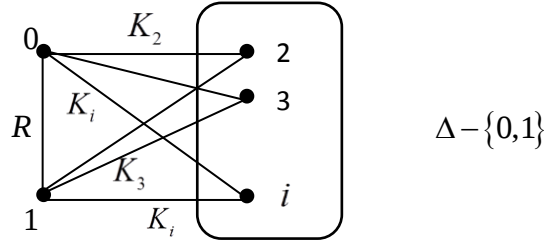
diyagramına sahiptir burada $m = \max\{d_{01}, d_{10}\}$ ve $\delta \in \{2m, 2m-1\}$ 'dir. Bundan dolayı, $d_{01} \neq d_{10}$ olması $\delta = 2m-1$ olmasını ve $d_{01} = d_{10} = g$ olması $\delta = 2m$ olmasını gerektirir.

Tablo 5.2'de genelde uygulamalarda kullanılan ve onların bayrak geometrileri ile birlikte bazı rank-2 geometrileri listelendi. Lemma 5.6.6'nın yardımı ile ispatlar açıktır. İlk örnek iyi bilinen bir geometridir. Diyagramın altında parametre olarak görünen sayılar, o tipteki elemanların toplam sayılarıdır.

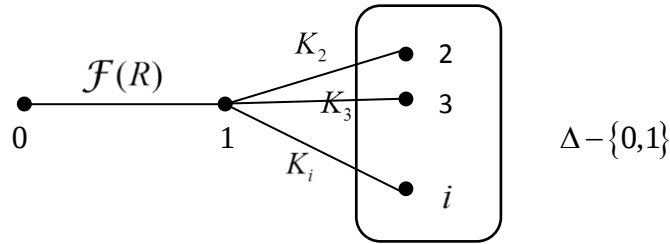
R	$\mathcal{F}(R)$
$n \geq 2$ için genelleştirilmiş n -gon 	Genelleştirilmiş $2n$ -gon 
$q \geq 3$ için K_{q+1} complete graphın geometrisi $(g_{01} = d_{01} = 3, d_{10} = 4)$ 	$(g_{01} = 6, d_{01} = 8, d_{10} = 7)$ 
$q \geq 3$ için, K_{q+1} complete grafiğin komşu geometrisi (bakınız tablo 1) $(g_{01} = 2, d_{01} = d_{10} = 3)$ 	Bir $(q+1) \times (q+1)$ gridinin dual geometrisi, doğrusal olmayan nokta çiftlerinin bir maksimal kümesi atılmıştır. $(g_{01} = 4, d_{01} = d_{10} = 6)$ 
Desergues yapılandırmasının kenarları ve noktaları (bakınız tablo 1). S_5 grubu chamber-geçişli olarak etki eder. $(g_{01} = 3, d_{01} = d_{10} = 5)$ 	$2 \cdot S_5$ grubu chamber-geçişli olarak etki eder. $(g_{01} = 5, d_{01} = d_{10} = 10)$ 
J_1 ile ilişkili (Buekenhout, 1985) içindeki diyagram (35) (bakınız tablo 1) 	$2 \cdot J_1$ grubu chamber-geçişli olarak etki eder. 

Tablo 5.2. R 'nin geometrilerinin ve onun $\mathcal{F}(R)$ bayrak geometrilerinin bazı örnekleri. Tüm $\mathcal{F}(R)$ 'ler bağlantılı ve kesişim özelliğini sağlar

Teorem 5.6.7. (Neumaier'in Genişlemesi ((Neumair, 1982), Teorem 4)) Γ aşağıdaki diyagrama sahip, rankı $n \geq 3$ (sonsuz da olabilir) olan bir geometri olsun.



burada R ve K_i rank iki geometrilerin keyfi sınıflarıdır ve $\Delta - \{0,1\}$ üzerinde diyagram keyfidir. Bu durumda,



diyagramı ile $\{0,1\}$ çifti için Lemma 5.4.2'nin (B_1) ve (B_2) şartını sağlayan bir $\Gamma'(0,1)$ geometrisi vardır, burada $\mathcal{F}(R)$ R 'nin üyelerinin bayrak geometrilerinin sınıfıdır. Ayrıca, aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $\Gamma'(0,1)$ 'in bağlantılı (rezidülü veya kuvvetli bağlantılı) olması için gerek ve yeter şart Γ 'nin bağlantılı olmasıdır.
2. $\Gamma'(0,1)$ bazı $\{k,l\} \subset \Delta - \{0,1\}$ çifti için (B_1) ve (B_2) şartlarını sağlaması için gerek ve yeter şart Γ 'nin da bazı $\{k,l\} \subset \Delta - \{0,1\}$ çifti için (B_1) ve (B_2) şartlarını sağlamasıdır.
3. Eğer Σ chamberlar üzerinde geçişmeli olarak etki eden Γ geometrisinin Δ -otomorfizmalarının bir grubu ise ve $\Delta - \{0,1\}$ noktasal olarak sabitleyen, 0 ve 1 tiplerini permüte eden Γ 'nin bir σ otomorfizması var ise $\langle \Sigma, \sigma \rangle$ $\Gamma'(0,1)$ 'in bir chamber-geçişli Δ -otomorfizma grubu olarak etki eder. Tersine, eğer Ω $\Gamma'(0,1)$ 'in bir chamber-geçişli Δ -otomorfizma grubu ise bu durumda, $\Omega = \Sigma : 2$ bazı Σ için Γ geometrisinin bir chamber-geçişli Δ -otomorfizma grubu olarak etki eder.

Bu teoremin ispatını vermeden önce $\Gamma'(0,1)$ 'in inşası yapılacaktır.

İnşa 5.6.8. Γ , Teorem 5.6.7'nin hipotezlerini sağlayan bir geometri olsun. $\Gamma = (\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i, t, I)$ ifade edilsin. Bir $\Gamma'(0,1) = (\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i', t', I')$ geometrisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(a) S_i' = \begin{cases} S_i & , i \neq 0,1 \\ S_0 \cup S_1 & , i = 0 \\ \Gamma \text{ geometrisinin tipi } \{0,1\} \text{ olan tüm bayraklarının kümesi, } & i = 1 \end{cases}$$

$$(b) t'(S_i') = i$$

(c) $i \neq j$ için $x \in S_i'$ ve $y \in S_j'$ verilsin.

- Eğer $1 \notin \{i, j\}$ ise $xI'y$ olması için gerek ve yeter şart xIy
- x , Γ 'nin bir $\{x_0, x_1\}$ bayrağı olsun. Eğer $i=1$ (ve benzer olarak eğer $j=1$) ise ve $xI'y$ olması için gerek ve yeter şart x_0Iy ve x_1Iy 'nin her ikisi sağlanmalıdır (bunun anlamı $j=0$ iken $y \in \{x_0, x_1\}$).

Teorem 5.6.7'nin İspatı: $\Gamma'(0,1)$ kısaca Γ' olarak tanımlanmıştır.

(1) Γ' Geometrisinin Bayrakları.

F , Γ 'nin bir bayrağı ve tipi $\{0,1\}$ 'den ayrık olan $\bar{F}$, F 'nin maksimal alt bayrağı olsun, burada $p \in S_0$ ve $q \in S_1$ için pIq 'dur. Aşağıdaki durumların biri oluşur:

(a) Eğer $F = \bar{F}$ ise F ayrıca Γ' üzerinde aynı tipten bir bayraktır.

(b) Eğer $F = \bar{F} \cup \{x\}$, burada $x \in \{p, q\}$ ve ayrıca F , Γ' geometrisinin $t(F) \cup \{0\}$ tipli bir bayrağıdır.

(c) Eğer $F = \bar{F} \cup \{p, q\}$ ise $\bar{F} \cup \{p, \{p, q\}\}$ ve $\bar{F} \cup \{q, \{p, q\}\}$ Γ' geometrisinin aynı tipli bayraklarıdır; ayrıca $\bar{F} \cup \{\{p, q\}\}$ Γ' geometrisinin $t(F) / \{0\}$ tipli bir bayrağıdır.

Açıkça, Γ' geometrisinin herhangi bayrağı (a), (b) ve (c)'yi kabul ederek Γ 'nin tek bir F bayrağından elde edilebilir. Bundan başka, Γ 'nin herhangi chamberı (c)'den Γ' geometrisinin iki chamberına neden olur. Bundan dolayı, Γ' geometrisinin herhangi bayrağı bir chamber içinde içerilir ve Γ' iddia edildiği gibi bir geometridir.

Bundan başka, İnşa 5.6.8'den Γ' geometrisinin herhangi 1-elemanı tam olarak iki 0-eleman ile ilişkilidir: (B_1) şartı doğrudan elde edilir ve $\{0,1\}$ çifti için İnşa 5.6.8-(c) şikkı (B_2) 'yi ima eder. İnşa 5.6.8'in görünümünde 2 özelliğinin ispatı açıktır.

(2) Γ' Geometrisinin Rezidüleri.

Eğer p , Γ' geometrisinin bir 0-elemanı ise İnşa 5.6.8'den p 'nin rezidüsü açıkça Γ içinde p 'nin rezidüsüne izomorftur. Sonuç olarak, bir 0-elemanı içeren Γ' geometrisinin herhangi bayrağının rezidüsü Γ 'nın bir rezidüsüne izomorftur. Ayrıca, bir 0 veya 1-elemanı içeren bir bayrağın Γ içindeki herhangi rezidüsü bu tiptendir.

Eğer $f = \{p, q\}$ Γ' geometrisinin bir 1-elemanı ise İnşa 5.6.8'den f 'nin rezidüsü Γ içinde $\{p, q\}$ bayrağının rezidüsünün ve $\{p, q\}$ kümesinin direk toplamıdır. Sonuç olarak, bir 1-elemanı içeren ve 0-elemanı içermeyen Γ' geometrisinin herhangi bayrağının rezidüsü bir benzer direk toplamıdır.

Son olarak eğer D , $\Delta - \{0,1\}$ tipinin bir bayrağı ise İnşa 5.6.8'den Γ' içinde D bayrağının rezidüsü Γ içinde D 'nin R rezidüsünün $\mathcal{F}(R)$ bayrak geometrisidir. Ayrıca, $t(F) \subset \Delta - \{0,1\}$ ile herhangi F bayrağının rezidüsü İnşa 5.6.8'i sağlayan Γ içinde $Res(F)$ 'den elde edilen geometridir. Şimdi Γ' açıkça açıklanan diyagrama sahiptir.

(3) Γ' Geometrisinin Yolları.

$(x_1, \dots, x_k)$, Γ 'nın bir P yolu olsun. Bu yoldan Γ' geometrisinin P' yolu aşağıdaki oluşur:

- (a) $i = 1, \dots, k$ için her bir x_i P' yolunun bir elemanı olarak göz önüne alınabilir.
- (b) Eğer bazı $j = 1, \dots, k-1$ için $t(x_j) = 0$ veya 1 ve $t(x_{j+1}) = 1$ veya 0 ise Γ' geometrisinin $\{x_j, x_{j+1}\}$ 1-elemanı P' içinde x_j ve x_{j+1} arasına sokulur.

Tersine, Γ' geometrisinin her bir $P' = (x_1', \dots, x_k')$ yoluna P_0 ve P_1 yolları aşağıdaki gibi ilişkilendirilir ($i = 1, \dots, k$):

- (a') Eğer $t(x_i') \neq 1$ ise x_i' P_0 ve P_1 'in bir elemanıdır.

(b') Eğer $t(x_i') = 1$ ise yani eğer $x_i' = \{x_{i_1}, x_{i_2}\}$ Γ içinde $\{0,1\}$ tipinden bir bayrak ise aşağıdaki durumlardan biri meydana gelir:

(*) $i \neq 1$ ve $x_{i-1}' \in \{x_{i_1}, x_{i_2}\}$ veya $i \neq k$ ve $x_{i+1}' \in \{x_{i_1}, x_{i_2}\}$ 'den herhangi biri var ise x_i' P_0 ve P_1 içinde silinir.

(**) $i = k$ iken $t(x_{i-1}') \neq 0$ ve $i = 1$ iken $t(x_{i+1}') \neq 0$ 'ın her ikisi var ise x_i' P_0 içinde(veya P_1) $\{x_{i_1}, x_{i_2}\}$ 'nin tipi 0(veya 1) olan eleman ile yer değiştirir.

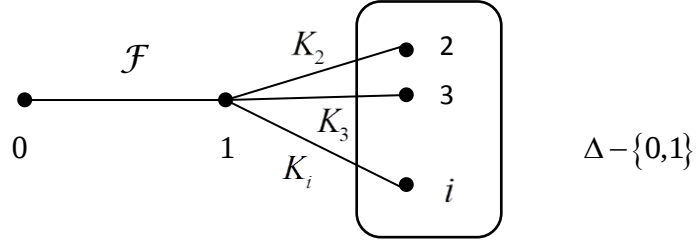
Şimdi, Γ 'nın bağlantılığı açıkça Γ' geometrisinin bağlantılığına denk olur. Aynısı, (2)'nin açık bir uygulaması tarafından rezidülü bağlantılığı için sağlanır.

Son olarak ispatlansın ki, Γ' geometrisinin kuvvetli bağlantılı olması için gerek ve yeter şart Γ geometrisinin kuvvetli bağlantılı olmasıdır. İnşa 5.6.8'den Γ_{ij} ve Γ_{ij}' kesişimleri farklı $i, j \notin \{0,1\}$ için çakışiktır. Ayrıca, eğer yukarıda tanımlanan ilişkilendirilmiş yollar ele alınırsa Γ_{01}' ve Γ_{01} 'in bağlantılığı açıkça denktir. $j \notin \{0,1\}$ için $\{0, j\}$ ve $\{1, j\}$ -kesmelerini göz önüne almak kalır. Γ_{0j} veya Γ_{1j} içindeki herhangi P yolu için ilişkili P' (P 'ye karşılık gelen) yolu Γ_{0j}' içinde içerilir; Γ_{0j}' kesmesinin bağlantılığı böyle Γ_{0j} ve Γ_{1j} 'den elde edilir. Tersine, Γ_{1j}' içinde herhangi P' yolu Γ_{0j} ve Γ_{1j} içinde P_0 ve P_1 yollarına neden olur; son kesmelerin bağlantılığı Γ_{1j}' kesmesininkinden elde edilir. İspatlamak kalır ki, Γ_{1j}' kesmesinin bağlantılığı Γ geometrisinin kuvvetli bağlantılığından elde edilir. x ve y Γ' geometrisinin farklı 1-elemanları olsun: x 'i y 'ye birleştiren Γ_{1j}' kesmesinin bir yolunu göstermeliyiz. Henüz biliyoruz ki, Γ' geometrisinde t_i 'ler 0-elemanlar ve s_i 'ler 1-elemanları olmak üzere bir $x = s_0, t_1, s_1, t_2, \dots, t_n, s_n = y$ yolu vardır. (2)'den Γ' içinde $Res(t_i)$ herhangi $i = 1, \dots, n$ için Γ içinde $Res(t_i)$ ile izomorftur; bundan dolayı, Γ' geometrisinin sadece 1 ve j -elemanlarını içeren s_{i-1} 'i s_i 'ye birleştiren $Res(t_i)$ içinde bir yol vardır. Tüm bu yolları bir araya getirmek, x 'i y 'ye birleştirir. Şimdi Teorem 5.6.7 içindeki 1'in ispatı (2)'den rezidüler içindeki kesmelerin bağlantılığını göstererek açıkça tamamlanabilir.

(4) Γ' Geometrisinin Otomorfizmaları.

(1)'i kullanarak, 3'ün ilk parçası açıktır. İkinci parçası için S_0' elemanının $\{S_0, S_1\}$ kısmını sabitleyen Ω 'nın Σ alt grubu ele alınsın (bakınız İnşa 5.6.8). Bu, Teorem 5.6.7'nin ispatını tamamlar.

Teorem 5.6.9. (Teorem 5.6.7'nin tersi) Γ'



diyagramını ve $\{0,1\}$ çifti için (bakınız Lemma 5.4.2) (B_1) ve (B_2) 'yi sağlayan rankı $n \geq 3$ (sonsuz da olabilir) olan bir geometri olsun ki burada $\mathcal{F}$ graphların bir sınıfı, K_i rank iki geometrilerinin keyfi sınıfları ve $\Delta - \{0,1\}$ üzerinde diyagram keyfidir. Ayrıca Γ' geometrisinin $\{0,1\}$ -kesmesi tek devirli olmayan bir graph (yani bir bipartite graph) olduğu farz edilsin. Buradan, Teorem 5.6.7'nin hipotezlerini sağlayan bir Γ geometrisi vardır öyle ki İnşa 5.6.8'e göre $\Gamma' = \Gamma(0,1)$ 'dir.

Bu teoremi ispatlamadan önce Γ geometrisinin yapısı tanımlanacaktır.

İnşa 5.6.10. $\Gamma'(0,1) = (\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i', t', I')$ Teorem 5.6.9'un hipotezlerini sağlayan bir geometri olduğu farz edilsin. $\{0,1\}$ -kesmesi S_0' köşe kümesinin $\{X_0, X_1\}$ bölmesi ile bir bipartite graptır. Bir $\Gamma = (\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i, t, I)$ geometrisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(a') S_i = \begin{cases} S_i', & i \notin \{0,1\} \\ X_i, & i \in \{0,1\} \end{cases}$$

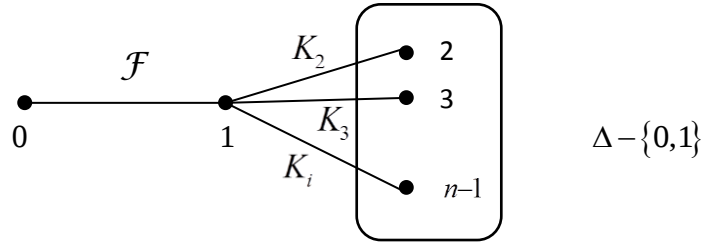
$$(b') t(S_i) = i$$

$$(c') i \neq j \text{ için } x \in S_i \text{ ve } y \in S_j \text{ verilsin.}$$

- Eğer $\{i, j\} \neq \{0, 1\}$ ise xIy olması için gerek ve yeter şart $xI'y$ olmasıdır.
- Eğer $\{i, j\} = \{0, 1\}$ ise xIy olması için gerek ve yeter şart Γ' içinde $x \sim y$ olmasıdır.

Teorem 5.6.9'un İspatı: Aşıkarak, Γ gerçekten bir geometridir. İnşadan, Γ' içinde cotipi $\{0, 1\}$ olan herhangi F bayrağının (rank iki) rezidüsü Γ içinde F 'nin G rezidüsünün $\mathcal{F}(G)$ bayrak geometrisidir. Şimdi Γ , Teorem 5.6.7'de gerek duyulan diyagrama sahip olduğunu göstermek kolaydır: $i \in \Delta - \{0, 1\}$ için $\{0, i\}$, $\{1, i\}$ ve $\Delta - \{0, 1\}$ tiplerinin rezidülerine (A_2) ve (A_3) şartları, Lemma 5.4.2 ve (B_1) uygulansın. Sonuç olarak, İnşa 5.6.8 ve 5.6.10 karşılaştırılırsa Γ' , İnşa 5.6.8 ile Γ 'dan elde edilir.

Sonuç 5.6.11. Γ'



diyagramına sahip ve kesişim özelliğini sağlayan (veya Bölüm 5.4'teki onun (I_{01}) zayıf versiyonu) $n \geq 3$ sonlu rankı ile bir rezidülü bağlantılı bir geometri olsun, burada $\mathcal{F}$ tek devirsiz graphların bir sınıfı, K_i rank iki geometrilerinin keyfi sınıfları ve $\Delta - \{0, 1\}$ üzerinde diyagram keyfidir. Bu durumda, Teorem 5.6.7'nin hipotezlerini sağlayan bir Γ geometrisi vardır öyle ki Γ' , İnşa 5.6.8 ve Γ 'dan $\Gamma'(0, 1)$ olarak elde edilebilir.

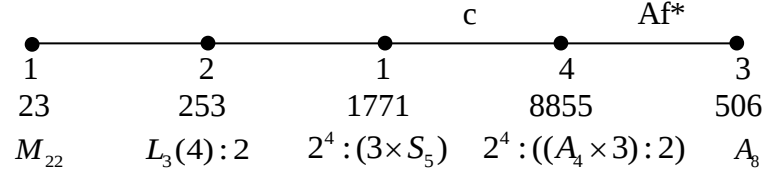
İspat: (B_1) ve (B_2) şartları 5.4.1, 5.4.4, 5.4.5 lemmalarından elde edilir. Bundan dolayı, Γ' geometrisinin $T \setminus \{0, 1\}$ -kesmesi bir graphtır ve bu sonucu ispatlamak için Teorem 5.6.9 uygulanır. T tek devire sahip değildir (yani bipartite).

R_1 ve R_2 Γ' içinde F_1 ve F_2 bayraklarının $\{0, 1\}$ tipli iki rezidüsü olduğu farz edilsin öyle ki onlar bazı ortak e 1-eleman içerir. R_1 ve R_2 hipotezden bipartite olduğundan $R_1 \cup R_2$ (B_2) 'den bipartite olmalıdır.

Γ' geometrisinin rezidülü bağlantılı özelliği kullanılarak ispat tamamlanır.

6. UYGULAMA

(Pasini, 1996), M_{23} Mathieu grubu için bir dual affine uzayın bir genişlemesi olarak bir rank-5 geometrisi inşa etti. Bu geometri Γ ile gösterilsin. Diyagramı aşağıda verilmiştir.

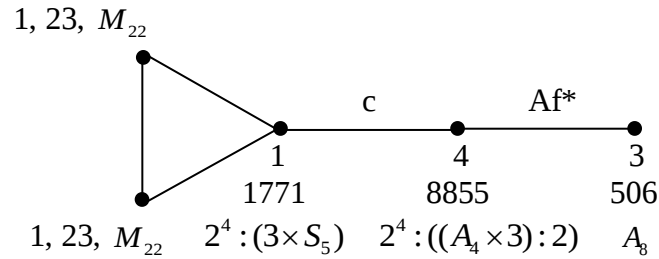


Şekil 6.1. M_{23} grubunun M_{22} , $L_3(4):2$, $2^4:(3 \times S_5)$, $2^4:((A_4 \times 3):2)$, A_8 alt gruplarından oluşan rank-5 diyagramı

Tipi 1 olan elemanlar grubun tek nokta stabilizerı, tipi 2 olan elemanlar iki nokta stabilizerı, tipi 3 olan elemanlar üç nokta stabilizerı, tipi 4 olan elemanlar dört nokta stabilizerı ve tipi 5 olan elemanlar oktat stabilizerıdır. İlişki içermedir.

(Pasini, 1996), Γ geometrinin firm, rezidülü bağlantılı ve bayrak geçişli olduğunu göstermiştir.

Yukarıdaki Pasini geometrisinin başka bir geometrik yapısı aşağıda verilmiştir. Bu geometrik yapı kenarların (tip-2) çıkarılarak yerine köşelerin kopyasının konulması ile oluşturulmuştur. Elde edilen bu yeni geometri $\tilde{\Gamma}(0,1)$ ile gösterilsin.



Şekil 6.2. M_{23} grubunun M_{22} , M_{22} , $2^4:(3 \times S_5)$, $2^4:((A_4 \times 3):2)$, A_8 alt gruplarından oluşan yeni geometrinin rank-5 diyagramı

Teorem 5.4.3'ten bu diyagram elde edilir ve bu teoremin (i), (ii) ve (iii) şartları sağlanır.

Bu geometrilerin her ikisi de firm, bağlantılı, rezidülü bağlantılı, kuvvetli bağlantılıdır. M_{23} Mathieu grubu bu iki geometriye de bayrak geçişli olarak etki eder.

$\Delta - \{0,1\}$ üzerinde diyagramlar aynı şekilde elde edilir. Ayrıca, Γ geometrisi (A_1) , (A_2) ve (A_3) 'ü sağladığından $\tilde{\Gamma}(0,1)$ geometrisi de sağlar.

7. TARTIŞMA ve SONUÇ

Sonlu ve basit grupların geometrik incelenmesi, sonlu grup teorisinde çalışılan önemli konulardan biridir. Bu tezde, önce genel lineer grup tanımı verilmiş olup, buradan genel lineer grubun alt grupları olan özel lineer grup ve projektif özel lineer gruplardan bahsedilmiştir. Özellikle, projektif özel lineer grup üzerine durulmuştur. Bu grupların bazı haller için basit grup olması incelenmiştir. İlişki ve koset geometri kavramı açıklanmış ve bu kavramların genel özelliklerinden bahsedilmiştir. Bilinen bir geometriden nasıl yeni bir geometri inşa edilebileceği üzerine iki yöntem açıklanmıştır. Bu yöntemlerin aytıntılı inşaları yapılmış olup, bu iki geometrinin aynı özellikleri (firm, rezidülü bağlantılıku kuvvetli bağlantılık, vb.) sağladığından bahsedilmiştir.

Bu tezden hareketle, ilişki ve koset geometri hakkında ayrıntılı çalışmalar ve bilinen sonlu grupların geometrilerinden yeni geometriler elde etme üzerine çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Bosma, W., Cannon, J., and Playoust, C. 1997. The MAGMA algebra system. I. The user language. *J. Symbolic Comput.* 24, 3-4: 235-265. Computational algebra and number theory (London, 1993).
- Buekenhout, F. 1979. Diagrams for geometries and groups. *J. Combin. Theory Ser. A* 27, 2: 121-151.
- Buekenhout, F. 1981. The basic diagram of a geometry. In M. Aigner and D. Jungnickel, editors, *Geometries and groups*, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, volume 893: pages 1-29.
- Buekenhout, F. 1982. Diagram geometries for sporadic groups. In *Finite Groups Coming of Age: proceedings of the Canadian Mathematical Society Conference held on June 15-28, vol. 45, A.M.S series Contemporary Mathematics*, pp. 1-32.
- Buekenhout, F. 1983. (g, d, d^*) -gons. In Johnson N.L., Kallaher M.J., and Long C.T., editors, *Finite Geometries*, Marcel Dekker, New York: pages 93-102.
- Buekenhout, F. 1985. Diagram geometries for sporadic groups. *Contemp. Math.*, 45: 1-32.
- Buekenhout, F. 1995. *Handbook of Incidence Geometry. Buildings and Foundations*. Elsevier, Amsterdam.
- Buekenhout, F., Schwarz, W. 1984. A simplified version of strong connectivity in geometries. *J. Combin. Theory Ser. A* 37, 1: 73-75.
- Buekenhout, F., Cara, P., and Dehon, M. 1998. Geometries of small almost simple groups based on maximal subgroups. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*.
- Buekenhout, F., Dehon, M., and Leemans, D. 1999. An atlas of residually weakly primitive geometries for small groups. *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect.* 8 (3) 14: 175.
- Buekenhout, F., Cara, P., Dehon, M., and Leemans, D. 2003. Residually weakly primitive geometries of small sporadic and almost simple groups: a synthesis. In *Topics in diagram geometry*, vol. 12 of Quad. Mat. Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta, pp. 1-27.
- Buekenhout, F., Cohen A.M. 2012. *Diagram Geometry related to classical groups and buildings*. Springer, Berlin, 644p.
- Cameron, P. J. 1999. *Permutation Groups*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Connor, T. 2011. The sporadic group of Suzuki and apartments in coset geometries. Yüksek Lisans, Université Libre de Bruxelles Faculté des Sciences, Brüksel, 116.
- Conway, J. H., Curtis, R. T., Norton, S. P., Parker, R. A., and Wilson, R. A. 1985. *Atlas of finite groups*. Oxford University Press, Eynsham. Maximal subgroups and ordinary characters for simple groups, With computational assistance from J. G. Thackray.
- Coxeter, H.S.M. 1983. My graph. *Proc. London Math. Soc.*, 46: 117-136.
- Diestel, R. 2000. *Graph theory*, 3rd ed., vol. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 173. Springer-Verlag, New York.
- Dehon, M. 1994. Classifying geometries with Cayley. *J. Symbolic Comput.* 17, 3: 259-276.
- Eyrisakal, C. 2014. *Sonlu Gruplar ve Geometrileri*. Yüksek Lisans Tezi, Sinop Üniversitesi, Sinop, 65.
- Fraleigh, B. 1967. *A First Course in Abstract Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, USA, 447p.

- Hermand, M. 1991. Geometries, langage Cayley et groupe de Hall-Janko. PhD thesis, Universite Libre de Bruxelles.
- Humphreys, J.F. 1996. A Course in Group Theory. Oxford University Press, Oxford, 280p.
- Kilic, N. 2006. On Rank 3 Residually Connected Geometries for M_{23} . Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 1, no. 14: 679-696.
- Kilic, N. 2006. Some rank 3 residually connected geometries for M_{23} . Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 1, no. 15, 697-718.
- Kilic, N. 2010. On Rank-2 Geometries of The Mathieu Group M_{23} . Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 14, No. 2: 373-387.
- Kilic, N. 2010. On Rank-2 Geometries of The Mathieu Group M_{24} . An. St. Univ. Ovidius Constanta, Vol. 18(2): 131-148.
- Kilic, N. 2014. All Rank 2 Primitive Geometries of the Mathieu Group M_{11} . Applied Mathematical Sciences, Vol. 8, no. 128: 6349 – 6357.
- Kilic, N., Rowley, P. 1997. Some Group Geometries for M_{11} and M_{12} . UMIST, England, 60p.
- Kilic, N., Rowley, P. 2002. Residually Connected Geometries for M_{22} . UMIST, England, 449p.
- Kilic, N., Rowley, P. 2003. On rank 2 and rank 3 residually connected geometries for M_{22} . Note di Matematica 22, n.1: 107-154.
- Kilic, N., Rowley, P. 2012. On The Maximal Rank of Primitive Residually Connected Geometries for M_{22} , Journal of Algebra, Vol. 362: 84-91.
- Leemans, D. Private communication.
- Leemans, D. 1994. Contribution a l'elaboration d'un atlas de geometries. Master's thesis, Universite Libre de Bruxelles.
- Leemans, D. 1999. An atlas of regular thin geometries for small groups. Math. Comput., 68(228): 1631-1647.
- Leemans, D. 2001. Some rank five geometries related to the Mathieu group M_{23} . Journal of Combinatorial Theory, series A 95: 365-372.
- Leemans, D. 2008. Residually Weakly Primitive and Locally Two-Transitive Geometries for Sporadics Groups. Académie Royale de Belgique: 167-170.
- Lefevre-Percsy, C., Percsy, N., Leemans, D. 1993. New Geometries for Finite Groups and Polytopes. Bull. Belg. Math. Soc. -1993(0): 583-610.
- Neumaier, A. 1982. Rectagraphs, diagrams, and Suzuki's sporadic simple group. In E. Mendelsohn, editor, Algebraic and Geometric Combinatorics, volume 15 of Ann. Discrete Math., pages 305-318.
- Pasini, A. 1994. Diagram Geometries. Oxford Science Publications, Oxford.
- Pasini, A. 1995. A quarry of geometries. Rend. Sem. Matematico e Fisico di Milano, 65: 179-247.
- Pasini, A. 1996. Flag-transitive extensions of dual affine planes. European J. Combin. 17: 657-671.
- Tits, J. 1961. Geometries polyedriques et groupes simples. Atti Riunione Grupem. Math. Express. Lat. Firenze: 66-88.
- Tits, J. 1974. Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs. Springer Verlag Berlin Heidelberg New-York.

- Tits, J. 1980. Buildings and Buekenhout geometries. In M.J. Collins, editor, Finite simple groups II, Acad. Press, New York, pages 309-320.
- Tits, J. 1981. A local approach to buildings. In The geometric vein (the Coxeter Festschrift), Springer, Berlin, pages 519-547.
- Velioğlu, Z. 2009. Mathieu Gruplarının Geometrisi. Yüksek Lisans Tezi, Harran Üniversitesi, Şanlıurfa, 86.
- Wielandt, H. 1964. Finite permutation groups, 1 ed. Academic Press.

ÖZGEÇMİŞ

06.09.1990 tarihinde Tokat'ın Turhal ilçesinde doğdu. İlköğrenimine Adıyaman'da başladı. İlk ve orta öğrenimini Bartın'ın Kurucaşile ilçesinde tamamladı. Lise öğrenimini Kastamonu Abdurrahmanpaşa Lisesi'nde tamamladı. 2008 yılında girdiği Sinop Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 2012 yılında mezun oldu. 2012 yılında Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve halen devam etmektedir.