

HAZİRAN 2019

Yüksek Lisans Tezi-Matematik

GÜLÇİN MAZICIOĞLU

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRUPLARIN ÖZEL OTOMORFİZMALARI

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÜLÇİN MAZICIOĞLU
HAZİRAN 2019

GRUPLARIN ÖZEL OTOMORFİZMALARI

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Dr. Öğr. Üy. Özge ÖZTEKİN

Gülçin MAZICIOĞLU

Haziran 2019



©2019 [Gülçin MAZICIOĞLU]

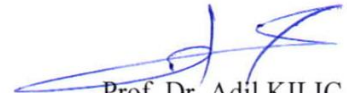
TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Başlığı : Grupların Özel Otomorfizmleri
Öğrencinin Adı Soyadı : Gülçin MAZICIOĞLU
Sınav Tarihi : 12.06.2019

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.


Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımca (tarafımızca) okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


Dr. Öğr. Üy. Özge ÖZTEKİN
Danışman

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans/Doktora tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Memet KULE

Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Dr. Öğr. Üy. Özge ÖZTEKİN

İmzası




İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Gülçin MAZICIOĞLU

ABSTRACT

SPECIAL AUTOMORPHISMS OF GROUP

MAZICIOĞLU, Gülçin

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Özge ÖZTEKİN

June 2019

42 pages

Let G be a group. The set of automorphism of G establishes a group with the composition map and this group denotes as $Aut(G)$. Some special sub-groups of $Aut(G)$ are the group of IA - automorphisms, inner automorphisms, central automorphisms, pointwise-inner automorphisms, tame automorphisms, normal automorphisms, class-preserving automorphisms, center-fixing automorphisms the group of automorphisms. In this thesis, the groups of special automorphisms have been considered and properties have been given. Furthermore, we have compiled that under which conditions of G , the groups of this special automorphism to be equal, from the studies that are related to this topic.

Key Words: IA - Automorphisms, Inner Automorphisms, Central Automorphisms.

ÖZET

GRUPLARIN ÖZEL OTOMORFİZMALARI

MAZICIOĞLU, Gülçin
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Dr. Öğr. Üy. Özge ÖZTEKİN
Haziran 2019
42 sayfa

G bir grup olsun. G nin otomorfizmlerinden oluşan küme, bileşke işlemi ile bir grup oluşturur ve bu grup $Aut(G)$ ile gösterilir. $Aut(G)$ nin bazı özel alt grupları IA -otomorfizmler grubu, iç otomorfizmler grubu, merkez otomorfizmler grubu, pointwise-iç otomorfizmler grubu, tame otomorfizmler grubu, normal otomorfizmler grubu, class-preseving otomorfizmler grubu, center-fixing otomorfizmler grubu, otomorfizm gruplarıdır. Tez de bu özel otomorfizm grupları ele alınmış ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca konu ile ilgili yapılan çalışmalardan bu özel otomorfizm gruplarının birbirine eşit olması için G nin hangi koşulları sağlaması gerektiğini derledik.

Anahtar Sözcükler: IA -Otomorfizmler , İç Otomorfizmler , Merkez Otomorfizmler.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Dr.Öğr.Üy. Özge ÖZTEKİN 'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam sırasında desteklerini benden esirgemeyen Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden, sayın Doç.Dr.Memet ŞAHİN' e, çalışma arkadaşım değerli Abdüllatif YALÇIN'a canım abim Mehmet SAYIN'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatım boyunca yanımda olan benden emeklerini esirgemeyen ve tüm desteklerini sunan biricik annem Aslıhan MAZICIOĞLU'na , biricik babam Mehmet Nuri MAZICIOĞLU' na canım kardeşim Meliha İrem MAZICIOĞLU'na ve yol arkadaşım Mehmet Hayrettin Evran'a teşekkür ve minnetlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR	vii
SEMBOLLER LİSTESİ.....	x
BÖLÜM 1: GİRİŞ	1
BÖLÜM 2: TEMEL TANIM VE TEOREMLER	2
2.1 Temel Tanım Ve Teoremler	2
2.1.1 Temel Bilgiler	2
2.1.2 Gruplar	3
2.1.3 Elemanların Mertebesi ve Devirli Gruplar	4
2.1.4 Alt Gruplar	5
2.1.5 Kosetler (Denklik Sınıfları) ve Sayma.....	6
2.1.6 Normal Alt Gruplar ve Bölüm Grubu.....	10
2.7. Homomorfizmalar ve İzomorfizma Teoremleri	12
2.2 Komütatör Altgrupları Ve Özellikleri	16
2.3 Merkezleyen Ve Normalleyen.....	18
2.4 Azalan Ve Artan Merkezi Seriler	19
2.4.1 Azalan Merkezi Seri	19
2.4.2 Artan Merkezi Seri.....	21
2.5 Direkt Çarpımlar.....	22
2.5.1 Direkt Çarpımlar	22
2.5.2. Yarı Direkt Çarpımlar	23
BÖLÜM 3: GRUPLARIN OTOMORFİZMLERİ	26
3.1 Grupların Otomorfizmleri	26
3.1.1 IA Otomorfizması	26
3.1.2 Inner (İç) Otomorfizmler	30
3.1.3 Merkezi Otomorfizma.....	35

3.1.4 Pointwise İç Otomorfizma	35
3.1.5 Tame Otomorfizma	36
3.1.6 Normal Otomorfizma	36
3.1.7 Class-Preserving Otomorfizma	36
3.1.8 Center-Fixing Otomorfizma	36
BÖLÜM 4: ÖZEL OTOMORFİZM GRUPLARININ ÖZELLİKLERİ	37
4.1 Özel Otomorfizm Gruplarının Temel Özellikleri	37
BÖLÜM 5 ÖZEL OTOMORFİZM GRUPLARININ SONUÇLARI	38
5.1 Sonuçlar	38
KAYNAKLAR	41



SEMBOLLER LİSTESİ

α	Alfa
β	Beta
δ	Delta
π	Pi
σ	Sigma
φ	Phi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

G , herhangi bir grup olmak üzere, G nin otomorfizmlerinden oluşan küme, bileşke işlemi ile bir grup oluşturur. Bu grubu $Aut(G)$ ile göstereceğiz. $Aut(G)$ grubunun özel bazı altgrupları bulunmaktadır. Bunlar, IA -otomorfizmler grubu, iç otomorfizmler grubu, merkez otomorfizmler grubu, pointwise-iç otomorfizmler grubu, tame otomorfizmler grubu, normal otomorfizmler grubu, class-preseving otomorfizmler grubu, center-fixing otomorfizmler grubu, otomorfizm gruplarıdır.

Bu özel altgruplarının karakterizasyonu, grup teorisinde önemli bir çalışma alanıdır. Ayrıca bu özel otomorfizm gruplarının birbirine eşit olduğu durumlar son zamanlarda üzerinde çok çalışılan bir konudur. Bu tezin amacı yapılan bu çalışmalardan faydalananak bu otomorfizm gruplarının birbirine eşit olduğu durumları araştırmaktır.

Bu tez dört kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda, Grup teorisi ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci kısımda, $Aut(G)$ özel otomorfizm gruplarından IA -otomorfizmler grubu, iç otomorfizmler grubu, merkez otomorfizmler grubu, pointwise-iç otomorfizmler grubu, tame otomorfizmler grubu, normal otomorfizmler grubu, class-preseving otomorfizmler grubu, center-fixing otomorfizmler grubu tanıtılmıştır.

Üçüncü kısımda, bu özel otomorfizm gruplarının temel sonuçları verilmiştir.

Dördüncü kısımda ise bu özel otomorfizm gruplarının birbirine eşit olması için G nin hangi koşulları sağlaması gerektiğini yapılan makalelerden araştırdık.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Temel Tanım Ve Teoremler

2.1.1 Temel Bilgiler

Tanım 2.1.1.1: $n \geq 2$ olmak üzere $A_1, A_2, \dots, A_n$ kümeleri verilsin. O zaman

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A, 1 \leq i \leq n\}$$

kümesine $A_1, A_2, \dots, A_n$ nin **Kartezyen Çarpım** denir.

Tanım 2.1.1.2: $n \geq 2$ olmak üzere $A_1, A_2, \dots, A_n$ kümeleri verilsin. O zaman $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ kartezyen çarpımının herhangi bir β alt kümesine $A_1, A_2, \dots, A_n$ üzerinde bir **Bağıntı** denir.

Tanım 2.1.1.3: A kümesi üzerinde bir β bağıntısı verilsin.

- (i) Eğer her $a \in A$ için $a\beta a$ ise β ya yansıyan bir bağıntı denir.
- (ii) Eğer her $a, b \in A$ için $a\beta b$ iken $b\beta a$ ise β ya simetrik bir bağıntı denir.
- (iii) Eğer her $a, b, c \in A$ için $a\beta b$ ve $b\beta c$ iken $a\beta c$ ise β ya geçişken bir bağıntı denir.

Eğer bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişken ise β ya A üzerinde bir **Denklik Bağıntısı** denir.

Tanım 2.1.1.4: β , A üzerinde bir denklik sınıfı ve $a \in A$ olsun. $\bar{a} = \{b \in A | b\beta a\}$ kümesine A nın β ya göre denklik sınıfı denir.

Tanım 2.1.1.5: A ve B iki küme ve f , A dan A ye bir bağıntı olsun. A kümesinin her elemanına karşılık $f(a) = b$ olacak şekilde B kümesinde bir ve yalnız bir b elemanı varsa, f bağıntısına A dan B ye bir **fonksiyon** denir.

- $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall a_1, a_2 \in A$ için $f(a_1) = f(a_2)$ iken $a_1 = a_2$ ise f ye birebir fonksiyon denir.
- $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall b \in B$ için $f(a) = b$ olacak biçimde bir $a \in A$ varsa f ye örten fonksiyon denir.
- f hem örten hem de birebir ise f ye birebir eşleşme denir.

Tanım 2.1.1.6: A bir küme olsun. Eğer $A \neq \emptyset$ ise ya da n bir pozitif tam sayı olmak üzere $\{1, 2, \dots, n\}$ arasında birebir bir eşleme varsa A ya sonlu bir küme denir. Sonlu olmayan bir kümeye de sonsuz küme denir. Eğer A sonlu ise ve A ile $\{1, 2, \dots, n\}$ arasında birebir bir eşleşme varsa n sayısına A nın **kardinalitesi** denir ve $|A|$ ile gösterilir.

2.1.2 Gruplar

Tanım 2.1.2.1: A boş olmayan bir küme olmak üzere $A \times A$ dan A ya bir $*$ fonksiyonuna A üzerinde **ikili işlem** denir. $*$: $A \times A \rightarrow A$ olmak üzere her $a, b \in A$ için $*$ (a, b) yazılışı yerine $(a * b)$ yazılışını kullanacağız.

- A boş olmayan bir küme $*$, A üzerinde ikili işlem olsun.
 - i. Her $a \in A$ için $a * e = e * a = a$ olan $e \in A$ varsa, $*$ ikili işleminin e etkisiz elemanıdır.
 - ii. A kümesinin bir a elemanı için $a * x = x * a = e$ olan bir $x \in A$ varsa x elemanına A kümesinde $*$ ikili işlemine göre a nın tersi denir.
 - iii. Her $a, b, c \in A$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ eşitliği sağlanıyorsa $*$ ikili işlemi birleşme özelliği sağlar denir.
 - iv. o , A kümesi üzerinde ikili işlem ve $\forall a, b, c \in A$ için $a o (b * c) = (a o b) * (a o c)$ (benzer biçimde $(b * c) o a = (b o a) * (c o a)$ oluyorsa o ikili işlemi $*$ üzerine soldan (sağdan) dağılır denir.
 - v. Her $a, b \in A$ için $a * b = b * a$ eşitliği sağlanıyorsa, $*$ ikili işlemi değişme özelliğini sağlar denir.

Tanım1.1.2.2: G boş olmayan bir küme ve $*$, G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun.

G_1) $*$ ikili işleminin etkisiz elemanı vardır.

G_2) G nin her elemanının $*$ ikili işlemine göre G de tersi vardır.

G_3) $*$ ikili işlemi birleşme özelliğini sağlar.

$G_4)$ * ikili işlemi değişme özelliğini sağlar.

Özelliklerinden sadece $G_3)$ koşulu sağlanıyorsa G bir **Yarı-Grup** denir.

Özelliklerinden $G_1)$, $G_2)$, $G_3)$ koşulları sağlanıyorsa G kümesine * ikili işlemi altında bir **Grup** denir.

Eğer bir G grubu $G_4)$ özelliğini sağlıyorsa G ye * ikili işlemi altında **Değişmeli Grup** denir. Eğer grubun işlemi önemsiz ise, işlemi çarpma olarak alabiliriz.

Tanım 1.1.2.3: G bir grup ve p bir asal sayı olsun. Eğer G grubunun her elemanının mertebesi p nin bir kuvveti olarak yazılabiliyorsa G ye bir **p -grup** adı verilir.

2.1.3 Elemanların Mertebesi ve Devirli Gruplar

Tanım 2.1.3.1: G bir grup ve $x \in G$, x in mertebesi en küçük pozitif tam sayı n olur. $x^n=1$ ve aksi halde x in sonsuz mertebesi vardır denir.

x elemanının mertebesini $|x|$ şeklinde gösteririz.

Eğer $x^i = x^j$, $i < j$ olduğu zaman $x^{j-i} = 1$, x sonlu mertebeye sahiptir. Ve $|x| \leq j - i$ olur. Özellikle, eğer x sonsuz mertebeye sahipse x in üsleri tüm eşit olmayan ikililerdir.

Eğer x sonlu mertebeye sahipse, $n, k \in \mathbb{Z}$,

$k = nq + r$ $0 \leq r < n$ için. O zaman;

$$x^k = x^{nq+r} = (x^n)^q x^r = x^r \quad (2.1)$$

$$(x^n = 1)$$

Önerme 2.1.3.1: (i) Eğer $x \in G$ sonsuz mertebedense o zaman x^i üsleri farklıdır.

($i \in \mathbb{Z}$ için)

(ii) Eğer $x \in G$ sonlu mertebeli ise o zaman x in n tane farklı üssü vardır, yani $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$.

Sonuç 2.1.3.1: G bir grup ve $x \in G$ olsun.

$$|x| = \langle x \rangle$$

Eğer G sonlu bir grupsa o zaman $|x| \mid |G|$ olur.

Denklem (2.1) den görebileceğimiz, $x^k = 1 \Leftrightarrow |x| \mid k$ dır.

Tanım 2.1.3.2: G n .mertebeden sonlu devirli bir grup olsun. O zaman G , n nin her d bölenleri için d . mertebeden tam bir alt grubu vardır

Tanım 2.1.3.3: G bir grup ve X de G nin bir alt kümesi olsun. $\{H_i : i \in I\}$ kümesi G nin X i içeren alt gruplarının bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} H_i$ G nin X tarafından üretilen alt grubu denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

$$\langle X \rangle = \bigcap_{i \in I} H_i$$

X kümesinin elemanları $\langle X \rangle$ grubunun **üretecileridir**.

2.1.4 Alt Gruplar

Tanım 2.1.4.1: Bir G grubunun bir H alt kümesi eğer;

- (i) $H \neq \emptyset$
- (ii) Her $x, y \in H$ için $xy \in H$
- (iii) Her $x, y \in H$ için $x^{-1} \in H$

özelliklerine sahipse H , G grubunun bir alt grubudur. $H \leq G$ şeklinde gösterilir.

Lemma 2.1.4.1: Bir G grubunun alt gruplarının bir koleksiyonu $\{H_i : i \in I\}$ ise;

O zaman $\bigcap_{i \in I} H_i$ kümesi de G nin bir alt grubudur.

İspat: Her i için $e_G \in H_i$ dir. Böylelikle $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$ olur. Şimdi $x, y \in \bigcap_{i \in I} H_i$ olsun. O zaman her i için $x, y \in H_i$, bu yüzden $xy \in H_i$ ve $x^{-1} \in H_i$ den $H_i \leq G$ dir. Buradan $xy \in \bigcap_{i \in I} H_i$ ve $x^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$ sonucunu çıkarırız. Böylece kesişim bir alt gruptur.

Genelde bir grubun alt gruplarının ailesinin birleşimi bir alt grup değildir.

Tanım 2.1.4.2: G bir grup ve X , G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. G grubunun X kümesini kapsayan bütün alt gruplarının kesişimine X kümesi ile üretilen altgrup denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Yani;

$$\langle X \rangle = \bigcap_{X \subset A \leq G} A$$

Lemma 2.1.4.2: G bir grup ve X de G nin bir alt kümesi olsun. O zaman;

$$\langle X \rangle = \{ X_1^{\varepsilon_1} X_2^{\varepsilon_2} \dots X_n^{\varepsilon_n} : n \geq 0, x_i \in X, \varepsilon_i \neq 1 \forall i \text{ için} \}$$

Böylece $\langle X \rangle$, X in elemanlarının tüm çarpımlarından ve terslerinden meydana gelir.

Örnek 2.1.4.1: $S_3 = \{Id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2)\}$ ve $G = S_3$ olsun. G nin bir O zaman $\{(1\ 2)(2\ 3)\}$ kümesi G nin bir alt kümesidir.

$\langle (1\ 2), (2\ 3) \rangle$ kümesini hesaplayalım:

$$(1\ 2)(1\ 2) = Id \quad (1\ 2)(2\ 3) = (1\ 3)$$

$$(1\ 2)(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2)$$

$$(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 2\ 3)$$

S_3 ün tüm elemanlarını bu şekilde elde ettik öyleyse $\langle (1\ 2)(2\ 3) \rangle = S_3$

Tanım 2.1.4.3: G değişmeli bir grup olsun. G grubunun bütün sonlu mertebeli elemanlarından oluşan küme bir gruptur. Bu gruba G grubunun **torsion** alt grubu denir.

2.1.5 Kosetler (Denklik Sınıfları) ve Sayma

Tanım 2.1.5.1 : H bir G gurubunu bir alt grubu ve $a, b \in G$ olsun. Eğer her $a, b \in G$ için $ab^{-1} \in H$ ise a modölo H ile b sağdan **kongrüanttır** denir.

Benzer şekilde $a^{-1}b \in H$ ise a modölo H ile b soldan **kongrüanttır** denir.

Eğer G değişmeli ise sağ ve sol kongrüantlık denktir.

$$(ab^{-1} \in H \Rightarrow (ab^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow (b^{-1})^{-1}a^{-1} = ba^{-1} = a^{-1}b)$$

Tanım 2.1.5.2: G bir grup ve H de G nin alt grubu olsun.

- i. Modülo H sağ kongrüantlık G üzerinde bir denklik bağıntısıdır.
(sol kongrüantlık içinde aynı şey söylenebilir.)
- ii. Modülo H sağ kongrüantlık bağıntısına göre denklik sınıfları ;

$$Ha = \{ha : h \in H\}$$

şeklindedir. Benzer tanımlar sol kongrüantlık içinde söylenebilir.

- iii. $|Ha| = |H| = |aH|$ (her $a \in G$)

Burada Ha ya H nin **sağ koseti**, aH ye H nin **sol koseti** denir.

Genel olarak sağ koset sol kosete eşit değildir.

İspat: $a \equiv b \pmod{H}$ yerine kısaca $a \equiv b$ yazacağız.

- i. $a, b, c \in G$ olsun.

$aa^{-1} = e \in H$ olduğundan $a \equiv a$ dır.

(kongrüant bağıntısı yansımali bir bağıntıdır.)

" $\equiv$ " bağıntısı simetrik bir bağıntıdır.

$$(a \equiv b \Rightarrow b \equiv a)$$

$$a \equiv b \Rightarrow ab^{-1} \in H \Rightarrow (ab^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow ba^{-1} \in H \Rightarrow b \equiv a$$

" $\equiv$ " bağıntısı bir geçişken bağıntıdır.

$a \equiv b, ab^{-1} \in H$ ve $b \equiv c, bc^{-1} \in H$ olsun.

$$(ab^{-1})(bc^{-1}) \in H \Rightarrow ac^{-1} \in H \Rightarrow a \equiv c$$

Böylece sağ modülo H kongrüantlık bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

- ii. $a \in G$ elemanının sağ kongrüantlık denklik sınıfı;

$$\begin{aligned} \{x \in G : x \equiv a\} &= \{x \in G : xa^{-1} \in H\} \\ &= \{x \in G : xa^{-1} = h \in H\} \\ &= \{x \in G : x = ha \in H\} \\ &= \{ha : h \in G\} \\ &= Ha \end{aligned}$$

- iii. $Ha \rightarrow H$

$$ha \rightarrow h$$

olarak tanımlanan dönüşüm bijeksiyondur.

Bu durumda $|Ha| = |H|$ dır.

Benzer şekilde $|H| = |aH|$ dir.

$$\Rightarrow |Ha| = |H| = |aH|$$

Sonuç 2.1.5.1: H bir G grubunun alt grubu olsun.

- i. G , H nin sağ (sol) kosetlerinin bileşkesidir.
- ii. H nin G deki iki sağ (sol) koseti ya ayrıktır ya da eşittir.
- iii. Her $a, b \in G$ için

$$Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \text{ ve } aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$$

olmasıdır.

- iv. R kümesi H nin G deki farklı sağ kosetlerinin kümesi,
 L kümesi H nin G deki farklı sol kosetlerinin kümesi,

$$|R| = |L|$$

dir. (sağ kosetlerle sol kosetler aynı sayıdadır.)

Tanım 2.1.5.3: H bir G grubunun alt grubu olsun. H nin G deki indeksi $[G:H]$, H nin G deki sol (sağ) kosetlerinin sayısına eşittir.

$[G:H]$ değeri sağ ve sol kosetten bağımsızdır.

- $[G:H]$, G ve H sonsuz olsa bile sonlu olabilir.

Örnek 2.1.5.1: $[Z:\langle m \rangle] = m$ eğer $H = \langle e \rangle$ ise her $a \in G$ için $Ha = \{a\}$ dır.
 $[G:H] = |G|$ dir.

G nin bir H alt grubunun sağ koset temsilinin bir tam kümesi H nin G deki sağ kosetlerinin her birinden sadece bir tek eleman içeren $\{a_i\}$ kümesidir.

$\{a_i\}$ kümesinin kardinalitesi $[G:H]$ ne eşittir.

Ayrıca $\{a_i\}$ kümesi H nin bir tane elemanını içerir. Çünkü $H = He$ kendi kümesinin sağ kosetidir.

Teorem 2.1.5.1: K, H, G $K < H < G$ olacak şekilde gruplar olsun. Bu durumda ;

$$[G:K] = [G:H][H:K]$$

dir. Bunlardan dolayı herhangi ikisi sonlu ise üçüncüsünde sonludur.

Teorem 2.1.5.2: (LAGRANGE TEOREMİ) : H , G grubunun alt grubu olsun. Bu durumda

$$|G|=|G:H|. |H|$$

dir. Özel olarak eğer G sonlu bir grupsa herhangi bir $a \in G$ elemanının $|a|$ derecesi $|G|$ yi böler.

İspat: $[G:H] = H$ nin G deki sağ(sol) kosetlerinin sayısı, H nin G deki indeksi r olsun. O halde H nin sağ kosetleri ;

$$H, H_{a_1}, \dots, H_{a_{r-1}}$$

dir. Sağ kosetler G nin bir parçalaışını oluşturduğundan

$$G = H \cup H_{a_1} \cup \dots \cup H_{a_{r-1}}$$

$$|G| = |H| + |H_{a_1}| + \dots + |H_{a_{r-1}}|$$

$$|G| = r.H$$

$$|G| = |G:H|. |H|$$

Teoremin ikinci kısmını ispatlayalım.

$H = \langle a \rangle$ alt grubunu düşünelim.

Lagrange Teoreminden $|H||G|$ dir.

$$(\langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3\} \mid a| = 4 \mid a| = a^4 = e \mid H||G| \Rightarrow |a||G|)$$

G bir grup H, K G nin iki alt grubu olsun.

$$HK = \{ab: a \in H, b \in K\}$$

Bir alt grubun sağ ve sol kosetleri özel durum oluştururlar.

Eğer H ve K bir G grubunun alt grupları iseler bu durumda HK çarpımı alt grup olmak zorunda değildir.

- HK alt grup $\Leftrightarrow HK = KH$ dir.

Teorem 2.1.5.3: H ve K bir G grubunun sonlu iki alt grubu olsun. Bu durumda ;

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

dır.

Lemma 2.1.5.1: G ,bir grup ve H ve K , G nin altgrupları olsun. O zaman;

$$|G:H \cap K| \leq |G:H|. |G:K|$$

Ayrıca eğer

$$|G:H| \text{ ve } |G:K|$$

$$|G:H \cap K| = |G:H|. |G:K|$$

İspat: $H \cap K$ nın kosetlerinin kümesinden H ve K nın kosetlerinin kümelerinin kartezyen çarpımına tanımlı bir dönüşüm tanımlayalım:

$$\emptyset: (H \cap K)x \Rightarrow (Hx, Kx)$$

Şimdi;

$$(H \cap K)x = (H \cap K)y \Leftrightarrow xy^{-1} \in (H \cap K)$$

$$\Leftrightarrow xy^{-1} \in H \text{ ve } xy^{-1} \in K$$

$$\Leftrightarrow Hx = Hy \text{ ve } Kx = Ky$$

Böylece $\emptyset$ iyi tanımlı ve birebirdir. Bu yüzden;

$$|G:H \cap K| \leq |G:H|. |G:K| \quad (2.2)$$

Şimdi farz edelim ki $|G:H| \text{ ve } |G:K|$ (ve bundan dolayı sonludur).

Eşitlik (2.2) bize şunu söyler; $|G:H \cap K|$ sonludur ve buradan ;

$$|G:H \cap K| = |G:H|. |G:K|$$

dir.

2.1.6 Normal Alt Gruplar ve Bölüm Grubu

Tanım 2.1.6.1: G bir grup ve $N \leq G$ olsun. $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} \subseteq N$ ise;

N 'ye G nin normal alt grubu denir ve $N \triangleright G$ ile gösterilir.

Eğer $N \triangleright G$ ise, G de N nin kosetlerinin kümesi için G / N yazarız.

Örnek 2.1.6.1 : G ve $\{e\}$ grupları G 'nin aşikar normal alt gruplarıdır.

Teorem 2.1.6.1: G bir grup ve N , G nin bir normal alt grubu olsun. G / N kümesi üzerinde tanımlı ikili operasyon;

$$Nx \cdot Ny = Nxy \text{ olarak tanımlansın.} \quad (x, y \in G)$$

Verilen bu çarpım ile G / N bir gruptur.

İspat: Kabul edelim ki $x, x', y, y' \in G$ için $Nx = Nx'$ ve $Ny = Ny'$ olsun.

O zaman ,

$$x = ax' \text{ ve } y = by' \quad (a, b \in N)$$

O zaman;

$$xy = (ax')(by') = ax' b(x')^{-1} x', y' = ab^{(x)^{-1}} x', y'.$$

$N \nabla G$ den $b^{(x)^{-1}} \in N$ dir. Bu yüzden $(xy)(x'y')^{-1} = ab^{(x)^{-1}} \in N$ ve

$Nxy = Nx'y'$ dir. Eğer $x, y, z \in G$ ise o zaman;

$$(Nx \cdot Ny) \cdot Nz = Nxy \cdot Nz = N(xy)z = Nx(yz) = Nx \cdot Nyz = Nx \cdot (Ny \cdot Nz).$$

Böylelikle çarpım birleşmelidir. Tüm Nx kosetleri için;

$Nx \cdot N1 = Nx1 = Nx = N1x = N1 \cdot Nx$ dir. Böylece $N1$, G / N de bir birim elemandır.

$Nx \cdot Nx^{-1} = Nx x^{-1} = N1 = Nx^{-1}x = Nx^{-1} \cdot Nx$, böylece Nx^{-1} G / N de Nx in tersidir.

Böylece G / N bir gruptur.

Tanım 2.1.6.2: G bir grup ve N , G nin bir normal alt grubu olsun. O halde G / N , G nin bölüm grubudur denir.

Lemma 2.1.6.1: G bir grup ve H ve K da G nin alt grupları olsun. O zaman;

- (i) HK, G nin bir alt grubudur ancak ve ancak $HK = KH$
- (ii) Eğer K, G nin bir normal alt grubu ise o zaman HK, G nin bir alt grubudur. (Ve sonuç olarak $HK = KH$);
- (iii) H ve K, G nin normal alt grupları ise, o zaman $H \cap K$ ve HK, G nin normal alt gruplarıdır.
- (iv) $|HK| \cdot |H \cap K| = |H| |K|$. H ve K sonlu iseler bu son formülü yeniden düzenlersek;

$$|HK| = \frac{|H| |K|}{|H \cap K|}$$

Formülü vardır.

2.7. Homomorfizmalar ve İzomorfizma Teoremleri

Tanım 2.1.7.1 : $(G, \cdot), (H, *)$ iki grup ve $f: G \rightarrow H$ fonksiyon olsun. $\forall a, b \in G$ için

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna **grup homomorfizması** denir.

Eğer bir grup homomorfizması birebir ve örten ise **grup izomorfizması** denir.

$f: G \rightarrow H$, grup izomorfizması ise o zaman G ve H grupları **izomorftur** denir ve

$G \cong H$ ile gösterilir.

Eğer f , bire-bir grup homomorfizması ise **grup monomorfizması** denir.

Eğer f , örten grup homomorfizması ise **grup epimorfizması** denir.

$f: G \rightarrow G$ grup homomorfizması ise f ye **grup endomorfizması** denir.

$f: G \rightarrow G$ grup homomorfizması ve de f bir izomorfizma ise f ye **grup otomorfizması** denir.

Örnek 2.1.7.1 : A bir değişmeli grup olsun.,bu durumda;

$a \rightarrow a^{-1}$ olarak tanımlanan dönüşüm A nın bir otomorfizmdir,

$a \rightarrow a^2$ olarak tanımlanan dönüşüm A nın bir endomorfizmidir.

Tanım 2.1.7.2 : $f: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. f nin çekirdeği $\ker f$ ile gösterilir.

$$\ker f = \{x \in G: f(x) = e_H\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.7.1: $f: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun.

- i. f nin monomorfizm olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\ker f = \{e\}$ olmasıdır.
- ii. f izomorfizm olabilmesi için gerek ve yeter koşul $ff^{-1} = e_H$, $f^{-1}f = e_G$ olacak şekilde $f^{-1}: H \rightarrow G$ homomorfizminin var olmasıdır.

Teorem 2.1.7.2: G bir grup olsun. G nin otomorfizmlerinin oluşturduğu küme bir gruptur ve $\text{Aut}(G)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.7.3: (I. İzomorfizma Teoremi) : Eğer $f: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi ise f , $G/\ker f \cong \text{Im } f$ olacak şekilde biz izomorfizm doğurur.

İspat:.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \sigma \searrow & \nearrow \varphi & \\ G/\ker f & & kg \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g & \rightarrow & f(g) \\ \sigma \searrow & \nearrow \varphi & \end{array}$$

$\sigma(g) = kg$ ve $\varphi(kg) = f(g)$ olsun.

- i. φ iyi tanımlı
- ii. φ örten
- iii. φ homomorfizm
- iv. $\ker(\varphi) = \ker f$

- i. $x \in G/\ker f$ elemanının $G/\ker f$ içerisinde değişik şekillerde yazabiliriz.

$$\text{Örneğin ; } x = kg \quad x = kg'$$

Olduğunu göstermeliyiz.

$$\varphi(x) = \varphi(kg) = f(g)$$

$$\varphi(x) = \varphi(kg') = f(g')$$

$$x = kg = kg'$$

$$kg = k'g' \quad k, k', k_1 \in K$$

$$g = k^{-1}k'g' = k_1g'$$

$$f(g) = f(k_1g') = f(k_1)f(g') = f(g')$$

$$\Rightarrow \varphi(kg) = \varphi(kg')$$

φ iyi tanımlanmıştır.

ii. φ örtendir. Her $f(g) \in H$ için $x \in G/\ker f$ öyle ki $\varphi(x) = f(g)$ olmalıdır.

Her $g_1 \in H$ için $g_1 = f(g) = \varphi(kg)$

φ örtendir.

iii. φ homomorfizm.

$$\varphi(kg_1kg_2) = \varphi(g_1g_2) = f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = \varphi(kg_1)\varphi(kg_2)$$

iv. $k\varphi = kf$

$$\varphi(kg) = \bar{e} \quad kg = \ker f = kf$$

$$f(g) = \bar{e} \quad g \in \ker f$$

$$k\varphi = kf$$

$\Rightarrow \varphi : G/\ker f \rightarrow H$ (1-1, örten, homomorfizm)

$\Rightarrow G/\ker f \cong \text{Im} f$.

Teorem 2.1.7.4: (II. İzomorfizma Teoremi) : G bir grup, K, G nin alt grubu $N \triangleleft G$ olsun. $K \cap N \triangleleft K$, KN , G nin bir alt grubu ve

$$K/K \cap N \cong KN/N$$

dir.

İspat: $K \cap N \triangleleft K$: Her $k \in K$ ve $n \in K \cap N$ için

$$k \cap k^{-1} \in K \text{ dır.}$$

$$k \cap k^{-1} \in N \text{ dır.}$$

$$k \cap k^{-1} \in K \cap N \text{ dır.}$$

KN alt gruptur : $x, y \in KN$ için $x = k_1 n_1$ ve $y = k_2 n_2$ olsun.

$$xy^{-1} = (k_1 n_1)(k_2 n_2)^{-1}$$

$$= k_1 n_1 n_2^{-1} k_2^{-1}$$

$$= k_1 \cap k_2^{-1}$$

$$= k_1 k_2^{-1} k_2 \cap k_2^{-1}$$

$$= k_3 \in N$$

$$\Rightarrow xy^{-1} = k_3 n_4 \in KN \Rightarrow KN \text{ altgruptur.}$$

$$f: K \rightarrow KN/N$$

dönüşümü her $k \in K$ için $f(k) = NK$ şeklindedir.

f örten homomorfizmadır :

f örten : Her $N, kn \in KN/N$

$$Nkn = kNN = kN = Nk = f(k)$$

f homomorfizma : $f(ab) = Nab = NaNb(f(a)f(b))$

$K/\ker f \cong KN/N$ (1. İzomorfizma teoreminden)

$K \cap N = \ker f$ gösterirsek ispat tamamlanır.

$k \in \ker f \Rightarrow f(k) = N$ dır.(Çünkü KN/N birim elemanı N dir.)

$$Nk = N$$

$$\Rightarrow k \in N \Rightarrow k \in K \cap N$$

$$\Rightarrow \ker f = \{k : k \in K \text{ ve } k \in N\} = K \cap N$$

$$\Rightarrow K/K \cap N \cong KN/N$$

Teorem 2.1.7.5: (III. İzomorfizma Teoremi) : H ve K bir G grubunun $K < H$ olacak şekilde normal alt grupları ise

$$H/K \triangleleft G/K \text{ ve } (G/K)/(H/K) \cong G/H \text{ dır.}$$

İspat: $I_G : G \rightarrow G$ birim dönüşüm $I_G(K) < H$ dır. Bu dönüşüm;

$$I : G/K \rightarrow G/H$$

$$aK \rightarrow aH$$

olacak şekilde bir epimorfizma doğurur.

$$H = I(aK) \Leftrightarrow a \in H$$

$$\ker I = \{aK : a \in H\} = H/K \text{ olduğundan}$$

$f : G \rightarrow H$ homomorfizma $\check{c}ekf \triangleleft G$ dan ;

$$H/K \triangleleft G/K$$

Buradan ;

$$G/H = \text{Im} I \cong (G/K)/_{\ker I} \cong G/K /_{H/K}$$

dır.

2.2 Komütatör Altgrupları Ve Özellikleri

Tanım 2.2.1: (Komütatör Alt grup) : G bir grup ve $H, K \leq G$ olsun. H ve K komütatör grubu adı verilen $[H, K]$ alt grubu şöyle tanımlanır.

$$[H, K] = \langle [h, k] : h \in H, k \in K \rangle$$

Buradaki $[h, k] = h^{-1}k^{-1}hk$ olarak tanımlıdır. Bu tür elemanlara komütatör denir. $[H, K]$ alt grubunun elemanları $h \in H$ ve $k \in K$ için $[h, k]$ yada $[h, k]^{-1}$ biçiminde yazılan sonlu sayıda elemanın çarpımıdır.

$$[k, h] = [h, k]^{-1}$$

$$k^{-1}h^{-1}kh = (h^{-1}k^{-1}hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1}(k^{-1})^{-1}(h^{-1})^{-1} = k^{-1}h^{-1}kh$$

$$[H, K] = [K, H]$$

olur.

Eğer H altgrubu K yı normalize ediyorsa, (**Normalize** :Grup etkisinden $H^x = x^{-1}Hx$ tanımını hatırlayalım. Bu eşitliği sağlayan bir x elemanının H yı normalize ettiğini söyleriz.) her $h \in H$ ve $k \in K$ için;

$$[h, k] = h^{-1}k^{-1}hk = (h^{-1}k^{-1}h)k \in KK \subseteq K$$

Dolayısıyla; $[H, K] \leq K$ olur. Eğer H ve K birbirlerini normalize ediyorsa, $[H, K] \leq H \cap K$ olur. $H \cap K = 1$ ise her $h \in H$ ve $k \in K$ için $hk=kh$ dir.

$[h, k]^g = [h^g, k^g]$ eşitliğinden, eğer bir g elemanı H ve K alt gruplarını normalize ediyorsa, o zaman g nin $[H, K]$ alt grubunda normalize ettiği çıkar.

Dolayısıyla $H, K \triangleleft G$ ise $[H, K] \triangleleft G$ çıkar.

Basit bir hesaplama ile

$$(1) [xy, z] = [x, z]^y[y, z] \text{ ve } (2) [x, yz] = [x, z][x, y]^z$$

Görelim;

$$[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$$

$$(xy)^{-1}z^{-1}(xy)z = y^{-1}(x^{-1}z^{-1}xz)y(y^{-1}z^{-1}yz)$$

$$y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz = y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz \quad \text{eşitlik sağlanır.}$$

(2) de benzer şekilde gösterilir.

Bunların doğrudan bir sonucu olarak

(1) $[x, z]^y = [xy, z][y, z]^{-1}$ ve (2) $[x, y]^z = [x, z]^{-1}[x, yz]$ eşitliklerinden sırasıyla H ve K altgruplarının $[H, K]$ altgrubunu normalize ettiği anlaşılır, yani $\langle H, K \rangle \leq N_G([H, K])$ olur. Bunun özel bir durumu olarak her $H \leq G$ için $[G, H] \triangleleft G$ elde ederiz.

Eğer $\varphi: G \rightarrow G_1$ bir grup homomorfisiyse, elbette

$$\varphi([H, K]) = [\varphi(H), \varphi(K)]$$

olur. Eğer $A \triangleleft G$ ise bundan,

$$[HA/A, KA/A] = [H, K]A/A$$

çıkar.

Teorem 2.2.1 : G bir grup ve $H, K \leq G$ olsun.

- i. $[H, K] = [K, H]$ olur.
- ii. Eğer $H, K \triangleleft G$ ise $[H, K] \triangleleft G$ olur.
- iii. Eğer H altgrubu K yı normalize ediyorsa, $[H, K] \leq K$ olur. Dolayısıyla eğer H ve K birbirlerini normalize ediyorsa (örneğin G de normallerse) $[H, K] \leq H \cap K$ olur; ve birde ayrıca $H \cap K = 1$ ise her $h \in H$ ve $k \in K$ için $hk = kh$ olur.
- iv. H ve K altgrupları $[H, K]$ alt grubunu normalize eder.
- v. $[G, H] \triangleleft G$ olur.
- vi. Eğer $\varphi: G \rightarrow G_1$ bir grup homomorfisiyse, her $H, K \leq G$ için, $\varphi([H, K]) = [\varphi(H), \varphi(K)]$ olur.
- vii. Eğer $A \triangleleft G$ ise bundan, $[HA/A, KA/A] = [H, K]A/A$ olur.

2.3 Merkezleyen Ve Normalleyen

Tanım 2.3.1: (Merkezleyen) Her G grubu için;

$$M(G) = \{x \in G : \text{her } y \in G \text{ için } xy = yx\}$$

Kümesi G nin bir alt grubudur. $M(G)$ ile tanımlanan G nin alt grubuna G nin **merkezi** denir.

Her G için $M(G)$ bir abel grubudur. G grubunun abel gurubu olması, $M(G) = G$ olması için gerek ve yeter koşuldur.

Teorem 2.3.1 : G bir grup, $x \in G$ ve $H \leq G$ ise aşağıdaki kümelerden her biri G nin alt grubudur.

$$M_G(x) = \{y \in G : xy = yx\}, \quad x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx : h \in H\}$$

İspat : $ex = xe = x$ olduğundan, $e \in M_G(x)$ tir. Her $y, z \in M_G(x)$ için $xy = yx$, $xz = zx$ olduğundan,

$$x(yz) - (xy)z - (yx)z - y(xz) - y(zx) - (yz)x$$

ve buradan $yz \in M_G(x)$. Ayrıca her $y \in M_G(x)$ için $xy=yx$ olduğundan,

$$\begin{aligned} xy^{-1} &= e(xy^{-1}) = (y^{-1}y)(xy^{-1}) = y^{-1}(yx)y^{-1} \\ &= y^{-1}(xy)y^{-1} = (y^{-1}x)(yy^{-1}) = (y^{-1}x)e = y^{-1}x \end{aligned}$$

Ve buradan $y^{-1} \in M_G(x)$. Böylece $M_G(x) \leq G$ dir. $x^{-1}Hx \leq G$ olduğunu kanıtlamak için aşağıdakiler yeterlidir.

$e \in H$ olduğundan $x^{-1}ex = e \in x^{-1}Hx$,

$$x^{-1}ax, x^{-1}bx \in x^{-1}Hx \Rightarrow (x^{-1}ax)(x^{-1}bx) = x^{-1}abx \in x^{-1}Hx$$

$$x^{-1}ax \in x^{-1}Hx \Rightarrow (x^{-1}ax)^{-1} = x^{-1}a^{-1}x \in x^{-1}Hx.$$

Tanım 2.3.2 : Teorem 3.1.2 de tanımlanan $M_G(x)$ alt grubuna x elemanının G içindeki **merkezleyicisi**, $x^{-1}Hx$ e de H nin (G içinde) x e göre **eşleniği** denir.

Tanım 2.3.3 : G bir grup, $H \leq G$ olsun. Bu takdirde;

$$N_G(H) = \{x \in G : x^{-1}Hx = H\}$$

kümesine H nin G içindeki **normalleyicisi** denir.

2.4 Azalan Ve Artan Merkezi Seriler

2.4.1 Azalan Merkezi Seri

Tanım 2.4.1.1 :

$$G^1 = G^{(1)} = [G, G]$$

eşitliğine G nin türevi denir. Bu altgrup daha çok G' ile gösterilir.

Teorem 2.4.1.1: G' altgrubu G/H nin bir abel grubu olduğu G nin en küçük alt grubudur; bir başka deyişle G/G' bir abel grubudur ve eğer $H \triangleleft G$ için G/H bir abel grubuysa $G' \leq H$ olur. Ayrıca $G' \leq H \leq G$ ise $H \triangleleft G$ olur ve G/H grubu abeldir.

İspat : Her $x, y \in G$ için G/G' grubunda çalışarak,

$$\bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1}\bar{xy} = \overline{x^{-1}y^{-1}xy} = \overline{[x, y]} = \bar{1}$$

Yani;

$$\overline{xy} = \overline{yx}$$

Buluruz. Demek ki G/G' bir abel grubudur.

Şimdi $H \triangleleft G$ olsun ve G/H grubunun abel olduğunu varsayalım. O zaman G/H grubunda hesap yaparak, her $x, y \in G$ için,

$$\overline{x^{-1}y^{-1}xy} = \bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1}\bar{xy} = 1$$

Yani;

$$x^{-1}y^{-1}xy \in H$$

Buluruz. G' grubunun elemanları bu tür elemanların ve terslerinin çarpımı olduğundan, bu bulduğumuzdan $G' \leq H$ çıkar.

Son olarak G' altgrubunu içeren bir $H \leq G$ alalım. O zaman her $h \in H$ ve $g \in G$ için,

$$h^g = g^{-1}hg = hh^{-1}g^{-1}hg = h[h, g] \in HG' \subseteq H$$

olur. Demek ki $H \triangleleft G$ olur.

Eğer $H \leq G$ ise H' altgrubundan söz edebiliriz. $H' = [H, H]$. Örneğin tanıma göre,

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] = (G^{(i)})' \leq G^{(i)}$$

Olur. Demek ki $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ bir abel grubudur.

Tanımdan hemen $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \leq G^{(i)}$ içindeliği çıkar. $G^n \triangleleft G$ olduğundan; teorem 2.4.2 nin (ii) den , her i için $G^{i+1} = [G, G^i] \leq G^i$ olduğu görülür. Aynı olgu tümevarımla kanıtlanabilir: $G^{i+1} = [G, G^i] \leq [G, G^{i-1}] = G^i$. Demek ki hem

$(G^i)_i$ hem de $(G^{(i)})_i$ altgrup dizisi azalandır. $(G^n)_n$ dizisine **azalan merkezi seri** adı verilir.

2.4.2 Artan Merkezi Seri

Tanım 2.4.2.1: G bir grup olsun. her $i \leq 0$ için $Z_i(G) = 1$ tanımını yapıp $i \geq 0$ için G nin i 'inci merkezini tümevarımla şöyle tanımlayalım;

$$Z_{i+1}(G) = \{z \in G : [z, G] \subseteq Z_i(G)\}$$

Elbette;

$$Z_1(G) = Z(G)$$

Yani $Z_1(G)$ grubun merkezi olur. Eğer G konunun gelişinden belliyse $Z_i(G)$ yerine bazen Z_i yazacağız.

Tümevarımla $Z_i(G) \triangleleft G$ görülür. Her $\varphi : G \rightarrow H$ homomorfisi için kolayca görüleceği gibi

$$\varphi(Z_i(G)) \leq Z_i(\varphi(G))$$

Olur. Ama eşitliğin doğru olmadığı durumlar olabilir, örneğin $Z_2(G) > Z(G)$ ise ve $\varphi : G \rightarrow G/Z(G)$ doğal izdüşüm ise , $\varphi(Z_1(G)) = \bar{1} < Z_2(G)/Z(G) = Z(\varphi(G))$ olur. Öte yandan eğer φ birebirse kolayca görüleceği gibi

$$\varphi(Z_i(G)) = Z_i(\varphi(G)) \text{ olur.}$$

Buradan da (φ yi $\varphi_g : x \rightarrow x^g$ iç otomorfileri olarak alarak) $Z_i(G) \triangleleft G$ olduğu görülür. Hemen ardından da $Z_i(G) \leq Z_{i+1}(G)$ olduğu ve $G/Z_i(G)$ grubundan söz edebiliriz. Tanımdan hemen $i \geq 0$ için,

$$Z(G/Z_i(G)) = Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$$

eşitliğinin doğru olduğu anlaşılır. Demek ki $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ bir abel grubudur.

$$1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots \leq Z_i(G) \leq Z_{i+1}(G) \leq \dots$$

dizisine **artan merkezi seri** denir.

Tanım 2.4.2.2: Eğer bir G grubunun normal bir $I \neq A < G$ değişmeli alt grubu varsa ve ayrıca G/A bölüm grubu değişmeli ise o zaman G nin değişmeli gruplarında dah komplike gruplara **metabel gruplar** denir.

Tanım 2.4.2.3: Eğer bir n doğal sayısı için $Z_n(G) = G$ oluyorsa G ye sıfır kuvvetli grup yada **nilpotent grup** adı verilir.

2.5 Direkt Çarpımlar

2.5.1 Direkt Çarpımlar

Tanım 2.5.1.1 : $G_1, G_2, \dots, G_n$ grupların bir koleksiyonu olsun.

$$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in G_i, \forall i \text{ için}\}$$

Çarpımı direkrt çarpımdır.

Bu bileşenlerin çarpımı

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)(y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n) \text{ şeklindedir.}$$

Kolaylıkla görebiliriz ki $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ bir gruptur.

$\bar{G}_i = \{(1, \dots, 1, x, 1, \dots, 1) : x \in G_i\}$ o zaman $\bar{G}_i$, G nin bir alt grubudur ve $x \rightarrow (1, \dots, 1, x, 1, \dots, 1)$ dönüşümü ile $\bar{G}_i$ ve G_i izomorftur. $\bar{G}_i \trianglelefteq G$ dir ve

$$G = \bar{G}_1 \cdot \bar{G}_2 \dots \bar{G}_n .$$

Ayrıca;

$$\bar{G}_1 \dots \bar{G}_{i-1} \cdot \bar{G}_{i+1} \dots \bar{G}_n = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) : x_j \in G_j \text{ için } i \neq j\}$$

$$\bar{G}_i \cap \bar{G}_1 \dots \bar{G}_{i-1} \cdot \bar{G}_{i+1} \dots \bar{G}_n = 1$$

Tanım 2.5.1.2 : G bir grup olsun ve $H_1, H_2, \dots, H_n$ de G nin altgrupları olsun. G, H_i altgruplarının direkt (iç) çarpımıdır. Eğer;

- i. Her i için H_i , G nin normal alt grubudur
- ii. $G = H_1 \cdot H_2 \dots H_n$
- iii. $H_i \cap H_1 \cdot H_2 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_n = 1$

Şartları sağlanıyorsa.

Teorem 2.5.1.1:

- i. $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ dış direkt çarpımı, $\overline{G_1}, \overline{G_2}, \dots, \overline{G_n}$ altgruplarının iç direkt çarpımları ile tanımlanır.
- ii. $H_1, H_2, \dots, H_n$ altgruplarının iç direkt çarpımları G dir.
O zaman ; $G \cong H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ dir.

[Bu teoremde iç ve dış çarpımlar arasında ayrım yapmayacağız. Ancak “=” yerine “ $\cong$ ” kullanacağız.]

1. İç direkt çarpımlar için $H_i \cap H_j = 1$ $i \neq j$ için önemlidir.

2.5.2. Yarı Direkt Çarpımlar

G bir grup, H ve N altgrup, $G=HN$ ve $H \cap N = 1$ ve sadece $N \triangleleft G$ dir. ($H \triangleleft G$ de olduğu zaman direkt çarpım olur.) G deki bir elemanı $g=hn$ ile gösterebiliriz.

$h \in H$ ve $n \in N$ dir. Eğer G nin iki elemanını çarparsak ;

$$(h_1 n_1)(h_2 n_2) = h_1 h_2 (h_2^{-1} n_1 h_2) n_2$$

Burada $h_1 h_2 \in H$, $h_2^{-1} n_1 h_2 \in N$ ($N \triangleleft G$) ve böylece $(h_2^{-1} n_1 h_2) n_2 \in N$ olur. G nin elemanlarını çarpmak için

- I. H nin elemanlarını çarpmalıyız
- II. N nin elemanlarını çarpmalıyız.
- III. H nin elemanları ile N nin elemanlarını birleştirmeliyiz.

Yarı direkt çarpım yapısı bu 3 adım ile oluşur.

Tanım 2.5.2.1 : G bir grup olsun. G nin otomorfizma grubu $\text{Aut}(G)$ ile tanımlansın ve G nin tüm otomorfizmalarını oluştursun.

$$\text{Aut}(G) = \{\varphi: G \rightarrow G; \varphi \text{ otomorfizma}\}$$

φ ve ψ iki otomorfizmanın çarpımı , $\varphi\psi$ bileşkedir.

Tanım 2.5.2.2 : H ve N grup olsun. $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}N$ bir homomorfizma olsun. φ üzerinde H ile N nin (dış) yarı direkt çarpımı $H \alpha_{\varphi} N$ ile tanımlanır.

$$H \alpha_{\varphi} N = \{(h, n): h \in H, n \in N\} \text{ dir.}$$

Elemanların çarpımı;

$$(h_1 n_1)(h_2 n_2) = (h_1 h_2, n_1^{h_2 \varphi} n_2) \text{ şeklinde olur.}$$

Eğer $h \in H$ ise o zaman $h\varphi$, N nin otomorfizmasıdır ve $h\varphi$ otomorfizmasını $n \in N$ görüntüsü altında $n^{h\varphi}$ şeklinde yazarız. Bu $H\alpha_\varphi N$ anlamına gelir.

Teorem 2.5.2.1 : $H\alpha_\varphi N$ yarı direkt çarpımı gruptur.

Tanım 2.5.2.3 : G bir grup olsun. G yarı direkt çarpımdır, N normal alt grubu ve H alt grubu ile

- i. $N \triangleright G$
- ii. $G = HN$
- iii. $H \cap N = 1$

Şartları sağlanıyorsa.

Örnek 2.5.2.1 $G = S_3$, $H = \langle (1,2) \rangle$ ve $N = A_3 = \langle (1,2,3) \rangle$ Olsun. O zaman G , H ve N nin yarı direkt çarpımıdır.

$$H = \{\varphi_1, \varphi_2\} \quad \varphi_1: 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3 \quad \varphi_2: 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3$$

$$S_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$$

$$\alpha_1: 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3 \quad \alpha_2: 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2$$

$$\alpha_3: 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1 \quad \alpha_4: 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1$$

$$\alpha_5: 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2 \quad \alpha_6: 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3$$

$$A_3 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} \quad \beta_1: 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1 \quad \beta_2: 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2$$

$$\beta_3: 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3$$

$$\varphi_1 * \beta_1: 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1$$

$$\varphi_1 * \beta_2: 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$$

$$\varphi_1 * \beta_3: 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3$$

$$\varphi_2 * \beta_1: 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$$

$$\varphi_2 * \beta_2 : 1 \rightarrow 3 , 2 \rightarrow 1 , 3 \rightarrow 2$$

$$\varphi_2 * \beta_3 : 1 \rightarrow 1 , 2 \rightarrow 2 , 3 \rightarrow 3$$

Görüldüğü gibi H ve N, G nin yarı direkt çarpımıdır.



BÖLÜM 3

GRUPLARIN OTOMORFİZMLERİ

3.1 Grupların Otomorfizmleri

3.1.1 IA Otomorfizması

Tanım 3.1.1.1 : IA – otomorfizma terimi, “Seymour Bachmut’un” ‘Serbest Metebaliyan Grupların Otomorfizmaları’ isimli çalışmasında kullanılmıştır.

Bir grubun aşağıdaki denk şartlardan birini sağlayan otomorfizmine IA -otomorfizmi denir.

1. Grubun abelizasyonu üzerinde birim dönüşümüne indirgenir.
2. Her bir elemanı türetilmiş alt grup için kendi kosetine götürür.
3. Azalan merkezi serinin ardışık terimlerinin her bölüm grubu üzerinde birim dönüşümüne indirgenir.

Bu otomorfizmlerin oluşturduğu küme bileşke işlemi ile gruptur. Bu grubu $IA - AUT(G)$ ile göstereceğiz.

$IA - AUT(G)$ grubunun elemanları;

$$\beta = \{x_1 \rightarrow x_1 d_1, x_2 \rightarrow x_2 d_2, \dots, x_n \rightarrow x_n d_n\} \quad d_i \in G' \text{ dir.}$$

formundadır. Buradaki $\{x_1 \rightarrow x_1 d_1, x_2 \rightarrow x_2 d_2, \dots, x_n \rightarrow x_n d_n\}$ kümesi G nin bir bazıdır.

2. Magnus (1934) : $IA - Aut(G)$ nın sonlu bir küme tarafından oluşturulan otomorfizmaları;

$$\alpha_{ijk} = \{x_i \rightarrow x_i[x_j, x_k], x_t \rightarrow x_t, t = 1\} \text{ tüm } i, j, k \text{ lar için öyle ki } j=i \text{ ya da } j < k \text{ ve } i \neq j, i \neq k$$

3. Grossman (1974) $Aut(G_n) / Inn - Aut(G_n)$ sonlu kalanlı.
4. Formanek-Procesi (1990) $Aut(G_n)$ $n \geq 3$ için lineer değildir.

Teorem 3.1.1.1 : Herhangi bir G grubu için, G 'nin IA otomorfizmlerinin grubu , G 'nin grup otomorfizmlerinin bir alt grubudur.

Teorem 3.1.1.2 : $IA \triangleleft AUT (G)$ dir.

İspat :

$$\alpha_1 = \{x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_3, \dots, x_n \rightarrow x_1\}$$

$$\alpha_2 = \{x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1, x_i \rightarrow x_i, i \neq 1, 2\}$$

$$\alpha_3 = \{x_1 \rightarrow x_1^{-1}, x_i \rightarrow x_i, i \neq 1, \}$$

$$\alpha_4 = \{x_1 \rightarrow x_1 x_2, x_i \rightarrow x_i, i \neq 1, \}$$

IA nın üreticini alalım;

$\beta_{ijk} = \{x_i \rightarrow x_i[x_j, x_k], x_t \rightarrow x_t, t \neq 1\}$ tüm i, j, k için $j = i$ ve $j < k$ ya da $i \neq j$ ve $i \neq k$ olmalıdır.

Biz burada ispat yaparken $i = 1, j = 2, k = 3$ alacağız.

$$\text{I. } \alpha_1^{-1} \beta_{ijk} \alpha_1(x_1) = \alpha_1^{-1} \beta_{ijk}(x_2) = \alpha_1^{-1}(x_2) = x_1$$

$$\alpha_1^{-1} \beta_{ijk} \alpha_1(x_2) = \alpha_1^{-1} \beta_{ijk}(x_3) = \alpha_1^{-1}(x_3) = x_2$$

$$\alpha_1^{-1} \beta_{ijk} \alpha_1(x_n) = \alpha_1^{-1} \beta_{ijk}(x_1) = \alpha_1^{-1}(x_1[x_2, x_3]) = x_n[x_2, x_3] = x_n$$

$$\text{II. } \alpha_2^{-1} \beta_{ijk} \alpha_2(x_1) = \alpha_2^{-1} \beta_{ijk}(x_2) = \alpha_2^{-1}(x_2) = x_1$$

$$\alpha_2^{-1} \beta_{ijk} \alpha_2(x_2) = \alpha_2^{-1} \beta_{ijk}(x_1) = \alpha_2^{-1}(x_1[x_2, x_3]) = x_2[x_1, x_3] = x_2$$

$$\text{III. } \alpha_3^{-1} \beta_{ijk} \alpha_3(x_1) = \alpha_3^{-1} \beta_{ijk}(x_1^{-1}) = \alpha_3^{-1}(x_1^{-1}) = x_1$$

$$\text{IV. } \alpha_4^{-1} \beta_{ijk} \alpha_4(x_1) = \alpha_4^{-1} \beta_{ijk}(x_1 x_2) = \alpha_4^{-1}(x_1 x_2[x_2, x_3]) = x_1 x_2 = x_1$$

Diğerleride benzer şekilde gösterilir

- G , merkezi artan seride $Z_j = Z_{j+1}$ olacak şekilde en az bir j olan herhangi bir grup olsun. j -merkezi otomorfizmleri, $Aut(G)$ den $Aut(G/Z_j)$ ye doğal homomorfizmanın çekirdeği olarak tanımlanır. $IA(G)$ nin direkt çarpım yapısına sahip olabilmesi için yeterli ve gerekli koşullar sunuluyor. Elde edilen sonuçlar kesin olarak üretilen bazı merkezi-metebaliyan gruplara uygulanıyor.

G grubunun IA grubu, $IA(G)$ olarak tanımlansın, G/G' üzerinde birim olan otomorfizmlerden oluşur. Buradaki G' , G nin komütatör alt grubudur. IA grubunun araştırması farklı alanlarda ilgi çekmiştir. Örneğin, P. HALL, c sınıfı bir nilpotent grubunun IA grubunun, $(c - 1)$. sınıftan nilpotent olduğunu göstermiştir. (bnz. [12]) ve M. ZYMAN, G sonlu nilpotent grup olması durumunda $IA(G)$ nin de sonlu olduğunu göstermiştir. (bknz. [13]) Özel bir sonucu ise S. BACHMUTH verilmiştir. Rankı 2 olan serbest metebaliyan grubunun IA grubunun, iç otomorfizmaya eşit olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca grubun rankının 2 den büyük olduğunda da bu eşitliğin bulunmadığını da belirtmiştir. (bknz. [14]) M. Bonanome & M. H. Dean & M. Zyman [16] çalışmasında, artan merkezi serinin bir nokta da durduğu G grubunun IA grubu inceleniyor. Bu $Z_j = Z_{j+1}$ olan en az bir pozitif j tam sayısı olduğu anlamına gelir. Bu gruplar H_j grupları olarak adlandırılmaktadır.

G nin j -merkezi otomorfizm grubu $Aut_{c_j}(G)$ dir. Buradaki $Aut(G)$ den $Aut(G/Z_j)$ ye doğal homomorfizmin çekirdeği Z_j , artan merkezi serinin de bir terimidir.

Teorem 3.1.1.3 : G , artan merkezi seride $Z_j = Z_{j+1}$ olacak şekilde en az bir j elemanının bulunduğu bir grup olsun. Eğer;

$$IA(G/Z_j) = Inn(G/Z_j)$$

ise o zaman;

$$IA(G)/Aut_{Z_{j-1}}(G) = (Inn(G)Aut_{Z_{j-1}}(G)/Aut_{Z_{j-1}}(G)) \times (Aut_{Z_j}(G)/Aut_{Z_{j-1}}(G))$$

$Z_1 = Z_2$ olduğu zaman çok güzel bir sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.1.1 : G , artan merkezi seride $Z_1 = Z_2$ olacak şekilde bir grup olsun. Eğer;

$$IA\left(\frac{G}{\zeta(G)}\right) = Inn\left(\frac{G}{\zeta(G)}\right) \text{ ise}$$

O zaman;

$$IA(G) = Inn(G) \times Aut_{z_1}(G)$$

olur.

- A nın , G nin bir üreteç kümesi olduğunu ifade etmek için $G = gp(A)$ yazılır.
Komütatör olarak ; $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$ alacağız.

Herhangi bir G grubu için $Aut(G)$ den $Aut\left(\frac{G}{G'}\right)$ ye doğal homomorfizmanın çekirdeği IA -otomorfizma grubu (veya IA grubu) olarak tanımlanır.

Böylece ;

$$IA(G) = \{\alpha \in Aut(G) : g^{-1}(g\alpha) \in G' (g \in G)\}$$

olur.

Herhangi bir G grubu için;

$$Inn(G) \leq IA(G) \text{ ve } \frac{G}{\zeta(G)} \cong Inn(G)$$

dir.

$x \in G$ tarafından belirlenen iç otomorfizmi α_x olarak alalım.

$Aut(G)$ den $Aut\left(\frac{G}{Z_j}\right)$ ye doğal homomorfizm çekirdeğin, j pozitif tam sayısı için

$Aut_{cj}(G)$, G nin j -merkezi grubu olarak tanımlandı.

Bir j -merkezi otomorfizmi, G üzerinde modölo Z_j ye göre birimdir.

Buradan;

$$Aut_{cj}(G) = \{\alpha \in Aut(G) : g^{-1}(g\alpha) \in Z_j (g \in G)\}$$

dir.

$Aut_c(G) = Aut_{c_1}(G)$ gösterimi kullanılmaktadır ve $Aut_c(G)$, G nin merkezi otomorfizmi olarak adlandırılır. Alternatif bir $Aut_{cj}(G)$ tanımı için aşağıdaki Lemma verilmiştir.

Lemma 3.1.1.1.: Herhangi bir G grubu için ;

$$Aut_{c_j}(G) = \left\{ \varphi \in Aut(G) : [\varphi, \alpha_x] \in Aut_{c_{j-1}}(G); \text{ her } \alpha_x \in Inn(G) \right\}$$

İspat : $\varphi \in Aut_{c_j}(G)$

$$\Leftrightarrow g^{-1}(g\varphi) \in Z_j \text{ her } g \in G \text{ için}$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}(x\alpha_{g^{-1}(g\varphi)}) = x^{-1}(x\alpha_g^{-1}\alpha_g^\varphi) \in Z_{j-1} \text{ her } x, g \in G \text{ için}$$

$$\Leftrightarrow x\alpha_g^{-1}\alpha_g^\varphi = [\alpha_g, \varphi] \in Aut_{c_{j-1}}(G) \text{ her } g \in G \text{ için}$$

dir.

➤ $Z_j = Z_{j+1}$ olan en az bir j pozitif tam sayısı varsa , G grubu bir H_j grubudur.

$$Aut_{z_j}(G) = Aut_{c_j}(G) \cap IA(G) \text{ ile } G' \cap Z_j$$

Arasında bir doğal benzerlik olduğundan; $Aut_{z_j}(G)$ yi karakterize edebiliriz.

$$Aut_{z_j}(G) = \{ \alpha \in Aut(G) : g^{-1}(g\alpha) \in G' \cap Z_j, (g \in G) \}$$

3.1.2 Inner (İç) Otomorfizmler

Tanım 3.1.2.1 : Bir grubun otomorfizmi; eğer grubun bir elemanının konjugesi şeklinde ifade edilebiliyorsa iç otomorfizma olarak adlandırılır.

G nin tüm iç otomorfizmalarının kümesi **$Inn(G)$** ile gösterilir.

Not : Elemanın konjuge edilmesi tek şekilde değildir, aslında elemanın konjugasyonu için olasılıklar merkezin bir koseti formundadır.

Tanım 3.1.2.2 : Bir grubun σ otomorfizmi, iç otomorfizm üzerinde (ya da g tarafından indirgenen iç otomorfizm) (ya da g tarafından konjuge) eğer ;

$$x \in G, \sigma(x) = gxg^{-1} = \sigma_g(x)$$

Şeklinde G de bir g elemanı vardır.

Öyle ki $\sigma_g = \sigma$ olacak şekilde $g \in G$ 'nin seçiminin tek türlü olmadığını not edelim. Aslında , herhangi bir σ için g nin olasılıkları G nin merkezinin bir koseti şeklindedir.

Örnek 3.1.2.1: G bir grup olsun. G nin sabit bir $g \in G$ elemanı her bir $x \in G$ ile $g^{-1}xg$ birleştirelim. Bunlar tek türlü olarak belirlenmiş G nin elemanlarıdır. Böylece $x \rightarrow g^{-1}xg$ dönüşümünü elde etmiş olduk. Bunu σ_g ile tanımlayalım.

$$\sigma_g : G \rightarrow G$$

$$x \rightarrow g^{-1}xg$$

τ_g nin homomorfizma olduğunu görelim. $\forall x, y \in G$ için;

$$\sigma_g(xy) = g^{-1}xyg = g^{-1}xgg^{-1}yg = \sigma_g x \sigma_g y$$

σ_g bir homomorfizmadır.

$g, h \in G$ için;. σ_g ve σ_h ın birleşimini alalım.

$$\sigma_g \sigma_h(x) = (\sigma_g(x))\sigma_h = (g^{-1}xg)$$

$$\sigma_h = h^{-1}(g^{-1}xg)h = (h^{-1}g^{-1})x(gh) = (gh)^{-1}x(gh) = \sigma_{gh}(x)$$

$\forall x \in G$ için buradan ;

$$1. \quad \sigma_g \sigma_h = \sigma_{gh} \quad \forall g, h \in G \text{ için} \quad (1)$$

$\forall x \in G$ için ;

$$\sigma_{1(x)} = 1^{-1}x1 = x \quad \text{alalım. Buradan}$$

$$2. \quad \sigma_1 = I \text{ olur.} \quad (2)$$

Her $g \in G$ için (1) ve (2) ile

$$\sigma_g \sigma_{g^{-1}} = \sigma_{gg^{-1}} = \sigma_1 = I$$

$$\sigma_{g^{-1}} \sigma_g = \sigma_{g^{-1}g} = \sigma_1 = I$$

alalım. Böylece σ_g 1-1 ve örtendir. Ayrıca $\sigma_{g^{-1}}$, σ_g nin tersidir.

$$3. \quad (\sigma_g)^{-1} = \sigma_{g^{-1}} \quad (3)$$

Bu yüzden σ_g bir otomorfizmadır.

Teorem 3.1.2.1 : G bir grup olsun. O zaman ;

$\text{Inn}(G) \leq \text{Aut}(G)$ dir.

İspat : Id birim otomorfizma olmak üzere $I \in \sigma_1 \in Inn(G)$ dir. Böylece $Inn(G) \neq \emptyset$ dir. Şimdi (1) den iki iç otomorfizmanın bileşkesi yine bir iç otomorfizma ve (2) ile (3) den bir iç otomorfizmanın tersinin yine bir iç otomorfizma olduğunu görmüştük. Böylece;

$$Inn(G) \leq Aut(G) \text{ olur.}$$

Not : Bağıntı (1) önemlidir.

$$\sigma : G \rightarrow Aut(G)$$

$$g \rightarrow \sigma_g$$

dönüşümü bir homomorfizmadır. $G/Ker \tau \cong Inn\tau$ dur.

$$Inn\tau = \{\sigma_g \in Aut(G) : g \in G\} = Inn(G) \text{ tanımından;}$$

$$Ker \tau = \{z \in G \mid \sigma_z = I\}$$

$$= \{z \in G \mid g\sigma_z = g \ \forall g \in G \text{ için}\}$$

$$= \{z \in G \mid z^{-1}gz = g \ \forall g \in G \text{ için}\}$$

$$= \{z \in G \mid gz = zg \ \forall g \in G \text{ için}\}$$

$$= Z(G)$$

Buradan ; $Z(G)$, $\sigma : G \rightarrow Aut(G)$ nin çekirdeğidir.

Teorem 3.1.2.2 : G bir grup olsun. O zaman ;

$$G/Z(G) \cong Inn(G) \text{ olur.}$$

İspat : $\varphi : G \rightarrow Inn(G)$ örten bir dönüşüm. Burada sadece $ker\varphi = Z(G)$ olduğunu gösterelim.

Bir $g \in Z(G)$ olsun. O zaman;

$$\varphi(g)(x) = i_g(x) = gxg^{-1} = gg^{-1}x = x = id(x)$$

Öyle ki ; $\varphi(g) = id, g \in ker\varphi$ dir.

Tersine, varsayalım ki $g \in \ker \varphi$ olsun. O zaman $\varphi(g) = id$, böylece $i_g = id$ dir.

Her iki tarafa uygularsak;

$$x \in G,$$

$$i_g(x) = x, \quad gxg^{-1} = x \text{ ya da } gx = xg \text{ olur.}$$

Burada ki x keyfi olduğu için, x istenildiği gibi seçilebilir. Böylece $g \in Z(G)$ olur.

Bu nedenle idda edildiği gibi $\ker \varphi = Z(G)$ dir.

Sonuç olarak birinci izomorfizma teoreminden $G/Z(G) \cong Inn(G)$ olur.

Teorem 3.1.2.3 : G bir grup olsun. O zaman ;

$$Inn(G) \triangleleft Aut(G)$$

dir.

İspat : Teorem 3 den $Inn(G) \leq Aut(G)$ olduğunu gördük.

$\mu^{-1}\sigma_g\mu \in Inn(G)$ vardır, her $\sigma_g \in Inn(G)$, $\mu \in Aut(G)$ dir. $x \in G$ için

$$\begin{aligned} x(\mu^{-1}\sigma_g\mu) &= (x\mu^{-1})(\sigma_g\mu) \\ &= ((x\mu^{-1})\sigma_g)\mu \\ &= (g^{-1}(x\mu^{-1})g)\mu \\ &= (g^{-1}\mu)((x\mu^{-1})\mu)(g\mu) \\ &= (g\mu)^{-1}x(g\mu) \\ &= x\sigma_{g\sigma} \end{aligned}$$

Buradan $\mu^{-1}\sigma_g\mu = \sigma_{g\sigma}$ ve $\mu^{-1}\sigma_g\mu \in Inn(G)$ olur.

Bu yüzden $Inn(G) \triangleleft Aut(G)$ dir.

Not : İç olmayan otomorfizmalara dış otomorfizma denir.

$$Out(G) = Aut(G)/Inn(G)$$

Teorem 3.1.2.4 : Her iç otomorfizma IA otomorfizmasıdır.

Not :

1. Bir G grubunun iç otomorfizm grubu $Inn(G)$ aşikar olması için gerek ve yeter koşul G nin değişmeli olmasıdır.
2. $Inn(G)$ grubu sadece aşikar olduğu zaman devirlidir.

Teorem 3.1.2.5 : Eğer G_1 ve G_2 iki grup ve σ_1 ve σ_2 sırasıyla G_1 ve G_2 'nin iç otomorfizmi ise bu durumda $\sigma_1 \times \sigma_2$, $G_1 \times G_2$ üzerinde bir iç otomorfizmadır.

Burada $\sigma_1 \times \sigma_2$, $G_1 \times G_2$ 'nin otomorfizmi olup σ_1 birinci, σ_2 ikinci koordinat olarak yer alır.

Burada düşünce g_1 ve g_2 yi σ_1, σ_2 için olası konjugasyon olarak almaktadır. Bu durumda (g_1, g_2) elemanı $\sigma_1 \times \sigma_2$ için olası konjugasyon olarak alınır.

Sonuç 3.1.2.1 : G bir grup olsun.

$x \in G$ ve K_x , G de x in bir iç otomorfizmi olsun.

O zaman K_x G nin bir otomorfizmidir.

İspat : Tanım olarak $K_x: G \rightarrow G$ bir dönüşüm tanımlansın.

Her $g \in G$: $K_x(g) = xgx^{-1}$ olsun.

Şimdi K_x otomorfizma olduğunu görelim.

İlk olarak K_x in homomorfizma olduğunu görmeliyiz.

Her $g, h \in G$: $K_x(g)K_x(h)$

$$= (xgx^{-1})(xhx^{-1}) \quad (K_x \text{ tanımından})$$

$$= xg(x^{-1}x)hx^{-1} \quad (G_3 \text{ birleşme grup aksiyomu})$$

$$= xgehx^{-1} \quad (G_1 \text{ etkisiz eleman grup aksiyomu})$$

$$= xghx^{-1} \quad (G_2 \text{ birim grup aksiyomu})$$

$$= K_x(gh)$$

Böylece morfizm özelliği kanıtlanmıştır.

Şimdi K_x in birebir olduğunu gösterelim.

$$K_x(g) = K_x(h)$$

$$xgx^{-1} = xhx^{-1}$$

$$g = h$$

Böylece K_x birebirdir.

Son olarak K_x in örten olduğunu gösterelim.

Not edelim ki;

Her $h \in G: xhx^{-1} \in G$ aslında bundan dolayı G bir gruptur ve kapalıdır gerçeği ortaya çıkar.

Her $h \in G : K_x xhx^{-1}$

$$= x^{-1}(xhx^{-1})x \quad (K_x \text{ tanımından})$$

$$= (x^{-1}x)h(x^{-1}x)$$

$$= ehe$$

$$= h$$

Dolayısıyla G nin her elemanı, K_x altındaki G nin bir elemanının görüntüsüdür ve örtendir.

5. Baumslag-Taylor (1968) $IA - Aut(G_n) / Inn - Aut(G_n)$ tüm $n \geq 3$ için serbest torsion dur.

3.1.3 Merkezi Otomorfizma

Tanım 3.1.3.1 : G bir sonlu grup olsun. G nin bir β otomorfizmi $G/Z(G)$ üzerinde birim otomorfizme indirgeniyorsa merkezidir veya $\forall g \in G$ için $g^{-1}\beta(g) \in Z(G)$ oluyorsa β ya **Merkezi Otomorfizma** denir. Burada $Z(G)$, G nin merkezidir. G nin merkezi otomorfizmlerinden oluşan küme **$Aut_c(G)$** ile gösterilir ve $Aut_c(G)$ bir normal alt grup olur.

3.1.4 Pointwise İç Otomorfizma

Tanım 3.1.4.1 : θ , G grubunun bir otomorfizmi olsun. Eğer her $x \in G$ için $\theta(x)$, x ile eşlenik oluyor ise θ ya **Pointwise İç Otomorfizma** denir. G nin tüm pointwise inner otomorfizmalarının grubu $Aut_{pwi}(G)$ ile gösterilir.

Teorem 3.4.1 : G bir serbest grup olsun. $Aut_{pwi}(G) \leq Aut(G)$ dir.

3.1.5 Tame Otomorfizma

Tanım 3.1.5.1 : F sonlu üretilmiş serbest grup olmak üzere $G, G = \langle F|R \rangle$ sunumuna sahip sonlu serbest grup olsun.

$\alpha : G \rightarrow G$ otomorfizmi F nin bir otomorfizmi tarafından belirleniyorsa α ya **Tame Otomorfizm** denir.

3.1.6 Normal Otomorfizma

Tanım 3.1.6.1 : Bir G grubunun her bir normal alt grubunu kendine taşıyan otomorfizmine **Normal Otomorfizma** denir.

Yani N, G nin normal alt grubu ve σ, G nin bir otomorfizmi olmak üzere $\sigma(N) = N$ oluyorsa σ ya normal otomorfizma denir.

3.1.7 Class-Preserving Otomorfizma

Tanım 3.1.7.1 : G nin her bir elemanını kendi eşlenik sınıfına götüren otomorfizmlere **Class-Preserving Otomorfizma** denir.

3.1.8 Center-Fixing Otomorfizma

Tanım 3.1.8.1 : G grubunun merkezindeki her elemanı sabit tutan otomorfizmaya **Center-Fixing Otomorfizma** denir.

$\omega : G \rightarrow G$ öyle ki ; $\omega_g : x \rightarrow gxg^{-1}$ ve $Z(G) : \{a \in Z(G) : ax = xa, \forall x \in G \text{ için}\}$

$$\omega_g(a) = gag^{-1} = agg^{-1} = aI = a$$

dır.

BÖLÜM 4

ÖZEL OTOMORFİZM GRUPLARININ ÖZELLİKLERİ

4.1 Özel Otomorfizm Gruplarının Temel Özellikleri

4. Class-Preserving otomorfizmi , IA otomorfizmidir.
5. IA otomorfizmi , Class-Preserving otomorfizmi değildir.
6. İç otomorfizmi , IA otomorfizmidir.
7. IA otomorfizmi , iç otomorfizm değildir.
8. İç otomorfizmi , Class-Preserving otomorfizmadır.
9. Class-Preserving otomorfizma , iç otomorfizma değildir
10. İç otomorfizma , normal otomorfizmadır.
11. Normal otomorfizma , iç otomorfizma değildir.
12. İç otomorfizma , Center-Fixing otomorfizmadır.
13. Center-Fixing otomorfizma , iç otomorfizma değildir.
14. Her poinwise iç otomorfizma, iç otomorfizmadır.
15. Sonlu p -grubunun IA otomorfizm grubu p -gruptur.

BÖLÜM 5

ÖZEL OTOMORFİZM GRUPLARININ SONUÇLARI

5.1 Sonuçlar

Bu bölümde serbest grupların özel otomorfizmlerinin hangi koşullarda birbirine eşit olduğuyla ilgili bilgiler derlenmiştir.

16. **Endimioni, 2008 [2]** : Bir serbest grupta her pointwise iç otomorfizm iç otomorfizmdir. Endimioni çalışmasında ; bu özelliğin serbest nilpotent gruplar içinde doğru olduğunu ispatlamıştır. Devirli olmayan serbest nilpotent grubun her bir normal alt grubunu sabit bırakan otomorfizm içtir. Endimioni çalışmasında ; abelyan olmayan 2. sınıftan serbest nilpotent gruplar için bu son özelliğin doğru olduğunu , derecesi 2 den büyük olan serbest nilpotent gruplar için yanlış olduğunu göstermiştir.
17. **Endimioni & Moravec, 2010 [3]** : G bir grup φ de G nin bir otomorfizması olsun. Endimioni & Moravec, çalışmalarında G nin metabelyen olması durumunda , $C_G(\varphi)$ (φ nin merkezleyeni) nin $[G, \varphi]$ komütatör alt grubu üzerine etkisi çalışmışlardır. G yi metabelian ve φ yi de p asal olmak üzere p . dereceden serbest-sabit-nokta aldıklarında $[G, \varphi]$ nin nilpotentlik derecesinin p den küçük veya eşit olduğunu ispatlamışlardır.
18. **Azhdari & Akhavan-Malayeri, 2011 [4]** : G bir grup ve $Aut_c(G)$, G tüm otomorfizmlerinden oluşan grup olsun.
 $C^* = C_{Aut_c(G)}(Z(G))$, G nin $Z(G)$ (G nin merkezi) yi sabit tutan tüm merkezi otomorfizmlerinin kümesi olsun. Z. Azhdari & M. Akhavan-Malayeri çalışmalarında ; G , sonlu üretilmiş 2. sınıftan nilpotent grup olmak üzere $C^* = Inn(G)$ olması için gerek ve yeter koşulun $Z(G)$ nin devirli ya da $Z(G) \cong C_m \times Z_r$ olması ispatlanmıştır. Burada $\frac{G}{Z(G)}$, m yi bölen üsse sahiptir ve r , $Z(G)$ nin serbest-torsion rankıdır. Ayrıca bu çalışmada G nin sonlu üretilmiş serbest-torsion olmaması durumunda $C^* = Inn(G)$ olması için gerek ve yeter koşulun G nin 2. sınıftan nilpotent ve $Z(G)$ devirli veya $Z(G) \cong C_m \times Z_r$ olduğunu ispatlamışlardır.

19. **De Giovanni & Newell & Russo, 2014 [5]** : G bir grup ve φ , G nin bir endomorfizmi olsun. G nin her x elemanları için $\langle x, x_\varphi \rangle$ devirli ise De Giovanni & Newell & Russo φ , G nin normal endomorfizmidir olduğunu ispatlamışlardır.
20. **Azhdari, 2016 [6]** : G bir grup ve $Aut_c(G)$, G nin tüm merkezi otomorfizmlerinden oluşan grubu olsun. Biliyoruz ki G sonlu p -grup ise $Aut_c(G)$, $Inn(G)$ otomorfizm grubuna eşittir ancak ve ancak $Z(G) = G'$ veya $Z(G)$ devirlidir .Bu sonuç sonsuz gruplar için genişletilemez. Gerçekten, $Z(G) = G'$ sonsuz devirli ve $Inn(G) < C^* = Aut_c(G)$ olan sonlu üretilmiş 2. sınıftan nilpotent grup vardır. Azhdari çalışmasında ; $Aut_c(G) = Inn(G)$ eşitliğinin sağlandığı grupları karakterize etmiştir.
21. **Azhdari & Akhavan-Malayeri, 2014 [17]** : G bir grup, M ve N , G nin iki normal alt grubu olsun. G/M ve N yi merkezleyen G nin tüm otomorfizmlerinin kümesi $Aut_N^M(G)$ olmak üzere $Inn(G) = Aut_N^M(G)$, $Inn(G) \leq Aut_N^M(G)$ ya da $Aut_N^M(G) \leq Inn(G)$ koşullarından birini sağlayan G grubu araştırılmıştır. G nin G/M ve N yi merkezleyen iç olmayan merkezi otomorfizminin olması için G üzerinde hangi koşulların olması gerektiği araştırılmıştır.
22. **Yadav, 2008 [18]** : G sonlu abelyan olmayan p -grup için $Aut_c(G) = Inn(G)$ dir ancak ve ancak $Z(G) = \gamma_2(G)$ ve $Z(G)$ devirlidir.
23. **Gumber, 2011 [19]** : G sonlu p -grup ve p tek asal sayı olsun. $|G|$ p için $Aut_Z(G) = Z(Inn(G))$ dir. G nin rankı 2 ve $|Z(G)| = p$ dir. $|G| = p^n$ ve G , 3. Sınıftan nilpotent sonlu p -grup için , $Aut_Z(G) = Z(Inn(G))$ dir ancak ve ancak G nin rankı 2 ve $|Z(G)| = p$ dir.
24. **Mousavi & Shomali [20]** : G , K ile H nin yarı direkt çarpımı olsun. $G = H \times K$, burada K abelyan olmayan ve $Z(H)$ de K aşikar olsun. Mousavi & Shomali çalışmalarında; $Aut^Z(G)$ nin $RTUS$ çarpımına izomorf olduğu gösterilmiştir. Burada ;
 $Aut^Z(G)$, her $g \in G$ için $g^{-1}\alpha(g) \in Z$ olan α otomorfizmlerinden oluşan grup,
 $R = \{\sigma_H : \sigma \in Aut^Z(G)\}$

$$T = \{\pi_K \sigma_H : \sigma \in \text{Aut}^Z(G)\}$$

$$U = \{\pi_H \sigma_K : \sigma \in \text{Aut}^Z(G)\}$$

$$S = \{\sigma_K : \sigma \in \text{Aut}^Z(G)\}$$

dir. $\pi_H, \pi_K, G = H \times K$ dan sırayla H ve K üzerine projeksiyonlardır.

$$\sigma_H : H \rightarrow G \text{ ve } \sigma_K : K \rightarrow G$$

H ve K nın G üzerine kısaltmalarıdır.

25. **Lubotzky, 2006 [21]** : $G = G(X)$ en az iki elemana sahip X üreteç kümesi üzerinde serbest grup olsun. $p \neq 2$ asal sayı olmak üzere G nin her p -normal otomorfizminin iç olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca G nin her normal otomorfizminin iç olduğu gösterilmiştir.

Serbest grupların özel otomorfizmleri özellikle son zamanlarda üzerinde çok çalışılan konulardan birisidir. Hala da devam etmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Gupta, C. K. (1996). Genarating Sets of Certain Automorphim Groups , *Resenhas IME-USP* **3 (2)**, 319-332
- [2] Endimioni, G. (2008). Automorphims Fixing every Normal subgroup of a nilpotent-by-abelian group *Rend.Sem.Mat.Univ.Padova*, **120**, 73-77
- [3] Endimioni, G. , Moravec P. (2010). On The Centralizer and The Commutatot subgroup Of an Automorphism *Mathematics Subject Classification* 20E, **36**, 20F28
- [4] Azhdari, Z. , Akhavan-Malayeri, M. (2011). On Inner Automorphisms and Central Automorphims Of Nilpotent GroupOf Class 2 *Journal of Algebra and Its Applications* **10(6)** ,1283-1290
- [5] De Giovanni, F. , Newell, M. L. , Russo, A. (2014). On a Class of Normal Endomorphism of Group *Journal of Algebra and Its Applications* **12(1)**
- [6] Azhdari, Z. (2016). Central Automorphims and Inner Automorphism in Finitely Generated Groups *Journal Communications in Algebra* **44** , 4133-4139
- [7] Nesin, A. (2013) *Cebir I Temel Grup Teorisi* Nesin Yayıncılık 2013
- [8] Azhdari, Z. , Akhavan-Malayeri, M. (2013) On pointwise Inner Automorphisms of Nilpotent Groups of Class 2 *J.Sci.Kharazmi University* **13(2)**
- [9] Bachmuth, S. (1964) Automorphisms of Free Metabelian Groups Fairleigh Dickinson University
- [10] Jafari, S. H. (2011) Central Automorphism Groups Fixing The Center Element-Wise *International Electronic Journal of Algebra* **9** , 167-170
- [11] Rotman, J. (1961) Torsion-Free And Mixed Abelian Groups Univercity of Illinois Urbana, Illinois
- [12] Hall, P. (1969) The Edmonton Notes on Nilpotent Groups, *Queen Mary College Mathematics Notes*

- [13] Zyman, M. (2007) IA-Automorphisms and Localization of Nilpotent Groups, Ph.D. Thesis-City University of New York
- [14] Bachmuth S. (1965) Automorphisms of Free metabelian Groups, *Trans. Amer.Math.Soc.* ,**118** , 93-104
- [15] Hall, P. (1970) Finiteness Conditions for Soluble Groups, *Proc. London Math. Soc.***4** , 321-347
- [16] Bonanome, M. , Dean, M. H. , Zyman, M. (2011) IA-Automorphisms of Groups with almost Constant Upper Central Series, The City University of New York **60093** ,38-39
- [17] Azhdari, Z. , Akhavan-Malayeri M. (2014) On Inner Automorphisms and Certain Central Automorphisms of Groups, *Indian National Science Academy* **45(3)** , 377-393
- [18] Yadav, M. K. (2008) On Central Automorphisms Fixing the Center Element-Wise, *Communications in Algebra* **37** , 4325-4331
- [19] Gumber, D. , Sharma, M. (2011) On Central Automorphisms of Finite p-Groups,1105.6172v3
- [20] Mousavi, H. , Shomali, A. Central Automorphisms of Semidirect Products, *The Bulletin of the Malaysian Mathematical Society Series 2* **36(3)** , 709-716
- [21] Umirbaev, U.U. (2006) Defining Relations of the Tame Automorphism group of Polynomial Algebras in Three Variables *J.Reine Angew Math.* 203-235
- [22] Lubotzky, A. (1979) Normal Automorphisms of Free Groups Department of Mathematics and Computer Science. Bar-Ilan University, Ramat-Gan,Israel 494-498