

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUPOİDLER ÜZERİNDEKİ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE
CAT¹-GRUPOİDLER

OSMAN ÇAN

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Sedat TEMEL
JÜRİ ÜYELERİ
Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif İNCE

RİZE-2021
Her Hakkı Saklıdır

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın amacı, gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller ile cat^1 -gruplar arasındaki kategorik denkliği, grupoidlere genişletmek ve bu denkliği kullanarak grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin normal ve bölüm yapıları ile cat^1 -grupoidlerdeki normal ve bölüm yapılarını karşılaştırmaktır. Ayrıca grupoidlerin örtüleri ve grupoidlerin bir küme üzerinde etkimeleri cat^1 -grupoidlere taşınarak aralarındaki özellikleri incelemektir.

Bu çalışmanın, planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı şekillendiren çok kıymetli hocam sayın Dr.Öğr.Üyesi Sedat TEMEL'e teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında her zaman yanımda olan eşim Ayşe ÇAN, kızım Havvanur ÇAN ve oğlum Muhammed Enes ÇAN'a teşekkür ederim.

Tüm bu çalışma boyunca bana maddi ve manevi destek veren mesai arkadaşlarım Polis Memuru Arif ÜNALMIŞ, Polis Memuru Muhammed AYGÜN'e ve ekip amirim Komiser Erkan Meftun DOĞAN'a teşekkür ederim.

Osman ÇAN

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “GRUPOİDLER ÜZERİNDEKİ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE CAT^1 -GRUPOİDLER” başlıklı bu tezi, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim.
05/03/2021

Osman ÇAN

Uyarı: Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

GRUPOİDLER ÜZERİNDEKİ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE CAT¹-GRUPOİDLER

Osman ÇAN

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Sedat TEMEL

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde grupların ve grupoidlerin etkimleri, kategori, grupoid, grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüller ve cat^1 -grup gibi bazı temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca cat^1 -gruplarla gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller arasındaki doğal denkliğin ispatı da verilmiştir. İkinci bölümde cat^1 -grupoidlerin temel özellikleri verilmiş, cat^1 -grupoidlerin kategorisinin grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisine doğal denkliği gösterilmiştir. Üçüncü bölümde ise özgün bir çalışma olarak ilk önce cat^1 -grupoidlerin bölüm yapısı elde edildi. Daha sonra cat^1 -grupoidlerin örtü cat^1 -grupoidi ile cat^1 -grupoidlerin bir küme üzerine etkime tanımları yapılarak, bu yapıların kategorileri aralarındaki doğal denklik araştırılmıştır. Dördüncü bölümde ise diğer çalışmalar için bazı sonuçlar verilmiştir. Beşinci bölümde ise diğer çalışmalar için öneriler verilmiştir.

2021,53 sayfa

Anahtar Kelimeler: Grupoid, çaprazlanmış modül, cat^1 -grupoid, normallik, bölüm, örtü, etkime.

ABSTRACT

CROSSED MODULES OVER GROUPOIDS AND CAT^1 -GROUPOIDS

Osman ÇAN

**Recep Tayyip Erdogan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assist. Dr. Sedat TEMEL**

This thesis consists of four chapter. In the first chapter some fundamental notions such as actions of groups and of groupoids, category, grupoid, crossed modules over groupoids and cat^1 -group were given. Moreover the proof of the natural equivalence between cat^1 -groups and crossed modules over groups was given. In the second chapter the fundamental notions of cat^1 -groupoids was given and the natural equivalence between the category of cat^1 -groupoids and the category of crossed modules over groupoids was shown. In the third chapter, we defined coverings and actions of cat^1 -groupoids using underlying groupoids and proved natural equivalence between their categories. Next, the quotient structure of cat^1 -groupoids was obtained as an original study. In the fourth chapter, suggestions for further works and some results were given.

2021,53 pages

Keywords: Grupoid, crossed module, cat^1 -groupoid, normality, quotient, covering, action.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	II
ÖZET	III
ABSTRACT.....	IV
İÇİNDEKİLER	V
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ	VI
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Cebirsel Kavramlar.....	2
1.3. Kategoriler	7
1.4. Grupoidler.....	11
1.5. Çaprazlanmış Modüller	15
1.6. Grupoidler Üzerindeki Çaprazlanmış Modüller	22
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	26
2.1. Cat^1 -Grupoidler	27
2.2. Cat^1 -Grupoidlerinde Normallik ve Bölüm	34
3. BULGULAR	37
3.1. Bölüm Cat^1 -Grupoidi.....	37
3.2. Cat^1 -Grupoidlerinin Örtüleri ve Etkimleri	40
4. TARTIŞMA ve SONUÇLAR	49
5. ÖNERİLER	50
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	53

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\bullet$	Etkime
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\rtimes$	Yarı-direkt Çarpım
$\text{Cat}^1\text{-GPD}$	Cat^1 -Grupoidlerin Kategorisi
$\text{Cat}^1\text{-GP}$	Cat^1 -Grupların Kategorisi
$\curvearrowright$	Değişmeli Diyagram
$C(X, Y)$	X den Y ye Giden Bütün Morfizmlerin Sınıfı
$C(X)$	Başlangıç ve Bitişi Aynı Olan Morfizmlerin Sınıfı
1_X	X Objesindeki Birim Morfizm
C_0	Objelerin Sınıfı
C_1	Morfizmlerin Sınıfı
d_0	Başlangıç Dönüşümü
d_1	Bitiş Dönüşümü
ε	Birim Morfizm Dönüşüm
η	Ters Morfizm Dönüşümü
$\circ$	Kısmi Bileşke İşlemi
∂	Sınır Dönüşümü
TOP	Topolojik Uzayların Kategorisi
SET	Cümlelerin Kategorisi
GP	Grupların Kategorisi
GPD	Grupoidlerin Kategorisi
$X \cong Y$	X ve Y Morfizmleri İzomorftur
$F \simeq G$	F ve G Fanktorları Doğal Olarak Denktir
$\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$	$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ Kategorileri Doğal Olarak Denktir
$\text{Ker}F$	F Fanktorunun Çekirdeği
CM	Gruplar Üzerindeki Çaprazlanmış Modüllerin Kategorisi
CMG	Grupoidler Üzerindeki Çaprazlanmış Modüllerin Kategorisi
$\text{St}_{\mathcal{G}}(x)$	$\mathcal{G}$ Grupoidinde x Objisinin Starı

$Act(CAT^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$ Cat ¹ -Grupoidinin Kümeler Üzerindeki Etkimelerinin Kategorisi
$Cov(CAT^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$ Cat ¹ -Grupoidinin Örtülerinin Kategorisi
$Act(\text{GPD})/\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$ Grupoidinin Kümeler Üzerindeki Etkimelerinin Kategorisi
$Cov(\text{GPD})/\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$ Grupoidinin Örtülerinin Kategorisi
(S, ω)	ω Dönüşümü İle S Kümesi Üzerinde $\mathcal{G}$ nin Etkimesi



1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1. Giriş

Kategoriler matematikte ve fiziğin bazı alanlarında bazı problemlerin çözümünde kolaylık sağlamak için tanımlanmıştır. Grupoidler de bir kategori olup her bir morfizminin tersi mevcut olan kategoriye grupoid denir. Her grup tek objeli bir grupoid olduğundan grupoidler gruplardan daha geniş bir kavramdır.

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak (Whitehead, 1946) tarafından ikinci relatif homotopi gruplarıyla ilgili araştırmaları sırasında ortaya çıkmış ve matematiğin birçok alanındaki uygulamalarda önemli bir role sahip olmuştur. Gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller 2-boyutlu gruplar olarak da bilinirler. Bu yapıların grupoidlere genişletilmesi olarak da ele alınabilen grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modül tanımı için (Brown-Higgins, 1987), (Brown-Higgins, 1982) ve (Brown-İçen, 2003) kaynaklarına bakılabilir.

Çaprazlanmış modüllerin, grupoidlerin (veya kategorilerin) kategorisindeki grup objelere veya grupların kategorisindeki iç kategoriler olarak tanımlanan grup-grupoidlere (veya diğer adıyla 2-gruplara) kategorik anlamda doğal denkliği (Brown-Spencer, 1976)'da ispat edilmiştir. (Norrie, 1990) kaynağında verilmiş olan alt çaprazlanmış modül kavramları kullanılarak Mucuk ve diğerleri çaprazlanmış modüllerin normal ve bölüm yapıları ile 2-grupların normal ve bölüm yapılarını karşılaştırmışlardır (Mucuk vd., 2015). Bu denklik (Temel, 2019) kaynağında grupoidlere genişletilmiş, grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüller ile 2-grupoidlerin normal ve bölüm yapıları karşılaştırılmıştır (ayrıca (Mucuk-Demir, 2018) kaynağına bakılabilir).

Grupoidlerin örtüleri ve bir küme üzerindeki etkimesi cebirsel topoloji ile aralarındaki bağlantıdan grupoidlerin uygulamalarında önemli bir role sahip olması nedeniyle (Higgins,1971) ve (Brown,1982) tarafından incelendi. Bir $\mathcal{G}$ grupoidi için $\mathcal{G}$ nin bir küme üzerindeki etkimelerinin $Act(\mathbf{GPD})/\mathcal{G}$ kategorisi (buna $\mathcal{G}$ -kümeler de

denir) ile örtülerinin $\mathbf{Cov}(\mathbf{GPD})/\mathcal{G}$ kategorisinin doğal olarak denkliği bilinmektedir. Topolojik grupoidler için bu denklik ise (Brown vd.,1976) ile gösterilmiştir. Bir grup-grupoidin bir grup üzerine etkimesi ve grup-grupoid örtüleri arasındaki doğal kategorik denklik ve gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin yükselmeleri arasındaki doğal kategorik denklik (Mucuk-Şahan, 2019) kaynağında incelenmiştir.

Bazı özel şartları sağlayan bir grup olan cat^1 -grup yapısı (Loday,1982)'de cebirsel bir obje olarak tanımlanmış ve cat^1 -grupların kategorisi ile gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisinin doğal olarak denk olduğu ispat edilmiştir. Bu denklik gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin yüksek boyutlara genişletilmesinde kullanılmıştır. Bu tez çalışmasında cat^1 -grupların grupoid hali olan cat^1 -grupoid kavramı incelenmiş, (Temel, 2020) kaynağında verildiği gibi cat^1 -grupoidlerle ve grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorileri arasındaki doğal denklik ispat edilmiştir. Ayrıca cat^1 -grupoidlerin ve grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin normal yapıları (Temel, 2020) kaynağında karşılaştırılmıştır. Bu tezde özgün bir çalışma olarak cat^1 -grupoidlerin bölüm yapısı oluşturularak cat^1 -grupoidlerin bölüm morfizmi tanımlanmıştır. Ayrıca grupoidlerin örtüleri ve bir küme üzerindeki etkimesi ile ilgili tanımlar ve işlemler cat^1 -grupoidler için tanımlanmıştır. Cat^1 -grupoidlerinin $\mathbf{Cov}(\mathbf{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$ kategorisi ve cat^1 -grupoidlerinin etkimelerinin $\mathbf{Act}(\mathbf{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$ kategorisi oluşturularak aralarındaki doğal denklik ispatlanmıştır.

1.2. Cebirsel Kavramlar

Tanım 1.2.1. G ve H grupları ele alınsın. Eğer

$$\rho: G \times H \rightarrow H$$

$$(g, h) \mapsto \rho(g, h) = g \cdot h$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa G grubu H grubu üzerine **soldan etkir** denir.

Bu dönüşüm **soldan etkime** olarak adlandırılır ve H bir **G-grup** adını alır (Brown vd.,2011)

- (i) Her $g, g_1 \in G$ ve $h \in H$ için $g \bullet (g_1 \bullet h) = (gg_1) \bullet h$
- (ii) Her $g \in G$ ve $h, h_1 \in H$ için $g \bullet (hh_1) = (g \bullet h)(g \bullet h_1)$
- (iii) Her $h \in H$ ve $e_G \in G$ birim elemanı için $e_G \bullet h = h$
- (iv) $g \bullet e_H = e_H$

Burada dördüncü özellik diğer özelliklerden kolayca elde edilir.

Örnek 1.2.2. G bir grup olmak üzere $G \times G \rightarrow G$, $g \bullet g_1 = gg_1g^{-1}$ etkimesi ile G kendi üzerine etkir. Bu etkimeye **eşlenik etkime** denir. Burada $g, g_1, g_2 \in G$ için

$$g \bullet (g_1 \bullet g_2) = g \bullet (g_1g_2g_1^{-1}) = g(g_1g_2g_1^{-1})g^{-1} = (gg_1)g_2(gg_1)^{-1} = (gg_1) \bullet g_2,$$

$$(g \bullet g_1)(g \bullet g_2) = gg_1g^{-1}gg_2g^{-1} = gg_1g_2g^{-1} = g \bullet (g_1g_2)$$

ve

$$e \bullet g = ege^{-1} = g$$

olup etkime özellikleri sağlandığından G bir G -gruptur.

Örnek 1.2.3. Bir G grubunun N normal alt grubu için

$$G \times N \rightarrow N, (g, n) \mapsto g \bullet n = gng^{-1}$$

dönüşümü bir eşlenik etkime olup N bir G -gruptur. Böylece her grubun normal alt grubu üzerine etkidiği anlaşılır (Eie ve Chang, 2010).

Örnek 1.2.4. $\mathbb{R}$ nin $\mathbb{Z}$ toplamsal alt grubu için konjugasyon etkimesi olan

$$\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(x, z) \mapsto x \bullet z = x + z - x = z$$

dönüşümü bir aşık etkime olup $\mathbb{Z}$ bir $\mathbb{R}$ -gruptur.

Tanım 1.2.5. G ve H grupları için bir $G \times H \rightarrow H$, $(g, h) \mapsto g \bullet h$ etkimesi ele alınsın.

$$(G \times H) \times (G \times H) \rightarrow G \times H$$

$$((g, h), (g_1, h_1)) \mapsto (gg_1, h(g \bullet h_1))$$

işlemi ile elde edilen gruba G ile H gruplarının **yarı-direkt çarpımı** denir ve $G \ltimes H$ ile

gösterilir. Bu grupta birim eleman $e = (e_G, e_H)$ ve her $(g, h) \in G \times H$ için ters eleman $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, g^{-1} \bullet h^{-1})$ şeklindedir. Burada sağ etkiye ile elde edilen yarı-direkt çarpım grubu sol etkiye ile de benzer şekilde elde edilebilir.

Tanım 1.2.6. G bir grup ve $s, t: G \rightarrow G$ dönüşümleri grup homomorfizmleri olsun. Eğer bu dönüşümler aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathcal{G} = (G, s, t)$ üçlüsüne bir **cat¹-grup** denir (Loday, 1982).

$$[\mathbf{CG1}] \quad st = t, ts = s \text{ ve}$$

$$[\mathbf{CG2}] \quad [Ker s, Ker t] = e, \text{ yani her } x \in Kers, y \in Kert \text{ için } xyx^{-1}y^{-1} = e \text{ dir.}$$

Örnek 1.2.7. Kalan sınıfları $\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a(m)\}$, $\mathbb{Z}_n = \{\bar{a} | a \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ ve $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n - \{\bar{0}\}$ olmak üzere $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ ve $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ birer grup olsunlar. Her $n, n_1 \in \mathbb{Z}_n^*$ ve $m, m_1 \in \mathbb{Z}_m^*$ olmak üzere birim elemanı $e_{\mathbb{Z}_n^* \times \mathbb{Z}_m^*} = (\bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*})$ ve ters elemanı $e_{\mathbb{Z}_n^* \times \mathbb{Z}_m^*} = (\bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*})$ için $(\mathbb{Z}_n^* \times \mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ çarpım grubunu ele alalım. Bu grup üzerinde tanımlanan

$$s, t: \mathbb{Z}_n^* \times \mathbb{Z}_m^* \rightarrow \mathbb{Z}_n^* \times \mathbb{Z}_m^*$$

$s(\bar{n}, \bar{m}) = (\bar{n}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*})$ ve $t(\bar{n}, \bar{m}) = (\bar{m}, \bar{n}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*})$ dönüşümleri ile $(\mathbb{Z}_n^* \times \mathbb{Z}_m^*, s, t)$ yapısı bir cat¹-gruptur. Burada

$$\begin{aligned} s((\bar{n}, \bar{m}) \cdot (\bar{n}_1, \bar{m}_1)) &= s(\overline{n \cdot n_1}, \overline{m \cdot m_1}) \\ &= (\overline{n \cdot n_1}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*}) \\ &= (\bar{n}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*}) \cdot (\bar{n}_1, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*}) \\ &= s(\bar{n}, \bar{m}) \cdot s(\bar{n}_1, \bar{m}_1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} t((\bar{n}, \bar{m}) \cdot (\bar{n}_1, \bar{m}_1)) &= t(\overline{n \cdot n_1}, \overline{m \cdot m_1}) \\ &= (\overline{m \cdot m_1 \cdot n \cdot n_1}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*}) \\ &= (\overline{m \cdot n \cdot m_1 \cdot n_1}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\overline{m \cdot n}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*}) \cdot (\overline{m_1 \cdot n_1}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*}) \\
&= t(\bar{n}, \bar{m}) \cdot t(\bar{n}_1, \bar{m}_1)
\end{aligned}$$

olup s ve t dönüşümleri birer grup homorfizmleridir.

$$\begin{aligned}
[\text{CG1}] \quad s(t(\bar{n}, \bar{m})) &= s(\overline{m \cdot n}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*}) \\
&= (\overline{m \cdot n}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*}) \\
&= t(\bar{n}, \bar{m})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
t(s(\bar{n}, \bar{m})) &= t(\bar{n}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*}) \\
&= (\overline{1_{\mathbb{Z}_m^*} \cdot n}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*}) \\
&= (\bar{n}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*}) \\
&= s(\bar{n}, \bar{m}) \text{ dir.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\text{CG2}] \quad \text{Ker } s &= \{(\bar{n}, \bar{m}) \mid s(\bar{n}, \bar{m}) = (\bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*})\} \\
&= \{(\bar{n}, \bar{m}) \mid (\bar{n}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*}) = (\bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*})\} \\
&= \{(\bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*}, \bar{m}) \mid \bar{m} \in \mathbb{Z}_m^*\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\text{Ker } t &= \{(\bar{n}, \bar{m}_1) \mid t(\bar{n}, \bar{m}) = (\bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*})\} \\
&= \{(\bar{n}, \bar{m}) \mid (\overline{m_1 \cdot n}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*}) = (\bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*})\} \\
&= \{(\bar{n}, \bar{m}_1) \mid \overline{m_1 \cdot n} = \bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*}\}
\end{aligned}$$

olmak üzere her $(\bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*}, \bar{m}) \in \text{Ker } s$, $(\bar{n}, \bar{m}_1) \in \text{Ker } t$ için

$$\begin{aligned}
& (\bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*}, \bar{m}) \cdot (\bar{n}, \bar{m}_1) \cdot (\bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*}, \bar{m})^{-1} \cdot (\bar{n}, \bar{m}_1)^{-1} \\
&= (\bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*}, \bar{m}) \cdot (\bar{n}, \bar{m}_1) \cdot (\bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*}, \bar{m}^{-1}) \cdot (\bar{n}^{-1}, \bar{m}_1^{-1}) \\
&= (\bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*} \cdot \bar{n} \cdot \bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*} \cdot \bar{n}^{-1}, \bar{m} \cdot \bar{m}_1 \cdot \bar{m}^{-1} \cdot \bar{m}_1^{-1}) \\
&= (\bar{1}_{\mathbb{Z}_n^*}, \bar{1}_{\mathbb{Z}_m^*})
\end{aligned}$$

Tanım 1.2.8. $\mathcal{G} = (G, s, t)$ ve $\mathcal{G}' = (G', s', t')$ birer cat^1 -grup ve $f: G \rightarrow G'$ bir grup homomorfizmi olsun. Eğer

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightleftharpoons[t]{s} & G \\
f \downarrow & & \downarrow f \\
G' & \xrightleftharpoons[t']{s'} & G'
\end{array}$$

diyagramı değişmeli oluyorsa, yani $s'f = fs$ ve $t'f = ft$ oluyorsa f ye bir **cat^1 -grup morfizmi** denir (Loday, 1982).

Önerme 1.2.9. Herhangi bir $\mathcal{G} = (G, s, t)$ cat^1 -grubu için aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $s(G) = t(G)$ dir.
- (ii) $s^2 = s$ ve $t^2 = t$ dir.
- (iii) s ve t , $s(G)$ üzerinde birim dönüşümlerdir (Brown vd., 2011).

İspat:

- (i) $st = t$ olduğundan $\text{Im } t \subseteq \text{Im } s$ dir. Benzer şekilde $ts = s$ olacağından $\text{Im } s \subseteq \text{Im } t$ olup $s(G) = t(G)$ elde edilir.
- (ii) $ts = s$ olduğundan $s^2 = ss = sts = s$ ve benzer şekilde $t^2 = tt = tst = t$ elde edilir.
- (iii) $g \in s(G)$ için $g = s(h)$ olacak şekilde bir $h \in G$ vardır. Buradan

$$s(g) = s(s(h)) = ss(h) = s(h) = g$$

olup s , $s(G)$ üzerinde birim dönüşümdür. Benzer şekilde t dönüşümünün de $s(G)$ üzerinde birim dönüşümü olduğu açıktır.

1.3. Kategoriler

Tanım 1.3.1 $X, Y, Z \dots$ objelerinin bir sınıfı C_0 ve bu objeler arasında $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ şeklinde olan $f, g, h \dots$ morfizmlerin sınıfı C_1 olmak üzere aşağıda verilen dönüşümlerle birlikte $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, \varepsilon, \circ)$ yapısına bir **kategori** denir (McLane, 1998).

- (i) $d_0: C_1 \rightarrow C_0, d_0(f) = X, d_0(g) = Y$ başlangıç dönüşümü,
- (ii) $d_1: C_1 \rightarrow C_0, d_1(f) = Y, d_1(g) = Z$ bitiş dönüşümü,
- (iii) $C_1 \times_{C_0} C_1 = \{(g, f) \in C_1 \times C_1 \mid d_1(f) = d_0(g)\}$ olmak üzere birleşmeli olacak şekilde tanımlı $\circ: C_1 \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1$ kısmi bileşke işlemi,

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z = X \xrightarrow{g \circ f} Z$$

- (iv) Her bir obje için $f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f$ ve $d_0 \varepsilon = d_1 \varepsilon = 1_{C_0}$ koşulunu sağlayacak şekilde tanımlı $\varepsilon: C_0 \rightarrow C_1, \varepsilon(X) = 1_X, \varepsilon(Y) = 1_Y$ birim morfizm dönüşümü.

$$1_X \circlearrowleft X \xrightarrow{f} Y \circlearrowright 1_Y$$

Bu dönüşümler **yapı dönüşümleri** olarak adlandırılıp aşağıdaki diyagramla gösterilebilir.

$$C_1 \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{\circ} C_1 \xrightleftharpoons[d_1]{d_0} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} C_1$$

Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde X ve Y objeleri için $\mathcal{C}(X, Y)$ ile X den Y ye giden bütün morfizmlerin sınıfını; başlangıç ve bitiş aynı X objesi olan bütün morfizmlerin sınıfını $\mathcal{C}(X)$ ile göstereceğiz.

Önerme 1.3.3. $\mathcal{C}$ bir kategori olup her bir X objesi için birim morfizm olarak adlandırılan $\varepsilon(X) = 1_X$ tektir (Mucuk, 2010).

Aşağıda yaygın olarak kullanılan kategori örnekleri verilmiştir (Mucuk, 2010).

Örnek 1.3.4. Bütün cümlelerin sınıfı **SET** ile gösterilen bir kategori belirler. Burada objeleri cümleler, morfizmleri cümleler arasındaki fonksiyonlar, kısmi bileşke işlemi fonksiyonlar arasındaki bilinen bileşke işlemi ve her bir A cümlesi için birim morfizm de $1_A: A \rightarrow A$ olan birim fonksiyondur.

Örnek 1.3.5. Topolojik uzaylarının sınıfı topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ile birlikte bir kategori oluşturur. Sürekli fonksiyonların bileşkeleri de sürekli olduğundan bu kategoride kısmi bileşke işlemi tanımlıdır. Bu kategori **TOP** ile gösterilir.

Örnek 1.3.6. Objeleri gruplar, morfizmleri grup homomorfizmleri olan kategori **GP** ile gösterilir.

Örnek 1.3.7. Objeleri topolojik gruplar ve morfizmleri ise sürekli grup homomorfizmleri alınarak elde edilen topolojik grupların kategorisi **TGP** ile gösterilir.

Örnek 1.3.8. Her monoid tek objeli bir kategori olarak ele alınabilir. Bir M monoidi verildiğinde monoid elemanlarını morfizmler, monoid işlemi ise kısmi bileşke olarak ele alındığında M bir kategoriye dönüşmüş olur.

$$* \xrightarrow{m} * \xrightarrow{n} * = * \xrightarrow{n+m} *$$

Burada $m \in M$ için $d_0(m) = d_1(m) = *$ ve $\varepsilon(*) = e$ olarak tanımlanır.

Örnek 1.3.9. Monoidlerin kategorisinde objeler monoidler ve morfizmler ise monoid homomorfizmleri olup bu kategori **MON** ile gösterilir.

Tanım 1.3.10. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri ele alındığında aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa $\mathcal{D}$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisinin **alt kategorisidir** denir (Mucuk,2010).

- (i) D_0 sınıfı C_0 sınıfının bir alt sınıfıdır.
- (ii) Her bir $X, Y \in D_0$ için $D(X, Y) \subseteq C(X, Y)$ dir
- (iii) $\mathcal{D}$ kategorisindeki morfizmlerin bileşkesi ile $\mathcal{C}$ kategorisindeki morfizmlerin bileşkesi aynıdır.
- (iv) Her bir $X \in D_0$ için $\mathcal{D}$ deki 1_X birim morfizmi, $\mathcal{C}$ deki birim morfizm ile aynıdır.

Örnek 1.3.11. Abelyan grupların kategorisi, grupların kategorisi **GP** nin bir alt kategorisidir (Mucuk,2010).

Tanım 1.3.12. $\mathcal{C}$ bir kategori ve $f: X \rightarrow Y$ bir morfizm olsun. Eğer $\mathcal{C}$ de $g \circ f = 1_X$ ve $f \circ g = 1_Y$ özelliğini sağlayacak bir $g: Y \rightarrow X$ morfizmi varsa f ye bir **izomorfizm**; X ve Y objelerine ise **izomorftur** denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir. Burada $f^{-1} = g$ ile gösterilen morfizme **f morfizminin tersi** denir (Mucuk,2010).

Tanım 1.3.13. Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde morfizmlerin bir

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ k \downarrow & & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{h} & T \end{array}$$

diyagramı verilsin. Eğer başlangıç ve bitişleri aynı olan bileşke morfizmleri eşit ise yani $g \circ f = h \circ k$ oluyorsa bu diyagrama **değişmeli diyagram** denir (Mucuk,2010).

Tanım 1.3.14. Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f: A \rightarrow C$ ve $g: B \rightarrow C$ birer morfizm olsun. $P \in \mathcal{C}_0$ ve $p_1: P \rightarrow A$, $p_2: P \rightarrow B$ morfizmleri için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (P, p_1, p_2) üçlüsüne f nin g üzerinde (veya g nin f üzerinde) **geri çekilmesi (pullback)** denir (Mucuk,2010).

- (i) $fp_1 = gp_2$ dir.
- (ii) Her $X \in \mathcal{C}_0$ ve $f q_1 = g q_2$ olacak şekilde her $q_1: X \rightarrow A$, $q_2: X \rightarrow B$ morfizmleri için $p_1 \varphi = q_1$ ve $p_2 \varphi = q_2$ olacak şekilde bir tek $\varphi: X \rightarrow P$ morfizmi vardır.

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow q_1 & & & \\ & & P & \xrightarrow{p_1} & A \\ & \searrow q_2 & \downarrow p_2 & & \downarrow f \\ & & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

φ (dotted arrow from X to P)

Tanım 1.3.15. Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde I bir küme olmak üzere $\{A_i\}_{i \in I}$ de $\mathcal{C}$ de objelerin bir sınıfı olsun. Bir $P \in \mathcal{C}_0$ objesi ve her $i \in I$ için $p_i: P \rightarrow A_i$ morfizmleri için bir $X \in \mathcal{C}_0$ objesi ve her $i \in I$ için $f_i: X \rightarrow A_i$ morfizmleri verildiğinde $p_i \varphi = f_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi: X \rightarrow P$ varsa $(P, \{p_i\}_{i \in I})$ ikilisine $\{A_i\}_{i \in I}$ **objelerinin çarpımı** denir (Mucuk,2010).

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_i} & A_i \\ \varphi \uparrow & & \nearrow f_i \\ X & & \end{array}$$

Örneğin **SET** kategorisinde iki obje verildiğinde bu objelerin çarpımı bilinen kartezyen çarpımdır. Grupların kategorisinde de iki objenin çarpımı ise grupların direkt çarpımıdır. Eğer verilen bir kategoride herhangi iki objenin çarpımı mevcutsa bu

kategoriye **sonlu çarpıma sahip bir kategori** denir.

Kategoriler arasındaki dönüşümler aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.3.16. $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ iki kategori olsun. $\mathcal{C}$ nin her bir X objesini $\mathcal{C}'$ nin bir $F(X)$ objesine, $\mathcal{C}$ nin her bir $f: X \rightarrow Y$ morfizmini ise $\mathcal{C}'$ nin bir $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir F dönüşümü $\mathcal{C}$ den $\mathcal{C}'$ ne bir **fanktor** olarak adlandırılır ve $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ şeklinde gösterilir (Mucuk,2010; Awodey, 2006).

$$(i) F(g \circ f) = F(g) \circ F(f),$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow{g} Z \\ \text{ } & \searrow & \nearrow \\ & g \circ f & \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \\ \text{ } & \searrow & \nearrow \\ & F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) & \end{array}$$

$$(ii) F(1_X) = 1_{F(X)},$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1_X} & X \\ \text{ } & \searrow & \nearrow \\ & 1_{F(X)} & \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(1_X)} & F(X) \\ \text{ } & \searrow & \nearrow \\ & 1_{F(X)} & \end{array}$$

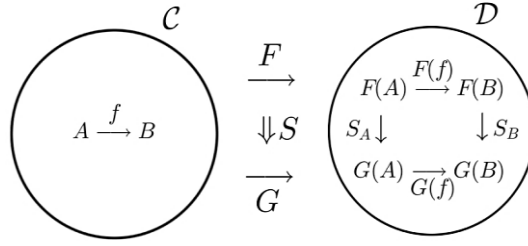
Tanım 1.3.17. $F: \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$ dönüşümü ele alındığında bir topolojik uzayı, tanımlı olduğu cümleye götüren bir fanktor olup bu şekilde objeler üzerindeki yapıyı unutan fanktora **unutkan fanktor** denir.

İki fanktorun bileşkesi de bir fanktordur. Bu şekilde objeleri küçük kategoriler, morfizmleri ise fanktorlar olan küçük kategorilerin kategorisi **CAT** elde edilir (Mucuk,2010).

Tanım 1.3.18. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olmak üzere $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ iki fanktor olsun. $\mathcal{C}$ nin her $A \in \mathcal{C}_0$ objesini $\mathcal{D}$ nin bir $S_A: F(A) \rightarrow G(A)$ morfizmine dönüştüren bir $S: \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{D}_1$ dönüşümü ele alınsın. Eğer $\mathcal{C}$ nin her bir $f: A \rightarrow B$ morfizmi için aşağıdaki

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ S_A \downarrow & & \downarrow S_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

diyagramı değişmeli ise S ye bir **doğal dönüşüm** denir ve $S: F \Rightarrow G$ ile gösterilir.



Tanım 1.3.19. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olmak üzere $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ fanktorları ele alınsın. Eğer $S: F \Rightarrow G$ doğal dönüşümü için bir $A \in \mathcal{C}_0$ olmak üzere $S_A: F(A) \rightarrow G(A)$ morfizmi $\mathcal{D}$ de bir izomorfizm ise S ye bir **doğal izomorfizm**, F ile G fanktorlarına da **doğal olarak denktir** denir ve $F \simeq G$ ile gösterilir (Mucuk,2010).

Teorem 1.3.20. $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ iki fanktor olsun. $F \simeq G$ dir, ancak ve ancak $ST = 1_G$ ve $TS = 1_F$ olacak şekilde $S: F \rightarrow G$ ve $T: G \rightarrow F$ doğal dönüşümleri vardır (Mucuk,2010).

Tanım 1.3.21. $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ fanktoru ele alınsın. Eğer $GF \simeq 1_{\mathcal{C}}$ ve $FG \simeq 1_{\mathcal{D}}$ olacak şekilde bir $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ fanktoru varsa bu kategoriler **doğal olarak denktir** denir ve $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ ile gösterilir (Mucuk,2010).

1.4. Grupoidler

Tanım 1.4.1. G_0 objelerin sınıfı, G_1 tüm morfizmlerin sınıfı ve $x, y \in G_0$ için x den y ye morfizmlerin sınıfı $G(x, y)$ olmak üzere $\mathcal{G} = (G_0, G_1, d_0, d_1, \varepsilon, \eta, \circ)$ kategorisi, her $f \in G(x, y)$ için $f^{-1} \circ f = 1_x$ ve $f \circ f^{-1} = 1_y$ özelliğini sağlamak üzere $\eta: G_1 \rightarrow G_1$, $\eta(f) = f^{-1}$ şeklinde tanımlı ters morfizm dönüşümü olarak adlandırılan dönüşümle birlikte bir **grupoid** adını alır (Mackenzie, 1987). Bir başka deyişle her morfizmi izomorfizm olan kategoriye bir grupoid adı verilir.

Grupoidi oluşturan dönüşümleri aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$G_1 \times_{G_0} G_1 \xrightarrow{\circ} G_1 \xrightarrow{\eta} G_1 \xrightarrow[d_1]{d_0} G_0 \xrightarrow{\varepsilon} G_1$$

Önerme 1.4.2. Bir $\mathcal{G}$ grupoidinde $f \in G(x, y)$ morfizmi verildiğinde aşağıdaki özellikler sağlanır (Mucuk,2010).

- (i) Her $x \in G_0$ için 1_x birim morfizmi tektir.
- (ii) Her $f \in G_1$ morfizmi için f^{-1} tektir.
- (iii) $g \circ f = f$ ise $g = 1_y$ dir.
- (iv) $f \circ h = f$ ise $h = 1_x$ dir.
- (v) $g \circ f = 1_x$ ise $g = f^{-1}$ dir.
- (vi) $f \circ h = 1_y$ ise $h = f^{-1}$ dir.

Örnek 1.4.3. Objeleri bütün cümleler, morfizmleri ise birebir ve örten fonksiyonlar olarak ele alınarak elde kategori bir grupoiddir.

Örnek 1.4.4. Objeleri topolojik uzaylar, morfizmleri homeomorfizmler olan kategori bir grupoiddir.

Örnek 1.4.5. Her grup tek objeli bir grupoid oluşturur (Brown ve Loday,1987). Verilen bir G grubunda morfizmler grup elemanları olarak, grup işlemi ise kısmi bileşke işlemi olarak alınırsa G bir grupoide dönüşür.

$$* \xrightarrow{f} * \xrightarrow{g} * = * \xrightarrow{gf} *$$

Örnek 1.4.6. X herhangi bir cümle ve G bir grup olsun. $x, y, z \in X$ ve $f, g \in G$ için (x, f, y) üçlüsü x den y ye bir morfizm olarak ele alınır ve bileşke işlemi de

$$(y, g, z) \circ (x, f, y) = (x, gf, z)$$

$$x \xrightarrow{(x,f,y)} y \xrightarrow{(y,g,z)} z = x \xrightarrow{(x,gf,z)} z$$

şeklinde tanımlanırsa oluşan $(X, X \times G \times X)$ yapısı ile bir grupoid belirtir. Burada verilen (x, f, y) morfizmi için $d_0(x, f, y) = x$, $d_1(x, f, y) = y$, $1_x = (x, e, x)$ ve $\eta(x, f, y) = (y, f^{-1}, x)$ şeklinde yapı dönüşümleri tanımlanır. Bu şekilde oluşturulan grupoide **aşık grupoid** denir (Mucuk,2010; Mackenzie, 1987).

İki grupoidin kartezyen çarpımının tanımı aşağıdaki şekildedir.

Tanım 1.4.7. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ iki grupoid olsun. $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ yapısı objelerinin sınıfı $G_0 \times H_0$, morfizmlerinin sınıfı da $G_1 \times H_1$ olan bir grupoid oluşturur. Bu grupoide **çarpım**

grupoidi denir. Burada morfizmler $x \xrightarrow{g} x_1$ ve $y \xrightarrow{h} y_1$ olmak üzere $(x, y) \xrightarrow{(g, h)} (x_1, y_1)$ şeklindedir. Morfizmlerin bileşkesi ise $(g, h), (g_1, h_1) \in G_1 \times H_1$ ve $d_0(g_1) = d_1(g)$, $d_0(h_1) = d_1(h)$ olmak üzere

$$(g_1, h_1) \circ (g, h) = (g_1 \circ g, h_1 \circ h)$$

olarak tanımlıdır. Bir $(g, h) \in G_1 \times H_1$ morfizmi için $\eta(g, h) = (g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$ ve $(x, y) \in G_0 \times H_0$ objesi için birim morfizm $1_{(x, y)} = (1_x, 1_y)$ olarak tanımlanır (Mucuk,2010).

Tanım 1.4.8. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ iki grupoid olmak üzere eğer $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ in kategorileri üzerinde $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ bir fanktor ise F ye bir **grupoid morfizmi** denir (Brown,1987).

Buna göre objeleri tüm grupoidler ve morfizmleri ise grupoidler arasındaki fanktorlar olan bir kategori oluşturulur. Bu kategoriye **grupoidlerin kategorisi** denir ve **GPD** ile gösterilir (Brown,1987).

Önerme 1.4.9. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ iki grupoid olmak üzere $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ bir grupoid morfizmi olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır (Mucuk,2010).

- (i) Her $g \in G_1$ için $F(g^{-1}) = F(g)^{-1}$ dir.
- (ii) Her $g \in G_1$ morfizmi için $F^{-1}(g)$ ile $F^{-1}(g^{-1})$ izomorftur.

Tanım 1.4.10. $\mathcal{G}$ bir grupoid olmak üzere $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ nin bir alt kategorisi olsun. Her $f \in H_1$ için $f^{-1} \in H_1$ oluyorsa $\mathcal{H}$ grupoidi $\mathcal{G}$ grupoidinin **alt grupoididir** denir. $H_0 = G_0$ oluyorsa $\mathcal{H}$ grupoidine $\mathcal{G}$ grupoidinin **geniş alt grupoidi** denir (Mucuk,2010).

Tanım 1.4.11. $\mathcal{G}$ bir grupoid ve $\mathcal{N}$ de $\mathcal{G}$ nin geniş bir alt grupoidi olsun. Eğer her $x, y \in G_0$ ve her $g \in G(x, y)$ için

$$g \circ N(x) \circ g^{-1} \subseteq N(y)$$

sağlanıyorsa veya buna denk olarak

$$g \circ N(x) = N(y) \circ g$$

oluyorsa $\mathcal{N}$ ye $\mathcal{G}$ grupoidinin bir **normal alt grupoidi** denir (Mucuk,2010).

Örnek 1.4.12. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ birer grupoid olmak üzere $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ bir grupoid morfizmi olsun. O halde

$$\text{Ker}F = \{f \in G_1 \mid F(f) = 1_{d_0 F(f)}\}$$

olarak tanımlanan alt grupoid $\mathcal{G}$ nin normal alt grupoidi olup F nin çekirdeği olarak adlandırılır. Gerçekten $\mathcal{N} = \text{Ker}F$ olarak alındığında $\mathcal{G}$ nin alt grupoidi olduğu açık olup $n \in N(x)$ ve $g \in G(x, y)$ için

$$F(g \circ n \circ g^{-1}) = F(g) \circ F(n) \circ F(g^{-1}) = 1_{F(y)}$$

olup $g \circ N(x) \circ g^{-1} \subseteq N(y)$ elde edildiğinden $\mathcal{N}$ normal alt grupoiddir (Mucuk,2010).

Tanım 1.4.13. $\mathcal{G} = (G_0, G_1, d_0, d_1, \varepsilon, \eta, \circ)$ bir grupoid ve $\mathcal{N}$ de normal alt grupoid olsun. Bu durumda

$$\mathcal{G}/\mathcal{N} = (G_0, G/\mathcal{N}, d_0', d_1', \varepsilon', \eta', \circ)$$

bölüm grupoidi aşağıdaki şekilde oluşturulur.

Objelerin sınıfı $\mathcal{G}$ ile aynı obje sınıfı G_0 , $(G/\mathcal{N})(x, y) = \{g \circ N(x) \mid g \in G(x, y)\}$ olmak üzere morfizmlerin sınıfı

$$G/\mathcal{N} = \bigcup_{x, y \in G_0} (G/\mathcal{N})(x, y),$$

başlangıç dönüşümü $d_0'(g \circ N(x)) = d_0(g)$, bitiş dönüşümü $d_1'(g \circ N(x)) = d_1(g)$,

bileşke işlemi ise $\mathcal{N}$ normal olduğundan $g \in G(x, y)$ ve $h \in G(y, z)$ için

$$x \xrightarrow{N(x)} x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{N(y)} y \xrightarrow{h} z = x \xrightarrow{g \circ N(x)} y \xrightarrow{h \circ N(y)} z = x \xrightarrow{h \circ g \circ N(x)} z$$

$$h \circ N(y) \circ g \circ N(x) = h \circ g \circ N(x) \circ N(x) = h \circ g \circ N(x)$$

şeklinde, ters morfizm dönüşümü $\eta'(g \circ N(x)) = \eta(g) \circ N(y)$ ve birim morfizmi dönüşümü de $\varepsilon'(x) = 1_x \circ N(x)$ şeklinde tanımlanır. Burada $1_x \in N(x)$ olduğundan $1_x \circ N(x) = N(x)$ elde edilir (Mucuk,2010).

Tanım 1.4.14. Objeler üzerinde birim olan ve morfizmler üzerinde

$$\rho: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{N}, \quad \rho(g) = g \circ N(x)$$

şeklinde tanımlanan grupoid morfizmi **bölüm morfizmi** olarak adlandırılır (Mucuk,2010).

1.5. Çaprazlanmış Modüller

Tanım 1.5.1. M ve N birer grup, $\partial: M \rightarrow N$ dönüşümü bir grup homomorfizmi ve N nin M üzerinde (sol) etkimesi $\bullet: N \times M \rightarrow M$ olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa $(M, N, \partial, \bullet)$ dörtlüsüne gruplar üzerinde bir **çaprazlanmış modül** denir. Her $m, m_1 \in M$ ve $n \in N$ için

$$[\text{CM1}] \partial(n \bullet m) = n\partial(m)n^{-1},$$

$$[\text{CM2}] \partial(m) \bullet m_1 = mm_1m^{-1} \text{ (Whitehead, 1949; Whitehead,1946).}$$

Örnek 1.5.2. Bir G grubunun N normal altgrubu üzerindeki konjugasyon etkimesi ve

$$\partial: N \rightarrow G, \partial(n) = n$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm ile birlikte $(N, G, \partial, \bullet)$ yapısı bir çaprazlanmış modül oluşturur. Bu şekilde elde edilen yapıya **eşlenik çaprazlanmış modül** denir (Brown vd.,2011).

Önerme 1.5.3. $\mathcal{G} = (G, s, t)$ bir cat^1 -grup olsun. Bu durumda $\partial = t|_{\text{Ker } s}$ kısıtlaması ve eşlenik etkiye ile $(\text{Ker } s, s(G), \partial)$ bir çaprazlanmış modüldür. (Loday, 1982; Brown vd., 2011)

İspat : (G, s, t) bir cat^1 -grup ve $\partial = t|_{\text{Ker } s}$ olmak üzere

$$s(G) \times \text{Ker } s \rightarrow \text{Ker } s, g \bullet m = gm g^{-1}$$

eşlenik etkimesi ile $(\text{Ker } s, s(G), \partial)$ yapısının bir çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim.

[CM1] $m \in \text{Ker } s$ ve $g \in s(G)$ ele alınsın. Bu durumda $s(m_1) = g$ olacak şekilde bir $m_1 \in G$ vardır. O hâlde

$$t(g) = t(s(m_1)) = ts(m_1) = s(m_1) = g$$

olup

$$t(g \bullet m) = t(gmg^{-1}) = t(g)t(m)t(g^{-1}) = gt(m)g^{-1}$$

elde edilir.

[CM2] $m, m_1 \in \text{Ker } s$ için

$$t(m) \bullet m_1 = t(m)m_1t(m)^{-1} = t(m)m_1t(m)^{-1}mm^{-1}$$

olup

$$t(t(m^{-1})m) = tt((m^{-1}))t(m) = t(m^{-1})t(m) = t(m^{-1}m) = e$$

elde edilir. $t(m)^{-1}m \in \text{Ker } t$ ve $m_1 \in \text{Ker } s$ olduğundan

$$m_1t(m)^{-1}m = t(m)^{-1}mm_1$$

olacaktır. Buna göre

$$t(m) \bullet m_1 = t(m)m_1t(m)^{-1}mm^{-1} = t(m)t(m^{-1})mm_1m^{-1} = mm_1m^{-1}$$

elde edilir.

Tanım 1.5.4. $(M, N, \partial), (M', N', \partial')$ iki çaprazlanmış modül ve $f_1: M \rightarrow M', f_2: N \rightarrow N'$ iki grup homorfizmi olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $f = (f_1, f_2)$ ikilisine **çaprazlanmış modül morfizmi** denir ve $\langle f_1, f_2 \rangle: (M, N, \partial) \rightarrow (M', N', \partial')$ şeklinde gösterilir. (Norrie, 1990)

(i) $f_2\partial = \partial'f_1$ dir.

(ii) Her $n \in N$ ve $m \in M$ için $f_1(n \bullet m) = f_2(n) \bullet' f_1(m)$ dir.

Diyagramlar cinsinden ifade edilecek olursa

$$\begin{array}{ccccc}
N \times M & \xrightarrow{\bullet} & M & \xrightarrow{\partial} & N \\
f_2 \times f_1 \downarrow & & \wr & & \downarrow f_2 \\
N' \times M' & \xrightarrow{\bullet'} & M' & \xrightarrow{\partial'} & N'
\end{array}$$

değişmeli diyagramı çaprazlanmış modül morfizmidir. Böylece objeleri çaprazlanmış modüller, morfizmleri ise çaprazlanmış modül morfizmleri olan bir kategori oluşturulabilir. Bu kategoriye **çaprazlanmış modüllerin kategorisi** denir ve **CM** veya **XMOD** ile gösterilir (Brown ve Spencer, 1976).

Önerme 1.5.5. (M, N, ∂) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $s(n, m) = (n, e)$ ve $t(n, m) = (\partial(m)n, e)$ dönüşümleriyle $(N \ltimes M, s, t)$ bir cat^1 -gruptur (Loday, 1982; Brown vd., 2011).

İspat: İlk olarak s ve t dönüşümlerinin grup homomorfizmi olduğunu gösterelim. $n, n' \in N$ ve $m, m' \in M$ olmak üzere

$$s((n, m)(n', m')) = s(nn', m(n \bullet m')) = (nn', e) = (n, 1)(n', e) = s(n, m)s(n', m'),$$

$$\begin{aligned}
t((n, m)(n', m')) &= t(nn', m(n \bullet m')) \\
&= (\partial(m(n \bullet m'))nn', e) \\
&= (\partial(m)\partial(n \bullet m')nn', e) \\
&= (\partial(m)n\partial(m')n^{-1}nn', e) \\
&= (\partial(m)n\partial(m')n', e)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
t(n, m)t(n', m') &= (\partial(m)n, 1) \cdot (\partial(m')n', e) \\
&= (\partial(m)n\partial(m')n', 1((\partial(m)n) \bullet e)) \\
&= (\partial(m)n\partial(m')n', e)
\end{aligned}$$

olacağından $t((n, m)(n', m')) = t(n, m)t(n', m')$ elde edilir ki böylece s ve t birer grup homomorfizmidir.

[CG1] $st(n, m) = s(t(n, m)) = s(\partial(m)n, e) = (\partial(m)n, e) = t(n, m)$ olup $st = t$ ve

$ts(n, m) = t(s(n, m)) = t(n, e) = (\partial(1)n, e) = (n, e) = s(n, m)$ olup $ts = s$ elde edilir.

[CG2] $[Ker s, Ker t] = e$ olduğunu gösterelim.

$$Ker s = \{(n, m) | s(n, m) = (e, e)\} = \{(e, m) | m \in M\}$$

ve

$$Ker t = \{(n, m) | t(n, m) = (e, e)\}$$

$$= \{(n, m) | (\partial(m)n, e) = (e, e)\}$$

$$= \{(n, m) | \partial(m)n = e\}$$

olup buna göre

$$\begin{aligned} (e, m)(n_1, m_1)(e, m)^{-1}(n_1, m_1)^{-1} &= ((n_1, mm_1)(e, m^{-1}))(n_1^{-1}, n_1^{-1} \cdot m_1^{-1}) \\ &= (n_1, mm_1(n_1 \cdot m^{-1}))(n_1^{-1}, n_1^{-1} \cdot m_1^{-1}) \\ &= (n_1 n_1^{-1}, mm_1(n_1 \cdot m^{-1})(n_1 \cdot (n_1^{-1} \cdot m_1^{-1}))) \\ &= (e, mm_1(n_1 \cdot m^{-1})m_1^{-1}) \\ &= (e, m(\partial(m_1) \cdot (n_1 \cdot m^{-1}))) \\ &= (e, m(\partial(m_1)n_1 \cdot m^{-1})) \\ &= (e, m(1 \cdot m^{-1})) \\ &= (e, e) \end{aligned}$$

olacağından $[Ker s, Ker t] = e$ olur ki böylece $(N \rtimes M, s, t)$ bir cat^1 -gruptur.

Tanım 1.5.6. Cat^1 -gruplar ve Tanım 1.2.8. de verilen cat^1 -grup morfizmleri ile birlikte cat^1 -grupların kategorisi oluşturulur ve bu kategori **CAT¹-GP** ile gösterilir (Brown vd., 2011).

Teorem 1.5.7. Gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi, cat^1 -grupların kategorisine doğal olarak denktir (Loday, 1982; Brown vd., 2011).

İspat : (M, N, ∂) yapısı gruplar üzerinde bir çaprazlanmış modül olsun. Kategoriler arasında

$$\psi : \mathbf{CM} \rightarrow \mathbf{CAT}^1\text{-}\mathbf{GP} , \quad \psi(M, N, \partial) = (N \ltimes M, s, t)$$

şeklinde tanımlanan fanktor ile Önerme 1.5.5. den $(N \ltimes M, s, t)$ yapısı bir cat^1 -gruptur. $\langle f_1, f_2 \rangle : (M, N, \partial) \rightarrow (M', N', \partial')$ çaprazlanmış modül morfizmi verildiğinde aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde $\psi \langle f_1, f_2 \rangle = f_2 \times f_1$ cat^1 -grupların bir morfizmidir.

$$\begin{array}{ccc} N \ltimes M & \xrightleftharpoons[t]{s} & N \ltimes M \\ \downarrow f_2 \times f_1 & \wr & \downarrow f_2 \times f_1 \\ N' \ltimes M' & \xrightleftharpoons[t']{s'} & N' \ltimes M' \end{array}$$

Gerçekten

$$\begin{aligned} (f_2 \times f_1)s(n, m) &= (f_2 \times f_1)(n, e) \\ &= (f_2(n), f_1(e)) \\ &= (f_2(n), e) \\ &= s'(f_2(n), f_1(m)) \\ &= s'(f_2 \times f_1)(n, m) \end{aligned}$$

olup $(f_2 \times f_1)s = s'(f_2 \times f_1)$ ve

$$\begin{aligned} (f_2 \times f_1)t(n, m) &= (f_2 \times f_1)(\partial(m)n, e) \\ &= (f_2\partial(m)f_2(n), e) \\ &= (\partial'f_1(m)f_2(n), e) \\ &= t'(f_2(n), f_1(m)) \end{aligned}$$

$$= t'(f_2 \times f_1)(n, m)$$

olup $(f_2 \times f_1)t = t'(f_2 \times f_1)$ olduğu görülür. Diğer taraftan (G, s, t) bir cat^1 -grubu verildiğinde kategoriler arasında

$$\gamma : \mathbf{CAT}^1\text{-GP} \rightarrow \mathbf{CM} , \gamma(G, s, t) = (Ker s, s(G), \partial)$$

şeklinde tanımlanan fanktor ile Önerme 1.5.3. den $(Ker s, s(G), \partial)$ bir çaprazlanmış modüldür. Cat^1 -grupların bir $f: (G, s, t) \rightarrow (G', s', t')$ morfizmi verildiğinde aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde $\gamma(f) = \langle f, f \rangle$ çaprazlanmış modüllerin bir morfizmidir.

$$\begin{array}{ccccc} s(G) \times Ker s & \xrightarrow{\bullet} & Ker s & \xrightarrow{\partial} & s(G) \\ f \times f \downarrow & & f \downarrow & \wr & \downarrow f \\ s(G') \times Ker s' & \xrightarrow{\bullet'} & Ker s' & \xrightarrow{\partial'} & s(G') \end{array}$$

Gerçekten $m \in Ker s$ ve $g \in s(G)$ için $f(m) \in Ker s'$ ve $f(g) \in s(G')$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(g \bullet m) &= f(gmg^{-1}) \\ &= f(g)f(m)f(g^{-1}) \\ &= f(g)f(m)f(g)^{-1} \\ &= f(g) \bullet' f(m) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f\partial(g \bullet m) &= f\partial(gmg^{-1}) \\ &= f(gmg^{-1}) \\ &= f(g)f(m)f(g)^{-1} \\ &= \partial'(f(g) \bullet f(m)) \\ &= \partial'f(g \bullet m) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi bu fanktorlar arasında doğal dönüşümleri tanımlayalım.

$$S: 1_{\text{CAT}^1 - \text{GP}} \rightarrow \psi \gamma, \quad S_G(G, s, t) = (s(G) \ltimes \text{Ker } s, s', t')$$

ve $g \in G$ için

$$S_G(g) = (s(g), gs(g^{-1}))$$

şeklinde tanımlanır. Burada $s'(n, m) = (n, e)$ ve $t'(n, m) = (\partial(m)n, e)$ olup $g, g_1 \in G$ için

$$S_G(g_1 g) = (s(g_1 g), g_1 g s(g_1 g)^{-1}) = (s(g_1) s(g), g_1 g s(g^{-1}) s(g_1^{-1}))$$

ve

$$\begin{aligned} S_G(g_1) S_G(g) &= (s(g_1), g_1 s(g_1^{-1})) (s(g), gs(g^{-1})) \\ &= \left(s(g_1) s(g), g_1 s(g_1^{-1}) (s(g_1) \bullet (gs(g^{-1}))) \right) \\ &= (s(g_1) s(g), g_1 s(g_1^{-1}) s(g_1) gs(g^{-1}) s(g_1^{-1})) \\ &= (s(g_1) s(g), g_1 gs(g^{-1}) s(g_1^{-1})) \end{aligned}$$

olduğundan S bir grup homomorfizmidir. Ayrıca doğal dönüşümün birebir ve örten olduğu açıktır. Diğer yandan $\mathcal{C} = (M, N, \partial)$ için

$$T: 1_{\text{CM}} \rightarrow \gamma \psi, \quad T_{\mathcal{C}}(M, N, \partial) = (N \ltimes M, s, t)$$

olup $T_{\mathcal{C}}(n) = (n, e)$ ve $T_{\mathcal{C}}(m) = (e, m)$ şeklinde tanımlanır. $n_1, n \in N$ için

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{C}}(n_1) T_{\mathcal{C}}(n) &= (n_1, e)(n, e) \\ &= (n_1 n, e(n_1 \bullet e)) \\ &= (n_1 n, e) \\ &= T_{\mathcal{C}}(n_1 n) \end{aligned}$$

ve $m_1, m \in M$ için

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{C}}(m_1) T_{\mathcal{C}}(m) &= (e, m_1)(e, m) \\ &= (e, m_1(e \bullet m)) \end{aligned}$$

$$= (e, m_1 m)$$

$$= T_c(m_1 m)$$

olup T_c grup işlemlerini korur. Ayrıca doğal dönüşümün birebir ve örten olduğu açıktır. O hâlde kategoriler doğal olarak denktir.

1.6. Grupoidler Üzerindeki Çaprazlanmış Modüller

Grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modülleri tanımlamak için öncelikle bir grupoidin tamamen bağlantısız bir grupoid üzerine etkimesini tanımlamalıyız. Bir $\mathcal{G}$ grupoidinde her x, y objesi için $G(x, y) = \emptyset$ ise bu grupoide **tamamen bağlantısız grupoid** denir. Tezin bundan sonraki kısmında tüm grupoidler aynı obje sınıfı üzerinde tanımlı olduğundan bu obje sınıfını X ile göstereceğiz. Grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüller, gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin daha genel bir hali olup, buradaki grupoidler tek objeli olarak ele alındığında gruplar üzerindeki çaprazlanmış modül yapısı elde edilir.

Tanım 1.6.1. $\mathcal{G} = (X, G)$ ve $\mathcal{H} = (X, H)$ aynı obje sınıfı üzerinde birer grupoid ve $\mathcal{H}$ tamamen bağlantısız grupoid olsun. Bir $\mathcal{G}$ grupoidinin $\mathcal{H}$ **grupoidi üzerine etkimesi** aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$\bullet: G \times H \rightarrow H, (g, h) \mapsto g \bullet h$$

dönüşümüdür (Brown ve İçen, 2003; İçen, 2000). Her $g, g_1, g_2 \in G$ ve $h, h_1, h_2 \in H$ için

- (i) $g \bullet h$ tanımlıdır $\Leftrightarrow d_1(h) = d_0(g)$ ve $d_1(g \bullet h) = d_1(g)$,
- (ii) $(g_2 \circ g_1) \bullet h = g_2 \bullet (g_1 \bullet h)$,
- (iii) $g \in G(x, y)$ ve $h_1, h_2 \in H(x)$ için $g \bullet (h_2 \circ h_1) = (g \bullet h_2) \circ (g \bullet h_1)$,
- (iv) $h \in H(x)$ için $1_x \bullet h = h$.

Ayrıca bir $g \in G(x, y)$ morfizmi için $g \bullet 1_x = 1_y$ olduğu yukarıdaki özelliklerden kolayca elde edilir.

Tanım 1.6.2. $\mathcal{G} = (X, G)$ ve $\mathcal{H} = (X, H)$ aynı obje kümesi üzerinde birer grupoid ve $\mathcal{H}$ tamamen bağlantısız olsun. O halde $\partial = (1, \partial): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ dönüşümü objeler üzerinde sabit olan bir grupoid morfizmi ve verilen $\bullet: G \times H \rightarrow H$ etkimesi ile aşağıdaki özellikleri sağlayan $K = (\mathcal{H}, \mathcal{G}, \partial, \bullet)$ dörtlüsüne **grupoidler üzerinde çaprazlanmış modül** denir. Burada her $h, h_1 \in H(x)$ ve $g \in G(x, y)$ olmak üzere

$$[\text{CMG1}] \partial(g \bullet h) = g \circ \partial(h) \circ g^{-1},$$

$$[\text{CMG2}] \partial(h) \bullet h_1 = h \circ h_1 \circ h^{-1} \text{ dir (Brown ve Icen, 2003).}$$

Tanım 1.6.3. $K = (\mathcal{H}, \mathcal{G}, \partial, \bullet)$ ve $K' = (\mathcal{H}', \mathcal{G}', \partial', \bullet')$ grupoidler üzerinde birer çaprazlanmış modül olsunlar. $(\lambda_0, \lambda_1): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ ve $(\lambda_0, \lambda_2): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ grupoid morfizmleri olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2): K \rightarrow K'$ üçlüsüne **grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modül morfizmi** denir (Brown ve İçen, 2003; İçen, 2000).

$$(i) \lambda_2 \partial = \partial' \lambda_1$$

$$(ii) \lambda_1(g \bullet h) = \lambda_2(g) \bullet' \lambda_1(h)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G} \times \mathcal{H} & \xrightarrow{\bullet} & \mathcal{H} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{G} \\ \lambda_2 \times \lambda_1 \downarrow & & \lambda_1 \downarrow & \wr & \downarrow \lambda_2 \\ \mathcal{G}' \times \mathcal{H}' & \xrightarrow{\bullet'} & \mathcal{H}' & \xrightarrow{\partial'} & \mathcal{G}' \end{array}$$

Böylece objeleri grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüller ve morfizmleri de grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modül morfizmleri ile birlikte elde edilen kategori **CMG** ile gösterilir.

Tanım 1.6.4. $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \partial)$ yapısı grupoidler üzerindeki bir çaprazlanmış modül olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \sigma)$ yapısına $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \partial)$ çaprazlanmış modülünün bir **alt çaprazlanmış modülü** denir (Mucuk ve Demir, 2018). $Y \subseteq X$ olmak üzere

$$[\text{SCMG1}] \mathcal{M} = (Y, M), \mathcal{A} = (X, A) \text{ nın bir alt grupoididir.}$$

$$[\text{SCMG2}] \mathcal{N} = (Y, N), \mathcal{B} = (X, B) \text{ nın bir alt grupoididir.}$$

$$[\text{SCMG3}] \sigma, \partial \text{ nin } M \text{ ye kısıtlamasıdır.}$$

[SCMG4] $\mathcal{N}$ nin $\mathcal{M}$ üzerine etkimesi, $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{A}$ üzerine etkimesinin kısıtlamasıdır.

Eğer $X = Y$ ise $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \sigma)$ yapısı $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \partial)$ çaprazlanmış modülünün **geniş alt çaprazlanmış modülü** denir.

Tanım 1.6.5. $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \sigma)$ yapısı $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \partial)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \sigma)$ yapısına $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \partial)$ çaprazlanmış modülünün **normal alt çaprazlanmış modülü** denir (Mucuk ve Demir, 2018).

[NCMG1] $\mathcal{N}, \mathcal{B}$ nin normal alt grupoididir.

[NCMG2] $b \in B(x, y), m \in M(x)$ olmak üzere $b \bullet m \in M(y)$ dir.

[NCMG3] $n \in N(x), a \in A(x)$ olmak üzere $(n \bullet a) \circ a^{-1} \in M(x)$ dir.

Burada [NCMG2] den $\partial(a) \bullet m = a \circ m \circ a^{-1} \in M$ olup $\mathcal{M}, \mathcal{A}$ nin normal alt grupoididir.

Teorem 1.6.6. $\mathcal{N}$ tamamen bağlantısız olmak üzere $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \sigma)$ yapısı $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \partial)$ çaprazlanmış modülünün normal alt çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda $(\mathcal{A}/\mathcal{M}, \mathcal{B}/\mathcal{N}, \rho)$ üçlüsü grupoidler üzerinde bir çaprazlanmış modül oluşturur. Bu çaprazlanmış modül **bölüm çaprazlanmış modülü** olarak adlandırılır (Mucuk ve Demir, 2018).

İspat : Objeler üzerinde birim olan

$$\rho_1: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M}, \rho_1(a) = a \circ M(d_0(a))$$

$$\rho_2: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{N}, \rho_2(b) = b \circ N(d_0(b))$$

bölüm morfizmleri ile $\rho: \mathcal{A}/\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{N}$ grupoid morfizmini aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde tanımlayalım.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho_1} & A/M \\ \partial \downarrow & & \downarrow \rho \\ B & \xrightarrow{\rho_2} & B/N \end{array}$$

Burada her $b \in B(x, y)$ ve $a \in A(x)$ için B/N nın A/M üzerindeki etkimesi

$$B/N \times A/M \rightarrow A/M,$$

$$(b \circ N(x), a \circ M(x)) \mapsto (b \circ N(x)) \bullet (a \circ M(x)) = (b \bullet a) \circ M(y)$$

şeklinde tanımlanır. $n_x \in N(x)$ ve $m_x \in M(x)$ için

$$\begin{aligned} (b \circ n_x) \bullet (a \circ m_x) &= ((b \circ n_x) \bullet a) \circ ((b \circ n_x) \bullet m_x) \\ &= (b \bullet (n_x \bullet a)) \circ (b \bullet (n_x \bullet m_x)) \end{aligned}$$

olur ki buradan $n_x \bullet a = a'$ ve $n_x \bullet m_x = m'_x$ olup NCMG2 den $b \bullet m'_x = m_y \in M(y)$ ve böylece

$$(b \circ n_x) \bullet (a \circ m_x) = (b \bullet a') \circ m_y$$

elde edilir. O hâlde etkiye işlemi iyi tanımlıdır. Yukarıdaki diyagramdan $\rho \rho_1 = \rho_2 \partial$ olduğundan ρ dönüşümü, her $a \in A$ için

$$\rho \rho_1(a) = \rho(a \circ M(x))$$

ve

$$\rho_2 \partial(a) = \rho_2(\partial(a)) = \partial(a) \circ N(x)$$

olup $\rho(a \circ M(x)) = \partial(a) \circ N(x)$ şeklinde olacaktır. Şimdi $(\mathcal{A}/\mathcal{M}, \mathcal{B}/\mathcal{N}, \rho)$ üçlüsünün grupoidler üzerinde bir çaprazlanmış modül oluşturduğunu gösterelim.

[CMG1] $b \in B(x, y)$ ve $a \in A(x)$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} \rho \left((b \circ N(x)) \bullet (a \circ M(x)) \right) &= \rho \left((b \bullet a) \circ M(y) \right) \\ &= \partial(b \bullet a) \circ N(y) \\ &= (b \circ \partial(a) \circ b^{-1}) \circ N(y) \end{aligned}$$

ve

$$(b \circ N(x)) \circ \rho(a \circ M(x)) \circ (b \circ N(x))^{-1} = b \circ N(x) \circ \partial(a) \circ N(x) \circ b^{-1} \circ N(y)$$

$$= (b \circ \partial(a)) \circ N(x) \circ b^{-1} \circ N(y)$$

$$= (b \circ \partial(a) \circ b^{-1}) \circ N(y)$$

olup $\rho \left((b \circ N(x)) \bullet (a \circ M(x)) \right) = b \circ N(x) \circ \rho(a \circ M(x)) \circ (b \circ N(x))^{-1}$ dir.

[CMG2] $a, a_1 \in A(x)$ olsun. O hâlde

$$\rho(a \circ M(x)) \bullet (a_1 \circ M(x)) = (\partial(a) \circ N(x)) \bullet (a_1 \circ M(x))$$

$$= (\partial(a) \bullet a_1) \circ M(y)$$

$$= (a \circ a_1 \circ a^{-1}) \circ M(y)$$

ve

$$(a \circ M(x)) \circ (a_1 \circ M(x)) \circ (a \circ M(x))^{-1} = (a \circ a_1 \circ M(x)) \circ (a^{-1} \circ M(y))$$

$$= (a \circ a_1 \circ a^{-1}) \circ M(y)$$

için $\rho(a \circ M(x)) \bullet (a_1 \circ M(x)) = (a \circ M(x)) \circ (a_1 \circ M(x)) \circ (a \circ M(x))^{-1}$ dir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde (Temel, 2020) kaynağında tanımlanan cat^1 -grupoidlerin temel özellikleri incelenmiş ve cat^1 -grupoidlerin kategorisinin grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisine doğal olarak denk olduğu ispatlanmıştır. Bu denklik cat^1 -gruplarla gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorileri arasındaki doğal denkliğin grupoidlere genişletilmesidir. Ayrıca yine (Temel, 2020) kaynağında verildiği gibi alt cat^1 -grupoid ve normal alt cat^1 -grupoid yapıları tanımlanarak bu yapıların grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin normal yapılarına nasıl karşılık geldiği, cat^1 -grupoidler ile grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüller arasındaki doğal kategorik denkliğin bir uygulaması olarak incelenmiştir.

2.1. Cat¹-Grupoidler

Tanım 2.1.1. Bir $\mathcal{G} = (X, G)$ grupoidi ve objeler üzerinde birim olan $\sigma, \tau: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ fanktorları verilsin. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ üçlüsüne bir **cat¹-grupoid** denir (Temel, 2020).

[C1Gd1] $\sigma\tau = \tau$ ve $\tau\sigma = \sigma$ dir.

[C1Gd2] Her $h \in Ker(\sigma)$ ve her $k \in Ker(\tau)$ için $d_0(k) = d_0(h)$ olmak üzere

$$h \circ k \circ h^{-1} \circ k^{-1} = \varepsilon d_0(h) \text{ dir.}$$

Burada $Ker(\sigma) = \{g \in G | \sigma(g) = \varepsilon d_0(g)\}$ ve $Ker(\tau) = \{g \in G | \tau(g) = \varepsilon d_0(g)\}$ olup aynı obje cümlesi X üzerinde $\mathcal{G}$ grupoidinin geniş alt grupoidi olurlar. Ayrıca bu alt grupoidler tamamen bağlantısız alt grupoidlerdir. Böylece $Ker(\sigma)$ alt grupoidi ve $h, h_1 \in Ker(\sigma)$ için $h \circ h_1 \circ h^{-1} \circ h_1^{-1} = \varepsilon d_0(h)$ elde edilir

Örnek 2.1.2. Her cat¹-grup, tek objeli bir cat¹-grupoid olarak ele alınabilir (Temel, 2020).

Önerme 2.1.3. (G, s, t) bir cat¹-grup, X bir cümle ve $\mathcal{G} = (X, X \times G \times X)$ aşıkarp grupoid olsun. Bu durumda $\sigma, \tau: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, $\sigma(x, g, y) = (x, s(g), y)$ ve $\tau(x, g, y) = (x, t(g), y)$ dönüşümleri ile birlikte $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ bir cat¹-grupoiddir (Temel, 2020).

İspat: İlk olarak σ ve τ nın birer fanktor olduğunu gösterelim. Her $x, y, z \in X$, $g, h \in G$ için

$$x \xrightarrow{(x,g,y)} y \xrightarrow{(y,h,z)} z = x \xrightarrow{(x,hg,z)} z$$

olduğundan

$$\tau((y, h, z) \circ (x, g, y)) = \tau(x, hg, z) = (x, t(hg), z) = (x, t(h)t(g), z)$$

ve

$$\tau(y, h, z) \circ \tau(x, g, y) = (y, t(h), z) \circ (x, t(g), y) = (x, t(h)t(g), z)$$

olup bileşke işlemi korunur.

$1_x = (x, e, x)$ olup

$$\tau(1_x) = \tau(x, e, x) = (x, t(e), x) = (x, e, x) = 1_{\tau(x, e, x)}$$

olup τ bir fanktordur. Benzer şekilde σ nında fanktor olduğu gösterilebilir. Şimdi $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ nin cat^1 -grupoid özelliklerini sağladığını gösterelim.

$$[\text{C1Gd1}] \quad \sigma\tau(x, g, y) = \sigma(x, t(g), y)$$

$$= (x, s(t(g)), y)$$

$$= (x, st(g), y)$$

$$= (x, t(g), y)$$

$$= \tau(x, g, y)$$

ve

$$\tau\sigma(x, g, y) = \tau(x, s(g), y)$$

$$= (x, t(s(g)), y)$$

$$= (x, ts(g), y)$$

$$= (x, s(g), y)$$

$$= \sigma(x, g, y)$$

elde edilir.

[C1Gd2] $\text{Ker}(\sigma) = \{(x, g, y) \in X \times G \times X \mid \sigma(x, g, y) = 1_x\}$ olduğundan $(x, s(g), y) = (x, e, x)$ olup buradan $s(g) = e$ ve böylece $g \in \text{Ker } s$ bulunur. Benzer şekilde $\text{Ker}(\tau) = \{(x, h, y) \in X \times G \times X \mid \tau(x, h, y) = 1_x\}$ için $h \in \text{Ker } t$ bulunur. (G, s, t) bir cat^1 -grup olduğundan $ghg^{-1}h^{-1} = e$ dir. Buradan her $(x, g, x) \in \text{Ker}(\sigma)$ ve $(x, h, x) \in \text{Ker}(\tau)$ için $(x, g, x)^{-1} = (x, g^{-1}, x)$ olduğundan

$$(x, g, x) \circ (x, h, x) \circ (x, g, x)^{-1} \circ (x, h, x)^{-1} = (x, ghg^{-1}h^{-1}, x) = (x, e, x) = 1_x$$

olup $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ bir cat^1 -grupoiddir.

Önerme 2.1.4. Herhangi bir $\mathcal{G} = (G, \sigma, \tau)$ cat^1 -grupoid için aşağıdaki özellikler sağlanır (Temel, 2020).

- (i) $\sigma(G) = \tau(G)$
- (ii) $\sigma^2 = \sigma$ ve $\tau^2 = \tau$
- (iii) σ ve τ fanktorları $\sigma(G)$ ve $\tau(G)$ üzerinde birimdir.

İspat:

- (i) $\sigma\tau = \tau$ olduğundan $\text{Im } \tau \subseteq \text{Im } \sigma$ dir. Benzer şekilde $\tau\sigma = \sigma$ olacağından $\text{Im } \sigma \subseteq \text{Im } \tau$ olup $\sigma(G) = \tau(G)$ elde edilir.
- (ii) $\tau\sigma = \sigma$ olduğundan $\sigma^2 = \sigma\sigma = \sigma\tau\sigma = \sigma$ ve benzer şekilde $\tau^2 = \tau\tau = \tau\sigma\tau = \tau$ elde edilir.
- (iii) $g \in \sigma(G)$ için $g = \sigma(h)$ olacak şekilde $\exists h \in G$ vardır. Buradan

$$\sigma(g) = \sigma(\sigma(h)) = \sigma\sigma(h) = \sigma(h) = g$$

olup σ , $\sigma(G)$ üzerinde birim dönüşümdür. Benzer şekilde τ dönüşümü de $\tau(G)$ üzerinde birim dönüşümü olduğu açıktır.

Tanım 2.1.5 $\mathcal{G} = (G, \sigma, \tau)$ ve $\mathcal{G}' = (G', \sigma', \tau')$ cat^1 -grupoid olmak üzere $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ grupoid morfizmi olsun. Eğer

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightleftharpoons[\tau]{\sigma} & \mathcal{G} \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{G}' & \xrightleftharpoons[\tau']{\sigma'} & \mathcal{G}' \end{array}$$

diyagramı değişmeli, yani $\sigma'f = f\sigma$ ve $\tau'f = f\tau$ oluyorsa f ye **cat^1 -grupoid morfizmi** denir. Böylece cat^1 -grupoidlerin kategorisi oluşturulur ve **CAT¹-GPD** ile gösterilir (Temel, 2020).

Teorem 2.1.7. Cat¹-grupoidlerin kategorisi, grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisine doğal olarak denktir (Temel, 2020).

İspat: Grupoidler üzerindeki $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \partial)$ çaprazlanmış modülü ele alınsın. Morfizmlerin sınıfı $G = B \ltimes A = \{(b, a) | b \in B, a \in A, d_1(b) = d_0(a) = d_1(a)\}$ olan $\mathcal{G}$ grupoidi $\sigma(b, a) = (b, \varepsilon d_0(a))$ ve $\tau(b, a) = (\partial(a) \circ b, \varepsilon d_0(a))$ şeklinde tanımlı dönüşümlerle

bir cat^1 -grupoiddir. Buna göre $\psi: \mathbf{CMG} \rightarrow \mathbf{CAT}^1\text{-GPD}$, $\psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \partial) = (\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ şeklinde tanımlı fanktor kategorilerin denkliğidir. Burada $x \xrightarrow{b} y$ ve $y \xrightarrow{a} z$ sırasıyla B ve A nın morfizmleri olduğunda (b, a) da aşağıda gösterilen şekilde $\mathcal{G}$ nin bir morfizmidir.

$$x \xrightarrow{b} y \xrightarrow{a} z = x \xrightarrow{(b,a)} z$$

Yapı dönüşümlerini $d_0(b, a) = d_0(b)$, $d_1(b, a) = d_1(a)$, $\varepsilon(x) = (1_x, 1_x)$, $\eta(b, a) = (b^{-1}, b^{-1} \bullet a^{-1})$ olarak tanımlayalım. Bu durumda morfizmlerinin bileşke işlemi

$$x \xrightarrow{b} y \xrightarrow{a} z \xrightarrow{b_1} w \xrightarrow{a_1} z$$

olduğunda

$$(b_1, a_1) \circ (b, a) = (b_1 \circ b, a_1 \circ (b_1 \bullet a))$$

şeklinde tanımlanır.

$$x \xrightarrow{(b,a)} y \xrightarrow{(b_1,a_1)} z = x \xrightarrow{(b_1,a_1) \circ (b,a)} z$$

Şimdi $\sigma(b, a) = (b, \varepsilon d_0(a))$ için σ nun bir fanktor olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \sigma((b_1, a_1) \circ (b, a)) &= \sigma(b_1 \circ b, a_1 \circ (b_1 \bullet a)) \\ &= (b_1 \circ b, \varepsilon d_0(a_1 \circ (b_1 \bullet a))) \\ &= (b_1 \circ b, 1_x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sigma(b_1, a_1) \circ \sigma(b, a) &= (b_1, \varepsilon d_0(a_1)) \circ (b, \varepsilon d_0(a)) \\ &= (b_1 \circ b, \varepsilon d_0(a_1) \circ (b_1 \bullet \varepsilon d_0(a))) \\ &= (b_1 \circ b, 1_x) \end{aligned}$$

olup $\sigma((b_1, a_1) \circ (b, a)) = \sigma(b_1, a_1) \circ \sigma(b, a)$ elde edilir. Ayrıca $\varepsilon(x) = (1_x, 1_x)$ için

$$\sigma(1_x, 1_x) = (1_x, 1_x) = 1_{\sigma(1_x, 1_x)}$$

olacağından σ bir fanktordur. Benzer şekilde $\tau(b, a) = (\partial(a) \circ b, \varepsilon d_0(a))$ için

$$\begin{aligned}
\tau((b_1, a_1) \circ (b, a)) &= \tau(b_1 \circ b, a_1 \circ (b_1 \bullet a)) \\
&= (\partial(a_1 \circ (b_1 \bullet a)) \circ (b_1 \circ b), \varepsilon d_0(a_1 \circ (b_1 \bullet a))) \\
&= (\partial(a_1) \circ \partial(b_1 \bullet a)) \circ (b_1 \circ b), \varepsilon d_0(a_1 \circ (b_1 \bullet a))) \\
&= (\partial(a_1) \circ b_1 \circ \partial(a) \circ b_1^{-1} \circ (b_1 \circ b), \varepsilon d_0(a_1 \circ (b_1 \bullet a))) \\
&= (\partial(a_1) \circ b_1 \circ \partial(a) \circ b, \varepsilon d_0(a_1 \circ (b_1 \bullet a))) \\
&= (\partial(a_1) \circ b_1 \circ \partial(a) \circ b, 1_x)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tau(b_1, a_1) \circ \tau(b, a) &= ((\partial(a_1) \circ b_1), \varepsilon d_0(a_1)) \circ (\partial(a) \circ b, \varepsilon d_0(a))) \\
&= ((\partial(a_1) \circ b_1) \circ (\partial(a) \circ b), \varepsilon d_0(a_1) \circ ((\partial(a_1) \circ b)) \bullet (\varepsilon d_0(a))) \\
&= ((\partial(a_1) \circ b_1) \circ (\partial(a) \circ b), 1_x)
\end{aligned}$$

olup $\tau((b_1, a_1) \circ (b, a)) = \tau(b_1, a_1) \circ \tau(b, a)$ elde edilir. Ayrıca $\varepsilon(x) = (1_x, 1_x)$ için

$$\tau(1_x, 1_x) = (1_x, 1_x) = 1_{\tau(1_x, 1_x)}$$

olacağından τ bir fanktordur. Şimdi de $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ yapısının cat^1 -grupoid şartlarını sağladığını gösterelim.

$$\textbf{[C1Gd1]} \quad \tau\sigma(b, a) = \tau(b, \varepsilon d_0(a))$$

$$\begin{aligned}
&= (\partial(\varepsilon d_0(a)) \circ b, \varepsilon d_0(\varepsilon d_0(a))) \\
&= (b, \varepsilon d_0(a)) \\
&= \sigma(b, a)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sigma\tau(b, a) &= \sigma(\partial(a) \circ b, \varepsilon d_0(a)) \\
&= (\partial(a) \circ b, \varepsilon d_0(\varepsilon d_0(a))) \\
&= (\partial(a) \circ b, \varepsilon d_0(a)) \\
&= \tau(b, a)
\end{aligned}$$

elde edilir.

[C1Gd2] Her $(b_1, a_1) \in \text{Ker}(\sigma)$ ve $(b, a) \in \text{Ker}(\tau)$ için $d_0(b, a) = d_0(b_1, a_1)$ olmak üzere $(b_1, a_1) \circ (b, a) \circ (b_1, a_1)^{-1} \circ (b, a)^{-1} = \varepsilon d_0(b_1, a_1)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\sigma) &= \{(b_1, a_1) \in \mathcal{G} \mid \sigma(b_1, a_1) = \varepsilon d_0(b_1, a_1)\} \\
&= \{(b_1, a_1) \in \mathcal{G} \mid (b_1, \varepsilon d_0(a_1)) = \varepsilon d_0(b_1, a_1)\} \\
&= \{(b_1, a_1) \in \mathcal{G} \mid (b_1, 1_x) = \varepsilon d_0(b_1) = \varepsilon(x)\} \\
&= \{(b_1, a_1) \in \mathcal{G} \mid (b_1, 1_x) = (1_x, 1_x)\} \\
&= \{(1_x, a_1) \in \mathcal{G} \mid a_1 \in A\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\tau) &= \{(b, a) \in \mathcal{G} \mid \tau(b, a) = \varepsilon d_0(b, a)\} \\
&= \{(b, a) \in \mathcal{G} \mid (\partial(a) \circ b, \varepsilon d_0(a)) = (1_x, 1_x)\} \\
&= \{(b, a) \in \mathcal{G} \mid \partial(a) \circ b = 1_x\}
\end{aligned}$$

olup $(1_x, a_1) \in \text{Ker}(\sigma)$ ve $\partial(a) \circ b = 1_x$ için $(b, a) \in \text{Ker}(\tau)$ ele alınsın. O halde

$$\begin{aligned}
(1_x, a_1) \circ (b, a) \circ (1_x, a_1)^{-1} \circ (b, a)^{-1} \\
&= (1_x b, a_1(1_x \bullet a)) \circ (1_x^{-1}, 1_x^{-1} \bullet a_1^{-1}) \circ (b, a)^{-1} \\
&= (b, a_1 a) \circ (1_x^{-1}, a_1^{-1}) \circ (b^{-1}, b^{-1} \bullet a^{-1}) \\
&= (b 1_x^{-1}, a_1 a(b \bullet a_1^{-1})) \circ (b^{-1}, b^{-1} \bullet a^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (bb^{-1}, a_1 a(b \bullet a_1^{-1})(b \bullet (b^{-1} \bullet a^{-1}))) \\
&= (1_x, a_1 a(b \bullet a_1^{-1})((bb^{-1}) \bullet a^{-1})) \\
&= (1_x, a_1 a(b \bullet a_1^{-1})a^{-1}) \\
&= (1_x, a_1(\partial(a) \bullet (b \bullet a_1^{-1}))) \\
&= (1_x, a_1(\partial(a)b \bullet a_1^{-1})) \\
&= (1_x, a_1(1_x \bullet a_1^{-1})) \\
&= (1_x, a_1 a_1^{-1}) \\
&= (1_x, 1_x)
\end{aligned}$$

olacağından

$$(b_1, a_1) \circ (b, a) \circ (b_1, a_1)^{-1} \circ (b, a)^{-1} = \varepsilon d_0(b_1, a_1)$$

olup $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ üçlüsü bir cat^1 -grupoiddir.

Şimdi ψ nın zayıf bir tersi olarak $\gamma: \mathbf{CAT}^1\text{-GPD} \rightarrow \mathbf{CMG}$ fanktorunu tanımlayalım. $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ cat^1 -grupoidi verildiğinde $\gamma(\mathcal{G}, \sigma, \tau) = (\text{Ker}(\sigma), \sigma(G), \partial)$ yapısı konjugasyon etkimesi ve $\partial = \tau|_{\text{Ker}(\sigma)}$ kısıtlaması ile grupoidler üzerindeki bir çaprazlanmış modül olur.

[CMG1] $g \in \sigma(G)$ için Önerme 2.1.4. den dolayı $\tau(g) = g$ olduğundan

$$\tau(g \bullet h) = \tau(g \circ h \circ g^{-1}) = \tau(g) \circ \tau(h) \circ \tau(g^{-1}) = g \circ \tau(h) \circ g^{-1}$$

elde edilir.

$$\mathbf{[CMG2]} \tau(h) \bullet h_1 = \tau(h) \circ h_1 \circ \tau(h)^{-1} = \tau(h) \circ h_1 \circ \tau(h^{-1}) \circ h \circ h^{-1}$$

olup $\tau(h^{-1}) \circ h \in \text{Ker}(\tau)$ ve $h_1 \in \text{Ker}(\sigma)$ olduğundan değişmelidir. O halde

$$\tau(h) \bullet h_1 = \tau(h) \circ \tau(h^{-1}) \circ h \circ h_1 \circ h^{-1} = h \circ h_1 \circ h^{-1}$$

elde edilir.

$S: 1_{\mathbf{CAT}^1\text{-GPD}} \rightarrow \psi \gamma$ doğal dönüşümü, objeler üzerinde birim olan ve $g \in G$ için morfizmler üzerinde

$$S_{\mathcal{G}}(g) = (\sigma(g), g \circ \sigma(g^{-1}))$$

şeklinde tanımlı

$$S_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}, \sigma, \tau) = ((X, \sigma(G) \ltimes \text{Ker}(\sigma)), \sigma', \tau')$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada

$$\sigma'(g, h) = (g, \varepsilon d_0(h))$$

ve

$$\tau'(g, h) = (\tau(h) \circ g, \varepsilon d_0(h))$$

şeklindedir. Buna göre

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{G}}(g_1 \circ g) &= (\sigma(g_1 \circ g), g_1 \circ g \circ \sigma(g_1 \circ g)^{-1}) \\ &= (\sigma(g_1) \circ \sigma(g), g_1 \circ g \circ \sigma(g^{-1}) \circ \sigma(g_1^{-1})) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{G}}(g_1) \circ S_{\mathcal{G}}(g) &= (\sigma(g_1), g_1 \circ \sigma(g_1^{-1})) \circ (\sigma(g), g \circ \sigma(g^{-1})) \\ &= \left(\sigma(g_1) \circ \sigma(g), g_1 \circ \sigma(g_1^{-1}) \circ (\sigma(g_1) \bullet (g \circ \sigma(g^{-1}))) \right) \\ &= (\sigma(g_1) \circ \sigma(g), g_1 \circ \sigma(g_1^{-1}) \circ \sigma(g_1) \circ g \circ \sigma(g^{-1}) \circ \sigma(g_1^{-1})) \\ &= (\sigma(g_1) \circ \sigma(g), g_1 \circ g \circ \sigma(g^{-1}) \circ \sigma(g_1^{-1})) \end{aligned}$$

olup $S_{\mathcal{G}}$ dönüşümünün bileşke işlemini koruduğu görülür.

Diğer taraftan $T: 1_{\mathbf{CMG}} \rightarrow \gamma\psi$ doğal dönüşümü, $\mathcal{C} = (\mathcal{B}, \mathcal{A}, \partial)$ grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modül olmak üzere, objeler üzerinde birim olan ve morfizmler üzerinde

$$T_{\mathcal{C}}(a) = (\varepsilon d_1(a), a), T_{\mathcal{C}}(b) = (b, \varepsilon d_1(b))$$

olacak şekilde tanımlı

$$T_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \partial) = (B \ltimes A, \sigma, \tau)$$

dönüşümü ile tanımlanır. Buna göre $x \xrightarrow{b} y \xrightarrow{b_1} z$ için

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{C}}(b_1) \circ T_{\mathcal{C}}(b) &= (b_1, 1_z) \circ (b, 1_y) \\ &= (b_1 \circ b, 1_z \circ (b_1 \bullet 1_y)) \\ &= (b_1 \circ b, 1_z \circ 1_y) \\ &= T_{\mathcal{C}}(b_1 \circ b) \end{aligned}$$

ve $x \xrightarrow{a} x \xrightarrow{a_1} x$ için

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{C}}(a_1) \circ T_{\mathcal{C}}(a) &= (1_x, a_1) \circ (1_x, a) \\ &= (1_x \circ 1_x, a_1 \circ (1_x \bullet a)) \\ &= (1_x, a_1 \circ a) \\ &= T_{\mathcal{C}}(a_1 \circ a) \end{aligned}$$

olup $T_{\mathcal{C}}$ bileşke işlemini korur. O hâlde kategoriler doğal olarak denktirler.

Grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisinin, 2-grupoidlerin kategorisine doğal olarak denk olduğu (İçen, 2000) kaynağında ispat edilmiştir. Ayrıca (Aytekin, 2020) kaynağında ise grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisinin, simplisel grupoidlerin kategorisine doğal olarak denk olduğu gösterilmiştir. Bu denklikler ışığında ispatını yukarıda verdiğimiz Teorem 2.1.7 nin sonuçları olarak aşağıdaki önermeler ispatsız olarak verilebilir.

Önerme 2.1.8. Cat^1 -grupoidlerin kategorisi, 2-grupoidlerin kategorisine doğal olarak denktir.

Önerme 2.1.9. Cat^1 -grupoidlerin kategorisi, simplisel grupoidlerin kategorisine doğal olarak denktir.

2.2. Cat¹-Grupoidlerde Normallik

Tanım 2.2.1. $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ cat¹-grupoid ve $\mathcal{G}' = (X', G')$ grupoidi $\mathcal{G} = (X, G)$ grupoidinin bir alt grupoidi olsun. Bu durumda σ' ve τ' sırasıyla $\mathcal{G}'$ de σ ve τ nun kısıtlaması olmak üzere $(\mathcal{G}', \sigma', \tau')$ yapısına **alt cat¹-grupoid** denir. Eğer $X' = X$ ise $(\mathcal{G}', \sigma', \tau')$ ye **geniş alt cat¹-grupoid** denir. Eğer $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}$ de normal alt grupoid ise $(\mathcal{G}', \sigma', \tau')$ **normal alt cat¹-grupoid** olarak adlandırılır (Temel, 2020).

Önerme 2.2.2. $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \sigma)$ yapısı aynı obje kümesi X üzerinde $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \partial)$ grupoidinin normal alt çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \sigma)$ yapısına karşılık gelen cat¹-grupoid, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \partial)$ çaprazlanmış modülüne karşılık gelen cat¹-grupoidin normal alt cat¹-grupoididir (Temel, 2020).

İspat: $(X, N \ltimes M)$ grupoidinin $(X, A \ltimes B)$ grupoidinin normal alt grupoidi olduğunu göstermeliyiz. $b \in B(x, y)$, $a \in A(y)$ ve $(n_x, m_x) \in (N \ltimes M)(x) = N(x) \ltimes M(x)$ için

$$\begin{aligned} (b, a) \circ (n_x, m_x) \circ (b, a)^{-1} &= (b \circ n_x, a \circ (b \bullet m_x)) \circ ((b^{-1}, b^{-1} \bullet a^{-1})) \\ &= (b \circ n_x \circ b^{-1}, a \circ (b \bullet m_x) \circ ((b \circ n_x) \bullet (b^{-1} \bullet a^{-1}))) \\ &= (b \circ n_x \circ b^{-1}, a \circ (b \bullet m_x) \circ ((b \circ n_x \circ b^{-1}) \bullet a^{-1})) \end{aligned}$$

olacaktır. $b \bullet m_x = m_y$ ve $b \circ n_x \circ b^{-1} = n_y$ olsun. Bu durumda [NCMG1] den $n_y \in N(y)$, [NCMG2] den $m_y \in M(y)$ ve [NCMG3] den $(n_y \bullet a^{-1}) \circ a = m'_y \in M(y)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} (b, a) \circ (n_x, m_x) \circ (b, a)^{-1} &= (b \circ n_x \circ b^{-1}, a \circ (b \bullet m_x) \circ ((b \circ n_x \circ b^{-1}) \bullet a^{-1})) \\ &= (n_y, a \circ m_y \circ (n_y \bullet a^{-1}) \circ a \circ a^{-1}) \\ &= (n_y, a \circ m_y \circ m'_y \circ a^{-1}) \in (N \ltimes M)(y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.3. $(\mathcal{G}', \sigma', \tau')$ yapısı $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ cat¹-grupoidinin normal alt cat¹-grupoidi olsun. Bu durumda $\mathcal{G}'$ ne karşılık gelen çaprazlanmış modül, $\mathcal{G}$ ye karşılık gelen

çaprazlanmış modülün normal alt çaprazlanmış modüldür (Temel, 2020).

İspat:

[NCMG1] $\sigma(\mathcal{G}')$, $\sigma(\mathcal{G})$ nin normal alt grupoididir.

[NCMG2] $g \in G(x, y)$, $g' \in G'(x)$ olmak üzere $g \bullet g' = g \circ g' \circ g^{-1} \in G'(y)$ dir.

[NCMG3] $g' \in \sigma(\mathcal{G}')(x)$ ve $g \in G(x)$ olmak üzere

$$(g' \bullet g) \circ g^{-1} = g' \circ g \circ g'^{-1} \circ g^{-1}$$

$\sigma(\mathcal{G}')$, $\sigma(\mathcal{G})$ nin normal alt grupoidi olduğu için $g \circ g'^{-1} \circ g^{-1} \in G'(x)$ ve $g' \in G'(x)$ olduğundan $(g' \bullet g) \circ g^{-1} \in G'(x)$ elde edilir.

Sonuç 2.2.4. $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ bir cat^1 -grupoid ve $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ de karşılık gelen grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modül $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \partial)$ olsun. Bu durumda $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ cat^1 -grupoidinin normal alt cat^1 -grupoidlerinin kategorisi $\mathbf{NC1GD}/(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \partial)$ çaprazlanmış modülünün $\mathbf{NCMG}/(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \partial)$ ile gösterilen normal alt çaprazlanmış modüllerinin kategorisine denktir (Temel, 2020).

3. BULGULAR

3.1. Bölüm Cat^1 -Grupoidler

Bu bölümde (Temel, 2020) kaynağında verilen normal alt cat^1 -grupoid yapısı kullanılarak bölüm cat^1 -grupoid yapısı oluşturulmuş ve cat^1 -grupoidlerin bölüm morfizmi tanımlanmıştır.

Teorem 3.1.1. Bir $\mathcal{G} = (X, G, d_0, d_1, \varepsilon, \eta, \circ)$ grupoidi ve $\mathcal{N} = (X, N, d_0, d_1, \varepsilon, \eta, \circ)$ normal alt grupoidi ele alınsın. Eğer $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ cat^1 -grupoid ise $x \in X$ için

$$\mathcal{G}/\mathcal{N} = \{g \circ N(x) | g \in G, d_0(g) = x\}$$

olmak üzere

$$\sigma'(g \circ N(x)) = \sigma(g) \circ N(x), \tau'(g \circ N(x)) = \tau(g) \circ N(x)$$

şeklinde tanımlı

$$\sigma', \tau': \mathcal{G}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{N}$$

dönüşümleriyle birlikte $(\mathcal{G}/\mathcal{N}, \sigma', \tau')$ yapısı bir cat^1 -grupoiddir. Bu cat^1 -grupoid

bölüm cat^1 -grupoid olarak adlandırılır.

İspat: İlk olarak σ', τ' dönüşümlerinin birer fanktor olduğunu gösterelim. σ fanktor olduğundan $x, y, z \in X$ için $g \in G(x, y)$ ve $h \in G(y, z)$ olmak üzere

$$\sigma'(h \circ N(y) \circ g \circ N(x)) = \sigma'(h \circ g \circ N(x)) = \sigma(h \circ g) \circ N(x)$$

ve

$$\begin{aligned} \sigma'(h \circ N(y)) \circ \sigma'(g \circ N(x)) &= \sigma(h) \circ N(y) \circ \sigma(g) \circ N(x) \\ &= \sigma(h) \circ \sigma(g) \circ N(x) \circ N(x) \\ &= \sigma(h \circ g) \circ N(x) \end{aligned}$$

olup σ' bileşke işlemini korur. Benzer şekilde τ' de bileşke işlemini koruduğu gösterilebilir. Diğer taraftan $\sigma(1_x) = 1_{\sigma(x)} = 1_x$ olduğundan

$$\sigma'(\varepsilon'(x)) = \sigma'(1_x \circ N(x)) = \sigma(1_x) \circ N(x) = 1_x \circ N(x) = \varepsilon'(x) = \varepsilon'(\sigma'(x))$$

olup σ' birimi korur. Böylece σ' bir fanktordur. Benzer şekilde τ' de bir faktordur. Şimdi cat^1 -grupoid şartlarının sağlandığını gösterelim.

[C1Gd1] Her $g \circ N(x) \in \mathcal{G}/\mathcal{N}$ için

$$\sigma' \tau'(g \circ N(x)) = \sigma'(\tau(g) \circ N(x))$$

$$= \sigma(\tau(g)) \circ N(x)$$

$$= \tau(g) \circ N(x)$$

$$= \tau'(g \circ N(x))$$

olup $\sigma'\tau' = \tau'$ ve

$$\tau'\sigma'(g \circ N(x)) = \tau'(\sigma(g) \circ N(x))$$

$$= \tau(\sigma(g)) \circ N(x)$$

$$= \sigma(g) \circ N(x)$$

$$= \sigma'(g \circ N(x))$$

olup $\tau'\sigma' = \sigma'$ elde edilir.

[C1Gd2] $x, y, z \in X$ için $x \xrightarrow{g} x \xrightarrow{h} z$ olsun. O halde $d_0'(g \circ N(x)) = d_0'(h \circ N(y))$ için $d_0(g) = d_0(h)$ olup

$$\text{Ker}(\sigma') = \{g \circ N(x) \mid \sigma'(g \circ N(x)) = \varepsilon'(d_0'(g \circ N(x)))\}$$

$$= \{g \circ N(x) \mid \sigma(g) \circ N(x) = N(x)\}$$

$$= \{g \circ N(x) \mid \sigma(g) = 1_x\}$$

$$= \{g \circ N(x) \mid g \in \text{Ker}(\sigma)\}$$

ve

$$\text{Ker}(\tau') = \{h \circ N(y) \mid \tau'(h \circ N(y)) = \varepsilon'(d_0'(h \circ N(y)))\}$$

$$= \{h \circ N(y) \mid \tau(h) \circ N(y) = N(y)\}$$

$$= \{h \circ N(y) \mid \tau(h) = 1_y\}$$

$$= \{h \circ N(y) \mid h \in \text{Ker}(\tau)\}$$

bulunur. Burada $h \in \text{Ker}(\tau)$ ve $g \in \text{Ker}(\sigma)$ olduğundan $h \circ g \circ h^{-1} \circ g^{-1} = \varepsilon d_0(g)$ olup

$$\begin{aligned}
& h \circ N(x) \circ g \circ N(x) \circ (h \circ N(x))^{-1} \circ (g \circ N(x))^{-1} \\
&= (h \circ g) \circ N(x) \circ (h^{-1} \circ N(x)) \circ (g^{-1} \circ N(x)) \\
&= (h \circ g) \circ N(x) \circ (h^{-1} \circ g^{-1}) \circ N(x) \\
&= h \circ g \circ h^{-1} \circ g^{-1} \circ N(x) \circ N(x) \\
&= 1_x \circ N(x) \\
&= N(x) \\
&= \varepsilon' (d_0' (g \circ N(x)))
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\left(\mathcal{G}/\mathcal{N}, \sigma', \tau'\right)$ yapısı bir cat^1 -grupoiddir.

Tanım 3.1.2. $\mathcal{G}$ bir cat^1 -grupoid olmak üzere objeler üzerinde birim olan ve morfizmler üzerinde

$$\rho: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{N}, g \mapsto g \circ N(x)$$

şeklinde tanımlanan cat^1 -grupoid morfizmi, **cat^1 -grupoidlerin bölüm morfizmi** olarak adlandırılır.

3.2. Cat^1 -Grupoidlerinin Örtüleri ve Etkimleri

Bu bölümde grupoidlerin örtüleri ve grupoidlerin etkimelerinin tanımları (Mucuk ve Şahan, 2019; Brown, 2006) kaynaklarından verilerek bu tanımlar cat^1 -grupoidlere genişletildi. Daha sonra cat^1 -grupoidlerin etkimelerinin kategorisi ile cat^1 -grupoidlerin örtülerinin kategorisi arasındaki doğal olarak denklik ispatlandı.

Tanım 3.2.1. $\mathcal{G} = (G_0, G_1, d_0, d_1, \varepsilon, \eta, \circ)$ bir grupoid olsun. O halde $x, y \in G_0$ ve $f \in G_1$ için başlangıcı x objesi olan tüm morfizmlerin sınıfı $d_0^{-1}(x)$ olmak üzere bu sınıfa $\mathcal{G}$ grupoidinde **x objesinin starı** denir ve **$St_{\mathcal{G}}(x)$** ile gösterilir.

Tanım 3.2.2. $\mathcal{G}$ ve $\tilde{\mathcal{G}}$ iki grupoid ve $p: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ bir grupoid morfizmi olsun. Eğer her bir $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{G}}_0$ objesi için

$$St_{\tilde{\mathcal{G}}}(\tilde{x}) \longrightarrow St_{\mathcal{G}}p(\tilde{x})$$

kısıtlaması bijektif ise p ye **grupoid örtü morfizmi** ve $\tilde{\mathcal{G}}$ grupoidine de $\mathcal{G}$ nin **örtü grupoidi** denir.

Tanım 3.2.3. $p: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ ve $q: \tilde{\mathcal{G}}' \rightarrow \mathcal{G}$ iki grupoid örtü morfizmi için $\tilde{p}: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}'$

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{\mathcal{G}}' \\ & \nearrow \tilde{p} & \downarrow q \\ \tilde{\mathcal{G}} & \xrightarrow{p} & \mathcal{G} \end{array}$$

diyagramı değişmeli ise $\tilde{p}$ ye $\mathcal{G}$ nin **örtülerinin bir morfizmi** denir. Böylece $\mathcal{G}$ nin örtüleri ve örtü morfizimleri ile bir kategori oluşturulabilir. Bu kategori $\mathbf{Cov}(\mathbf{GPD})/\mathcal{G}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.4. $\mathcal{G}$ bir grupoid S bir küme ve bu kümeden $\mathcal{G}$ nin objelerine $\omega: S \rightarrow \mathcal{G}_0$ dönüşümü verilsin. $G_{d_0} \times_{\omega} S = \{(g, s) | d_0(g) = \omega(s)\}$ olmak üzere

$$G_{d_0} \times_{\omega} S \rightarrow S$$

$$(g, s) \mapsto g \bullet s$$

dönüşümü, $h \circ g$ ve $g \bullet s$ tanımlı olduğunda

$$[\mathbf{AC1}] \quad \omega(g \bullet s) = d_1(g),$$

$$[\mathbf{AC2}] \quad 1_{\omega(s)} \bullet s = s,$$

$$[\mathbf{AC3}] \quad (h \circ g) \bullet s = h \bullet (g \bullet s),$$

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{G}$ **grupoidinin ω dönüşümü ile S üzerinde etkimesi** denir. S kümesine de bir **$\mathcal{G}$ -küme** denir. ω dönüşümü ile S üzerinde $\mathcal{G}$ nin etkimesi (S, ω) şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.5. $\mathcal{G}$ grupoidi S ve S' kümeleri üzerine sırayla ω ve ω' dönüşümleri ile etkisin. $f: S \rightarrow S'$ dönüşümü $g \bullet s$ tanımlı olmak üzere

- i. $\omega'f = \omega$
- ii. $f(g \bullet s) = g \bullet f(s)$

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{G}$ nin etkimelerinin bir morfizmi olarak adlandırılır ve $f: (S, \omega) \rightarrow (S', \omega')$ şeklinde gösterilir. Böylece kümeler üzerinde $\mathcal{G}$ nin etkimeleri ve morfizmleri $\mathbf{Act}(\mathbf{GPD})/\mathcal{G}$ ile gösterilen bir kategori oluşturur.

Tanım 3.2.6. $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$, $(\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ iki cat^1 -grupoid ve $p: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ bir cat^1 -grupoid morfizmi olsun. Eğer her bir $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{G}}_0$ objesi için

$$St_{\tilde{\mathcal{G}}}(\tilde{x}) \rightarrow St_{\mathcal{G}}p(\tilde{x})$$

kısıtlaması bijektif ise p dönüşümüne **cat^1 -grupoidlerinin bir örtü morfizmi** ve $\tilde{\mathcal{G}}$ cat^1 -grupoidine de $\mathcal{G}$ nin **örtü cat^1 -grupoidi** denir.

Sonuç 3.2.7. $\tilde{\mathcal{G}}$ grupoidi, $\mathcal{G}$ nin bir örtü cat^1 -grupoidi olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{G}} & \xrightleftharpoons[\tilde{\tau}]{\tilde{\sigma}} & \tilde{\mathcal{G}} \\ p \downarrow & \wr & \downarrow p \\ \mathcal{G} & \xrightleftharpoons[\tau]{\sigma} & \mathcal{G} \end{array}$$

diyagramı değişmeli olduğundan $p\tilde{\sigma} = \sigma p$ ve $p\tilde{\tau} = \tau p$ elde edilir.

Tanım 3.2.8. $p: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ ve $q: \tilde{\mathcal{G}}' \rightarrow \mathcal{G}$ dönüşümleri $\mathcal{G}$ cat^1 -grupoidinin iki örtü morfizmi olsun. Eğer $\tilde{p}: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}'$ için $p = q\tilde{p}$ ise $\tilde{p}$ ye $\mathcal{G}$ cat^1 -grupoidinin **örtülerinin bir morfizmi** denir. Böylece $\mathcal{G}$ nin örtü cat^1 -grupoidleri ve örtü morfizmleri ile bir kategori oluşturulabilir. Bu kategori $\mathbf{Cov}(\mathbf{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.9. $\mathcal{G}$ bir cat^1 -grupoid, S bir küme ve $\mathcal{G}$ nin objelerine $\omega: S \rightarrow G_0$ dönüşümü verilsin. $G_{d_0} \times_{\omega} S = \{(g, s) | d_0(g) = \omega(s)\}$ olmak üzere

$$G_{d_0} \times_{\omega} S \rightarrow S$$

$$(g, s) \mapsto g \bullet s$$

dönüşümü, $h \circ g$ ve $g \bullet s$ tanımlı olduğunda

$$[\text{AC1G1}] \quad \omega(g \bullet s) = d_1(g),$$

$$[\text{AC1G2}] \quad 1_{\omega(s)} \bullet s = s,$$

$$[\text{AC1G3}] \quad (h \circ g) \bullet s = h \bullet (g \bullet s),$$

$$[\text{AC1G4}] \quad \sigma(g) \bullet s = g \bullet s \text{ ve } \tau(g) \bullet s = g \bullet s,$$

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{G}$ **cat¹-grupoidinin ω dönüşümü ile S üzerinde etkimesi** denir. S kümesine de bir **$\mathcal{G}$ -küme** denir. ω dönüşümü ile S üzerinde $\mathcal{G}$ nin etkimesi (S, ω) şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.10. $\mathcal{G}$ cat¹-grupoidi S ve S' kümeleri üzerine sırayla ω ve ω' dönüşümleri ile etkisin. $f: S \rightarrow S'$ dönüşümü $g \bullet s$ tanımlı olmak üzere

- i. $\omega' f = \omega$
- ii. $f(g \bullet s) = g \bullet f(s)$

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{G}$ **nin etkimelerinin bir morfizmi** olarak adlandırılır ve $f: (S, \omega) \rightarrow (S', \omega')$ şeklinde gösterilir Böylece kümeler üzerinde $\mathcal{G}$ nin etkimeleri ve morfizmleri **$\text{Act}(\text{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$** ile gösterilen bir kategori oluşturur.

Teorem 3.2.11. $(\mathcal{G}, \sigma, \tau)$ bir cat¹-grupoid olmak üzere **$\text{Cov}(\text{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$** ile **$\text{Act}(\text{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$** doğal olarak denktirler.

İspat: $\theta: \text{Act}(\text{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G} \rightarrow \text{Cov}(\text{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$ fanktorunu kategorilerin bir denkliği olacak şekilde aşağıdaki gibi tanımlayalım. **$\text{Act}(\text{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$** kategorisinin bir objesi (S, ω) olsun. Bu durumda $\theta(S, \omega) = (\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ olacak şekilde $\tilde{\mathcal{G}}$ cat¹-grupoidi $\tilde{\mathcal{G}}_0 = S, \tilde{\mathcal{G}}_1 = G_1 \times S = \{(g, s) | d_0(g) = \omega(s)\}$ olmak üzere

- i. $\tilde{\sigma}(g, s) = (\sigma(g), s),$
- ii. $\tilde{\tau}(g, s) = (\tau(g), s),$
- iii. $d_0(g, s) = s,$
- iv. $d_1(g, s) = g \bullet s,$

$$\text{v.} \quad \varepsilon(s) = (\varepsilon(\omega(s)), s) = (1_{\omega(s)}, s),$$

şeklinde tanımlı dönüşümler ile $s_1 = g \bullet s$ ve $s \xrightarrow{(g,s)} g \bullet s \xrightarrow{(g_1,s_1)} (g_1 \circ g) \bullet s$ olmak üzere

$$\text{vi.} \quad (g_1, s_1) \circ (g, s) = (g_1 \circ g, s)$$

şeklinde tanımlı bileşke işlemi ile tanımlanır. $p_0 = \omega, p = \pi_1$ izdüşüm fonksiyonu olmak üzere $p = (p_0, p)$ morfizmi ile $\tilde{\mathcal{G}} = (\widetilde{G}_0, \widetilde{G}_1, d_0, d_1, \varepsilon, \eta, \circ)$ cat^1 -grupoidi $\mathcal{G}$ nin bir cat^1 -grupoid örtüsüdür.

Burada (g, s) morfizminin tersi de

$$(g, s)^{-1} = \eta(g, s) = (\eta(g), g \bullet s) = (g^{-1}, g \bullet s)$$

şeklinde tanımlanır. [AC1G4] özelliğinden $\sigma(g) \bullet s = g \bullet s$ ve $\tau(g) \bullet s = g \bullet s$ olacağından $\tilde{\sigma}$ ve $\tilde{\tau}$ objeler üzerinde birimdirler. $\tilde{\sigma}$ ve $\tilde{\tau}$ nin birer fanktor olduğunu gösterelim. $(g_1, s_1), (g, s) \in \widetilde{G}_1$ için $s_1 = g \bullet s$ olmak üzere

$$\tilde{\sigma}((g_1, s_1) \circ (g, s)) = \tilde{\sigma}(g_1 \circ g, s) = (\sigma(g_1 \circ g), s)$$

ve [AC1G4] den $\sigma(g) \bullet s = g \bullet s$ olacağından

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(g_1, s_1) \circ \tilde{\sigma}(g, s) &= (\sigma(g_1), s_1) \circ (\sigma(g), s) \\ &= (\sigma(g_1), g \bullet s) \circ (\sigma(g), s) \\ &= (\sigma(g_1) \circ \sigma(g), s) \\ &= (\sigma(g_1 \circ g), s) \end{aligned}$$

olup $\tilde{\sigma}((g_1, s_1) \circ (g, s)) = \tilde{\sigma}(g_1, s_1) \circ \tilde{\sigma}(g, s)$ olacaktır. $s \in G_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(1_s) &= \tilde{\sigma}(1_{\omega(s)}, s) \\ &= (\sigma(1_{\omega(s)}), s) \\ &= (1_{\sigma(\omega(s))}, s) \\ &= (1_{\omega(s)}, s) \end{aligned}$$

$$= 1_s$$

olup $\tilde{\sigma}$ birimi korur. O halde $\tilde{\sigma}$ bir fanktordur. Benzer şekilde $\tilde{\tau}$ nın da bir fanktor olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi [C1Gd1] ve [C1Gd2] şartlarının sağlandığını gösterelim.

[C1Gd1] $\tilde{\sigma}\tilde{\tau}(g, s) = \tilde{\sigma}(\tau(g), s) = (\sigma\tau(g), s) = (\tau(g), s) = \tilde{\tau}(g, s)$ olup $\tilde{\sigma}\tilde{\tau} = \tilde{\tau}$ dir. Benzer şekilde $\tilde{\tau}\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}$ bulunur.

$$\begin{aligned} \text{[C1Gd2]} \quad Ker\tilde{\sigma} &= \{(g, s) \mid \tilde{\sigma}(g, s) = \tilde{\varepsilon}\tilde{d}_0(g, s)\} \\ &= \{(g, s) \mid \tilde{\sigma}(g, s) = (1_{\omega(s)}, s)\} \\ &= \{(g, s) \mid (\sigma(g), s) = (1_{\omega(s)}, s)\} \\ &= \{(g, s) \mid \sigma(g) = 1_{\omega(s)}\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Ker\tilde{\tau} &= \{(h, s') \mid \tilde{\tau}(h, s') = \tilde{\varepsilon}\tilde{d}_0(h, s')\} \\ &= \{(h, s') \mid \tilde{\tau}(h, s') = (1_{\omega(s')}, s')\} \\ &= \{(h, s') \mid (\tau(h), s') = (1_{\omega(s')}, s')\} \\ &= \{(h, s') \mid \tau(h) = 1_{\omega(s')}\} \end{aligned}$$

olacağından

$$g \bullet s = \sigma(g) \bullet s = 1_{\omega(s)} \bullet s = s ,$$

$$h \bullet s' = \sigma(h) \bullet s' = 1_{\omega(s')} \bullet s' = s'$$

olup $(g, s)^{-1} = (g^{-1}, g \bullet s) = (g^{-1}, s)$ ve $(h, s')^{-1} = (h^{-1}, h \bullet s') = (h^{-1}, s')$ dir.

Burada $s' = s$ için $d_0(g, s) = d_0(h, s')$ sağlanıp

$$\begin{aligned} (g, s) \circ (h, s') \circ (g, s)^{-1} \circ (h, s')^{-1} &= (g, s) \circ (h, s) \circ (g^{-1}, s) \circ (h^{-1}, s) \\ &= (g \circ h \circ g^{-1} \circ h^{-1}, s) \\ &= (1_{\omega(s)}, s) \end{aligned}$$

$$= \varepsilon(s)$$

$$= \varepsilon d_0(g, s)$$

elde edilir.

Şimdi objeler üzerinde

$$p_0: \widetilde{G}_0 = S \rightarrow G_0, p_0(s) = \omega(s)$$

ve morfizmler üzerinde

$$p: \widetilde{G}_1 = G_1 \ltimes S \rightarrow G_1, p(g, s) = \pi_1(g, s) = g$$

şeklinde tanımlanan $p = (p_0, p): (\widetilde{G}_0, \widetilde{G}_1) \rightarrow (G_0, G_1)$ dönüşümünün cat^1 -grupoidlerinin bir örtü morfizmi olduğunu gösterelim. Bunun için önce p dönüşümünün fanktor olduğunu gösterelim.

$$p((g_1, g \bullet s) \circ (g, s)) = p(g_1 \circ g, s) = g_1 \circ g = p(g_1, g \bullet s) \circ p(g, s)$$

ve

$$p(1_s) = p(1_{\omega(s)}, s) = 1_{\omega(s)} = 1_{p(s)}$$

olduğundan p grupoidlerin bir morfizmidir. $s \in \widetilde{G}_0$ ve $(g, s) \in \widetilde{G}_1$ için

$$p_0 \tilde{\sigma}(s) = p_0(s) = \omega(s) = \sigma(\omega(s)) = \sigma p_0(s),$$

$$p_0 \tilde{\tau}(s) = p_0(s) = \omega(s) = \tau(\omega(s)) = \tau p_0(s)$$

ve

$$p \tilde{\sigma}(g, s) = p(\sigma(g), s) = \sigma(g) = \sigma p(g, s),$$

$$p \tilde{\tau}(g, s) = p(\tau(g), s) = \tau(g) = \tau p(g, s)$$

olduğundan $p \tilde{\sigma} = \sigma p$, $p \tilde{\tau} = \tau p$ sağlanıp p dönüşümü bir cat^1 -grupoid morfizmidir. p morfizminin $St_{\tilde{G}}(s) \rightarrow St_G p(s)$ kısıtlaması $p_0 = \omega$ olarak tanımlandığından biyektif olup cat^1 -grupoidlerinin bir örtü morfizmidir.

$\text{Act}(\text{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$ kategorisinde $f: (S, \omega) \rightarrow (S', \omega')$ bir morfizm olsun. Bu durumda

$$\theta(f) = (f, 1_{G_1} \times f) : (\tilde{g}, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) \rightarrow (\tilde{g}', \tilde{\sigma}', \tilde{\tau}')$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm $\mathbf{Cov}(\mathbf{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$ kategorisinin bir morfizmi olacaktır.

Bunun için $p' = (\omega', \pi_1)$ olmak üzere $p'(1_{G_1} \times f) = p$ olduğunu göstermeliyiz.

$(g, s) \in \tilde{G}_1$ olmak üzere

$$p'(1_{G_1} \times f)(g, s) = p'(g, f(s)) = g = p(g, s)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\tilde{\sigma}(1_{G_1} \times f)(g, s) = \tilde{\sigma}(g, f(s))$$

$$= (\sigma(g), f(s))$$

$$= (1_{G_1} \times f)(\sigma(g), s)$$

$$= (1_{G_1} \times f)\tilde{\sigma}(g, s)$$

olup $\tilde{\sigma}(1_{G_1} \times f) = (1_{G_1} \times f)\tilde{\sigma}$ ve benzer şekilde $\tilde{\tau}(1_{G_1} \times f) = (1_{G_1} \times f)\tilde{\tau}$ olduğundan $\theta(f)$ $\mathbf{cat}^1$ -grupoidlerin bir morfizmidir.

Şimdi θ nin zayıf bir tersi olarak $\psi: \mathbf{Cov}(\mathbf{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Act}(\mathbf{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$

fanktorunu tanımlayalım. $\mathbf{Cov}(\mathbf{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$ kategorisinin bir $(\tilde{g}, p)$ objesi için

$x \xrightarrow{g} y$ ve $\tilde{x} \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{y}$ olmak üzere $g \bullet \tilde{x} = d_1(\tilde{g})$ şeklinde tanımlı etkiye ile birlikte

$$\psi(\tilde{g}, p) = (\tilde{G}_0, p_0)$$

$\mathbf{Act}(\mathbf{CAT}^1\text{-GPD})/\mathcal{G}$ kategorisinin bir objesidir. Öncelikle etkiye şartlarının sağlandığını gösterelim.

$$[\mathbf{AC1G1}] \quad p_0(g \bullet \tilde{x}) = p_0 d_1(\tilde{g}) = p_0(\tilde{y}) = y = d_1(g),$$

$$[\mathbf{AC1G2}] \quad \tilde{x} \xrightarrow{\tilde{1}_x} \tilde{x} \text{ için } 1_{p_0(\tilde{x})} \bullet \tilde{x} = 1_x \bullet \tilde{x} = d_1(\tilde{1}_x) = \tilde{x},$$

$$[\mathbf{AC1G3}] \quad (h \circ g) \bullet \tilde{x} = d_1(\tilde{h} \circ \tilde{g}) = d_1(\tilde{h}) = h \bullet \tilde{y} = h \bullet d_1(\tilde{g}) = h \bullet (g \bullet s),$$

[AC1G4] $\tilde{\sigma}$ objeler üzerinde birim olduğundan $d_1(\tilde{g}) = d_1 \tilde{\sigma}(\tilde{g})$ dir. p dönüşümü bir $\mathbf{cat}^1$ -grupoid morfizmi olduğundan $p\tilde{\sigma} = \sigma p$ olup buradan $p(\tilde{\sigma}(\tilde{g})) = \sigma(p(\tilde{g})) = \sigma(g)$

olacağından

$$g \bullet \tilde{x} = d_1(\tilde{g}) = d_1\tilde{\sigma}(\tilde{g}) = \sigma(g) \bullet \tilde{x}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\tau(g) \bullet \tilde{x} = g \bullet \tilde{x}$ dir. $\mathbf{Cov}(\mathbf{CAT}^1\text{-}\mathbf{GPD})/\mathcal{G}$ kategorisinin bir morfizmi $\tilde{p} = (\tilde{p}_0, \tilde{p}): (\tilde{\mathcal{G}}, p) \rightarrow (\tilde{\mathcal{G}}', p')$ olsun. Bu durumda

$$\psi(\tilde{p}) = \tilde{p}_0: (\tilde{\mathcal{G}}_0, p_0) \rightarrow (\tilde{\mathcal{G}}'_0, p'_0)$$

dönüşümünün $\mathbf{Act}(\mathbf{CAT}^1\text{-}\mathbf{GPD})/\mathcal{G}$ kategorisinin bir morfizmi olduğunu gösterelim. $\tilde{p}, \mathcal{G}$ cat¹-grupoidinin örtülerinin bir morfizmi olduğundan $p = p'\tilde{p}$ olup buradan $p'_0\tilde{p}_0 = p_0$ elde edilir. Diğer taraftan

$$\tilde{p}_0(g \bullet \tilde{x}) = \tilde{p}_0(d_1(\tilde{g})) = \tilde{p}_0(\tilde{y}) = \tilde{y} = d_1(\tilde{g}) = g \bullet \tilde{p}_0(\tilde{x})$$

olduğundan $\tilde{p}_0(g \bullet \tilde{x}) = g \bullet \tilde{p}_0(\tilde{x})$ bulunur ki böylece $\psi(\tilde{p})$ etkimelerin bir morfizmidir.

Kategorilerin doğal olarak denk olduğunu göstermek için $1 \cong \theta\psi$ ve $1 \cong \psi\theta$ olduğunu göstermeliyiz. $\xi: \mathbf{1}_{\mathbf{Cov}(\mathbf{CAT}^1\text{-}\mathbf{GPD})/\mathcal{G}} \rightarrow \theta\psi$ doğal dönüşümü objeler üzerinde birim olacak şekilde ve $g \in G_1$ için morfizmler üzerinde

$$\xi_{\tilde{\mathcal{G}}_1}(\tilde{g}) = (p(\tilde{g}), d_0(\tilde{g}))$$

olacak şekilde tanımlayalım. p biyektif olduğundan $\xi_{\tilde{\mathcal{G}}_1}^{-1}$ tanımlanabilir. Şimdi $\xi_{\tilde{\mathcal{G}}_1}$ dönüşümünün bileşke işlemini koruduğu gösterelim. $\tilde{g}, \tilde{h} \in \tilde{\mathcal{G}}_1$ ve $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{\mathcal{G}}_0$ için $\tilde{x} \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{y} \xrightarrow{\tilde{h}} \tilde{z}$ olsun. Burada $p(\tilde{g}) \bullet d_0(\tilde{g}) = g \bullet \tilde{x} = d_1(\tilde{g}) = \tilde{y} = d_0(\tilde{h})$ olup

$$\begin{aligned} \xi_{\tilde{\mathcal{G}}_1}(\tilde{h}) \circ \xi_{\tilde{\mathcal{G}}_1}(\tilde{g}) &= (p(\tilde{h}), d_0(\tilde{h})) \circ (p(\tilde{g}), d_0(\tilde{g})) \\ &= (p(\tilde{h}) \circ p(\tilde{g}), d_0(\tilde{g})) \\ &= (p(\tilde{h} \circ \tilde{g}), d_0(\tilde{h} \circ \tilde{g})) \\ &= \xi_{\tilde{\mathcal{G}}_1}(\tilde{h} \circ \tilde{g}) \end{aligned}$$

olduğundan $\xi_{\tilde{\mathcal{G}}_1}(\tilde{h}) \circ \xi_{\tilde{\mathcal{G}}_1}(\tilde{g}) = \xi_{\tilde{\mathcal{G}}_1}(\tilde{h} \circ \tilde{g})$ elde edilir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Kategori alanında yapılan çalışmalarda kategori denklıkları önemli bir yer tutar. Örneğin, grupoidlerin kategorisindeki grup objeleri olan grup-grupoidlerin daha basit cebirsel yapılar olan gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllere doğal denkliği sayesinde grup-grupoidlerde çözilemeyen bazı problemler çaprazlanmış modüllere aktarılıp çözülebilir. Gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller ile cat^1 -gruplar arasındaki kategorik denklik ise çaprazlanmış modüllerin yüksek boyutlara aktarılmasında önemlidir. Bu tez çalışmasında bu denkliğin grupoidlere genellemesi olarak grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüller ile cat^1 -grupoidler arasındaki doğal denklik ispatlandı. Grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin normal ve bölüm yapıları ile cat^1 -grupoidlerdeki normal ve bölüm yapıları karşılaştırıldı. Literatüre yeni bir kavram olarak bölüm cat^1 -grupoid tanımı kazandırıldı. Grupoidlerin örtüleri ile bir küme üzerine etkimelerinin özellikleri cat^1 -grupoidlere taşındı. Son olarak cat^1 -grupoidlerinin örtülerinin kategorisi ve etkimelerinin kategorisi oluşturularak bu kategorilerin doğal olarak denk olduğu ispatlandı.

5. ÖNERİLER

Bu tezde incelenen cat^1 -grupoidlerin topolojik versiyonu tanımlanarak, topolojik grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüllere doğal olarak denk olup olmadığı araştırılabilir. Cat^2 -grupoid tanımı ve özellikleri (Temel, 2020) kaynağında tanımlanmış olup, bu tezde incelenen normallik, bölüm, etkime ve örtü yapıları çaprazlanmış kareler için de araştırılabilir. Daha genel bir yapı olarak cat^n -grupoidler tanımlanabilir ve özellikleri araştırılabilir.



KAYNAKLAR

- Awodey, S. (2006). *Category Theory*. Oxford University Press.
- Aytekin, A. (2020). A Note on Simplicial Groupoids . *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Dergisi* , 36 (1) , 82-87 .
- Baez, J. C., and Lauda, A. D. (2004). Higher Dimensional Algebra V: 2-Groups. *Theory Appl. Categ.*, 12(14), 423–491.
- Brown, R. (1987). From groups to groupoids: a brief survey. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 19(2), 113-134.
- Brown, R. (2006). *Topology and Groupoids*. North Carolina: BookSurge LLC.
- Brown, R., and Spencer, C. B. (1976). G-groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen series A*, 79(4), 296 – 302.
- Brown, R., and İcen, İ. (2003). Homotopies and Automorphisms of Crossed Module Over Groupoids. *Appl. Categ. Structures*, 11, 185-206.
- Brown, R., and Loday, J. L. (1987). Homotopical excision, and Hurwicz theorems, for n-cubes of spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 54(3), 176-192.
- Brown, R., Higgins, P. J., and Sivera, R. (2011). *Nonabelian Algebraic Topology*. European Mathematical Society.
- Brown, R., Higgins, P. J., (1987). *Tensor Products and Homotopies for ω -groupoids*. J. Pure and Appl. Algebra, 47, 1-33.
- Brown, R., Higgins, P. J., (1982). *Crossed Complexes and Nonabelian Extensions*. Category Theory, Lecture Notes in Mathematics, 962, Springer, Berlin, Heidelberg.
- Brown, R., Danesh-Naruie, G., and Hardy, J.P.L. (1976). Topological groupoids:II. Covering morphisms and G-spaces. *Math. Nachr*, 74(1), 43-156.
- Eie, M., and Chang, S. T. (2010). *A Course on Abstract Algebra*. Tayvan: World Scientific Publishing.
- Higgins, P. J. (1971). *Categories and groupoids*. Nostrand Reinhold.
- İcen, İ. (2000). The equivalence of 2-groupoids and crossed modules, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara Series A*, 1(49), 39-48.

- Loday, J. L. (1978). Cohomologie et groupe de Steinberg relatifs. *J. Algebra*, 54, 178-202.
- Loday, J. L. (1982). Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 24, 179 – 202.
- Mackenzie, K. C. (1987). *Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry*. London: Cambridge University Press.
- Macklane, S. (1997). *Categories for the Working Mathematician*. New York: Springer-Verlag.
- Mucuk, O. (2010). *Topoloji ve Kategori*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Mucuk, O., and Demir, S. (2018). Normality and quotient in crossed modules over groupoids and double groupoids. *Turk. J. Math.*, 42, 2336 – 2347.
- Mucuk, O., and Şahan, T. (2019). Group-groupoid actions and liftings of crossed modules. *Georgian Math. J.*, 26(3), 437-447.
- Mucuk, O., Şahan, T., and Alemdar, N. (2015). Normality and Quotients in Crossed Modules and Group-groupoids. *Applied Categorical Structures*, 23(3), 415-428.
- Norrie, K. (1990). Actions and automorphisms of crossed modules. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 118(2), 129 – 146.
- Porter, T. (1987). Extensions, crossed modules and internal categories in categories of groups with operations. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 30, 373 – 381.
- Temel, S. (2019). Crossed Semimodules and Cat^1 -Monoids. *Korean J. Math.*, 27(2), 535-545.
- Temel, S. (2019). Normality and quotient in crossed modules over groupoids and 2-groupoids. *Korean J. Math.*, 27(1), 151-163.
- Temel, S. (2020). Crossed squares, crossed modules over groupoids and cat^{1-2} -groupoids, *Categories and General Algebraic Structures with Applications*, 13(1), 125-142.
- Whitehead, J. H.C. (1946). Note on a previous paper entitled "On adding relations to homotopy group". *Ann. Math.*, 47, 806-810.
- Whitehead, J. H.C. (1949). Combinatorial homotopy II. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, 453-496.

ÖZGEÇMİŞ

Osman ÇAN ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Akçaabat’ da tamamladı. 2001 yılında Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne yerleşmeye hak kazandı. 2002 yılında Trabzon Karadeniz Teknik Üniversitesi’ne yatay geçiş ile geçerek lisans eğitimini 2005 yılında tamamladı. 2015 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi’nde Pedagojik Formasyon Eğitim Sertifikasını aldı. 2007 yılında polis memuru olarak atandı ve halen Rize ilinde görev yapmaya devam etmektedir. Evli ve iki çocuk babasıdır. 2019 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda başladığı yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.