

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayça Hatice TÜRKAN

**GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN İSTATİSTİKSEL DAĞILIM
MODELLERİ**

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2007

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN
İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu tez 08 / 08 /2007 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/
Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

İmza.....
Prof.Dr. Hamza EROL
DANIŞMAN

İmza.....
Prof.Dr. Fikri AKDENİZ
ÜYE

İmza.....
Prof.Dr. Mehmet TÜMAY
ÜYE

Bu tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Bu çalışma

- Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)-Bilim İnsanı
Destekleme Daire Başkanlığı (BİDEB)

tarafından desteklenmiştir.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların
kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice Türkan

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof.Dr. Hamza EROL

Yıl: 2007, Sayfa: 224

Jüri: Prof.Dr. Hamza EROL

Prof.Dr. Fikri AKDENİZ

Prof.Dr. Mehmet TÜMAY

Bilim ve teknolojiadaki hızlı gelişmeler hayatımıza yön vermektedir. Yeniliklerin dur durak bilmediği ortamda ayakta kalmak, kazanç sağlamak için rekabetçi olmak gerekir. Tüketici veya kullanıcı daha iyi şartlarda barınabilmek, daha iyi işlere imza atabilmek için bulunduğu ortama ayak uydurmak zorundadır. Bunların yanı sıra ürünler ise özelliklerine göre değerlendirilmektedir. Şüphesiz en önemli özelliklerden biri ürünün güvenilirliğidir. Bu düşünceden hareketle bu çalışmada, öncelikle güvenilirlik, risk fonksiyonu ve kuvvet eğrisi gibi önemli kavramlarla birlikte ele alınacaktır. Sonra ürünlerin yaşam sürelerine ışık tutacak güvenilirlik analizinde kullanılan tek değişkenli dağılımlar, iki değişkenli dağılımlar, karma dağılımlar, karıştırılmış dağılımlar ve bileşik dağılımlar incelenecektir. Bu istatistiksel dağılım modellerinden yaygın biçimde kullanılanlara ilişkin temel özellikler ve parametre tahminleri araştırılacaktır. Güvenilirlik, yük ve mukavemet kavramları ile tekrar ele alınıp, çeşitli dağılımlarla örneklendirilecektir.

Ayrıca, bilgisayar çağında yaşadığımız unutulmamış, yazılım güvenilirliğinde kullanılan istatistiksel dağılımlara da yer verilecektir.

Anahtar kelimeler: Güvenilirlik, istatistiksel dağılım modelleri, donanım ve yazılım güvenilirliği.

ABSTRACT

MSc. THESIS

STATISTICAL DISTRIBUTION MODELS USED IN RELIABILITY ANALYSIS

Ayça Hatice TÜRKAN

**DEPARTMENT OF STATISTICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA**

Supervisor: Prof.Dr. Hamza EROL

Year: 2007, Pages: 224

Jury: Prof.Dr. Hamza EROL

Prof.Dr. Fikri AKDENİZ

Prof.Dr. Mehmet TÜMAY

Quick developments in the science and technology gives direction to our life. It has to be competitive to stand still and make profit in the environment that productive innovations are non-stop. Consumer or user has to keep in step with the situation to live in better conditions and sign on better works. Besides, products are evaluated according to their quality. No doubt, one of the most important quality is reliability of the product. So, firstly reliability will be handled with the important concepts like hazard function and bathtub curve in this study. Then, univariate distributions, bivariate distributions, mixture distributions, mixed distributions and compound distributions that are used in the reliability analysis which lighten the products' lifetime. Main properties and parameter estimators related to these statistical distribution models which are commonly used will be searched. Reliability will be handled again with the load and strength concepts and exemplified with various distributions.

Also, it isn't forgotten that we live in computer age and it is given a place to statistical distributions that are used in software reliability.

Key words: Reliability, Statistical distribution models, Hardware and Software reliability.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sürecinde değerli bilgilerini ve kaynaklarını benimle paylaşan danışmanım sayın Prof.Dr. Hamza EROL'a; yardımlarını esirgemeyen İstatistik bölümü öğretim elemanlarına; destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca eğitim ve öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi katkılarını benden hiçbir zaman esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
TABLolar DİZİNİ.....	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	4
2.1. Güvenilirlik Parametreleri.....	5
2.1.1. Dağılım Fonksiyonları.....	5
2.1.2. Hata Oranı.....	6
2.1.3. Parçalardaki Değişim.....	7
2.1.4. Güven Aralığı.....	7
2.2. Yenileme Teorisi (Renewal Theory).....	8
2.3. Eşevreli ve Evre Uyumsuz Yapılar.....	9
2.4. Modele Dayalı Diyagramlar.....	10
2.4.1. Blok Diyagramlar.....	10
2.4.2. Kusur Ağaç Analizi (FTA).....	10
2.4.3. Olay Ağaç Analizi.....	11
2.4.4. Durum Diyagramları (State Diagrams).....	11
2.5. Teorik Metodlar.....	11
2.5.1. Kuyruk Teorisi.....	12
2.5.2. Asimptotik Analiz.....	12
2.5.3. Boole Cebiri.....	12
2.5.4. Bayes Yaklaşımı.....	13
2.5.5. Monte Carlo Simülasyonu.....	13
2.5.6. Optimizasyon (En İyileme).....	13
2.6. Diğerleri.....	14
3. TEMEL TANIM VE AÇIKLAMALAR.....	15

3.1. Güvenilirlik Analizinde Kullanılan İstatistiksel Dağılımlarla	
İlgili Temel Kavramlar ve Tanımlar.....	15
3.2. Güvenilirlik Konusunda Temel Açıklamalar.....	24
3.2.1. Bir Ürünün Güvenilirliği.....	24
3.2.2. Koşullu Güvenilirlik Fonksiyonu.....	25
3.2.3. Onarılamaz Parçalar.....	26
3.2.4. Onarılabilir Parçalar.....	28
3.2.5. Risk Oranı Fonksiyonunun Genel Formu.....	30
3.2.6. Seri Sistemler.....	32
3.2.7. Paralel Sistemler.....	33
3.2.8. Genel Seri-Paralel Sistemler.....	35
4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ	
İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ.....	37
4.1. Normal Dağılım.....	37
4.1.1. Normal Dağılımdaki Parametrelerin Tahmini.....	40
4.1.2. Normal Dağılımın Uygulama Alanları.....	44
4.2. Lognormal Dağılım.....	47
4.2.1. Lognormal Dağılımdaki Parametrelerin Tahmini.....	50
4.2.2. Lognormal Dağılımın Uygulama Alanları.....	53
4.3. Üstel Dağılım.....	55
4.3.1. Üstel Dağılımdaki Parametrelerin Tahmini.....	60
4.3.2. Üstel Dağılımın Uygulama Alanları.....	63
4.4. Weibull Dağılımı.....	67
4.4.1. Weibull Dağılımındaki Parametrelerin Tahmini.....	72
4.4.2. Weibull Dağılımının Uygulama Alanları.....	76
4.5. Rayleigh Dağılımı.....	78
4.5.1. Rayleigh Dağılımındaki Parametrelerin Tahmini.....	81
4.5.2. Rayleigh Dağılımının Uygulama Alanları.....	83
4.6. Uç Değer (Extreme Value) Dağılımı.....	85
4.6.1. Uç Değer Dağılımındaki Parametrelerin Tahmini.....	94
4.6.2. Uç Değer Dağılımının Uygulama Alanları.....	98

4.7. Diğer Dağılımlar.....	101
4.7.1. Bernoulli Dağılımı.....	101
4.7.2. Binom Dağılımı.....	102
4.7.3. Poisson Dağılımı.....	103
4.7.4. Gama Dağılımı.....	105
4.7.5. Geometrik Dağılım.....	106
4.7.6. Negatif Binom Dağılımı.....	107
4.7.7. Soldan Kesik/Kesilmiş Logistic Dağılım.....	108
5. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ.....	112
5.1. Freund'un İki Değişkenli Üstel Dağılımı.....	112
5.1.1. Freund'un İki Değişkenli Üstel Dağılımındaki Parametrelerin Tahmini.....	115
5.2. Marshall ve Olkin'in İki Değişkenli Üstel Dağılımı.....	117
5.2.1. Marshall ve Olkin'in İki Değişkenli Üstel Dağılımındaki Parametrelerin Tahmini.....	119
5.3. Lindley ve Singpurwalla'nın İki Değişkenli Üstel Dağılımı.....	119
5.4. İki Değişkenli Pareto Dağılımı.....	123
5.5. Yaşam Süresi Dağılımı için Veri Çiftlerinin Analizi.....	127
6. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELLERİ.....	129
6.1. Genel Bilgiler.....	129
6.2. Weibull Dağılımlarının Karması.....	132
6.2.1. Weibull Dağılımlarının Karmasındaki Parametrelerin Tahmini.....	134
6.3. Normal Dağılımların Karması.....	140
6.3.1. Normal Dağılımların Karmasındaki Parametrelerin Tahmini.....	141
6.4. Üstel Dağılımların Karması.....	145
6.4.1. Üstel Dağılımların Karmasındaki Parametrelerin Tahmini...146	

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ.....	150
7.1. Güvenilirlik Analizinde Kullanılan Diğer Karma Dağılım Modelleri...	150
7.2. Güvenilirlik Analizinde Kullanılan Bileşik Dağılım Modelleri.....	153
7.2.1. Rastgele Terimlerin Toplamı.....	153
7.2.2. Standart Gama Dağılımı.....	158
7.2.3. Bileşik Poisson Dağılımı.....	159
7.2.4. Bileşik Poisson Süreci.....	160
7.2.4.1. Bileşik Poisson Sürecin Özellikleri.....	161
7.2.5. Bileşik Negatif Binom Dağılımı.....	162
7.3. Genelleştirilmiş Dağılım.....	162
7.3.1. Poisson-Binom Dağılımı.....	163
8. YÜK – MUKAVEMET GÜVENİLİRLİK MODELLERİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ.....	165
8.1. Yük – Mukavemet Güvenilirlik Modeli I.....	165
8.1.1. Bazı Özel Durumlar.....	167
8.1.1.1. Normal Dağılım Durumu.....	167
8.1.1.2. Üstel Dağılım Durumu.....	168
8.1.1.3. Üstel ve Normal Dağılım Durumu.....	169
8.2. Yük – Mukavemet Güvenilirlik Modeli II.....	170
8.2.1. Freund'un İki Değişkenli Üstel Dağılım Durumu.....	172
8.2.2. Marshall ve Olkin'in İki Değişkenli Üstel Dağılım Durumu.....	173
9. DONANIM VE YAZILIM GÜVENİLİRLİĞİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ.....	174
9.1. Donanım Güvenilirliği için Küvet Eğrisi.....	174
9.2. Yazılım Güvenilirliği için Küvet Eğrisi.....	175
9.3. Donanım Yazılım İlişkisi.....	175
9.4. Yazılım Güvenilirlik Mühendisliğinin Önemli Kavramları.....	177
9.5. Yazılım Güvenilirlik Modelleri.....	179
9.5.1. Jelinski Moranda Modeli.....	184
9.5.2. Schick-Wolverton Modeli.....	186

9.5.3. Goel-Okumoto Modeli.....	186
9.5.4. Bayes Yazılım Güvenilirlik Büyüme Modelleri.....	187
9.5.4.1. Littlewood ve Verrall Bayes Modeli.....	189
10. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	191
KAYNAKLAR.....	192
ÖZGEÇMİŞ.....	210

TABLolar DİZİNİ

SAYFA

Tablo 9.1. Donanım ve Yazılım Özellikleri Karşılaştırılması.....	176
Tablo 9.2. Yazılım güvenilirlik hata oranı modelleri.....	180

Şekil 3.1. Güvenilirlik ve güvenilirmezlik arasındaki ilişki.....	25
Şekil 3.2. Onarılamaz ürün için zamana bağımlı güvenilirlik fonksiyonu.....	27
Şekil 3.3. Onarılabılır üründe hata/başarısızlık numunesi.....	28
Şekil 3.4. Küvet eğrisi.....	31
Şekil 3.5. İki bileşenli seri sistem.....	32
Şekil 3.6. m bileşenli seri sistem.....	33
Şekil 3.7. İki bileşenli paralel sistem.....	34
Şekil 3.8. n bileşenli paralel sistem.....	35
Şekil 3.9. Seri-paralel sistem.....	36
Şekil 4.1. Normal dağılımda $m = 0$ ve $s = 0.5, s = 1, s = 3$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.....	42
Şekil 4.2. Normal dağılımda $s = 1$ ve $m = -1, m = 0, m = 1$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.....	42
Şekil 4.3. Normal dağılımda $m = 20$ ve $s = 1, s = 3$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $F(t)$ dağılım fonksiyonlarının grafikleri.....	43
Şekil 4.4. Normal dağılımda $m = 20$ ve $s = 3, s = 1$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonlarının grafikleri.....	43
Şekil 4.5. Normal dağılımda $m = 5$ ve $s = 1, s = 3$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $h(t)$ risk fonksiyonlarının grafikleri.....	44

Şekil 4.6. Lognormal dağılımda $m = 0$ ve $s = 1, s = 0.5, s = 0.25$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.....	51
Şekil 4.7. Lognormal dağılımda $s = 1$ ve $m = 0, m = 0.3, m = 1$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.....	52
Şekil 4.8. Lognormal dağılımda $m = 0$ ve $s = 0.6, s = 1$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $F(t)$ dağılım fonksiyonlarının grafikleri.....	52
Şekil 4.9. Lognormal dağılımda $m = 0$ ve $s = 0.6, s = 1$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $h(t)$ risk fonksiyonlarının grafikleri.....	53
Şekil 4.10. $m = \log(20000)$ ve $s^2 = 1$ parametre değerleriyle lognormal dağılıma sahip gelir rastgele değişkeni için $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	55
Şekil 4.11. İki parametrelili üstel dağılımda $m = 1$ ve $l = 2, l = 0.5, l = 0.25$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.....	61
Şekil 4.12. Bir parametrelili üstel dağılımda $l = 0.5, l = 1$ ve $l = 1.5$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.....	62
Şekil 4.13. Bir parametrelili üstel dağılımın $R(t)$ güvenilirlik ve $F(t)$ dağılım fonksiyonlarının grafikleri.....	62
Şekil 4.14. Bir parametrelili üstel dağılımın $h(t)$ risk fonksiyonunun grafiği.....	63
Şekil 4.15. Tekli akım ölçüm sistemi.....	65
Şekil 4.16. Paralel, özdeş üç akım ölçüm sistemi.....	65
Şekil 4.17. Orta değer seçici röleli sistem.....	66

Şekil 4.18. İki parametrelili Weibull dağılımında $s = 1$ ve $h = 0.5$ $h = 1$ $h = 4$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.....	74
Şekil 4.19. İki parametrelili Weibulll dağılımında $s = 1$ ve $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 3$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $F(t)$ dağılım fonksiyonlarının grafikleri.....	74
Şekil 4.20. İki parametrelili Weibulll dağılımında $s = 1$ ve $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 3$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonlarının grafikleri.....	75
Şekil 4.21. İki parametrelili Weibull dağılımında $s = 1$ ve $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 3$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $h(t)$ risk fonksiyonlarının grafikleri.....	75
Şekil 4.22. Standart Weibull dağılımında $h = 0.75$, $h = 1$, $h = 1.5$, ve $h = 3$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık fonksiyonlarının grafikleri.....	76
Şekil 4.23. Rayleigh dağılımında $b = 0.5$, $b = 0.75$ ve $b = 1$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.....	82
Şekil 4.24. Rayleigh dağılımında $b = 1.5$, $b = 3$ ve $b = 5$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.....	82
Şekil 4.25. Rayleigh dağılımın $R(t)$ güvenilirlik ve $F(t)$ dağılım fonksiyonlarının grafikleri.....	83
Şekil 4.26. Rayleigh dağılımının $h(t)$ risk fonksiyonunun grafiği.....	83
Şekil 4.27. $[0,3]$ kapalı aralığında, Rayleigh dağılımına ilişkin $F(t)$ dağılım fonksiyonunun grafiği.....	85

Şekil 4.28. I. tip uç değer dağılımında $m = 1$ ve $s = 0.5, s = 1, s = 1.5$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.....	95
Şekil 4.29. I. tip uç değer dağılımında $m = 1$ ve $s = 0.5, s = 1, s = 1.5$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $F(t)$ dağılım fonksiyonlarının grafikleri.....	96
Şekil 4.30. I. tip uç değer dağılımda $m = 1$ ve $s = 0.5, s = 1, s = 1.5$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonlarının grafikleri.....	96
Şekil 4.31. I. tip uç değer dağılımında $m = 1$ ve $s = 0.5, s = 1, s = 1.5$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $h(t)$ risk fonksiyonlarının grafikleri.....	97
Şekil 4.32. I. tip uç değer dağılımında $s = 1$ ve $m = 0.5, m = 1, m = 1.5$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.....	97
Şekil 4.33. Soldan kesik/kesilmiş logistic dağılımda $m = 100$ ve $s = 82.5, s = 214.1$ parametre değerleri için GRAPHER paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.....	110
Şekil 4.34. Soldan kesik/kesilmiş logistic dağılımda $m = 100$ ve $s = 82.5, s = 214.1$ parametre değerleri için GRAPHER paket programı kullanılarak oluşturulan $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonlarının grafikleri..	110
Şekil 4.35. Soldan kesik/kesilmiş logistic dağılımda $m = 100$ ve $s = 82.5, s = 214.1$ parametre değerleri için GRAPHER paket programı kullanılarak oluşturulan $h(t)$ risk fonksiyonlarının grafikleri.....	111
Şekil 8.1. Rastgele yük ve sabit mukavemet durumunda bileşen güvenilirliği.....	165
Şekil 8.2. Rastgele mukavemet ve sabit yük durumunda bileşen güvenilirliği.....	166
Şekil 8.3. Rastgele mukavemet ve rastgele yük durumunda bileşen güvenilirliği..	167
Şekil 9.1. Donanım güvenilirliği için kuvvet eğrisi.....	174

Şekil 9.2. Yazılım güvenilirliği için kuvvet eğrisi.....	175
Şekil 9.3. Kusur içerik fonksiyonu grafiği.....	183
Şekil 9.4. Kusur tespit oranı fonksiyonu grafiği.....	183

1. GİRİŞ

Tarih boyunca insanlık, geleceği tahmin etme gayreti içinde olmuştur. Günümüzde sistemler, alt sistemleri ve bileşenleri için güvenilirliği tahmin etmek bu gayretin bir ürünüdür. Güvenilirlik, bir nesnenin tanımlanmış bir amacı belli bir zaman aralığında, tam olarak yerine getirme olasılığıdır (Bentley 1993, Andrews ve Moss 2002). Son elli yılda modern teknolojinin yükselmesiyle birlikte güvenilirlik kavramı daha da önem kazanmıştır.

Birçok alanda yaygın olarak kullanılan istatistik bilimi, güvenilirlik analizinde de olasılık dağılımlarıyla birlikte önemli bir yer edinmiştir. Güvenilirlik analizinde, olasılık dağılımlarından kesikli dağılımlar belirli bir zaman aralığında gerçekleşen hata sayısı gibi kesikli olaylarla ilgilenirler. Sürekli dağılımlar ise zamana karşı dayanma süresi gibi herhangi bir değer alan değişkenleri modellemek için kullanılırlar (Moss 2005).

Olasılık dağılımları sistemler, alt sistemleri veya bileşenleri için zamana karşı bozulma ya da arızalanma modelleri olarak yaygın biçimde kullanılırlar (Hahn ve Shapiro 1967, Bentley 1993). Bir sistemin yaşam süresi; üretim miktarı, üretim için kullanılan madde veya çevresel koşullardaki değişim gibi birçok faktöre bağlıdır. Önce sistem ya da sistemin bir alt sistemi veya sistemin bir bileşeni için süre bir rastgele değişken olarak alınarak zamana karşı bozulma ya da arızalanma için uygun bir olasılık modeli oluşturulur. Sonra oluşturulan olasılık modelindeki parametreler tahmin edilir. Ayrıca oluşturulan olasılık modellerinin sağ kalım (survival) fonksiyonu, risk (hazard) fonksiyonu gibi bazı özellikleri incelenir (Meeker ve Escobar 1998).

Bu tez çalışmasında güvenilirlik analizinde kullanılan normal dağılım, üstel dağılım, log-normal dağılım, weibull dağılımı, rayleigh dağılımı ve uç değer dağılımı gibi bazı tek değişkenli (univariate) istatistiksel dağılım modelleri; iki değişkenli (bivariate) üstel dağılım (Kotz ve Singpurwalla 1999, Nadarajah ve Kotz 2006a, 2006b) ve iki değişkenli pareto dağılımı (Gupta 2001) gibi bazı iki değişkenli istatistiksel dağılım modelleri; weibull dağılımlarının karması (Patra ve Dey 1999, Bucar ve ark. 2004) gibi bazı karma (mixture/mixed) dağılım modelleri ve özellikleri

incelenmiştir. Ayrıca bileşik Poisson dağılımı (Feller 1968) gibi bazı bileşik (compound) dağılım modelleri ile ilgili açıklamalara yer verilmiştir. Bu dağılım modellerinin özellikle karmaşık sistemlerin güvenilirlik modellemelerinde ve analizinde uygulama alanları araştırılmıştır. Donanım güvenilirliğinde ve yazılım güvenilirliğinde kullanılan bazı dağılımlarla ilgili açıklamalara yer verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde konuyla ilgili önceki çalışmalar incelenmiştir. Bu bölüm ilk güvenilirlik teorileri üzerine bir zet niteliği taşımaktadır. Bu bölümde günümüz çalışmalarına kaynaklık eden, teori ve metodların geçmişi hakkında bilgi verilmiştir.

Tezin nc bölümünde konuyla ilgili temel kavramlar açıklanmış ve tanımlar verilmiştir. Öncelikle istatistiksel dağılımlara ilişkin temel tanımların yer aldığı bu bölümde, güvenilirlik kavramı üzerinde durulmuş, bu kavramla ilişkili küvet eğrisi ele alınmıştır. Ayrıca, seri, paralel ve genel sistemlerde güvenilirlik araştırılmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde güvenilirlik analizinde kullanılan bazı tek değişkenli dağılım modelleri açıklanmıştır. Bu dağılım modelleri açıklanırken dağılım fonksiyonu, beklenen değer, varyans, medyan, mod gibi dağılımların tanımlayıcı özelliklerinin yanı sıra güvenilirlik fonksiyonu, risk fonksiyonu gibi özellikle güvenilirlik konusunda değer kazanan özellikler incelenmiştir. Verilen bilgiler, grafiklerle desteklenmiştir. Ayrıca parametre tahminleri ve uygulama alanları verilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde güvenilirlik analizinde kullanılan bazı iki değişkenli dağılım modelleri ele alınmıştır. Bu dağılımlara ilişkin bazı özelliklerin ve kullanım alanlarının açıklanmasının yanı sıra parametre tahminleri de sunulmuştur.

Tezin altıncı bölümünde güvenilirlik analizinde kullanılan karma dağılım modelleri araştırılmıştır. Bu bölümde karma dağılımların geçmişi ve gereksinim nedeni açıklanmıştır. Üstel, Weibull ve normal dağılımların karması üzerinde durulmuş ve parametre tahminlerine yer verilmiştir.

Tezin yedinci bölümünde güvenilirlik analizinde kullanılan diğer karma dağılım modeli ve bileşik (compound) dağılım modeli incelenmiştir. Bu bölümde

diğer karma dağılım modelinin ve bileşik dağılım modelinin örneklerle açıklandığı tanımlara yer verilmiştir.

Tezin sekizinci bölümünde yük – mukavemet güvenilirlik modelleri açıklanmıştır. Bu bölümle güvenilirlik kavramına, yük ve mukavemet kavramlarının yardımıyla farklı bir yaklaşım sunulmuş olup daha önce sözü edilen normal ve üstel dağılımların uygulamaları yapılmıştır.

Tezin dokuzuncu ve son bölümünde donanım ve yazılım güvenilirliği konusu araştırılmıştır. Bu bölümde donanım ve yazılımın farklılıkları üzerinde durulmuştur. Özellikle yazılım güvenilirliğinde kullanılan bazı güvenilirlik modellerinin kullanım şekilleri açıklanmıştır. Yaygın biçimde kullanılan modeller tabloyla özetlenmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Geçmiş yüzyıla bakıldığında, birçok güvenilirlik çalışmasının son 50 yıl içinde yapıldığı görülmektedir (Rueda ve Pawlak 2004). Bu çalışmalar günümüz çalışmalarına da kaynaklık etmektedir. Güvenilirlik analizinin çalışma alanı güvenilirlik parametrelerinin gösterimini, yenileme teorisini (renewal theory) (Watson ve Leadbetter 1964, Gnedenko ve ark. 1969), eşevreli yapıları (coherent structure) (Boutsikas ve Koutras 2000, Tsitmidelis ve ark. 2002, Andrews ve Beeson 2003), modellere dayalı diyagramı, teorik metodları ve çeşitli teknikleri içerir. Modellere dayalı diyagram, blok diyagramları (block diagrams) (Kleinerman ve Weiss 1954, Blanton 1957), kusur ağaç analizini (fault tree analysis-FTA) (Andrews 2001), olay ağaç analizini (event tree analysis-ETA) (Papazoglou 1998, Andrews ve Dunnett 2000a, 2000b) ve akış grafiklerini (flowgraphs) (Haap 1964, Dolozza 1966) içermektedir. Teorik metodlar kuyruk teorisini (queuing theory) (Ouhbi ve Limnios 1999), asimptotik analizi (asymptotic analysis) (Takacs 1959, Gnedenko 1964a, 1964b, Pogozhev 1964), Boole cebirini (Boolean algebra) (Frantik 1954), Bayes metodunu (Bayesian method) (Hulting ve Robinson 1994, Kerscher ve ark. 1998), Monte Carlo simülasyonunu (Monte Carlo simulation) (Belyaev ve ark. 1967) ve optimizasyon tekniklerini içerir.

Güvenilirlik araştırmalarına son 50 yılda yapılan katkıların günümüz çalışmaları üzerinde etkisi büyüktür. Günümüzde kullanılan dağılım fonksiyonları üzerine Weibull (1939, 1951), Epstein (1948), Epstein ve Sobel (1953)'in önemli etkileri olmuştur. Lotka (1939), Campbell (1941), Feller (1941, 1968), Cox (1960, 1962), Smith (1954, 1958), Cox ve Smith (1953), Barlow ve Hunter (1959, 1960), Gnedenko (1964a, 1964b), Solov'yev (1970a, 1970b) güvenilirlik için teoriler geliştirmişlerdir. Takacs (1959)'ın yayınları asimptotik çalışmalara başlangıç niteliğindedir.

Güvenilirlik analizinin arkasında duran teorilerin geçmişi yaklaşık olarak 1773 yılında Pierre-Simon Laplace'ın Laplace dönüşümünü geliştirdiği ve 1812'de Theorie analytique des probabilités isimli yayını yaptığı döneme rastlamaktadır. Andrei Andreevich Markov 1880 yılında Markov zincirini geliştirmiştir (Rueda ve

Pavlak 2004). Bununla birlikte son 50 yıla kadar güvenilirlik araştırmalarına çok önem verilmemiştir. Son 50 ve 60 yıl güvenilirliğin altın çağıdır. Birçok buluş ve araştırmanın bir merak ya da gereksinim sonucu ortaya çıktığı düşünülürse güvenilirlik analizinin de bir gereksinim sonucu ortaya çıktığını tahmin etmek çok da zor değildir. Modern teknolojinin hareket kazanmasıyla ticari ve askeri sektörlerde güvenli ürünlere gereksinim duyulmuştur. Güvenilirlik analizi; otomobil endüstrisinde, havacılık endüstrisinde, iletişim sistemlerinde, roketlerde olduğu gibi atış sistem çalışmasında kullanılmıştır. Birçok benzer analiz tekniği bugün hala kullanılmaktadır.

Bu teoriler yenileme teorisini (renewal theory), Markov modellerini, bileşen önem ölçülerini, Monte Carlo simülasyonunu, Bayes yaklaşımını ve optimizasyon tekniklerini içerir. Blok diyagram analizi gibi güvenilirlik hesaplamalarında kullanılan en iyi bilinen metodlar, bu teorilere dayanır. Aynı teorileri kullanan uygulamalar hızlandırılmış yaşam testini, bakımı, yazılım güvenilirliğini, ağ güvenilirliğini ve sistem güvenilirliğini içerir.

ISO 8402'ye göre güvenilirlik belirli bir zamanda çevresel ve işletimsel koşullar altında bir eşyanın gerekli fonksiyonu yerine getirme yeteneği olarak tanımlanır. Ushakov (2000) modern güvenilirlik teorilerini altı gruba ayırır. Bunlar saf güvenilirlik analizi, geçerlilik, kalımlılık, güven, güvenlik ve yazılım güvenilirliğidir. Bu bölümde sözü edilen teorilerin çoğu Ushakov (2000) tarafından tanımlanan saf güvenilirlik analizi kavramına dahildir.

2.1. Güvenilirlik Parametreleri

Güvenilirlik teorilerinde kullanılan parametreler çalışmadaki konuların ya da kavramların özelliklerini göstermek için kullanılır.

2.1.1. Dağılım Fonksiyonları

Dağılım fonksiyonları, bir sistemin çalışır durumda olduğu ya da çalışır durumda olmadığı sürenin özelliklerini göstermek için kullanılır. En etkili dağılım fonksiyonları, materyal yorulma hatasını tanımlamak için kullanılan Weibull

dağılımına (Weibull 1939) ve Epstein ve Sobel (1953)'in hayat testi için oluşturduğu üstel dağılıma dayalıdır. Weibull, materyallerde yorulma ömrünü ve uç değer teorisinin ilgili konularını çalışmıştır. Weibull (1939), materyallerin yaşam süresinin açıklanması için bir dağılımı yaklaşık dağılım olarak öngörmüştür. Bu dağılım daha sonra Weibull dağılımı olarak adlandırılmıştır. Daniel (1945) iplik mukavemeti ile ilgili çalışmasında normal dağılımı kullanmıştır. Epstein (1948) artırımı hasarların büyüklüğü konulu çalışmasında lognormal dağılım fonksiyonunu ve uç değer teorisinin ilgili konularını kullanmıştır. Weibull (1951) farklı uygulamalar için Weibull dağılımının biraz farklı formunu kullanmıştır. Davis (1952) hata dağılımları için hata verileri ve uyumun iyiliği testlerini analiz etmiştir. Üstel dağılıma ayrıcalık tanımıştır. Kao (1956, 1958)'nin yaptığı çalışmalarda Weibull dağılımına önem verdiği görülmektedir. Buehler (1957) füze ürünlerinin güvenilirliğini hesaplamak için binom dağılıma başvurmuştur. Birnbaum ve Saunders (1958) dinamik yük altındaki yapıların ömrü için ustaca hazırlanmış bir istatistiksel model sunmuşlardır. Bu modelde hata oranı bozulma ve yıpranmanın bir fonksiyonu olarak kullanılmıştır. Sabit yük özel durumu, onların yaşam mukavemeti için gama dağılımını önermelerine olanak sağlamıştır. Herd (1959) çeşitli dağılımların uygulamalarını, yoğunluk fonksiyonlarını, varyans, ortalama ve hata oranlarını özetlemiştir. Tate (1959) minimum varyans yansız tahmin edicisini elde etmiştir. Cox (1960), gama olasılık dağılımına sahip T rastgele değişkeni eğer tüm sistemin yaşam süresini gösteriyorsa, yedek bileşen sayısının Laplace dönüşüm tersini kullanmadan hesaplanabileceğini göstermiştir. Zelen ve Dannemiller (1961) üstel dağılıma dayanan birçok yaşam testi prosedürünün sağlam olmadığını ortaya çıkarmıştır. Nylander (1962) yaşam testi dağılım fonksiyonları üzerine bir özet hazırlamıştır. Blanton ve Jacobs (1962) da bir liste sağlamıştır. Shortle ve Mendel (2001) yaşam süresi uzaylarının fiziksel Öklid uzayları olmadığını fakat diferansiyel geometride lif demeti yığınının eşdeğeri olduğunu göstermiştir.

2.1.2. Hata Oranı

Barlow ve ark. (1963) n tane bağımsız özdeş dağılıma sahip rastgele değişkende artan hata oranı büküm teoremini (increasing failure rate convolution

theorem) kanıtlamak için toplam pozitifliği (total positivity) kullanmışlardır. Barlow ve Marshall (1964) artan hata oranı (Increasing Failure Rate-IFR) dağılımlarının sınırlarına ilişkin bir çalışma yapmışlardır. Barlow ve Proschan (1965) güvenilirlik üzerine bir kitap yazmışlardır. Bu kitap monoton sistemlerin genel kavramlarını, monoton azalan ve artan hata oranlarıyla dağılımlarını içermektedir. Ross (1972) eşevreli sistem için ortalamanın üstündeki artan hata oranı (Increasing Failure Rate on the Average-IFRA) kapanma (closure) teoremini kanıtlamıştır. Block ve Savits (1976), Barlow ve arkadaşları tarafından çalışılan ve n tane bağımsız özdeş dağılıma sahip rastgele değişkenlere ilişkin teoremin ispatını kısaltmışlardır.

2.1.3. Parçalardaki Değişim

Meltzer (1956) modül güvenilirliği ifadesini elde etmek için varyans analizini kullanmıştır. Burada amaç parçaların özelliklerini sunmaktır. Blanton (1958) ekipman güvenilirliğinde olası değişimleri tahmin etmiştir. Modül güvenilirliklerinin, ekipman güvenilirliğinde büyük değişikliğe neden olduğunu göstermiştir. Drete (1959, 1960), parça dayanıklılığının ürün dayanıklılığı ile ilişkili olduğunu ifade etmiştir.

2.1.4. Güven Aralığı

Buehler (1957), füze güvenilirlik hesaplamalarında ürünlerin güven aralıklarını oluşturmak için binom parametrelerine başvurmuştur. Steck (1958), Madansky (1958) ve Rosenblatt (1963) benzer çalışmalar yapmışlardır. John ve Lieberman (1966) Weibull dağılımı için güvenilirlik güven sınırını hesaplamışlardır. Thoman ve ark. (1970), Weibull dağılımı için güven aralığı ve güvenilirliğin toleransı tahminlerini maksimum likelihood yöntemiyle yapmıştır. Martz ve Duran (1985), bileşenlerin test verilerine dayalı sistem güvenilirliğinde güven tahminini değerlendirmek için Bootstrap metoduna başvurmuştur.

2.2. Yenileme Teorisi (Renewal Theory)

Lotka (1939), Campbell (1941), Feller (1941, 1968), Cox (1960, 1962) ve Smith (1954, 1958) güvenilirlik için yenileme teorisinin gelişiminde büyük katkıda bulunmuşlardır. Yenileme teorisi, yenileme problemini çözmek için kullanılır. Başarısız bileşenin yenisiyle derhal değiştirileceği varsayılır. Bileşenlerin toplam ömrü işin süresine katkı sağlar. $n - 1$ tane yedek nesnenin ömrünü tahmin etmek için n bileşenin beklenen toplam ömrü tahmin edilebilir.

Lotka (1939) endüstriyel yedek nesne problemi için yenileme teorisine başvurmuştur. Campbell (1941), sabit aralıklı yenilemenin ve bir ünite hata olması durumunda değişiminin maliyete etkinliği konulu çalışmasında yenileme teorisine başvurmuştur. Feller (1941), yenileme teorisini matematiksel bir bilgi dalı olarak geliştirmiştir. Blackwell (1948), belirli bir zamanda yinelenen olayların beklenen sayısını hesaplamıştır. Doob (1948), olasılığa göre yenileme teorisini tartışmıştır. Feller (1949) yinelenen olaylar üzerine bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada yinelenen olayların beklenen sayısı ve onun varyansına kesikli yenileme süreci için bir formül oluşturulmuştur. Cox ve Smith (1953) yenileme teorisinin direkt ispatını yapmışlardır. Smith (1954) sürekli yenilenen süreç için yinelenen olayların beklenen sayısını ve onun varyansını hesaplayarak, yenilenmiş stokastik süreç teorisini tanımlamıştır. Smith, t sonsuza giderken değerin lineer fonksiyona yaklaştığını göstermiştir. Smith (1958), yenileme teorisinde özellikle yinelenen olaylar üzerine bilinen matematiksel sonuçların bulunduğu bir özet hazırlamıştır. Smith (1959), yinelenen olayların beklenen değeri ile ilgili teoremi ispatlamış ve yinelenen olayların beklenen sayısının, onun varyansının t sonsuza giderken lineer fonksiyona yaklaştığını bulmuştur. Barlow ve Hunter (1959, 1960), sistem güvenilirliği için matematiksel modeller başlıklı iki makale yayınlamışlardır. Cox (1962), yenileme teorisi üzerine bir kitap çıkarmıştır. Cox'un hem kendi, hem de Isham ile birlikte yürüttüğü çalışmalarının güvenilirlik teorisinin gelişimine güçlü bir etkisi olmuştur (Cox ve Isham 1980). Bu da güvenilirlik modellemesinde stokastik sürece başvurmak için yeni yollar açmıştır. Watson ve Leadbetter (1964), risk fonksiyonu analizi üzerine çalışmışlardır. Gnedenko ve ark. (1969) tarafından onarılabilir

sistemlerde, asimptotik analize ve güvenilirlik veri analizine ilişkin çok sayıda sonuç içeren Rusça ve İngilizce dillerinde kitaplar yayınlanmıştır.

2.3. Eşevreli ve Evre Uyumsuz Yapılar

Birnbaum ve ark. (1961), eşevreli sistemlerin güvenilirliğini hesaplamak için eşevreli yapılar üzerine bir çalışma yapmışlardır. Bu çalışmadaki düşünce; bileşen hatası yüzünden sistem hata olasılığının hesaplanmasıdır. Birnbaum (1955), rastgele değişkeni yapısal bileşen hatalarını göstermek için kullanmıştır. Daha önce Moore ve Shannon (1956) tarafından çalışılan ağ güvenilirliği ve eşevreli yapılar konusu Birnbaum ve ark. (1961) tarafından genişletilmiştir. Onlar, paralel ya da seri düzenlenmiş çoklu bileşen yapılarında güvenilirliği çalışırken vektör analizi tekniklerine başvurmuşlardır. Esary ve Proschan (1963), bilinen yapıda isteğe bağlı iki kutuplu ağın alt ve üst sınırlarını elde etmişlerdir. Sınırlar ağların yolu ve kesintilerinin eksiksiz kümeleri aracılığıyla açıklanmıştır. Birnbaum ve Esary (1965), ikili eşevreli sistemlerde modülleri tanımlamış ve çalışmışlardır. Birnbaum ve ark. (1966), ortalamanın üstündeki artan hata oranı teoremini eşevreli sistem için tanımlamışlardır. Birnbaum (1969), karmaşık sistem analizinde, daha önce Kolmogorov (1945) tarafından oluşturulan ikili hata tipi (binary failure type) gösterimleri olan “aşağı” (“down”) ve “yukarı” (“up”) gösterimlerini kullanarak yeni bir akım başlatmıştır. Ross (1972), eşevreli sistem için IFRA teoreminin bir ispatını yapmıştır. Satyanarayana ve Prabhakar (1978), eşevreli yapılar için daha etkili olasılık hesaplamaları tanımlamışlardır. Onlar eşevreli sistem için güvenilirlik literatürüne bağımsızlık kavramını kazandırmışlardır. Satyanarayana ve Chang (1983), eşevreli sistemde faktör algoritmasının tek yönlü ağlar için en etkili algoritma olduğunu kanıtlamışlardır. Bendell ve Ansell (1984), eşevreli yapı için tutarsızlık koşullarını çalışmışlardır. Huseby (1989), bağımsızlık kavramı üzerine daha soyut birleştirilmiş bir teori oluşturmuş ve tam güvenilirlik hesaplamalarına ilişkin uygulama ile eşevreli sistem için bağımsızlığı çalışmıştır. Fu ve Koutras (1995), bağımsız bileşenli ve eşevreli yapı için sınır bulmuştur. Tsitmidelis ve ark. (2002), genetik algoritmayı kullanarak bu sınırları bulmak için bir prosedür oluşturmuştur. Boutsikas ve Koutras (2000), eşevreli yapı için genelleştirilmiş

sınırları hesaplamışlardır. Inagaki ve Henley (1980) ve Jackson (1983), evre uyumsuz bir sistemle ilgili önemli çalışmalar yapmışlardır. Andrews ve Beeson (2003), önem ölçüsünü evre uyumsuz sistemlere dahil etmek için Birnbaum (1969) tarafından ortaya atılan bileşen önem ölçülerini genişletmiş ve genelleştirmiştir.

2.4. Modele Dayalı Diyagramlar

Modele dayalı diyagramlar, sistemin görsel olarak sunumunu sağlar. Model, mühendislere ve matematikçilere matematiksel analize başvurmadan önce hedef sistemin daha iyi anlaşılmasına olanak sağlar. Blok diyagramların yanı sıra kusur ağaç analizi (Fault Tree Analysis-FTA), olay ağaç analizi (Event Tree Analysis-ETA), durum diyagramı (state diagram) ve akış grafikleri (Oltorik 1963, Haap 1964, Dolozza 1966) de güvenilirlik analizinde kullanılır.

2.4.1. Blok Diyagramlar

Kleinerman ve Weiss (1954), güvenilirlik ilişkilerini göstermek için güvenilirlik blok diyagramını kullanmış ve matematiksel gösterimini önermiştir. Blanton (1957), güç kaynaklarını ve benzer üniteleri göstermek için ek sembollerle mühendislik blok diyagramını kullanmış ve bunun matematiksel gösterimini önermiştir.

2.4.2. Kusur Ağaç Analizi (FTA)

Kusur ağaç analizi bir Minuteman füzesinde gerçekleşebilecek bir kazanın olasılığı çalışmasının bir sonucu olarak ortaya çıkmış ve Watson analiz projesinde yer almıştır (Rausand 2005). FTA, risk değerlendirmesinde en çok kullanılan tekniklerden biridir. Holtzman ve Marshall (1960), FTA'yı blok etiketlendirmelerde kullanmışlardır. Rosenthal (1980), FTA için analiz maliyetini düşürmeye yönelik bir yaklaşım kullanmıştır. Dugan ve ark. (1992), dinamik FTA yöntemini geliştirmişlerdir. Coudert ve Madre (1993), büyük kusur ağaçlarının (2^{10} temel olaylı) çözümünde ikili karar diyagramlarını (Binary Decision Diagrams-BDD) kullanmışlardır. Doyle ve Dugan (1995); statik kusur ağaçlarının, ardışık ve bağımlı

olmayan hata davranışı için kullanılabileceğini bulmuşlardır. Dutuit ve Rauzy (1996), bağımsız alt ağaçları tanımlayan doğrusal zaman algoritmasını (linear-time algorithm) geliştirmişlerdir. Annand ve Somani (1998), bağımlılıklar ve kusur ağaçlarının analizi için ayrıştırma metoduna (decomposition method) başvurmuşlardır. Andrews (2001), çok işlevli sistemlerde FTA'yı kullanmıştır.

2.4.3. Olay Ağaç Analizi

Papazoglou (1998), küme teorisinin ve olasılık teorisinin temel kavramlarını kullanarak olay ağaçları yapısı için matematiksel bir gösterim geliştirmiştir. Andrews ve Dunnett (2000a, 2000b), sistemlere düzgün olay ağaç analizini uygulamışlardır.

2.4.4. Durum Diyagramları (State Diagrams)

Durum diyagram; kuyruk teorisi için çok popüler bir gösterimdir. Kolmogorov (1945) uçaksavar yangını yüzünden oluşan uçak hasar olasılığını analiz etmek için ikili durumu kullanmıştır. Frantik (1954), bileşenlerin durumunu göstermek için üç durum kullanmıştır. Takacs (1959), bir sistemin durumlarını göstermek için iki durum kullanmıştır. Barlow ve Hunter (1959), çalışır durumdaki veya bozulmuş durumdaki bir ünitenin durumunu göstermek için aç-kapa modeli (on-off model) kavramına başvurmuşlardır. Bu günlerde, güvenilirlik analizinde çalışır durum ve bozulmuş durumla birlikte Markov model yaygın biçimde kullanılmaktadır. Elsayed ve Zebib (1979), çok durumlu araçları analiz etmişlerdir.

2.5. Teorik Metodlar

Diğer alanlarda kullanılan bir çok teorik metod güvenilirlik analizi için de uygulanabilir. En popüler metodlardan bazıları kuyruk teorisini, asimptotik (kavuşmaz) analizi, Boole cebirini, Bayes yaklaşımını, Monte Carlo simülasyonunu ve optimizasyonu içerir. Diğerleri genetik algoritmayı (Tsitmidelis ve ark. 2002) ve modüler ayrışımı (Bodin 1970) içerir.

2.5.1. Kuyruk Teorisi

Barlow ve Hunter (1959), sistem güvenilirliği için Markov modeline başvurmuşlardır. Bharucha-Reid (1960) ve Keilson ve Kooharian (1960), sistem kullanılabilirlik ve bakımı çalışmalarında kuyruk teorisini kullanmışlardır. Brender ve Tainiter (1961), bileşen yıkıcı hatalarının etkilerini düşünmek için Markov tekniklerinin kullanılabileceğini göstermişlerdir. Pogozhev (1964), hata ya da başarısızlık için Poisson sürecini kullanmıştır. Gnedenko ve ark. (1969), güvenilirlik problemlerini, özellikle bakım ve yedekleme problemlerini, çözmek için kuyruk teorisine başvurmuşlardır. Solov'yev (1970a, 1970b), sistem güvenilirliği için kuyruk teorisine başvurmuştur. Dugan ve ark.(1993), hata içeren sistemlerin güvenilirlik çalışmasında Markov modellerini kullanmışlardır. Ouhbi ve Limnios (1999), sistem kullanılabilirliği ve güvenilirliği çalışmasında yarı Markov modelini kullanmıştır. Fricks ve Trivedi (2003), bileşen önem ölçüsünü hesaplamak için Markov reward modelini (MRM) ortaya koymuştur. Lefebvre (2003), Monte Carlo simülasyonuna alternatif olarak faydasızlığı (kullanılmazlığı) hesaplamak için hata oranı üzerine yaşlanma etkisini göstermek amacıyla homojen olmayan poisson yöntemini (Nonhomogeneous Poisson Process-NHPP) kullanmıştır.

2.5.2. Asimptotik Analiz

Smith (1954), yinelenen olayların sayısının ve onun varyansının asimptotik özelliğini incelemiştir. Moore ve Shannon (1956), ağ güvenilirliği üzerine asimptotik analiz yapmışlardır. Takacs (1959), iki durumlu metodun asimptotik dağılımını hesaplamıştır. Gnedenko (1964a, 1964b), kullanılabilirliği yüksek sistemlerin analizi için asimptotik metodu kullanmıştır. Pogozhev (1964), iki anahtar asimptotik teoremden birini genelleştirmiştir.

2.5.3. Boole Cebiri

Gates (1952), Boole cebirini sistemlerin güvenilirliğini hesaplamak için kullanmıştır. Frantik (1954), üç farklı durumlu bileşenler için Boole cebirine

başvurmuştur. Mine (1959), karmaşık sistemleri göstermek için Boole fonksiyonlarını kullanmıştır.

2.5.4. Bayes Yaklaşımı

Bazovsky (1961), Mosteller ve ark. (1961) güvenilirlik için Bayes teoreminin kullanımını önermişlerdir. Martz ve Waller (1982), güvenilirlik analizinde Bayes yaklaşımının kullanıldığı çalışmalar yayınlamışlardır. Hulting ve Robinson (1994), onarılabilir seri sistemlerde Bayes yaklaşımını kullanmıştır. Kerscher ve ark. (1998), gelişmekte olan yeni ürünlerin güvenilirliğini nitelendirmek için Bayes bilgilerini kullanarak yeni bir yöntem geliştirmişlerdir.

2.5.5. Monte Carlo Simülasyonu

Birçok durumda eşitlik çözümlerinin zorluğu nedeniyle tam bir analitik çözüm yapılamaz. Bu tip durumlarda problemi çözmek için Monte Carlo simülasyonu popüler bir alternatiftir. Firstman (1958), güvenilirliği tahmin etmek için Monte Carlo modellerini kullanmıştır. Blanton ve Jacobs (1962), güvenilirliğin tahmini için Monte Carlo simülasyonunun da içinde bulunduğu teknikler kullanmıştır. Belyaev ve ark. (1967), Monte Carlo simülasyonunu kullanarak güven tahmini üzerine bazı sonuçlar elde etmiştir.

2.5.6. Optimizasyon (En İyileme)

Moskowitz ve Mclean (1956), optimal fazlalık üzerine ilk çalışmayı yapmışlardır. Gordon (1957), optimum bileşen fazlalığını çalışmıştır. Bellman ve Dreyfus (1958), optimal fazlalığın bulunuşunda dinamik algoritmaya başvurmuşlardır. Kettelle (1962), optimal problemin çözümü için dinamik programlama algoritmasında etkili ve pratik bir değişiklik önermiştir. Barlow ve ark. (1963), iki olası türde hatalı bileşenler için optimal fazlalığı hesaplamışlardır. Barlow ve Proschan (1965) çalışmalarında optimal bakım ve optimal fazlalık problemlerinin detaylı bir sunusunu vermiştir. Proschan ve Bray (1965), çoklu kısıtlamalar altında güvenilirlik için en uygun metodları geliştirmişlerdir. Tillman ve ark. (1980),

optimizasyon metodları üzerine daha ileri gelişimlerle optimum sistem güvenilirliğini içeren bir çalışma yapmışlardır.

2.6. Diğerleri

Bu kısımda diğer bölümlerde olmayan teknik, teori ve metodlar incelenmiştir. Lipp (1957), karmaşık çok parçalı seri, paralel ağlar için matematiksel gösterimler çıkarmıştır. Flehinger (1958), sistemin farklı seviyelerine fazlalık ekleyerek güvenilirliği geliştirmeyi önermiştir. Philipson (1959), tüm güvenilirlik şeklinin, ayrık aralıklar için güvenilirliklerin bileşimlerinden elde edilebildiğini göstermiştir. Kaufmann ve Kaufmann (1960), her araç için K faktör hesabı kullanımının dahil edildiği üç tahmin tekniğini tanımlamıştır. Cramer ve Kamps (2000), her bir hata üzerine risk oranlarını ayarlamak için bölme katsayısını kullanarak k -out-of- n sıralı sistemlerin ömrünün matematiksel gösterimini çalışmışlardır. Tsitmidelis ve ark. (2002), güvenilirlik sınırlarını bulmak için genetik algoritmayı kullanmışlardır. Kerscher ve ark. (2003), tahminde bulanık mantığa (Fuzzy logic) başvurmuştur. Marseguerra ve ark. (2003) güvenilirlik tahmini için yapay sinir ağlarını kullanmışlardır.

3. TEMEL TANIM VE AÇIKLAMALAR**3.1. Güvenilirlik Analizinde Kullanılan İstatistiksel Dağılımlarla İlgili Temel Kavramlar ve Tanımlar**

TANIM 3.1. Değeri bir deney sonucuyla belirtilen bir değişkene rastgele değişken denir (Akdeniz 2006).

TANIM 3.2. X bir rastgele değişken olsun. X 'in alabileceği değerlerin sayısı sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta ise X 'e kesikli rastgele değişken denir (Akdeniz 2006).

TANIM 3.3. X bir rastgele değişken olsun. X bir aralıkta ya da birden çok aralıkta her değeri alabiliyorsa X 'e sürekli rastgele değişken denir (Akdeniz 2006).

TANIM 3.4. X sonlu sayıdaki $x_1, x_2, \dots, x_N$ değerlerini $f(x_i) = P(X = x_i)$, ($i = 1, 2, \dots, N$) olasılıkları ile alabilen kesikli rastgele değişken olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X 'in olasılık fonksiyonu denir (Hogg ve Craig 1995, Akdeniz 2006).

1. $f(x) \geq 0$, tüm x 'ler için

2. $\sum_{i=1}^N f(x_i) = 1$

TANIM 3.5. X , $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanan sürekli rastgele değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ foksiyonuna X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir (Hogg ve Craig 1995, Akdeniz 2006).

1. $f(x) \geq 0 \quad -\infty < x < \infty$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ ($f(x)$ eğrisi altında kalan ve x eksenini ile sınırlanan alan 1'e

eşittir.)

TANIM 3.6. X , $f(x)$ olasılık fonksiyonuna sahip kesikli rastgele değişken olsun. X 'in dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \quad (3.1)$$

dir (Evans ve ark. 1993, Akdeniz 2006).

TANIM 3.7. X , $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rastgele değişken olsun. X 'in dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad (3.2)$$

dir (Evans ve ark. 1993, Akdeniz 2006).

TANIM 3.8. X sonlu sayıdaki $x_1, x_2, \dots, x_N$ değerlerini $f(x_i) = P(X = x_i)$, $(i = 1, 2, \dots, N)$ olasılıkları ile alabilen kesikli rastgele değişken olsun. X 'in beklenen değeri veya ortalaması, $E(X)$, aşağıdaki eőitlikle verilir (Kapadia ve ark. 2005, Akdeniz 2006).

$$E(X) = \sum_{i=1}^N x_i f(x_i) \quad (3.3)$$

TANIM 3.9. X , $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rastgele değişken olsun. X 'in beklenen değeri veya ortalaması, $E(X)$, aşağıdaki eőitlikle verilir (Kapadia ve ark. 2005, Akdeniz 2006).

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.4)$$

TANIM 3.10. X bir rastgele değişken olsun. X 'in ortalaması $E(X) = m$ ise X 'in varyansı, $Var(X)$ veya s_x^2 aşağıdaki gibi tanımlanır (Evans ve ark. 1993, Akdeniz 2006).

$$s_x^2 = Var(X) = E[(X - m)^2] = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (3.5)$$

TANIM 3.11. X , $f(x)$ olasılık fonksiyonuna sahip kesikli bir rastgele değişken olsun. X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M(t) = E(\exp(tx)) = \sum_x \exp(tx) f(x) \quad (3.6)$$

eşitliği ile ifade edilir (Evans ve ark. 1993).

TANIM 3.12. X , $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rastgele değişken olsun. X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M(t) = E(\exp(tx)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx) f(x) dx \quad (3.7)$$

eşitliği ile ifade edilir (Evans ve ark. 1993).

TANIM 3.13. X , $f(x)$ olasılık fonksiyonuna sahip kesikli bir rastgele değişken olsun. $g(x) = x^r$ fonksiyonunun beklenen değerine X rastgele değişkeninin sıfır etrafındaki r . moment denir. m_r' ile gösterilen merkez ya da sıfır etrafındaki r . moment,

$$m_r' = E(X^r) = \sum_x x^r f(x) \quad (3.8)$$

veya

$$m_r' = \left(\frac{d^r M(t)}{dt^r} \right)_{t=0} \quad (3.9)$$

eşitliği ile ifade edilir (Kapadia ve ark. 2005).

TANIM 3.14. X , $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rastgele değişken olsun. $g(x) = x^r$ fonksiyonunun beklenen değerine X rastgele değişkenin sıfır etrafındaki r . momenti denir. m_r' ile gösterilen merkez ya da sıfır etrafındaki r . moment,

$$m_r' = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx \quad (3.10)$$

veya

$$m_r' = \left(\frac{d^r M(t)}{dt^r} \right)_{t=0} \quad (3.11)$$

eşitliği ile ifade edilir (Kapadia ve ark. 2005).

TANIM 3.15. $f(x)$ olasılık fonksiyonuna sahip kesikli bir X rastgele değişkeninin m_r ile gösterilen ortalama etrafındaki r . momenti,

$$m_r = E \left[\left(x - m_1' \right)^r \right] = \sum_x \left(x - m_1' \right)^r f(x) \quad (3.12)$$

dir (Kapadia ve ark. 2005).

TANIM 3.16. $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir X rastgele değişkeninin m_r ile gösterilen ortalama etrafındaki r . momenti,

$$m_r = E \left[\left(x - m_1' \right)^r \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_1' \right)^r f(x) dx \quad (3.13)$$

dir (Kapadia ve ark. 2005).

TANIM 3.17. Bir dağılımın a_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$a_3 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \quad (3.14)$$

dir.

Tek tepeli dağılımlarda $m_3 < 0$ ise sola, $m_3 > 0$ ise sağa çarpıklık söz konusudur. $m_3 = 0$ ise dağılım simetriktir (Hahn ve Shapiro 1967).

TANIM 3.18. Bir dağılımın a_4 ile gösterilen sivrililiği,

$$a_4 = \frac{m_4}{m_2^2} \quad (3.15)$$

dir.

Dağılımların sivri ya da basık olmaları konusunda yorum standart normal dağılıma göre yapılır. Standart normal dağılımın sivrililiği üçtür. $a_4 > 3$ ise dağılım standart normal dağılımdan daha sivri, $a_4 < 3$ ise dağılım standart normal dağılımdan daha basıktır (Hahn ve Shapiro 1967).

TANIM 3.19. Bir X rastgele değişkeninin modu, en yüksek olasılığa sahip rastgele değişkenin değeridir (Evans ve ark. 1993).

TANIM 3.20. $f(x)$ olasılık fonksiyonuna sahip kesikli tipteki bir X rastgele değişkeninin medyanı,

$$\sum_u^x f(u) = 0.5 \quad (3.16)$$

eşitliğini sağlayan X değeridir (Evans ve ark. 1993).

TANIM 3.21. $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli tipteki bir X rastgele değişkeninin medyanı,

$$\int_{-\infty}^x f(u)du = 0.5 \quad (3.17)$$

eşitliğini sağlayan X değeridir (Evans ve ark. 1993).

TANIM 3.22. $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(x)$ olmak üzere,

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \quad (3.18)$$

fonksiyonuna risk fonksiyonu denir (Ireson ve ark. 1996).

TANIM 3.23. X_1 ve X_2 sürekli rastgele değişkenler ise,

$$f(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \quad (3.19)$$

şeklinde verilen ve aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyon (X_1, X_2) değerleri için ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu veya ortak olasılık dağılımı olarak adlandırılır (Hogg ve Craig 1995).

$$1. f(x_1, x_2) \geq 0 \quad -\infty < x_1 < \infty \quad -\infty < x_2 < \infty$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad (f(x_1, x_2) \text{ eğrisi altında kalan ve } x \text{ eksenini ile}$$

sınırlanan alan 1'e eşittir.)

TANIM 3.24. X_1 ve X_2 sürekli rastgele değişkenler ise ortak dağılım fonksiyonları,

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} f(u, v) du dv \quad (3.20)$$

şeklindedir (Kapadia ve ark. 2005).

TANIM 3.25. X_1 ve X_2 sürekli rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları $f(x_1, x_2)$ olsun. X_1 'in marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \quad (3.21)$$

şeklindedir (Hogg ve Craig 1995).

TANIM 3.26. X_1 ve X_2 sürekli rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları $f(x_1, x_2)$ olsun. X_2 'nin marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 \quad (3.22)$$

şeklindedir (Hogg ve Craig 1995).

TANIM 3.27. X_1 ve X_2 sürekli rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları $f(x_1, x_2)$ olsun. $X_2 = x_2$ verilmişken X_1 'in koşullu dağılımı,

$$f(x_1/x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)} \quad (3.23)$$

şeklindedir (Hogg ve Craig 1995).

TANIM 3.28. X_1 ve X_2 sürekli rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları $f(x_1, x_2)$ olsun. $X_1 = x_1$ verilmişken X_2 'nin koşullu dağılımı,

$$f(x_2/x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)} \quad (3.24)$$

şeklindedir (Hogg ve Craig 1995).

TANIM 3.29. X_1 ve X_2 sürekli rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları $f(x_1, x_2)$ olsun. $X_1 = x_1$ verilmişken X_2 'nin koşullu beklenen değeri,

$$E(X_2/X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)} dx_2 \quad (3.25)$$

şeklindedir (Hogg ve Craig 1995).

TANIM 3.30. X_1 ve X_2 sürekli rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları $f(x_1, x_2)$ olsun. $X_2 = x_2$ verilmişken X_1 'in koşullu beklenen değeri,

$$E(X_1/X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)} dx_1 \quad (3.26)$$

şeklindedir (Hogg ve Craig 1995).

TANIM 3.31. X_1 ve X_2 sürekli rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları $f(x_1, x_2)$ olsun. X_1 ve X_2 rastgele değişkenlerinin ortak moment çıkaran fonksiyonu,

$$M(t_1, t_2) = E(\exp(t_1 x_1 + t_2 x_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(t_1 x_1 + t_2 x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (3.27)$$

eşitliği ile verilir (Hogg ve Craig 1995).

TANIM 3.32. X_1 ve X_2 sürekli rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları $f(x_1, x_2)$ olsun. X_1 rastgele değişkeninin ortalaması m_1 ; X_2 rastgele değişkeninin ortalaması m_2 olsun. X_1 ve X_2 rastgele değişkenlerinin kovaryansı,

$$Cov(X_1, X_2) = E[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)] = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) \quad (3.28)$$

şeklindedir (Hogg ve Craig 1995).

TANIM 3.33. X_1 ve X_2 sürekli rastgele değişkenler olsunlar. X_1 rastgele değişkeninin varyansı s_1 ; X_2 rastgele değişkeninin varyansı s_2 olsun. X_1 ve X_2 rastgele değişkenlerinin korelasyon katsayısı r_{12} ,

$$r_{12} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{s_1 s_2} \quad (3.29)$$

eşitliği ile verilir (Hogg ve Craig 1995).

TANIM 3.34. X_1 ve X_2 sürekli rastgele değişkenler olsunlar. X_2 rastgele değişkeninin varyansı s_2 , X_1 ve X_2 rastgele değişkenlerinin korelasyon katsayısı r olsun. $X_1 = x_1$ verilmişken X_2 'nin koşullu varyansı,

$$Var(X_2/X_1) = s_2^2 (1 - r^2) \quad (3.30)$$

şeklindedir (Hogg ve Craig 1995).

TANIM 3.35. X_1 ve X_2 sürekli rastgele değişkenler olsunlar. X_1 rastgele değişkeninin varyansı s_1 , X_1 ve X_2 rastgele değişkenlerinin korelasyon katsayısı r olsun. $X_2 = x_2$ verilmişken X_1 'in koşullu varyansı,

$$Var(X_1/X_2) = s_1^2 (1 - r^2) \quad (3.31)$$

şeklindedir (Hogg ve Craig 1995).

3.2. Güvenilirlik Konusunda Temel Açıklamalar**3.2.1. Bir rnn Güvenilirliği**

Bir rn için güvenilirlik, sağlıklı çalışmasına devam etme olasılığı olarak tanımlanabilir. Güvenilirlik zamanla azalırken, güvenilmezlik zamanla artar. Herhangi bir zamanda, bir ürün ya işler durumdadır ya da arızalı/çalışamaz durumdadır. Başarısızlık olasılığı güvenilmezlik, başarı olasılığı güvenilirlik olarak ifade edilebilir.

Güvenilirlik ve güvenilmezlik fonksiyonları için sırasıyla $R(t)$ ve $F(t)$ gösterimleri kullanılmıştır. Güvenilirlik fonksiyonu için bazı uygulamalarda $R(t)$ yerine $S(t)$ kullanımı tercih edilir. Bunun nedeni de güvenilirlik yerine sağ kalım ifadesinin kullanılmasıdır.

n_0 sayıdaki özdeş bileşenler bir teste tabi tutulsun. $(t - \Delta t, t)$ zaman aralığında, $n_b(t)$ sayıdaki bileşenin başarısız olduğu, $n_s(t)$ sayıdaki bileşenin ise sağ kaldığı gözlensin ($n_b(t) + n_s(t) = n_0$). Bu durumda t anında $R(t)$ ile gösterilen güvenilirlik,

$$R(t) = \frac{n_s(t)}{n_s(t) + n_b(t)} = \frac{n_s(t)}{n_0} \quad (3.32)$$

olur. Diğer bir ifadeyle t zamana karşı dayanma rastgele değişkeni ise, t anında güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(t) = P(T > t) \quad (3.33)$$

şeklinde ifade edilir (Kadifeli 1987). Böylece,

$$R(t) + F(t) = 1 \quad (3.34)$$

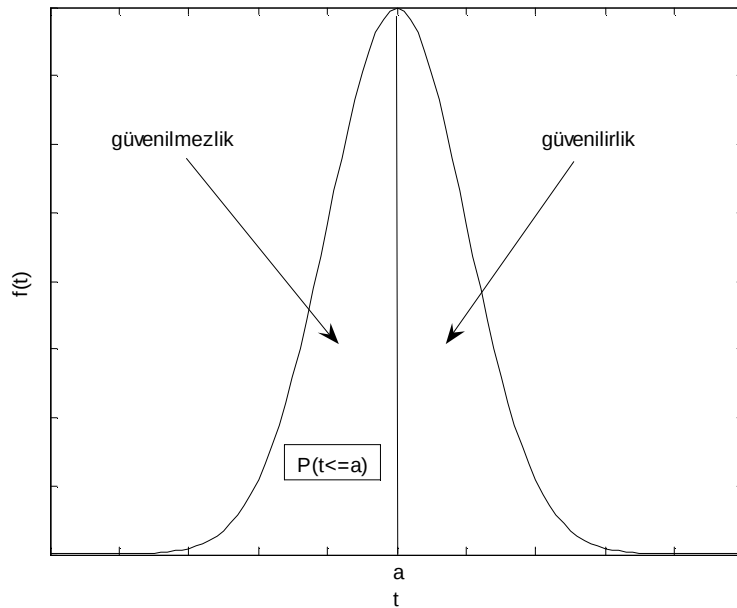
dir. Yani, t anında bir ürünün güvenilirliği ile başarısızlık olasılığı toplamı 1 dir. Zamana karşı dayanma rastgele değişkeni t , $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ise (3.34) eşitliğinden,

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(u) du \quad (3.35)$$

elde edilir (Kadifeli 1987). (3.35) eşitliğinin t 'ye göre türevi alınır,sa,

$$\frac{dR(t)}{dt} = -f(t) \quad (3.36)$$

bulunur (Elsayed 1996).



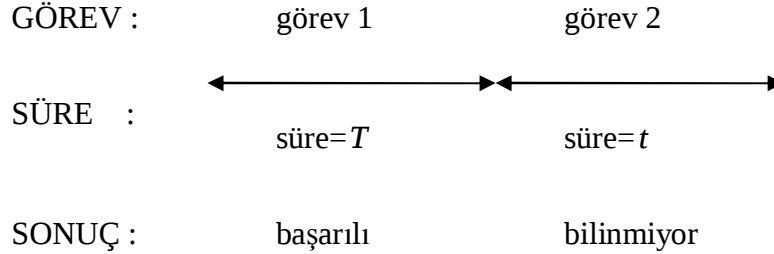
şekil 3.1. Güvenilirlik ve güvenilmezlik arasındaki ilişki.

(http://www.weibull.com/LifeDataWeb/the_reliability_function.htm)

3.2.2. Koşullu Güvenilirlik Fonksiyonu

Koşullu güvenilirlik hesaplamaları, daha önce belirli bir sürede işlevini başarıyla tamamladığı bilinen bir ünitenin özel bir sürede işlevini başarıyla

tamamlaması olasılığını hesaplama olanağı sağlar. Öyleyse, koşullu güvenilirlik fonksiyonu kullanılmış ekipmanların güvenilirliği olarak düşünülebilir.



(http://www.weibull.com/LifeDataWeb/the_reliability_function.htm)

Burada t : yeni görev için süre ve T : başarıyla tamamlanmış eski göreve ait süre olmak üzere koşullu güvenilirlik fonksiyonu

$$R(t/T) = \frac{R(T+t)}{R(T)} \quad (3.37)$$

eşitliği ile verilir.

3.2.3. Onarılamaz Parçalar

Onarılamaz bir üründe bulunan N tane parça T süresince test edilsin ve gerçekleşen hatalar/arızalar kaydedilsin. T süresince N parçada hata/arıza gözlemlendiği ve i . hatanın/arızanın T_i 'de gerçekleştiği varsayılır. Buna göre, N parça

için toplam dayanma süresi $\sum_{i=1}^N T_i$ dir. Ortalama dayanma süresi ise

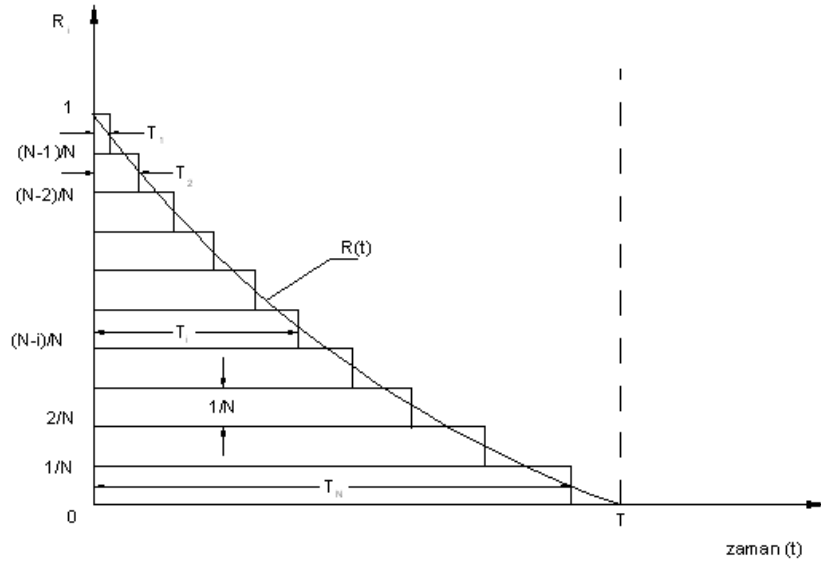
$$MTTF = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i \quad (3.38)$$

eşitliği ile verilir. $\bar{T}$ ile gösterilen ortalama hata oranı da

$$\bar{l} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N T_i} \quad (3.39)$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi ortalama hata oranı, ortalama dayanma süresinin çarpmaya göre tersidir.

$t = T_i$ 'de $N - i$ tanesi çalışır durumda olan parçaların sayısı $t = T$ 'de 0 olacaktır. Buna bağlı olarak, $R_i = \frac{(N-i)}{N}$, $t = 0$ 'da 1 iken $t = T$ 'de 0 olur.



Şekil 3.2. Onarılamaz ürün için zamana bağlı güvenilirlik fonksiyonu (Bentley 1993).

Şekil 3.2 incelendiğinde i . dikdörtgen için yükseklik $\frac{1}{N}$, uzunluk T_i ve alan

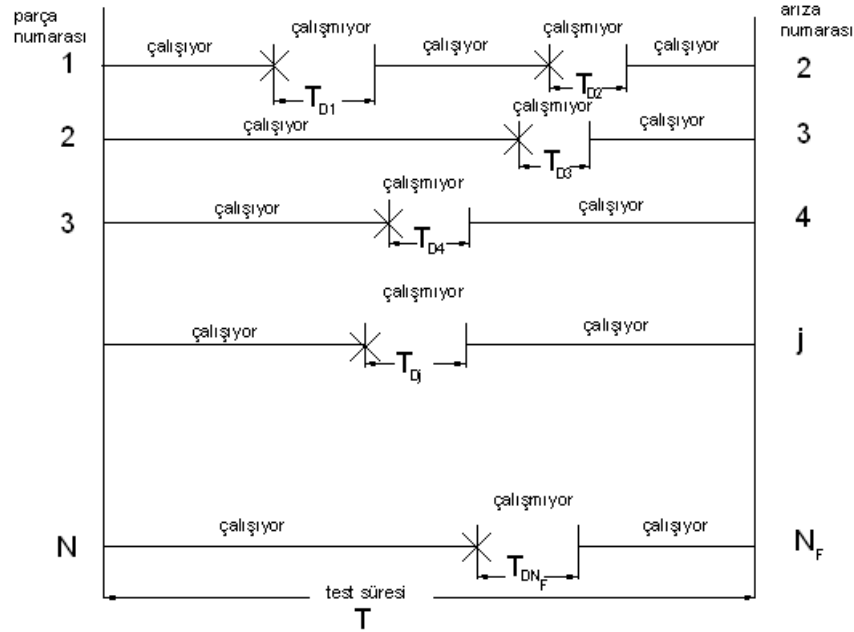
$\frac{T_i}{N}$ 'dir. Böylece $MTTF$, grafiğin altındaki alana eşittir. $N \rightarrow \infty$ iken R_i kesikli güvenilirlik fonksiyonu, sürekli güvenilirlik fonksiyonu olur. Böylece, $R(t)$ altındaki alan $\int_0^T R(t)dt$ olur. Genel olarak, sürekli güvenilirlik fonksiyonu cinsinden $MTTF$,

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t)dt \quad (3.40)$$

şeklinde ifade edilir (Bentley 1993). $MTTF$, zamana karşı dayanma süresi için kullanılan rastgele değişkeninin beklenen değeri ya da ortalamasıdır (Ireson ve ark 1996, Elsayed 1996).

3.2.4. Onarılabilir Parçalar

Onarılabilir üründe bulunan N tane parça T süresince test edilsin. T_{D_j} : hatanın/arızanın gerçekleştiği zamanla, arızalı parçanın onarılmış olarak yerine konup çalışmaya başladığı zaman arasında geçen süreyi, yani arıza/çalışmama süresini göstersin. Buna göre, N_F hata/arıza sayısı olmak üzere toplam arıza/çalışmama süresi, $\sum_{i=1}^{N_F} T_{D_j}$ dir.



şekil 3.3. Onarılabilir üründe hata/başarışlılık numunesi (Bentley 1993).

Bu durumda ortalama çalışmama süresi,

$$MDT = \frac{1}{N_F} \sum_{j=1}^{N_F} T_{D_j} \quad (3.41)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca çalışma süresi,

$$\text{Çalışma süresi} = NT - \sum_{j=1}^{N_F} T_{D_j} = NT - N_F MDT \quad (3.42)$$

dir. Ortalama dayanma süresi ise

$$MTBF = \frac{NT - N_F MDT}{N_F} \quad (3.43)$$

biçimindedir. Ortalama hata oranı da

$$\bar{I} = \frac{N_F}{NT - N_F MDT} \quad (3.44)$$

olarak ifade edilir. Görüldüğü gibi ortalama hata oranı, hatalar arası ortalama sürenin çarpmaya göre tersidir.

A ile gösterilen kullanılabilirlik toplam çalışma süresinin test süresine bölümüdür.

$$A = \frac{N_F \times MTBF}{N_F \times MTBF + N_F \times MDT} = \frac{MTBF}{MTBF + MDT} \quad (3.45)$$

U ile gösterilen kullanılmazlık ise toplam arıza/çalışmama süresinin test süresine bölümüdür.

$$U = \frac{MDT}{MTBF + MDT} \quad (3.46)$$

Son iki eşitlik yardımıyla,

$$A + U = 1 \quad (3.47)$$

bulunur (Bentley 1993, Andrews ve Moss 2002).

3.2.5. Risk Oranı Fonksiyonunun Genel Formu

$[t_1, t_2]$ zaman aralığında, bir bileşenin başarısızlık olasılığı,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = F(t_2) - F(t_1) = R(t_1) - R(t_2) \quad (3.48)$$

şeklinde yazılabilir (Elsayed 1996). t_1 anından önce bir hatanın gerçekleşmediği biliniyorken $[t_1, t_2]$ aralığında birim zamanda başarısızlık olasılığı hata oranı olarak tanımlanır. Hata oranı,

$$\frac{P(t_1 \leq T < t_2 / T > t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{P(t_1 \leq T < t_2)}{(t_2 - t_1)P(T > t_1)} = \frac{F(t_2) - F(t_1)}{(t_2 - t_1)R(t_1)} \quad (3.49)$$

eşitliği ile verilir (Kadifeli 1987). Hata oranı güvenilirlik fonksiyonu yardımıyla,

$$\frac{P(t_1 \leq T < t_2 / T > t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{R(t_1) - R(t_2)}{(t_2 - t_1)R(t_1)} \quad (3.50)$$

olarak yazılır. (3.50)'deki eşitlikte t_1 , t ve t_2 , $t + \Delta t$ ile yer değiştirilirse bu eşitlik

$$\frac{P(t_1 \leq T < t_2 / T > t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t R(t)} \quad (3.51)$$

olarak yeniden yazılabilir. Diğer taraftan risk fonksiyonu, Δt sifıra yaklaşırken hata oranının limiti olarak tanımlanır. Yani risk fonksiyonu, anlık hata oranıdır. Böylece risk fonksiyonu,

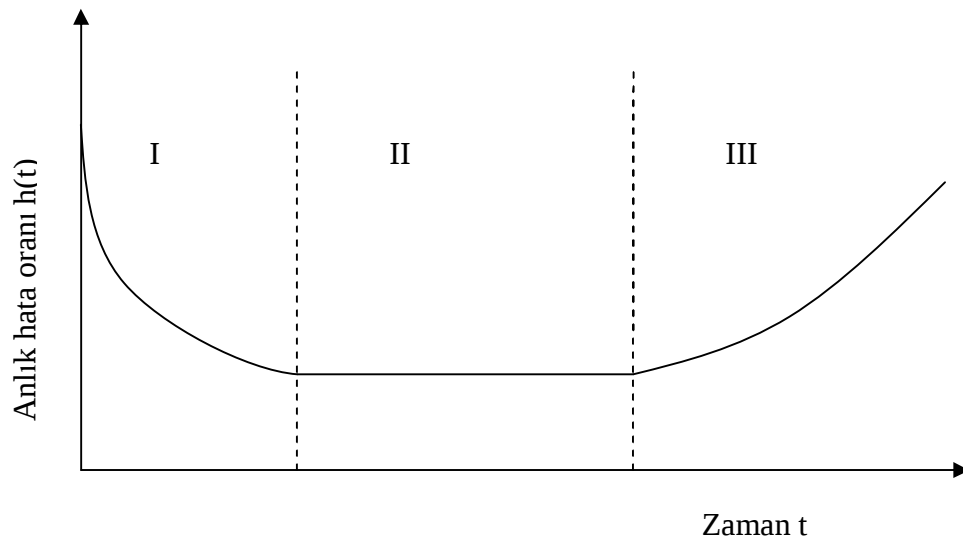
$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t R(t)} = \frac{1}{R(t)} \left[-\frac{d}{dt} R(t) \right] \quad (3.52)$$

şeklinde elde edilir. (3.36)'daki eşitlik yardımıyla,

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (3.53)$$

olarak da yazılabilir (Elsayed 1996, Kadifeli 1987).

Şekil 3.4 ile bir ürünün yaşamı süresince risk oranının nasıl değişiklik gösterdiği görülmektedir. Risk oranına ilişkin bu eğri küvet eğrisi olarak adlandırılır. Öyleki eğride üç bölge gözlenir. Bu üç bölge sırasıyla başlangıç hatalarına (I), rastgele hatalara (II) ve yıpranmaya bağlı hatalara (III) karşılık gelir. Eşyalar yeni olduğunda, özellikle ürün yeni tasarlanmışsa erken hatalar: tasarım kusurlarından, kötü kalite bileşenlerden, imalat kusurlarından, kurum hatalarından, bakım hatalarından ya da ürünün kullanıcı için alışılmamış olmasından kaynaklanır. Bu durumda kusurlar düzeltilip, zayıf bileşenler değiştirilir. Kullanıcı ürünün kurulmasına, çalışmasına ve bakımına zamanla alışır. Risk oranı bu bölgede zamanla azalır. İkinci bölgede risk oranı sabittir. Bu bölgede hatalar tahmin edilemeyen çeşitli nedenlere bağlı olarak ortaya çıkar. Üçüncü bölgede ise ürünün yıpranmasına bağlı olarak risk oranı artar (Bentley 1993, Elsayed 1996). Ireson ve ark (1996), şekilde I, II ve III ile gösterilen üç bölgeyi sırasıyla erken ölümlülük peryodu, yararlı ömür peryodu ve yıpranma peryodu olarak adlandırmışlardır.



Şekil 3.4. Küvet eğrisi (Bentley 1993, Elsayed 1996).

3.2.6. Seri Sistemler

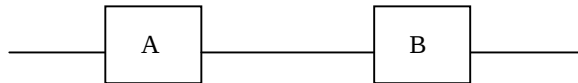
İki bileşenli seri bir sistem Şekil 3.5 ile verilmektedir. Bu sistemde atıl durumda olan bileşen yoktur. Herhangi bir bileşenin başarısızlığı, sistem başarısızlığına neden olur. R_A ve R_B sırasıyla A ve B bileşenlerinin başarı olasılığı ve F_A ve F_B sırasıyla A ve B bileşenlerinin başarısızlık olasılıkları olsun. Yani, $F_A + R_A = 1$ ve $F_B + R_B = 1$ şeklindedir. A bileşeninin başarısız olması durumu A_F , B bileşeninin başarısız olması durumu B_F ile gösterilsin. Bu durumda sistemin başarısızlık olasılığı

$$\begin{aligned}
 F_{sistem} &= P(A_F \text{ veya } B_F) \\
 &= P(A_F) + P(B_F) - P(A_F \text{ ve } B_F) \\
 &= F_A + F_B - F_A F_B \\
 &= 1 - (1 - F_A)(1 - F_B)
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

olarak yazılır. Sistem, A bileşeninin çalışması (A_W) ve B bileşeninin çalışması (B_W) durumunda çalışır. Yani sistem başarı olasılığı

$$\begin{aligned}
 R_{sistem} &= P(A_W \text{ ve } B_W) \\
 &= R_A R_B
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

dir.



Şekil 3.5. İki bileşenli seri sistem (Andrews ve Moss 2002).

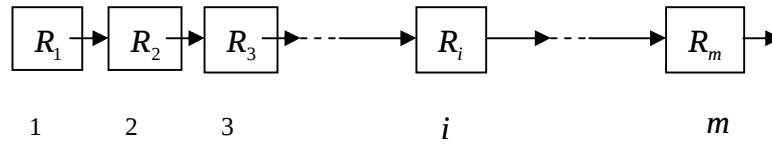
Yukarıda iki bileşenli seri sistem için açıklamalar genelleştirilsin. m elemandan oluşan seri bir sistemde elemanların güvenilirlikleri sırasıyla $R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_m$ olsun. Her bir elemanın güvenilirliğinin, diğerlerinin güvenilirliklerinden bağımsız olduğu varsayalım. Sistemin sağ kalımı, her bir

elemanın/bileşenin sağ kalımını gerektirir. Bir bileşenin başarısızlığı durumunda sistem başarısız olur. Bunlara bağlı olarak sırasıyla sistem güvenilirliği ve güvenilmezliği,

$$R_{sistem} = \prod_{i=1}^m R_i \quad (3.56)$$

$$F_{sistem} = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - F_i) \quad (3.57)$$

olarak ifade edilir (Andrews ve Moss 2002, Bentley 1993).



Şekil 3.6. m bileşenli seri sistem (Bentley 1993).

3.2.7. Paralel Sistemler

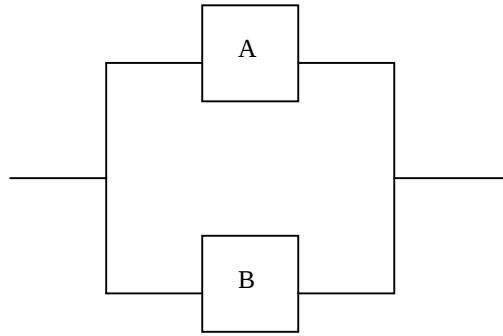
İki bileşenli paralel bir sistem şekil 3.7’de gösterilmektedir. A ve B bileşenlerinden biri başarısız olsa dahi sistem çalışır. Bu ifade yedekli/emniyetli bir sistemi (fully redundant system) belirtir. Sistemin başarısızlığı A ve B bileşenlerinin başarısızlığı ile gerçekleşir. Yani,

$$\begin{aligned} F_{sistem} &= P(A_F \text{ ve } B_F) \\ &= F_A F_B \end{aligned} \quad (3.58)$$

dir. A veya B çalışıyorsa, sistem çalışır. Yani,

$$\begin{aligned} R_{sistem} &= P(A_W \text{ veya } B_W) \\ &= 1 - (1 - R_A)(1 - R_B) \end{aligned} \quad (3.59)$$

dir.



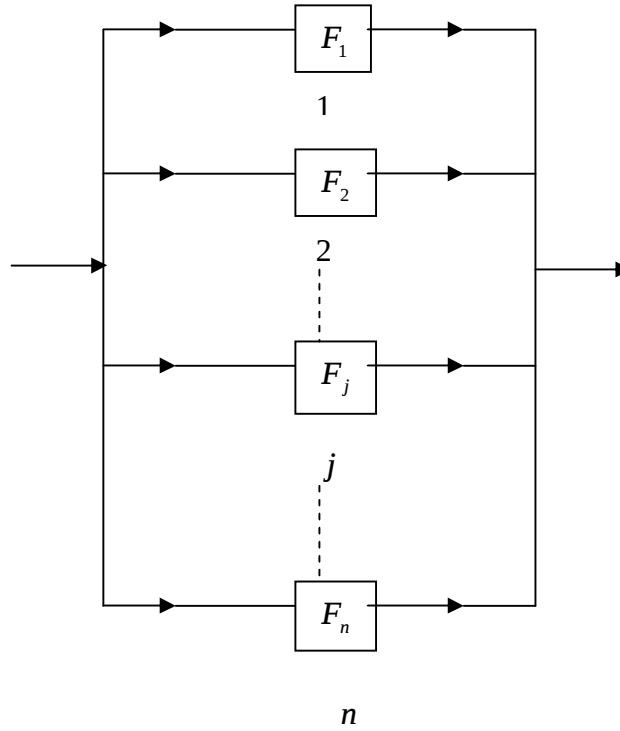
Şekil 3.7. İki bileşenli paralel sistem (Andrews ve Moss 2002).

Yukarıda iki bileşenli paralel sistem için açıklamalar genelleştirilsin. n elemandan oluşan paralel bir sistemin güvenilirlikleri sırasıyla $F_1, F_2, \dots, F_j, \dots, F_n$ olsun. Sistemin işlevini gerçekleştirmesi için sadece bir elemanın işlevi bile yeterlidir. Kalan elemanlar sadece sistemin güvenilirliğini artırır. Sistem başarısızlığı tüm elemanların başarısızlığı durumunda gerçekleşir. Öyleyse paralel bir sistemde eleman sayısını arttırmak, tüm sistemin güvenilirliğini artırır. Her bir elemanın güvenilirliğinin, diğerlerinin güvenilirliklerinden bağımsız olduğu varsayılır. Bunlara bağlı olarak sistem güvenilirliği ve güvenilirliği sırasıyla,

$$F_{sistem} = \prod_{i=1}^n F_i \quad (3.60)$$

$$R_{sistem} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i) \quad (3.61)$$

şeklinde ifade edilir (Andrews ve Moss 2002, Bentley 1993).



Şekil 3.8. n bileşenli paralel sistem (Bentley 1993).

3.2.8. Genel Seri-Paralel Sistemler

Genel seri-paralel sistem şekil 3.9’da gösterilmiştir. Genel seri paralel sistem m tane seri bağlı eleman içeren n tane paralel alt sistemden oluşmaktadır. R_{ji} , j . alt sistemdeki i . elemanın güvenilirliğini göstermektedir. Buna göre j . alt sistemin güvenilirliği,

$$R_j = R_{j1}R_{j2}...R_{ji}...R_{jm} = \prod_{i=1}^m R_{ji} \quad (3.62)$$

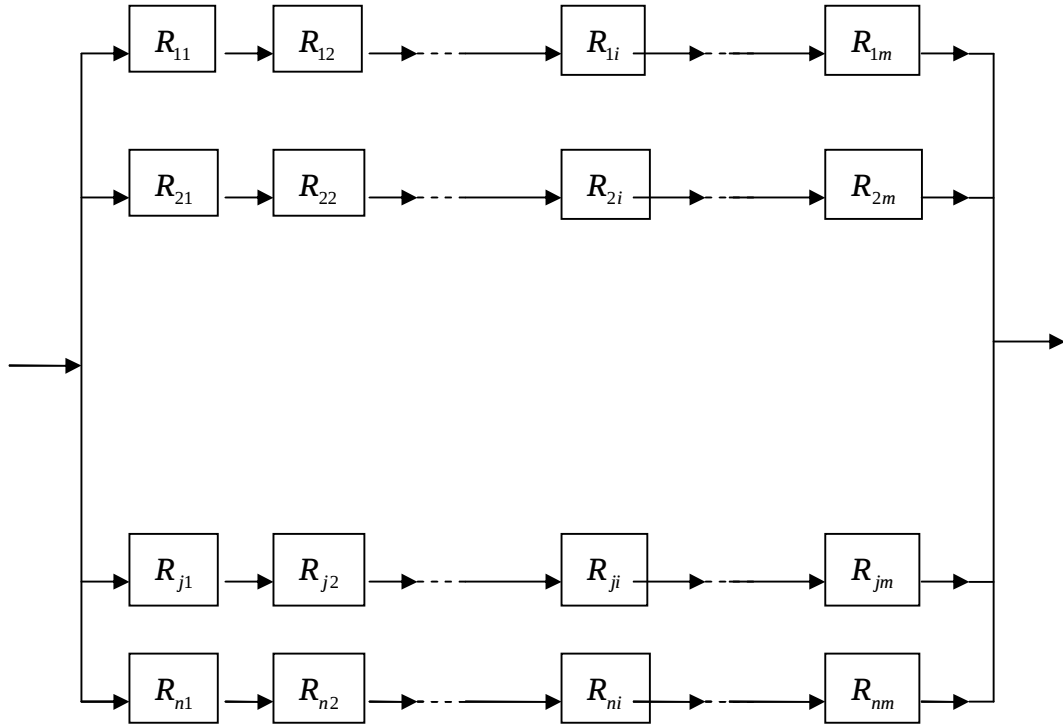
şeklindedir. j . alt sistemin güvenilirmezliği ise

$$F_j = 1 - \prod_{i=1}^m R_{ji} \quad (3.63)$$

şeklindedir. Tüm sistemin güvenilirmezliği de

$$F_{sistem} = \prod_{j=1}^n \left[1 - \prod_{i=1}^m R_{ji} \right] \quad (3.64)$$

eşitliği ile ifade edilir (Bentley 1993).



şekil 3.9. Seri-paralel sistem (Bentley 1993).

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

4.1. Normal Dağılım

TANIM 4.1. Sürekli tipteki bir rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t; m, s) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{s}\right)^2\right) \quad -\infty < t < \infty \quad -\infty < m < \infty \quad s > 0 \quad (4.1)$$

ise t rasgele değişkenine m ve s parametrelili normal dağılıma sahiptir denir. Burada m ve s parametreleri sırasıyla normal dağılımın konum ve yayılım parametreleridir.

m ve s parametrelili normal dağılıma ait olasılık yoğunluk fonksiyonunda $s = 1$ ve $m = 0$ alınırsa standart normal dağılım elde edilir.

Normal dağılımla ilgili $\Phi(\cdot)$ fonksiyonu için U rastgele değişkeni $U = \frac{(t-m)}{s}$ olarak alınsın. U için olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \quad (4.2)$$

şeklindedir. Buna normal dağılımın standart formu denir. U için dağılım fonksiyonu da,

$$\Phi(u) = P(U \leq u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (4.3)$$

şeklindedir (Johnson ve ark. 1994).

TEOREM 4.1. Normal dağılımın dağılım fonksiyonu,

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$F(t; m, s) = \frac{1}{s \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y-m}{s}\right)^2\right) dy \quad (4.4)$$

veya

$$F(t; m, s) = \Phi\left(\frac{t-m}{s}\right) \quad (4.5)$$

dir (Ireson ve ark. 1996).

TEOREM 4.2. m ve s parametrelili normal dağılıma sahip X rastgele değişkeni için moment çıkaran fonksiyonu,

$$M(t; m, s) = \exp\left(mt + \frac{s^2 t^2}{2}\right) \quad (4.6)$$

dir (Hogg ve Craig 1995).

TEOREM 4.3. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, normal dağılıma sahip ise beklenen değer; ya da ortalaması,

$$E(t) = m \quad -\infty < m < \infty \quad (4.7)$$

dur (Hogg ve Craig 1995).

TEOREM 4.4. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, normal dağılıma sahip ise varyansı,

$$Var(t) = s^2 \quad s > 0 \quad (4.8)$$

dır (Hogg ve Craig 1995).

TANIM 4.2. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, normal dağılıma sahip ise, a_3 ile gösterilen çarpıklığı,

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$a_3 = 0 \quad (4.9)$$

dır (Evans ve ark. 1993).

TANIM 4.3. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, normal dağılıma sahip ise, a_4 ile gösterilen sivriliği,

$$a_4 = 3 \quad (4.10)$$

tür (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.5. Normal dağılımın modu,

$$t = m \quad (4.11)$$

noktasındadır (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.6. Normal dağılımın medyanı,

$$t = m \quad -\infty < m < \infty \quad (4.12)$$

noktasındadır (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.7. Normal dağılımın $R(t)$ ile gösterilen güvenilirlik/sağ kalım fonksiyonu,

$$R(t) = \int_t^{+\infty} \frac{1}{s \sqrt{2p}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y-m}{s} \right)^2 \right] dy \quad (4.13)$$

veya

$$R(t) = 1 - \Phi \left(\frac{t-m}{s} \right) \quad (4.14)$$

dır (Ireson ve ark. 1996).

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

TEOREM 4.8. Normal dağılımın $R(T/t)$ ile gösterilen koşullu güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(T/t) = \frac{\int_{T+t}^{+\infty} \frac{1}{s\sqrt{(2p)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{s}\right)^2\right] dy}{\int_t^{+\infty} \frac{1}{s\sqrt{(2p)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{s}\right)^2\right] dy} \quad (4.15)$$

dir (Ebeling 1997).

TEOREM 4.9. Normal dağılımın $h(t)$ ile gösterilen risk fonksiyonu,

$$h(t) = \frac{\frac{1}{s\sqrt{(2p)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{s}\right)^2\right]}{\int_t^{+\infty} \frac{1}{s\sqrt{(2p)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{s}\right)^2\right] dy} \quad (4.16)$$

ya da eşdeğer olarak,

$$h(t) = \frac{\frac{f\left[\frac{(t-m)}{s}\right]}{s}}{1 - \Phi\left(\frac{t-m}{s}\right)} \quad (4.17)$$

dır (Ireson ve ark. 1996).

4.1.1. Normal Dağılımdaki Parametrelerin Tahmini

Tek değişkenli normal dağılımın m ve s parametrelerinin tahmin edicileri, maksimum likelihood yöntemi kullanılarak hesaplanacaktır.

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$; m ve s parametrelili normal dağılımdan alınmış n birimlik rastgele örneklem olsun. Bu gözlem değerleri kullanılarak bilinmeyen m ve s parametreleri için tahmin ediciler hesaplanacaktır.

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ 'lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n; m, s) = \left(\frac{1}{s\sqrt{2p}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - m}{s} \right)^2 \right) \quad (4.18)$$

dir. $L(m, s) = f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n; m, s)$ olsun. O halde,

$$L(m, s) = \left(\frac{1}{s\sqrt{2p}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - m}{s} \right)^2 \right) \quad (4.19)$$

dir. (4.19)'daki eşitliğin logaritması alındığında,

$$\ln\{L(m, s)\} = n \ln \left(\frac{1}{s\sqrt{2p}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - m}{s} \right)^2 \quad (4.20)$$

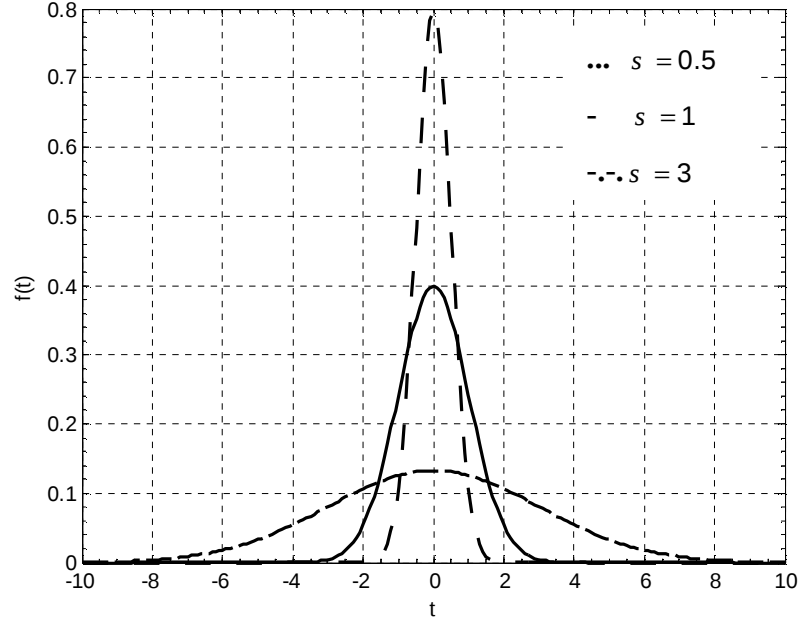
elde edilir. (4.20)'deki ifadenin m ve s parametrelerine göre türevleri alınıp sıfıra eşitlendiğinde m ve s parametrelerinin tahminleri sırasıyla

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad (4.21)$$

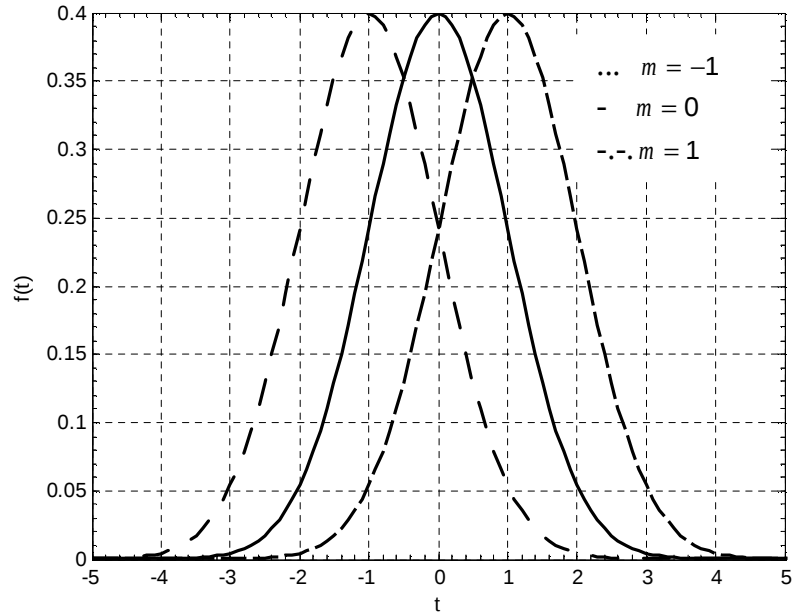
ve

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - m)^2 \quad (4.22)$$

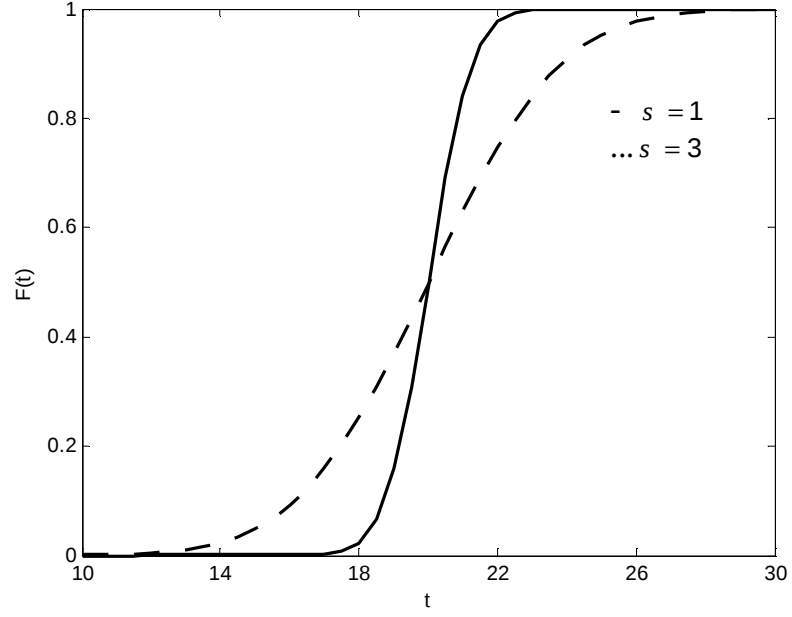
bulunur (Evans ve ark. 1993).



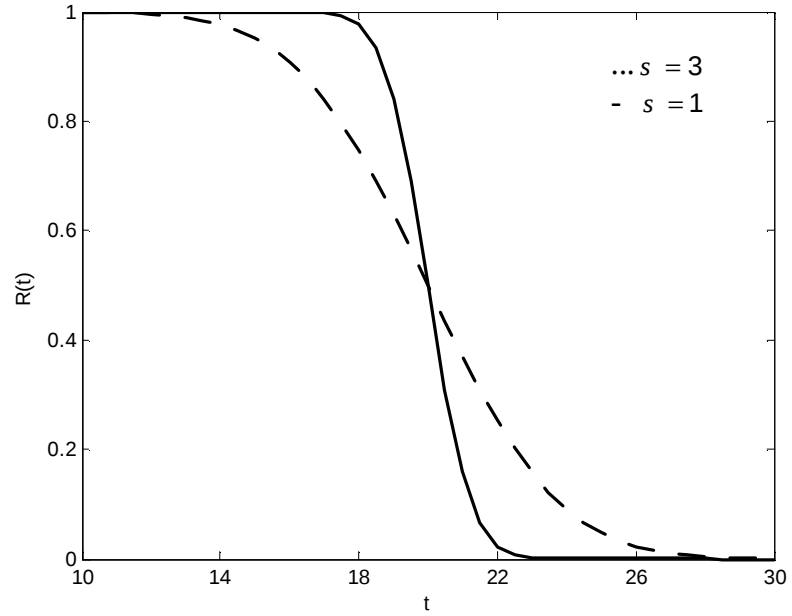
Şekil 4.1. Normal dağılımda $m = 0$ ve $s = 0.5$, $s = 1$, $s = 3$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri (Hahn ve Shapiro 1967, Johnson ve ark. 1994).



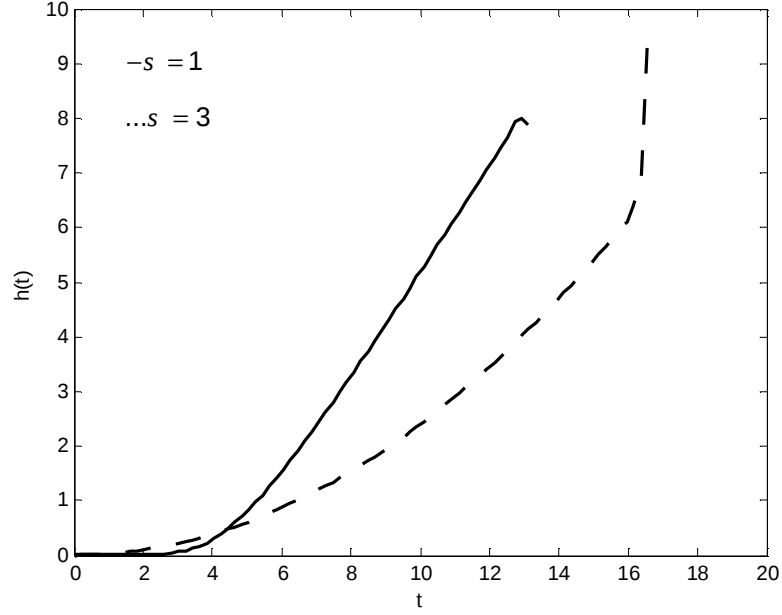
Şekil 4.2. Normal dağılımda $s = 1$ ve $m = -1$, $m = 0$, $m = 1$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri (Hahn ve Shapiro 1967, Johnson ve ark. 1994).



Şekil 4.3. Normal dağılımda $m = 20$ ve $s = 1, s = 3$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $F(t)$ dağılım fonksiyonlarının grafikleri (Elsayed 1996).



Şekil 4.4. Normal dağılımda $m = 20$ ve $s = 3, s = 1$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonlarının grafikleri (Elsayed 1996).



Şekil 4.5. Normal dağılımda $m = 5$ ve $s = 1, s = 3$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $h(t)$ risk fonksiyonlarının grafikleri (Hahn ve Shapiro 1967, Elsayed 1996).

4.1.2. Normal Dağılımın Uygulama Alanları

Gauss dağılımı da denilen normal dağılım, birçok alanda oldukça önemli bir olasılık dağılımıdır. Normal dağılımın mühendislikte ve güvenilirlikte önemli uygulamaları vardır. Bir uygulama olarak, yıpranmaya karşı hata veren cihazların analizi verilebilir. Sık sık, yıpranmaya bağlı olarak ortaya çıkan hata/başarısızlık dağılımı normal dağılıma yakınsadığında güvenilirliği tahmin etmek veya değerlendirmek için normal dağılım kullanılabilir. Diğer bir uygulama olarak imal edilen maddelerin analizi ve bunların fonksiyonlarını gerçekleştirme yeteneğinin analizi verilebilir. Birbirine benzeyen iki parça tam olarak aynı işlevi görmez. Parçalardaki değişiklik, sistemde değişikliğe yol açar. Tasarımda, parça değişkenliği hesaba katılmalıdır. Aksi taktirde farklı kombinasyonlara bağlı olarak sistem kendisinden bekleneni vermeyebilir. Olasılık teorisinin kalbi olduğu düşünülen merkezi limit teoremi de normal dağılımın ürünüdür. Teorem şu şekildedir.

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$X_1, X_2, X_3, \dots$ m ortalamalı, s^2 varyanslı, bağımsız rastgele değişkenler olsun. Böylece,

$$Z = \frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{s \sqrt{n}} \quad (4.23)$$

için dağılım $n \rightarrow \infty$ iken standart normal dağılıma yaklaşır (Ross 1997). Bir rastgele değişken çok sayıdaki bağımsız küçük nedenlerin toplam etkisini gösteriyorsa, merkezi limit teorimi o değişkenin dağılımının normal olduğunu ifade eder. Yani üretime bağlı olarak elektronik bileşen parçaları değerinde değişimlerin normal dağılıma sahip olduğu düşünülür (Engineer's Edge 2007).

Normal dağılım, sistemlerin çeşitli fiziksel, mekanik veya kimyasal özelliklerini modellemek için de kullanılır. Gaz moleküllerinin hızı (gas molecule velocity), giyim, ses, alüminyum alaşım çeliğinin çekme direnci/gerilme mukavemeti, (tensile strenght of aluminum alloy steel), elektrik kondansatörlerinin kapasite değişimi (capacity variation of electrical condensers), bir alanda elektrik gücü tüketimi, jeneratör çıkış gerilimi (generator output voltage) ve elektrik direnci (electrical resistance) normal dağılımın uygulama alanlarına örnek olarak gösterilebilir (Ireson ve ark. 1996).

Normal dağılım $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlıdır. Bununla birlikte güvenilirlik teorisinde, nesnelerin yaşam süreleriyle ilgilenilir. Bu nedenle nesnelerin yaşam süresiyle ilgili dağılımın $[0, \infty)$ aralığında olduğu varsayılır. Bu dağılım soldan kesik/kesilmiş dağılım olarak adlandırılır. Bu durumda yeni olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\tilde{f}(t) = \frac{f(t)}{1 - F(0)} = \frac{\frac{1}{s \sqrt{2p}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{t-m}{s}\right)^2\right)}{\frac{1}{s \sqrt{2p}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{t-m}{s}\right)^2\right)} \quad (4.24)$$

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

ile ifade edilir. Problemlerde kesik/kesilmiş dağılım olma durumu, $\frac{m}{s}$ oranı dört veya beşten büyük ise ihmal edilebilir bir etkiye sahiptir. Kesik/kesilmiş dağılımın ortalaması daima ilgili normal dağılımın ortalamasından büyüktür. Diğer taraftan, varyansı da daima küçüktür (Gnedenko ve Ushakov 1995). Ancak normal dağılımın ya da kesik/kesilmiş normal dağılımın kullanımında dağılım fonksiyonunun kapalı formu olmaması zorluk oluşturur.

ÖRNEK 4.1. Normal dağılıma sahip 5 üniteye ait dayanma süreleri saat cinsinden 10, 20, 30, 40, 50 olarak verilmiştir. Bu veriler için ortalama ve standart sapmayı hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Bu verilere göre ortalama ve standart sapma tahminleri (4.21) ve (4.22)'deki eşitlikler kullanılarak sırasıyla, $\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \frac{10 + 20 + 30 + 40 + 50}{5} = 30$

ve $\hat{s}_t = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = 14.14$ olarak bulunur.

ÖRNEK 4.2. Bir bileşen için zamana karşı dayanma süresi normal dağılım olsun. Dağılımın ortalaması 20 saat, standart sapması da 3 saattir. Aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

1. Bileşenin işletme zamanının 25. saatinde güvenilirliği nedir?
2. Bileşenin 25. ve 28. saatler arasında başarısız olması olasılığı nedir?
3. Bileşenin işletme zamanının 25. saatinde hata oranı nedir?

ÇÖZÜM: İlk sorunun çözümü için (4.14)'deki eşitlik kullanılarak, $R(25) = 1 - \Phi\left(\frac{25 - 20}{3}\right) = 1 - \Phi(1.667) = 0.04779$ bulunur. İkinci sorunun çözümü

için (4.5)'deki eşitlikten yararlanılır. Bu durumda $F(28) - F(25) = \Phi(2.667) - \Phi(1.667) = 0.04396$ bulunur. Üçüncü sorunun çözümü

için (4.17)'deki eşitlik kullanılarak, $h(25) = \frac{\Phi\left[\frac{25 - 20}{3}\right]}{3 \times R(25)} = 0.6939$ hata/saat bulunur

(Ireson ve ark. 1996).

4.2. Lognormal Dağılım

TANIM 4.4. Sürekli tipteki t rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t; m, s) = \frac{1}{ts \sqrt{(2p)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - m}{s} \right)^2 \right] \quad 0 < t < +\infty, m < +\infty, s > 0 \quad (4.25)$$

ise t rastgele değişkenine m ve s parametrelili lognormal dağılıma sahiptir denir (Evans ve ark. 1993, Patil ve ark.1984).

Burada m ve s parametreleri sırasıyla dağılımın konum ve şekil parametreleridir.

TEOREM 4.10. Lognormal dağılımın dağılım fonksiyonu,

$$F(t; m, s) = \frac{1}{s \sqrt{2p}} \int_0^t \frac{1}{y} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln y - m}{s} \right)^2 \right] dy \quad (4.26)$$

veya

$$F(t) = \Phi \left(\frac{\ln t - m}{s} \right) \quad (4.27)$$

dır (Ireson ve ark. 1996).

TEOREM 4.11. Lognormal dağılımın sıfır etrafındaki r . momenti,

$$m_r' = \exp \left(mr + \frac{s^2 r^2}{2} \right) \quad (4.28)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.12. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, lognormal dağılıma sahip ise beklenen değeri ya da ortalaması,

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$E(t) = \exp\left(m + \frac{s^2}{2}\right) \quad (4.29)$$

dir (Elsayed 1996).

TEOREM 4.13. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, lognormal dağılıma sahip ise varyansı,

$$Var(t) = \exp(2m + s^2)(\exp(s^2) - 1) \quad (4.30)$$

dir (Elsayed 1996).

TANIM 4.5. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, lognormal dağılıma sahip ise, a_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$a_3 = (\exp(s^2) + 2)\sqrt{\exp(s^2) - 1} \quad (4.31)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

TANIM 4.6. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, lognormal dağılıma sahip ise, a_4 ile gösterilen sivriligi,

$$a_4 = \exp(4s^2) + 2\exp(3s^2) + 3\exp(2s^2) - 3 \quad (4.32)$$

tür (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.14. Lognormal dağılımın modu,

$$t = \exp(m - s^2) \quad (4.33)$$

noktasındadır (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.15. Lognormal dağılımın medyanı,

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$t = \exp(m) \quad (4.34)$$

noktasındadır (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.16. Lognormal dağılımın $R(t)$ ile gösterilen güvenilirlik/sağ kalım fonksiyonu,

$$R(t) = \int_t^{+\infty} \frac{1}{ys \sqrt{(2p)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln y - m}{s} \right)^2 \right] dy \quad (4.35)$$

veya

$$R(t) = 1 - \Phi \left(\frac{\ln t - m}{s} \right) \quad (4.36)$$

dır (Ireson ve ark. 1996).

TEOREM 4.17. Lognormal dağılımın $R(T/t)$ ile gösterilen koşullu güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(T/t) = \frac{\int_{t+T}^{+\infty} \frac{1}{ys \sqrt{(2p)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln y - m}{s} \right)^2 \right] dy}{\int_t^{+\infty} \frac{1}{ys \sqrt{(2p)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln y - m}{s} \right)^2 \right] dy} \quad (4.37)$$

dir (Ebeling 1997).

TEOREM 4.18. Lognormal dağılımın $h(t)$ ile gösterilen risk fonksiyonu,

$$h(t) = \frac{\frac{1}{ts \sqrt{(2p)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - m}{s} \right)^2 \right]}{\int_t^{+\infty} \frac{1}{ys \sqrt{(2p)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln y - m}{s} \right)^2 \right] dy} \quad (4.38)$$

veya

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - \Phi\left(\frac{\ln t - m}{s}\right)} \quad (4.39)$$

dır (Elsayed 1996).

4.2.1. Lognormal Dağılımdaki Parametrelerin Tahmini

Tek değişkenli Lognormal dağılımın m ve s parametrelerinin tahmin edicileri maksimum likelihood yöntemi kullanılarak hesaplanacaktır.

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$; m ve s parametrelili lognormal dağılımdan alınmış n birimlik rastgele örneklem olsun. Bu gözlem değerleri kullanılarak bilinmeyen m ve s parametreleri için tahmin ediciler hesaplanacaktır.

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ 'lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n; m, s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n t_i (s \sqrt{2p})^n} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\ln t_i - m}{s} \right)^2 \right] \quad (4.40)$$

dir. $L(m, s) = f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n; m, s)$ olsun. O halde,

$$L(m, s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n t_i (s \sqrt{2p})^n} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\ln t_i - m}{s} \right)^2 \right] \quad (4.41)$$

dir. (4.41)'deki eşitliğin logaritması alındığında,

$$\ln \{L(m, s)\} = -\ln \left(\prod_{i=1}^n t_i (s \sqrt{2p})^n \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\ln t_i - m}{s} \right)^2 \quad (4.42)$$

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

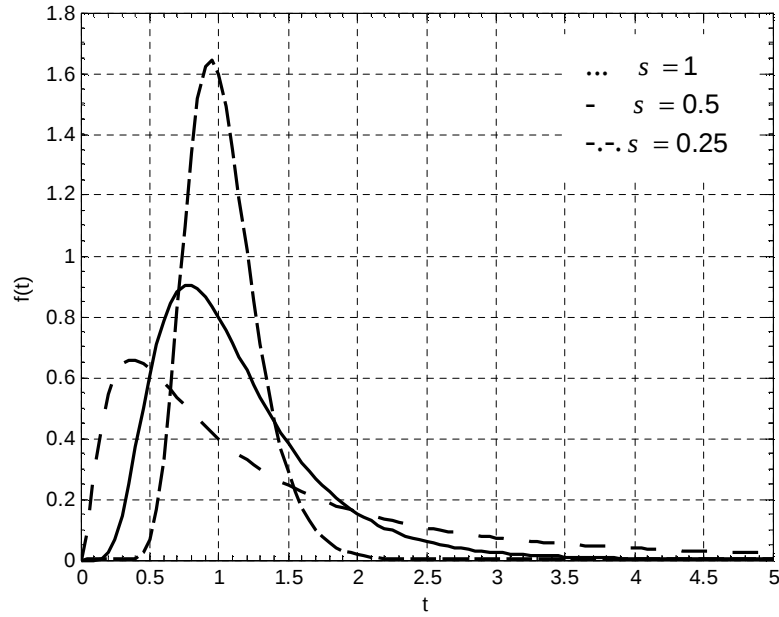
elde edilir. (4.42)'deki ifadenin sırasıyla m ve s parametrelerine göre türevleri alınıp sıfıra eşitlendiğinde m ve s parametrelerinin tahminleri sırasıyla

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i \quad (4.43)$$

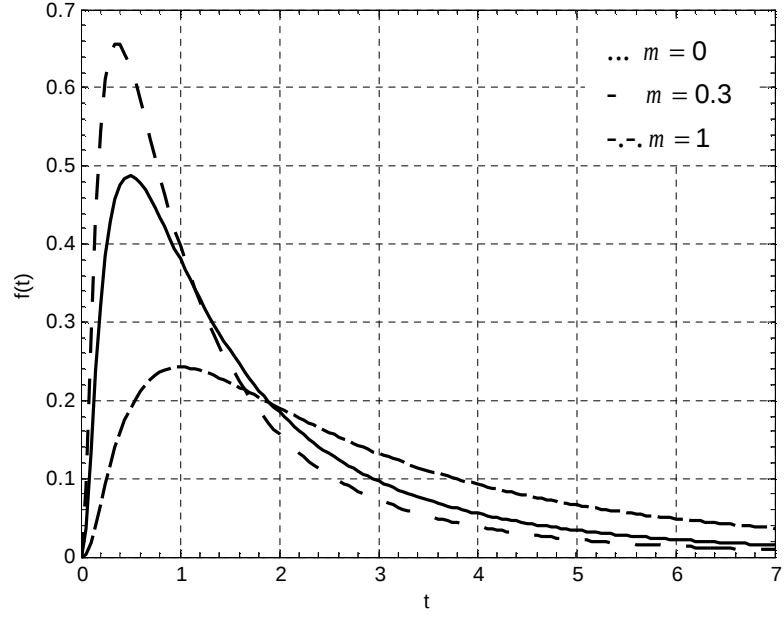
ve

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln t_i)^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \ln t_i \right)^2 \quad (4.44)$$

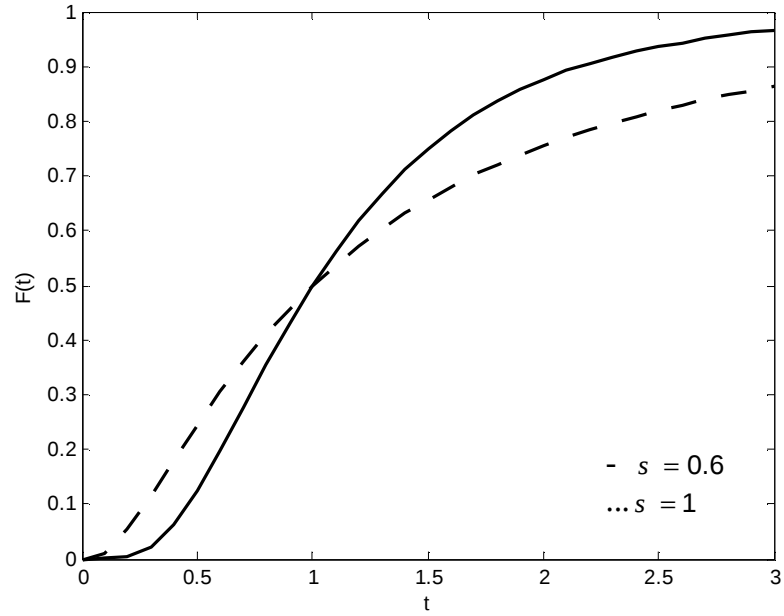
bulunur (Elsayed 1996).



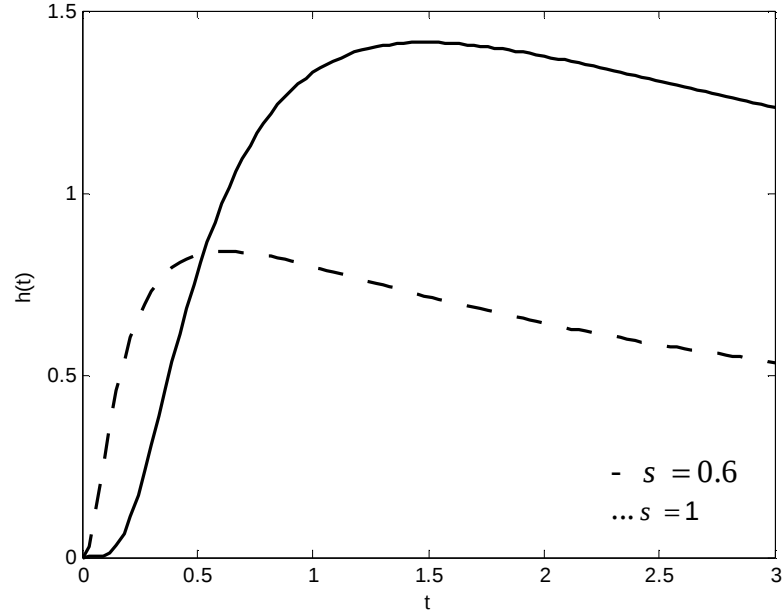
Şekil 4.6. Lognormal dağılımda $m = 0$ ve $s = 1, s = 0.5, s = 0.25$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri (Hahn ve Shapiro 1967, Evans ve ark. 1993).



Şekil 4.7. Lognormal dağılımda $s = 1$ ve $m = 0$, $m = 0.3$, $m = 1$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri (Hahn ve Shapiro 1967).



Şekil 4.8. Lognormal dağılımda $m = 0$ ve $s = 0.6$, $s = 1$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $F(t)$ dağılım fonksiyonlarının grafikleri (Evans ve ark. 1993).



Şekil 4.9. Lognormal dağılımda $m = 0$ ve $s = 0.6$, $s = 1$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $h(t)$ risk fonksiyonlarının grafikleri (Hahn ve Shapiro 1967, Johnson ve ark. 1994, Evans ve ark. 1993).

4.2.2. Lognormal Dağılımın Uygulama Alanları

Olasılıkta ve istatistikte lognormal dağılım, logaritması normal dağılan rastgele değişkenlerin olasılık dağılımıdır. $\text{Log}(t)$ 'nin tanımlı olabilmesi için t pozitif olmalıdır. Bu nedenle, Lognormal dağılımın uygulanabilmesi için ilgilenilen rastgele değişkenin pozitif değerler alması gerekir.

Lognormal dağılım; çok küçük hataların çarpımlarından kaynaklanan değerlerin bulunduğu işlemler için model olarak ortaya çıkar. Merkezi limit teoremi kullanılarak genel koşullar altında, n bağımsız pozitif değerler alan rastgele değişkenin çarpımına ait dağılımın lognormal dağılıma yaklaştığı gösterilebilir (Hahn ve Shapiro 1967).

Lognormal dağılım ekonomiden biyolojiye değişik uygulamalarda; gözlenen değer, önceki değer rastgele oranı olduğu işlemlerde kullanılır. Örnek olarak kişisel gelirlerin, miras ve banka mevduatının dağılımı verilebilir. Diğer bir örnek ise gelişimi birçok küçük itici güce maruz kalan ve bunun sonucunda etkinin anlık

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

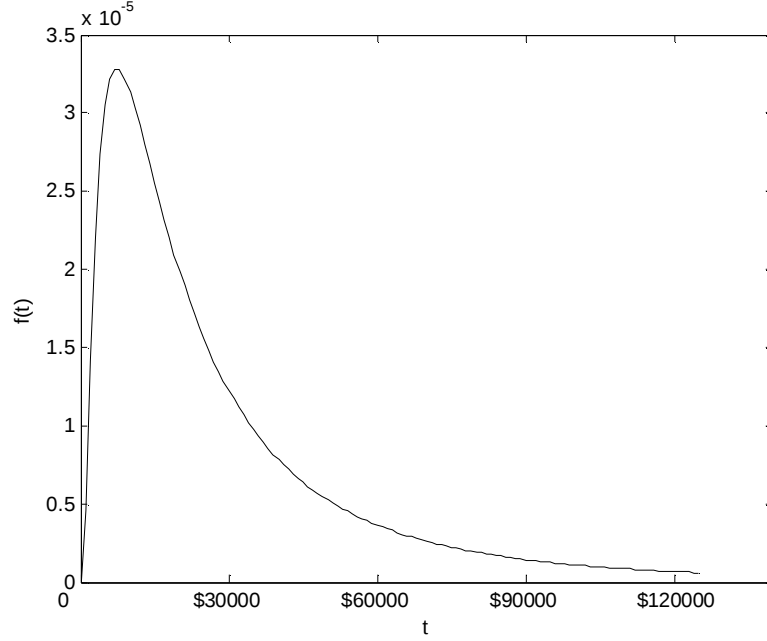
hacmi ile orantılı olduğu bir organizmada, organizmanın hacminin dağılımıdır. Lognormal dağılım kırılma işlemi sonucunda elde edilen taneciklerin hacminin dağılımını göstermek için kullanılır. Ayrıca yaşam testinde de kullanılır (Hahn ve Shapiro 1967).

Lognormal dağılım çarpık bir dağılımdır. Lognormal dağılım çok sayıda olayın, dağılımın sol kuyruğunda yoğunlaştığı durumları modellemek için kullanılır. Bu dağılıma örnek olarak farklı müşteriler tarafından kullanılan elektrik miktarı, sistemlerin arıza süresi, tamir süresi, ampullerin ışık yoğunlukları, kimyasal artıkların yoğunlukları, farklı müşteriler tarafından otomobille katedilen mesafeler verilebilir (Ireson ve ark. 1996).

ÖRNEK 4.3. ABD’de yaşayan dört aileye ait gelirler $m = \log(20000)$ ve $s^2 = 1$ parametre değerleriyle lognormal dağılıma sahip olsun. Gelir için $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiğini oluşturunuz (Mathworks 2007).

ÇÖZÜM:

```
>>x=10:1000:125010;  
>>y=lognpdf(x,log(20000),1.0);  
>>plot(x,y);  
>>set(gca,'xtick',[0 30000 60000 90000 120000])  
>>set(gca,'xticklabel',str2mat('0','$30000','$60000','$90000','$120000'))
```



Şekil 4.10. $m = \log(20000)$ ve $s^2 = 1$ parametre değerleriyle lognormal dağılıma sahip gelir rastgele değişkeni için $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği (http://www.mathworks.com/access/helpdesk_r13/help/toolbox/stats/prob_d23.html).

4.3. Üstel Dağılım

TANIM 4.7. Sürekli tipteki t rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t; m, l) = l \exp(-(t-m)l) \quad t \geq m \geq 0 \quad l > 0 \quad (4.45)$$

ise t rastgele değişkenine m ve l parametrelili üstel dağılıma sahiptir denir (Patil ve ark. 1984). Burada m ve l parametreleri, sırasıyla dağılımın konum ve yayılım parametreleridir.

(4.45)'deki eşitlikte $m = 0$ ve $l = 1$ alınırse standart üstel dağılım elde edilir.

TEOREM 4.19. İki parametrelili üstel dağılımın dağılım fonksiyonu,

$$F(t; m, l) = 1 - \exp(-(t-m)l) \quad (4.46)$$

dır (Patil ve ark. 1984).

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

TEOREM 4.20. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni iki parametrelili üstel dağılıma sahip ise beklenen değeri ya da ortalaması,

$$E(t) = m + \frac{1}{l} \quad (4.47)$$

dır (Patil ve ark. 1984).

TEOREM 4.21. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, iki parametrelili üstel dağılıma sahip ise varyansı,

$$Var(t) = \frac{1}{l^2} \quad (4.48)$$

dir (Johnson ve ark. 1994, Patil ve ark. 1984).

TEOREM 4.22. İki parametrelili üstel dağılıma sahip X rastgele değişkeni için moment çıkaran fonksiyonu,

$$M(t; m, l) = \frac{\exp(mt)}{1 - \frac{t}{l}} \quad (4.49)$$

dır (Johnson ve ark. 1994, Patil ve ark. 1984).

TANIM 4.8. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, iki parametrelili üstel dağılıma sahip ise, a_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$a_3 = 2 \quad (4.50)$$

dir (Johnson ve ark. 1994, Patil ve ark. 1984).

TANIM 4.9. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, iki parametrelili üstel dağılıma sahip ise, a_4 ile gösterilen sivrililiği,

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$a_4 = 9 \quad (4.51)$$

dur (Johnson ve ark. 1994, Patil ve ark. 1984).

TEOREM 4.23. İki parametrelili üstel dağılımının modu,

$$t = m \quad (4.52)$$

noktasındadır (Patil ve ark. 1984).

TEOREM 4.24. İki parametrelili üstel dağılımının medyanı,

$$t = \frac{1}{l} \log 2 + m \quad (4.53)$$

noktasındadır (Patil ve ark. 1984).

TANIM 4.10. Sürekli tipteki t rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t; l) = l \exp(-lt) \quad t \geq 0 \quad l > 0 \quad (4.54)$$

ise t rastgele değişkenine l parametrelili üstel dağılıma sahiptir denir. Ayrıca l parametrelili üstel dağılıma, bir parametrelili üstel dağılım da denir. Burada l parametresine oran parametresi denir. Alternatif olarak, üstel dağılım $m = \frac{1}{l}$ olmak üzere yayılım parametresi m yardımıyla da ifade edilir (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.25. Bir parametrelili üstel dağılımının dağılım fonksiyonu,

$$F(t; l) = 1 - \exp(-lt) \quad (4.55)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

TEOREM 4.26. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni bir parametrelili üstel dağılıma sahip ise beklenen değeri; ya da ortalaması,

$$E(t) = \frac{1}{l} \quad (4.56)$$

dır (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.27. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, bir parametrelili üstel dağılıma sahip ise varyansı,

$$Var(t) = \frac{1}{l^2} \quad (4.57)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.28. Bir parametrelili üstel dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M(t; l) = \left(1 - \frac{t}{l}\right)^{-1} \quad (4.58)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

TANIM 4.11. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, bir parametrelili üstel dağılıma sahip ise, a_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$a_3 = 2 \quad (4.59)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

TANIM 4.12. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, bir parametrelili üstel dağılıma sahip ise, a_4 ile gösterilen sivrililiği,

$$a_4 = 9 \quad (4.60)$$

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

dur (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.29. Bir parametrelili üstel dağılımının modu,

$$t = 0 \quad (4.61)$$

noktasındadır (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.30. Bir parametrelili üstel dağılımının medyanı,

$$t = \frac{1}{l} \log 2 \quad (4.62)$$

noktasındadır (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.31. Bir parametrelili üstel dağılımının $R(t)$ ile gösterilen güvenilirlik/sağ kalım fonksiyonu,

$$R(t) = \exp(-l t) \quad (4.63)$$

dir (Elsayed 1996).

TEOREM 4.32. Bir parametrelili üstel dağılımının $R(T/t)$ ile gösterilen koşullu güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(T/t) = \exp(-l T) \quad (4.64)$$

dir (Ebeling 1997).

TEOREM 4.33. Bir parametrelili üstel dağılımının $h(t)$ ile gösterilen risk fonksiyonu,

$$h(t) = l \quad (4.65)$$

dır (Bentley 1993).

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

TEOREM 4.34. n bileşenli bir seri sistemde her bir bileşen bir parametrelili üstel dağılıma sahipse sistem güvenilirliği,

$$R_{sistem}(t) = \exp\left(-t \sum_{i=1}^n l_i\right) \quad (4.66)$$

dir. Burada bileşenlerin birbirinden bağımsız olduğu varsayılır (Bentley 1993).

TEOREM 4.35. Bir parametrelili üstel dağılıma sahip bileşen için $\bar{l}$ ile gösterilen ortalama hata oranı,

$$\bar{l} = l \quad (4.67)$$

dır (Bentley 1993).

4.2.1. Üstel Dağılımdaki Parametrelerin Tahmini

İki parametrelili üstel dağılımın m ve l parametrelerinin tahmin edicileri, maksimum likelihood yöntemi kullanılarak hesaplanacaktır.

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$; iki parametrelili üstel dağılımdan alınmış n birimlik rastgele örneklem olsun. Bu gözlem değerleri kullanılarak bilinmeyen m ve l parametreleri için tahmin ediciler hesaplanacaktır.

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ 'lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n; m, l) = l^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n (t_i - m)l\right) \quad (4.68)$$

dir. $L(m, l) = f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n; m, l)$ olsun. O halde,

$$L(m, l) = l^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n (t_i - m)l\right) \quad (4.69)$$

dir. (4.69)'daki eşitliğin logaritması alındığında,

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$\ln\{L(m, s)\} = n \ln l - l \sum_{i=1}^n t_i + nm l \quad (4.70)$$

elde edilir. (4.70)'deki ifadenin sırasıyla m ve l parametrelerine göre türevleri alınıp sıfıra eşitlendiğinde m ve l parametrelerinin tahminleri sırasıyla

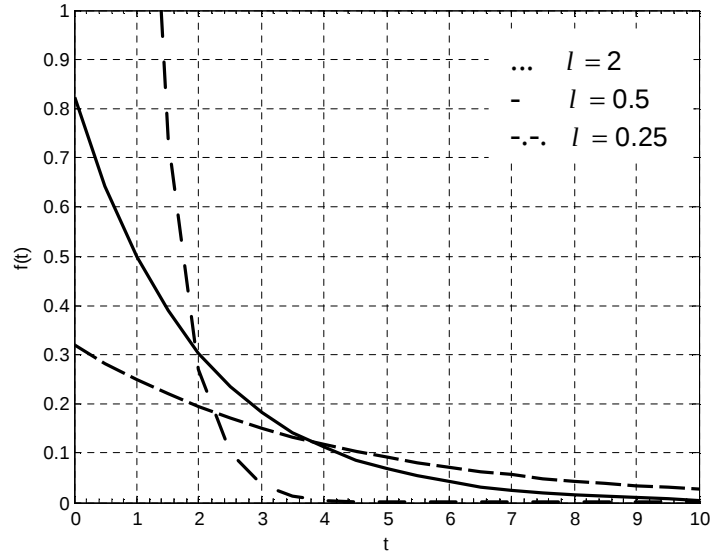
$$\hat{m} = \min\{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\} \quad (4.71)$$

$$\hat{l} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n (t_i - \hat{m})} \quad (4.72)$$

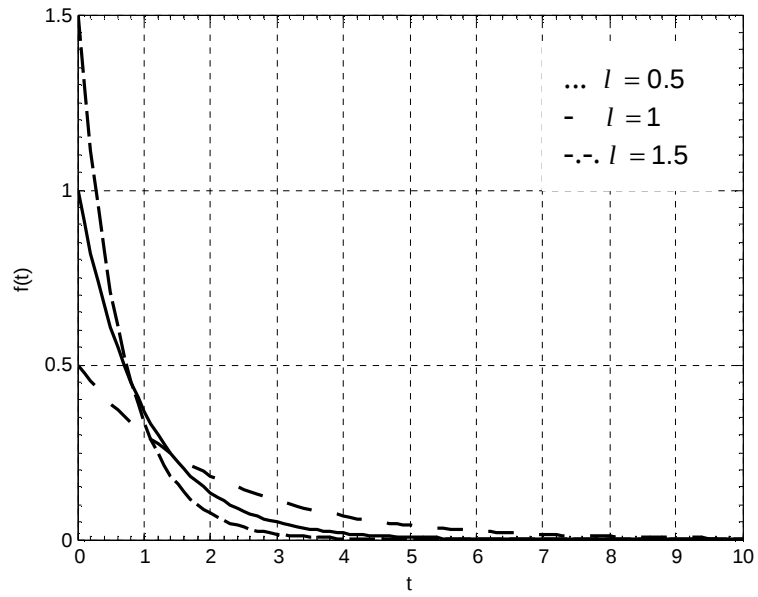
bulunur. Aynı yöntemle bir parametrelili üstel dağılımın l parametresinin tahmini de

$$\hat{l} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i} \quad (4.73)$$

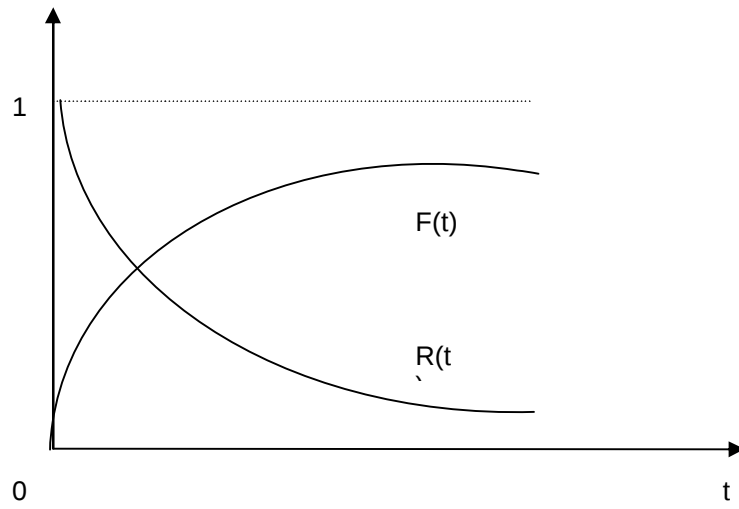
şeklinde bulunur (Johnson ve ark. 1994).



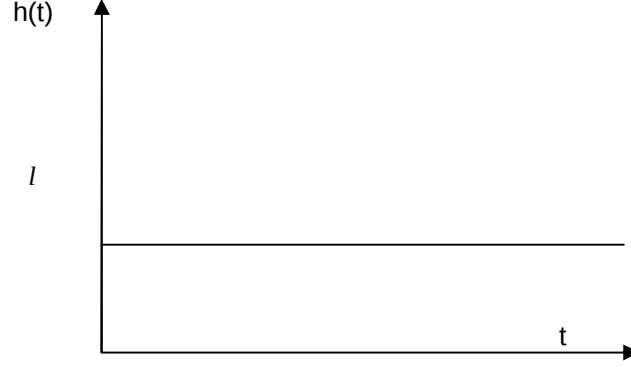
Şekil 4.11. İki parametrelili üstel dağılımda $m = 1$ ve $l = 2, l = 0.5, l = 0.25$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri (Evans ve ark. 1993).



Şekil 4.12. Bir parametrelili üstel dağılımda $l = 0.5$, $l = 1$ ve $l = 1.5$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri (Evans ve ark. 1993).



Şekil 4.13. Bir parametrelili üstel dağılımın $R(t)$ güvenilirlik ve $F(t)$ dağılım fonksiyonlarının grafikleri (Elsayed 1996).



Şekil 4.14. Bir parametrelili üstel dağılımın $h(t)$ risk fonksiyonunun grafiği (Elsayed 1996).

4.2.2. Üstel Dağılımın Uygulama Alanları

Epstein ve Sobel (1953), elektronik bileşenler için yaşam testini göstermek amacıyla üstel dağılımı kullanmaya başlamıştır. Onların çalışmaları, güvenilirlik analizinde üstel dağılımı popüler bir dağılım yapmıştır.

Üstel dağılım, bir bileşende ilk hata/başarısızlık gerçekleşinceye kadar bekleme süresine ait dağılım olarak kullanılır. Aynı zamanda bir hatalı bileşenin aynı tipte diğer bir bileşenle değiştirilebileceği varsayımı altında, hatalar arasındaki bekleme zamanlarına ait dağılım olarak da kullanılır (Hahn ve Shapiro 1967).

Üstel dağılım, zamana karşı dayanma modeli olarak kullanılan istatistiksel dağılımlar arasında en popüler olanıdır. Bu popüleritenin bir nedeni, sabit hata oranının, zamanla değişiklik gösteren hata oranına göre matematiksel olarak kolaylık sağlamasıdır. Söz konusu sabit hata oranına uygulamalarda çok az karşılaşılır. Örneğin gelen telefon aramalarının oranı günün saatlerine göre farklılık gösterir. Fakat gün içinde oranın sabit olduğu zaman aralığına odaklanacak olunursa, bir sonraki telefon araması gerçekleşinceye kadar gereken zaman için üstel dağılım iyi bir yaklaşık modeldir. Bununla birlikte bir organizmanın ya da teknik bir cihazın yaşam sürecini modellemek için üstel dağılım uygun değildir. Çünkü burada hata oranları sabit değildir. Aşağıda yaklaşık olarak üstel dağılım rastgele değişken örnekleri verilmiştir.

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

1. Tanık olunacak bir araba kazası gerçekleşinceye kadar gereken zaman.
2. Bir radyoaktif parça bozunması gerçekleşinceye kadar gereken zaman ya da Geiger-Müller sayacının arka arkaya iki biplemesi arasında geçen zaman.
3. Büyük bir meteorun çarpması sonucu kitlesel bir yıkım gerçekleşinceye kadar gereken zaman (Wikipedia 2007).

Üstel değişkenler her bir mesafe biriminde sabit olasılıkla gerçekleşen olaylarda konumları modellemek için de kullanılır. Buna örnek olarak aşağıdakiler verilebilir.

1. Bir DNA ipliğindeki mutasyonlar arasındaki mesafe.
2. Bir yoldaki arızalar arasındaki mesafe (Wikipedia 2007).

Üstel dağılımın güvenilirlikte oldukça geniş bir kullanım alanı vardır. Üstel dağılımın güvenilirlik alanındaki uygulamalarına örnek olarak elektron tüpleri, resistörler ve kapasitörler verilebilir (Hahn ve Shapiro 1967).

Çok sayıda bileşene sahip karmaşık sistemlerin ömrü için üstel dağılım iyi bir modeldir. Üstel dağılım sabit hata oranına sahip olduğu için erken ölümlülük periyodu bitimi sonrasında yani yararlı ömür periyodu için iyi bir model oluşturur. Elektrikli ve elektronik sistemler, bilgisayar sistemleri ve otomobil aktarım araçları gibi uygulamalar örnek olarak verilebilir (Ireson ve ark 1996).

ÖRNEK 4.4. Bir akım ölçüm sistemi, bir ölçme deliğinden (Orifice plate) ($l = 0.75$), basınç ileticiden (D/P transmitter) ($l = 1.0$), karekök çıkarıcı aygıttan (Square root) ($l = 0.1$) ve bir kaydediciden (Recorder) oluşmaktadır. Aşağıdaki 3 maddeye ilişkin, 0.5 yıl sonra olabilecek akım ölçüm kaybı olasılığını hesaplayınız.

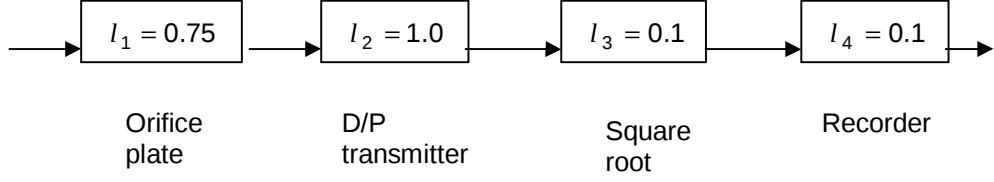
- (a) Şekil 4.15'deki bir akım ölçüm sistemi için
- (b) Şekil 4.16'daki paralel, özdeş üç akım ölçüm sistemi için
- (c) üç ölçme deliği, üç basınç iletici ve bir orta değer seçici rölesinden (Middle value) ($l = 0.1$) oluşan sistem. Röle, ne yüksek ne alçak olan iletici sinyal çıktıları seçmektedir. Seçilen sinyaller önce karekök çıkarıcı aygıtı, sonra kaydedici aygıtı iletilmektedir.
- (d) Bu hesaplamalardan nasıl sonuçlar çıkarılabilir?

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

ÇÖZÜM:

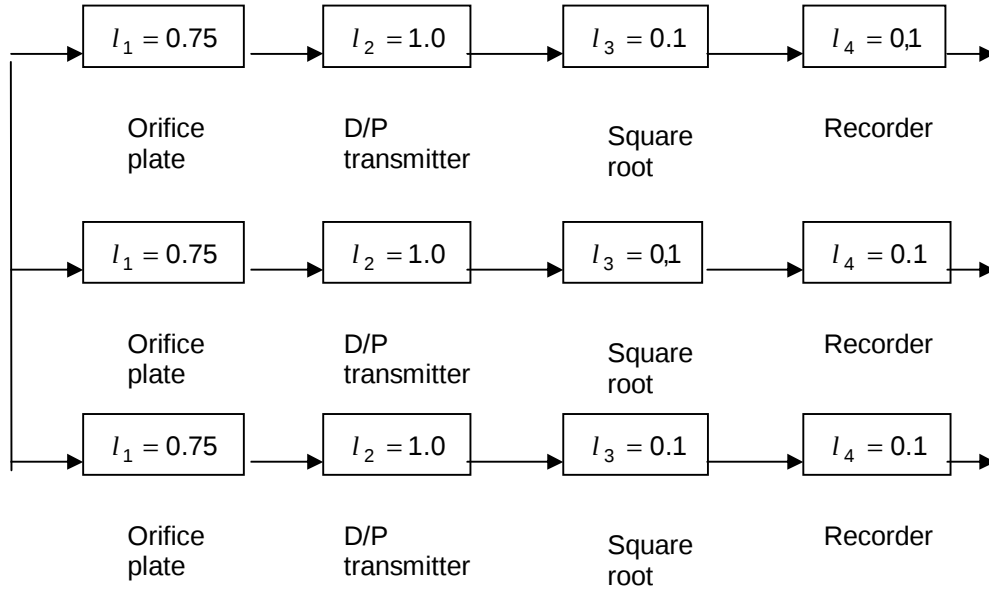
(a)



Şekil 4.15. Tekli akım ölçüm sistemi (Bentley 1993).

Önce $l_{sistem} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 1.95$ hesaplanır. Sonra bu değer (4.66)'daki eşitlikte kullanılarak $F_{sistem}(t) = 1 - \exp(-l_{sistem}t) = 1 - \exp(-1.95 \times 0.5) = 1 - \exp(-0.975) = 0.623$ olarak bulunur. Bu nedenle 0.5 yıl sonra hata olasılığı=0.623'tür.

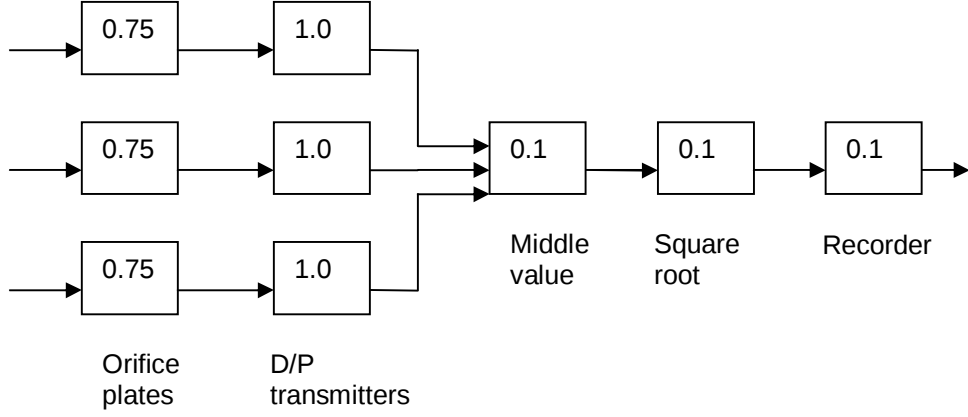
(b)



Şekil 4.16. Paralel, özdeş üç akım ölçüm sistemi (Bentley 1993).

(3.60)'taki eşitlik kullanılarak $F = F_{sistem}^3 = (0.623)^3 = 0.242$ bulunur. Bu nedenle 0.5 yıl sonra hata olasılığı=0.242'dir.

(c)



Şekil 4.17. Orta değer seçici röleli sistem (Bentley 1993).

Önce $l = l_{ölçmedeliği} + l_{basınsınçıcı} = 1.75$ hesaplanır. Sonra bu değer (4.66)'daki eşitlikte kullanılarak 0.5 yıl sonra hata olasılığı, $F = 1 - \exp(-lt) = 1 - \exp(-1.75 \times 0.5) = 1 - \exp(-0.875) = 1 - 0.417 = 0.583$ bulunur. Seçici, üç ayrı O/P + D/P kanalından birini seçer. O/P + D/P kanallarına ait tüm güvenilmezlik $F(t) = F^3 = (0.583)^3 = 0.198$ dir. O/P + D/P kanallarına ait tüm güvenilirlik $R(t) = 1 - F(t) = 1 - 0.198 = 0.802$ dir. Kalan üç bileşenin hata oranı $l = 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.3$ şeklindedir. Böylece kalan üç bileşen için güvenilirlik $R = \exp(-0.3 \times 0.5) = 0.861$ bulunur. (3.56)'daki eşitlik kullanılarak $R_{sistem} = R(t)R = 0.802 \times 0.861 = 0.690$ elde edilir. Bu nedenle $F_{sistem} = 1 - R_{sistem} = 0.310$ dur.

(d)

En yüksek güvenilmezlik (a) maddesindeki sistemde olmaktadır. Üç paralel sistemi barındıran (b) maddesindeki sistem ise en düşük güvenilmezliğe sahiptir. Bununla birlikte bu sistemin maliyeti yüksektir. (c) maddesindeki sistem (b) maddesindeki sisteme göre daha güvenilmez olsa da maliyeti daha düşüktür (Bentley 1993).

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

4.4. Weibull Dağılımı

TANIM 4.13. Sürekli tipteki t rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t;g,s,h)=\frac{h}{s}\left(\frac{t-g}{s}\right)^{h-1}\exp\left[-\left(\frac{t-g}{s}\right)^h\right] \quad t>g>0 \quad s>0 \quad h>0 \quad (4.74)$$

ise t rastgele değişkenine g , s ve h parametrelili Weibull dağılımına sahiptir denir. Burada g , s ve h parametreleri, sırasıyla dağılımın konum, yayılım ve şekil parametreleridir (Johnson ve ark 1994).

TEOREM 4.36. Üç parametrelili Weibull dağılımının dağılım fonksiyonu,

$$F(t;g,s,h)=1-\exp\left\{-\left(\frac{t-g}{s}\right)^h\right\} \quad t>h \quad (4.75)$$

dir (Johnson ve ark. 1994).

TEOREM 4.37. Üç parametrelili Weibull dağılımının $R(t)$ ile gösterilen güvenilirlik/sağ kalım fonksiyonu,

$$R(t)=\exp\left\{-\left(\frac{t-g}{s}\right)^h\right\} \quad (4.76)$$

dir. (Johnson ve ark. 1994)

TEOREM 4.38. Üç parametrelili Weibull dağılımının $R(T/t)$ ile gösterilen koşullu güvenilirlik fonksiyonu,

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$R(T/t) = \frac{\exp\left\{-\left(\frac{T+t-g}{s}\right)^h\right\}}{\exp\left\{-\left(\frac{t-g}{s}\right)^h\right\}} \quad (4.77)$$

dir (Ebeling 1997).

TEOREM 4.39. Üç parametrelili Weibull dağılımının $h(t)$ ile gösterilen risk fonksiyonu,

$$h(t) = \frac{h}{s} \left(\frac{t-g}{s}\right)^{h-1} \quad (4.78)$$

dir (Johnson ve ark. 1994).

TANIM 4.14. Sürekli tipteki t rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(t; s, h) = \frac{h}{s} \left(\frac{t}{s}\right)^{h-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{s}\right)^h\right] \quad t > 0 \quad s > 0 \quad h > 0 \quad (4.79)$$

ise t rastgele değişkenine s ve h parametrelili ya da iki parametrelili Weibull dağılımına sahiptir denir. İki parametrelili Weibull dağılımı, üç parametrelili Weibull dağılımında $g = 0$ alınarak elde edilir (Evans ve ark 1993).

TEOREM 4.40. İki parametrelili Weibull dağılımının dağılım fonksiyonu,

$$F(t; s, h) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{s}\right)^h\right] \quad (4.80)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

TEOREM 4.41. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, iki parametrelili Weibull dağılımına sahip ise, sıfır etrafındaki r . moment,

$$m_r' = s^r \Gamma\left(\frac{r+h}{h}\right) \quad (4.81)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.42. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, iki parametrelili Weibull dağılımına sahip ise beklenen değeri; ya da ortalaması,

$$E(t) = s \Gamma\left(\frac{1+h}{h}\right) \quad (4.82)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.43. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, iki parametrelili Weibull dağılımına sahip ise varyansı,

$$Var(t) = s^2 \left[\Gamma\left(\frac{2+h}{h}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+h}{h}\right) \right] \quad (4.83)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

TANIM 4.15. Sürekli tipteki bir t rastgele değişkeni, iki parametrelili Weibull dağılımına sahip ise, a_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$a_3 = \frac{\Gamma\left(\frac{3+h}{h}\right) - 3\Gamma\left(\frac{2+h}{h}\right)\Gamma\left(\frac{1+h}{h}\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1+h}{h}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{2+h}{h}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+h}{h}\right) \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.84)$$

dir (Hahn ve Shapiro 1967).

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

TANIM 4.16. Sürekli tipteki bir t rastgele değişkeni standart Weibull dağılımına sahip ise, a_4 ile gösterilen sivriliği,

$$a_4 = \frac{\Gamma\left(\frac{4+h}{h}\right) - 4\Gamma\left(\frac{3+h}{h}\right)\Gamma\left(\frac{1+h}{h}\right) + 6\Gamma\left(\frac{2+h}{h}\right)\Gamma^2\left(\frac{1+h}{h}\right) - 3\Gamma^4\left(\frac{1+h}{h}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{2+h}{h}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+h}{h}\right)\right]^2} \quad (4.85)$$

dir (Hahn ve Shapiro 1967).

TEOREM 4.44. İki parametrelili Weibull dağılımının modu,

$$t = s \left[\frac{h-1}{h} \right]^{\frac{1}{h}} \quad (4.86)$$

noktasındadır (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.45. İki parametrelili Weibull dağılımının medyanı,

$$t = s (\ln 2)^{\frac{1}{h}} \quad (4.87)$$

noktasındadır (Patil ve ark. 1984).

TANIM 4.17. Sürekli tipteki t rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(t;h) = ht^{h-1} \exp(-t^h) \quad t>0 \quad h>0 \quad (4.88)$$

ise t rastgele değişkenine h parametrelili standart Weibull dağılımına sahiptir denir (Patil ve ark. 1984). Burada h parametresi dağılımın şekil parametresidir.

TEOREM 4.46. Standart Weibull dağılımının dağılım fonksiyonu

$$F(t;h) = 1 - \exp(-t^h) \quad (4.89)$$

dir (Patil ve ark. 1984).

TEOREM 4.47. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni standart Weibull dağılımına sahip ise, sıfır etrafındaki r . momentini,

$$m_r' = \Gamma\left(\frac{r+h}{h}\right) \quad (4.90)$$

dir (Patil ve ark. 1984).

TEOREM 4.48. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni standart Weibull dağılımına sahip ise beklenen değeri; ya da ortalaması

$$E(t) = \Gamma\left(\frac{1+h}{h}\right) \quad (4.91)$$

dir (Patil ve ark. 1984).

TEOREM 4.49. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni standart Weibull dağılımına sahip ise varyansı,

$$Var(t) = \Gamma\left(\frac{2+h}{h}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+h}{h}\right) \quad (4.92)$$

dir (Patil ve ark. 1984).

TANIM 4.18. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni standart Weibull dağılımına sahip ise, a_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$a_3 = \frac{\Gamma\left(\frac{3+h}{h}\right) - 3\Gamma\left(\frac{2+h}{h}\right)\Gamma\left(\frac{1+h}{h}\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1+h}{h}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{2+h}{h}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+h}{h}\right)\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.93)$$

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

dir (Erol 1991).

TANIM 4.19. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni standart Weibull dağılımına sahip ise, a_4 ile gösterilen sivriliği,

$$a_4 = \frac{\Gamma\left(\frac{4+h}{h}\right) - 4\Gamma\left(\frac{3+h}{h}\right)\Gamma\left(\frac{1+h}{h}\right) + 6\Gamma\left(\frac{2+h}{h}\right)\Gamma^2\left(\frac{1+h}{h}\right) - 3\Gamma^4\left(\frac{1+h}{h}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{2+h}{h}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+h}{h}\right)\right]^2} \quad (4.94)$$

dir (Erol 1991).

TEOREM 4.50. Standart Weibull dağılımının modu,

$$t = \left(\frac{h-1}{h}\right)^{\frac{1}{h}} \quad (4.95)$$

noktasındadır (Patil ve ark. 1984).

TEOREM 4.51. Standart Weibull dağılımının medyanı,

$$t = (\ln 2)^{\frac{1}{h}} \quad (4.96)$$

noktasındadır (Patil ve ark. 1984).

4.4.1. Weibull Dağılımındaki Parametrelerin Tahmini

İki parametrelili Weibull dağılımının s ve h parametrelerinin tahmin edicileri, maksimum likelihood yöntemi kullanılarak hesaplanacaktır.

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$; iki parametrelili Weibull dağılımından alınmış n birimlik bir rastgele örneklem olsun. Bu gözlem değerleri kullanılarak bilinmeyen s ve h parametreleri için tahmin ediciler hesaplanacaktır.

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ 'lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

$$f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n; s, h) = \prod_{i=1}^n \frac{h}{s} \left(\frac{t_i}{s} \right)^{h-1} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{s} \right)^h \right) \quad (4.97)$$

dir. $L(s, h) = f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n; s, h)$ olsun. O halde,

$$L(s, h) = \prod_{i=1}^n \frac{h}{s} \left(\frac{t_i}{s} \right)^{h-1} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{s} \right)^h \right) \quad (4.98)$$

dir. (4.98)'deki eşitliğin logaritması alındığında

$$\ln\{L(s, h)\} = \sum_{i=1}^n \ln \left[\frac{h}{s} \left(\frac{t_i}{s} \right)^{h-1} \right] - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{s} \right)^h \quad (4.99)$$

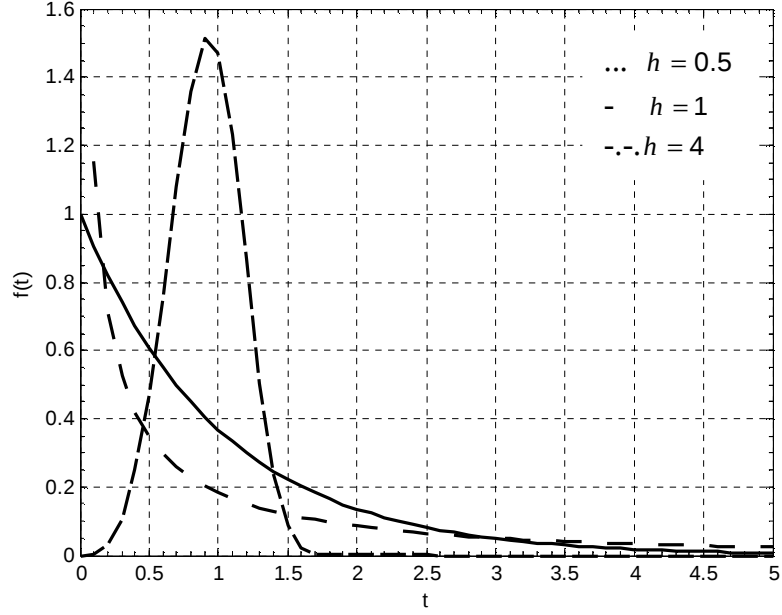
elde edilir. (4.99)'daki ifadenin sırasıyla s ve h parametrelerine göre türevleri alınıp sıfıra eşitlendiğinde s ve h parametrelerinin tahminleri sırasıyla

$$\hat{s} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{h}} \right]^{\frac{1}{\hat{h}}} \quad (4.100)$$

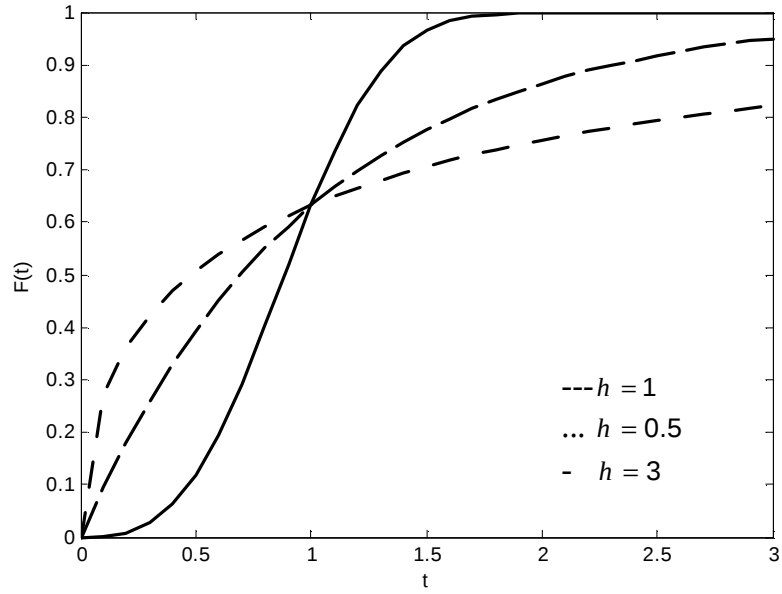
ve

$$\hat{h} = \left[\left(\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{h}} \ln t_i \right) \left(\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{h}} \right)^{-1} - n^{-1} \sum_{i=1}^n \ln t_i \right]^{-1} \quad (4.101)$$

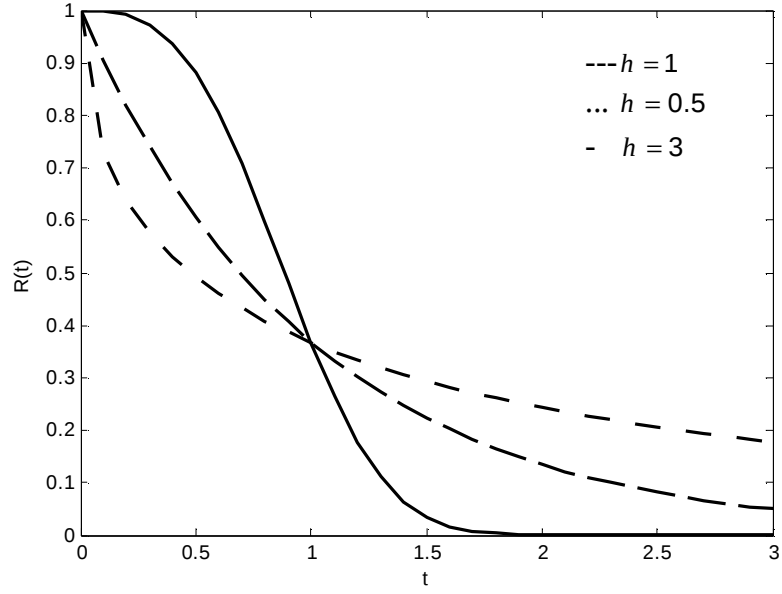
bulunur (Johnson ve ark. 1994).



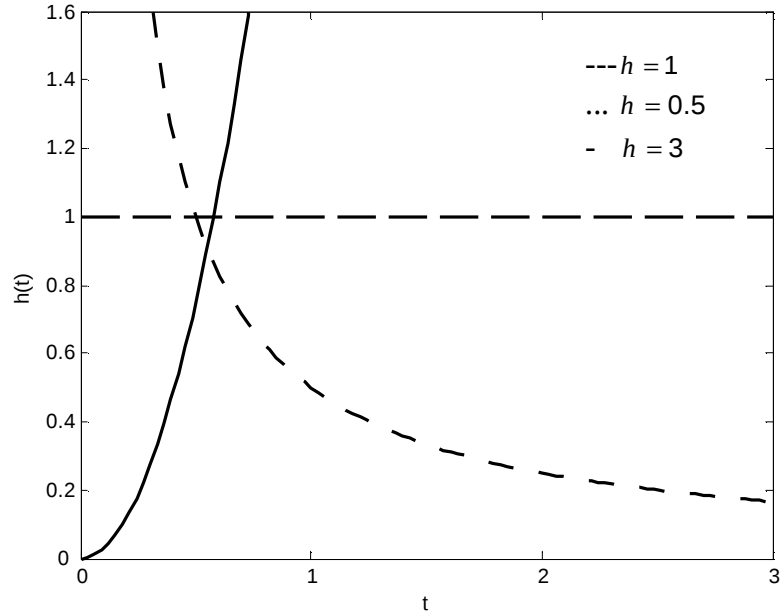
Şekil 4.18. İki parametrelili Weibull dağılımında $s = 1$ ve $h = 0.5, h = 1, h = 4$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri (Evans ve ark. 1993, Hahn ve Shapiro 1967).



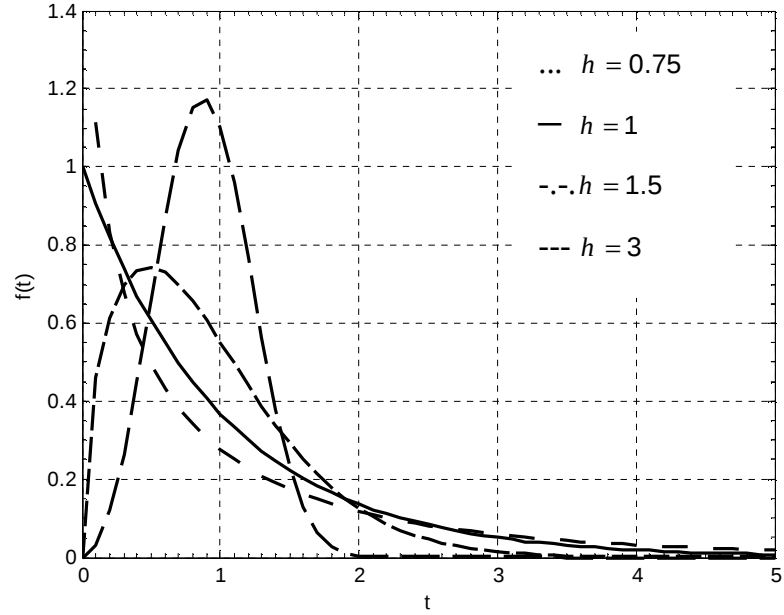
Şekil 4.19. İki parametrelili Weibull dağılımında $s = 1$ ve $h = 1, h = 0.5, h = 3$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $F(t)$ dağılım fonksiyonlarının grafikleri (Evans ve ark. 1993).



Şekil 4.20. İki parametrelili Weibull dağılımında $s = 1$ ve $h = 1, h = 0.5, h = 3$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonlarının grafikleri.



Şekil 4.21. İki parametrelili Weibull dağılımında $s = 1$ ve $h = 1, h = 0.5, h = 3$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $h(t)$ risk fonksiyonlarının grafikleri (Hahn ve Shapiro 1967, Evans ve ark. 1993).



Şekil 4.22. Standart Weibull dağılımında $h = 0.75$, $h = 1$, $h = 1.5$, ve $h = 3$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık fonksiyonlarının grafikleri (Johnson ve ark. 1994).

4.4.2. Weibull Dağılımının Uygulama Alanları

Birçok durumda, üstel dağılımın zamana karşı dayanma modeli olarak yetersiz kalması, sabit risk fonksiyonundan kaynaklanır. Bu nedenle hata/başarısızlık olasılığının zamana bağlı olarak değiştiği daha genel ve esnek bir dağılıma yani Weibull dağılımına gereksinim duyulur. Weibull dağılımının zamana karşı dayanma modeli olarak kullanıldığı uygulama alanlarına örnek olarak elektron tüpleri, röleler ve bilyalı rulman gösterilebilir (Hahn ve Shapiro 1967).

Weibull dağılımı güvenilirlik mühendislik disiplininde oldukça yaygın kullanılan bir olasılık dağılımıdır.

Basit bir kuvvet fonksiyonundan elde edilen Weibull dağılımı erken ölümlülük, rastgele hatalar/başarısızlıklar, yıpranma ve serbest hata periyodu gibi hata/başarısızlık niteliklerinin çeşitliliğini modellemek için kullanılır. Ayrıca Weibull dağılımı, güvenilirlik merkezli bakım aktivitelerinde, maliyet etkisini ve bakım periyotlarını hesaplamak için kullanılır.

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

Weibull dağılımı endüstriyel mühendislik problemlerinde imalat ve dağıtım zamanlarının gösterimi için kullanıldığı gibi, uç değer teorisinde ve hava tahmininde önemlidir. Güvenilirlik mühendisliğinde ve hata analizinde çok popüler bir modeldir. Radar sisteminde, alınan sinyal seviyelerinin dağılımını modellemek için kullanılır. Ayrıca telsiz iletişimi ile ilgili sönümlü kanal modellemesi için ve rüzgar hızı dağılımlarını tanımlamak için kullanılır (Wikipedia 2007).

İki parametrelili Weibull dağılımı çarpık verileri modellemek için kullanılır. $h < 1$ iken Weibull dağılımı için risk fonksiyonu zamanla azalır ki bu da erken ölümlülük periyodunu işaret eder. $h = 1$ iken Weibull dağılımı üstel dağılım ile aynıdır. Yani üstel dağılımla ilgili olarak yapılan tüm yorumlar bu durum için de geçerlidir. $h > 1$ iken risk fonksiyonu artar. Bu yüzden yıpranma periyodunu belirlemek için iyi bir model olur (Elsayed 1996).

Korozyon süresi (corrosion life), yorulma süresi (fatigue life), antifriksiyon yatakları (antifricition bearings), transmisyon dişlileri (transmission gears) ve elektronik tüplerin ömrü bu dağılımın uygulama alanlarındandır. Üç parametrelili Weibull dağılımı, minimum yaşam süresine sahip iken, minimum yaşam süresinden önce bileşenin başarısız olması olasılığı sıfıra yakın olduğunda iyi bir modeldir. Uygulama alanlarına örnek olarak elektrik direnci (electrical resistance), elektriksel kapasite (capacitance) ve yorulma dayanımı (fatigue strenght) verilebilir (Ireson ve ark 1996).

ÖRNEK 4.5. Özel bir tipteki elektron tüpü için zamana karşı dayanma süresi $h = 2$ ve $s = 8$ parametre değerleri ile Weibull dağılımına sahiptir. Test süresi yıl cinsindendir. İlk iki yıl sırasında hata/başarısızlık olasılığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: İlk iki yıl sırasında başarısızlık olasılığı $F(2)$ değeridir. Öyleyse,

(4.80) nolu eşitlikten $F(2;8,2) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{2}{8}\right)^2\right] = 0,06$ bulunur (Hahn ve Shapiro 1967).

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

ÖRNEK 4.6. Belirli bir tipteki yağ keçesi için yaşam süresi dağılımının $s = 1000$ ve $h = 1.8$ parametre değerleri ile Weibull dağılımı olduğu varsayılıyor. Bir yılda başarısızlık olasılığını hesaplayınız (Moss 2005).

ÇÖZÜM: (4.80)'deki eşitlik kullanılarak
 $F(t; s, h) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{s}\right)^h\right] = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{1000}\right)^{1.8}\right]$ şeklinde yazılır. Buradan
 $F(365\text{gün}) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{365}{1000}\right)^{1.8}\right] = 1 - 0.85 = 0.15$ bulunur.

4.5. Rayleigh Dağılımı

TANIM 4.20. Sürekli tipteki t rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t; b) = \frac{t}{b^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2b^2}\right) \quad t > 0 \quad b > 0 \quad (4.102)$$

ise t rastgele değişkenine Rayleigh dağılımına sahiptir denir. Rayleigh dağılımının b parametresi, dağılımın yayılım parametresidir (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.52. Rayleigh dağılımının dağılım fonksiyonu,

$$F(t; b) = 1 - \exp\left(-\frac{t^2}{2b^2}\right) \quad (4.103)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.53. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, Rayleigh dağılımına sahip ise, merkez ya da sıfır etrafındaki r . moment,

$$m_r' = 2^{\frac{r}{2}} b^r \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right) \quad (4.104)$$

dir (Erol 1991).

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

TEOREM 4.54. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, Rayleigh dağılımına sahip ise beklenen değer; ya da ortalaması,

$$E(t) = b \sqrt{\frac{p}{2}} \quad (4.105)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.55. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, Rayleigh dağılımına sahip ise varyansı,

$$Var(t) = \frac{b^2(4-p)}{2} \quad (4.106)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

TANIM 4.21. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, Rayleigh dağılımına sahip ise, a_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$a_3 = \frac{2\sqrt{p}(p-3)}{(4-p)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.107)$$

dir (Evans ve ark.1993).

TANIM 4.22. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, Rayleigh dağılımına sahip ise, a_4 ile gösterilen sivriliği,

$$a_4 = \frac{32-3p^2}{(4-p)^2} \quad (4.108)$$

dir (Evans ve ark., 1993).

TEOREM 4.56. Rayleigh dağılımının modu,

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$t = b \quad (4.109)$$

noktasındadır (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.57. Rayleigh dağılımının medyanı,

$$t = b \sqrt{\ln 4} \quad (4.110)$$

noktasındadır (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.58. Rayleigh dağılımının $R(t)$ ile gösterilen güvenilirlik/sağ kalım fonksiyonu,

$$R(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2b^2}\right) \quad (4.111)$$

dir.

TEOREM 4.59. Rayleigh dağılımının $R(T/t)$ ile gösterilen koşullu güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(T/t) = \exp\left(-\frac{2tT + T^2}{2b^2}\right) \quad (4.112)$$

dir (Ebeling 1997).

TEOREM 4.60. Rayleigh dağılımının $h(t)$ ile gösterilen risk fonksiyonu,

$$h(t) = \frac{t}{b^2} \quad (4.113)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

4.5.1. Rayleigh Dağılımındaki Parametrelerin Tahmini

Rayleigh dağılımının b parametresinin tahmin edicisi, maksimum likelihood yöntemi kullanılarak hesaplanacaktır.

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$; Rayleigh dağılımından alınmış n birimlik bir rastgele örneklem olsun. Bu gözlem değerleri kullanılarak bilinmeyen b parametresi için tahmin edici hesaplanacaktır.

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ 'lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n; b) = \prod_{i=1}^n \frac{t_i}{b^2} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{2b^2}\right) \quad (4.114)$$

dir. $L(b) = f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n; b)$ olsun. O halde,

$$L(b) = \prod_{i=1}^n \frac{t_i}{b^2} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{2b^2}\right) \quad (4.115)$$

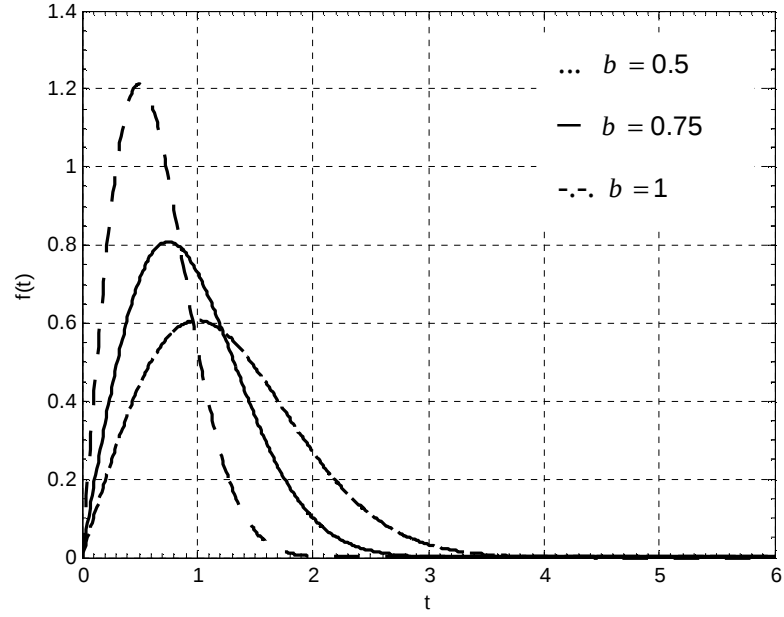
dir. (4.115)'deki eşitliğin logaritması alındığında

$$\ln\{L(b)\} = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{t_i}{b^2}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{2b^2} \quad (4.116)$$

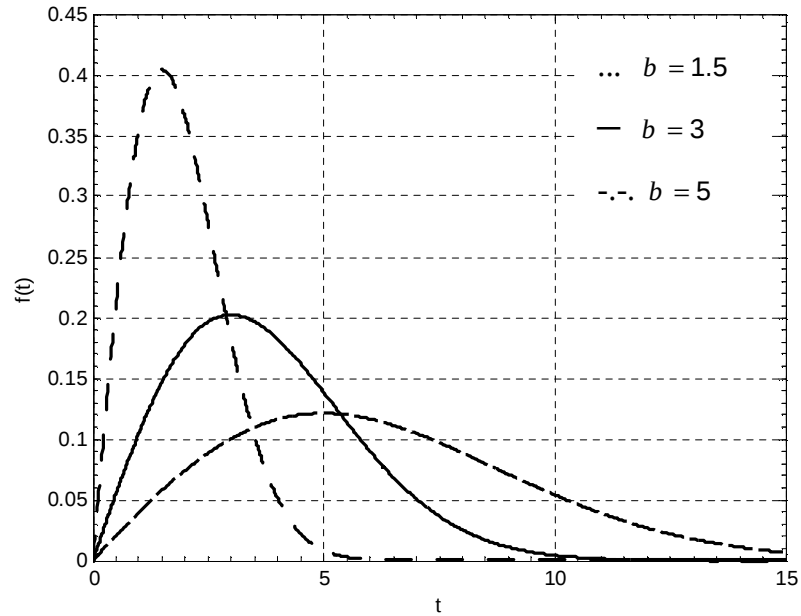
elde edilir. (4.116)'daki ifadenin b parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde b parametresinin tahmini,

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n t_i^2} \quad (4.117)$$

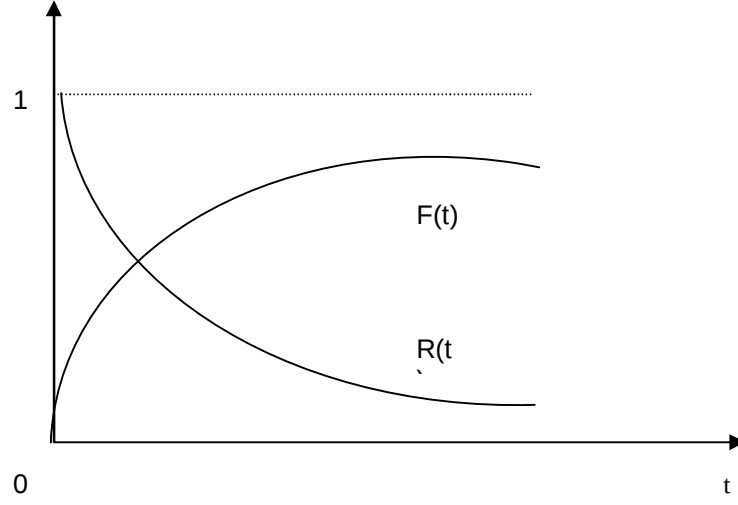
bulunur (Evans ve ark 1993).



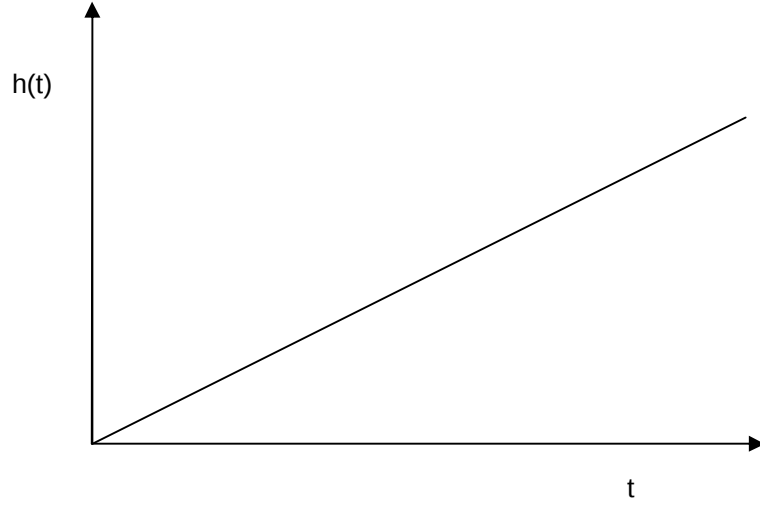
Şekil 4.23. Rayleigh dağılımında $b = 0.5$, $b = 0.75$ ve $b = 1$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri (Evans ve ark. 1993, Hahn ve Shapiro 1967).



Şekil 4.24. Rayleigh dağılımında $b = 1.5$, $b = 3$ ve $b = 5$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri (Evans ve ark. 1993, Hahn ve Shapiro 1967).



Şekil 4.25. Rayleigh dağılımının $R(t)$ güvenilirlik ve $F(t)$ dağılım fonksiyonlarının grafikleri (Elsayed 1996).



Şekil 4.26. Rayleigh dağılımının $h(t)$ risk fonksiyonunun grafiği (Elsayed 1996).

4.5.2. Rayleigh Dağılımının Uygulama Alanları

Rayleigh dağılımı, bir düzlemde radyal hata dağılımını göstermek için kullanılır. Öyleki her bir eksendeki hatalar bağımsız ve eşit varyanslı, sıfır ortalamalı normal dağılıma sahiptir. y_1 ve y_2 her biri sıfır ortalamalı, özdeş varyanslı normal dağılımdan alınmış bağımsız rastgele örneklemelerin değerleri olmak üzere Rayleigh rastgele değişkeni t ,

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$t = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \quad (4.118)$$

şeklinde tanımlanır.

x ve y doğrultusundaki görüş hataları bağımsız ve eşit varyanslı normal dağılıma sahip olduğunda, nişan alınan hedefle bombanın çarptığı yer arasındaki uzaklık dağılımının hesaplanması gibi problemler Rayleigh dağılımının temel uygulamalarıdır.

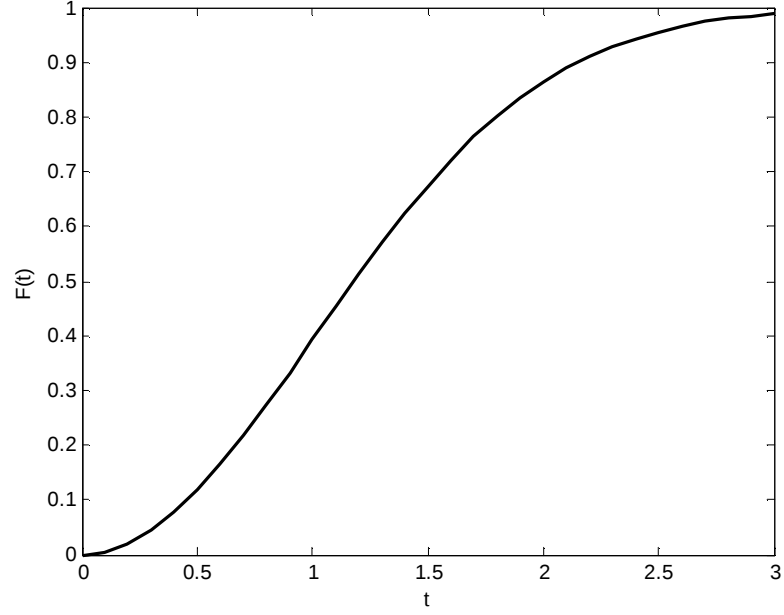
İkinci bir uygulaması istatistiksel haberleşme teorisidir. Rastgele sesler, doğrusal algılayıcı tarafından algılandığında seslerin genliği, Rayleigh dağılımına göre dağıtılır (Hahn ve Shapiro 1967).

Bir bileşen yıpranma evresinde artan bir risk oranı sergiler. Döner şaft, valf ve kam gibi mekanik bileşenler lineer olarak artan risk oranına sahiptir. Röleler gibi az sayıda elektronik bileşenler de lineer artan risk oranı sergiler. Bu yüzden rayleigh dağılımı tercih edilir (Elsayed 1996).

ÖRNEK 4.7. $[0,3]$ kapalı aralığında, Rayleigh dağılımına ilişkin dağılım fonksiyonunun grafiğini oluşturunuz (Mathworks 2007).

ÇÖZÜM:

```
>> x=0:0.1:3;  
>> p=raylcdf(x,1);  
>> plot(x,p)
```



Şekil 4.27. $[0,3]$ kapalı aralığında, Rayleigh dağılımına ilişkin $F(t)$ dağılım fonksiyonunun grafiği (Evans ve ark. 1993).

4.6. Uç Değer (Extreme Value) Dağılımı

TANIM 4.23. Sürekli tipteki t rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t; k, m, s) = \frac{1}{s} \exp \left(- \left(1 + k \frac{(t-m)}{s} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) \left(1 + k \frac{(t-m)}{s} \right)^{-1-\frac{1}{k}} \quad (4.119)$$

$$-\infty < t < +\infty \quad s > 0 \quad m > 0 \quad 1 + k \frac{(t-m)}{s} > 0$$

ise t rastgele değişkenine k , m , ve s parametreleri ile genelleştirilmiş uç değer dağılımına sahiptir denir. Burada k , m , ve s parametreleri sırasıyla dağılımın konum, yayılım ve şekil parametreleridir. Üç tip uç değer dağılımı vardır. $k > 0$ için II. tip, $k < 0$ için III. tip ve $k = 0$ için I. tip uç değer dağılımıdır (Mathworks 2007).

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

TANIM 4.24. Sürekli tipteki t rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t; m, s) = \frac{1}{s} \exp \left[-\frac{t-m}{s} - \exp \left(-\frac{t-m}{s} \right) \right] \quad (4.120)$$
$$-\infty < t < +\infty \quad m > 0 \quad s > 0$$

ise t rastgele değişkenine m ve s parametreli, birinci tip uç değer dağılımına sahiptir denir. Burada m ve s parametreleri, sırasıyla dağılımın konum ve yayılım parametreleridir (Johnson ve ark. 1995).

TEOREM 4.61. Birinci tip uç değer dağılımının dağılım fonksiyonu

$$F(t; m, s) = \exp \left[-\exp \left(-\frac{t-m}{s} \right) \right] \quad (4.121)$$

dir (Erol 1991).

TEOREM 4.62. Birinci tip uç değer dağılımına sahip X rastgele değişkeni için moment çıkaran fonksiyonu,

$$M(t; m, s) = \exp(mt) \Gamma(1-s) t^{\frac{1}{s}} \quad (4.122)$$

dır (Erol 1991).

TEOREM 4.63. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, birinci tip uç değer dağılımına sahip ise beklenen değer; ya da ortalaması,

$$E(t) = m\Gamma(1) - s\Gamma'(1) \quad (4.123)$$

dir (Erol 1991).

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

TEOREM 4.64. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, birinci tip uç değer dağılımına sahip ise varyans,

$$Var(t) = s^2 \Gamma''(1) - s^2 \Gamma'(1) \Gamma'(1) \quad (4.124)$$

dir (Erol 1991).

TANIM 4.25. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni birinci tip uç değer dağılımına sahip ise a_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$a_3 = 1.139547 \quad (4.125)$$

dir (Evans ve ark. 1993).

TANIM 4.26. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni birinci tip uç değer dağılımına sahip ise a_4 ile gösterilen sivrililiği,

$$a_4 = 5.4 \quad (4.126)$$

tür (Evans ve ark. 1993).

TEOREM 4.65. Birinci tip uç değer dağılımının modu,

$$t = m \quad (4.127)$$

noktasındadır (Erol 1991).

TEOREM 4.66. Birinci tip uç değer dağılımının medyanı,

$$t = m - s \ln(\ln 2) \quad (4.128)$$

noktasındadır (Erol 1991).

TEOREM 4.67. Birinci tip uç değer dağılımının $R(t)$ ile gösterilen güvenilirlik/sağ kalım fonksiyonu,

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$R(t) = 1 - \exp\left[-\exp\left(-\frac{t-m}{s}\right)\right] \quad (4.129)$$

dır.

TEOREM 4.68. Birinci tip uç değer dağılımının $R(T/t)$ ile gösterilen koşullu güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(T/t) = \frac{1 - \exp\left[-\exp\left(-\frac{T+t-m}{s}\right)\right]}{1 - \exp\left[-\exp\left(-\frac{t-m}{s}\right)\right]} \quad (4.130)$$

dır (Ebeling 1997).

TEOREM 4.69. Birinci tip uç değer dağılımının $h(t)$ ile gösterilen risk fonksiyonu,

$$h(t) = \frac{1}{s} \exp\left[-\frac{t-m}{s} - \exp\left(-\frac{t-m}{s}\right)\right] \frac{1}{1 - \exp\left[-\exp\left(-\frac{t-m}{s}\right)\right]} \quad (4.131)$$

dır.

TANIM 4.27. Sürekli tipteki t rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t) = \exp[-t - \exp(-t)] \quad -\infty < t < +\infty \quad (4.132)$$

ise t rastgele değişkenine birinci tip standart uç değer dağılımına sahiptir denir (Johnson ve ark. 1995).

TEOREM 4.70. Birinci tip standart uç değer dağılımının dağılım fonksiyonu

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$F(t) = \exp[-\exp(-t)] \quad (4.133)$$

dir (Patil ve ark. 1984).

TEOREM 4.71. Birinci tip standart uç değer dağılımına sahip X rastgele değişkeni için moment çıkaran fonksiyonu

$$M(t) = \Gamma(1-t) \quad t < 1 \quad (4.134)$$

dir (Patil ve ark. 1984).

TEOREM 4.72. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, birinci tip standart uç değer dağılımına sahip ise beklenen değer; ya da ortalaması,

$$E(t) = -\Gamma'(1) \quad (4.135)$$

dir (Erol 1991).

TEOREM 4.73. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, birinci tip standart uç değer dağılımına sahip ise varyansı,

$$Var(t) = \Gamma''(1) - \Gamma'(1)\Gamma'(1) \quad (4.136)$$

dir (Erol 1991).

TANIM 4.28. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni birinci tip standart uç değer dağılımına sahip ise a_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$a_3 = 1.139548156 \quad (4.137)$$

dır (Patil ve ark. 1984).

TANIM 4.29. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni birinci tip standart uç değer dağılımına sahip ise a_4 ile gösterilen sivrililiği,

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$a_4 = 5.4 \quad (4.138)$$

tür (Patil ve ark. 1984).

TEOREM 4.74. Birinci tip standart uç değer dağılımının modu,

$$t = 0 \quad (4.139)$$

noktasındadır (Patil ve ark. 1984).

TEOREM 4.75. Birinci tip standart uç değer dağılımının medyanı,

$$t = -\ln(\ln 2) \quad (4.140)$$

noktasındadır (Patil ve ark. 1984).

TANIM 4.30. Sürekli tipteki t rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(t; m, s, t) = \frac{t}{s} \left(\frac{t-m}{s} \right)^{-t-1} \exp \left[- \left(\frac{t-m}{s} \right)^{-t} \right] \quad t > m, s > 0, t > 0 \quad (4.141)$$

ise t rastgele değişkenine m , s ve t parametrelili, ikinci tip uç değer dağılımına sahiptir denir (Patil ve ark.1984). Burada m , s ve t parametreleri, sırasıyla dağılımın konum, yayılım ve şekil parametreleridir.

TEOREM 4.76. İkinci tip uç değer dağılımının dağılım fonksiyonu

$$F(t; m, s, t) = \exp \left[- \left(\frac{t-m}{s} \right)^{-t} \right] \quad (4.142)$$

dir (Patil ve ark.1984).

TEOREM 4.77. İkinci tip uç değer dağılımının m etrafındaki r . momenti,

$$m_r' = s^r \Gamma\left(1 - \frac{r}{t}\right) \quad r < t \quad (4.143)$$

dir (Patil ve ark.1984).

TEOREM 4.78. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, ikinci tip uç değer dağılımına sahip ise beklenen değer; ya da ortalaması,

$$E(t) = m + s \Gamma\left(1 - \frac{1}{t}\right) \quad 1 < t \quad (4.144)$$

dir (Patil ve ark.1984).

TEOREM 4.79. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, ikinci tip uç değer dağılımına sahip ise varyansı,

$$Var(t) = s^2 \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{t}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{t}\right) \right] \quad 2 < t \quad (4.145)$$

dir (Patil ve ark.1984).

TANIM 4.31. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, ikinci tip uç değer dağılımına sahip ise, a_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$a_3 = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{3}{t}\right) - 3\Gamma\left(1 - \frac{2}{t}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{t}\right) + 2\Gamma^3\left(1 - \frac{1}{t}\right)}{\left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{t}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{t}\right) \right]^{\frac{3}{2}}} \quad t > 3 \quad (4.146)$$

dir (Erol 1991).

TANIM 4.32. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, ikinci tip uç değer dağılımına sahip ise, a_4 ile gösterilen sivrililiği,

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

$$a_4 = \frac{\Gamma\left(1-\frac{4}{t}\right) - 4\Gamma\left(1-\frac{3}{t}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{t}\right) + 6\Gamma\left(1-\frac{2}{t}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{t}\right) - 3\Gamma^4\left(1-\frac{1}{t}\right)}{\left[\Gamma\left(1-\frac{2}{t}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{1}{t}\right)\right]^2} \quad t > 4 \quad (4.147)$$

dir (Erol 1991).

TEOREM 4.80. İkinci tip uç değer dağılımının modu,

$$t = m + s \left[\frac{t}{t+1} \right]^{\frac{1}{t}} \quad (4.148)$$

noktasındadır (Patil ve ark.1984).

TEOREM 4.81. İkinci tip uç değer dağılımının medyanı,

$$t = m + s \left(\frac{1}{\ln 2} \right)^{\frac{1}{t}} \quad (4.149)$$

noktasındadır (Patil ve ark.1984).

TANIM 4.33. Sürekli tipteki t rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(t; m, s, t) = \frac{t}{s} \left(\frac{m-t}{s} \right)^{t-1} \exp \left[- \left(\frac{m-t}{s} \right)^t \right] \quad t \in (m, s) \quad t > 0 \quad (4.150)$$

ise t rastgele değişkenine m , s ve t parametrelili, üçüncü tip uç değer dağılımına sahiptir denir (Patil ve ark.1984). Burada m , s ve t parametreleri, sırasıyla dağılımın konum, yayılım ve şekil parametreleridir.

TEOREM 4.82. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, üçüncü tip uç değer dağılımına sahip ise beklenen değer; ya da ortalaması,

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

$$E(t) = m - s \Gamma\left(1 + \frac{1}{t}\right) \quad 1 \geq -t \quad (4.151)$$

dir (Patil ve ark.1984).

TEOREM 4.83. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, üçüncü tip uç değer dağılımına sahip ise varyansı,

$$Var(t) = s^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{t}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{t}\right) \right] \quad 2 > -t \quad (4.152)$$

dir (Patil ve ark.1984).

TANIM 4.34. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni, üçüncü tip uç değer dağılımına sahip ise, a_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$a_3 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{t}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{2}{t}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{t}\right) + 2\Gamma^3\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{t}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{t}\right) \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.153)$$

dir (Erol 1991).

TANIM 4.35. Sürekli tipteki t rastgele değişkeni ,ikinci tip uç değer dağılımına sahip ise , a_4 ile gösterilen sivrililiği,

$$a_4 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{4}{t}\right) - 4\Gamma\left(1 + \frac{3}{t}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{t}\right) + 6\Gamma\left(1 + \frac{2}{t}\right)\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{t}\right) - 3\Gamma^4\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{t}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{t}\right) \right]^2} \quad (4.154)$$

dir (Erol 1991).

TEOREM 4.84. Üçüncü tip uç değer dağılımının modu,

$$t = m - s \left[\frac{t-1}{t} \right]^{\frac{1}{t}} \quad (4.155)$$

noktasındadır (Patil ve ark.1984).

TEOREM 4.85. Üçüncü tip uç değer dağılımının medyanı,

$$t = m - s (\ln 2)^{\frac{1}{t}} \quad (4.156)$$

noktasındadır (Patil ve ark.1984).

4.6.1. Uç Değer Dağılımındaki Parametrelerin Tahmini

Birinci tip uç değer dağılımın m ve s parametrelerinin tahmin edicileri, maksimum likelihood yöntemi kullanılarak hesaplanacaktır.

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$; m ve s parametrelili birinci tip uç değer dağılımdan alınmış n birimlik rastgele örneklem olsun. Bu gözlem değerleri kullanılarak bilinmeyen m ve s parametreleri için tahmin ediciler hesaplanacaktır.

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ 'lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n; m, s) = \frac{1}{s^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{t_i - m}{s}\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{t_i - m}{s}\right)\right) \quad (4.157)$$

dir. $L(m, s) = f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n; m, s)$ olsun. O halde,

$$L(m, s) = \frac{1}{s^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{t_i - m}{s}\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{t_i - m}{s}\right)\right) \quad (4.158)$$

dir. (4.158)'deki eşitliğin logaritması alındığında,

$$\ln\{L(l)\} = -n \ln s - \sum_{i=1}^n \frac{t_i - m}{s} - \left(\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{t_i - m}{s}\right) \right) \quad (4.159)$$

bulunur.

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

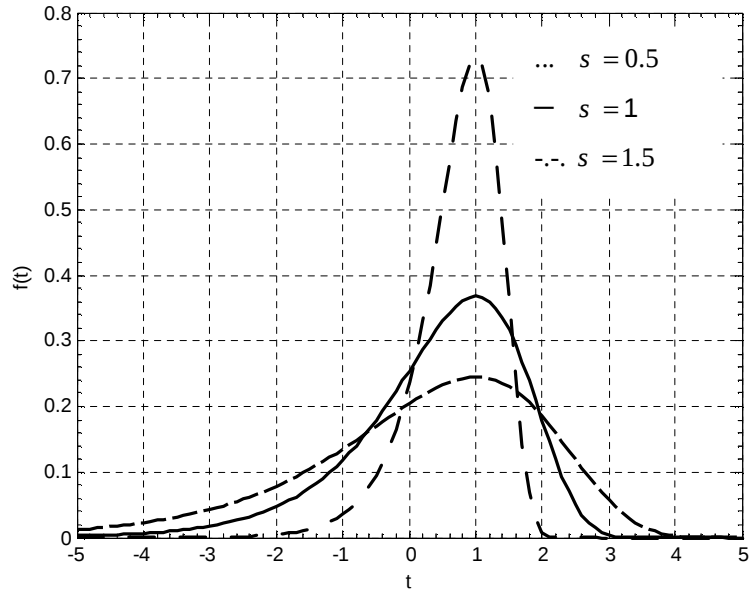
(4.159)'deki ifadenin m ve s parametrelerine göre türevleri alınıp sıfıra eşitlendiğinde m ve s parametrelerinin tahminleri sırasıyla,

$$\hat{m} = -\hat{s} \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{t_i}{\hat{s}} \right) \right) \quad (4.160)$$

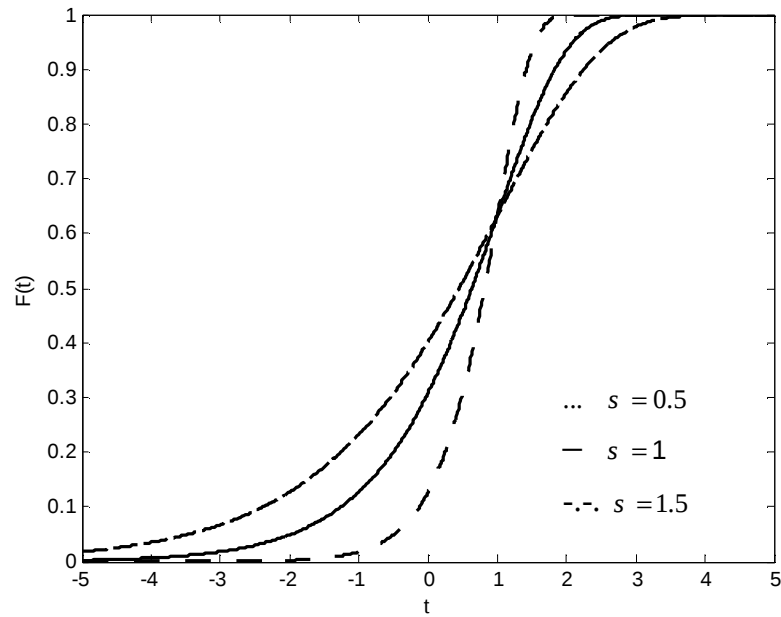
ve

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{\sum_{i=1}^n t_i \exp \left(-\frac{t_i}{\hat{s}} \right)}{\sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{t_i}{\hat{s}} \right)} \quad (4.161)$$

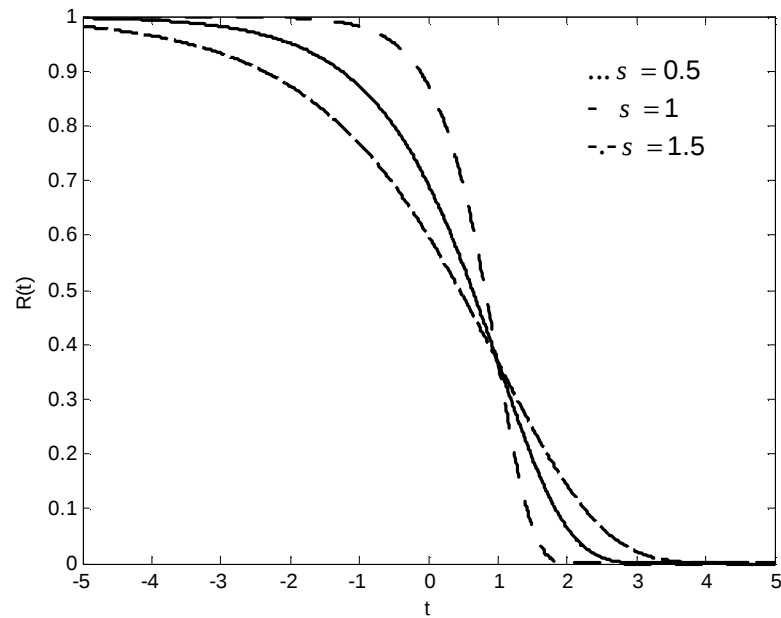
bulunur (Evans ve ark. 1993).



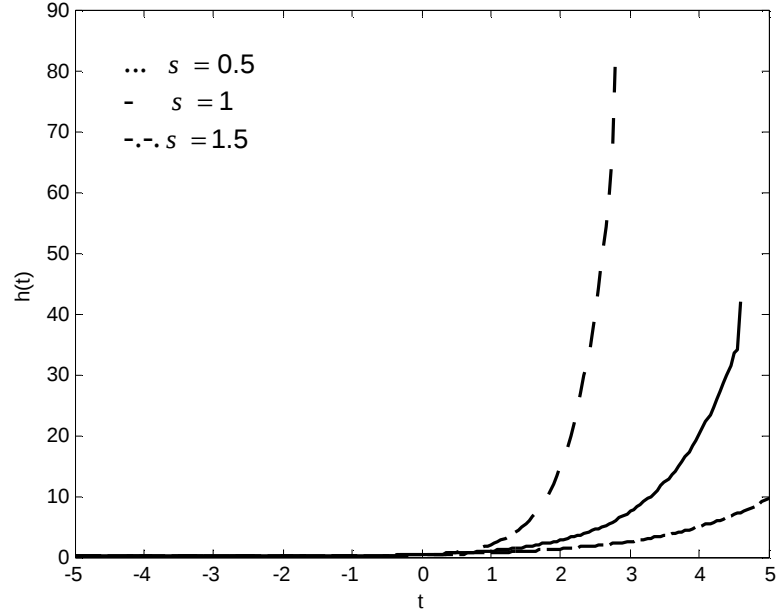
Şekil 4.28. I. tip uç değer dağılımında $m = 1$ ve $s = 0.5$, $s = 1$, $s = 1.5$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.



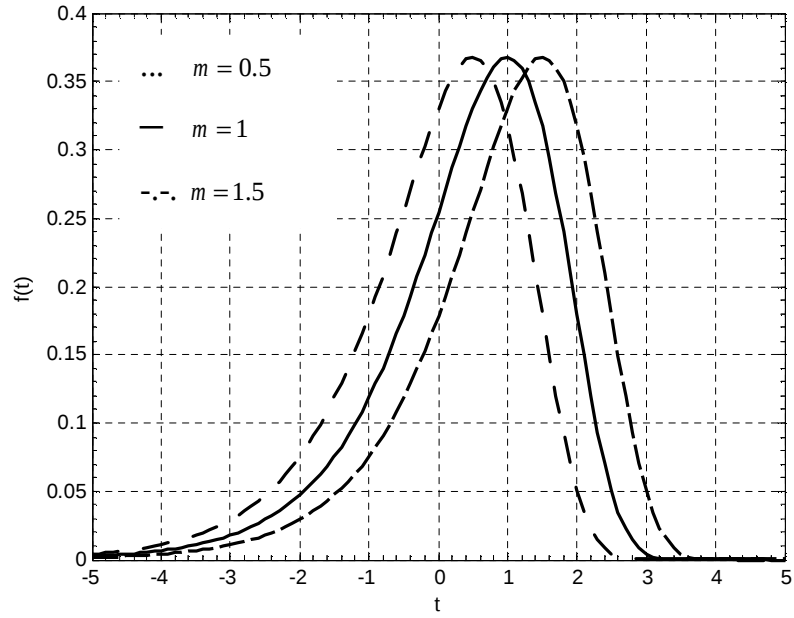
Şekil 4.29. I. tip uç değer dağılımında $m = 1$ ve $s = 0.5$, $s = 1$, $s = 1.5$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $F(t)$ dağılım fonksiyonlarının grafikleri.



Şekil 4.30. I. tip uç değer dağılımda $m = 1$ ve $s = 0.5$, $s = 1$, $s = 1.5$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonlarının grafikleri.



Şekil 4.31. I. tip uç değer dağılımında $m = 1$ ve $s = 0.5$, $s = 1$, $s = 1.5$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $h(t)$ risk fonksiyonlarının grafikleri.



Şekil 4.32. I. tip uç değer dağılımında $s = 1$ ve $m = 0.5$, $m = 1$, $m = 1.5$ parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.

4.6.2. Uç Değer Dağılımının Uygulama Alanları

Bir bileşendeki veya bir sistemdeki başarısızlık, özel bir dağılımdan alınan bir örneklemdeki en küçük veya en büyük değer gibi uç olaylara bağlıdır. Aynı üretimden rastgele seçilmiş n bileşeni kapsayan iki devre düşünelim. İlk devrede bileşenler seri bağlansın. Birinci bileşen başarısız olursa devre de başarısızlık olur. İkinci devrede bileşenler paralel bağlansın. Başarısızlık durumu ancak tüm bileşenler başarısız olursa gerçekleşir. Sabit gerilimde gerçekleşen yorgunluk testinde başarısızlık, söz konusu materyalin elemanlarının mukavemetine bağlıdır. Kapasitör analizinde, çok sayıda hatanın materyale rastgele dağıldığını ve bozulma voltajının direkt olarak en büyük kusurun hacmine bağlı olduğu görülmüştür. Bu durumlarda, bazı başlangıç dağılımından alınan bir örneklemdeki en küçük veya en büyük elemanın dağılımı ile ilgilenilir. Genellikle, yorgunluk ve bozulma voltajı örneklerinde olduğu gibi başlangıç dağılımı bilinmez ve direkt örnekleme yapılamaz. Öyleki sadece maksimum ve minimum değerler gözlenir. En küçük veya en büyük elemanın dağılımı n boyutlu örnekleme ve başlangıç dağılımının yapısına bağlıdır. n büyükse, başlangıç dağılımı ile ilgili bazı sınırlandırılmış varsayımlara bağlı olarak genel asimptotik sonuçları kullanılabilir.

Minimum ve maksimum değerler için farklı başlangıç dağılımlarına dayalı üç tip asimptotik dağılım geliştirilmiştir.

1. Maksimum değerler için I.tip asimptotik dağılım.
2. Minimum değerler için I. tip asimptotik dağılım.
3. Minimum değerler için III. tip asimptotik dağılım.

I. tip asimptotik dağılım, I. tip uç değer dağılımıdır, Gumbell'ın uç değer dağılımı veya basitçe uç değer dağılımı olarak da bilinir. Minimum değerler için III. tip asimptotik dağılım ise bilinen Weibull dağılımıdır.

Yukarda görüldüğü gibi Gumbell dağılımının iki formu vardır. Bunlardan biri en küçük değere, diğeri en büyük değere dayanır. Gumbel (minimum durumu için) dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu konum parametresi m ve yayılım parametresi s ile

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$f(t; m, s) = \frac{1}{s} \exp \left[\frac{t-m}{s} - \exp \left(\frac{t-m}{s} \right) \right] \quad (4.162)$$

şeklindedir. Gumbel (maksimum durumu için) dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu konum parametresi m ve yayılım parametresi s ile

$$f(t; m, s) = \frac{1}{s} \exp \left[-\frac{t-m}{s} - \exp \left(-\frac{t-m}{s} \right) \right] \quad (4.163)$$

şeklindedir (Hahn ve Shapiro 1967).

Olasılık teorisinde ve istatistikte Gumbell dağılımı çok kullanışlıdır. Geçmiş on yıla ait maksimum değerler biliniyorsa, bir nehrin özel bir yılda maksimum seviyesi bulunabilir. Ya da bir depremin, bir sel baskınının ya da başka bir doğal felaketin gerçekleşme olasılığı tahmin edilebilir.

Maksimum değerler için I. tipteki asimptotik dağılım, paralel bağlı n elemandan oluşan devreler için zamana karşı dayanmayı göstermek için kullanılır. Bu kullanımda n 'in büyük olduğu, bileşen hata sürelerinin aynı üstel dağılımdan geldiği ve başarısızlıkların bağımsız olduğu varsayılır. Bu model yaşam testi ve güvenilirlikle sınırlı kalmamıştır. Örneğin özel bir ölçüm noktasında, özel bir nehrin günlük su boşaltımında yıllık maksimum dağılımını göstermek için başarılı bir biçimde kullanılmıştır. Bu uygulamada aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır.

1. Günlük boşaltım değerleri bir üstel tip dağılım izler.
2. Elemanların orijinal numarası, 365 gün, asimptotik teoremin uygulanabilirliği adına yeterince büyüktür.
3. Günlük boşaltımlar bağımsızdır.

Bir uçağın karşılaştığı esinti hız derecesi, bakterilerin neslinin tükenme süresi, korozyon çukurlarının derinliği uygulamalarında da maksimum değerler için I. tip asimptotik dağılım kullanılır (Hahn ve Shapiro 1967).

Pozitif veya negatif değer alan rastgele faktörlerin minimumu için herhangi bir modelleme uygulamasında uç değer dağılımı aday modeldir. Yaşam süresi dağılımı modeli için hata sayıları sıfırla sınırlı olacağından Weibull dağılımı daha iyi bir seçimdir.

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

Weibull dağılımı ile uç değer dağılımının matematiksel anlamda kullanışlı bir akrabalığı vardır. $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$; Weibull dağılımından alınan bir örneklem ise $\ln t_1, \ln t_2, \ln t_3, \dots, \ln t_n$; uç değer dağılımından alınan rastgele gözlemlerdir. Bu akrabalık sayesinde uç değer dağılımı için tasarlanmış bilgisayar programları Weibull verileri için de kullanılabilir (Mathworks 2007).

ÖRNEK 4.8. Her birinin boyutu 1000 adet olan çamaşır makinesi yığınları göz önünde bulunduruluyor. Her yığın aynı imalat yönteminden elde edilmiştir. En küçük çamaşır makinesi hacmi modellenmek isteniyor. Yığınlar arasında ve bir yığın içinde hacimlerin bağımsız olduğu düşünülüyorsa, sekiz yığından alınan minimum çap ölçülerine uç değer dağılım uygulanabilir. Sekiz yığına ait minimum çap ölçüleri 19.774, 20.141, 19.44, 20.511, 21.377, 19.003, 19.66, 18.83 olarak verilmiştir. Dağılımın parametrelerinin maksimum likelihood tahminleri ve güven aralıkları hesaplanmak isteniyor.

ÇÖZÜM:

```
>> x = [19.774 20.141 19.44 20.511 21.377 19.003 19.66 18.83];  
>> [parmhat, parmci] = evfit(x)
```

```
parmhat =
```

```
20.2506  0.8223
```

```
parmci =
```

```
19.6444  0.4986
```

```
20.8569  1.3562
```

parmhat ile sırasıyla m ve s için maksimum likelihood tahminleri, parmci ile güven aralıkları verilmektedir (Mathworks 2007).

4.7. Diğer Dağılımlar

4.7.1. Bernoulli Dağılımı

Uygulamalarda zaman zaman sadece başarı ve başarısızlık olmak üzere iki sonucun olduğu basit durumlarla ilgilenilebilir. Örneğin bir seri imalat bandının ürün kalitesini analiz ederken tüm örnekleme iyi ve kötü şeklinde iki parçaya ayırmak için bir kriter (uygun bir seviye veya tolerans limiti) seçilebilir. Başka bir örnek olarak, bir ekipman testi esnasında bir zaman belirlenir ve seçilen cihazın zamana karşı dayanma süresi belirlenen süre ile karşılaştırılır. Zamana karşı dayanma süresi, belirlenen süreyi aşıyor ya da aşmıyordur. Böylece her bir olay, bu kriterle birlikte başarı ya da başarısızlıkla ilgili olabilir. Başarılı sonuç 1 ve başarısız sonuç 0 ile gösterilsin. Bu durum, $P(X = 1) = p$ ve $P(X = 0) = 1 - p = q$ olacak şekilde bir X rastgele değişkeninin düşünülmesine yol açar. p değeri Bernoulli dağılımının parametresi olarak adlandırılır. X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = p^x q^{1-x} \quad x = 0,1 \quad (4.164)$$

şeklindedir. Bernoulli rastgele değişkeni için beklenen değerler

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p \quad (4.165)$$

$$E(X^2) = 1^2 p + 0^2 q = p \quad (4.166)$$

biçimindedir. Varyans

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq \quad (4.167)$$

olarak hesaplanır. Moment çıkaran fonksiyon da

$$M(t) = E(e^{tx}) = p \exp(t) + q \quad -\infty < t < +\infty \quad (4.168)$$

bulunur (Gnedenko ve Ushakov 1995).

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

4.7.2. Binom Dağılımı

Bernoulli denemeler silsilesinde n denemede başarılı sonuçların sayısı ile ilgilenilebilir. Bu durumda ilgilenilen rastgele değişken X ,

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{1 \leq i \leq n} X_i \quad (4.169)$$

şeklindedir (Gnedenko ve Ushakov 1995).

Binom dağılım, sistemlerin başarılı ve başarısız gibi iki kategoriye ayrıldıkları durumda kullanılır. n tane sistem olsun. Bir sistemin başarı olasılığı p , başarısızlık olasılığı $1-p$ olsun. Buna göre başarılı olan sistemlerin sayısı X , binom dağılıma sahiptir. Bu bilgilerin ışığında X rastgele değişkenine ait olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4.170)$$

dir (Moss 2005). Bununla birlikte Bernoulli dağılımına ait beklenen değer ve varyans bilgileri kullanılarak binom dağılımına ait beklenen değer, varyans ve moment çıkaran fonksiyon sırasıyla

$$E\left(\sum_{1 \leq i \leq n} X_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} E(X_i) = np \quad (4.171)$$

$$Var\left(\sum_{1 \leq i \leq n} X_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} Var(X_i) = npq \quad (4.172)$$

ve

$$\begin{aligned} M(t) &= E(\exp(tx)) = \sum_{x=0}^n \exp(tx) \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (p \exp(t))^x q^{n-x} = (p \exp(t) + q)^n \end{aligned} \quad (4.173)$$

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

bulunur (Gnedenko ve Ushakov 1995).

ÖRNEK 4.9. İmalathanenin hizmet dışı kalmasına yol açan hatalardan korunmak için üç koruyucu kanalıyla birlikte bir otomatik koruyucu sistem tasarlanmıştır. Sistemin durması için üç kanaldan herhangi ikisinin başarısız/arızalı olması gerekmektedir. Bir kanalın güvenilirliği 0.99 olsun. Böyle bir otomatik koruyucu sistemin başarısız olması olasılığı hesaplanmak isteniyor.

ÇÖZÜM: Bir kanalın güvenilirliği 0.99 ise, başarısız olması olasılığı $1 - 0.99 = 0.01$ dir. Sistemin başarısız olması için 2 ya da 3 kanal başarısız olmalıdır. Üç kanaldan herhangi ikisinin arızalı olması olasılığı ile üçünün arızalı olması

olasılıkları sırasıyla, $P(X = 2) = \binom{3}{2} (0.01)^2 (0.99) = 2.97 \times 10^{-4}$ ve

$P(X = 3) = \binom{3}{3} (0.01)^3 \times 1 = 1 \times 10^{-6}$ olarak bulunur. Böylece otomatik koruyucu

sistemin başarısız olması olasılığı, $P(X = 2) + P(X = 3) = 2.98 \times 10^{-4}$ olarak bulunur (Moss 2005).

4.7.3. Poisson Dağılımı

Poisson dağılımının güvenilirlikte iki temel uygulaması vardır. İlk uygulaması bir zaman aralığında rastgele olayların (hataların/başarısızlıkların) sayısını tanımlamak için kullanılmasıdır. İkinci bir uygulaması ise binom parametresi küçük olduğunda binom dağılımı için bir yaklaşım olarak kullanılmasıdır. Herhangi bir zaman aralığında gerçekleşen hataların/başarısızlıkların sayısı sadece aralığın uzunluğuna bağlıdır ve $m = lt$ ortalaması ile Poisson dağılımına sahiptir. Hata oranı, l sabittir. Poisson rastgele değişkeni X için olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{\exp(-m) m^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad m > 0 \quad (4.174)$$

şeklindedir (Moss 2005). Moment çıkaran fonksiyonu

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

$$\begin{aligned}
 M(t) &= E(\exp(tx)) = \sum_{x=0}^{\infty} \exp(tx) \frac{\exp(-m)m^x}{x!} \\
 &= \exp(-m) \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(m \exp(t))^x}{x!} = \exp[(\exp(t)-1)m] \quad (4.175)
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Beklenen değerleri

$$E(X) = M'(0) \Rightarrow M'(t) = m \exp(t) \exp[(\exp(t)-1)m] \Rightarrow M'(0) = m \quad (4.176)$$

ve

$$E(X^2) = M''(0) = m + m^2 \quad (4.177)$$

dir. Varyansı ise

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (m + m^2) - m^2 = m \quad (4.178)$$

olarak bulunur (Gnedenko ve Ushakov 1995).

ÖRNEK 4.10. Bir imalathaneye 10 pompa yerleştiriliyor. Her hangi bir pompanın başarısız olması durumunda pompa değiştirilecektir. Kullanılan pompa tipinin ortalama hata oranı yıllık 0.12 hata/başarısızlık olarak verilmiştir. Poisson dağılımına uyduğu varsayımı altında sürekli çalışma esnasında herhangi bir ayda 2 ya da daha çok pompanın hata/başarısızlık olasılığı hesaplanmak isteniyor.

ÇÖZÜM: 10 pompa için hata oranı yıllık $10 \times 0.12 = 1.2$ hata/başarısızlıktır. Böylece $lt = 1.2$ olur. Aranılan ifade, $P(X \geq 2) = [1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}]$ dir. $P(X = 0) = \exp(-lt) = \exp(-1.2) = 0.30$ ve $P(X = 1) = \exp(-lt)lt = \exp(-1.2) \times 1.2 = 0.36$ şeklindedir. Böylece, $P(X \geq 2) = 1 - (0.30 + 0.36) = 0.34$ bulunur (Moss, 2005).

4.7.4. Gama Dağılımı

Gama dağılımı, olayların sabit bir oranla gerçekleştiği, tam olarak h bağımsız olayın meydana gelmesi için gereken süreye uygun bir modeldir. Bir sistemde başarısızlığın gerçekleşmesi, tam olarak h alt hatanın sabit bir l oranıyla bağımsız olarak gerçekleşmesine bağlı ise gama dağılımı zamana karşı dayanma dağılımıdır. h kullanımdan sonra yeniden ayarlanmaya gereksinimi olan bir aygıt için ya da h görevden sonra kontrol edilmesi gereken bir uçak için ardışık bakım işlemleri arasındaki zaman normal koşullar altında gama değişkenidir. Yani gama dağılımı bekleme hattı ve müşteri servis problemleri gibi konularla ilgilenen istatistiksel kuyruk teorisinde önemli bir role sahiptir.

Gama dağılımına sahip X rastgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; h, l) = \frac{l^h}{\Gamma(h)} x^{h-1} \exp(-lx) \quad x \geq 0 \quad l > 0 \quad h > 0 \quad (4.179)$$

şeklindedir (Hahn ve Shapiro 1967). Gama dağılımına sahip X rastgele değişkeni için moment çıkaran fonksiyon,

$$\begin{aligned} M(t) &= E(\exp(tx)) = \int_0^{\infty} \exp(tx) \frac{l^h}{\Gamma(h)} x^{h-1} \exp(-lx) dx \\ &= \int_0^{\infty} \exp((t-l)x) \frac{l^h}{\Gamma(h)} x^{h-1} \end{aligned} \quad (4.180)$$

dir. Eşitlikte $y = (t-l)x$ dönüşümü yapılarak,

$$M(t) = \left(1 - \frac{t}{l}\right)^{-h} \quad (4.181)$$

bulunur. Gama dağılımına sahip X rastgele değişkeninin beklenen değerleri

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$E(X) = M'(0) \Rightarrow M'(t) = \frac{h}{l} \left(1 - \frac{t}{l}\right)^{h-1} \Rightarrow M'(0) = \frac{h}{l} \quad (4.182)$$

ve

$$E(X^2) = M''(0) = (h+1) \frac{h}{l^2} \quad (4.183)$$

dir. Gama dağılımına sahip X rastgele değişkeninin varyansı

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (h+1) \frac{h}{l^2} - \frac{h^2}{l^2} = \frac{h}{l^2} \quad (4.184)$$

olarak bulunur (Patil ve ark. 1984). Gama dağılımının hata oranı $h < 1$ iken azalır, $h = 1$ iken sabit ve $h > 1$ iken artar (Ireson ve ark 1996).

4.7.5. Geometrik Dağılım

Bir sokete bir ünite yerleştirilsin. Ünite periyodik olarak her t süresi sonunda yeni bir tanesi ile değiştirilsin. Soketin çalışma durumu devirlerin bir silsilesi olarak düşünülmektedir. Her bir devir yeni bir ünitenin kullanımı ile oluşmaktadır. X değişkeni deneme sonucunu göstermek üzere, ünite t zaman aralığında başarısız olmazsa $X = 1$, diğer durumda $X = 0$ olsun. Bir ünitenin bir devirde başarılı çalışma olasılığı p 'dir. Tüm üniteler özdeş ve stokastik olarak bağımsızdır. Soket ilk hata/başarısızlık gerçekleşene kadar X rastgele devir sayısınca başarılı bir biçimde çalışmaktadır. Burada X rastgele değişkeni geometrik dağılıma sahiptir. Geometrik dağılıma ilişkin olasılık fonksiyonu,

$$P(X = x) = p^x q \quad (4.185)$$

dur. Geometrik dağılıma sahip X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$M(t) = E(\exp(tx)) = q \sum_{x=0}^{\infty} p^x \exp(tx) = \frac{q}{1 - p \exp(t)} \quad (4.186)$$

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

dir. Beklenen değerleri

$$E(X) = \frac{d}{dt} M(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{1 - p \exp(t)} \right) \Big|_{t=0} = \frac{p}{q} \quad (4.187)$$

ve

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} M(t) \Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{q}{1 - p \exp(t)} \right) \Big|_{t=0} = \frac{p(1+p)}{q^2} \quad (4.188)$$

olarak elde edilir. Geometrik dağılıma sahip X rastgele değişkeninin varyansı

$$Var(X) = \frac{p(1+p)}{q^2} - \left(\frac{p}{q} \right)^2 = \frac{p}{q^2} \quad (4.189)$$

olarak bulunur (Gnedenko ve Ushakov 1995).

4.7.6. Negatif Binom Dağılımı

Negatif binom dağılımı sabit sayıda başarıya ulaşmadan önce gerçekleşen başarısızlık sayısı ile ilgilenildiği durumda kullanılır. Yani, negatif binom dağılımı, geometrik dağılımın genel şeklidir. Aşağıdaki koşulları yerine getiren bir deney negatif binom dağılımı deneyidir.

1. Deney bağımsız denemelerin bir silsilesinden oluşur.
2. Her deneme başarılı ve başarısız olacak şekilde iki olası sonuca sahiptir.
3. Her bir denemede başarı olasılığı sabittir.
4. Deney sabit K sayıdaki başarı gerçekleşene kadar devam eder.

Negatif binom dağılımına sahip X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \binom{x-1}{K-1} p^K (1-p)^{x-K} \quad (4.190)$$

şeklindedir. Negatif binom dağılıma sahip X rastgele değişkeni, her X_i geometrik dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere,

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

$$X = X_1 + \dots + X_n = \sum_{1 \leq i \leq n} X_i \quad (4.191)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu ifadenin ve daha önce bulunan geometrik dağılıma ait beklenen değer ve varyans bilgilerinin yardımıyla, negatif binom dağılımının beklenen değeri ve varyansı sırasıyla

$$E(X) = \sum_{1 \leq i \leq n} E(X_i) = \frac{np}{q} \quad (4.192)$$

ve

$$Var(X) = \sum_{1 \leq i \leq n} Var(X_i) = \frac{np}{q^2} \quad (4.193)$$

olarak bulunur (Gnedenko ve Ushakov 1995).

4.7.7. Soldan Kesik/Kesilmiş Logistic Dağılım

Normal ve kesik/kesilmiş normal dağılıma ait dağılım fonksiyonlarının kapalı formlarının olmaması, güvenilirlik modellemesinde uygulanabilirlikleri adına zorluk oluşturur. Normal dağılıma ilişkin yoğunluk fonksiyonuna bir alternatif olarak, matematiksel olarak daha elverişli olan logistic olasılık yoğunluk fonksiyonu vardır. Logistic dağılımın grafiksel gösterimi ile normal dağılımın grafiksel gösterimi ayırt edilemeyecek biçimde benzerdir. Logistic dağılım zamana karşı dayanma modeli olarak güvenilirlik analizinde kullanılır. Normal dağılım gibi logistic dağılımda, yıpranma peryoduna özgü artan risk oranı sergiler.

Soldan kesik/kesilmiş logistic dağılım, logistic dağılımın soldan sıfır noktasında kesilmesiyle elde edilir. Kesik yüzdesi çok küçük olduğunda kesik/kesilmiş logistic dağılımı, logistic dağılım pratik olarak ayırt edilemez olsa da güvenilirlik modellemesi için doğru dağılım soldan kesik/kesilmiş logistic dağılımdır. Çünkü güvenilirlik mühendisliği pozitif zamanda gerçekleşen başarısızlıklarla ilgilenir. Kesik miktarı arttıkça, soldan kesik/kesilmiş logistic dağılım daha pozitif çarpık olur. Yıpranmaya maruz kalan ve zamana karşı dayanma

4. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI TEK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

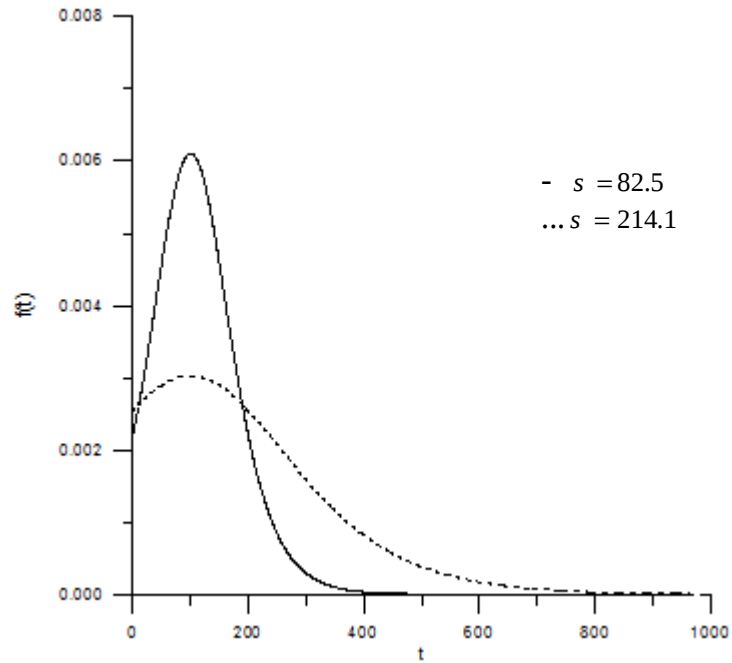
süreleri pozitif çarpık olan sistemler için zamana bağımlı başarısızlık davranışlarını göstermek amacıyla soldan kesik/kesilmiş logistic dağılım kullanılabilir. Kesik/kesilmiş logistic dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, güvenilirlik fonksiyonu ve risk fonksiyonu sırasıyla

$$f(t) = \frac{p \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{pm}{s\sqrt{3}} \right] \right\} \exp \left[\frac{-p(t-m)}{s\sqrt{3}} \right]}{s\sqrt{3} \left\{ 1 + \exp \left[\frac{-p(t-m)}{s\sqrt{3}} \right] \right\}^2} \quad x \geq 0 \quad (4.194)$$

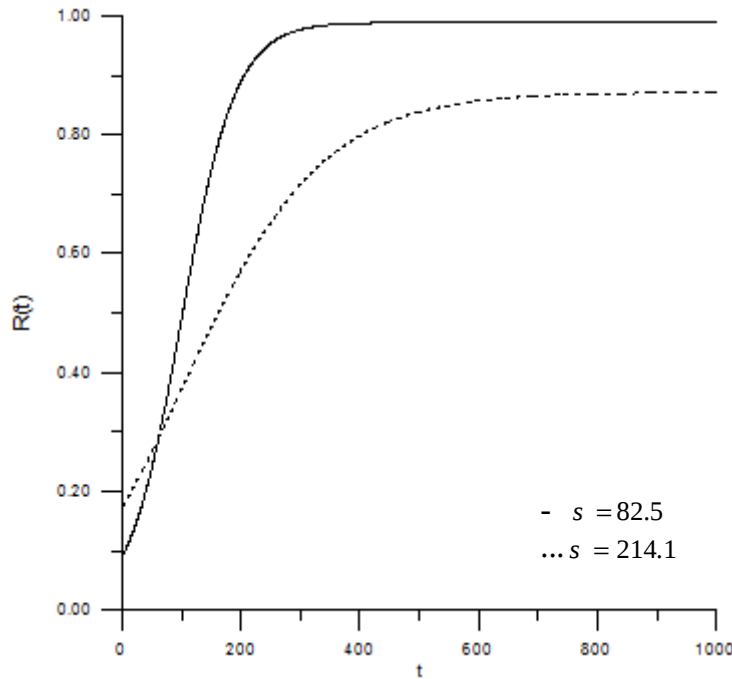
$$R(t) = 1 - \left[1 + \exp \left(-\frac{pm}{s\sqrt{3}} \right) \right] + \left\{ \frac{1}{1 + \exp \left(-\frac{p(t-m)}{s\sqrt{3}} \right)} + \frac{1}{1 + \exp \left(\frac{pm}{s\sqrt{3}} \right)} \right\} \quad (4.195)$$

$$h(t) = \left(\frac{p}{s\sqrt{3}} \right) \left\{ \frac{1}{1 + \exp \left(-\frac{p(t-m)}{s\sqrt{3}} \right)} \right\} \quad (4.196)$$

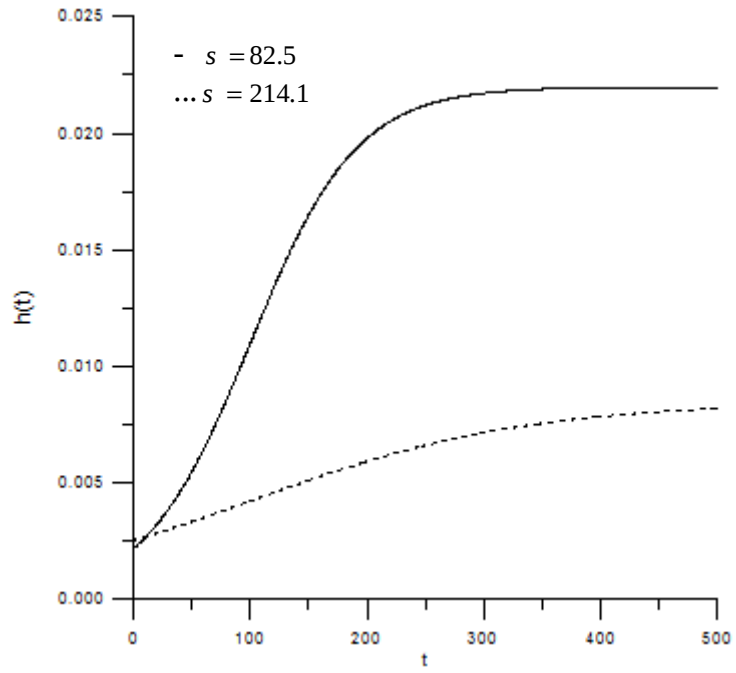
olarak verilir (Jenkins 1982).



Şekil 4.33. Soldan kesik/kesilmiş logistic dağılımda $m = 100$ ve $s = 82.5$, $s = 214.1$ parametre değerleri için GRAPHER paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri (Jenkins 1982).



Şekil 4.34. Soldan kesik/kesilmiş logistic dağılımda $m = 100$ ve $s = 82.5$, $s = 214.1$ parametre değerleri için GRAPHER paket programı kullanılarak oluşturulan $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonlarının grafikleri (Jenkins 1982).



Şekil 4.35. Soldan kesik/kesilmiş logistic dağılımda $m = 100$ ve $s = 82.5$,
 $s = 214.1$ parametre değerleri için GRAPHER paket programı
kullanılarak oluşturulan $h(t)$ risk fonksiyonlarının grafikleri (Jenkins
1982).

5. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Sistem iki ya da daha fazla bileşenden oluşuyorsa, ortak yaşam süresi, doğal olarak her bir bileşenin yaşam süresine bağlı olan çok değişkenli dağılım tarafından tanımlanır.

Bazen hata oranı birden fazla nedenden ötürü meydana gelebilir. Çok değişkenli dağılımlar bu tür durumları modellemek için uygun dağılımlardır. Örneğin T_1 ve T_2 , iki bileşenli elektronik bir sistemdeki bileşenlere ait başarısızlık zamanları olsun. Eğer bileşenler aynı zamanda, p olasılığı ile başarısızlığa uğruyorsa, onların genel başarısızlık zamanı bazı tek değişkenli dağılımlara göre dağılabilir. Diğer taraftan bileşenler $1-p$ olasılığı ile farklı zamanlarda başarısızlığa uğruyor olabilir. Bu durumda onların başarısızlık zamanları bazı iki değişkenli dağılımlara göre dağılabilir (Al-Ruzaiza ve El-Gohary 2007).

5.1. Freund'un İki Değişkenli Üstel Dağılımı

TANIM 5.1. C_1 ve C_2 bileşenlerine sahip bir aygıt olsun. Bu aygıt bileşenlerden biri başarısız olsa bile çalışmaya devam etmektedir. Bu bileşenler sırasıyla X_1 ve X_2 yaşam sürelerine sahiptir. Öyleki, her iki bileşen de çalışıyor durumda iken $f(x_i)$ bağımsız olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f(x_i) = a_i \exp(-a_i x_i) \quad a_i > 0 \quad x_i > 0 \quad i = 1, 2 \quad (5.1)$$

şeklindedir. Bu sembolik olarak $X_i \sim f(x_i; a_i)$ biçiminde gösterilir. X_1 ve X_2 arasında bir bağımlılık vardır. Öyleki herhangi bir bileşendeki bir hata diğer bileşenin yaşam dağılımının parametresini değiştirir. Böylece C_i (X_i yaşam süreli) başarısız olduğunda X_{3-i} 'nin parametresi a_{3-i} iken a'_{3-i} olarak değişmektedir. Bunun dışında başka bir bağımlılık yoktur.

5. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

İlk hataya kadar geçen zaman $\exp(a_1 + a_2)$ olarak dağılır. Başarısızlığın gerçekleştiği ilk bileşenin C_i olması olasılığı $\frac{a_i}{a_1 + a_2}$, $i = 1, 2$ şeklindedir. Bir bileşendeki ilk hatadan diğer bileşendeki hataya kadar geçen zaman dağılımı olan $\exp(a'_1)$ ve $\exp(a'_2)$ değerleri sırasıyla $\frac{a_2}{a_1 + a_2}$ ve $\frac{a_1}{a_1 + a_2}$ karma oranlarına sahiptir. Böylece X_1 ve X_2 rastgele değişkenleri,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} a_1 a'_2 \exp[-a'_2 x_2 - (a_1 + a_2 - a'_2)x_1] & 0 \leq x_1 < x_2 \\ a'_1 a_2 \exp[-a'_1 x_1 - (a_1 + a_2 - a'_1)x_2] & 0 \leq x_2 < x_1 \end{cases} \quad (5.2)$$

ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. Bu dağılım Freund'un iki değişkenli üstel dağılımı olarak adlandırılır. Bu dağılımın uygulama alanlarına örnek olarak; iki motorlu uçaklarda motor arızaları, ya da insanların göz, kulak, böbrek gibi çift olan organ hastalıkları verilebilir (Kotz ve ark. 2000, Freund 1961).

TANIM 5.2. İki değişkenli üstel dağılıma ilişkin $R(x_1, x_2)$ ortak sağ kalım fonksiyonu,

$$R(x_1, x_2) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\ = \begin{cases} \frac{1}{g_2} (a_1 \exp(-g_2 x_1 - a'_2 x_2) + (a_2 - a'_2) \exp(-(a_1 + a_2)x_2)) & 0 \leq x_1 < x_2 \\ \frac{1}{g_1} (a_2 \exp(-g_1 x_2 - a'_1 x_1) + (a_1 - a'_1) \exp(-(a_1 + a_2)x_1)) & 0 \leq x_2 < x_1 \end{cases} \quad (5.3)$$

şeklindedir. Burada $i = 1, 2$ olmak üzere $g_i = a_1 + a_2 - a'_i$ dir (Kotz ve ark. 2000).

TANIM 5.3. İki değişkenli üstel dağılımın değişkenleri X_1 ve X_2 olsun. $a_1 + a_2 \neq a'_i$ ($i = 1, 2$) olmak üzere X_i için $f(x_i)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

5. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$f(x_i) = \frac{(a_i - a'_i)(a_1 + a_2) \exp(-(a_1 + a_2)x_i)}{a_1 + a_2 - a'_i} + \frac{a'_i a_{3-i} \exp(-a'_i x_i)}{a_1 + a_2 - a'_i} \quad x_i \geq 0 \quad (5.4)$$

şeklinde (Kotz ve ark. 2000).

TANIM 5.4. İki değişkenli üstel dağılımın değişkenleri X_1 ve X_2 olsun. X_1 ve X_2 'nin $M(t_1, t_2)$ ortak moment çıkaran fonksiyonu,

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2) &= E[\exp(t_1 X_1 + t_2 X_2)] \\ &= \frac{1}{a_1 + a_2 - t_1 - t_2} \left\{ a_2 \left(1 - \frac{t_1}{a'_1} \right)^{-1} + a_1 \left(1 - \frac{t_2}{a'_2} \right)^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

eşitliği ile verilir (Kotz ve ark. 2000).

TANIM 5.5. İki değişkenli üstel dağılımın değişkenleri X_1 ve X_2 olsun. X_i 'nin $E(x_i)$ beklenen değeri ya da ortalaması,

$$E(X_i) = \frac{a'_i + a_{3-i}}{a'_i(a_1 + a_2)} \quad i = 1, 2 \quad (5.6)$$

dir (Kotz ve ark. 2000).

TANIM 5.6. İki değişkenli üstel dağılımın değişkenleri X_1 ve X_2 olsun. X_i 'nin $Var(x_i)$ varyansı,

$$Var(X_i) = \frac{a_i^2 + 2a_1 a_2 + a_{3-i}^2}{\{a'_i(a_1 + a_2)\}^2} \quad i = 1, 2 \quad (5.7)$$

dir (Kotz ve ark. 2000).

TANIM 5.7. Değişkenleri X_1 ve X_2 olan iki değişkenli üstel dağılım için, X_1 ve X_2 'nin $r(x_1, x_2)$ korelasyon katsayısı,

$$r(X_1, X_2) = \frac{a_1' a_2' - a_1 a_2}{\sqrt{(a_1'^2 + 2a_1 a_2 + a_2'^2)(a_2'^2 + 2a_1 a_2 + a_1'^2)}} \quad (5.8)$$

dir (Kotz ve ark. 2000).

TANIM 5.8. Değişkenleri X_1 ve X_2 olan üstel dağılım için X_1 verilmişken X_2 'ye ait $f(x_2 / x_1)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x_2 / x_1) = \begin{cases} a_1 a_2' (a_1 + a_2 - a_1') \frac{1}{h(x_1)} \exp(-(a_1 + a_2 - a_2')x_1 - a_2' x_2) & 0 \leq x_1 < x_2 \\ a_1' a_2 (a_1 + a_2 - a_1') \frac{1}{h(x_1)} \exp(-a_1' x_1 - (a_1 + a_2 - a_1')x_2) & 0 \leq x_2 < x_1 \end{cases} \quad (5.9)$$

dir. Burada $h(x_1) = (a_1 - a_1')(a_1 + a_2) \exp(-(a_1 + a_2)x_1) + a_1' a_2 \exp(-a_1' x_1)$ dir (Kotz ve ark. 2000).

TANIM 5.9. Değişkenleri X_1 ve X_2 olan üstel dağılım için X_1 verilmişken X_2 'nin $E(X_2 / X_1)$ koşullu beklenen değeri,

$$E(X_2 / X_1) = \frac{1}{(a_1 + a_2 - a_1')h(x_1)} \left[\frac{a_1}{a_2'} (a_1 + a_2 - a_1') (1 + a_2' x_1) - \frac{a_1' a_2}{a_1 + a_2 - a_1'} \{1 + (a_1 + a_2 - a_1')x_1\} \exp(-(a_1 + a_2)x_1) + \frac{a_1' a_2}{a_1 + a_2 - a_1'} \exp(-a_1' x_1) \right] \quad (5.10)$$

şeklindedir (Kotz ve ark. 2000).

5.1.1. Freund'un İki Değişkenli Üstel Dağılımındaki Parametrelerin Tahmini

Freund'un iki değişkenli üstel dağılımındaki parametreleri tahmin etmek için maksimum likelihood yöntemi kullanılacaktır. Bunun için (5.2)'deki ortak olasılık

5. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

yoğunluk fonksiyonuna sahip bir kitleden n hacimli bir rastgele örneklem seçilsin. Bu örneklemin r tanesinde ilk kez C_1 bileşeni başarısız olsun. $n-r$ tanesinde ilk kez C_2 bileşeni başarısız olsun. İlk kez C_1 bileşeninin başarısız olduğu gözlemlerde C_1 bileşenlerinin yaşam süreleri toplamı $\sum x_1$, buna karşın C_2 bileşenlerinin yaşam süreleri toplamı $\sum x_2$ 'dir. İlk kez C_2 bileşeninin başarısız olduğu gözlemlerde C_2 bileşenlerinin yaşam süreleri toplamı $\sum x_2'$, buna karşın C_1 bileşenlerinin yaşam süreleri toplamı $\sum x_1'$ 'dir. Buna göre likelihood fonksiyonu L ,

$$L = \left(a_1 a_2'\right)^r \left(a_1' a_2\right)^{n-r} \exp \left[- \left(a_1 + a_2 - a_2' \right) \sum x_1 - a_2' \sum x_2 - a_1' \sum x_1' - \left(a_1 + a_2 - a_1' \right) \sum x_2' \right] \quad (5.11)$$

şeklinde dir. Burada $r=0$ ise L , a_2' 'nin bir fonksiyonu değildir. Bu nedenle parametreler tahmin edilemez. Benzer biçimde $r=n$ ise L , a_1' 'in bir fonksiyonu değildir ve bu durumda da parametreler tahmin edilemez.

$\ln L$ 'nin a_1 , a_2 , a_1' ve a_2' parametrelerine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse bir denklem sistemi oluşturulur. Bu denklem sistemi dört parametreye göre çözülürse a_1 , a_2 , a_1' ve a_2' parametrelerinin eş anlı maksimum likelihood tahmin edicileri,

$$\hat{a}_1 = \frac{r}{\sum x_1 + \sum x_2'} \quad (5.12)$$

$$\hat{a}_2 = \frac{n-r}{\sum x_1 + \sum x_2'} \quad (5.13)$$

$$\hat{a}_1' = \frac{n-r}{\sum x_1' - \sum x_2'} \quad (5.14)$$

$$\hat{a}'_2 = \frac{r}{\sum x_2 - \sum x_1} \quad (5.15)$$

olarak bulunur (Freund 1961).

5.2. Marshall ve Olkin'in İki Değişkenli Üstel Dağılımı

TANIM 5.10. İki bileşenli bir sistem olsun. Bu sistem herbiri ölümcül olan şoklara maruz kalsın. Şokların l_1 , l_2 ve l_{12} parametreleri ile bağımsız Poisson süreçleri tarafından yönetildiği varsayalım. Şokun sadece 1. bileşene uygulanmasına ilişkin parametre l_1 , şokun sadece 2. bileşene uygulanmasına ilişkin parametre l_2 ve şokun 1. ve 2. bileşenlere uygulanmasına ilişkin parametre l_{12} 'dir. İki bileşenin negatif yaşam süreleri, X_1 ve X_2 'nin, $F(x_1, x_2)$ ortak dağılım fonksiyonu,

$$F(x_1, x_2) = \exp[+ l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_{12} \min(x_1, x_2)] \quad x_1, x_2 > 0 \quad (5.16)$$

şeklindedir. Yani $P(X_1 \leq x_1) = P(\text{yaşam_süresi} \geq -x_1)$ dir. Alternatif olarak,

$$Y_j = -X_j \quad j = 1, 2 \quad (5.17)$$

alınırsa,

$$P\left[\prod_{j=1}^2 (Y_j > y_j)\right] = \exp[- l_1 y_1 - l_2 y_2 - l_{12} \max(y_1, y_2)] \quad y_1, y_2 > 0 \quad (5.18)$$

olur (Johnson ve Kotz 1972). Bunun anlamı, şoklar arasındaki zamanlar l_1^{-1} , l_2^{-1} ve l_{12}^{-1} beklenen değerleri ile bağımsız üstel dağılırlar. Bu dağılımın bir özelliği de $Y_1 = \min(Z_1, Z_3)$ ve $Y_2 = \min(Z_2, Z_3)$ olacak şekilde bağımsız ve l_1 , l_2 , l_{12} parametreleri ile üstel dağılıma sahip Z_1 , Z_2 ve Z_3 değişkenlerinin olmasıdır. Bu dağılım Marshall ve Olkin'in iki değişkenli üstel dağılımı olarak adlandırılır (Kotz ve ark. 2000).

İki bileşenli bir sistem düşünölsün. Bu sistem şoklara maruz kalsın. Ancak şokların ölümcöl olması şartı bulunmasın. Şokların oluşumları bağımsız $Z_1(t; d_1)$, $Z_2(t; d_2)$ ve $Z_{12}(t; d_{12})$ Poisson süreçleri tarafından yönetildiğı varsayölsün. Sistemin durumu (0,0), (0,1), (1,0) ve (1,1) çiftleri ile tanımlanmaktadır. Burada ikililerde ilk (ikinci) sırada, 1'in bulunması ilk (ikinci) bileşenin çalışır durumda olduğunu; 0'ın bulunması çalışmıyor olduğunu ifade eder. $Z_1(t; d_1)$ sürecinde gerçekleşen olaylar ilk bileşeni etkileyen şoklardır. Bu şoklar p_1 olasılıkla (1,1) durumunu (0,1) durumuna, $1 - p_1$ olasılıkla (1,1) durumunu (1,1) durumuna dönöştürmektedir. Benzer biçimde $Z_2(t; d_2)$ sürecinde gerçekleşen olaylar ikinci bileşeni etkileyen şoklardır. Bu şoklar p_2 olasılıkla (1,1) durumunu (1,0) durumuna, $1 - p_2$ olasılıkla (1,1) durumunu (1,1) durumuna dönöştürmektedir. $Z_{12}(t; d_{12})$ sürecinde olaylar, her iki bileşene de etki eden şoklardır. Bu şoklar (1,1) durumunu sırasıyla p_{00} , p_{01} , p_{10} ve p_{11} olasılıklarıyla (0,0), (0,1), (1,0) ve (1,1) durumlarına dönöştürmektedir. Ayrıca bir bileşene herbir şokun, başarısızlık için bağımsız bir fırsatı ifade ettiğı varsayılır. X ve Y sırasıyla birinci ve ikinci bileşenler için yaşam sürelerini temsil etsin. $Z_1(t; d_1)$, $Z_2(t; d_2)$ ve $Z_{12}(t; d_{12})$ bağımsız olduklarından $t \geq s \geq 0$ için $R(x, y)$ ortak sağ kalım ya da güvenilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} R(x, y) = P\{X > s, Y > t\} &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-d_1 s) \frac{(d_1 s)^k}{k!} (1 - p_1)^k \right\} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \exp(-d_2 t) \frac{(d_2 t)^l}{l!} (1 - p_2)^l \right\} \\ &\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\exp(-d_{12} s) \frac{(d_{12} s)^m}{m!} p_{11}^m \right] \left[\exp[-d_{12} (t - s)] \frac{(d_{12} (t - s))^n}{n!} (p_{11} + p_{01})^n \right] \right\} \\ &= \exp\{-s[d_1 p_1 + d_{12} p_{01}] - t[d_2 p_2 + d_{12} (1 - p_{11} - p_{01})]\} \quad (5.19) \end{aligned}$$

şeklindedir. $s \geq t \geq 0$ için benzer şekilde,

$$P(X > s, Y > t) = \exp\{-s[d_1 p_1 + d_{12} (1 - p_{11} - p_{10})] - t[d_2 p_2 + d_{12} p_{10}]\} \quad (5.20)$$

yazılır. (5.19) ve (5.20)'deki eşitlikler kullanılarak,

$$P(X \leq s, Y \leq t) = \exp[-l_1 s - l_2 t - l_{12} \max(s, t)] \quad (5.21)$$

yazılır. Burada $l_1 = d_1 p_1 + d_{12} p_{01}$, $l_2 = d_2 p_2 + d_{12} p_{10}$ ve $l_{12} = d_{12} p_{00}$ şeklindedir (Marshall ve Olkin 1967).

5.2.1. Marshall ve Olkin'in İki Değişkenli Üstel Dağılımındaki Parametrelerin Tahmini

$j = 1, \dots, n$ olmak üzere (Y_{1j}, Y_{2j}) , herbiri (5.18)'deki eşitlik ile verilen dağılıma sahip bağımsız değişken çiftleri olsun. l_1 , l_2 ve l_3 parametrelerinin tahminleri

$$\hat{l}_t = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{W_{tj}}{T} \quad t = 1, 2 \quad (5.22)$$

$$\hat{l}_{12} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{W_{3j}}{T} \quad (5.23)$$

olarak elde edilir. Burada, $Y_{1j} < Y_{2j}$ iken $W_{1j} = 1$ diğer yerlerde 0; $Y_{1j} > Y_{2j}$ iken $W_{2j} = 1$ diğer yerlerde 0; $Y_{1j} = Y_{2j}$ iken $W_{3j} = 1$ diğer yerlerde 0 ve $T = (n-1) \sum_{j=1}^n \min(Y_{1j}, Y_{2j})$ dir (Johnson ve Kotz 1972, Arnold 1968).

5.3. Lindley ve Singpurwalla'nın İki Değişkenli Üstel Dağılımı

Herbir bileşenin yaşam süresi üstel dağılımla ifade edilen iki bileşenli paralel bir sistem düşünölsün. İki bileşen de başarısız olduğunda sistem başarısız olur. Çalışma koşullarının bir etkisi hesaba katıldığında bileşenlerin ortak yaşam süresi, marjinallerinden biri (5.50)'de verilen tek değişkenli Pareto dağılımı olan iki değişkenli dağılımla gösterilir. $i = 1, 2$ olmak üzere l_i , bileşenin parametresi olsun. İki bileşenin yaşamlarının bağımsız olduğu varsayılırsa sistemin $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonu,

5. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$R(t) = \exp(-l_1 t) + \exp(-l_2 t) - \exp(-(l_1 + l_2)t) \quad (5.24)$$

şeklinde dir. Çalışma koşullarının, ortak pozitif faktör h aracılığıyla l_i parametresini etkilediği varsayıl s n. Bu durumda sistemin $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(t) = \exp(-h l_1 t) + \exp(-h l_2 t) - \exp(-h(l_1 + l_2)t) \quad (5.25)$$

şeklinde ifade edilir. Burada h bilinmeyen fakat belirsizliği $G(h)$ dağılım fonksiyonuyla tanımlanan bir nicelik olsun (Lindley ve Singpurwalla 1986). Bu durumda sistemin $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(t) = G^*(l_1 t) + G^*(l_2 t) - G^*[(l_1 + l_2)t] \quad (5.26)$$

eşitliği ile verilir. Burada,

$$G^*(y) = \int \exp(-hy) dG(h) \quad (5.27)$$

olup; G^* , G 'nin Laplace dönüşümüdür (Elsayed 1996). $G(\cdot)$ fonksiyonunun

$$g(h) = b^{a+1} h^a \frac{\exp(-hb)}{a!} \quad 0 < h < \infty, \quad b > 0, \quad a+1 > 0 \quad (5.28)$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu ile iki parametrel i gama dağılımının dağılım fonksiyonu ve

$$\frac{dG(h)}{dh} = b^{a+1} h^a \frac{\exp(-hb)}{a!} \quad h > 0 \quad (5.29)$$

olduğu varsayılır. Öncelikle bileşenlerin yaşam süreleri için ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t_1, t_2) = \int h l_1 \exp(-h l_1 t_1) h l_2 \exp(-h l_2 t_2) dG(h) \quad (5.30)$$

5. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

ifadesi ile verilir (Kotz ve ark. 2000). Böylece, $f(t_1, t_2)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 f(t_1, t_2) &= \int_0^{\infty} h l_1 \exp(-h l_1 t_1) h l_2 \exp(-h l_2 t_2) b^{a+1} h^a \frac{\exp(-hb)}{a!} dh \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x h l_1 \exp(-h l_1 t_1) h l_2 \exp(-h l_2 t_2) b^{a+1} h^a \frac{\exp(-hb)}{a!} dh \\
 &= \frac{l_1 l_2 b^{a+1}}{a!} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x h^{a+2} \exp[-h(l_1 t_1 + l_2 t_2 + b)] dh
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$I = \int h^{a+2} \exp[-h(l_1 t_1 + l_2 t_2 + b)] dh \tag{5.32}$$

olsun. Bu eşitlikte $h(l_1 t_1 + l_2 t_2 + b) = u$ dönüşümü uygulandığında

$$I = \frac{1}{(l_1 t_1 + l_2 t_2 + b)^{a+3}} \int_{J_{a+2}} u^{a+2} \exp(-u) du \tag{5.33}$$

eşitliği elde edilir. Kısmi integrasyon yöntemiyle,

$$J_{a+2} = -u^{a+2} \exp(-u) + (a+2) \int_{J_{a+1}} u^{a+1} \exp(-u) du \tag{5.34}$$

$$J_{a+1} = -u^{a+1} \exp(-u) + (a+1) \int_{J_a} u^a \exp(-u) du \tag{5.35}$$

$$J_a = -u^a \exp(-u) + a \int_{J_{a-1}} u^{a-1} \exp(-u) du \tag{5.36}$$

$$J_3 = -u^3 \exp(-u) + 3 \int u^2 \exp(-u) du \tag{5.37}$$

$$J_2 = -u^2 \exp(-u) + 2 \int u \exp(-u) du \tag{5.38}$$

$$J_1 = -u \exp(-u) + \int \exp(-u) du \tag{5.39}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da,

$$J_{a+2} = -u^{a+2} \exp(-u) + (a+2)J_{a+1} \quad (5.40)$$

$$J_{a+1} = -u^{a+1} \exp(-u) + (a+1)J_a \times (a+2) \quad (5.41)$$

$$J_a = -u^a \exp(-u) + aJ_{a-1} \times (a+1)(a+2) \quad (5.42)$$

$$\mathbb{M} \\ J_3 = -u^3 \exp(-u) + 3J_2 \times 4...a(a+1)(a+2) \quad (5.43)$$

$$J_2 = -u^2 \exp(-u) + 2J_1 \times 3...a(a+1)(a+2) \quad (5.44)$$

$$J_1 = -u \exp(-u) + \int \exp(-u) du = -u \exp(-u) - \exp(-u) \quad (5.45)$$

yazılır. İstenen J_{a+2} ifadesini bulmak için yukardaki $a+2$ sayıdaki eşitlik yanlarındaki ifadelerle çarpılır. Daha sonra yeni elde edilen $a+2$ sayıdaki eşitlik toplanarak J_{a+2} ,

$$J_{a+2} = \exp(-u) \left[-u^{a+2} - u^{a+1}(a+2) - u^a(a+1)(a+2) - \dots - u(2.3...(a+2)) \right] \\ - \exp(-u) 2.3...(a+2) \quad (5.46)$$

olarak elde edilir. Bulunan bu ifade önce (5.33)'teki I için verilen eşitlikte sonra (5.31)'deki eşitlikte yerine konursa, $f(t_1, t_2)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t_1, t_2) = \frac{l_1 l_2 (a+1)(a+2)b^{a+1}}{(l_1 t_1 + l_2 t_2 + b)^{a+3}} \quad (5.47)$$

olarak elde edilir (Kotz ve ark. 2000, Elsayed 1996). (5.27)'deki eşitliğin hesaplanmasıyla $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(t) = \left(\frac{b}{l_1 t + b} \right)^{a+1} + \left(\frac{b}{l_2 t + b} \right)^{a+1} - \left(\frac{b}{(l_1 + l_2)t + b} \right)^{a+1} \quad (5.48)$$

olarak elde edilir. $h(t_1, t_2)$ risk fonksiyonu da tanımından,

$$h(t_1, t_2) = \frac{(a+1)(a+2)l_1 l_2}{(b + l_1 t_1 + l_2 t_2)^2} \quad (5.49)$$

bulunur. (5.47)'deki eşitliğin t_2 'ye göre integrali hesaplandığında t_1 'in $f(t_1)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t_1) = \frac{l_1(a+1)b^{a+1}}{(l_1 t_1 + b)^{a+2}} \quad (5.50)$$

olarak elde edilir (Elsayed 1996). Bu dağılım da ikinci tip Pareto dağılımı olarak adlandırılır (Lindley ve Singpurwalla 1986).

5.4. İki Değişkenli Pareto Dağılımı

Pareto dağılımı, genellikle yapım, imalat ya da üretim işlemlerini izlemekte kullanılır. Örneğin bir makina bakır tel üretsin. Makina ara sıra tel boyunca bazı noktalarda kusur/hata oluşturacaktır. Pareto dağılımı, ard arda gelen kusurlar/hatalar arasındaki tel uzunluğunu modellemek için kullanılır (StatSoft 2007).

Bu dağılımın, gelir servet modellemesi, başarısızlık zamanları, doğum oranı, ölüm oranı ve güvenilirlik modelleri alanlarında uygulamaları da vardır. Burada özel bir durum olarak marjinalleri tek değişkenli Pareto formunda olan, genel formuyla iki değişkenli bir Pareto dağılımı şok modeli olarak verilecektir. Genellikle sistem bileşenlerinin yaşam süreleri arasında bağımlılık olduğunu varsaymak gerçekçi bir yaklaşım olur. Bu dağılımda iki bağımlı bileşene sahip bir sistem düşünülmektedir. Üç bağımsız kaynaktan şoklar olsun. İlk kaynaktan gelen şok sadece sistemin birinci bileşenine rastgele T_1 zamanında etki etsin. T_1 'in $R(t_1)$ güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(t_1) = P(T_1 > t_1) = \left(\frac{a_1}{a_1 + t_1} \right)^{q_1} \quad t_1 > 0 \quad a_1, q_1 > 0 \quad (5.51)$$

ile verilir. İkinci kaynaktan gelen şok sistemin sadece ikinci bileşenine rastgele T_2 zamanında etki etsin. T_2 'nin $R(t_2)$ güvenilirlik fonksiyonu,

5. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$R(t_2) = P(T_2 > t_2) = \left(\frac{a_2}{a_2 + t_2} \right)^{q_2} \quad t_2 > 0 \quad a_2, q_2 > 0 \quad (5.52)$$

ile verilir. Üçüncü kaynaktan gelen şok ise sistemin her iki bileşenini de rastgele T zamanında etkilesin. T 'nin $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(t) = P(T > t) = \left(\frac{a}{a + t} \right)^q \quad t > 0 \quad a, q > 0 \quad (5.53)$$

ile verilir. Böylece sistemin birinci ve ikinci bileşenine ait rastgele yaşam süreleri X_1 ve X_2 ,

$$X_1 = \min(T_1, T), X_2 = \min(T_2, T) \quad (5.54)$$

eşitliklerini sağlamak zorundadır (Al-Ruzaiza ve El-Gohary 2007).

TEOREM 5.1. T_i ve T rastgele değişkenlerinin $R(t_i, t)$ ortak güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(t_i, t) = \left(\frac{a_i}{a_i + t_i} \right)^{q_i} \left(\frac{a}{a + t} \right)^q \quad i = 1, 2 \quad (5.55)$$

şeklindedir (Al-Ruzaiza ve El-Gohary 2007).

TEOREM 5.2. X_1 ve X_2 rastgele değişkenlerinin $R(x_1, x_2)$ ortak güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(x_1, x_2) = \left(\frac{a}{a + z} \right)^q \prod_{i=1}^2 \left(\frac{a_i}{a_i + x_i} \right)^{q_i} \quad z = \max(x_1, x_2) \quad (5.56)$$

şeklindedir (Al-Ruzaiza ve El-Gohary 2007).

5. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

TEOREM 5.3. $i = 1, 2$ olmak üzere X_i , rastgele değişkeninin $R(x_i)$ marjinal güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(x_i) = \left(\frac{a_i}{a_i + x_i} \right)^{q_i} \left(\frac{a}{a + x_i} \right)^q \quad (i = 1, 2) \quad (5.57)$$

şeklindedir (Al-Ruzaiza ve El-Gohary 2007).

TEOREM 5.4. Eğer iki değişkenli ortak güvenilirlik fonksiyonu $R(x_1, x_2)$ (5.56)'daki eşitlik formunda ise, X_1 ve X_2 'nin $f(x_1, x_2)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2) & x_1 > x_2 \\ f_2(x_1, x_2) & x_1 < x_2 \\ f_0(x_1, x_2) & x_1 = x_2 = x \end{cases} \quad (5.58)$$

şeklindedir. Burada,

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{q_2}{a_2} \left(\frac{a_2}{a_2 + x_2} \right)^{q_2+1} \left[\frac{q_1}{a_1} \left(\frac{a_1}{a_1 + x_1} \right)^{q_1+1} \left(\frac{a}{a + x_1} \right)^q + \frac{q}{a} \left(\frac{a}{a + x_1} \right)^{q+1} \left(\frac{a_1}{a_1 + x_1} \right)^{q_1} \right] \quad (5.59)$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{q_1}{a_1} \left(\frac{a_1}{a_1 + x_1} \right)^{q_1+1} \left[\frac{q_2}{a_2} \left(\frac{a_2}{a_2 + x_2} \right)^{q_2+1} \left(\frac{a}{a + x_2} \right)^q + \frac{q}{a} \left(\frac{a}{a + x_2} \right)^{q+1} \left(\frac{a_2}{a_2 + x_2} \right)^{q_2} \right] \quad (5.60)$$

$$f_0 = \frac{q}{a} \left(\frac{a_1}{a_1 + x} \right)^{q_1} \left(\frac{a_2}{a_2 + x} \right)^{q_2} \left(\frac{a}{a + x} \right)^{q+1} \quad (5.61)$$

dir (Al-Ruzaiza ve El-Gohary 2007).

5. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

TEOREM 5.5. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları (5.58)'deki eşitlik ile verilen X_1 ve X_2 rastgele değişkenlerinin $f(x_i)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f(x_i) = \frac{q}{a} \left(\frac{a}{a+x_i} \right)^{q+1} \left(\frac{a_i}{a_i+x_i} \right)^{q_i} + \frac{q_i}{a_i} \left(\frac{a_i}{a_i+x_i} \right)^{q_i+1} \left(\frac{a}{a+x_i} \right)^q \quad i=1,2 \quad (5.62)$$

şeklindedir (Al-Ruzaiza ve El-Gohary 2007).

Ayrıca ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları (5.58)'deki eşitlik ile verilen X_1 ve X_2 rastgele değişkenlerine ilişkin; $i=1,2$ olmak üzere X_i , X_i^2 ve X_1X_2 için beklenen değerler ve X_i için varyans sırasıyla

$$E(X_i) = \frac{a}{q+q_i-1} \quad (5.63)$$

$$E(X_i^2) = \frac{a^2}{(q+q_i-1)(q+q_i-2)} \quad (i=1,2) \quad (5.64)$$

$$E(X_1, X_2) = \frac{(2q+q_1+q_2-2)a^2}{(q+q_1-1)(q+q_2-1)(q+q_1+q_2-2)} \quad (5.65)$$

ve

$$Var(X_i) = \frac{a^2}{(q+q_i-1)(q+q_i-2)} \quad q+q_i > 2 \quad i=1,2 \quad (5.66)$$

şeklindedir. Kovaryans ve korelasyon katsayısı ise,

$$Cov(X_1, X_2) = \frac{a^2q}{(q+q_1-1)(q+q_2-1)(q+q_1+q_2-2)} > 0 \quad (5.67)$$

ve

5. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$r = \frac{q}{q + q_1 + q_2 - 2} \sqrt{\frac{(q + q_1 - 2)(q + q_2 - 2)}{(q + q_1 - 1)(q + q_2 - 1)}} \quad q + q_i > 2 \quad i = 1, 2 \quad (5.68)$$

şeklindedir (Al-Ruzaiza ve El-Gohary 2007).

5.5. Yaşam Süresi Dağılımı için Veri Çiftlerinin Analizi

$i = 1, \dots, n$ olmak üzere n boyutlu bir cihazdan alınan örnekleme yaşam süresi testi gerçekleştirilsin. Bu cihaz için ilk başarısızlığa kadar yaşam süresi X_i , kaydedilsin. Cihaz onarıldıktan sonra, aynı cihaz için ikinci başarısızlığa kadar yaşam süresi Y_i kaydedilsin. Herbir (X_i, Y_i) çifti içinde bağımlılık vardır.

Cantor ve Knapp (1985), veri çiftlerinin sağ kalım sürelerini modellemek için bir dağılım önermişlerdir. Veri çiftleri içindeki bağımlılık başka bir rastgele değişken Θ tarafından modellenmiştir. Θ değişkeni nesnenin duyarlılığını ya da direncini gösterir. Yani parametre, zayıflık parametresi (frailty parameter) olarak düşünülebilir. $q > 0$ olacak şekilde Θ , $h(q)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. $\Theta = q_i$ verilmişken sağ kalım süresi X_i 'nin dağılımı $E(x_i) = \frac{q_i}{l_1}$ ortalamalı üstel dağılımdır. Bu dağılım $f_x(x/q)$ ile gösterilsin. $\Theta = q_i$ verilmişken sağ kalım süresi Y_i 'nin dağılımı $E(y_i) = \frac{q_i}{l_2}$ ortalamalı üstel dağılımdır. Bu dağılım $f_y(y/q)$ ile gösterilsin. $X_i/\{\Theta = q_i\}$ 'nin koşullu dağılımı $Y_i/\{\Theta = q_i\}$ 'nin koşullu dağılımından bağımsızdır. Bunlara bağlı olarak koşullu ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(x, y/q) &= f_x(x/q) f_y(y/q) \\ &= l_1 l_2 q^{-2} \exp[-q^{-2}(l_1 x + l_2 y)] \quad l_1, l_2 > 0 \quad q > 0 \end{aligned} \quad (5.69)$$

dır. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x, y, q) = f(x, y/q) h(q) \quad (5.70)$$

5. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

dır. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{xy}(x, y) = \int_0^{\infty} f(x, y, q) dq \quad (5.71)$$

kullanılarak marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları X 'e ve Y 'ye göre sırasıyla

$$f_x(x) = \int_0^{\infty} f_{xy}(x, y) dy \quad (5.72)$$

ve

$$f_y(y) = \int_0^{\infty} f_{xy}(x, y) dx \quad (5.73)$$

olarak elde edilir (Owen ve ark. 2000, Cantor ve Knapp 1985).

6. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELLERİ

6.1. Genel Bilgiler

Bu bölümde bileşenleri, bilinen dağılımlar olan istatistiksel dağılımlarla ilgilenilecektir. Söz konusu dağılımlar karma dağılımlar olarak adlandırılır. Örneğin, bir çocuk kitlesindeki boy uzunluğu dağılımı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$f(\text{boy_uzunluğu}) =$$

$$f_1(\text{boy_uzunluğu}; \text{erkek}) p(\text{erkek}) + f_2(\text{boy_uzunluğu}; \text{kız}) p(\text{kız}) \quad (6.1)$$

Burada $p(\text{erkek})$ ve $p(\text{kız})$, kitleden seçilen bir çocuğun sırasıyla erkek olması ve kız olması olasılıklarıdır. f_1 ve f_2 sırasıyla erkek ve kızlar için boy uzunluğuna ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonlarıdır. Böylece boy uzunluğu olasılık yoğunluk fonksiyonu, iki tane koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu ile ifade edilir (Everitt ve Hand 1981).

Veri modellemede esnek bir yol olarak, bir dağılımın yeterli olmadığı durumlarda karma dağılımların uygulamaları vardır. Öncelikle karma dağılımın gereksinim nedenleri ve buna bağlı olarak tarihi açıklanacaktır. Karma dağılımın kullanımı yaklaşık olarak yüz yıl öncesine dayanmaktadır. Ünlü biyometrici Karl Pearson'a ait 1894 tarihli yayında, sırasıyla m_1 ve m_2 ortalamalı, s_1^2 ve s_2^2 varyanslı, p_1 ve p_2 oranlı iki normal olasılık yoğunluk fonksiyonunun karması incelenmiştir. Pearson'ın çalışmasında kullandığı veriler meslektaşı Weldon (1892, 1893) tarafından sağlanmıştır. Veriler bir yengeç türünden alınan 1000 yengece ilişkin alın genişliğinin boy uzunluğuna oranı ölçümelerini içermektedir. Weldon (1893), tek değişkenli normal dağılımın kullanıldığı verilere ait histogram grafiğinde asimetrinin varlığının iki yeni alt tür yüzünden olduğunu düşünür ve matematiksel bilgisini yetersiz bularak meslektaşı Karl Pearson'dan yardım ister. Yani Pearson'ın karma modeli iki alt tür olduğu düşüncesine dayanır. Bu çalışma, biyolojik

6. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

problemler için istatistiksel analizi temel metod olarak öngörür (McLachlan ve Peel 2000).

Karma dağılımların yaygın bir biçimde kullanıldığı formu, normal bileşenleri içeren formudur. Medgyessi (1961), elektroforez ile yapılan protein ayırma sonuçlarında karma normal dağılıma başvurmuştur. Bhattacharya (1967), bir balık türünde uzunluk dağılımını çalışmış ve gözlemleri yaş kategorilerine göre ayırmıştır. Her bir kategori, karma dağılımda bir normal dağılım bileşeni şeklinde düşünülmüştür. Cassie (1954), aynı problemi çalışmıştır. Gregor (1969), farelerin karaciğer hücrelerinde çekirdekte DNA içerik ölçümleri verilerinde karma normal dağılıma başvurmuştur. Bu uygulamada karma normal dağılımın düşünüldüğünün nedeni bazı organlarda hücrelerin çekirdeklerinin çeşitli sınıflarının bulunmasıdır. Öyleki çekirdeklerin DNA içeriklerinde karakteristik farklılıklar vardır (Everitt ve Hand 1981).

Karma dağılımların diğer bir uygulama alanı, hata verileridir. Burada gözlemler, bir örnekleme nesnenin zamana karşı dayanma süreleridir. Genellikle hatalar birden fazla neden yüzünden ortaya çıkar. Her bir neden için hata dağılımı bir yoğunluk fonksiyonuna yakınsar. Böylece tüm hata dağılımı da karma dağılım olur. Elektronik valflerde hata dağılımına karma dağılım düşünülmüştür. Örneğin, Mendenhall ve Hader (1958), üstel bileşenleri; Kao (1959), Weibull bileşenleri kullanmıştır. Thomas (1966), sinir hücrelerinde deşarj olma süreleri dağılımını modellemek için karma üstel dağılımı kullanmıştır (Everitt ve Hand 1981).

Bileşen kitlelerinin çoğu heterojen yapıdadır. Yani populasyon kısa ömürlü zayıf bileşenlerden ve uzun ömürlü güçlü bileşenlerden oluşur. Örneğin özdeş ünitelerin bir kısmı, hammadde veya uygun olmayan üretim nedeniyle olağan dışı ürünler olabilirler. Dolayısıyla ünitelerin bu kısmının ömürleri kısa olacaktır veya alçak yük/gerilim düzeylerinde başarısız olacaktır. Standart ünitelerin ömrü daha uzun olur. Bu üniteler daha yüksek yük/gerilim düzeylerine dayanabilirler (Jiang 1991).

Blackstone, Naftel ve Turner (1986) açık kalp ameliyatlarında ölüm riskinin üç safhaya göre şekillendiğini düşündüler. Risk erken safhada yüksek, orta safhada sabit ve son safhada düşmeye başlar. Burada, üç ölüm safhasına göre üç bileşenli

karma dağılım sağ kalım modellemesi için etkili bir yoldur. Çünkü farklı safhalara göre, ayrı parametrik modeller uygulama bakımından uygun bir modelleme değildir.

Weibull dağılımı, yaşam süresi dağılım modeli olarak kullanılan en yaygın dağılımdır. Bunun nedeni esnekliği ile olasılık yoğunluk, sağ kalım ve risk fonksiyonlarının kolay ifade edilebilmesidir. Weibull risk fonksiyonu şekil parametresine bağlı olarak monoton artar, azalır veya sabittir. Esnekliği ile çok geniş çeşitlilikteki yaşam süresi verilerine iyi uyum sağlar. Buna bağlı olarak karma Weibull dağılımlarının heterojen verilerle birlikte sağ kalım ve güvenilirlik analizinde yaygın bir biçimde kullanımı şaşırtıcı değildir. Patra ve Dey (1999), çok değişkenli karma Weibull dağılımlarını güvenilirlik modellemesinde düşünmüşlerdir. Weibull dağılımında şekil parametresi bire eşit alınırsa üstel dağılım elde edilir. Karma üstel dağılımların kullanımına ise bilimde ve sosyal bilimlerde sıkça rastlanır (McLachlan ve Peel 2000). Böylece daha esnek ve kullanışlı dağılımlar olarak bilinen karma dağılımların tarihte nasıl yer edindiği konusunda açıklamalar tamamlanmıştır. Karma dağılımların matematiksel olarak nasıl ifade edildikleri gösterilecektir. X , $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ şeklinde olasılık fonksiyonlarına sahip olsun. X 'in $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \quad a_1, a_2 > 0 \quad a_1 + a_2 = 1 \quad (6.2)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ karmanın bileşen olasılık yoğunluk fonksiyonlarıdır. a_1 ve a_2 karma ağırlıkları ya da oranlarıdır. a_1 ve a_2 sırasıyla f_1 ve f_2 fonksiyonlarının seçilme olasılıklarıdır.

Daha kullanışlı bir formül için $f(x)$ olasılık fonksiyonunun l parametrelili bir fonksiyon olduğu düşüncesi ile $f(x; l)$ ailesi gösterimi tercih edilir. Her l değerinin bir ağırlığı vardır, öyleki bu $g(l)$ ile gösterilsin.

$$f(x) = \sum_i f(x; l_i) g(l_i) \quad \text{ve} \quad \sum_i g(l_i) = 1 \quad (6.3)$$

şeklindeki gösterim ile X rastgele değişkeni, karma dağılıma sahiptir (Douglas 1980).

Daha yaygın olarak kullanılan karma dağılım gösterimi aşağıdaki tanımla verilmiştir.

TANIM 6.1. X bir rastgele değişken ve $f_i(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonları olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{i=1}^g p_i f_i(x), \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^g p_i = 1 \quad (6.4)$$

şeklinde olasılık yoğunluk fonksiyonu tanımlanır. Buna göre X , sonlu karma dağılıma sahiptir denir. Burada, $p_1, \dots, p_g$ karma oranları ve $f_1(x), \dots, f_g(x)$ karma bileşen yoğunlukları olarak adlandırılır (McLachlan ve Peel 2000).

TANIM 6.2. Olasılık yoğunluk fonksiyonu (6.4)'deki gibi olan X rastgele değişkeninin $F(x)$ dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^g p_i f_i(y) dy = \sum_{i=1}^g p_i \int_{-\infty}^x f_i(y) dy \quad (6.5)$$

yardımla,

$$F(x) = \sum_{i=1}^g p_i F_i(x), \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^g p_i = 1 \quad (6.6)$$

olarak bulunur.

6.2. Weibull Dağılımlarının Karması

Çok tepeli Weibull olarak da bilinen karma Weibull dağılımı, Weibull olasılık grafiğinde bir doğru üzerine düşmeyen verileri modellemek için kullanılır. Özel olarak hata sürelerine ilişkin veriler olasılık grafiğinde S biçimli ise bu durum birden fazla hata modu olduğunu gösterir. Güvenilirlik mühendisliğinde elektrikli ve

mekanik ekipmanların genellikle birden fazla hata moduna ya da nedenine sahip olduğu bilinir (Keçecioğlu ve Wang 1998). Hata modları hayat bölgelerine göre ortaya çıkar. Birinci tip hata yani azalan hata oranı, genellikle bileşenlerin ömürlerinin erken safhalarına aittir. İkinci tip hata bileşenin şans eseri başarısızlığa uğradığı, hata oranının hemen hemen sabit olduğu duruma karşılık gelir. Bu tip hatalar bileşenin ömrü süresince gerçekleşebilir. Üçüncü tip hata yıpranmaya bağlı olarak gerçekleşen hatadır. Hata modları kimliklendirilmeli ve hata dağılımları belirlenmelidir. Her bir mod için zamana karşı dayanma süreleri, Weibull dağılımına sahip olabilir. Karma Weibull dağılımı bir kaç Weibull alt kitlesinden oluşan bir kitleyi gösterir. Her bir alt kitlenin kendine ait bir hata modu ve dağılımı vardır.

Mendenhall ve Hader (1958), bir sistemin veya aracın başarısızlıklarını iki ya da daha fazla nedenle ifade etmişlerdir. Bir elektronik tüpün başarısızlığı, gaz kusurları, mekanik kusurlar veya katotda normal yıpranmaya bağlı olarak ortaya çıkmış olabilir. Herbir neden tipi için zamana karşı dayanma süresinin kendine ait dağılımı vardır. Bu nedenle, elektronik tüpün yaşam süresi karma dağılıma sahiptir (Jiang 1991).

Kao (1959), elektronik tüplerin ömürlerini göstermek için iki bileşenli karma dağılımı önermiştir. Başarısızlıklar, ani ve yıpranmaya bağlı olmak üzere iki sınıfa ayrılmıştır. Stitch ve ark. (1975), mikrodevrelerin hızlandırılmış testinde, esas ve anormal ayırık alt kitlelerle başarısızlıkların iki tepeli dağılıma uyduğunu gözlemlemiştir. Mikrodevrelerin güvenilirliğini elde etmek için çözüm, anormal alt kitleyi belirlemektir. Elektronik bileşenlerin benzer iki tepeli yaşam süresi dağılımları Reynolds ve Stevens (1978), ve Shaw (1987) tarafından gözlemlenmiştir (Jiang 1991).

Jensen (1989), mekanik bileşenlerin mukavemetini modellemek için karma Weibull dağılımını kullanmıştır. Bileşen mukavemetinde kötüleşmenin, kusur büyümesinin sonucu olduğunu ileri sürmüştür. Bileşen mukavemetinden daha büyük bir yüke/gerilime maruz kalırsa başarısız olur. Daha büyük kusur, daha az dayanıklılık getirecektir. Bir bileşenin düşük mukavemeti, işçilik kusurları ve imalat esnasında edinilen kusurlar gibi bileşenin doğasında olan kusurlara bağlıdır (Jiang 1991).

Singh ve Sinclair (1972), köprü ve drenaj tasarımında su baskınlarının sıklığının önemli bir faktör olduğuna dikkat çekmiştir. İstatistiksel analizlerden, iki dağılımlı karmanın, gözlenen su baskını dağılımlarına tek dağılımdan daha iyi uyduğu sonucunu çıkarmışlardır. Çelik köprülerin tasarımında kamyonların dolu ağırlıkları esas yorulma yükleridir. Tallin ve Petreshock (1990), yedi eyalete ait verileri analiz etmişler ve dolu ağırlıkların iki tepeli dağılımlar olduğunu bulmuşlardır (Jiang 1991).

g bileşenli karma Weibull dağılımı için (6.4)'deki f_i ,

$$f_i(t; s_i, h_i) = \frac{h_i}{s_i} \left(\frac{t}{s_i} \right)^{h_i-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{s_i} \right)^{h_i} \right] \quad t > 0, \quad s_i > 0, \quad h_i > 0 \quad (6.7)$$

şeklindedir. Böylece karma Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t; s, h) = \sum_{i=1}^g p_i \frac{h_i}{s_i} \left(\frac{t}{s_i} \right)^{h_i-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{s_i} \right)^{h_i} \right] \quad t > 0, \quad s_i > 0, \quad h_i > 0 \quad (6.8)$$

olarak ifade edilir (Nagode ve Fajdiga 2000).

TANIM 6.3. Bileşenlerinin dağılım fonksiyonu (4.80)'deki gibi olan (6.4)'deki g bileşenli karma dağılımın (6.6)'daki dağılım fonksiyonu,

$$F(t; s, h) = 1 - \sum_{i=1}^g p_i \left[\exp \left(- \left(\frac{t}{s_i} \right)^{h_i} \right) \right] \quad t > 0, \quad s_i > 0, \quad h_i > 0 \quad (6.9)$$

şeklindedir (Nagode ve Fajdiga 2000).

6.2.1. Weibull Dağılımlarının Karmasındaki Parametrelerin Tahmini

Kitle, iki bağımsız alt kitlenin karması şeklinde olsun. Herbir kitlenin kendine ait tek bir hata modu ve dağılımı olsun. Böylece karma kitle için yaşam süresi dağılımı,

$$f(t) = pf_1(t) + qf_2(t) \quad (6.10)$$

ile ifade edilebilir. Burada $f(t)$, karma kitlenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu; $j = 1, 2$ olmak üzere $f_j(t)$, j . alt kitlenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu; $p \in (0, 1)$ olmak üzere birinci alt kitle için karma oranını; $q \in (0, 1)$ olmak üzere ikinci alt kitle için karma oranını göstermektedir. Ayrıca

$$p + q = 1 \quad (6.11)$$

dir. Alt kitlelere ait olasılık yoğunluk fonksiyonları

$$f_j(t) = \frac{h_j}{s_j} \left(\frac{t}{s_j} \right)^{h_j-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{s_j} \right)^{h_j} \right] \quad j = 1, 2. \quad (6.12)$$

şeklindeki Weibull dağılımı ile ifade edilir. Böylece (6.10)'daki eşitlik ile ifade edilen iki bileşenli karma Weibull dağılımı h_1 , s_1 , h_2 , s_2 ve p parametrelerine sahiptir. Keçecioğlu ve Wang (1998), bu parametrelerin tahmini için en küçük kareler yöntemi ile Bayes teoremini birleştirerek yeni bir algoritma sunmuşlardır. Bu algoritma için gerekli tanımlamalar aşağıda verilmiştir.

$P_j(t_i)$, i . gözlemin j . alt kitleye sonsal ait olma olasılığı (posterior belonging probability); $MON_j(t_i)$, ortalama sıra sayısı (mean order number); $MR_j(t_i)$, medyan rankı (median rank) olsun.

$$Y_j(i) = \log_e \{ -\log_e [1 - MR_j(t_i)] \} \quad (6.13)$$

ve

$$X(i) = \log_e(t_i) \quad (6.14)$$

alınsın. $r = r_1 + r_2$ olacak şekilde r_1 ve r_2 korelasyon katsayılarını göstermektedir.

6. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

Güvenilirlik yaşam testi bir ürünün N ünitesinde gerçekleştirilmektedir. Öyleki ürünün iki hata modu vardır. Zamana karşı dayanma örneklemleri $\{t_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ olarak elde edilsin. $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ ve her bir t_i zamanında bir hata gözlemlensin. Kamath ve ark. (1978), Keçecioğlu ve Sun (1994), hatanın j . alt kitleye ait olduğu fikriyle sonsal olasılığı $P_j(t_i)$ ile göstermişlerdir. Bu gösterim

$$P_j(t_i) = P\left\{T \in f_j(t) / t_i - \frac{1}{2}\Delta t < T < t_i + \frac{1}{2}\Delta t, j = 1, 2, i = 1, 2, \dots, N.\right\} \quad (6.15)$$

şeklinde dir. Bayes teoreme başvurulduğunda,

$$P_j = \frac{P\left\{t_i - \frac{1}{2}\Delta t < T < t_i + \frac{1}{2}\Delta t / T \in f_j(t)\right\} P\{T \in f_j(t)\}}{\sum_j P\left\{t_i - \frac{1}{2}\Delta t < T < t_i + \frac{1}{2}\Delta t / T \in f_j(t)\right\} P\{T \in f_j(t)\}} \quad (6.16)$$

yazılır. Burada

$$P\{T \in f_1(t)\} = p \quad (6.17)$$

ve

$$P\{T \in f_2(t)\} = 1 - p = q \quad (6.18)$$

dur. Böylece t_i zamanında gerçekleşen hatanın 1. alt popülasyona ait olması olasılığı,

$$P_1(t_i) = \frac{pf_1(t_i)}{pf_1(t_i) + qf_2(t_i)} = \frac{pf_1(t_i)}{f(t_i)} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.19)$$

dir. Benzer şekilde t_i zamanında gerçekleşen hatanın 2. alt popülasyona ait olması olasılığı,

$$P_2(t_i) = \frac{qf_2(t_i)}{pf_1(t_i) + qf_2(t_i)} = \frac{qf_2(t_i)}{f(t_i)} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.20)$$

dir. Ayrıca,

$$P_1(t_i) + P_2(t_i) = 1 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.21)$$

$P_1(t_i)$, 1. alt kitledeki t_i zamanında başarısız ünite sayısı ve $P_2(t_i)$, 2. alt kitledeki t_i zamanında başarısız ünite sayısı olarak düşünülebilir. Böylece,

1. alt örneklem: $\{(t_1, P_1(t_1)), (t_2, P_1(t_2)), \dots, (t_N, P_1(t_N))\}$

2. alt örneklem: $\{(t_1, P_2(t_1)), (t_2, P_2(t_2)), \dots, (t_N, P_2(t_N))\}$

şeklindedir. j . alt kitledeki i . başarısızlığın ortalama sıra sayısı (mean order number),

$$MON_1(t_i) = \sum_{k=1}^i P_1(t_k) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.22)$$

ve

$$MON_2(t_i) = \sum_{k=1}^i P_2(t_k) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.23)$$

dir. İlgili medyan rankları, 1. ve 2. alt kitle için sırasıyla,

$$MR_1(t_i) = \frac{MON_1(t_i)}{MON_1(t_N) + 0,4} \quad (6.24)$$

ve

$$MR_2(t_i) = \frac{MON_2(t_i)}{MON_2(t_N) + 0,4} \quad (6.25)$$

eşitlikleriyle hesaplanır. Böylece 1. ve 2. alt kitleler için

$$\{(t_1, MR_1(t_1)), (t_2, MR_1(t_2)), \dots, (t_N, MR_1(t_N))\}$$

$$\{(t_1, MR_2(t_1)), (t_2, MR_2(t_2)), \dots, (t_N, MR_2(t_N))\}$$

şeklinde iki küme oluşturulur.

En küçük kareler yöntemiyle sonsal parametreler hesaplanabilir. Weibull dağılımı için dağılım fonksiyonu ya da güvenilirlik fonksiyonu,

$$\log_e \left\{ \log_e \frac{1}{1 - MR_j(t_i)} \right\} = h_j \log_e t_i - h_j \log_e s_j \quad (6.26)$$

veya lineer formda,

$$Y_j(i) = h_j X(i) + b_j \quad (6.27)$$

olarak yazılır. Burada,

$$Y_j(i) = \log_e \{-\log_e [1 - MR_j(t_i)]\} \quad (6.28)$$

$$X(i) = \log_e t_i \quad (6.29)$$

$$b_j = -h_j \log_e s_j \quad (6.30)$$

şeklindedir. En küçük kareler yöntemi uygulanarak dağılımın parametre tahminleri,

$$\hat{h}_j = \frac{\sum_{i=1}^N X(i)Y_j(i) - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N X(i) \sum_{i=1}^N Y_j(i) \right)}{\sum_{i=1}^N X^2(i) - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N X(i) \right)^2} \quad (6.31)$$

$$\hat{b}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_j(i) - \hat{h}_j \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(i) \quad (6.32)$$

$$\hat{s}_j = \exp \left(-\frac{\hat{b}_j}{\hat{h}_j} \right) \quad (6.33)$$

eşitlikleri ile verilir. Diğer taraftan sonsal karma oranları,

$$\hat{p} = \frac{MON_1(t_N)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_1(t_i) \quad (6.34)$$

veya

$$\hat{p} = 1 - \hat{q} = 1 - \frac{MON_2(t_N)}{N} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_2(t_i) \quad (6.35)$$

eşitlikleri ile verilir. Ayrıca (6.34) ve (6.35) ile verilen tahminler, maksimum likelihood eşitliğini de sağlarlar.

Dağılımın parametreleri ve veri kümesi biliniyorsa ait olma olasılıkları ya da karma oranları hesaplanabilir. Bunun anlamı $P_j(t_i)$ parametrelerin ve veri kümesinin bir fonksiyonudur. (6.22)'deki eşitlik (6.35)'de kullanılırsa parametrelerin de ait olma olasılıklarının, $P_j(t_i)$ ve veri kümesinin fonksiyonları olduğu görülür.

$$h_j = g_{1j}(h_1, s_1, h_2, s_2, p, t_i) \quad j=1,2 \quad (6.36)$$

$$s_j = g_{2j}(h_1, s_1, h_2, s_2, p, t_i) \quad j=1,2 \quad (6.37)$$

$$p = g_3(h_1, s_1, h_2, s_2, p, t_i) \quad (6.38)$$

(6.36), (6.37) ve (6.38) eşitlikleri h_1, s_1, h_2, s_2, p parametrelerine ve örneklem verilerine bağlı beş eşitliktir. Teorik olarak en küçük kareler parametre tahminleri, bu beş eşitliğin çözümü ile elde edilir. Genelde bu eşitliklerin sayısal çözümü için adimsal yöntemlere başvurulur. Bununla birlikte tahmin sonuçları başlangıç değerine ve veri kümesinin kalitesine bağlıdır. Bu durumun dışında, eşitlikler çözüm vermeyebilir ya da düşük kalitede tahminler sağlar. Verinin kalite durumu ihmal edilerek en iyi uyan doğru her zaman mevcuttur.

En küçük kareler prensibine göre en iyi uyan doğru, doğru etrafındaki rezidü varyanslarını minimum yapar. Genel olarak korelasyon katsayısı, doğrunun veriye ne

kadar iyi uyduğunu gösteren iyi bir ölçü sağlar. Daha büyük korelasyon katsayısı, doğrunun veriye daha iyi uyduğunu gösterir. En iyi parametre tahminlerini elde etmek için en küçük kareler prensibi kullanılır. Yani h_1, s_1, h_2, s_2 ve p değerleri üzerine ardışık işlemler yapılır. Değerler, nokta ile doğru arasındaki sapmayı minimum yapacak, diğer bir ifadeyle korelasyon katsayısını maksimum yapacaktır. Herhangi bir h_1, s_1, h_2, s_2 ve p seti için korelasyon katsayıları (6.19) ve (6.26) eşitliklerinden yararlanarak,

$$r_j = \frac{\sum_{i=1}^N X(i)Y_j(i) - \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N X(i) \sum_{i=1}^N Y_j(i) \right]}{\left[\sum_{i=1}^N X^2(i) - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N X(i) \right)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^N Y_j^2(i) - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N Y_j(i) \right)^2 \right]} \quad (6.39)$$

olarak ifade edilir. İki doğru da eşzamanlı olarak Weibull alt kitlesinden gelen iki alt örnekleme uymak zorunda olduğundan herbir parametre her iki korelasyon katsayısı üzerinde etkiye sahiptir. Bu nedenle iki korelasyon katsayısının kareleri toplamı uyumun derecesi için en iyi ölçü olabilir. İki Weibull karması için korelasyon katsayısı daima pozitifdir. Uyumun derecesi için basitçe korelasyon katsayıları toplamı kullanılabilir.

$$r = r_1 + r_2 \quad (6.40)$$

Ardışık işlemlerle, başlangıç değerleri olarak grafik tahminleri alınarak, r değerini maksimum yapacak şekilde parametre tahminleri elde edilir (Keçecioğlu ve Wang 1998).

6.3. Normal Dağılımların Karması

g bileşenli karma Normal dağılım için (6.4)'teki f_i ,

$$f_i(x; m_i, s_i) = \frac{1}{s_i \sqrt{2p}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m_i}{s_i} \right)^2 \right) \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < m_i < \infty, \quad s_i > 0 \quad (6.41)$$

şeklindedir. Böylece karma Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; m, s) = \frac{1}{\sqrt{(2p)}} \sum_{i=1}^g p_i \frac{1}{s_i} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m_i}{s_i}\right)^2\right) \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < m < \infty, \quad s > 0 \quad (6.42)$$

olarak ifade edilir (Vlassis ve ark. 1999).

TANIM 6.4. Bileşenlerinin dağılım fonksiyonu (4.4)'deki gibi olan (6.4)'deki g bileşenli karma dağılımın (6.6)'daki dağılım fonksiyonu,

$$F(x; m, s) = \sum_{i=1}^g p_i \frac{1}{s_i \sqrt{2p}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y-m_i}{s_i}\right)^2\right) dy \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < m < \infty, \quad s > 0 \quad (6.43)$$

dir. Burada,

$$I = \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y-m_i}{s_i}\right)^2\right) dy \quad (6.44)$$

olsun. (6.44)'de $u = \frac{y-m_i}{s_i}$ dönüşümü uygulanarak, karma normal dağılımın dağılım fonksiyonu,

$$F(x; m, s) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \sum_{i=1}^g p_i \int_{-\infty}^{\frac{x-m_i}{s_i}} \exp\left(-\frac{1}{2} u^2\right) du \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < m < \infty, \quad s > 0 \quad (6.45)$$

dur.

6.3.1. Normal Dağılımların Karmasındaki Parametrelerin Tahmini

g bileşenli karma normal dağılımda $j=1, \dots, g$ olacak şekilde m_j ve s_j^2 parametrelerinin maksimum likelihood tahminleri, ağırlıklı örneklem ortalaması ve ağırlıklı örneklem varyansı ile ifade edilebilir. Ayrıca tüm ortalama ve tüm varyansın

maksimum likelihood tahminleri, örneklem ortalaması ve örneklem varyansı ile uyumludur. Karmanın tüm ortalama ve varyansı, a ve b ,

$$a = \sum_{j=1}^g p_j m_j \quad (6.46)$$

ve

$$b = \sum_{j=1}^g p_j (s_j^2 + m_j^2) - \left(\sum_{j=1}^g p_j m_j \right)^2 \quad (6.47)$$

eşitlikleri ile verilir.

$x_1, \dots, x_n$ (6.42) eşitliği ile verilen yoğunluğa sahip dağılımdan alınmış bir rastgele örneklem olsun. Örneklem ortalaması ve örneklem varyansı sırasıyla,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6.48)$$

ve

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (6.49)$$

şeklindedir. $p_g = 1 - \sum_{j=1}^{g-1} p_j$ alınsın. Likelihood fonksiyonunun logaritması,

$$L = \sum_{i=1}^n \log \left\{ \sum_{j=1}^g p_j f_j(x_i) \right\} \quad (6.50)$$

eşitliği ile verilir. Böylece likelihood denklemleri,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\{f_j(x_i) - f_g(x_i)\}}{f(x_i)} = 0 \quad j = 1, \dots, g-1 \quad (6.51)$$

$$\left(\frac{p_j}{s_j^2} \right) \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_j) f_j(x_i)}{f(x_i)} = 0 \quad j = 1, \dots, g \quad (6.52)$$

$$\left(\frac{p_j}{2s_j^4} \right) \sum_{i=1}^n \frac{\{(x_i - m_j)^2 - s_j^2\} f_j(x_i)}{f(x_i)} = 0 \quad j = 1, \dots, g \quad (6.53)$$

olarak bulunur. (6.51) eşitliğinin her iki tarafı p_j ile çarpılır sonuç j üzerinden toplanırsa,

$$\sum_{i=1}^n \frac{f_j(x_i)}{f(x_i)} = n \quad (6.54)$$

elde edilir. (6.54) eşitliği (6.51) eşitliğinde yerine konursa,

$$\sum_{i=1}^n \frac{f_j(x_i)}{f(x_i)} = n \quad j = 1, \dots, g \quad (6.55)$$

bulunur. $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, g$ olacak şekilde,

$$w_{ij} = \frac{f_j(x_i)}{\{nf(x_i)\}} \quad (6.56)$$

olsun. (6.55) ve (6.56) eşitliklerinden,

$$\sum_{i=1}^n w_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, g \quad (6.57)$$

bulunur. $\hat{m}_j$, $\hat{s}_j^2$ ve $\hat{p}_j$, sırasıyla m_j , s_j^2 ve p_j parametrelerinin maksimum likelihood tahminleri olsun. $\hat{w}_{ij}$; m_j , s_j^2 ve p_j parametrelerinin, maksimum likelihood tahminleri ile yer değiştirilmesi sonucu elde edilen w_{ij} tahmini olsun. (6.56) eşitliği p_j ile çarpılıp j üzerinden toplanırsa,

$$\sum_{j=1}^g \hat{p}_j \hat{w}_{ij} = \frac{1}{n} \quad i = 1, \dots, n \quad (6.58)$$

bulunur. Ayrıca,

$$\sum_{i=1}^n \hat{w}_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, g \quad (6.59)$$

şeklindedir. (6.52) ve (6.53) eşitlikleri kullanılarak (6.55) ve (6.56) eşitliklerinin de yardımıyla,

$$\hat{m}_j = \sum_{i=1}^n \hat{w}_{ij} x_i \quad j = 1, \dots, g \quad (6.60)$$

$$\hat{s}_j^2 = \sum_{i=1}^n \hat{w}_{ij} x_i^2 - \hat{m}_j^2 \quad j = 1, \dots, g \quad (6.61)$$

bulunur. a ve b parametrelerinin, $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ parametre tahminlerini elde etmek için (6.46) ve (6.47) eşitliklerinde m_j , s_j^2 ve p_j parametreleri, tahminleri ile değiştirilir (Zehna 1966). (6.60) eşitliğinin her iki tarafı p_j ile çarpılıp j üzerinden toplanır, (6.58) eşitliğinden faydalanılırsa,

$$\hat{a} = \bar{x} \quad (6.62)$$

bulunur. (6.61) eşitliğinin her iki tarafı p_j ile çarpılıp j üzerinden toplanır, (6.58) ve (6.62) eşitliklerinden faydalanılırsa,

$$\hat{b} = s^2 \quad (6.63)$$

olarak bulunur. (6.59) eşitliği,

$$\hat{p}_j = \sum_{i=1}^n \hat{p}_j \hat{w}_{ij} \quad j = 1, \dots, g-1 \quad (6.64)$$

formunda yazılır ve (6.60), (6.61) eşitliklerinin de kullanılmasıyla parametre tahminleri bulunur. Bilinmeyen parametrelerin başlangıç değerleri biliniyorsa sistem ardışık işlemlerle çözülebilir (Behboodian 1970).

6.4. Üstel Dağılımların Karması

Karma üstel dağılım, yaşam testi uygulamalarında ortaya çıkar. Farklı nedenlerle ortaya çıkan hataların karma üstel olasılık yoğunlukla ifade edilmesi hata özellikleri için daha iyi tanımlamalar yapılmasına olanak sağlar. Örneğin, elektronik valf hataları; gaz kusurları, mekanik kusurlar ve katotda normal çürüme/bozulma yüzünden oluşan kusurlar olmak üzere üç gruba ayrılabilir.

Davis (1952), Sistemlerin en çok insan ve mekanik nedenlerin bir kombinasyonu dolayısıyla başarısızlığa uğrayabileceğini belirtmiştir (Everitt ve Hand 1981).

g bileşenli karma üstel dağılım için (6.4)'deki olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_i(x) = s_i^{-1} \exp\left(-\frac{x}{s_i}\right) \quad x \geq 0 \quad s_i > 0 \quad (6.65)$$

şeklindedir. Böylece karma üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; s) = \sum_{i=1}^g p_i s_i^{-1} \exp\left(-\frac{x}{s_i}\right) \quad x \geq 0 \quad (6.66)$$

olarak ifade edilir (Everitt ve Hand 1981).

TANIM 6.5. Bileşenlerinin dağılım fonksiyonu (4.55)'deki gibi olan (6.4)'deki g bileşenli karma dağılımın (6.6)'deki dağılım fonksiyonu,

$$F(x; s) = 1 - \sum p_i \exp\left(-\frac{x}{s_i}\right) \quad (6.67)$$

şeklindedir (Everitt ve Hand 1981).

6.4.1. Üstel Dağılımların Karmasındaki Parametrelerin Tahmini

Üstel dağılımın karmasındaki parametrelerin tahmini için Mendenhall ve Hader (1958) tarafından geliştirilen yöntem kullanılacaktır. Bu yöntemle bilinmeyen oranlarda iki üstel başarısızlık dağılımının karması tarafından elde edilen kitlenin parametre tahmin yöntemi açıklanacaktır.

İki alt kitleden oluşan bir kitle düşünölsün. Bu iki alt kitle iki başarısızlık tipini temsil etmekte ve kitle içinde p $0 \leq p \leq 1$ ile $q = 1 - p$ oranlarında bulunmaktadırlar. Kitlerdeki herbir bileşen hangi alt kitleye ait olduğunu gösteren bir etiket içerir. Etiket bilgisi başarısızlık nedenidir ve ancak başarısızlık gerçekleşikten sonra elde edilir. $i = 1, 2$ olmak üzere i . alt kitle için başarısızlık zamanlarının dağılım fonksiyonu,

$$F_i(t) = 1 - \exp(-t/a_i) \quad 0 \leq t < \infty \quad (6.68)$$

ile tanımlanır. p , ünitelerin 1. alt kitlesine ait olması oranı ise populasyon için dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla,

$$F(t) = pF_1(t) + qF_2(t) \quad (6.69)$$

ve

$$f(t) = pf_1(t) + qf_2(t) \quad (6.70)$$

şeklindedir. Ayrıca alt kitleler ve kitle için güvenilirlik fonksiyonları sırasıyla,

$$R_i(t) = 1 - F_i(t) \quad (6.71)$$

ve

$$R(t) = 1 - F(t) \quad (6.72)$$

dir. Bir kitle test edildiğinde karma oranları zamanla değişir. Bir alt kitledeki nesneler diğerindekilere göre daha hızlı ölebilir. t anında alt kitleler $p(t)$ ve $q(t) = 1 - p(t)$ karma oranlarında bulunur. Bu miktarlar koşullu karma oranları olarak adlandırılır ve

$$p(t) = \frac{pR_1(t)}{R(t)} \quad \text{ve} \quad p(0) = p \quad (6.73)$$

şeklindedir.

Test için kullanılabilir sürenin kısıtlı olması nedeniyle, araştırmacılar genellikle yaşam testini tahmini süre geçtikten sonra veya önceden başarısızlığı tahmin edilen sayıda ünite başarısız olduktan sonra yapmayı isterler. Bu şekildeki örnekleme, sansürlü örneklem (censored sample) denir. Bu parametre tahmin yönteminde sabit test bitirme süresi ile sansürlenmiş örneklem düşünülecektir.

n sayıdaki ünitelerden (kitleden) rastgele örneklem seçilip test uygulansın. Test sabit T zamanında bitirilsin. Bu sürenin sonunda i . alt kitleden r_i sayıda ünite başarısız olmuştur. Yani toplam $r_1 + r_2 = r$ ünite başarısızdır. i . alt kitleden, j . ünitenin başarısızlık zamanı olan gözlem t_{ij} ile gösterilmiştir. $n - r$ sayıdaki başarısız olmayan ünitenin hangi alt kitleden geldiği bilgisi mevcut değildir. Böylece gözlenen rastgele değişkenler $i = 1, 2$ olmak üzere r_i ve $j = 1, 2, \dots, r_i$ olmak üzere t_{ij} şeklindedir.

1.Durum: Alt kitle parametrelerinin göreceli büyüklüğü bilinmesin. Kitle parametrelerinin tahmini maksimum likelihood yöntemi kullanılarak hesaplanacaktır.

Bitirme zamanı T 'dir. Bu yüzden $x = \frac{t}{T}$ ve $b_i = \frac{a_i}{T}$ olsun. Böylece, her bir bileşen için $F_i(x)$ dağılım fonksiyonu ve sonsal olasılıklar sırasıyla

$$F_i(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{b_i}\right) \quad 0 \leq x < \infty \quad (6.74)$$

ve

$$P(r_1, r_2, n-r/n) = \frac{n!}{r_1! r_2! (n-r)!} [pF_1(1)]^{r_1} [qF_2(1)]^{r_2} [R(1)]^{n-r} \quad (6.75)$$

şeklindedir. r_i ve $x_{ij} \leq 1$ verilmişken elde edilen $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ir_i}$ sıralı gözlemlerinin koşullu yoğunluğu,

$$P(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ir_i} / r_i; x_{ij} \leq 1) = \frac{r_i! \prod_{j=1}^{r_i} f_i(x_{ij})}{[F_i(1)]^{r_i}} \quad (6.76)$$

şeklindedir. Likelihood fonksiyonu ise,

$$L = \frac{n!}{(n-r)!} R(1)^{n-r} p^{r_1} q^{r_2} \prod_{j=1}^{r_1} f_1(x_{1j}) \prod_{j=1}^{r_2} f_2(x_{2j}) \quad (6.77)$$

bulunur. $\ln L$ 'nin parametrelere göre türevi alınır,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial b_1} = \frac{k(n-r)}{b_1^2} - \frac{r_1}{b_1} + \frac{r_1 \bar{x}_1}{b_1^2} \quad (6.78)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial b_2} = \frac{(1-k)(n-r)}{b_2^2} - \frac{r_2}{b_2} + \frac{r_2 \bar{x}_2}{b_2^2} \quad (6.79)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{k(n-r) + r_1}{p} - \frac{(1-k)(n-r) + r_2}{q} \quad (6.80)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada,

$$k = \frac{p \exp\left(-\frac{1}{b_1}\right)}{p \exp\left(-\frac{1}{b_1}\right) + q \exp\left(-\frac{1}{b_2}\right)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{q}{p}\right) \exp\left[\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right]} \quad (6.81)$$

dir. (6.73) eşitliğine göre $k = p(1)$ olduğu görülür. Parametrelere göre alınan türevler sıfıra eşitlenirse parametre tahminleri sırasıyla,

$$\hat{p} = \frac{r_1}{n} + \hat{k} \frac{(n-r)}{n} \quad (6.82)$$

$$\hat{b}_1 = \bar{x}_1 + \hat{k} \frac{(n-r)}{r_1} \quad (6.83)$$

$$\hat{b}_2 = \bar{x}_2 + \frac{(1-\hat{k})(n-r)}{r_2} \quad (6.84)$$

olarak bulunur. Burada,

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^{r_i} x_{ij}}{r_i} \quad i=1,2. \quad (6.85)$$

$$\hat{k} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\hat{q}}{\hat{p}} \right) \exp \left[\frac{1}{\hat{b}_1} - \frac{1}{\hat{b}_2} \right]} \quad (6.86)$$

şeklindedir.

2.Durum: Alt kitle parametrelerinin görelî büyüklüğü bilinsin. $b_1 = b_2 = b$ özel durumu için maksimum likelihood tahminleri,

$$\hat{p} = \frac{r_1}{r} \quad (6.87)$$

$$\hat{b} = \frac{r_1 \bar{x}_1 + r_2 \bar{x}_2 + (n-r)}{r} \quad (6.88)$$

şeklindedir. Genel olarak, tahminleri elde etmek için 1.durumu kullanmak zorunludur. Fakat, $\hat{b}_1 > \hat{b}_2$ iken $b_1 \leq b_2$ ise veya, $\hat{b}_1 < \hat{b}_2$ iken $b_1 \geq b_2$ ise 2. duruma ait tahminler kullanılır (Johnson ve ark. 1994).

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Veri modellemede esnek bir yol olarak, bir dağılımın yeterli olmadığı durumlarda uygulanan sonlu karma dağılım modellerine ek olarak, bu bölümde diğer karma dağılım modeli ya da karıştırılmış (mixed) dağılım modeli incelenecektir.

7.1. Güvenilirlik Analizinde Kullanılan Diğer Karma Dağılım Modelleri

Bir ekipmanın güvenilirliği, matematiksel olarak yaşam süresi dağılımı olarak bilinen bir olasılık dağılımına göre ifade edilir. Bir ekipmanın yaşam süresini en iyi şekilde tanımlayan dağılım modeli en az bir bilinmeyen parametreye bağlıdır.

Birçok durumda, belirli bir anda bir cihazın başarısızlığından sorumlu (tek başına veya kolektif etkili) birkaç rastgele fiziksel neden olabilir. Bu durumda, varsayılan yaşam süresi dağılımı tarafından içerilen parametrenin bilinmeyen bir olasılık dağılımına göre davranan bir rastgele değişken olduğu düşünülür. Örneğin, parçalar konturollü koşullar altında imal edilse bile parçaların yaşam süresinin dağılım parametresinin, bir parçadan diğerine veya bir kısım parçadan diğer kısma rastgele değiştiği görülmektedir. Yani bir kutuda birkaç grup cihaz varsa ve yaşam süresinin dağılım parametresi bir gruptan diğerine rastgele değişiyorsa, rastgele seçilen bir parçanın yaşam süresinin dağılım fonksiyonu, rastgele parametrenin değerine bağlıdır (Padgett ve Tsokos 1979).

TANIM 7.1. $f(x; l)$ parametrik ailesi alınsın. Burada x ve l rastgele değişkenlerdir. X rastgele değişkenine ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu l rastgele parametresine bağlıdır. $G(l)$, Λ tanım kümesinde l rastgele parametresinin birikimli dağılım fonksiyonudur. Bu durumda karıştırılmış (mixed) dağılım modelinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\int_{\Lambda} f(x; l) dG(l) \quad (7.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $G(l)$ 'ya ağırlık dağılımı da denir (Douglas 1980).

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

ÖRNEK 7.1. X , web sunucusunun hizmet süresini, Y , ulaşan talep sayısını gösteren rastgele değişkenler olsun. X rastgele değişkeni,

$$f(x) = m \exp(-mx) \quad x > 0 \quad (7.2)$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. X 'in belirli bir değeri için Y rastgele değişkeni,

$$p(y/x) = \frac{(lx)^y \exp(-lx)}{y!} \quad y = 0, 1, 2, \dots \quad lx > 0 \quad (7.3)$$

Poisson olasılık fonksiyonuna sahip olsun. Buradan

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= \int_0^{\infty} p(y/x) f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{(lx)^y \exp(-lx)}{y!} m \exp(-mx) dx \\ &= \frac{m l^y}{y!} \int_0^{\infty} x^y \exp(-lx - mx) dx \end{aligned} \quad (7.4)$$

elde edilir. (7.4)'deki eşitlikte $(l + m)x = u$ ve $(l + m)dx = du$ olacak şekilde değişken değiştirme yapılırsa,

$$P(Y = y) = \frac{m l^y}{(m + l)^{y+1}} = \left(\frac{r}{1 + r} \right)^y \frac{1}{1 + r} \quad (7.5)$$

bulunur. Burada,

$$r = \frac{l}{m} \quad (7.6)$$

dür. Böylece, Y rastgele değişkeni r ortalamalı geometrik dağılıma sahiptir (Trivedi 2006).

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

TANIM 7.2. $f(x)$ olasılık fonksiyonuna sahip kesikli tipteki bir X rastgele değişkeninin $g(z)$ ile gösterilen olasılık çıkarar fonksiyonu,

$$g(z) = E(z^x) \quad (7.7)$$

şeklindedir (Douglas 1980).

TANIM 7.3. X rastgele değişkenine ait olasılık çıkarar fonksiyonu $g(z; l)$ olsun. l sürekli tipte bir rastgele değişken olsun. $G(l)$, Λ tanım kümesinde tanımlı olmak üzere l 'nin birikimli dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda karıştırılmış dağılımın olasılık çıkarar fonksiyonu,

$$\int_{\Lambda} g(z; l) dG(l) \quad (7.8)$$

şeklindedir. l , $g(l)$ olasılık fonksiyonuna sahip kesikli tipte bir rastgele değişken ise olasılık çıkarar fonksiyonu,

$$\sum_l g(z; l) g(l) \quad (7.9)$$

olur (Douglas 1980).

ÖRNEK 7.2. l ortalamalı Poisson dağılımının olasılık fonksiyonu ve olasılık çıkarar fonksiyonu sırasıyla,

$$f(x) = \exp(-l) \frac{(l)^x}{x!} \quad (7.10)$$

ve

$$g(z; l) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x \exp(-l) \frac{(l)^x}{x!} = \exp(-l) \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(lz)^x}{x!} = \exp(-l + lz) \quad (7.11)$$

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

şeklindedir.

l , Gama dağılımına sahip olsun. Öyleyse olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(l) = \frac{r^{-k}}{\Gamma(k)} \exp\left(-\frac{l}{r}\right) l^{k-1} \quad l > 0, \quad r > 0, \quad k > 0 \quad (7.12)$$

şeklindedir. Ayrıca $\Gamma(k) = (k-1)!$ dir. Böylece karıştırılmış dağılımın olasılık çıkarar fonksiyonu,

$$g(z; l) = \exp(-l + lz) \quad (7.13)$$

ve

$$dG(l) = \frac{r^{-k}}{\Gamma(k)} \exp\left(-\frac{l}{r}\right) l^{k-1} dl \quad (7.14)$$

eşitliklerinden yararlanılarak,

$$\int \exp(-l + lz) dG(l) = (g - rz)^{-k} \quad (7.15)$$

olarak bulunur (Douglas 1980).

7.2. Güvenilirlik Analizinde Kullanılan Bileşik Dağılım Modelleri

7.2.1. Rastgele Terimlerin Toplamı

Değişkenleri birleştirmenin yollarından biri, toplamlarının dağılımını hesaplamaktır. X_1 ve X_2 , dağılımları bilinen rastgele değişkenler olmak üzere w rastgele değişkeni

$$w = X_1 + X_2 \quad (7.16)$$

olarak tanımlansın. X_1 ve X_2 ; 0,1,2,... kesikli değerlerini alsın. Bu durumda,

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$\begin{aligned}
 P(X_1 + X_2 = w) &= P(X_1 = 0)P(X_2 = w) + P(X_1 = 1)P(X_2 = w-1) + \dots \\
 &\quad + P(X_1 = w)P(X_2 = 0) \\
 &= \sum_{x_1+x_2=w} P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \\
 &= \sum_{x_1=0}^w P(X_1 = x_1)P(X_2 = w - x_1) \\
 &= \sum_{x_1+x_2=w} P(X_1 + X_2 = w / X_1 = x_1)P(X_1 = x_1) \\
 &= \sum_{x_1} P(X_2 = w - x_1)P(X_1 = x_1) \tag{7.17}
 \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. X_1 ve X_2 rastgele değişkenlerine ait olasılık çıkaran fonksiyonları sırasıyla $g_1(z)$ ve $g_2(z)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 g_1(z)g_2(z) &= \sum z^{x_1} P(X_1 = x_1) \sum z^{x_2} P(X_2 = x_2) \\
 &= \sum \sum z^{x_1+x_2} P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \\
 &= \sum \sum z^w P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \tag{7.18}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $g_w(z)$, $X_1 + X_2$ değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu ise,

$$g_w(z) = g_1(z)g_2(z) \tag{7.19}$$

şeklindedir. Bu ifade n tane rastgele değişkenin toplamına genelleştirilebilir. $X_1, X_2, \dots, X_n$; sırasıyla $g_1(z), g_2(z), \dots, g_n(z)$ olasılık çıkaran fonksiyonlarına sahip birbirinden bağımsız rastgele değişkenler ise $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ değişkeninin dağılımına ait olasılık çıkaran fonksiyon,

$$g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z) \tag{7.20}$$

şeklindedir. Yukarıda,

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \tag{7.21}$$

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

ifadesi için n bilinen bir sayı olduğunda ve bağımsız rastgele değişkenlerin olasılık çıkaran fonksiyonları bilindiğinde, olasılık dağılımının belirlenebileceği görülmektedir. S_n için olasılık dağılımını bulmak, n yumurta kümesinde gözlenen toplam yumurta sayısının olasılık dağılımını bulmak olarak düşünülebilir. Burada her bir kümenin dağılımı bilinmektedir. Bununla birlikte, yumurta kümelerinin sayısı N 'in, her bir X_i 'den bağımsız, $P(N = n)$ olasılık fonksiyonuna sahip bir rastgele değişken olduğu düşüncesi ile,

$$S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N \quad (7.22)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} P(S_N = s) &= \sum P(S_n = s / N = n)P(N = n) \\ &= \sum P(S_n = s)P(N = n) \end{aligned} \quad (7.23)$$

eşitliği yazılır. S_N için olasılık çıkaran fonksiyon,

$$\begin{aligned} h(z) &= z^0 P(S_N = 0) + zP(S_N = 1) + z^2 P(S_N = 2) \dots \\ &= \sum_s z^s P(S_N = s) \\ &= \sum_s \sum_n z^s P(S_n = s)P(N = n) \end{aligned} \quad (7.24)$$

şeklindedir. $g(z)$; N 'e ait olasılık çıkaran fonksiyonu ise,

$$g(z) = \sum z^n P(N = n) \quad (7.25)$$

dir. $f(z)$; her bir X_i için olasılık çıkaran fonksiyonu ise,

$$f(z) = \sum z^x P(X_i = x) \quad (7.26)$$

dir. Böylece $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ için olasılık çıkaran fonksiyonu,

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$\sum_s z^s P(S_n = s) = [f(z)]^n \quad (7.27)$$

yardımla S_N için olasılık çıkaran fonksiyon,

$$\sum_n [f(z)]^n P(N = n) \quad (7.28)$$

olarak bulunur (Douglas 1980, Feller 1968).

TANIM 7.4. M bir stokastik sayı olsun. $k=1,2,\dots,M$ olmak üzere Y_k stokastik değişkenleri $W = \sum_{k=1}^M Y_k$ şeklinde toplansın. Bu durumda W ’nun olasılık fonksiyonu,

$$h(w) = \sum_{i=0}^{\infty} f(w/i) g_i \quad (7.29)$$

şeklinde tanımlanır ve W stokastik değişkeni bileşik (compound) dağılıma sahiptir denir. Burada $f(w/i)$, $M = i$ iken $\sum_{k=1}^i Y_k$ toplamı için yoğunluk, g_i , $M = i$ için olasılıktır (Grubbström ve Tang 2006). $M = 0$ iken $W = 0$ dır.

Bileşik (compound) dağılıma örnek olarak bir depodan talepler düşünülebilir. Öyleki, müşteri sayısı ve her bir müşteri tarafından yapılan talep miktarı bağımsız birer rastgele değişkendir (Grubbström ve Tang 2006). M , taleplerin sayısını; Y_i , i . talebin miktarını ve W , toplam talep miktarını gösterebilir. Olasılık fonksiyonu yardımla, dağılım fonksiyonu,

$$H(w) = P(W \leq w) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i F(w/i) \quad (7.30)$$

şeklinde. Burada $F(w/i)$, $M = i$ iken W için dağılım fonksiyonudur. Güvenilirlik fonksiyonu ise,

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$R(w) = P(W \geq w) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i R(w/i) \quad (7.31)$$

olarak bulunur. Burada $R(w/i)$, $M = i$ iken W için güvenilirlik fonksiyonudur. Böylece güvenilirlik fonksiyonu, toplam talep miktarının belirli bir miktarı aşması olasılığıdır (Cai 1998).

ÖRNEK 7.3. Bir ailedeki çocuk sayısı m ortalamalı Poisson dağılımına sahip X rastgele değişkeni olsun. Yani $P(X = r) = m^r \frac{\exp(-m)}{r!}$ ve $r = 0, 1, 2, \dots$ olur. Bir çocuğun erkek olması olasılığı p olsun. Rastgele seçilen bir ailedeki erkek çocuk sayısı Y rastgele değişkeni olmak üzere, Y rastgele değişkeninin dağılımı istenmektedir. $i = 1, \dots, X$ ve I_i Bernolli rastgele değişkeni olmak üzere $P(I_i = 1) = p$ $P(I_i = 0) = 1 - p = q$ olur. $Y = I_1 + \dots + I_X$, $j = 0, 1, 2, \dots$ olacak şekilde $P(Y = j)$ ifadesini bulmak gerekmektedir. $P(Y = j)$,

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) P(Y = j | X = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-m) \frac{m^n}{n!} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \\ &= \frac{\exp(-m) m^j p^j}{j!} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{(mq)^{n-j}}{(n-j)!} \\ &= \frac{\exp(-m) (mp)^j}{j!} \left(1 + mq + \frac{(mq)^2}{2!} + \dots \right) \\ &= \frac{\exp(-m) (mp)^j}{j!} \exp(mq) \\ &= \exp(-mp) \frac{(mp)^j}{j!} \end{aligned} \quad (7.32)$$

olarak elde edilir.

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

Böylece Y rastgele değişkeninin mp ortalamalı Poisson dağılımına sahip olduğu bulunur (Joanes 2000).

7.2.2. Standart Gama Dağılımı

Bu bölümde k tane standart üstel dağılıma sahip rastgele değişkenlerin toplamı olarak standart gama dağılımı incelenecektir.

TANIM 7.5. $X_1, X_2, \dots, X_k$ herbiri standart üstel dağılıma sahip bağımsız ve özdeş dağılan rastgele değişkenler olsun. $Y = \sum_{i=1}^k X_i$ rastgele değişkeni,

$$f(x) = x^{k-1} \exp(-x) \frac{1}{\Gamma(k)} \quad x > 0 \quad k > 0 \quad (7.33)$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu ile k parametrelili standart gama dağılımına sahiptir.

Bu dağılıma ilişkin dağılım fonksiyonu, moment çıkaran fonksiyonu, beklenen değer, varyans ve mod sırasıyla

$$F(x) = 1 - \frac{\Gamma(k; x)}{\Gamma(k)} \quad (7.34)$$

$$M(t) = (1-t)^{-k} \quad t < 1 \quad (7.35)$$

$$E(X) = k \quad (7.36)$$

$$Var(X) = k \quad (7.37)$$

ve

$$\text{mod} = k - 1 \quad k \geq 1 \quad (7.38)$$

şeklindedir (Patil ve ark. 1984).

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

7.2.3. Bileşik Poisson Dağılımı

N , lt ortalamalı Poisson dağılımına sahip bir rastgele değişken olsun. $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ özdeş dağılıma sahip bağımsız rastgele değişkenler olsunlar. Bu rastgele değişkenler aynı zamanda N 'den de bağımsızdırlar. Böylece (7.22)'deki eşitlik ile verilen S_N ,

$$\begin{aligned} P(S_N = s) &= \sum P(S_n = s)P(N = n) \\ &= \exp(-lt) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(lt)^n}{n!} P(S_n = s) \end{aligned} \quad (7.39)$$

olasılık fonksiyonu ve

$$\sum_n [f(z)]^n P(N = n) = \exp(-lt) \sum_n \frac{(ltf(z))^n}{n!} = \exp(-lt + ltf(z)) \quad (7.40)$$

olasılık çıkaran fonksiyonuyla bileşik (compound) Poisson dağılımına sahiptir. Burada $f(z)$, $i = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere her bir X_i için olasılık çıkaran fonksiyondur.

Belirli bir t zaman aralığında, yıldırım çarpması sayısı lt ortalamalı Poisson dağılımına sahiptir. Bu zaman aralığında yıldırımların neden olduğu toplam zarar ise bileşik (compound) Poisson dağılımına sahiptir (Kapadia ve ark. 2005).

t uzunluktaki zaman aralığında, gerçekleşen kozmik ışın sağnağı sayısı N 'in, lt ortalamalı Poisson dağılıma sahip olduğu varsayılır. Birden fazla sayaç olduğu düşünölsün. Burada herhangi bir sayaç için (sağnak) kayıt sayısı bir rastgele değişkendir. t zaman aralığında, toplam kayıt sayısı S_N rastgele değişkeni, bileşik (compound) Poisson dağılımına sahiptir.

X_n , n . kazaya dahil olan otomobillerin sayısı olsun. Kaza sayısı olan N , Poisson dağılımına sahip bir rastgele değişkendir. Kazalara dahil olan toplam otomobil sayısı $X_1 + X_2 + \dots + X_N$ ise bileşik (compound) Poisson dağılımına sahiptir (Feller 1968).

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

7.2.4. Bileşik Poisson Süreci

TANIM 7.6. Bir stokastik süreç $\{N(t), t \geq 0\}$ olsun. (Bir stokastik süreç $\{N(t), t \in T\}$ bir rastgele değişken topluluğudur ve her $t \in T$ için $N(t)$ bir rastgele değişkendir.) $N(t)$, $[0, t]$ aralığında gerçekleşen olayların sayısını gösteriyorsa bu bir sayma sürecidir. $N(t)$ aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.

- i. $N(t) \geq 0$.
- ii. $N(t)$, her t değeri için tamsayıdır.
- iii. $s < t$ ise $N(s) \leq N(t)$ dir.
- iv. $s < t$ için $N(t) - N(s)$, (s, t) aralığında gerçekleşen olayların sayısıdır.

Ayrık zaman aralıklarında gerçekleşen olayların sayısı bağımsız ise, sayma sürecinin bağımsız artışlara sahip olduğu söylenir (Ross 1997).

TANIM 7.7. Bir sayma süreci olan $\{N(t), t \geq 0\}$ aşağıdaki koşulları sağladığında λ oranı ile bir Poisson sürecidir.

- i. $N(0) = 0$
- ii. İki ayrık alt aralıkta gerçekleşen olayların sayısı, bağımsız rastgele değişkenlerdir.
- iii. t uzunlukta herhangi bir aralıkta gerçekleşen olayların sayısı, (7.41)'deki λt ortalamalı Poisson dağılımına sahiptir (Ross 1997).

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^n}{n!} \quad n = 0, 1, \dots \quad s, t \geq 0 \quad (7.41)$$

TANIM 7.8. Bir stokastik süreç olan $\{Y(t), t \geq 0\}$,

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i \quad (7.42)$$

şeklinde ise bileşik (compound) Poisson sürecidir. Burada $\{N(t), t \geq 0\}$ bir Poisson sürecidir. $\{D_i, i = 1, 2, \dots\}$ bağımsızdırlar ve özdeş dağılırlar. Aynı zamanda herbiri

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$\{N(t), t \geq 0\}$ 'den de bağımsızdır. $Y(t)$ rastgele değişkeni, bileşik (compound) Poisson rastgele değişkenidir. Örneğin bir marketten müşteriler Poisson sürece göre ayrılırsın. D_i , i . müşterinin yaptığı ödeme miktarını gösterebilir. Müşteriler tarafından yapılan ödeme miktarları bağımsız ve özdeş dağılmaktadır. $Y(t)$, t zamanına kadar yapılan ödemeler toplamını gösteriyorsa, $\{Y(t), t \geq 0\}$ bileşik (compound) Poisson sürecidir (Ross 1997).

7.2.4.1. Bileşik Poisson Sürecin Özellikleri

1. Koşullu beklenen değer yardımıyla bileşik (compound) Poisson sürecin beklenen değeri,

$$E(Y(t)) = E(E(Y(t)/N(t))) = E(N(t)E(D_i)) = E(N(t))E(D_i) = \lambda t E(D_i) \quad (7.43)$$

olarak hesaplanır.

2. Bileşik (compound) Poisson sürecin varyansı,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y(t)) &= E(\text{Var}(Y(t)/N(t))) + \text{Var}(E(Y(t)/N(t))) \\ &= E(N(t)\text{Var}(D_i)) + \text{Var}(N(t)E(D_i)) \\ &= \text{Var}(D_i)E(N(t)) + (E(D_i))^2 \text{Var}(N(t)) \\ &= \text{Var}(D_i)\lambda t + (E(D_i))^2 \lambda t \\ &= \lambda t (\text{Var}(D_i) + (E(D_i))^2) \\ &= \lambda t E(D_i^2) \end{aligned} \quad (7.44)$$

olarak elde edilir. Bu hesaplamalar yapılırken toplam varyans kuralından yararlanılmıştır.

3. Bileşik (compound) Poisson sürecin moment çıkaran fonksiyonu,

$$P(Y(t) = i) = \sum_n P(Y(t) = i/N(t) = n)P(N(t) = n) \quad (7.45)$$

toplam olasılık kuralı kullanılarak,

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

$$\begin{aligned} E(\exp(sY)) &= \sum_i \exp(si) P(Y(t) = i) \\ &= \sum_i \exp(si) \sum_n P(Y(t) = i / N(t) = n) P(N(t) = n) \\ &= \sum_n P(N(t) = n) \sum_i \exp(si) P(Y(t) = i / N(t) = n) \\ &= \sum_n P(N(t) = n) \sum_i \exp(si) P(D_1 + D_2 + \dots + D_n = i) \\ &= \sum_n P(N(t) = n) (M_{D_i}(s))^n \\ &= \sum_n P(N(t) = n) \exp(n \ln(M_{D_i}(s))) \\ &= M_{N(t)}(\ln(M_{D_i}(s))) \\ &= \exp(t(M_{D_i}(s) - 1)) \end{aligned} \tag{7.46}$$

şeklinde hesaplanır (Wikipedia 2007).

7.2.5. Bileşik Negatif Binom Dağılımı

N ; p , q ve r parametreleri ile negatif binom dağılıma sahip bir rastgele değişken olsun. $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ özdeş dağılıma sahip bağımsız rastgele değişkenler olsun. Bu rastgele değişkenler aynı zamanda N 'den de bağımsızdırlar. Böylece,

$$Y = \sum_{n=1}^N X_n \tag{7.47}$$

için olasılık dağılımı, bileşik (compound) negatif binom dağılımıdır. $N = 0$ ise $Y = 0$ dır (Wikipedia 2007).

7.3. Genelleştirilmiş Dağılım

TANIM 7.9. X_1 ve X_2 sırasıyla $g_1(z)$, $g_2(z)$ olasılık çıkaran fonksiyonlarına sahip bağımsız rastgele değişkenler olsun. $g_1(g_2(z))$ olasılık çıkaran

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

fonksiyonuna sahip X rastgele değişkeni, X_2 tarafından genelleştirilmiş X_1 rastgele değişkeni olarak adlandırılır. X rastgele değişkeninin dağılımı, genelleştirilmiş dağılımdır (Patil ve ark. 1984).

7.3.1. Poisson-Binom Dağılımı

l , n ve p parametrelili Poisson-binom dağılımı: n ve p parametrelili binom dağılımı tarafından l parametrelili Poisson dağılımının genelleştirilmesi sonucu elde edilir. Bu dağılım aynı zamanda l parametrelili Poisson dağılımına sahip y üzerine, ny ve p parametreleri ile binom dağılımının karıştırılmış dağılımdır. Poisson-Binom dağılımının olasılık fonksiyonu

$$P(x) = \exp(-l) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{nj}{x} p^x q^{nj-x} \frac{l^j}{j!} \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad 0 < l < \infty \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.48)$$

dir. Burada $0 < p < 1$ ve $q = 1 - p$ dir.

Bu dağılıma ilişkin ortalama ve varyans sırasıyla

$$m = nlp \quad (7.49)$$

ve

$$s^2 = nlp(np + q) = m(np + q) \quad (7.50)$$

şeklindedir (Patil ve ark. 1984).

Genelleştirilmiş dağılım tanımından yararlanarak bu dağılımın olasılık çıkaran fonksiyonu hesaplanacaktır. Bunun için öncelikle Poisson ve binom dağılımlarına ait olasılık çıkaran fonksiyonları bulunmalıdır. Poisson dağılımına ilişkin olasılık çıkaran fonksiyonu (7.11)'deki eşitlikte,

$$g(z; l) = \exp(-l + lz) \quad (7.51)$$

7. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILAN DİĞER İSTATİSTİKSEL KARMA DAĞILIM MODELİ VE BİLEŞİK DAĞILIM MODELİ

Ayça Hatice TÜRKAN

olarak bulunmuştu. Bu olasılık çıkarar fonksiyonu genelleştirilmiş dağılım tanımından faydalanarak ışığı altında $g_1(z)$, binom dağılımının olasılık çıkarar fonksiyonunu ise $g_2(z)$ olarak adlandırılır. Binom dağılımı için olasılık çıkarar fonksiyonunu,

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} a^{n-x} b^x \quad (7.52)$$

eşitliği yardımıyla,

$$g_2(z) = E(z^x) = \sum_{x=0}^n z^x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (q + pz)^n \quad (7.53)$$

olarak elde edilir. Böylece poisson binom dağılımının olasılık çıkarar fonksiyonu,

$$g_1(g_2(z)) = g_1(q + pz)^n = \exp(-l + l(q + pz)^n) \quad (7.54)$$

olarak bulunur.

8. YÜK-MUKAVEMET GÜVENİLİRLİK MODELLERİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

8. YÜK – MUKAVEMET GÜVENİLİRLİK MODELLERİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Bölümde iki yük mukavemet güvenilirlik modellerinde kullanılan bazı istatistiksel dağılımlar incelenecektir.

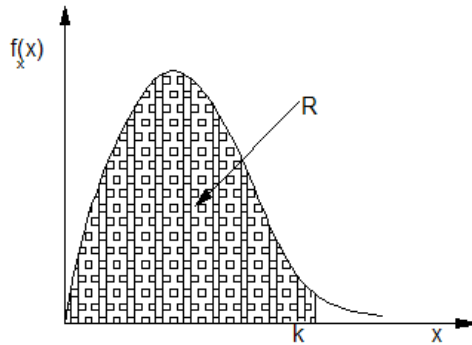
8.1. Yük – Mukavemet Güvenilirlik Modeli I

Birçok güvenilirlik mühendisliği uygulamasında en uç koşullar altında bir ekipmanın parçasının ya da kendisinin sağ kalım yeteneği bilgisine gereksinim duyulur. Mekanik bir yapı için, yapının darbe ya da titreşim gibi dış yüklenmelere veya iç gerilime dayanma olasılığı ile ilgilenilir. Elektronik bir ekipmanın, güç sağlayıcısının voltaj sıçramalarıyla veya sinyal girdilerindeki önemli değişikliklere dayanma olasılığıyla ilgilenilebilir.

Sistem mukavemeti bilinen bir k sabiti, sisteme uygulanan yük ise $f_x(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu, $F_x(x)$ dağılım fonksiyonlu X rastgele değişkeni olsun. Böylece sistem güvenilirliği, yükün mukavemeti aşmaması olasılığıdır. Bu da,

$$R = \int_0^k f_x(x) dx = F_x(k) \quad (8.1)$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu duruma ilişkin güvenilirlik Şekil 8.1. ile gösterilmiştir.



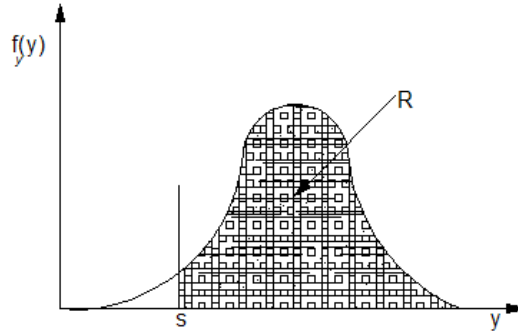
Şekil 8.1. Rastgele yük ve sabit mukavemet durumunda bileşen güvenilirliği (Ebeling 1997).

8. YÜK-MUKAVEMET GÜVENİLİRLİK MODELLERİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

Sisteme uygulanan yük bilinen bir s sabiti, sistemin mukavemeti ise $f_y(y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu, $F_y(y)$ dağılım fonksiyonlu Y rastgele değişkeni olsun. Böylece sistem güvenilirliği, mukavemetin sabit yükü aşması olasılığıdır. Bu da,

$$R = P(Y \geq s) = \int_s^{\infty} f_y(y) dy = 1 - F_y(s) \quad (8.2)$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu duruma ilişkin güvenilirlik Şekil 8.2. ile gösterilmiştir.



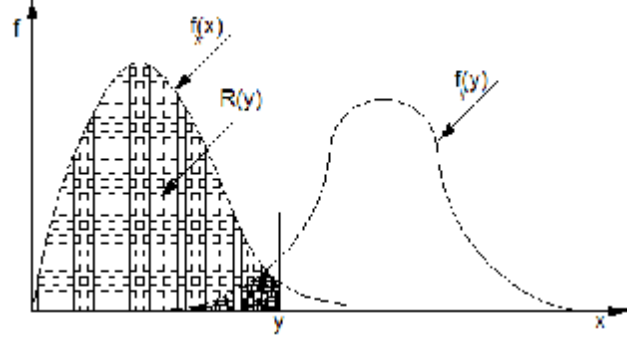
Şekil 8.2. Rastgele mukavemet ve sabit yük durumunda bileşen güvenilirliği (Ebeling 1997).

Genel olarak mukavemet Y ve yük X rastgeledir. İlki herhangi bir teknolojik işlemin bünyesel değişkenliği nedeniyle rastgeledir. İkincisi ise doğal bir yolda rastgeledir. Çünkü yük çevresel faktörlere bağlıdır. Y ve X rastgele değişkenleri sırasıyla $f_x(x)$ ve $f_y(y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu, $F_x(x)$ ve $F_y(y)$ dağılım fonksiyonlu olsun. Sistemin başarılı bir biçimde çalışma olasılığı yani güvenilirliği araştırılsın. Burada güvenilirlik, yükün mukavemetten az olması olasılığı ya da mukavemetin yükten büyük olması olasılığıdır. Bu durumda güvenilirlik,

$$\begin{aligned} R = P(X \leq Y) &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^y f_x(x) dx \right] f_y(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} F_x(y) f_y(y) dy \end{aligned} \quad (8.3)$$

8. YÜK-MUKAVEMET GÜVENİLİRLİK MODELLERİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

şeklinde yazılabilir. Bu duruma ilişkin güvenilirlik Şekil 8.3. ile gösterilmiştir.



Şekil 8.3. Rastgele mukavemet ve rastgele yük durumunda bileşen güvenilirliği (Ebeling 1997).

X ve Y 'nin bağımsız rastgele değişkenler olduklarından $Z = Y - X$ olacak şekilde yeni bir rastgele değişken tanımlanabilir. Böylece güvenilirlik için yukardaki gösterimlere ek olarak,

$$R = P(Y \geq X) = P(Y - X \geq 0) = P(Z \geq 0) \quad (8.4)$$

ifadesi de kullanılabilir (Gnedenko ve Ushakov 1995, Ebeling 1997).

8.1.1. Bazı Özel Durumlar

Yük-mukavemet güvenilirlik modelleri için kullanılan bazı istatistiksel dağılım modelleri incelenecektir.

8.1.1.1. Normal Dağılım Durumu

X rastgele değişkeni; m_x ortalamalı ve s_x standart sapmalı normal dağılıma sahip olsun. Y rastgele değişkeni ise m_y ortalamalı ve s_y standart sapmalı normal dağılıma sahip olsun. $Z = X - Y$ rastgele değişkeni düşünölsün. Bu rastgele değişkenin ortalaması,

$$E(Z) = m_y - m_x \quad (8.5)$$

8. YÜK-MUKAVEMET GÜVENİLİRLİK MODELLERİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

ve standart sapması,

$$s_z = \sqrt{s_y^2 + s_x^2} \quad (8.6)$$

şeklindedir. Böylece güvenilirlik,

$$\begin{aligned} R = P(Z \geq 0) &= P\left\{ \frac{Z - m_z}{s_z} \geq \frac{-(m_y - m_x)}{\sqrt{s_y^2 + s_x^2}} \right\} \\ &= P\left\{ \frac{Z - m_z}{s_z} \leq \frac{(m_y - m_x)}{\sqrt{s_y^2 + s_x^2}} \right\} = \Phi\left(\frac{m_y - m_x}{\sqrt{s_y^2 + s_x^2}} \right) \end{aligned} \quad (8.7)$$

olarak bulunur (Gnedenko ve Ushakov 1995, Ebeling 1997).

8.1.1.2. Üstel Dağılım Durumu

X ve Y sırasıyla m_x ve m_y ortalamalı üstel dağılıma sahip rastgele değişkenler olsun. Bu durumda güvenilirlik,

$$\begin{aligned} R &= \int_0^\infty \left[\int_0^y \frac{1}{m_x} \exp\left(-\frac{x}{m_x}\right) dx \right] \frac{1}{m_y} \exp\left(-\frac{y}{m_y}\right) dy \\ &= \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{m_x}\right) \right] \frac{1}{m_y} \exp\left(-\frac{y}{m_y}\right) dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{m_y} \exp\left(-\frac{y}{m_y}\right) dy - \int_0^\infty \frac{1}{m_y} \exp\left[-y\left(\frac{1}{m_x} + \frac{1}{m_y}\right)\right] dy \\ &= 1 - \frac{1}{m_y} \frac{\exp\left[-y\left(\frac{1}{m_x} + \frac{1}{m_y}\right)\right]}{-\left(\frac{1}{m_x} + \frac{1}{m_y}\right)} \Bigg|_0^\infty \end{aligned}$$

8. YÜK-MUKAVEMET GÜVENİLİRLİK MODELLERİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

$$R = 1 - \frac{1}{m_y} \left(\frac{m_x m_y}{m_x + m_y} \right) = 1 - \frac{m_x}{m_x + m_y} = \frac{1}{1 + \frac{m_x}{m_y}} \quad (8.8)$$

olarak elde edilir (Gnedenko ve Ushakov 1995, Ebeling 1997).

8.1.1.3. Üstel ve Normal Dağılım Durumu

X , $\frac{1}{l}$ ortalamalı üstel dağılıma sahip rastgele değişken olsun. Y rastgele değişkeni ise m_y ortalamalı ve s_y standart sapmalı normal dağılıma sahip olsun. Böylece güvenilirlik,

$$\begin{aligned} R &= \int_0^{\infty} \frac{1}{s_y \sqrt{2p}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y - m_y}{s_y} \right)^2 \right] [1 - \exp(-ly)] dy \\ &= \frac{1}{s_y \sqrt{2p}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y - m_y}{s_y} \right)^2 \right] dy \\ &\quad - \frac{1}{s_y \sqrt{2p}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y - m_y}{s_y} \right)^2 \right] \exp(-ly) dy \quad (8.9) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada,

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{y - m_y}{s_y} \right)^2 - ly = -\frac{1}{2s_y^2} \left[(y - m_y + l s_y^2)^2 + 2 l m_y s_y^2 - (l s_y^2)^2 \right] \quad (8.10)$$

eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} R &= 1 - \Phi \left(-\frac{m_y}{s_y} \right) - \\ &\quad \frac{1}{s_y \sqrt{2p}} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2s_y^2} \left[(y - m_y + l s_y^2)^2 + 2 l m_y s_y^2 - l^2 s_y^4 \right] \right\} dy \quad (8.11) \end{aligned}$$

8. YÜK-MUKAVEMET GÜVENİLİRLİK MODELLERİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

elde edilir. $t = \frac{1}{s_y} (y - m_y + l s_y^2)$ ve $s_y dt = dy$ olacak şekilde değişken değiştirme yapıldığında,

$$\begin{aligned} R &= 1 - \Phi\left(-\frac{m_y}{s_y}\right) - \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{\frac{-m_y + l s_y^2}{s_y}}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}(2m_y l - l^2 s_y^2)\right] dt \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{m_y}{s_y}\right) - \exp\left[-\frac{1}{2}(2m_y l - l^2 s_y^2)\right] \left[1 - \Phi\left(-\frac{m_y - l s_y^2}{s_y}\right)\right] \end{aligned} \quad (8.12)$$

elde edilir. Mukavemet m_y , 0 noktasından çok uzakta bulunmalıdır. Bunun anlamı $m_y l \gg 1$ dir. Bu durumda,

$$R = 1 - \exp\left[-\frac{1}{2}(2m_y l - l^2 s_y^2)\right] \left[1 - \Phi\left(-\frac{m_y - l s_y^2}{s_y}\right)\right] \quad (8.13)$$

olur. Ayrıca $l s_y$ küçüktür. Bu da R için

$$R \approx 1 - \exp\left[-\frac{1}{2}(2m_y l - l^2 s_y^2)\right] \quad (8.14)$$

ifadesini yazmaya olanak sağlar (Gnedenko ve Ushakov 1995).

8.2. Yük – Mukavemet Güvenilirlik Modeli II

Nadarajah ve Kotz (2006a), Y rastgele değişkeni ile rastgele mukavemeti ve X rastgele değişkeni ile rastgele yükü gösterdikleri çalışmalarında bileşen güvenilirlik ölçümü olarak,

$$R = P(X < Y) \quad (8.15)$$

formunu kullanmışlardır.

8. YÜK-MUKAVEMET GÜVENİLİRLİK MODELLERİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ **Ayça Hatice TÜRKAN**

Katı yakıtlı roketlerin yapısı incelensin. Bir katı yakıtlı roket, temel olarak roketin dış kabuğunu oluşturan yanma odası, hareket ettirici yakıt yükü, yakıtı ateşleyici aygıt ve yanmayı durdurucu bir aygıttan oluşur. Hareket ettirici yakıtın yanması, roketin arkasındaki bir memeden hızla püskürtülen gazları oluşturur. Gazlar hızlı üretildiğinden, yanma odasında yüksek basınçlarla birikirler; bu yüzden, yanma odası bu basınca dayanacak sağlamlıkta olmalıdır. Yanma odası genellikle çelikten, titanyumdan ya da alüminyum alaşımlardan yapılır. Küçük roketlerde yanma odası bazen plastikte güçlendirilmiş cam elyafından yapılır. Yanma odasının tasarımı önemlidir. Örneğin, yanma olayının yanlış hesaplanmasıyla çok fazla basınç doğarsa, oda patlayıp roketi parçalayabilir. Burada, Y rastgele değişkeni ile yanma odasının sağlamlığı, X rastgele değişkeni ile yanma odasındaki maksimum basınç ifade edilir (Bilim ve Yaşam Ansiklopedisi 2007).

Rulman yatakları dönel bir şaft ekseni için yük desteği sağlamak üzere kullanılan monteli bir yatak biçimidir. Yatak mahfazası şaft eksenine paralel bir yüzeye monte edilir. Uygun yatak seçimi; şaft boyutuna, radyal ve itme yükü gereksinimlerine göre yapılır. Rulman yatakları, şaftı desteklemek için tasarlanmıştır. Montaj yüzeyi, şaft ekseni ile paralel bir hat üzerindedir. Ünitenin tabanında veya ayaklarındaki uzatılmış civata delikleri rulman yatağının ayarlanmasına ve kolay montajına olanak sağlar. Orijinal veya değiştirilen yatak seçilirken, rulman yataklarının bazı ebatları ve ölçümleri kritik önem taşır. Şaft çapı, yatak ünitesinin karşılık gelen uygun delik boyutları ile eşleştirilir. Şaftta uygun boyutta ünite seçilirse yatak şaft üzerinde ve pozisyonu içerisine kolaylıkla kayacak ve kilitleme aygıtı vasıtası ile sabitlenmeye hazır hale gelecektir. Burada, Y rastgele değişkeni ile rulman yatağının çapı, X rastgele değişkeni ile şaftın çapı gösterilirse güvenilirlik, ara kesişim noktası olmadan şaftın mil yatağına uymasıdır (Emniyet Rulman 2005).

X ve Y , iki elektronik cihazın yaşam sürelerini gösterebilir. Bu durumda yukarıda tanımlanan R , bir cihazın diğerinden daha önce başarısız olması olasılığıdır. Nadarajah ve Kotz (2006a), (X,Y) 'nin f ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlu iki değişkenli üstel dağılıma sahip olduğunu varsaymışlar ve güvenilirliği,

8. YÜK-MUKAVEMET GÜVENİLİRLİK MODELLERİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

$$R = \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} f(x, y) dy dx \quad (8.16)$$

olarak hesaplamışlardır.

8.2.1. Freund'un İki Değişkenli Üstel Dağılım Durumu

Freund (1961), iki değişkenli üstel dağılıma ilişkin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu, $x > 0$, $y > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1 > 0$, ve $b_2 > 0$ olmak üzere

$$f(x, y) = \begin{cases} a_1 b_2 \exp\{-b_2 y - (a_1 + a_2 - b_2)x\} & x < y \\ a_2 b_1 \exp\{-b_1 x - (a_1 + a_2 - b_1)y\} & y < x \end{cases} \quad (8.17)$$

eşitliği ile vermiştir. Bu dağılımda X ve Y , iki bileşene ait yaşam sürelerini göstermektedir. X ve Y yaşam süreleri, sırasıyla a_1 ve a_2 parametrelili bağımsız üstel dağılıma sahiptir. Burada bileşenler arasında bir bağımlılık vardır. Bir bileşenin başarısızlığı diğer bileşenin yaşam süresi dağılımının parametresini değiştirmektedir. Birinci bileşen başarısızlığa uğrarsa Y için parametre b_2 olarak, ikinci bileşen başarısızlığa uğrarsa X için parametre b_1 olarak değişmektedir. X ve Y için marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları üstel değildir. Bu fonksiyonlar karma üstel dağılım formundadır. X ve Y için marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla,

$$f(x) = \frac{1}{a_1 + a_2 - b_1} [(a_1 - b_1)(a_1 + a_2) \exp\{-(a_1 + a_2)x\} + b_1 a_2 \exp(-b_1 x)] \quad (8.18)$$

$$f(y) = \frac{1}{a_1 + a_2 - b_2} [(a_2 - b_2)(a_1 + a_2) \exp\{-(a_1 + a_2)y\} + b_2 a_1 \exp(-b_2 y)] \quad (8.19)$$

eşitlikleri ile verilir. Güvenilirlik,

$$R = a_1 b_2 \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \exp\{-b_2 y - (a_1 + a_2 - b_2)x\} dy dx$$

8. YÜK-MUKAVEMET GÜVENİLİRLİK MODELLERİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

$$R = a_1 \int_0^{\infty} \exp\{-(a_1 + a_2)x\} dx = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \quad (8.20)$$

şeklindedir (Nadarajah ve Kotz 2006a).

8.2.2. Marshall ve Olkin'in İki Değişkenli Üstel Dağılım Durumu

Marshall ve Olkin (1967), iki değişkenli üstel dağılıma ilişkin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu, $x > 0$, $y > 0$, $q_1 > 0$, $q_2 > 0$ ve $q_3 > 0$ olmak üzere

$$f(x, y) = \begin{cases} q_1(q_2 + q_3) \exp\{-q_1x - (q_2 + q_3)y\} & x < y \\ q_2(q_1 + q_3) \exp\{-q_2y - (q_1 + q_3)x\} & y < x \\ q_3 \exp\{-(q_1 + q_2 + q_3)y\} & x = y \end{cases} \quad (8.21)$$

eşitliği ile vermişlerdir. Bu dağılımda X ve Y , iki bileşene ait yaşam sürelerini göstermektedir. Bu bileşenler üç tip şoka maruz kalmaktadırlar. Bu şoklar q_1 , q_2 ve q_3 parametrelili Poisson süreçleri tarafından yönetilmektedir. Şokun sadece 1. bileşene uygulanmasına ilişkin parametre q_1 , şokun sadece 2. bileşene uygulanmasına ilişkin parametre q_2 ve şokun 1. ve 2. bileşenlere uygulanmasına ilişkin parametre q_3 'dür. X ve Y 'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla $q_1 + q_3$ ve $q_2 + q_3$ parametrelili üstel dağılımlardır. Güvenilirlik,

$$\begin{aligned} R &= q_1(q_2 + q_3) \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \exp\{-q_1x - (q_2 + q_3)y\} dy dx \\ &= q_1 \int_0^{\infty} \exp\{-(q_1 + q_2 + q_3)x\} dx \\ &= \frac{q_1}{q_1 + q_2 + q_3} \end{aligned} \quad (8.22)$$

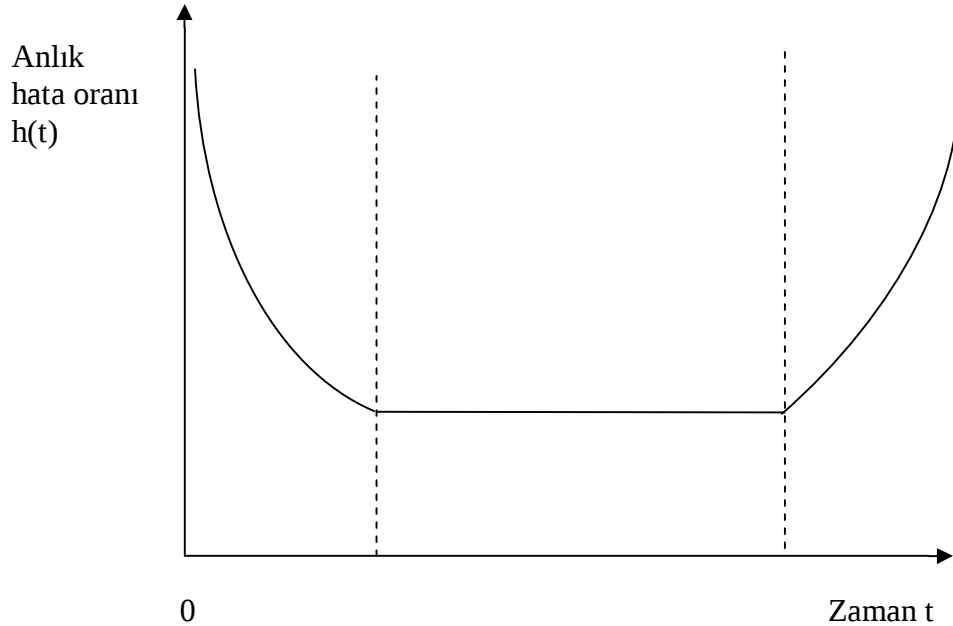
şeklindedir (Nadarajah ve Kotz 2006a).

9. DONANIM VE YAZILIM GÜVENİLİRLİĞİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Günümüzde her alanda kullanımı yaygınlaşan bilgisayarlar, donanım ve yazılım elemanlarının iş birliği ile çalışırlar. Bilgisayarın gözle görülüp elle dokunulabildiği yapı elemanları topluluğu, donanımı oluşturur. Donanım elemanlarına örnek olarak klavye, monitör ve sabit disk verilebilir. Bilgisayarda kullanılan her türlü program ise yazılım olarak adlandırılır. Yazılım gözle görülmez, bilgisayarda çalıştırıldığı zaman giriş ve çıkış birimlerinde görülebilir. Yazılımlar değişik ortamlara kaydedilmiş, bilgisayarın çalışmasını yönlendiren, verilerin özel amaçlar doğrultusunda değerlendirilmesini sağlayan sayısal kodlardır (Kesici ve Kocabaş 2006).

9.1. Donanım Güvenilirliği için Küvet Eğrisi

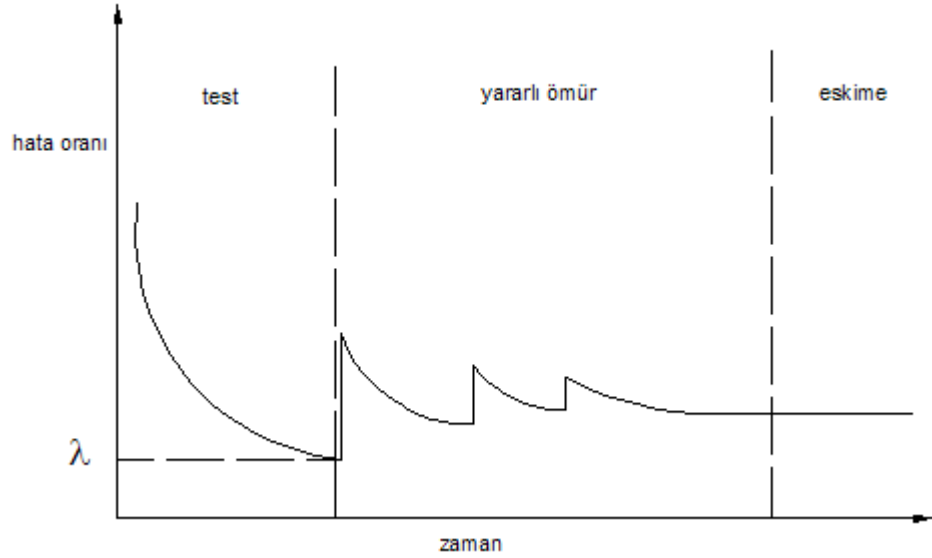
Donanım güvenilirliği için küvet eğrisi, Şekil 9.1’de verilmiştir. Bu şekil ile ilgili ayrıntılı açıklamalar daha önce 3. bölümde verilmişti.



Şekil 9.1. Donanım güvenilirliği için küvet eğrisi (Pan 1999).

9.2. Yazılım Güvenilirliği için Küvet Eğrisi

Yazılım güvenilirliği için olası eğri ise Şekil 9.2’de verilmiştir. Donanım ve yazılım eğrileri arasında iki temel farklılık vardır. Son safhaları incelendiğinde yazılımın donanım gibi artan hata oranına sahip olmadığı görülür. Bu safhada yazılım eskimeye başlar. Hata oranı değişmez. İkinci farklılık yararlı ömür safhasındadır. Bu safhada ise yazılım hata oranında güçlü artışlar olur. Hata oranı seviyeleri aşamalıdır. Bunun nedeni hatalar/kusurlar bulunur ve düzeltilir. Bu nedenle de artış sonrası sabitleme durumu vardır.



Şekil 9.2. Yazılım güvenilirliği için küvet eğrisi (Pan 1999).

9.3. Donanım Yazılım İlişkisi

Donanım ve yazılım özellikleri karşılaştırmalı olarak Tablo 9.1’de verilmiştir.

9. DONANIM VE YAZILIM GÜVENİLİRLİĞİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

Tablo 9.1. Donanım ve Yazılım Özellikleri Karşılaştırılması (Ireson ve ark. 1996)

Donanım	Yazılım
Başarısızlıklar (failures), tasarım, üretimin, kullanım ve bakımın eksiklikleri sonucu olabilir.	Başarısızlıklar, öncelikle tasarım kusurlarından (faults) kaynaklanır. Tamirler, başarısızlıklara neden olan koşullara karşı sağlamlık kazanmak açısından tasarımın düzenlenmesiyle gerçekleştirilir.
Başarısızlıklar, yıpranmaya bağlı olarak gerçekleşebilir. Bazen başarısızlıklar gerçekleşmeden önce uyarı gelir.	Yıpranma olgusu söz konusu değildir. Yazılım başarısızlıkları uyarı vermeden gerçekleşir.
Tamir, ekipmanları daha güvenilir hale getirebilir.	Tamir durumu yoktur. Tek çözüm yeniden programlamadır.
Güvenilirlik, hata oranının azaldığı, arttığı ya da sabit olduğu yaşam periyodlarına bağlıdır.	Güvenilirlik zamana bağımlı değildir. Güvenilirlik gelişimi zamandan etkilenebilir fakat bu işleme süresi ilişkisi değildir. Daha doğrusu kusurları (errors) bulmak ve düzeltmek yüzünden kodun güvenilirlik gelişiminin bir fonksiyonudur.
Güvenilirlik zamanla ilişkilidir. Başarısızlıklar, çalışma (veya depolama) süresinin bir fonksiyonu olarak gerçekleşir.	Güvenilirlik zamanla ilişkili değildir. Başarısızlıklar, bir program basamağında ya da yolunda başarısızlığa neden olan kusurlar içerildiğinde gerçekleşir.
Güvenilirlik sıcaklık, titreşim, nem gibi çevresel faktörlere bağlıdır.	Dış çevre program girdilerini etkilemediği sürece güvenilirliği etkilemez.
Güvenilirlik tasarım, kullanım ve çevresel stres faktörleri bilgilerinden teoride tahmin edilebilir.	Güvenilirlik herhangi bir fiziksel esastan tahmin edilemez. Çünkü tamamen tasarım aşamasında insan faktörüne bağlıdır.
Güvenilirlik genellikle fazlalık sağlanarak geliştirilir.	Paralel program yolları özdeş ise fazlalık güvenilirliği geliştirmez. Örneğin, bir yol başarısızlığa uğrarsa, diğer yollarda da aynı sorun ortaya çıkacaktır. Yani, özdeş yazılım bileşenleri kullanımı yazılım güvenilirliğini geliştirmez. Ancak herbiri farklı takım tarafından yazılan ve kontrol edilen farklı

9. DONANIM VE YAZILIM GÜVENİLİRLİĞİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

	programlara sahip yedek durumunda paralel yollar, güvenilirliği geliştirir.
• Başarısızlıklar, bir örnekte bir sistemin bileşenlerinde gerçekleşebilir. Güvenilirlik kritik listeleri, yüksek riskteki cihazları tanımlamak için kullanışlıdır.	• Ayrık komutların analizinden başarısızlıklar nadiren tahmin edilir. Kusurlar, programın içinde rastgele var olmaktadır. Herhangi bir komut kusurlu olabilir. Güvenilirlik kritik listeleri uygun/isabetli değildir.
• Donanım ara yüzleri görseldir.	• Yazılım arayüzleri görselden çok kavramsaldır.
• Donanım ürünleri, temel yapı taşı olarak standart bileşenleri kullanırlar.	• Yazılımda standart parça yoktur. Standartlaşmış mantık yapıları vardır. Yani kısıtlı miktarda yazılımın yeniden kullanımı söz konusudur.

Donanım ve yazılım birbirinden farklı oldukları halde donanım güvenilirlik modellemesinde kullanılan matematiğe, yazılım güvenilirlik modellemesinde de başvurulur.

Donanım ve yazılım güvenilirlik mühendisliği birçok kavram ve birçok matematiksel ve istatistiksel anlatıma sahiptir. Bir bileşenin ya da bir sistemin gelecekteki davranışını tahmin etmek amacıyla geçmiş hata verilerini modellemek için matematik ve istatistiğe başvurulur. Donanım güvenilirlik modellemesinde kullanılan temel istatistiksel dağılımlar üstel, gama, Weibull, binom, Poisson, normal, lognormal, Bayes ve Markov dağılımlarını içerir. Bu dağılımları kullanmak için sistemlerin hatalarından toplanan veriler, maksimum likelihood veya en küçük kareler tahminleri gibi yöntemlerle uyumlu olmalıdır. Uyumun iyiliği, ki-kare gibi istatistiksel yöntemler kullanılarak doğrulanmalıdır. Elektronik ve mekanik sistemler, zamanla kötüleşme eğilimindedir. Bu güvenilirlik dağılımları değişken olarak zamana bağlıdır (Wallace ve Coleman 2001).

9.4. Yazılım Güvenilirlik Mühendisliğinin Önemli Kavramları

Yazılım güvenilirliği belirli bir zamanda, tanımlı çevresel koşullar altında, yazılımın başarısızlığa uğramaksızın işlevini yerine getirme olasılığı olarak tanımlanır.

Bazı girdi verileri için çıktı sonuçları doğru değilse, yazılım kusur (fault) içeriyor denir. Kusur her zaman yazılımda bulunabilir ve yazılımın hatalı kısmının düzeltilmesiyle ortadan kaldırılır. Genel olarak kusur yazılımda herhangi bir probleme neden olan kısımlardır.

Çıktı yanlış olduğunda yazılım başarısızlığı gözlenir. Bir başarısızlık yazılım kusuru veya insan hatası nedeniyle ortaya çıkar. Bir başarısızlık gözlemlendiğinde, yazılımda bir ya da daha çok kusur bulunabilir. Kusurlar düzeltildiğinde, aynı başarısızlık tekrar gerçekleşmez (Zhang 1999).

Kodta veya kullanıcı davranışı da dahil olmak üzere çevresel koşullarda değişiklik yapılmadığı sürece yazılımın güvenilirliği sabit kalır. Herbir başarısızlık sonrasında, başarısızlığa neden olan kusur tespit edilir ve düzeltilir. Sonra yazılımın güvenilirliği zamanla artar. Bu durum test fazları ya da safhaları için böyledir. t zamanına kadar belirlenen başarısızlık sayısı $M(t)$ ile gösterilir. $M(t)$ 'nin davranışını anlatan modeller yazılım güvenilirlik büyüme modelleri (software reliability growth models-SRGMs) olarak adlandırılır. Başarısızlık zamanları $t_1, t_2, \dots$ veya başarısızlıklar arası zamanlar $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$ testlerle elde edilerek modellerin parametreleri bulunabilir. Ortalama değer fonksiyonu $m(t)$, t anına kadar belirlenen başarısızlıkların beklenen değerini göstermektedir. Ortalama değer fonksiyonunun zamana göre türevi, $\frac{dm(t)}{dt}$, başarısızlık yoğunluğu olup $l(t)$ ile gösterilir. Bu da $\Delta t \rightarrow 0$ iken $[t; t + \Delta t)$ aralığında belirlenen başarısızlıkların beklenen değerinin limitini gösterir.

Başarısızlık yoğunluğu risk oranı ile karıştırılmamalıdır. $(i-1)$. başarısızlık t_{i-1} anında gerçekleşmiş iken i . başarısızlığın $t_{i-1} + \Delta t$ anında belirlenmesi için olasılık yoğunluğu, risk oranıdır. Risk oranı, $z(\Delta t/t_{i-1})$ ile gösterilsin. Sağ kalım analizinde bileşenlerin risk oranı genellikle $l(t)$ ile gösterilir. Bir çok araştırmacı program risk oranını, hata oranı veya başarısızlık yoğunluğu olarak adlandırır. Aslında program risk oranı $z(\Delta t/t_{i-1})$, yazılım güvenilirlik büyüme modelleri için $t_{i-1} + \Delta t$ anında başarısızlık yoğunluğuna eşittir. Tüm kusurlar işleyiş sıklığı

bakımından eş değerse başarısızlığa kadar gereken zaman aynı olasılık yoğunluğuna $f_a(t)$ sahiptir. Herbir kusur için dağılım fonksiyonu

$$F_a(t) = \int_0^t f_a(x) dx \quad (9.1)$$

olmak üzere kusur risk oranı,

$$z_a(t) = \frac{f_a(t)}{1 - F_a(t)} \quad (9.2)$$

şeklindeir. Böylece herbir kusur risk oranı, henüz işleyiş durumunda olmayan özel bir kusurun bir başarısızlığa neden olması olasılığı için bir ölçümdür (Grottke 2001).

9.5. Yazılım Güvenilirlik Modelleri

Yazılım güvenilirlik mühendisliği, yazılım güvenilirliği için bir ölçü sağlamak amacıyla hata verilerine dayalı olarak yazılım sisteminin bir modelini üretir. Modellere ilişkin eşitlikler, en küçük kareler ya da maksimum likelihood tahmini gibi yöntemler kullanılarak tahmin edilecek parametrelere sahiptir. Belirli bir veri kümesi için seçilen modelin doğruluğunu kanıtlamak, model fonksiyonlarının çalışılmasını ve yinelemeyi gerektirir. Bu sonuçlardan, kalan hata sayısı tahmini ve bir sonraki hata gerçekleşinceye kadar geçecek süre tahmini yapılabilir. Ayrıca tahminler için güven aralıkları da hesaplanabilir (Wallace ve Coleman 2001).

Bazı popüler modellerin algoritmaları Tablo 9.2’de verilmiştir. Tablo 9.2’de a : tahmin edilecek bir parametreyi; f : orantılı sabiti, herhangi bir kusurun tüm programa katkısını veya herbir kusur için risk oranını; N : programdaki başlangıç kusurlarının sayısını; t_i : i . ve $(i-1)$. başarısızlıklar arasındaki süreyi; D : programın başlangıç hata oranını; k : geometrik fonksiyonun parametresini; p : bir başarısızlık gerçekleştiğinde başarısızlığın ortadan kaldırılma olasılığını göstermektedir (Wallace ve Coleman 2001).

9. DONANIM VE YAZILIM GÜVENİLİRLİĞİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ **Ayça Hatice TÜRKAN**

Tablo 9.2. Yazılım güvenilirlik hata oranı modelleri (Wallace ve Coleman 2001).

Model adı		
Jelinski-Moranda	$f(t_i)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu	$f[N - (i - 1)]\exp(-f(N - (i - 1))t_i)$
	$R(t_i) = 1 - F(t_i)$ güvenilirlik fonksiyonu	$\exp(-f(N - i + 1)t_i)$
	$l(t_i)$ risk fonksiyonu	$f[N - (i - 1)]$
Schick-Wolverton	$f(t_i)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu	$f[N - (i - 1)]t_i \exp\left(-\frac{f[N - (i - 1)]t_i^2}{2}\right)$
	$R(t_i) = 1 - F(t_i)$ güvenilirlik fonksiyonu	$\exp\left(-\frac{f[N - (i - 1)]t_i^2}{2}\right)$
	$l(t_i)$ risk fonksiyonu	$f[N - (i - 1)]t_i$
J-M Geometric	$f(t_i)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu	$Dk^{i-1} \exp(-Dk^{i-1}t_i)$
	$R(t_i) = 1 - F(t_i)$ güvenilirlik fonksiyonu	$\exp(-Dk^{i-1}t_i)$
	$l(t_i)$ risk fonksiyonu	$\exp(-Dk^{i-1})$
Goel-Okumoto	$f(t_i)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu	$f[N - p(i - 1)]\exp(-f[N - p(i - 1)]t_i)$
	$R(t_i) = 1 - F(t_i)$ güvenilirlik fonksiyonu	$\exp(-f[N - p(i - 1)]t_i)$
	$l(t_i)$ risk fonksiyonu	$f[N - p(i - 1)]$
Littlewood-Verrall	$f(t_i)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu	$a \left[\frac{x(i)}{t_i + x(i)} \right]^a \left[\frac{1}{t_i + x(i)} \right]$
	$R(t_i) = 1 - F(t_i)$ güvenilirlik fonksiyonu	$\int_{t_i}^{\infty} \left\{ a \left[\frac{x(i)}{s + x(i)} \right]^a \left[\frac{1}{s + x(i)} \right] \right\} ds$
	$l(t_i)$ risk fonksiyonu	$\frac{a}{t_i + x(i)}$
Weibull	$f(t_i)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu	$\frac{b(t-g)^{b-1}}{q^b} \exp\left(-\left(\frac{t-g}{q}\right)^b\right)$
	$R(t_i) = 1 - F(t_i)$ güvenilirlik fonksiyonu	$\exp\left(-\left(\frac{t-g}{q}\right)^b\right)$
	$l(t_i)$ risk fonksiyonu	$\left(\frac{b(t-g)^{b-1}}{q^b}\right)$

9. DONANIM VE YAZILIM GÜVENİLİRLİĞİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

Homojen olmayan Poisson süreci (non-homogeneous Poisson process- NHPP), yazılım güvenilirlik analizinde, kusur belirleme sürecini (fault detection process) tanımlamak için kullanılır.

$\{N(t), t \geq 0\}$, t anına kadar birikimli başarısızlık sayısını gösterebilir. $N(t)$, $m(t)$ ortalama değer fonksiyonu ile Poisson dağılımına sahipse, sayma süreci $\{N(t), t \geq 0\}$, $l(t)$ yoğunluk fonksiyonu ile homojen olmayan Poisson sürecidir.

$$P\{N(t) = k\} = \frac{\exp(-m(t))m^k(t)}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.3)$$

Burada $m(t) = E[N(t)]$ dir. Yani, ortalama değer fonksiyonu birikimli başarısızlıkların beklenen değeridir. Yazılım güvenilirliği, $R(x/t)$ t anında son başarısızlığın gerçekleştiği verilmişken, $(t, t+x)$ zaman aralığında yazılım başarısızlığı gerçekleşmemesi olasılığıdır.

$$R(x/t) = \exp[-(m(t+x) - m(t))] \quad (9.4)$$

şeklinde yazılır. $t = 0$ iken $R(x/0) = \exp(-m(x))$ ve $t = \infty$ iken $R(x/\infty) = 1$ dir.

Homojen olmayan Poisson süreci modelleri, başarısızlık yoğunluğunun, artan kusur içeriği (residual fault content) ile orantılı olduğunu varsayar. Homojen olmayan Poisson süreci yazılım güvenilirlik büyüme modellerinin (software reliability growth models/SRGMs) genel sınıfı,

$$\frac{dm(t)}{dt} = b(t)[a(t) - m(t)] \quad (9.5)$$

diferansiyel denkleminin çözümü ile elde edilir. $a(t)$ ve $b(t)$ fonksiyonlarının sabit olması, Goel-Okumoto NHPP modeli olarak bilinir (Goel ve Okumoto 1979). $a(t)$ 'nin sabit olması, hata ayıklama (debugging process) esnasında yeni kusurun dahil olmadığı anlamına gelir. Sabit $b(t)$, başarısızlık yoğunluk fonksiyonunun $l(t)$ artık kusurların (remaining faults) sayısı ile orantılı olduğunu ifade eder. (9.5)'deki diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$m(t) = \exp[-B(t)] \left[m_0 + \int_0^t a(t) b(t) \exp(B(t)) dt \right] \quad (9.6)$$

şeklindedir (Pham ve ark. 1999). Burada, $B(t) = \int_0^t b(t) dt$ ve $m(t_0) = m_0$ dır. Hata ayıklama sürecinin başlangıç zamanı t_0 ile gösterilir. Birçok NHPP modeli (9.6)'daki eşitlik ile verilen genel modelin özel bir durumu olarak düşünülebilir. Artan $a(t)$ fonksiyonu, artan toplam kusur sayısını belirtir. Bu da kusurlu hata ayıklama (imperfect debugging) durumunu yansıtır.

Diğer bir model olarak kusurlu hata ayıklama ve öğrenme modelinin (model with imperfect debugging and learning) varsayımları:

- i. zaman bağımlı S biçimli kusur tespit fonksiyonu
 - ii. artan zaman bağımlı kusur içerik fonksiyonu
- şeklindedir.

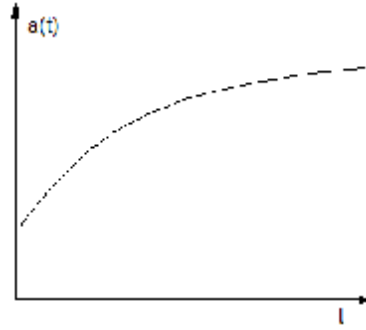
Bu modelde, kusurlu hata ayıklama ifadesi ile anlatılmak istenen, kusurların hata ayıklama safhası esnasında da dahil olabildiğidir. Model, kusur tespit oranı fonksiyonu $b(t)$ 'nin, azalmayan S biçimli eğri olduğunu varsayar (Ohba 1984, Ohba ve Yamada 1984). $a(t)$ ve $b(t)$ sırasıyla

$$a(t) = c + a(1 - \exp(-at)) \quad (9.7)$$

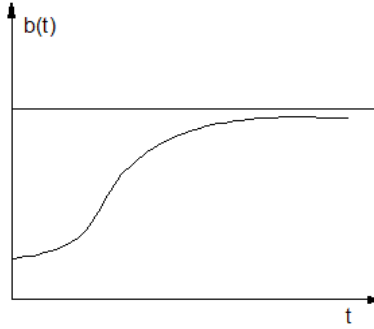
$$b(t) = \frac{b}{1 + b \exp(-bt)} \quad (9.8)$$

şeklindedir. Burada, $a = a(0)$ testten önce yazılımda bulunan başlangıç kusurlarının toplam sayısı için parametredir. $b(0) = \frac{b}{1+b}$ başlangıç kusur tespit oranıdır. Burada toplam kusur içerik fonksiyonu $a(t)$ azalmayan bir fonksiyondur ve zamana göre üstel olarak artar. Bunun anlamı, başlangıçta yazılıma çok sayıda kusur dahil olabilir. Test devam ederken başlangıç oranı (introduction rate) azalır. Test safhasının başlangıcında, çok sayıda kusur dahil edilir. Belirli bir zaman sonra, geliştirici

yazılım hakkında daha çok şey öğrenir ve daha az kusur dahil olur. Bu yüzden c , yazılımda başlangıç kusur sayısı olarak yorumlanabilir ve a kusur başlangıç oranıdır. Kusur tespit oranı fonksiyonu $b(t)$, artık sabit değildir. Fakat dönüm S-şekilli model (inflection S-shaped model) ile azalmayan bir fonksiyondur. Şekil 9.4'te görüldüğü gibi, testin başlangıcında kusur tespit oranı yavaşça artar. Çünkü kontrolcüler yazılım hakkında az bilgiye sahiptir. Belirli bir zaman sonrasında bilgileri artar ve kusur tespiti hızlı oranda artar. Fakat testin sonunda kusur tespit oranı yavaşlar. Çünkü artık kusurların çoğu yazılımdan kaldırılmıştır.



Şekil 9.3. Kusur içerik fonksiyonu grafiği (Zhang 1999).



Şekil 9.4. Kusur tespit oranı fonksiyonu grafiği (Zhang 1999).

(9.7) ve (9.8)'deki sırasıyla $a(t)$ ve $b(t)$ eşitlikleri $m(0)=0$ ile (9.6)'daki eşitlikte yerine konursa ortalama değer fonksiyonu,

$$m(t) = \frac{1}{1 + b \exp(-bt)} \left[(c + a) \left(1 - \exp(-bt) \right) - \left(\frac{ab}{b-a} \right) \left(\exp(-at) - \exp(-bt) \right) \right] \quad (9.9)$$

olarak elde edilir (Zhang 1999).

t test anında her bir kusur için kusur tespit oranı ise

$$d(t) = \frac{dm(t)}{dt} \frac{1}{a - m(t)} \quad (9.10)$$

şeklindedir (Huang ve ark. 2003).

Günümüzde yazılım güvenilirlik araştırmalarında genel tahmin modellerini geliştirmek oldukça önemlidir. Bu amaçla, Li ve ark. (2006), yazılım güvenilirlik tahmini için yazılım güvenilirlik modellerinin hiyerarşik bir karmasını (hierarchical mixture of software reliability models-HMSRM) önermişlerdir. Bu önerileri uzmanların hiyerarşik karmaları (hierarchical mixtures of experts/HME) yapısı için bir örnek oluşturur. HMSRM’de yazılım güvenilirlik modelleri, uzmanlar olarak kullanılır. Li ve ark. (2006), HMSRM’nin güvenilirlik tahmini için geleceği parlak bir yöntem olduğu sonucuna varmışlardır.

Yazılım sisteminde karma dağılım kullanımına da rastlanmaktadır. Modüller farklı şirket grupları tarafından yazılmış olabilir. Karma dağılımda herbir bileşen yoğunluğu farklı bir şirket grubundan sağlanmış modüle aittir. Karma oranları ise şirket gruplarının modül katkı oranlarıdır (Trivedi 2006).

9.5.1. Jelinski Moranda Modeli

Bu model ilk güvenilirlik modellerinden biridir. Üstel sıra istatistik model (exponential order statistics model) sınıfına aittir (Ahuja ve ark. 2003). Sıra istatistik problemi şöyle açıklanır. Ürün $N \geq 0$ olacak şekilde bilinmeyen N sayıda kusur içersin. i . kusur ürün işlerken ilk kez D_i anında gözlemlensin. Ürün $T = 0$ anında işleme konsun ve ürünün işlemleri sabit $T > 0$ anına kadar gözlemlensin. Gözlenen kusurların anında rapor edildiği varsayılmaktadır. T zamanına kadar rapor edilen R sayıdaki kusura ilişkin rapor zamanları $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_R$ olacak şekilde ilişkilidir. Böylece $T_1, \dots, T_R$ rastgele değişkenleri $D_1, \dots, D_N$ rastgele değişkenlerinin ilk R sıra istatistiğidir. Burada $D_1, \dots, D_N$ rastgele değişkenlerinin her birinin bilinmeyen $l > 0$ oran parametresiyle üstel dağılıma sahip, bağımsız ve özdeş dağılan rastgele

değişkenler olduğu varsayılmaktadır. Bu varsayım nedeniyle bu problem üstel sıra istatistik problemi olarak bilinir. Bu problem ilk kez Jelinski ve Moranda (1972) tarafından yazılım güvenilirlik sorunları için bir model olarak ileri sürülmüştür. Genellikle Jelinski-Moranda olarak söz edilir (Finkelstein ve ark. 1999). Modelin varsayımları aşağıda verilmiştir.

1. Testin başlangıcında yazılım kodu sabit fakat bilinmeyen u_0 sayıda kusur içerir.
2. Herbir kusur anlık başarısızlığa neden olma olasılığı bakımından eşdeğer tehlikelidir. Herbir kusurun risk oranı zamanla değişmez sabit f değerindedir.
3. Başarısızlıklar ilişkili değildir. Başarısızlıklar arası zamanlar $(\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_N)$ bağımsızdır.
4. Bir başarısızlığa neden olan kusur yazılıma yeni bir kusur dahil edilmeden ortadan kaldırılır.

$(i-1)$. kusur ortadan kaldırıldıktan sonra programın risk oranı, bir kusurun risk oranıyla $(z_a(t) = f)$ birlikte yazılımda kalan kusurların sayısı ile orantılıdır.

$$z(\Delta t / t_{i-1}) = f[u_0 - M(t_{i-1})] = f[u_0 - (i-1)] \quad (9.11)$$

Bu model için başarısızlık yoğunluk fonksiyonu, başlangıç kusur sayısı ve tek bir kusurun işleyişine kadar gerekli zamanın olasılık yoğunluğu $f_a(t)$ çarpımına eşittir. Yani,

$$\frac{dm(t)}{dt} = u_0 f_a(t) = u_0 f \exp(-ft) \quad (9.12)$$

şeklindedir. Böylece ortalama değer fonksiyonu,

$$m(t) = u_0 [1 - \exp(-ft)] \quad (9.13)$$

olarak verilir. (9.12) ve (9.13) eşitlikleri yardımıyla başarısızlık yoğunluğu,

$$\frac{dm(t)}{dt} = f[u_0 - m(t)] \quad (9.14)$$

9. DONANIM VE YAZILIM GÜVENİLİRLİĞİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ Ayça Hatice TÜRKAN

olarak elde edilir. (9.14)'deki eşitliğe göre, t anında yazılımın başarısızlık yoğunluğu yazılımda kalan kusurların beklenen değeri ile orantılıdır (Grottke 2001).

9.5.2. Schick-Wolverton Modeli

Bir varsayım dışında Jelinski Moranda modeli ile aynı varsayımlara sahiptir. Bu modelde risk fonksiyonu, kalan kusur sayısı ve son başarısızlıktan bu yana geçen zaman ile orantılıdır (Kadifeli 1989). Bu modele ilişkin risk fonksiyonu,

$$l(t_i) = f[N - (i - 1)]t_i \quad (9.15)$$

şeklindedir. Burada, f : orantılı bir sabit, herhangi bir kusurun tüm programa katkısı ya da sabit kusur risk oranını; N : programdaki başlangıç kusurlarının sayısını; t_i : i . ve $(i - 1)$. başarısızlıklar arasındaki süreyi göstermektedir.

9.5.3. Goel-Okumoto Modeli

Goel ve Okumoto (1979) tarafından önerilen modelin varsayımları aşağıdaki gibidir.

1. t anında belirlenen başarısızlıkların sayısı Poisson dağılımına sahiptir. Ortalama değer fonksiyonunun sınır koşulları,

$$m(0) = 0 \quad (9.16)$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = N < \infty \quad (9.17)$$

şeklindedir.

2. $\Delta t \rightarrow 0$ iken $(t, t + \Delta t]$ aralığında gerçekleşen yazılım başarısızlıklarının sayısı, tespit edilmemiş kusurların beklenen değeri $(N - m(t))$ ile orantılıdır. Orantı sabiti f 'dir. $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ olacak şekilde zamanların sonlu bir koleksiyonu için,

$(0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n-1}, t_n)$ ayrık aralıkların herbirinde gerçekleşen başarısızlıkların sayısı birbirinden bağımsızdır.

3. Ne zaman bir başarısızlık gerçekleşse, o başarısızlığa neden olan kusur yazılıma yeni bir kusur dahil etmeden anlık olarak ortadan kaldırılır.

Herbir kusur bir başarısızlığa neden olduktan hemen sonra tamir söz konusu olduğundan, testin başlangıcında yazılım başlangıç kusurlarının sayısı, sonsuz miktarda test sonrasında gerçekleşmiş olacak başarısızlıkların sayısına eşittir. 1. varsayıma göre $M(\infty)$, N ortalaması ile Poisson dağılımına sahiptir. Bu nedenle, N başlangıç yazılım kusurlarının beklenen değeridir. 2. varsayımdan, t anında başarısızlık yoğunluğu,

$$\frac{dm(t)}{dt} = f[N - m(t)] \quad (9.18)$$

eşitliği ile verilir. Jelinski-Moranda modelinde olduğu gibi başarısızlık yoğunluğu, tek bir kusurun sabit risk oranı ile yazılımda kalan kusurların beklenen değerinin çarpımına eşittir. Bununla birlikte N 'in kendisi bir beklenen değerdir (Grottke 2001).

9.5.4. Bayes Yazılım Güvenilirlik Büyüme Modelleri

Daha önce incelenen modellerde parametrelerin sabit ama bilinmediği düşünülmekteydi. Bayes modellerinde veri yokluğu durumunda parametrelerin sabit ve bilinmeyen değerde olmadığı düşünülür. Fakat önsel dağılıma (prior distribution) sahip olduğu düşünülür. Parametre vektörü q 'nın önsel yoğunluğu $p(q)$ ile gösterilsin. Bilinmeyen fakat gözlenen veri (t anında belirlenen başarısızlık sayısı veya başarısızlık zamanları gibi) y olsun. Bu gözlenen veriler yazılım güvenilirlik büyüme modeli yoluyla parametrelere bağlıdır. Belirli bir parametre değeri için veri, $p(y/q)$ koşullu dağılımına sahiptir. Parametre değerleri bilinmediğinden, y 'nin önsel dağılımı, olası q değerleri üzerinde y ve q 'nın ortak dağılımının integrali alındığında,

$$p(y) = \int p(y, q) dq = \int p(y/q) p(q) dq \quad (9.19)$$

eşitliği ile verilir. Bir yazılım güvenilirlik büyüme modeli verilmişken, model parametrelerinin dağılımına ilişkin varsayım sağlanıyorsa, miktarların dağılımı hesaplanabilir. Örneğin t_1 anında gözlenen başarısızlıkların sayısının dağılımı dolayısıyla onun beklenen değeri elde edilebilir. Yani hiçbir başarısızlık gözlenmeden bu bilgilere ulaşılabilir.

Model parametrelerinin önsel dağılımı, yazılımın yapısal bilgiler ya da deneyimler sonucu oluşturulur. Ancak bu gerçeğe çelişebilir. Veriler kullanılabilirse, model parametrelerinin varsayılan dağılımları; gözlenen değer verilmiş iken model parametrelerinin

$$p(q/y) = \frac{p(q, y)}{p(y)} = \frac{p(y/q) p(q)}{\int p(y/q) p(q) dq} \quad (9.20)$$

koşullu dağılımının hesabı ile güncelleştirilebilir. Görüldüğü gibi, $p(q/y)$ sonsal dağılımını (posterior distribution) elde etmek için sadece $p(y/q)$ ve $p(q)$ gerekmektedir. Örneğin t_1 anında ilk başarısızlık gözlendikten sonra $y = \{t_1\}$ ve q 'nın önsel dağılımı (9.20)'deki eşitlik kullanılarak $p(q/y)$ hesaplanabilir. $t_1 + \Delta t$ anında belirlenen başarısızlık sayısı dağılımı tahmin edilebilir. Genel olarak, bir sonraki başarısızlık gerçekleşene kadar geçecek zaman gibi bilinmeyen gözlenebilen $\tilde{y}$ 'nın sonsal tahmin dağılımı (posterior predictive distribution),

$$\begin{aligned} p(\tilde{y}/y) &= \int p(\tilde{y}, q/y) dq = \int p(\tilde{y}/q, y) p(q/y) dq \\ &= \int p(\tilde{y}/q) p(q/y) dq \end{aligned} \quad (9.21)$$

eşitliği ile verilir (Grottke 2001).

9.5.4.1. Littlewood ve Verrall Bayes Modeli

Bu model başarısızlıklar arası zamana dayalı, Bayes yazılım güvenilirlik büyüme modelidir. Başarısızlıklar arası zamanın üstel dağılıma sahip olduğu varsayılır. Öyleki, dağılımın parametresi, gama dağılımına sahip bir rastgele değişkendir (Wagner ve Fischer 2005). Modelin varsayımları aşağıdaki gibidir.

1. Başarısızlıklar arasındaki başarılı uygulama zamanları $i = 1, \dots, n$ olmak üzere x_i parametreleri ile bağımsız üstel rastgele değişkenlerdir. Yani ilgili olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(t_i / x_i) = x_i \exp(-x_i t_i) \quad (9.22)$$

şeklindedir (Wu ???).

2. Bağımsız rastgele değişkenlerin bir silsilesi olan x_i 'lerin herbiri a ve $\Psi(i)$ parametreleri ile gama dağılımına sahiptir. Burada a şekil parametresi iken, $\Psi(i)$ yayılım parametresidir. Buna göre x_i için olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(x_i) = \frac{[\Psi(i)]^a x_i^{a-1}}{\Gamma(a)} \exp(-\Psi(i)x_i) \quad (9.23)$$

şeklindedir. 1. ve 2. varsayımlardan,

$$f(t_i) = \int_0^\infty f(t_i / x_i) g(x_i) dx_i = a \frac{[\Psi(i)]^a}{[t_i + \Psi(i)]^{a+1}} \quad (9.24)$$

yazılabilir. Ayrıca güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(t_i) = 1 - \int_0^{t_i} f(t) dt = \left[\frac{\Psi(i)}{t_i + \Psi(i)} \right]^a \quad (9.25)$$

şeklindedir (Wu ???).

9. DONANIM VE YAZILIM GÜVENİLİRLİĞİNDE KULLANILAN BAZI İSTATİSTİKSEL DAĞILIM MODELLERİ

Ayça Hatice TÜRKAN

3. $\Psi(i)$, artan bir fonksiyondur. Programcının deneyimini/tecrübesini ve görevin zorluğunu tanımlar. Bu modelde, $\Psi(i)$ için birinci dereceden ve ikinci dereceden formlar önerilmiştir (Wagner ve Fischer 2005). Bunlar sırasıyla

$$\Psi(i) = b_0 + b_1 i \quad (9.26)$$

ve

$$\Psi(i) = b_0 + b_1 i^2 \quad (9.27)$$

şeklindedir (Çetiner 2007).

10. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, güvenilirlik analizinde kullanılan tek değişkenli, iki değişkenli, karma, karıştırılmış, bileşik ve genelleştirilmiş istatistiksel dağılım modellerinin uygulama alanları ve özellikleri incelenmiştir. Güvenilirlik analizi problemine en uygun istatistiksel dağılımın belirlenmesi ele alınmış ve örneklerle açıklanmıştır.

Bu tez çalışmasından hareketle bundan sonra sistem güvenilirliği araştırmasında, sistem yaşam süresi dağılımı için güvenilirlik blok diyagramlarının oluşturulması, bu güvenilirlik blok diyagramları için olasılık yoğunluk fonksiyonlarının ve buna bağlı olarak güvenilirlik fonksiyonlarının ve risk fonksiyonlarının oluşturulması araştırılabilir. Ürün güvenilirliğini hesaplamak için farklı yaklaşımlarla daha iyi yöntemler geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

- AHUJA, S., MISHRA, G.S. and TYAGI, A.P. (2003). Jelinski – Moranda Model for Software Reliability Prediction and its G.A. based Optimised Simulation Trajectory. SSGRR 2003w L'Aquila, Italy, January 6-12, 2003. International Conference on Advances in Infrastructure for e-Electronic, e-Business, e-Education, e-Science, e-Medicine on the Internet. (<http://galeb.etf.bg.ac.yu/~vm/cd1/papers.html>)
- AKDENİZ, F. (2006). Olasılık ve İstatistik. Nobel Yayın Dağıtım. Adana.
- AL-RUZAIZA, A.S. and EL-GOHARY, A. (2007). A New Class of Positively Quadrant Dependent Bivariate Distributions with Pareto. International Mathematical Forum, 2, no. 26, 1259 – 1273.
- ANAND, A. and SOMANI, A.K. (1998). Hierarchical analysis of fault trees with dependencies, using decomposition, Proc. RAMS, Jan, 69-75.
- ANDREWS, J. D. (2001). The use of Not logic in fault tree analysis. Qual. Rel. Eng., vol. 17, 143-150.
- ANDREWS, J.D. and BEESON, S. (2003). Birnbaum's measure of component importance for noncoherent systems. IEEE Trans. Rel., vol. 52, no. 2, June, 213-219.
- ANDREWS, J.D. and DUNNETT, S. (2000a). Event tree analysis using binary decision diagrams. IEEE Trans. Rel., vol. R-49, no.2, June, 230-239.
- ANDREWS, J.D. and DUNNETT, S (2000b). Improving accuracy in event tree analysis, Proc. Foresight and Precaution, Proc. ESREL 2000, SARS and SRA-Europe Annual Conf., May.
- ANDREWS, J.D. and MOSS, T.R. (2002). Reliability and Risk Assessment. Second Edition. Professional Engineering Publishing Limited: London and Bury St Edmunds, UK. 540s.
- ARNOLD, B.C. (1968). Parameter Estimation for a Multivariate Exponential Distribution. Journal of the American Statistical Association, Vol. 63, No. 323. (Sep.), 848-852.

- BARLOW, R.E. and HUNTER, L.C. (1959). Mathematical models for system reliability, Sylvania Electronic Defense Labs., Rept. No. EDL-E35, Aug.
- BARLOW, R.E. and HUNTER, L.C. (1960). Mathematical models for system reliability, part II, The Sylvania Technologist, vol. 13, 55-65.
- BARLOW, R.E. and MARSHALL, A.W. (1964). Bounds for distributions with monotone hazard rate, I and II, Ann. Math. Stat., vol. 35, 1234-1274.
- BARLOW, R.E., MARSHALL, A.W. and PROSCHAN, F. (1963). Properties of probability distributions with monotone hazard rate, Ann. Math. Stat., vol. 34, 375-389.
- BARLOW, R. and PROSCHAN, F. (1965). Mathematical Theory of Reliability, Wiley, New York.
- BAZOVSKY, I.I. (1961). Reliability Theory and Practice, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- BEHBOODIAN, J. (1970). On a Mixture of Normal Distributions. Biometrika, Vol. 57, No. 1. (Apr.), 215-217.
- BELLMAN, R. and DREYFUS, S. (1958). Dynamic programming and reliability of multi-component devices", Operations Res., vol. 6, 200-206.
- BELYAEV, Y.K., DUGINA, T.N. and CHEPURIN, E.V. (1967). Computation of lower confidence limit for the complex system reliability. Eng. Cybernetics, no's 2 & 3.
- BENDELL, A. and ANSELL, J. (1984). The incoherency of multistate coherent system, Rel. Eng., vol. 8, 165-178.
- BENTLEY, J.P. (1993). An introduction to Reliability and Quality Engineering. Logman Scientific and Technical. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- BHARUCHA-REID, A.T. (1960). Elements of the Theory of Markov Processes and their Applications, McGraw-Hill, New York.
- BHATTACHARYA, C.G. (1967). A simple method of resolution of a distribution into Gaussian components. Biometrics, 23, 115-35.

- BİLİM ve YAŞAM (Çağdaş Bilim ve Teknoloji) Ansiklopedisi. / Uygulamalı Bilimler -Gelişim Yayınları: Cilt: 6 Sayfa : 79. ZAMAN YOLCULUĞUNU ARAŞTIRMA MERKEZİ (Time Travel Research Center). (2007). (<http://www.zamandayolculuk.com/cetinbal/katiryakmotor1.htm>)
- BIRNBAUM, Z.W. (1955). On a use of the Mann-Whitney Statistic, Proc. Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., University of California Press, Los Angeles, vol. 1, 13-17.
- BIRNBAUM, Z.W. (1969). On the importance of different components in multicomponent system, Multivariate Analysis, II, Academic Press, New York, 581-592.
- BIRNBAUM, Z.W. and ESARY, J.D. (1965). Modules of coherent binary systems", J. SIAM, vol. 13, 444-462.
- BIRNBAUM, Z.W., ESARY, J.D. and MARSHALL, A.W. (1966). Stochastic characterization of wear out for components and systems, Ann. Math. Stat., 37, 816-825.
- BIRNBAUM, Z.W., ESARY, J.D. and SAUNDERS, S.C. (1961). Multicomponent systems and structures and their reliability, Technometrics, vol. 3, Feb, 55-77.
- BIRNBAUM, Z.W. and SAUNDERS, S.C. (1958). A statistical model for life-length of materials. J. Amer. Stat. Assoc., Vol.53, No.281, 151-160.
- BLACKSTONE, E. H., NAFTEL, D. C. and TURNER, M. E. (1986) The decomposition of time-varying hazard into phases, each incorporating a separate stream of concomitant information. Am. Statist. Ass., 81, 615-624.
- BLACKWELL, D. (1948). A renewal theorem, Duke Math. J., vol. 15, 145-150.
- BLANTON, E. (1957). Reliability-Prediction technique for use in design of complex systems. IRE Natl. Convention Record, pt. 10, 68-79.
- BLANTON, H.E. (1958). Reliability-sensitivity- function analysis, Electronic Design, vol. 6, Feb.
- BLANTON, H.E. and JACOBS, R.M. (1962). A survey of techniques for analysis and prediction of equipment and reliability, IEEE Trans. Rel., July, 18-35.
- BLOCK, H. and SAVITS, T.H.(1976). The IRFA closure problem, Ann. Prob., 4, 1030-1032.

- BODIN, L.D. (1970). Approximation of system reliability using a modular decomposition, *Technometrics*, vol. 12, no. 2, 335-344.
- BOUTSIKAS, M.V. and KOUTRAS, M.V. (2000). Generalized reliability bounds for coherent structures, *J. of Applied Prob.*, vol. 37, 778-794.
- BRENDER, D.M. and TAINITER, M. (1961). A Markovian model for predicting the reliability of an electronic circuit from data on component drift and failure", *IRE Intl. Convention Record*, pt. 6, 230-241.
- BUCAR, T., NAGODE, M. and FAJDIGA, M. (2004). Reliability approximation using finite weibull mixture distributions. *Reliability Engineering & System Safety*. 84. 241-251.
- BUEHLER, R.J. (1957). Confidence intervals for the product of two binomial parameters, *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 52, 482-493.
- CAI, J. (1998). A Unified Study of Bounds and Asymptotic Estimates for Renewal Equations and Compound Distributions with Applications to Insurance Risk Analysis. A Thesis in the Department of Mathematics and Statistics. Presented in Partial Fulfilment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy at Concordia University Montreal, Quebec, Canada.
- CAMPBELL, N.R. (1941). The replacement of perishable members of a continually operating system. *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. 7, 110-130.
- CANTOR, A.B. and KNAPP, R.G. (1985). A Test of the Equality of Survival Distributions Based on Paired Observations from Conditionally Independent Exponential Distributions. *IEEE Transactions on Reliability*, 34, 342-346.
- CASSIE, R.M. (1954). Some uses of probability paper in the analysis of size frequency distributions. *Austral. J. of Marine and Freshwater Res.*, 5, 513-22.
- COUDERT, O. and MADRE, J.C. (1993). Fault tree analysis: 10^{20} prime implicants and beyond", *Proc. RAMS*, 240-245.
- COX, D.R. (1960). On the number of Renewals in a Random Interval," *Biometrika*, vol. 47, issue 3/4, Dec., 449-452.
- COX, D.R. (1962). *Renewal Theory*, Wiley, New York.
- COX, D.R. and ISHAM, V. (1980). *Point Processes*. Monographs on Statistics and Applied Probability 12. Chapman & Hall/CRC.

- COX, D.R. and SMITH, W.L. (1953). A direct proof of a fundamental theorem of renewal theory, *Skand. Aktuar.*, 36, 139-150.
- CRAMER, E. and KAMPS, U. (2000). Sequential k-out-of-n Systems. (<http://www.math.uni-oldenburg.de/preprints/get/source/Hb.pdf>, Feb.)
- ÇETİNER (2007). Where Learning Made Easy And Enjoyable... (www.drcetiner.org/file.php?file=/8/Reliability_Standards_/07chapter2.pdf)
- DANIELS, H.E. (1945). The statistical theory of the strength of bundles of threads, *Proc. Roy. Soc. London*, vol. 183, 405-435.
- DAVIS, D.J. (1952). An analysis of some failure data, *J.Amer. Stat. Assoc.*, vol. 47, 113-150.
- DOLOZZA, E. (1966). System states analysis and flowgraph diagrams in reliability. *IEEE Trans. Rel.*, R-15, 383-394
- DOOB, J.L. (1948). Renewal theory from the point of view of the theory of probability, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 63, 422-438.
- DOUGLAS, J.B. (1980). Analysis with Standard Contagious Distributions. *Statistical Distributions in Scientific Work: Volume 4*. International Co – operative Publishing House: Fairland, Maryland USA.
- DOYLE, S.A. and DUGAN, J.B. (1995). Dependability assessment using binary decision diagrams. *Proc. IEEE Int. Symp. Fault- Tolerant Computing, FTCS-25*, June.
- DRESTE, F.E. (1959). Statistics: Key to reliable military electronic design, *Military Electronics*, vol. 6, Mar., 4, 6, 8.
- DRESTE, F.E. (1960). Circuit design concepts for high reliability, *Proc. Natl. Symp. Rel. and Quality Ctrl.*, Jan 121-133.
- DUGAN, J.B., BAVUSO, S.J. and BOYD, M.A. (1992). Dynamic fault tree models for fault tolerant computer systems, *IEEE Trans. Rel.*, vol. 41, no. 3, Sept 363-377.
- DUGAN, J.B., BAVUSO, S.J. and BOYD, M. (1993). Fault trees and Markov models for reliability analysis of fault tolerant systems", *Rel. Eng. and System Safety*, vol. 39, 291-301.

- DUTUIT, Y. and RAUZY, A. (1996). A linear-time algorithm to find modules in fault trees, IEEE Trans. Rel., Sept.
- EBELING, C.E. (1997). An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering. McGraw-Hill International Editions. Electrical Engineering Series.
- ELSAYED, E.A. (1996). Reliability Engineering. Addison Wesley Longman, Inc.
- ELSAYED, E.A. and ZEBIB, A. (1979). A repairable multistate device, IEEE Trans. Rel., R-28, 81-82.
- EMNİYET RULMAN (2005)
(<http://www.emniyetrulman.com/Default.aspx?Type=Product&CategoryId=13>)
- ENGINEER'S EDGE (2007). Solutions By Design.
(http://www.engineersedge.com/probability_engineering/normal_gaussian_statistical_models.htm)
- EPSTEIN B. (1948). Application of the theory of extreme values in fracture problems, J. Amer. Stat. Assoc., vol. 43, 403-412.
- EPSTEIN, B. and SOBEL, M. (1953). Life testing, J. Amer. Stat. Assoc., vol. 48, no. 263, 486-502.
- EROL, H. (1991). Tek Değişkenli Dağılım Modelleri. Yüksek Lisans Tezi. Çukurova Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- ESARY, J.D. and PROSCHAN, F. (1963). Coherent structure of nonidentical components, Technometrics, no. 5, 191-209.
- EVANS, M., HASTINGS, N. and PEACOCK, B. (1993). Statical Distributions. Second Edition. A Wiley – Interscience Publication: John Wiley & Sons, Inc. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore. Printed in the United States of America. 170s.
- EVERITT, B.S. and HAND, D.J. (1981). Finite Mixture Distributions. London New York: Chapman and Hall. 143s.
- FELLER, W. (1941). On the integral equation of renewal theory, Ann. Math. Stat., vol. 12, 243-267.
- FELLER, W. (1949) Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 67, 98-119.

- FELLER, W. (1968). An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Volume 1. Third Edition. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc. New York, London, Sydney.
- FINKELSTEIN, M., TUCKER, H.G. and VEEH, J.A. (1999). Confidence Intervals for N in the Exponential Order Statistics Problem. Commun. Stat., Theory Methods 28, No.6, 1415-1433. (<http://zmath.impa.br/cgi-bin/zmen/ZMATH:en/quick.html?first=1&maxdocs=3&au=Veeh%2C+J&type=pdf&format=short>)
- FIRSTMAN, S.L. (1958). Monte Carlo models for estimating reliability: An exploratory analysis", The Rand Corp., Report no. RM2149, ASTIA Doc. No. AD213036, June.
- FLEHINGER, B.J. (1958). Reliability improvement through redundancy at various system levels, IBM J. of RnD, issue 2, 148-158.
- FRANTIK, R.O. (1954). The determination application and limitations of circuit reliability equations, Sandia Corp., report no. SC-3288(TR), April.
- FREUND, J.E. (1961). A Bivariate Extension of the Exponential Distribution. Journal of the American Statistical Association, Vol. 56, No. 296. (Dec.), 971-977.
- FRICKS, R.M. and TRIVEDI, K.S. (2003). Importance analysis with Markov Chains, Proc. Rel. and Main. Symp., 89-95.
- FU, J.C. and KOUTRAS, M.V. (1995). Reliability bounds for coherent structures with independent components, Stat. And Prob. Letters, vol. 22, 137-148.
- GATES, C.R. (1952). The reliability of redundant systems, JPL-California Inst. Of Tech. Pasadena, CA, Memo 20-76, Aug.
- GNEDENKO, B.V. (1964a). On spare duplication. Eng. Cybernetics, no. 4.
- GNEDENKO, B.V. (1964b). On duplication with renewal. Eng. Cybernetics, no. 5.
- GNEDENKO, B.V., BELYAEV, Y.K., and SOLOVYEV, A.D. (1969). Math. Methods in Reliability Theory, Academic Press, New York. (Please note that this book was published in 1965 in Russia)

- GNEDENKO, B., and USHAKOV, I. (1995). Probabilistic Reliability Engineering. Edited by James Falk: George Washington University. A Wiley – Interscience Publication: John Wiley & Sons, Inc. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore. 518s.
- GOEL, A.L. and OKUMOTO, K. (1979). Time-dependent error-detection rate model for software and other performance measures. IEEE Transactions on Reliability, Vol.28, 206-211.
- GORDON, R. (1957). Optimum component redundancy for maximum system reliability, Operations Res., vol. 5, 229-243.
- GREGOR, J. (1969). An algorithm for the decomposition of a distribution into Gaussian components. Biometrics, 25, 79-93.
- GROTTKE, M. (2001). Software Reliability Model Study. Forschungsbericht A.2 des Projekts PETS, Universität Erlangen-Nürnberg, Nürnberg.
(<http://www.grottke.de/publikationen.html>)
- GRUBBSTROM, R.W. and TANG, O. (2006). The moments and central moments of a compound distribution. European Journal of Operational Research 170 106–119.
- GUPTA, R.C. (2001). Reliability studies of bivariate distributions with pareto conditionals. Journal of Multivariate Analysis. 76, 214-225.
- HAAP, W.W. (1964). Application of flowgraph techniques to the solution of reliability problems, J. Physics of failure in Electronics, US Department of Commerce Office of Technical Services AD-434/329, 375-423.
- HAHN, G.J. and SHAPIRO, S.S. (1967). Statistical Models in Engineering. John Wiley & Sons, Inc. New York, Chichester, Brisbane, Toronto.
- HERD, G.R. (1959). Some statistical concepts and techniques for reliability analysis and prediction, Proc. Natl. Symp. Rel. and Quality Ctrl., Jan, 126-136.
- HOGG, R.V. and CRAIG, A.T. (1995). Introduction to Mathematical Statistics. Prentice-Hall, Inc.
- HOLTZMAN, C.W. and MARSHALL, JR., W.E. (1960). A new method of communication between engineering and mathematician aids system reliability prediction, Proc. Natl. Symp. Rel. And Quality Ctrl., Jan, 403-408.

- HUANG, C.Y., LYU, M.R. and KUO, S.Y. (2003). Unified Scheme of Some Nonhomogenous Poisson Process Models for Software Reliability Estimation. IEEE Transactions on Software Engineering, vol. 29, no. 3, March.
- HULTING, F.L. and ROBINSON, J.A. (1994). The reliability of a series system of repairable subsystems: a Bayesian approach, Naval Research Logistics, vol. 41, 483-506.
- HUSEBY, A.B. (1989). Domination Theory and the crapo beta-invariant, Networks, 19, 135-149.
- INAGAKI, T. and HENLEY, E.J. (1980). Probabilistic evaluations of prime implicants and top events for noncoherent systems, IEEE Trans. Rel., vol. R-29, no. 5, Dec. 361-367.
- IRESON, W.G., COOMBS, C.F. and MOSS, R.Y. (1996). Handbook of Reliability Engineering and Management. McGraw – Hill.
- JACKSON, P.S. (1983). On the s-importance of elements and prime implicants of noncoherent systems, IEEE Trans. Rel., vol. R-32, no. 1, Apr. 21-25.
- JELINSKI, Z. and MORANDA, P.B. (1972). Software reliability research, in: FREIBERGER, W. (Ed.) Statistical Computer Performance Evaluation, pp. 485-502 (New York, Academic Press).
- JENKINS, D.L. (1982). Reliability Modeling Using the Left-Truncated Logistic Distribution. A Dissertation by David Loyal Jenkins Submitted to the Graduate College of Texas A&M University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. Major Subject: Industrial Engineering.
- JENSEN, F. (1989). Component Failures Based on Flaw Distributions, Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, 91-95.
- JIANG, S. (1991). Mixed Weibull Distributions in Reliability Engineering-Statistical Models for the Lifetime of Units with Multiple Modes of Failure. A Dissertation Submitted to the Faculty of the Aerospace and Mechanical Engineering Department. In Partial Fulfilment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy with a Major in Mechanical Engineering In the Graduate College the University of Arizona.

- JOANES, D.N. (2000). MATH1730: Introduction to Statistics I. Handouts. The Department of Statistics. The University of Leeds.
- JOHNS, M.V. and LIEBERMAN, G.J. (1966). "An exact asymptotically efficient confidence bound for reliability in the case of the Weibull Distribution", *Technometrics*, vol. 8, 135-175.
- JOHNSON, N.L. ve KOTZ, S. (1972). *Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions*. John Wiley & Sons, Inc. New York, London, Sydney, Toronto.
- JOHNSON, N.L., KOTZ, S. and BALAKRISHNAN, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions. Volume1: Second Edition*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. A Wiley – Interscience Publication: John Wiley & Sons, Inc. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.
- JOHNSON, N.L., KOTZ, S. and BALAKRISHNAN, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions. Volume2: Second Edition*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. A Wiley – Interscience Publication: John Wiley & Sons, Inc. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.
- KADİFELİ, F. (1989). A Reliability Model for A Large-Scale Software System. Submitted to the Institute for Graduate Studies in Science and Engineering in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Computer Engineering, Boğaziçi University. (<http://www.kadifeli.com/fedon/>)
- KAMATH, A.R.R., KELLER, A.Z. and MOSS, T.R. (1978). "An Analysis of Transistor Failure Data," 5th Symposium on Reliability Technology, Bradford, September 1978.
- KAO, J.H.K. (1956). A new life-quality measure for electron tube, *IRE Trans. Rel. and Quality Ctrl.*, PGRQC- 7, 1-11.
- KAO, J.H.K. (1958). Computer methods for estimating Weibull parameters in reliability studies, *IRE Trans. Rel. And Quality Ctrl.*, PGRQC-13, 15-22.
- KAO, J.H.K. (1959). A Graphical Estimation of Mixed Weibull Parameters in Life Testing of Electron Tubes, *Technometrics*, Vol.1, 389-407.
- KAPADIA, A.S., CHAN, W. and MOYE, L. (2005). *Mathematical Statistics with Applications*. Chapman&Hall/CRC. Taylor&Francis Group.

- KAUFMANN, M.I. and KAUFMANN, R.A. (1960). Predicting reliability, Machine Design, Aug, 178-184.
- KECECİOĞLU, D.B. and SUN, F.B. (1994). "Mixed-Weibull Parameter Estimation for Burn-in Data Using the Bayesian Approach, " Microelectron. Reliab., Vol. 34, NO. 10, pp. 1657-1679, 1994.
- KECECİOĞLU, D. B. and WANG, W. (1998). Parameter estimation for mixed-weibull distribution. Proc. 44th Annual Reliability and Maintainability Symposium, Anaheim, pp. 247-252. (http://www.ame.arizona.edu/departments/docs/AE_REPORT_AND_APPENDICES_FINAL_june_14.pdf)
- KEILSON, J. and KOOHARIAN, A. (1960). On time dependent queuing processes, Ann. Math. Stat., vol. 31.
- KERSCHER III, W.J., BOOKER, J.M., BEMENT, T.R. and MEYER, M.A. (1998). Characterizing reliability in a product/process design-assurance program, Proc. RAMS, 105-112.
- KERSCHER III, W.J., BOOKER, J.M., MEYER, M.A. and SMITH, R.E. (2003). PREDICT: A case study, using fuzzy logic, Proc. RAMS, 188-195.
- KESİCİ, T. ve KOCABAŞ, Z. (2006). Bilgi ve İletişim Teknolojisi. M.E.B. Devlet Kitapları. Birinci baskı. Pelin Ofset-Ankara.
- KETTELLE, J.D.(1962). Least-cost allocation of reliability investment, Operations Res., vol. 10, no. 2.
- KLEINERMAN, M.M. and WEISS, G.H. (1954). On the reliability of networks, Proc. Natl. Electronics Conf., vol. 10, 128-136.
- KOLMOGOROV, A.N. (1945). A number of target hits by several shots and general principles of effectiveness of gunfire, Proc. Moscow Inst. Math., issues 12.
- KOTZ, S., BALAKRISHNAN, N. and JOHNSON, N.L. (2000). Continuous Multivariate Distributions. Volume1: Models and Applications: Second Edition Wiley Series in Probability and Statistics Applied Probability and Statistics Section. A Wiley – Interscience Publication: John Wiley & Sons, Inc. New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto.

- KOTZ, S. and SINGPURWALLA, N. D. (1999). On a bivariate distribution with exponential marginals. *Scandinavian Journal of Statistics*. Vol. 26. 451-464.
- LEFEBVRE, Y. (2003). Using equivalent failure rates to assess the unavailability of an ageing system, *Proc. Rel. and Main. Symp.*, 82-88.
- LI, S., YIN, Q., GUO, P. and LYU, M.R. (2006). A hierarchical mixture model for software reliability prediction. *Applied Mathematics and Computation*.
- LINDLEY, D.V. and SINGPURWALLA, N.D. (1986). Multivariate Distributions for the Life Lengths of Components of a System Sharing a Common Environment. *Journal of Applied Probability* 23, 418-431.
- LIPP, J.P. (1957). Topology of switching elements vs. reliability", *IRE Trans. Rel. and Quality Ctrl.*, vol. 10, June 21-33.
- LOTKA, A.J. (1939). A contribution to the theory of selfrenewing aggregates with special reference to industrial replacement. *Ann. Math. Stat.*, vol. 10, 1-25.
- MADANSKY, A. (1958). Uses of tolerance limits in missile evaluation, *Proc. Stat. Techniques in Missile Evaluation Symp.*, Aug.
- MARSEGUERRA, M., ZIO, E., AMMATURO, M. and FONTANA, V. (2003). Predicting reliability via neural networks, *Proc. RAMS*, Tampa, Florida, 196-201.
- MARSHALL, A.W. and OLKIN, I. (1967). A Multivariate Exponential Distribution. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 62, No. 317. (Mar.), 30-44.
- MARTZ, H.F. and DURAN, B.S. (1985). Comparison of three methods for calculating lower confidence limits on system reliability using component data, *IEEE Trans. Rel.*, vol. R- 34, no. 2.
- MARTZ, H.F. and WALLER, R.A. (1982). *Bayesian Reliability Analysis*, Wiley, New York.
- MATHWORKS (2007). Accelerating the pace of engineering and science. <http://www.mathworks.com/products/statistics/>
- MCLACHLAN, G. and PEEL, D. (2000). *Finite Mixture Models*. Wiley Series in Probability and Statistics Applied Probability and Statistics Section. A Wiley –

- Interscience Publication: John Wiley & Sons, Inc. New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto.
- MEDGYESSI, P. (1961). Decomposition of superpositions of distribution functions. Publishing house of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest.
- MEEKER, W. Q. and ESCOBAR, L. A. (1998). Statistical Methods for Reliability Data. John Wiley & Sons Inc. New York.
- MELTZER, S.A. (1965) Designing for reliability, IRE Trans. Rel. and Quality Ctrl., PGRQC-8, Sept, 36-43.
- MENDENHALL, W. and HADER, R.J. (1958). Estimation of Parameters of Mixed Exponentially Distributed Failure Time Distributions from Censored Life Test Data. Biometrika, Vol. 45, No. 3/4. Dec., 504-520.
- MINE, H. (1959). Reliability of physical system, IRE Trans. Information Theory, IT-S (Special Supplement), 138-150.
- MOIVRE, A. DE (1738). The Doctrine of Chances, 2nd ed. London: Woodfall.
- MOORE, E.F. and SHANNON, C.E. (1956). Reliable circuits using less reliable relays, J. of the Franklin Institute, vol. 262, 1956, Pt. I, 191-208, and Pt II, 281-297.
- MOSKOWITZ, F. and MCLEAN, J. (1956). Some reliability aspects of system design", IRE Trans. Rel. and Quality Ctrl., vol. 8, 7-35.
- MOSS, T.R. (2005). The Reliability Data Handbook. Professional Engineering Publishing Limited: London and Bury St Edmunds, UK. 287s.
- MOSTELLER, F., ROURKE, R.E. and THOMAS, JR., G.B. (1961). Probability with statistical applications, Addison-Wesley, Reading.
- NADARAJAH, S. and KOTZ, S. (2006a). Reliability for some Bivariate Exponential Distributions. Mathematical Problems in Engineering. Volume 2006, Article ID 41652, 1–14.
- NADARAJAH, S. and KOTZ, S. (2006b). Reliability models based on bivariate exponential distributions. Probabilistic Engineering Mechanics. 21. 338-351.
- NAGODE, M. and FAJDIGA, M. (2000). An improved algorithm for parameter estimation suitable for mixed weibull distributions. International Journal of Fatigue Volume 22, Issue 1, January, 75-80.

- NYLANDER, J.E. (1962). Statistical distributions in reliability, IRE Trans. Rel. and Quality Ctrl., RQC-11, July 43-53.
- OHBA, M. (1984). Software reliability analysis models, IBM Journal of Research Development, vol.28, 428-443.
- OHBA, M. and YAMADA, S. (1984). S-shaped software reliability growth models, Proc. 4th Int. Conf. Reliability and Maintainability, 430-436.
- OLTORIK, T.F. (1963). Reliability analysis using flowgraphs, Air Force Institute of Technology, USGRR Document, no. AD 420-047, Aug.
- OUHBI, B. and LIMNIOS, N. (1999). Estimation of kernel, availability and reliability of semi-Markov systems", Proc. Stat. and Prob. Methods in Rel.
- OWEN, W.J., SINHA, D. and CAPOZZOLI, M.H. (2000). A Paired-Data Analysis for a Lifetime Distribution. The American Statistician, November, Vol.54, No.4.
- PADGETT, W.J. and TSOKOS, C.P. (1979). Bayes Estimation of Reliability Using an Estimated Prior Distribution. Operations Research, Vol. 27, No. 6. (Nov. - Dec.), 1142-1157.
- PAN, J. (1999). Software Reliability - Dependable Embedded Systems. http://www.ece.cmu.edu/~koopman/des_s99/sw_reliability/
- PAPAZOGLU, I.A. (1998). Mathematical foundations of event trees. Rel. Eng. and System Safety, vol. 61, 169-183.
- PATIL, G.P., BOSWELL, M.T. and RATNAPARKHI M.V. (1984). Dictionary and Classified Bibliography of Statistical Distributions in Scientific Work. Volume 2. Continuous Univariate Models. Statistical Distributions in Scientific Work Volume 7. International Co – operative Publishing House: Fairland, Maryland USA.
- PATRA, K. and DEY, D. K. (1999). A multivariate mixture of weibull distributions in reliability modeling. Statistics and Probability Letters. 45. 225-235.
- PHAM, H., NORDMANN, L. and ZHANG, X. (1999). A General imperfect software debugging model with s-shaped fault detection rate, IEEE Transactions on Reliability, vol.48, no.2, 169-175.

- PHILIPSON, J.L. (1959). Operational reliability model for a reconnaissance system", IRE Natl. Convention Record, pt. 6, 79-88.
- POGOZHEV, I.B. (1964). Estimation of deviation of failure flow in multi-use equipment from Poisson process", Cybernetics in Service for Communism, vol. 2, Energiya, Moscow.
- PROSCHAN, F. and BRAY, T. (1965). Optimum redundancy under multiple constraints, Operations Res., vol. 13, no. 5.
- RAUSAND, M. (2005). Chapter 3 System Analysis Fault Tree Analysis.
(<http://www.ntnu.no/ross/srt/slides/fta.pdf>)
- REYNOLDS, F.H. and STEVENS, J.W. (1978). Semiconductor component Reliability in an Equipment Operating in Electromechanical Telephone Exchanges, 16th Annual Proceedings Reliability Physics Symposium, 7-13.
- ROSENBLATT, J.R. (1963). Confidence limits for the reliability of complex systems, Stat. Theory of Rel., University of Wisconsin Press, Madison, Wisconsin, 115-148.
- ROSENTHAL, A. (1980). Decomposition methods for fault tree analysis", IEEE Trans. Rel., vol. 43, June, 136-138.
- ROSS, S.M. (1972). Introduction to Probability Models with Optimization Applications, Academic Press, New York.
- ROSS, S.M. (1997). Introduction to Probability Models. Sixth Edition. Academic Press.
- RUEDA, A. and PAWLAK, M. (2004). Pioneers of the Reliability Theories of the Past 50 Years. The International Symposium on Product Quality & Integrity RAMS 2004 IEEE. 102-109.
(<http://ieeexplore.ieee.org/iel5/9034/28680/01285431.pdf>)
- SATYANARAYANA, A. and CHANG, M.K. (1983). Network reliability and the factoring theorem, Networks, 13, 107-120.
- SATYANARAYANA, A. and PRABHAKAR, A. (1978). New topological formula and rapid algorithm for reliability analysis of complex networks, IEEE Trans. Rel., R-27, 82-100.

- SHAW, M. (1987). Recognizing the Optimum Burn-In Period, Quality and Reliability Engineering International, Vol.3, 259-263.
- SHORTLE, J.F. and MENDEL, M.B. (2001). Physical foundations for lifetime distributions, Proc. System and Bayesian Rel., 257-266.
- SINGH, K.P. and SINCLAIR, R.A. (1972). Two-Distribution Method for Flood-Frequency Analysis, J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng., Vol.98, 29-43.
- SMITH, W.L. (1954). Asymptotic renewal theorems, Proc. Roy. Soc. Edin., A, 64, 9-48.
- SMITH, W.L. (1958). Renewal theory and its ramifications, J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, vol. 20, no. 2, 243-302.
- SMITH, W.L. (1959). On the cumulants of renewal processes," Biometrika, vol. 46, issue 1/2, June, 1-29.
- SOLOV'YEV, A.D. (1970a). Reliability and queueing theory: standby with rapid renewal. Eng. Cybernetics, no.1, 49-64.
- SOLOV'VEY, A.D. (1970b). Redundancy with fast repair. Eng. Cybernetics, no. 1.
- STATSOFT (2007). <http://www.statsoft.com/textbook/stdisfit.html#pareto>
- STECK, G.P. (1958). Upper confidence limits for the failure probability of complex networks, Sandia Corporation Research Report, SC-4133(TR).
- STITCH, M., JOHNSON, G.M., KIRK, B.P. and BRAUER, J.B. (1975). Microcircuit Accelerated Testing Using High Temperature Operation Tests, IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-24, 238-250.
- TAKÁCS, L. (1959). On a sojourn time problem in the theory of stochastic processes. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 93, issue 3, Dec.
- TALLIN, A.G. and PETRESHOCK, T. (1990). Modeling Loads for Steel Bridges, Transportation Research Record 1275, p. 23-26.
- TATE, R.F. (1959). Unbiased estimation: Functions of location and scale parameters, Ann. Math. Stat., vol. 30, no. 2, 341-366.
- THOMAN, D.R., BAIN, L.J. and ANTLE, C.E. (1970) Maximum Likelihood Estimation, Exact Confidence Intervals for Reliability, and Tolerance Limits in the Weibull Distribution, Technometrics, vol. 12, 363-371.

- THOMAS, E.A.C. (1966). Mathematical models for the clustered firing of single cortical neurones. *Brit. J. Math. Stat. Psychol.*, 19, 151-62.
- TILLMAN, F.A., CHING-LAI, H. and KUO, W. (1980). *Optimization of System Reliability*, Marcel Dekker, New York.
- TRIVEDI, K.S. (2006). *Probability and Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications*. Second Edition. Publisher-John Wiley&Sons. Chapter 5: Conditional Distribution and Expectation Dept. of Electrical&Computer Engineering.
- TSITMIDELIS, S., KOUTRAS, M.V. and ZISSIMOPOULOS, V. (2002). Evaluation of reliability bounds by genetic algorithm, *Proc. Math. Methods in Rel.*
- USHAKOV, I. (2000). "Reliability: past, present, future," *Recent Advances in Reliability Theory: Methodology, Practice, and Interface*; Birkhauser, Boston, 3-14.
- VLASSIS, N.A., PAPAKONSTANTINO, G. and TSANAKAS, P. (1999). Mixture Density Estimation Based on Maximum Likelihood and Sequential Test Statistics. *Neural Processing Letters* v.9 n.1, p.63–76. (<http://portal.acm.org/citation.cfm?id=373106#references>)
- WAGNER, S. and FISCHER, H. (2005). A Software Reliability Model Based on a Geometric Sequence of Failure Rates. Technical Report TUMI-0520, Institut für Informatik, Technische Universität München.
- WALLACE, D. and COLEMAN, C. (2001). *Hardware and Software Reliability: Application and Improvement of Software Reliability Models*. Software Assurance Technology Center, Report 323-08, NASA. (http://dissertations.ub.rug.nl/FILES/faculties/eco/2006/j.a.sassenburg/20_referenc.pdf)
- WATSON, G.S. and LEADBETTER, M.R. (1964). Hazard Analysis. I, *Biometrika*, vol. 51, June 175-184.
- WEIBULL. COM (1992-2006). On-line Reliability Engineering Resources for the Reliability Professional. (http://www.weibull.com/LifeDataWeb/the_reliability_function.htm)

- WEIBULL, W. (1939). A statistical theory of the strength of materials, Ing. VetenskapsAkad. Handl., no. 151, 293-297.
- WEIBULL, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability, J. Applied Mech., vol. 18, 293-297.
- WELDON, W.F.R. (1892). Certain correlated variations in Crangon vulgaris. Proceedings of the Royal Society of London 51, 2-21.
- WELDON, W.F.R. (1893). On certain correlated variations in Carcinus moenas. Proceedings of the Royal Society of London 54, 318-329.
- WIKIPEDIA (2007). The Free Encyclopedia. (http://en.wikipedia.org/wiki/Compound_Poisson_process)
- WU, P. (????). Software Reliability Models. Lab of Computer Science, ISCAS. Beijing, China. (<http://lcs.ios.ac.cn/~wp/doc/srm.ppt.pdf>)
- ZEHNA, P.W. (1966). Invariance of maximum likelihood estimators. Ann. Math. Statist. 37, 744.
- ZELEN, M. and DANNEMILLER, M.C. (1961). The robustness of life testing procedures derived from the exponential distribution, Technometrics, vol. 3, no. 1, 29-49.
- ZHANG, X. (1999). Software Reliability and Cost Models with Environmental Factors. A dissertation submitted to the Graduate School—New Brunswick Rutgers, The State University of New Jersey in partial fulfill to the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. Graduate Program in Industrial&Systems Engineering.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Adana’da doğdum. İlk öğretimimi Atatürk İlkokulunda tamamladım. Orta ve Lise öğretimimi İsmail Safa Özler Anadolu Lisesinde aldım. Bir yıl Almanca hazırlık eğitimi de dahil olmak üzere 7 yıl eğitim gördüğüm İsmail Safa Özler Anadolu Lisesinden 2000 yılında mezun oldum. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. Çukurova Üniversitesi Yabancı Diller Öğretimi Araştırma ve Uygulama Merkezinde bir yıl süreli İngilizce hazırlık eğitimi aldım. Dört yıllık Matematik Lisans eğitiminden sonra 2005 yılında mezun oldum. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans öğrenimine başladım.