

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI**

**$H^+(r)$ HİPERBOLOİD MODELİ ÜZERİNDEKİ SİRALLERİN
GEOMETRİSİ**

Feray İrem BATMACA YILMAZ

**Danışman
Prof. Dr. Mustafa KAZAZ**



MANİSA- 2022

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Feray İrem BATMACA YILMAZ



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	III
TEŞEKKÜR.....	IV
ÖZET.....	V
ABSTRACT.....	VI
1.GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Temel Kavramlar	3
2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Eğriler Teorisi ve Frenet Çatısı	6
2.3. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Yüzeyler Teorisi ve Darboux Çatısı	13
3.ARAŞTIRMA BULGULARI	18
3.1. $H^+(r)$ Hiperboloid Modeli Üzerinde $\alpha_\lambda(t)$ Spiral Eğrilerinin Frenet Çatısı	18
3.2. $H^+(r)$ Hiperboloid Modeli Üzerinde $\alpha_\lambda(t)$ Spiral Eğrilerinin Darboux Çatısı.....	23
4. SONUÇLAR	50
KAYNAKÇA.....	51
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

τ	Burulma fonksiyonu
$\{T, g, n\}$	Darboux çatısı
κ	Eğrilik fonksiyonu
$\{T, N, B\}$	Frenet çatısı
τ_g	Geodezik burulma
k_g	Geodezik eğrilik
H_0^2	Hiperbolik birim küre
$\wedge^2$	Işıksı koni
$\text{sgn}(f(x))$	İşaret fonksiyonu
S_1^2	Lorentziyen birim küre
$\langle, \rangle$	Minkowski iç çarpım
$\times$	Minkowski vektörel çarpım
k_n	Normal eğrilik
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^3$	3-boyutlu reel uzay
$\mathbb{R}_1^3$	3-boyutlu Minkowski Uzay
s	Yay uzunluğu parametresi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. 1. IR_1^3 Uzayında Vektörler.....	4
Şekil 2.3. 1. IR_1^3 Uzayında Birim Küreler.....	14
Şekil 3.1.1. $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$ için $H^+(r)$ Hiperboloid modeli yüzeyinin üzerinde yatan spiral eğrisi.....	34
Şekil 3.1.2. $\lambda = \sqrt{3}$ için $H^+(r)$ Hiperboloid modeli yüzeyinin üzerinde yatan spiral eğrisi.....	41
Şekil 3.1.3. $\lambda = 1$ için $H^+(r)$ Hiperboloid modeli yüzeyinin üzerinde yatan spiral eğrisi.....	48

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında vakit ayıran, çalışmalarına bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa KAZAZ'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam sırasında yardımlarını esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Burak ŞAHİNER ile Arş. Gör. Dr. Onur KAYA'ya teşekkürü borç bilirim.

Her zaman desteklerini hissettiğim hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan maddi ve manevi yanımda olan annem Fadime BATMACA, babam Güray BATMACA, kardeşim Beysat Anıl BATMACA ile eşim Selçuk YILMAZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Feray İrem BATMACA YILMAZ
Manisa, 2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

$H^+(r)$ HİPERBOLOİD MODELİ ÜZERİNDEKİ SİRALLERİN GEOMETRİSİ

Feray İrem BATMACA YILMAZ
Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

Bu tez çalışması 3-boyutlu Minkowski uzayında $H^+(r)$ Hiperboloid modeli üzerinde yatan spiraller üzerine bir çalışmadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Minkowski 3-uzayı ile ilgili gerekli temel kavramlar verilmiştir. Minkowski 3-uzayındaki vektörler, eğriler ve yüzeyler spacelike, timelike ve lightlike karakterine sahip olabilmektedir. r –yarıçaplı ve O merkezli timelike vektörlerin kümesi $H_0^{+2}(r)$ ile gösterilen hiperbolik küredir. $H_0^{+2}(r)$, Öklidyen anlamda iki kanatlı hiperboloid olup, pozitif kanadı $H^+(r)$ ile gösterilir. $H^+(r)$ spacelike yüzeyi üzerinde herhangi bir noktadaki teğet düzlem spacelike olacağından, bu yüzey üzerinde sadece spacelike eğriler mevcuttur. Böylece bu yüzey üzerindeki spiraller spacelike eğrilerdir.

Bu çalışmada, öncelikle $H^+(r)$ modeli üzerindeki spirallerin Frenet çatısı, Frenet türev formülleri, ani dönme vektörü hesaplanmıştır. İkinci olarak, bu eğrilerin Darboux çatısı, Darboux türev formülleri ve Darboux ani dönme vektörü elde edilmiştir. Frenet ve Darboux çatısı arasındaki ilişki incelenmiştir. Son olarak, eğrinin diferansiyel geometrik özellikleri incelenmiş ve Maple programı ile grafikleri çizilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Darboux Çatısı, Frenet Çatısı, Minkowski 3-uzayı, Spacelike eğriler, Spacelike yüzeyler.

2022, 61 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

THE GEOMETRY OF SPIRALS ON THE HYPERBOLOID MODEL $H^+(r)$

Feray İrem BATMACA YILMAZ

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

This thesis is a study on spirals on the Hyperboloid model $H^+(r)$ in 3-dimensional Minkowski space. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, some necessary basic concepts about Minkowski 3-space are given. Vectors, curves and surfaces in Minkowski 3-space may have spacelike, timelike and lightlike characters. The set of timelike vectors r – radius and with center O is the hyperbolic sphere $H_0^{+2}(r)$. In Euclidean case, $H_0^{+2}(r)$ is a hyperboloid of two sheets and its positive side is denoted with $H^+(r)$. Since tangent plane at any point on the spacelike surface $H^+(r)$ is spacelike, only spacelike curves exist on this surface. Therefore, the spirals on this surface are spacelike curves.

In this study, firstly, the Frenet frame, the Frenet derivative formulas, and the instantaneous rotation vector of the spirals on the $H^+(r)$ model were calculated. Secondly, the Darboux frame, the Darboux derivative formulas and the Darboux instantaneous rotation vector of these curves are obtained. The relationship between the Frenet and Darboux frames is investigated. Finally, the differential geometric properties of the curve were investigated and their graphs were drawn with the Maple program.

Keywords: Darboux frame, Frenet frame, Minkowski 3-space, Spacelike curves, Spacelike surfaces.

2022, 61 pages

1.GİRİŞ

3-boyutlu reel uzay IR^3 için 1847 yılında Frenet ve 1851'de ise Serret birbirinden habersiz olarak uzay eğrilerinin diferansiyel geometrileri ile ilgili çalışmalar yapmıştır [7]. Frenet çatısı bir eğriyi analiz etmede kullanılan önemli araçlardan olup eğrinin her noktasında koordinat sistemini sağlayan hareketli bir çatıdır. Frenet çatısı ile eğrinin üzerinde eğrilik ve burulma fonksiyonları tanımlanır [9]. Frenet ve Serret, $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı olarak bilinen ortonormal çatıyı bir s yay parametresi tarafından parametrize edilen bir α uzay eğrisi boyunca tanımlamıştır. Bu α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları tanımını ilk defa Aoust 1876 yılında ifade edilmiştir. Monge ise analitik olarak eğrilik tanımını 1775 yılında ifade ederken, burulmayı Lancet 1806 yılında ilk kez ifade etmiştir [7].

Diferansiyel geometride uzay eğrileri için önemli bir yere sahip olan Darboux tarafından bulunan ve bir eğri boyunca Frenet çatısının ani dönme vektörü $f = \tau T + \kappa B$ olarak tanımlanmıştır [8].

3-boyutlu Minkowski uzayında eğriler ve yüzeylerin geometrik özellikleri birçok bilim insanı tarafından araştırılmıştır. Minkowski uzayı matematiksel fizikteki görelilikten türemiştir. Minkowski, eski öğrencisi Albert Einstein tarafından 1905'te ortaya atılan ve Lorentz ve Poincaré'nin önceki çalışmalarına dayanan özel görelilik teorisine dayanır. 1907'de Alman matematikçi Minkowski tarafından uzayın üç boyutu ile zaman boyutunu birleştiren dört boyutlu bir uzay zamanı olabildiği ifade edilmiştir. Teorik fizikte Minkowski uzay ile Öklid uzayı birbirinden farklıdır. Öklid uzayı sadece spacelike boyuta sahipken, Minkowski uzay ise timelike boyuta sahip olur. Böylece simetri grubu Öklid uzayında bir Öklidyen grup olurken, Minkowski uzayda Poincare gruptur [12]. Öklid uzayında iyi bilinen ve Öklidyen olmayan geometrilerden Hiperbolik geometrinin, IR_1^3 uzayında $H_0^2(r)$ ile gösterilen ve hiperboloid modeli olarak isimlendirilen bir modeli vardır. Bu model, gerçekte, r – uzunluklu timelike vektörlerin kümesi olan r – yarıçaplı Hiperbolik küredir [13].

Spiral, bir merkez noktadan doğup bu nokta etrafında dönerek kademeli şekilde uzaklaşan bir eğridir. Doğada spiraller için birçok örnek görmek mümkündür. Örneğin; galaksiler, bitkiler ve hayvanların yapısında spiral örnekleri bulunabilmektedir. Spiraller üzerine bazı çalışmalar [6, 11, 14, 15] kaynaklarından incelenebilir.

Bu tez çalışmasında yararlandığımız [1] numaralı çalışmada spacelike spiralleri veren diferansiyel denklemler tanımlanmış ve bu bilgiler yardımıyla bu eğrilerin parametrizasyonları verilmiştir. Hiperboloid $H^+(r)$ modelinin yüzeyindeki tüm spiralleri

$$\alpha_\lambda(t) = \left(\frac{2re^{\lambda t}}{e^{2\lambda t} - 1} \cos(t), \frac{2re^{\lambda t}}{e^{2\lambda t} - 1} \sin(t), \frac{r(1 + e^{2\lambda t})}{e^{2\lambda t} - 1} \right)$$

parametrizasyonu ile verildiğini göstermişlerdir [1]. Bu tezde bu eğrinin Frenet çatısı, Frenet türev formülleri, ani dönme vektörü hesaplanmıştır. Daha sonra bu eğriye ait Darboux çatısı, Darboux türev formülleri, Darboux ani dönme vektörü hesaplanmıştır. Son olarak bu iki çatı arasındaki ilişki bulunmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, IR_1^3 Minkowski 3-boyutlu uzayının temel kavramları ile bu uzaydaki eğrilerin teorisi ve Frenet türev formülleri, son olarak da yüzeyler teorisi ve Darboux türev formülleri verilmiştir.

2.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayı IR_1^3 ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1. IR^3 standart reel vektör uzayı üzerinde Minkowski iç çarpım

$$\langle, \rangle: IR^3 \times IR^3 \rightarrow IR$$
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in IR^3$ dır. Bu Lorentziyen iç çarpım ile birlikte IR^3 Afin uzayı, Minkowski 3-uzayı (veya Lorentziyen 3-uzay veya 3-boyutlu Lorentziyen uzayı) olarak isimlendirilir ve IR_1^3 ile gösterilir [3, 10].

Lorentziyen iç çarpım pozitif tanımlı olmadığı için, IR_1^3 uzayındaki vektörler aşağıdaki gibi üç farklı Lorentziyen karaktere sahip olabilirler.

Tanım 2.1.2. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in IR_1^3$ olmak üzere,

- i) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$ veya $\mathbf{a} = 0$ ise $\mathbf{a}$ vektörüne spacelike (uzaysı),
- ii) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle < 0$ ise $\mathbf{a}$ vektörüne timelike (zamansı),
- iii) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$ ve $\mathbf{a} \neq 0$ ise $\mathbf{a}$ vektörüne lightlike (ışıksı, null)

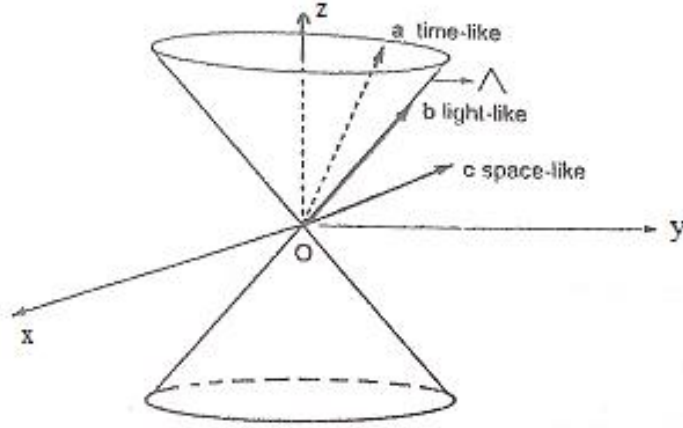
vektör denir [2, 10].

IR_1^3 uzayının bütün ışıksı vektörlerinin kümesi

$$\wedge = \{ \mathbf{a} \in IR_1^3 \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0, \mathbf{a} \neq 0 \}$$

eşitliği ile verilir ve ışık konisi olarak adlandırılır [2].

Timelike vektörlerin ışık konisinin içinde, lightlike (veya null) vektörlerin ışık konisinin üzerinde ve spacelike vektörlerin de ışık konisinin dışında bulunduğunu Şekil 2.1.1. göstermektedir [3].



Şekil 2.1.1. IR_1^3 Uzayında Vektörler [3]

Tanım 2.1.3. Bir $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in IR_1^3$ vektörünün normu

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle|}$$

olarak tanımlanır. Eğer $\|\mathbf{a}\| = 1$ ise, bu vektöre birim vektör denir [3].

Tanım 2.1.4. ([13]):

i) **Hiperbolik açı:** $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$, IR_1^3 de iki timelike vektör olsun.

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cosh \theta$ olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir.

ii) **Merkez açı:** $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$, IR_1^3 de iki spacelike vektör ve bu vektörlerin gerdiği

düzlem timelike olsun. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cosh \theta$ olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörleri arasındaki merkez açı denir.

iii) **Spacelike açı:** $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$, IR_1^3 de iki spacelike vektör ve bu vektörlerin gerdiği

düzlem spacelike olsun. $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$ olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörleri arasındaki spacelike açı denir.

iv) **Lorentziyen timelike aç:** $\mathbf{a}$, IR_1^3 de bir spacelike vektör ve $\mathbf{b}$, IR_1^3 de bir timelike vektör olsun. $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sinh \theta$ olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike aç denir.

Lemma 2.1.5. IR_1^3 uzayındaki vektörler için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) İki timelike vektör birbirine dik olamaz.
- ii) İki lighlike (null) vektörün birbirlerine dik olmaları için gerek ve yeter şart bu vektörlerin lineer bağımlı olmalarıdır.
- iii) Bir timelike vektör ile bir lighlike (null) vektör birbirlerine dik olamaz [2].

Tanım 2.1.6. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in IR_1^3$ keyfi iki vektör olsun. Bu vektörlerin Lorentziyen vektörel çarpımı

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_3 b_2 - a_2 b_3, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

şeklinde tanımlanır [3].

Buna göre

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}), \quad i = 1, 2, 3$$

olmak üzere

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (a_3 b_2 - a_2 b_3, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

ile verilir. Burada

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2$$

dir [3].

Teorem 2.1.7. ([3]) $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ve $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in IR_1^3$ uzayında üç vektör olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler mevcuttur.

- i) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = -\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
- ii) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a}$
- iii) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 0$
- iv) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle + (\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)^2$

2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Eğriler Teorisi ve Frenet Çatısı

Bu bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayı IR_1^3 de eğriler teorisi ve Frenet çatısı için temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1. $I \subseteq IR$ ve $I = (a, b)$ açık alt aralığı için,

$$\begin{aligned}\alpha : I &\rightarrow IR_1^3 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))\end{aligned}$$

diferansiyellenebilir bir dönüşüm olmak üzere $\alpha(I) \subset IR_1^3$ alt kümesi IR_1^3 Minkowski uzayında diferansiyellenebilir eğri (parametrik eğri) olarak adlandırılır [10].

$\alpha : I \subset IR \rightarrow IR_1^3$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ eğrisi diferansiyellenebilir olsun. $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t)) \in IR_1^3$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki teğet vektörü (hız vektörü) denir [10].

Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ vektörü sıfırdan farklı ise yani her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ oluyorsa (dolayısıyla, $\|\alpha'(t)\| \neq 0$) ise α ya regüler eğri denir [10].

$$\|\alpha'\| : I \rightarrow IR, t \rightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{[\alpha'_1(t)]^2 + [\alpha'_2(t)]^2 - [\alpha'_3(t)]^2}$$

olarak tanımlanan $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna α eğrisinin skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\| \in IR$ reel sayısına da α eğrisinin t noktasındaki (skaler) hızı denir [10].

$\alpha : I \subset IR \rightarrow IR_1^3$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ eğrisi diferansiyellenebilir olsun. Her $t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise α ya birim hızlı bir eğri denir. Bu durumda $t \in I$ parametresine de eğrinin yay uzunluğu parametresi denir [10]. Genellikle bir eğrinin yay uzunluğu parametresi t yerine s ile gösterilir. Her $t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| \neq 1$ ise α ya birim hızlı olmayan bir eğri denir.

Tanım 2.2.2. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\alpha'(s) = T(s)$ eşitliği ile gösterilen $T(s)$ vektörüne s noktasındaki birim teğet vektör denir ve $\|T(s)\| = \|\alpha'(s)\| = 1$ dir. $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ sayısı ile gösterilen α eğrisinin s noktasındaki eğriliği denir. $\kappa(s) \neq 0$ olan noktalarda $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ eşitliği ile verilen $N(s)$ birim vektörüne s noktasındaki asli normal vektör denir. $B(s) = T(s) \times N(s)$ birim vektörüne s noktasındaki binormal vektör denir. $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ ile tanımlanan $\tau(s)$ sayısına α eğrisinin s noktasındaki burulması denir [2].

Tanım 2.2.3. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, $\alpha = \alpha(t)$, $\mathbb{R}_1^3$ de bir diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer α eğrisinin $\alpha'(t)$ teğet vektörü bir spacelike, timelike veya null vektör ise $\alpha = \alpha(t)$ eğrisine, sırasıyla, spacelike, timelike veya null eğri adı verilir [10].

Minkowski 3-uzayında regüler bir eğri α ve teğet vektörü T olsun. Eğer T vektörü sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yapıyorsa,

$$\langle T, u \rangle = \text{sabit} \neq 0$$

ise α eğrisine Minkowski 3- uzayında genel helis denir [16].

Bütün noktaları bir düzlem üzerinde kalan eğrilere düzlemsel eğri denir.

Teorem 2.2.4. Eğer bir (spacelike veya timelike) α eğrisi $\mathbb{R}_1^3$ de bir helis ise bu durumda, $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit bir fonksiyondur. $\tau = 0$ ise α düzlem eğrisidir [2].

Şimdi birim hızlı eğriler için Frenet çatısını, eğrilik, burulma, Frenet türev formüllerini ve Frenet ani dönme vektörlerini verelim.

Tanım 2.2.5. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3-uzayında birim hızlı bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için $\alpha = \alpha(t)$ eğrisinin spacelike ve timelike olma durumlarına göre Frenet türev formülleri aşağıdaki gibi verilir [2, 3, 5]:

i) α eğrisi bir spacelike eğri olsun. Dolayısıyla, eğrinin $\mathbf{T}(t)$ birim teğet vektörü de bir spacelike vektördür. Bu durumda $\mathbf{T}'(t)$ vektörünün spacelike veya timelike olma durumlarına göre Frenet türev formülleri aşağıdaki gibi verilir:

- $\mathbf{T}'(t)$ spacelike vektör olsun. Bu durumda $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = 1$, $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 1$ yani $\mathbf{T}(t)$ ve $\mathbf{N}(t)$ vektörleri spacelike vektördür. $\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = -1$ olup $\mathbf{B}(t)$ vektörü ise timelike vektördür.

$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ Frenet çatısı, $\kappa(t)$ eğrilik ve $\tau(t)$ burulma fonksiyonları ve Frenet çatısının t yayına göre türev formülleri matris formunda

$$\mathbf{T}(t) = \alpha'(t), \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}, \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t),$$

$$\kappa(t) = \|\mathbf{T}'(t)\|, \quad \tau(t) = -\langle \mathbf{N}'(t), \mathbf{B}(t) \rangle,$$

ve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Spacelike asal normalli spacelike eğriler için Frenet ani dönme vektörü

$$\mathbf{f} = \tau \mathbf{T} - \kappa \mathbf{B}$$

biçiminde tanımlanır.

- $\mathbf{T}'(t)$ timelike vektör olsun. Bu durumda $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = 1$, $\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = 1$ yani $\mathbf{T}(t)$ ve $\mathbf{B}(t)$ vektörleri spacelike vektördür. $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = -1$ olup $\mathbf{N}(t)$ vektörü ise timelike vektördür.

$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ Frenet çatısı, $\kappa(t)$ eğrilik ve $\tau(t)$ burulma fonksiyonları ve Frenet çatısının t yayına göre türev formülleri matris formunda

$$\mathbf{T}(t) = \alpha'(t), \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}, \quad \mathbf{B}(t) = -\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t),$$

$$\kappa(t) = \|\mathbf{T}'(t)\|, \quad \tau(t) = \langle \mathbf{N}'(t), \mathbf{B}(t) \rangle$$

ve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

biçimindedir.

Bu timelike asli normalli spacelike eğriler için Frenet ani dönme vektörü

$$\mathbf{f} = -\tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$$

biçiminde tanımlanır.

ii) α eğrisi bir timelike eğri olsun. Dolayısıyla, eğrinin $\mathbf{T}(t)$ birim teğet vektörü de bir timelike vektördür. Bu durumda $\mathbf{T}'(t) \neq 0$ vektörünün bir spacelike vektör olacaktır. Buna göre Frenet türev formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$\mathbf{T}'(t)$ timelike vektör olduğundan $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 1$, $\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = 1$ dir. Yani $\mathbf{N}(t)$ ve $\mathbf{B}(t)$ vektörleri spacelike vektördür.

$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ Frenet çatısı, $\kappa(t)$ eğrilik ve $\tau(t)$ burulma fonksiyonları ve Frenet çatısının t yayına göre türev formülleri matris formunda

$$\mathbf{T}(t) = \alpha'(t), \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}, \quad \mathbf{B}(t) = -\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t),$$
$$\kappa(t) = \|\mathbf{T}'(t)\|, \quad \tau(t) = -\langle \mathbf{N}'(t), \mathbf{B}(t) \rangle,$$

ve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Bu timelike eğri için Frenet ani dönme vektörü

$$\mathbf{f} = \tau\mathbf{T} - \kappa\mathbf{B}$$

biçiminde tanımlanır.

Şimdi de birim hızlı olmayan eğriler için Frenet çatısı, eğrilik ve burulma fonksiyonlarını, Frenet türev formüllerini ve Frenet ani dönme vektörlerini verelim.

Tanım 2.2.6. $\alpha : I \rightarrow IR_1^3$ Minkowski 3-uzayında birim hızlı olmayan bir eğri olsun.

$\forall t \in I$ için $\alpha = \alpha(t)$ eğrisinin spacelike ve timelike olma durumlarına göre Frenet türev formülleri aşağıdaki gibi verilir:

- i) $\alpha = \alpha(t)$ eğrisi birim hızlı olmayan bir spacelike eğri olsun. Dolayısıyla, eğrinin $T(t)$ birim teğet vektörü de bir spacelike vektördür. Bu durumda $T'(t)$ vektörünün spacelike veya timelike olma durumlarına göre Frenet türev formülleri aşağıdaki gibi verilir:

- $T'(t)$ spacelike vektör olsun. Bu durumda

$$\langle T, T \rangle = 1, \langle N, N \rangle = 1, \langle B, B \rangle = -1$$

ve

$$T(t) \times N(t) = B(t), N(t) \times B(t) = -T(t), B(t) \times T(t) = -N(t)$$

dir. Eğrinin Frenet çatısı

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}, N(t) = T(t) \times B(t)$$

şeklindedir. α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonu sırasıyla,

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

bağıntısı ile verilir.

$$v(t) = \|\alpha'(t)\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|$$

olmak üzere birim hızlı olmayan spacelike asli normalli α spacelike eğrisinin Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} T'(t) \\ N'(t) \\ B'(t) \end{bmatrix} = v(t) \begin{bmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{bmatrix}$$

şeklindedir [4].

Bu eğri için Frenet ani dönme vektörü ise

$$\mathbf{f}(t) = \nu(t)\tau(t)\mathbf{T}(t) - \nu(t)\kappa(t)\mathbf{B}(t)$$

biçiminde tanımlanır.

- $\mathbf{T}'(t)$ timelike vektör olsun. Bu durumda

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = -1, \quad \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = 1$$

ve

$$\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = -\mathbf{B}(t), \quad \mathbf{N}(t) \times \mathbf{B}(t) = -\mathbf{T}(t), \quad \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t) = \mathbf{N}(t)$$

dir. Eğrinin Frenet çatısı

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}(t) = -\frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t) \quad (2.3)$$

şeklindedir. α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonu sırasıyla,

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \quad (2.4)$$

$$\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} \quad (2.5)$$

bağıntısı ile verilir.

$$\nu(t) = \|\alpha'(t)\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| \quad (2.6)$$

olmak üzere birim hızlı olmayan timelike asli normalli α spacelike eğrisinin Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(t) \\ \mathbf{N}'(t) \\ \mathbf{B}'(t) \end{bmatrix} = \nu(t) \begin{bmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{N}(t) \\ \mathbf{B}(t) \end{bmatrix}$$

şeklindedir [4].

Bu eğri için Frenet ani dönme vektörü ise

$$\mathbf{f}(t) = -\nu(t)\tau(t)\mathbf{T}(t) + \nu(t)\kappa(t)\mathbf{B}(t)$$

biçiminde tanımlanır.

ii) $\alpha = \alpha(t)$ eğrisi birim hızlı olmayan bir timelike eğri olsun. Bu durumda

$T'(t) \neq 0$ vektörü bir spacelike vektördür. Böylece

$$\langle T, T \rangle = -1, \langle N, N \rangle = 1, \langle B, B \rangle = 1$$

ve

$$T(t) \times N(t) = -B(t), \quad N(t) \times B(t) = T(t), \quad B(t) \times T(t) = -N(t)$$

dir. Eğrinin Frenet çatısı

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad B(t) = -\frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}, \quad N(t) = T(t) \times B(t)$$

şeklindedir. α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonu sırasıyla,

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

bağıntısı ile verilir.

$$v(t) = \|\alpha'(t)\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|$$

olmak üzere birim hızlı olmayan α timelike eğrisinin Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} T'(t) \\ N'(t) \\ B'(t) \end{bmatrix} = v(t) \begin{bmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{bmatrix}$$

şeklindedir [4].

Bu eğri için Frenet ani dönme vektörü ise

$$f(t) = v(t)\tau(t)T(t) - v(t)\kappa(t)B(t)$$

biçiminde tanımlanır.

2.3. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Yüzeyler Teorisi ve Darboux Çatısı

Bu bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayı IR_1^3 de yüzeyler teorisi ve Darboux çatısı için temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.3.1. $U \subset IR^2$ boştan farklı bir açık alt cümle olsun. $x:U \subset IR^2 \rightarrow IR^3$ olmak üzere

$$x(U) = \{x(u, v) | (u, v) \in U\} \subseteq IR^3$$

görüntüsüne bir yüzey adı verilir. $\forall (u, v) \in U$ için

$$x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

biçiminde yazılabilir. Burada x_1, x_2 ve x_3 iki değişkenli koordinat fonksiyonlarıdır. Eğer $\forall (u, v) \in U$ noktasında x_u ve x_v vektörleri lineer bağımsız (yani $x_u \times x_v \neq 0$) ise x yüzeyine regüler yüzey denir. Burada x_u ve x_v , sırasıyla u ve v ye göre kısmi türevlerdir. Ayrıca

$$n = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$$

vektörüne x regüler yüzeyinin birim normal vektörü denir [10].

Tanım 2.3.2. S, IR_1^3 uzayında bir yüzey olsun. S yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise S ye spacelike yüzey denir. S yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise S ye timelike yüzey denir. Yani, IR_1^3 uzayındaki spacelike (timelike) bir yüzeyin birim normal vektörü timelike (spacelike) karakterdedir. S yüzeyinin bütün teğet düzlemleri lightlike (null) yani yüzeyin normal vektörü lightlike ise S ye lightlike yüzey denir [2].

Tanım 2.3.3. IR_1^3 uzayındaki orijin merkezli ve $r > 0$ uzunluklu spacelike (sırasıyla, timelike) vektörlerin kümesine r yarıçaplı Lorentziyen (sırasıyla, hiperbolik) küre denir ve bu küreler sırasıyla

$$S_1^2(r) = \{ \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in IR_1^3 : \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = r^2 \}$$

ve

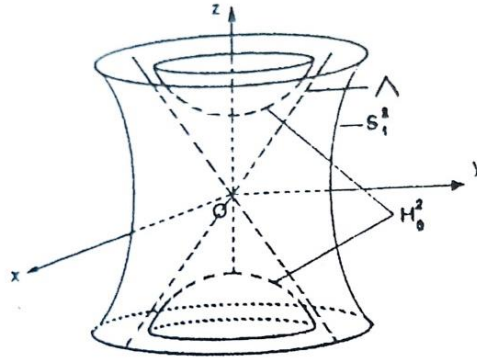
$$H_0^2(r) = \{ \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in IR_1^3 : \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = -r^2 \}$$

biçiminde ifade edilirler [3]. $r=1$ için Lorentziyen (sırasıyla, hiperbolik) birim küreler elde edilir ve S_1^2 (sırasıyla, H_0^2) ile gösterilir.

IR_1^3 uzayındaki tüm lightlike vektörlerin kümesi

$$\wedge(r) = \{ \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in IR_1^3 : \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = 0 \}$$

olarak tanımlanır. Bu kümeye null vektörlerin kümesi denir ve $\wedge$ ile gösterilmiştir [2]. Birim küreler Şekil 2.3.1. ile verilmiştir.



Şekil 2.3.1. IR_1^3 Uzayında Birim Küreler [3]

IR_1^3 uzayında $S_1^2(r)$ Lorentziyen küresi bir timelike yüzeydir. $H_0^2(r)$ hiperbolik küresi ise bir spacelike yüzeydir.

$H_0^2(r)$ hiperbolik küresi,

$$\begin{aligned} H^+(r) &= \{ \mathbf{a} \in H_0^2(r) : \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_3 \rangle < 0 \} \\ &= \{ \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in IR_1^3 : a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = -r^2, a_3 > 0 \} \end{aligned}$$

pozitif kanat ve

$$H^-(r) = \{ \mathbf{a} \in H_0^2(r) : \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_3 \rangle > 0 \}$$

negatif kanat olmak üzere iki parçalıdır.

Bir spacelike yüzey üzerindeki herhangi bir noktada teğet düzlem spacelike olduğu için bu yüzey üzerinde yatan bütün eğriler spacelike eğri olur [3].

S bir spacelike yüzey olsun. S yüzeyinin bir parametrizasyonu $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ olarak verilir. α bu yüzey üzerinde spacelike bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet çatısından başka Darboux çatısı olarak isimlendirilen ikinci bir çatısı vardır. Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n}\}$ ortonormal koordinat sistemi olarak tanımlanır. Burada $\mathbf{T}$ birim vektörü, α spacelike eğrisinin bir M noktasında yüzeye ve eğriye teğet olan birim teğet vektör alanıdır. $\mathbf{n}$, yüzeyin M noktasındaki birim normal vektör alanı ve birim geodezik normal vektör alanı $\mathbf{g} = -\mathbf{n} \times \mathbf{T}$ eşitliği ile tanımlanır. Ayrıca, $\mathbf{n}$ timelike olduğundan, $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{g}$ birim vektörleri spacelike vektörlerdir. Bu vektörler arasında

$$\mathbf{T} \times \mathbf{g} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{g} \times \mathbf{n} = -\mathbf{T}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{T} = -\mathbf{g} \quad (2.7)$$

bağıntıları vardır [3].

Tanım 2.3.4. S, R^3 de bir yüzey ve bu yüzey üzerinde $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bir eğri olsun. α eğrisinin $\alpha(s) \in S$ noktasındaki teğet düzlemi üzerindeki iz düşüm eğrisinin eğriliğine, α eğrisinin bu noktadaki geodezik eğriliği denir ve k_g ile gösterilir.

Tanım 2.3.5. S, R^3 de bir yüzey ve $\mathbf{u}$ vektörü S üzerinde herhangi bir $M \in S$ noktasında yüzeye teğet bir vektör olsun. S yüzeyinin M noktasında $\mathbf{u}$ doğrultusundaki normal eğriliği, yüzeyin M noktasındaki normali ve $\mathbf{u}$ vektörünün belirlediği düzlem ile yüzeyin arakesit eğrisinin M noktasındaki eğriliği olarak tanımlanır ve k_n ile gösterilir.

Tanım 2.3.6. S, R^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ ye bir eğri olsun. $\alpha(s) \in S$ noktasındaki $\mathbf{n}$ yüzey normalinin, α eğrisinin $\mathbf{T}$ teğet vektörü etrafındaki değişim oranını veren eğriliğe, α eğrisinin bu noktadaki geodezik burulması denir ve τ_g ile gösterilir.

$\{T, g, n\}$ Darboux çatısının s yayına göre türev formülleri matris formda

$$\begin{bmatrix} T' \\ g' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada k_g geodezik eğrilik, k_n normal eğrilik ve τ_g geodezik burulmadır. Darboux üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$\omega = \tau_g T - k_n g - k_g n$$

biçiminde tanımlanır. O halde, Darboux üçyüzlüsüne ait türev formülleri

$$\frac{dT}{ds} = \omega \times T, \quad \frac{dg}{ds} = \omega \times g, \quad \frac{dn}{ds} = \omega \times n$$

ile verilir [3].

Teorem 2.3.7. S, IR_1^3 de bir spacelike yüzey ve $\alpha : I \rightarrow S$, S yüzeyi üzerinde bir spacelike eğri olsun. Bu taktirde,

$$k_n = -\frac{1}{v} \langle T', n \rangle, \quad (2.8)$$

$$k_g = \frac{1}{v} \langle T', g \rangle, \quad (2.9)$$

$$\tau_g = -\frac{1}{v} \langle g', n \rangle \quad (2.10)$$

ile verilir [4].

Teorem 2.3.8. S, IR_1^3 de bir spacelike yüzey ve $\alpha : I \rightarrow S$, S yüzeyi üzerinde bir spacelike eğri olsun. Bu taktirde $v = \|\alpha'\|$ olmak üzere $\{T, g, n\}$ Darboux çatısının türev formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ g' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & vk_g & vk_n \\ -vk_g & 0 & v\tau_g \\ vk_n & v\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix}$$

şeklindedir [4].

Teorem 2.3.9. ([3]) α yüzey üzerinde bir eğri olsun. Aşağıdaki önermeler verilmiştir:

$$\alpha \text{ bir geodezik eğridir.} \Leftrightarrow k_g = 0$$

$$\alpha \text{ bir asimptotik eğridir.} \Leftrightarrow k_n = 0$$

$$\alpha \text{ bir eğrilik çizgisidir.} \Leftrightarrow \tau_g = 0.$$

Şimdi Frenet ile Darboux çatıları arasındaki ilişkiyi inceleyelim. T vektörü Frenet ve Darboux çatılarında ortak olduğundan diğer N , B , g ve n vektörleri aynı düzlemde bulunurlar. Frenet çatısı, T spacelike eksenini etrafında pozitif yönde $\phi = \phi(s)$ hiperbolik açılık bir dönmeye tabi tutulursa Darboux çatısı elde edilir. Bu ise g ile N arasındaki merkez açısı ve n ile B arasındaki hiperbolik açının ϕ olması demektir. Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntı matris formunda

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \phi & \sinh \phi \\ 0 & \sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

ile verilir. Frenet türev formülleri, Darboux türev formülleri ile Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntıdan

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= k_g^2 - k_n^2, \\ k_g &= \kappa \cosh \phi, \\ k_n &= -\kappa \sinh \phi, \\ \tau_g &= \tau + \frac{d\phi}{ds} \end{aligned} \quad (2.12)$$

eşitlikleri elde edilir [3].

3.ARAŞTIRMA BULGULARI

Spiraller, bir dönel yüzeyin bütün meridyenlerini (veya paralellerini) bir sabit a ı altında kesen türevlenebilir e rilerdir. Bu tez çalışmasında [1] numaralı makalede verilen $\alpha_\lambda(t)$ spiral eğrileri için Frenet ve Darboux çatıları verilerek aralarındaki ilişki ortaya konmuştur. $H^+(r)$ hiperboloid modeli üzerindeki tüm spirallerin parametrik denklemi

$$\alpha_\lambda(t) = \left(\frac{2re^{\lambda t}}{e^{2\lambda t} - 1} \cos(t), \frac{2re^{\lambda t}}{e^{2\lambda t} - 1} \sin(t), \frac{r(1 + e^{2\lambda t})}{e^{2\lambda t} - 1} \right) \quad (3.1)$$

 ekilde verilmiştir [1]. Burada $\lambda = \cot \theta$ dır. θ , meridyenler ile $\alpha_\lambda(t)$ spacelike eğrisi arasındaki sabit spacelike a ıdır.

$H^+(r)$ Hiperboloid modeli yüzeyinin parametrik denklemi

$$x(u, v) = (r \sinh u \cos v, r \sinh u \sin v, r \cosh u)$$

ile verilir [1].

$H^+(r)$ Hiperboloid yüzeyi üzerine yatan spiral eğrilerinin

$$u(t) = 2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}, \quad v(t) = t, \quad \lambda = \cot \theta$$

olduğunda elde edilen $\alpha_\lambda(t)$ eğrilerinin olduğunu biliyoruz [1].

3.1. $H^+(r)$ Hiperboloid Modeli üzerinde $\alpha_\lambda(t)$ Spiral Eğrilerinin Frenet çatısı

[1] numaralı makalede verilen

$$H^+(r) = \{ \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}_1^3 : a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = -r^2, a_3 > 0 \}$$

hiperboloid modeli üzerinde yatan

$$\alpha_\lambda(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) = \left(\frac{2re^{\lambda t}}{e^{2\lambda t} - 1} \cos(t), \frac{2re^{\lambda t}}{e^{2\lambda t} - 1} \sin(t), \frac{r(1 + e^{2\lambda t})}{e^{2\lambda t} - 1} \right)$$

spiral e risinin Frenet  atısını olu turalım.

$$\alpha_1(t) = \frac{2e^{\lambda t} r \cos(t)}{e^{2\lambda t} - 1}, \quad \alpha_2(t) = \frac{2e^{\lambda t} r \sin(t)}{e^{2\lambda t} - 1}, \quad \alpha_3(t) = \frac{r(1 + e^{2\lambda t})}{e^{2\lambda t} - 1}$$

olsun.

Buradan bu fonksiyonların birinci türevleri alınırsa

$$\begin{aligned}\alpha_1'(t) &= -\frac{2e^{\lambda t}r(\lambda(1+e^{2\lambda t})\cos(t)+(-1+e^{2\lambda t})\sin(t))}{(e^{2\lambda t}-1)^2} \\ \alpha_2'(t) &= \frac{2e^{\lambda t}r(-\lambda(1+e^{2\lambda t})\sin(t)+\cos(t)(-1+e^{2\lambda t}))}{(e^{2\lambda t}-1)^2} \\ \alpha_3'(t) &= -\frac{4\lambda e^{2\lambda t}r}{(e^{2\lambda t}-1)^2}\end{aligned}\quad (3.3)$$

elde edilir. Böylece $\alpha'_\lambda(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t))$ dir.

Buradan,

$$\|\alpha'(t)\| = 2e^{\lambda t} \sqrt{\frac{r^2(1+\lambda^2)}{(e^{2\lambda t}-1)^2}} \neq 1$$

olduğundan α eğrisi birim hızlı değildir. Şimdi Frenet elemanları T, N ve B yi birim hızlı olmayan spacelike eğriler için verilen formüller ile bulacağız.

Eğrinin birim teğet vektörü

$$\mathbf{T}(t) = (t_1(t), t_2(t), t_3(t)) = \left(\frac{\alpha_1'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{\alpha_2'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{\alpha_3'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}t_1(t) &= -\frac{r(\lambda(e^{2\lambda t}+1)\cos(t)+(e^{2\lambda t}-1)\sin(t))}{(e^{2\lambda t}-1)^2 \sqrt{\frac{r^2(1+\lambda^2)}{(e^{2\lambda t}-1)^2}}} \\ t_2(t) &= \frac{r((e^{2\lambda t}-1)\cos(t)-\lambda(e^{2\lambda t}+1)\sin(t))}{(e^{2\lambda t}-1)^2 \sqrt{\frac{r^2(1+\lambda^2)}{(e^{2\lambda t}-1)^2}}} \\ t_3(t) &= -\frac{2r\lambda e^{\lambda t}}{(e^{2\lambda t}-1)^2 \sqrt{\frac{r^2(1+\lambda^2)}{(e^{2\lambda t}-1)^2}}}\end{aligned}\quad (3.4)$$

elde edilir. (3.4) ifadesinden

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = [t_1(t)]^2 + [t_2(t)]^2 - [t_3(t)]^2 = 1$$

olduğu görülür.

Böylece olması gerektiği gibi $\alpha_\lambda(t)$ eğrisinin spacelike bir eğri olduğu görülür.

Binormali elde etmek için $\alpha_\lambda(t)$ ifadesinin ikinci türevi alınır

$$\alpha''_\lambda(t) = (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t), \alpha_3''(t))$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha_1''(t) &= \frac{2re^{\lambda t} \left(\cos(t) \left(-\left(e^{2\lambda t} - 1 \right)^2 + \lambda^2 (1 + 6e^{2\lambda t} + e^{4\lambda t}) \right) + 2\lambda (e^{4\lambda t} - 1) \sin(t) \right)}{(e^{2\lambda t} - 1)^3} \\ \alpha_2''(t) &= \frac{2re^{\lambda t} \left(-2\lambda (e^{4\lambda t} - 1) \cos(t) + \left(-\left(e^{2\lambda t} - 1 \right)^2 + \lambda^2 (1 + 6e^{2\lambda t} + e^{4\lambda t}) \right) \sin(t) \right)}{(e^{2\lambda t} - 1)^3} \quad (3.5) \\ \alpha_3''(t) &= \frac{8r\lambda^2 e^{2\lambda t} (e^{2\lambda t} + 1)}{(e^{2\lambda t} - 1)^3}\end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha_\lambda(t)$ nin birinci ve ikinci türevinin vektörel çarpımından

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \left(\frac{8\lambda e^{3\lambda t} r^2 (1 + \lambda^2) \sin(t)}{(e^{2\lambda t} - 1)^3}, -\frac{8\lambda e^{3\lambda t} r^2 \cos(t) (1 + \lambda^2)}{(e^{2\lambda t} - 1)^3}, \frac{4e^{2\lambda t} r^2 (1 + \lambda^2)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2} \right)$$

ve

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = 4\sqrt{-\frac{r^4 (1 + \lambda^2)^2 e^{4\lambda t} \left((e^{2\lambda t} - 1)^2 - 4\lambda^2 e^{2\lambda t} \right)}{(e^{2\lambda t} - 1)^6}}$$

bulunur. Böylece $\alpha_\lambda(t)$ eğrisinin birim binormal vektör alanı için

$$B(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
b_1(t) &= -\frac{2\lambda e^{3\lambda t} r^2 (1+\lambda^2) \sin(t)}{(e^{2\lambda t} - 1)^3 \sqrt{-\frac{r^4 (1+\lambda^2)^2 e^{4\lambda t} ((e^{2\lambda t} - 1)^2 - 4\lambda^2 e^{2\lambda t})}{(e^{2\lambda t} - 1)^6}}} \\
b_2(t) &= \frac{2\lambda e^{3\lambda t} r^2 \cos(t) (1+\lambda^2)}{(e^{2\lambda t} - 1)^3 \sqrt{-\frac{r^4 (1+\lambda^2)^2 e^{4\lambda t} ((e^{2\lambda t} - 1)^2 - 4\lambda^2 e^{2\lambda t})}{(e^{2\lambda t} - 1)^6}}} \\
b_3(t) &= -\frac{e^{2\lambda t} r^2 (1+\lambda^2)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2 \sqrt{-\frac{r^4 (1+\lambda^2)^2 e^{4\lambda t} ((e^{2\lambda t} - 1)^2 - 4\lambda^2 e^{2\lambda t})}{(e^{2\lambda t} - 1)^6}}}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

biçiminde elde edilir. Buradan $\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = 1$ olduğundan $\alpha_\lambda(t)$ eğrisinin binormal vektörünün spacelike vektör olduğu görülür.

Bulunan $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{B}$ ifadelerinden asli normal

$$\mathbf{N}(t) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t))$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
n_1(t) &= \frac{r^3 (1+\lambda^2) e^{2\lambda t} (-\cos(t) ((e^{2\lambda t} - 1)^2 - 4\lambda^2 e^{2\lambda t}) + \lambda (e^{4\lambda t} - 1) \sin(t))}{\sqrt{\frac{r^2 (1+\lambda^2)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2}} (e^{2\lambda t} - 1)^5 \sqrt{-\frac{r^4 (1+\lambda^2)^2 e^{4\lambda t} ((e^{2\lambda t} - 1)^2 - 4\lambda^2 e^{2\lambda t})}{(e^{2\lambda t} - 1)^6}}} \\
n_2(t) &= \frac{r^3 (1+\lambda^2) e^{2\lambda t} (-\sin(t) ((e^{2\lambda t} - 1)^2 + 4\lambda^2 e^{2\lambda t}) - \lambda (e^{4\lambda t} - 1) \cos(t))}{\sqrt{\frac{r^2 (1+\lambda^2)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2}} (e^{2\lambda t} - 1)^5 \sqrt{-\frac{r^4 (1+\lambda^2)^2 e^{4\lambda t} ((e^{2\lambda t} - 1)^2 - 4\lambda^2 e^{2\lambda t})}{(e^{2\lambda t} - 1)^6}}} \\
n_3(t) &= \frac{2\lambda^2 e^{3\lambda t} (1+\lambda^2) (1+e^{2\lambda t}) r^3}{\sqrt{\frac{r^2 (1+\lambda^2)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2}} (e^{2\lambda t} - 1)^5 \sqrt{-\frac{r^4 (1+\lambda^2)^2 e^{4\lambda t} ((e^{2\lambda t} - 1)^2 - 4\lambda^2 e^{2\lambda t})}{(e^{2\lambda t} - 1)^6}}}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = -1$ olduğundan $\alpha_\lambda(t)$ eğrisinin asli normal vektörü timelike vektördür. Böylelikle, Frenet vektörleri hesaplanmış olur. Şimdi $\alpha_\lambda(t)$ eğrisinin $\kappa(t)$ eğrilik fonksiyonunu ve $\tau(t)$ burulma fonksiyonunu bulalım.

Eğrilik fonksiyonu

$$\kappa(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r^4 (1 + \lambda^2)^2 e^{4\lambda t} \left((e^{2\lambda t} - 1)^2 - 4\lambda^2 e^{2\lambda t} \right)}{(e^{2\lambda t} - 1)^6}} \cdot e^{3\lambda t} \left(\frac{r^2 (1 + \lambda^2)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2} \right)^{3/2}$$

olarak bulunur.

Burulma fonksiyonunu bulmak için $\alpha_\lambda(t)$ ifadesinin üçüncü türevi alınırsa

$\alpha_\lambda'''(t) = (\alpha_1'''(t), \alpha_2'''(t), \alpha_3'''(t))$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha_1'''(t) &= - \left(\frac{2e^{\lambda t} r (\lambda (1 + e^{2\lambda t}) \cos(t) (-3(e^{2\lambda t} - 1)^2 + \lambda^2 (1 + 22e^{2\lambda t} + e^{4\lambda t})))}{(e^{2\lambda t} - 1)^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(e^{2\lambda t} - 1) (- (e^{2\lambda t} - 1)^2 + 3\lambda^2 (1 + 6e^{2\lambda t} + 4e^{2\lambda t})) \sin(t)}{(e^{2\lambda t} - 1)^4} \right) \\ \alpha_2'''(t) &= - \left(\frac{2e^{\lambda t} r (- (e^{2\lambda t} - 1) \cos(t) (- (e^{2\lambda t} - 1)^2 + 3\lambda^2 (1 + 6e^{2\lambda t} + e^{4\lambda t})))}{(e^{2\lambda t} - 1)^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda (e^{2\lambda t} + 1) (-3(e^{2\lambda t} - 1)^2 + \lambda^2 (1 + 22e^{2\lambda t} + e^{4\lambda t})) \sin(t)}{(e^{2\lambda t} - 1)^4} \right) \\ \alpha_3'''(t) &= - \frac{16\lambda^3 e^{2\lambda t} r (1 + 4e^{2\lambda t} + e^{4\lambda t})}{(e^{2\lambda t} - 1)^4} \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir. Böylece $\alpha_\lambda(t)$ eğrisinin burulma fonksiyonu

$$\tau(t) = \frac{\lambda (e^{2\lambda t} - 1)^2}{r (- (e^{2\lambda t} - 1)^2 + 4\lambda^2 e^{2\lambda t})}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca, $\tau \neq 0$ olduğundan eğri düzlemsel değildir.

$\frac{\tau}{\kappa} \neq \text{sabit}$ olduğundan eğri helis değildir.

Frenet ani dönme vektörü,

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2e^{\lambda t} \lambda \left(\cos(t) \lambda (e^{4\lambda t} - 1) - 4 \sin(t) \lambda^2 e^{2\lambda t} + 2 \sin(t) (e^{2\lambda t} - 1)^2 \right)}{\left(-(e^{2\lambda t} - 1)^2 + 4\lambda^2 e^{2\lambda t} \right) (e^{2\lambda t} - 1)}, \\ \frac{2e^{\lambda t} \lambda \left(\sin(t) \lambda (e^{4\lambda t} - 1) + 4 \cos(t) \lambda^2 e^{2\lambda t} - 2 \cos(t) (e^{2\lambda t} - 1)^2 \right)}{\left(-(e^{2\lambda t} - 1)^2 + 4\lambda^2 e^{2\lambda t} \right) (e^{2\lambda t} - 1)}, \\ \frac{(e^{2\lambda t} - 1)^2}{\left(-(e^{2\lambda t} - 1)^2 + 4\lambda^2 e^{2\lambda t} \right)} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

bulunur. Böylece Frenet çatısı, eğrilik, burulma ve Frenet ani dönme vektörü elde edilmiş olur.

3.2. $H^+(r)$ Hiperboloid Modeli Üzerinde $\alpha_\lambda(t)$ Spiral Eğrilerinin Darboux Çatısı

Eğri boyunca yüzey normali

$$\mathbf{n}_\alpha(t) = \begin{pmatrix} \frac{r^2 \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 \cos(t)}{\sqrt{\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2} r^4}, \frac{r^2 \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 \sin(t)}{\sqrt{\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2} r^4}, \\ \frac{r^2 \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) \cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})}{\sqrt{\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2} r^4} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. $\langle \mathbf{n}_\alpha(t), \mathbf{n}_\alpha(t) \rangle = -1$ olduğundan yüzey normali timelike vektördür.

Yüzey üzerindeki α eğrisinin $\mathbf{g}$ geodezik normali

$$\mathbf{g}(t) = \left(\begin{aligned} & - \frac{(\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) r^3) (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) [-\lambda \sin(t)(e^{2\lambda t} + 1) + \cos(t)(e^{2\lambda t} - 1)])}{\sqrt{r^4 (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 - 1) (e^{2\lambda t} - 1)^2} \sqrt{\frac{r^2 (1 + \lambda^2)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2}}} \\ & - \frac{(\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) r^3) 2e^{\lambda t} \lambda \sin(t) \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})}{\sqrt{r^4 (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 - 1) (e^{2\lambda t} - 1)^2} \sqrt{\frac{r^2 (1 + \lambda^2)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2}}}, \\ & - \frac{(\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) r^3) (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) (\lambda \cos(t)(e^{2\lambda t} + 1) + \sin(t)(e^{2\lambda t} - 1)))}{\sqrt{r^4 (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 - 1) (e^{2\lambda t} - 1)^2} \sqrt{\frac{r^2 (1 + \lambda^2)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2}}} \\ & + \frac{(\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) r^3) 2e^{\lambda t} \lambda \cos(t) \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})}{\sqrt{r^4 (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 - 1) (e^{2\lambda t} - 1)^2} \sqrt{\frac{r^2 (1 + \lambda^2)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2}}}, \\ & - \frac{(\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 - 1) r^3}{\sqrt{r^4 (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 - 1) (e^{2\lambda t} - 1)^2} \sqrt{\frac{r^2 (1 + \lambda^2)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2}}} \end{aligned} \right)$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.3.7. den k_n normal eğriliği, k_g geodezik eğriliği ve τ_g geodezik burulmayı

hesaplayabiliriz. Öncelikle $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ olduğundan

$$v(t) = 2e^{\lambda t} \sqrt{\frac{r^2 (\lambda^2 + 1)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2}}$$

olarak bulunur.

Böylece, normal eğrilik (2.8) denklemi ile

$$k_n = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-\lambda t} r \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) (2\lambda^2 e^{\lambda t} \cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})) (e^{2\lambda t} + 1)}{(\lambda^2 + 1)(e^{2\lambda t} - 1) \sqrt{r^4 (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 - 1)}} + \frac{e^{-\lambda t} r (\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}))^2 ((e^{2\lambda t} - 1)^2 - 4\lambda^2 e^{4\lambda t})}{(\lambda^2 + 1)(e^{2\lambda t} - 1) \sqrt{r^4 (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 - 1)}} \right]$$

şeklinde elde edilmiş olur. $k_n \neq 0$ olduğundan eğri asimptotik eğri değildir.

Geodezik eğrilik (2.9) denklemi ile

$$k_g = \frac{1}{2} \frac{e^{-\lambda t} r^2 \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) \cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})}{\sqrt{\frac{r^2 (\lambda^2 + 1)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2}} \sqrt{r^4 (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 - 1)}}$$

olarak bulunur. $k_g \neq 0$ olduğundan eğri geodezik eğri değildir.

Geodezik burulma (2.10) denklemi ile

$$\tau_g = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-\lambda t} \lambda \cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 (e^{2\lambda t} + 1) - e^{2\lambda t} - 1)}{(\lambda^2 + 1) r (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 - 1)} - \frac{e^{-\lambda t} \lambda \cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 (2e^{\lambda t} \cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}))}{(\lambda^2 + 1) r (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 - 1)} \right]$$

olarak bulunur. $\tau_g \neq 0$ olduğundan eğri eğrilik çizgisi değildir

Darboux ani dönme vektörü

$$\omega = \tau_g T - k_n g - k_g n$$

ile bulunabilir.

Frenet çatıları, Darboux çatıları, eğrilik ve burulma fonksiyonları için bazı özel incelemeler yapalım.

Örnek 3.1. $\theta = \frac{\pi}{3}$, $r = 1$ alalım. Bu durumda $\lambda = \cot \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ olur. Buradan

$$\alpha_{\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}}(t) = \left(\frac{2e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \cos(t)}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1}, \frac{2e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \sin(t)}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1}, \frac{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} + 1}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1} \right)$$

denklemini için birinci türevler

$$\begin{aligned} \alpha'_1(t) &= -\frac{2}{3} \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \left(\cos(t) \sqrt{3} \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} + 1 \right) + 3 \sin(t) \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^2} \\ \alpha'_2(t) &= -\frac{2}{3} \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \left(\sin(t) \sqrt{3} \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} + 1 \right) + 3 \cos(t) \left(1 - e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} \right) \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^2} \\ \alpha'_3(t) &= -\frac{4}{3} \frac{\sqrt{3} e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t}}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\left\| \alpha'_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t) \right\| = \left\langle \alpha'_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t), \alpha'_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t) \right\rangle = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t}}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^2}}$$

bulunur. $\alpha_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t)$ eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$\mathbf{T}_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t) = (t_1(t), t_2(t), t_3(t))$$

için

$$t_1(t) = -\frac{1}{6} \frac{\sqrt{3} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1}\right) \left(\cos(t) \sqrt{3} \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} + 1 \right) + 3 \sin(t) \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) \right)}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1}$$

$$t_2(t) = -\frac{1}{6} \frac{\sqrt{3} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1}\right) \left(\sin(t) \sqrt{3} \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} + 1 \right) + 3 \cos(t) \left(1 - e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} \right) \right)}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1}$$

$$t_3(t) = -\frac{\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1}\right) e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t}}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1}$$

elde edilir. Burada, $\operatorname{sgn}(f(x)) = \begin{cases} -1; & f(x) < 0 \\ 0; & f(x) = 0 \\ 1; & f(x) > 0 \end{cases}$ işaret fonksiyonunu gösterir.

$\alpha_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t)$ nin ikinci türevi,

$$\alpha''_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t) = (\alpha''_1(t), \alpha''_2(t), \alpha''_3(t))$$

için

$$\alpha''_1(t) = \frac{4}{3} \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \left(\cos(t) \left(6e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) + \sqrt{3} \sin(t) \left(e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^3}$$

$$\alpha''_2(t) = \frac{4}{3} \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \left(\sin(t) \left(6e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) + \sqrt{3} \cos(t) \left(-e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 1 \right) \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^3}$$

$$\alpha''_3(t) = \frac{8 \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} + 1 \right) e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t}}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^3}$$

olarak bulunur.

$\alpha_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t)$ nin birinci türevi ile ikinci türevinin vektörel çarpımı

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{pmatrix} \frac{32 e^{\sqrt{3}t} \sqrt{3} \sin(t)}{9 \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^3}, -\frac{32 e^{\sqrt{3}t} \sqrt{3} \cos(t)}{9 \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^3}, \frac{16 e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t}}{3 \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^2} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin normu

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \frac{16\sqrt{3}}{9} \sqrt{\frac{e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} \left(-3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 10e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 3 \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^6}}$$

bulunmuş olur. Böylece $\alpha_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t)$ eğrisinin Binormali

$$\mathbf{B}_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$$

için

$$b_1(t) = -\frac{2e^{\sqrt{3}t} \sin(t)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^3 \sqrt{\frac{e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} \left(-3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 10e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 3 \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^6}}}$$

$$b_2(t) = \frac{2e^{\sqrt{3}t} \cos(t)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^3 \sqrt{\frac{e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} \left(-3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 10e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 3 \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^6}}}$$

$$b_3(t) = -\frac{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} \sqrt{3}}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^2 \sqrt{\frac{e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} \left(-3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 10e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 3 \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^6}}}$$

olarak bulunur.

Buradan asli normali

$$N_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t))$$

olmak üzere

$$n_1(t) = \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1}\right) \left(\cos(t) \left(10e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} - 3 \right) + \sqrt{3} \sin(t) \left(e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^4 \sqrt{\frac{e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} \left(-3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 10e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 3 \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^6}}}$$

$$n_2(t) = -\frac{1}{2} \frac{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1}\right) \left(\sin(t) \left(3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} - 10e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} + 3 \right) + \sqrt{3} \cos(t) \left(e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^4 \sqrt{\frac{e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} \left(-3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 10e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 3 \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^6}}}$$

$$n_3(t) = \frac{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} + 1 \right) e^{\sqrt{3}t} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1}\right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^4 \sqrt{\frac{e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} \left(-3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 10e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 3 \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^6}}}$$

elde edilir.

$\kappa_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t)$ eğrilik fonksiyonu

$$\kappa_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t) = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\frac{e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} \left(-3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 10e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 3 \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^6}}}{\left(e^{\sqrt{3}t} \right) \frac{1}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^3}}$$

olarak bulunur. Burulma fonksiyonu için $\alpha_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t)$ eğrisinin üçüncü türevi

$$\alpha_1'''(t) = -\frac{16}{9} \frac{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} \left(\sqrt{3} \cos(t) \left(4e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} - e^{2\sqrt{3}t} + 4e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) + 9 \sin(t) \left(e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} - e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} \right) \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^4}$$

$$\alpha_2'''(t) = -\frac{16}{9} \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \left(\sqrt{3} \sin(t) \left(4e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} - e^{2\sqrt{3}t} + 4e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) + 9 \cos(t) \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} \right) \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^4}$$

$$\alpha_3'''(t) = -\frac{16\sqrt{3}}{9} \frac{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} \left(e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 4e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} + 1 \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^4}$$

olarak bulunur. $\tau_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t)$ burulma fonksiyonu

$$\tau_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t) = \frac{\sqrt{3} \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^2}{-3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 10e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 3}$$

biçiminde elde edilir.

Frenet ani dönme vektörü

$$f(t) = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{e^{\frac{-2\sqrt{3}}{3}t} \left(\sqrt{3} \cos(t) \left(e^{\frac{7\sqrt{3}}{3}t} - e^{\sqrt{3}t} \right) + 6 \sin(t) e^{\frac{7\sqrt{3}}{3}t} - 16 \sin(t) e^{\frac{5\sqrt{3}}{3}t} + 6 e^{\sqrt{3}t} \sin(t) \right)}{\left(-3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 10e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 3 \right) \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)}, \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{e^{\frac{-2\sqrt{3}}{3}t} \left(\sqrt{3} \sin(t) \left(e^{\frac{7\sqrt{3}}{3}t} - e^{\sqrt{3}t} \right) - 6 \cos(t) e^{\frac{7\sqrt{3}}{3}t} + 16 \cos(t) e^{\frac{5\sqrt{3}}{3}t} - 6 e^{\sqrt{3}t} \cos(t) \right)}{\left(-3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 10e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 3 \right) \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)}, \\ \frac{-6e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} + 3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 3}{-3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} + 10e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 3} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Eğri boyunca yüzey normali

$$n_{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2 \cos(t)}{\sqrt{\sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2}}, \frac{\sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2 \sin(t)}{\sqrt{\sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2}}, \\ \frac{\cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right) \sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)}{\sqrt{\sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2}} \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Yüzey üzerindeki $\alpha_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(t)$ eğrisinin $\mathbf{g}$ geodezik normalı

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) = & \left[\frac{1}{2} \sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right) \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1} \right) \left[\frac{-2 \sin(t) e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) \sqrt{\cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2 - 1}} \right. \right. \\ & + \left. \frac{\cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right) \left(\sin(t) \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} + 1 \right) + \sqrt{3} \cos(t) \left(-e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} + 1 \right) \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) \sqrt{\cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2 - 1}} \right] \\ & - \frac{1}{2} \sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right) \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1} \right) \left[\frac{-2 \cos(t) e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) \sqrt{\cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2 - 1}} \right. \\ & + \left. \frac{\cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right) \left(\cos(t) \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} + 1 \right) + \sqrt{3} \sin(t) \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) \sqrt{\cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2 - 1}} \right] \\ & \left. - \frac{1}{2} \sqrt{3 \left(\cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2 - 1 \right)} \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1} \right) \right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Öncelikle $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ olmak üzere

$$v(t) = \frac{4}{3} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \sqrt{\frac{3}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right)^2}}$$

ile gösterelim.

Normal eğrilik

$$k_n = \frac{1}{24} e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}t} \sqrt{3} \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1} \right)^2 \sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right) \left[\frac{\cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right) \left[2\sqrt{3} \left(e^{\sqrt{3}t} + e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right) - 6e^{\sqrt{3}t} \right]}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) \sqrt{\cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2 - 1}} \right. \\ \left. + \frac{6e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right) + \sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right) \left(3e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}t} (\sqrt{3} + 1) + 3\sqrt{3} - 3 - 10\sqrt{3}e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} \right)}{\left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) \sqrt{\cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2 - 1}} \right]$$

şeklinde elde edilir.

Geodezik eğrilik

$$k_g = \frac{1}{4} \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}t} \sqrt{3} \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1} \right) \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right) \sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right) \cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)}{\sqrt{\cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2 - 1}}$$

olarak bulunur.

Geodezik burulma

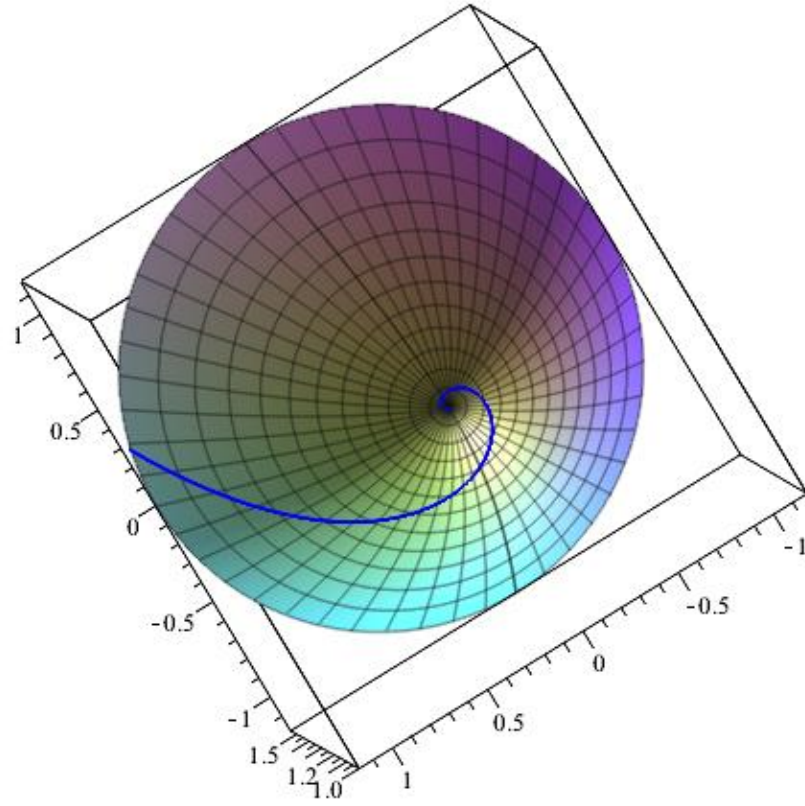
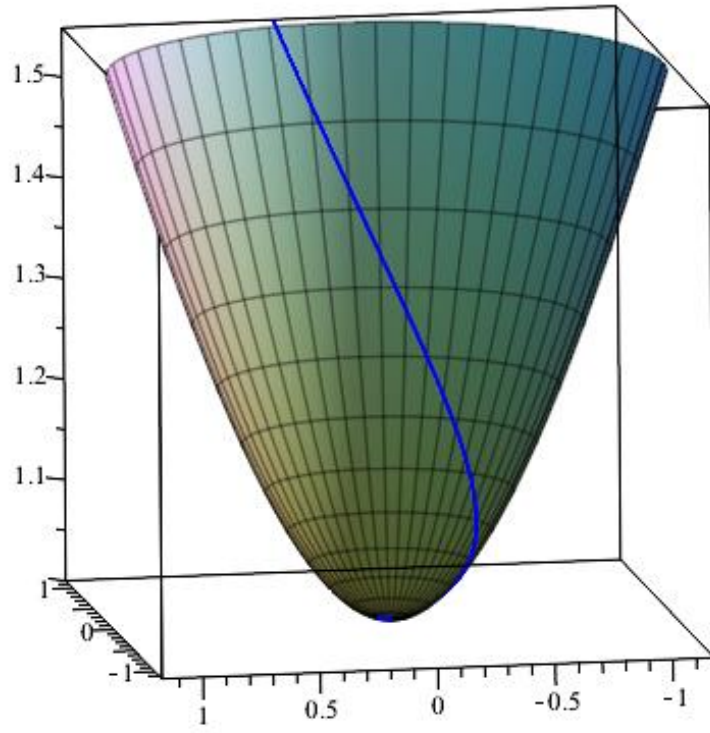
$$\tau_g = \frac{1}{8} \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}t} \sqrt{3} \cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right) \sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)}{\cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2 - 1} \left[e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} \cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2 \right. \\ \left. - 2e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right) \sinh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right) + \cosh \left(2 \operatorname{arctanh} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}t} \right)^2 - e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - 1 \right]$$

bulunmuş olur.

$H^+(r)$ Hiperboloid modeli yüzeyinin parametrik denklemi

$x(u, v) = (r \sinh u \cos v, r \sinh u \sin v, r \cosh u)$ ile verilir [1]. $-1 < u < 1$, $-2\pi < v < 2\pi$

için eğrinin farklı açılardan grafikleri Şekil 3.1.1. ile gösterilmiştir.



Şekil 3.1.1. $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$ için $H^+(r)$ Hiperboloid modeli yüzeyinin üzerinde yatan spiral eğrisi

Örnek 3.2. $\theta = \frac{\pi}{6}$, $r = 1$ alalım. Bu durumda $\lambda = \cot \theta = \sqrt{3}$ olur. Buradan

$$\alpha_{\lambda=\sqrt{3}}(t) = \left(\frac{2e^{\sqrt{3}t} \cos(t)}{-1+e^{\sqrt{3}t}}, \frac{2e^{\sqrt{3}t} \sin(t)}{-1+e^{\sqrt{3}t}}, \frac{1+e^{\sqrt{3}t}}{-1+e^{\sqrt{3}t}} \right)$$

denklemini için birinci türevler

$$\begin{aligned}\alpha_1'(t) &= -2 \frac{e^{\sqrt{3}t} \left(\cos(t) \sqrt{3} (e^{2\sqrt{3}t} + 1) + \sin(t) (e^{2\sqrt{3}t} - 1) \right)}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1)^2} \\ \alpha_2'(t) &= -2 \frac{e^{\sqrt{3}t} \left(\sin(t) \sqrt{3} (e^{2\sqrt{3}t} + 1) + \cos(t) (-e^{2\sqrt{3}t} + 1) \right)}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1)^2} \\ \alpha_3'(t) &= -4 \frac{\sqrt{3} e^{2\sqrt{3}t}}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1)^2}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\|\alpha'_{\sqrt{3}}(t)\| = \langle \alpha'_{\sqrt{3}}(t), \alpha'_{\sqrt{3}}(t) \rangle = 4 \sqrt{\frac{e^{2\sqrt{3}t}}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1)^2}}$$

bulunur. $\alpha_{\sqrt{3}}(t)$ eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$\mathbf{T}_{\sqrt{3}}(t) = (t_1(t), t_2(t), t_3(t))$$

için

$$\begin{aligned}t_1(t) &= -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2\sqrt{3}t} - 1}\right) \left(\cos(t) \sqrt{3} (e^{2\sqrt{3}t} + 1) + \sin(t) (e^{2\sqrt{3}t} - 1) \right)}{e^{2\sqrt{3}t} - 1}, \\ t_2(t) &= -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2\sqrt{3}t} - 1}\right) \left(\sin(t) \sqrt{3} (e^{2\sqrt{3}t} + 1) + \cos(t) (-e^{2\sqrt{3}t} + 1) \right)}{e^{2\sqrt{3}t} - 1}, \\ t_3(t) &= -\frac{\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2\sqrt{3}t} - 1}\right) \sqrt{3} e^{\sqrt{3}t}}{e^{2\sqrt{3}t} - 1}\end{aligned}$$

elde edilir.

$\alpha_{\sqrt{3}}(t)$ nin ikinci türevi

$$\begin{aligned}\alpha_1''(t) &= 4 \frac{e^{\sqrt{3}t} \left(\cos(t) (e^{4\sqrt{3}t} + 10e^{2\sqrt{3}t} + 1) + \sqrt{3} \sin(t) (e^{4\sqrt{3}t} - 1) \right)}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1)^3} \\ \alpha_2''(t) &= -4 \frac{e^{\sqrt{3}t} \left(-\sin(t) (e^{4\sqrt{3}t} + 10e^{2\sqrt{3}t} + 1) + \sqrt{3} \cos(t) (e^{4\sqrt{3}t} - 1) \right)}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1)^3} \\ \alpha_3''(t) &= 24 \frac{(e^{2\sqrt{3}t} + 1)e^{2\sqrt{3}t}}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1)^3}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\alpha_{\sqrt{3}}''(t) = (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t), \alpha_3''(t))$$

dir. $\alpha_{\sqrt{3}}(t)$ nin birinci türevi ile ikinci türevinin vektörel çarpımı

$$\alpha_{\sqrt{3}}'(t) \times \alpha_{\sqrt{3}}''(t) = \left(32 \frac{e^{3\sqrt{3}t} \sqrt{3} \sin(t)}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1)^3}, -32 \frac{e^{3\sqrt{3}t} \sqrt{3} \cos(t)}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1)^3}, 16 \frac{e^{2\sqrt{3}t}}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1)^2} \right)$$

şeklinde elde edilip bu ifadenin normu aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\|\alpha_{\sqrt{3}}'(t) \times \alpha_{\sqrt{3}}''(t)\| = 16 \sqrt{\frac{e^{4\sqrt{3}t} (e^{4\sqrt{3}t} - 14e^{2\sqrt{3}t} + 1)}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1)^6}}$$

Böylece $\alpha_{\sqrt{3}}(t)$ eğrisinin binormali

$$\mathbf{B}_{\sqrt{3}}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$$

olmak üzere

$$b_1(t) = -\frac{2e^{3\sqrt{3}t}\sqrt{3}\sin(t)}{(e^{2\sqrt{3}t}-1)^3\sqrt{-\frac{e^{4\sqrt{3}t}(e^{4\sqrt{3}t}-14e^{2\sqrt{3}t}+1)}{(e^{2\sqrt{3}t}-1)^6}}}$$

$$b_2(t) = \frac{2e^{3\sqrt{3}t}\sqrt{3}\cos(t)}{(e^{2\sqrt{3}t}-1)^3\sqrt{-\frac{e^{4\sqrt{3}t}(e^{4\sqrt{3}t}-14e^{2\sqrt{3}t}+1)}{(e^{2\sqrt{3}t}-1)^6}}}$$

$$b_3(t) = -\frac{e^{2\sqrt{3}t}}{(e^{2\sqrt{3}t}-1)^2\sqrt{-\frac{e^{4\sqrt{3}t}(e^{4\sqrt{3}t}-14e^{2\sqrt{3}t}+1)}{(e^{2\sqrt{3}t}-1)^6}}}$$

şeklinde bulunur. Buradan asli normali

$$N_{\sqrt{3}}(t) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t))$$

olmak üzere

$$n_1(t) = \frac{1}{2} \frac{e^{2\sqrt{3}t} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2\sqrt{3}t}-1}\right) \left(\cos(t)(14e^{2\sqrt{3}t}-e^{4\sqrt{3}t}-1) + \sqrt{3}\sin(t)(e^{4\sqrt{3}t}-1) \right)}{(e^{2\sqrt{3}t}-1)^4 \sqrt{-\frac{e^{4\sqrt{3}t}(e^{4\sqrt{3}t}-14e^{2\sqrt{3}t}+1)}{(e^{2\sqrt{3}t}-1)^6}}}$$

$$n_2(t) = -\frac{1}{2} \frac{e^{2\sqrt{3}t} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2\sqrt{3}t}-1}\right) \left(\sin(t)(e^{4\sqrt{3}t}-14e^{2\sqrt{3}t}+1) + \sqrt{3}\cos(t)(e^{4\sqrt{3}t}-1) \right)}{(e^{2\sqrt{3}t}-1)^4 \sqrt{-\frac{e^{4\sqrt{3}t}(e^{4\sqrt{3}t}-14e^{2\sqrt{3}t}+1)}{(e^{2\sqrt{3}t}-1)^6}}}$$

$$n_3(t) = \frac{(e^{2\sqrt{3}t}+1)3e^{3\sqrt{3}t} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2\sqrt{3}t}-1}\right)}{(e^{2\sqrt{3}t}-1)^4 \sqrt{-\frac{e^{4\sqrt{3}t}(e^{4\sqrt{3}t}-14e^{2\sqrt{3}t}+1)}{(e^{2\sqrt{3}t}-1)^6}}}$$

elde edilir. $\kappa_{\sqrt{3}}(t)$ eğrilik fonksiyonu

$$\kappa_{\sqrt{3}}(t) = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{-\frac{e^{4\sqrt{3}t}(e^{4\sqrt{3}t}-14e^{2\sqrt{3}t}+1)}{(e^{2\sqrt{3}t}-1)^6}}}{(e^{\sqrt{3}t})^3 \frac{1}{(e^{2\sqrt{3}t}-1)^3}}$$

olarak bulunur.

Burulma fonksiyonu için $\alpha_{\sqrt{3}}(t)$ eğrisinin üçüncü türevi,

$$\alpha_1'''(t) = -16 \frac{e^{\sqrt{3}t} \left(\sin(t) \left(e^{6\sqrt{3}t} + 6e^{4\sqrt{3}t} - 6e^{2\sqrt{3}t} - 1 \right) + 9\sqrt{3} \cos(t) \left(e^{4\sqrt{3}t} + e^{2\sqrt{3}t} \right) \right)}{\left(e^{2\sqrt{3}t} - 1 \right)^4}$$

$$\alpha_2'''(t) = -16 \frac{e^{\sqrt{3}t} \left(-\cos(t) \left(e^{6\sqrt{3}t} + 6e^{4\sqrt{3}t} - 6e^{2\sqrt{3}t} - 1 \right) + 9\sqrt{3} \sin(t) \left(e^{4\sqrt{3}t} + e^{2\sqrt{3}t} \right) \right)}{\left(e^{2\sqrt{3}t} - 1 \right)^4}$$

$$\alpha_3'''(t) = -48 \frac{\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}t} \left(e^{4\sqrt{3}t} + 4e^{2\sqrt{3}t} + 1 \right)}{\left(e^{2\sqrt{3}t} - 1 \right)^4}$$

olmak üzere

$$\alpha_{\sqrt{3}}'''(t) = \left(\alpha_1'''(t), \alpha_2'''(t), \alpha_3'''(t) \right)$$

olarak bulunur. Burulma fonksiyonu

$$\tau_{\sqrt{3}}(t) = \frac{\sqrt{3} \left(e^{2\sqrt{3}t} - 1 \right)^2}{-e^{4\sqrt{3}t} + 14e^{2\sqrt{3}t} - 1}$$

biçiminde elde edilir.

Frenet ani dönmesi

$$\begin{aligned} f(t) = & \left(\frac{2\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} \left(\cos(t) \sqrt{3} \left(e^{4\sqrt{3}t} - 1 \right) + 2\sin(t) e^{4\sqrt{3}t} - 16\sin(t) e^{2\sqrt{3}t} + 2\sin(t) \right)}{\left(-e^{4t\sqrt{3}} + 14e^{2\sqrt{3}t} - 1 \right) \left(e^{2\sqrt{3}t} - 1 \right)}, \right. \\ & \frac{2e^{\sqrt{3}t} \left(\sin(t) \sqrt{3} \left(e^{4\sqrt{3}t} - 1 \right) - 2\cos(t) e^{4\sqrt{3}t} + 16\cos(t) e^{2\sqrt{3}t} - 2\cos(t) \right)}{\left(-e^{4t\sqrt{3}} + 14e^{2\sqrt{3}t} - 1 \right) \left(e^{2\sqrt{3}t} - 1 \right)}, \\ & \left. \frac{-\left(e^{2\sqrt{3}t} - 1 \right)^2}{-e^{4t\sqrt{3}} + 14e^{2\sqrt{3}t} - 1} \right) \end{aligned}$$

bulunur.

Eğri boyunca yüzey normali

$$\mathbf{n}_\alpha(t) = \left(\frac{\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t})^2 \cos(t)}{\sqrt{\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t})^2}}, \frac{\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t})^2 \sin(t)}{\sqrt{\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t})^2}}, \frac{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}) \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t})}{\sqrt{\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t})^2}} \right)$$

olarak elde edilir.

Yüzey üzerindeki $\alpha_{\sqrt{3}}(t)$ eğrisinin $\mathbf{g}$ geodezik normali

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) = & \left(\frac{1}{2} \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}) \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2\sqrt{3}t} - 1}\right) \left[\frac{-2\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} \sin(t) \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t})}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1) \sqrt{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t})^2 - 1}} \right. \right. \\ & + \left. \frac{(\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}) [\sqrt{3} \sin(t)(e^{2\sqrt{3}t} + 1) + \cos(t)(-e^{2\sqrt{3}t} + 1)])}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1) \sqrt{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t})^2 - 1}} \right], \\ & - \frac{1}{2} \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}) \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2\sqrt{3}t} - 1}\right) \left[\frac{-2\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} \cos(t) \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t})}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1) \sqrt{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t})^2 - 1}} \right. \\ & + \left. \frac{(\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}) (\sqrt{3} \cos(t)(e^{2\sqrt{3}t} + 1) + \sin(t)(e^{2\sqrt{3}t} - 1)))}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1) \sqrt{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t})^2 - 1}} \right], \\ & \left. - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2\sqrt{3}t} - 1}\right) \sqrt{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t})^2 - 1} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Öncelikle $\mathbf{v}(t) = \|\alpha'(t)\|$ olmak üzere

$$\mathbf{v}(t) = 4e^{\sqrt{3}t} \sqrt{\frac{1}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1)^2}}$$

ile gösterelim.

Normal eğrilik

$$k_n = \frac{1}{8} e^{-\sqrt{3}t} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2\sqrt{3}t} - 1}\right)^2 \sinh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right) \left[\frac{6 \cosh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right) (e^{3\sqrt{3}t} + e^{\sqrt{3}t})}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1) \sqrt{\cosh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right)^2 - 1}} \right. \\ + \frac{2\sqrt{3} \cosh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right) (e^{\sqrt{3}t} - e^{3\sqrt{3}t})}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1) \sqrt{\cosh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right)^2 - 1}} \\ \left. + \frac{\sinh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right) (e^{4\sqrt{3}t} - 14e^{2\sqrt{3}t} - \sqrt{3} + \sqrt{3}e^{4\sqrt{3}t} + 1)}{(e^{2\sqrt{3}t} - 1) \sqrt{\cosh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right)^2 - 1}} \right]$$

şeklinde elde edilmiştir.

Geodezik eğrilik

$$k_g = \frac{1}{4} \frac{e^{-\sqrt{3}t} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2\sqrt{3}t} - 1}\right) (e^{2\sqrt{3}t} - 1) \sinh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right) \cosh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right)}{\sqrt{\cosh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right)^2 - 1}}$$

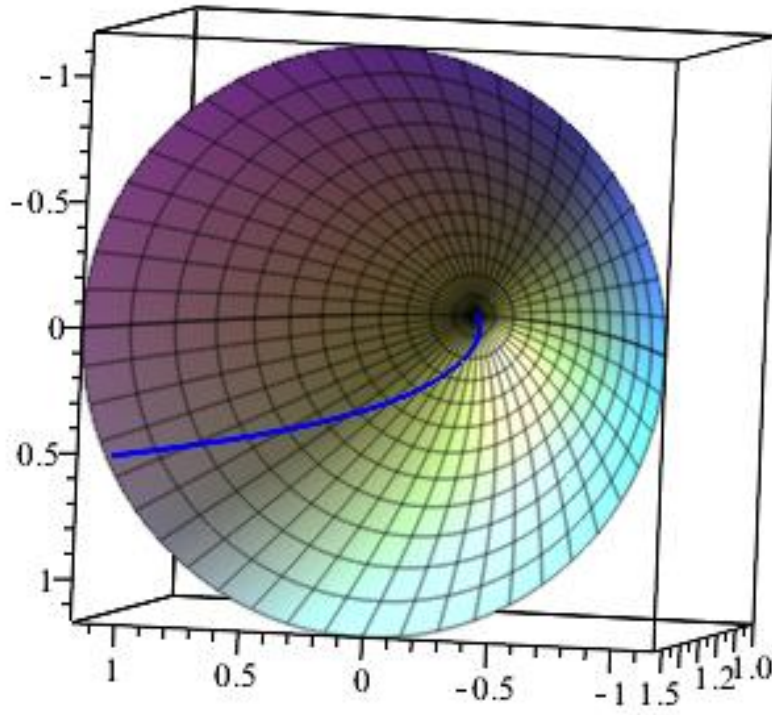
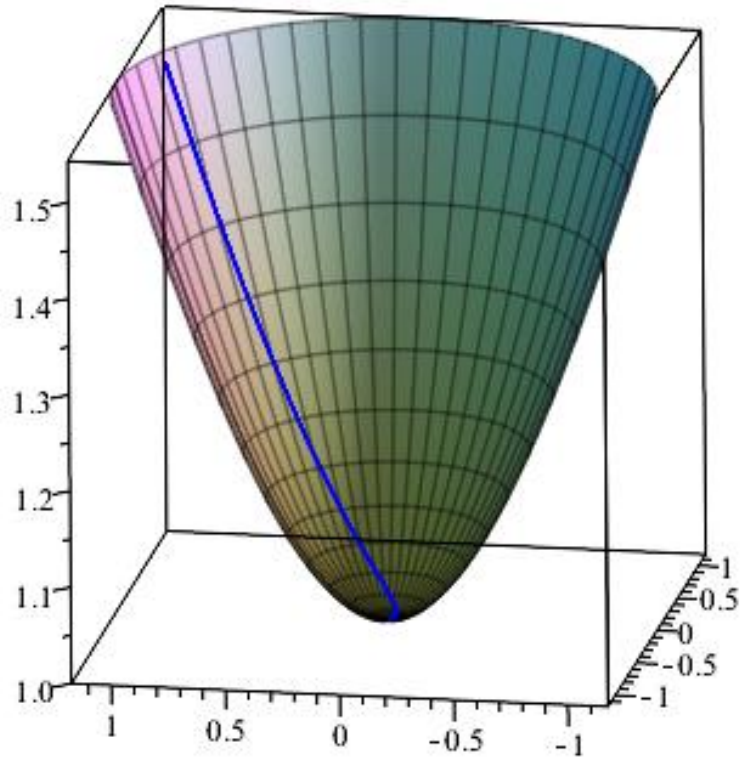
olarak bulunur.

Geodezik burulma

$$\tau_g = \frac{1}{8} \frac{e^{-\sqrt{3}t} \cosh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right) \sqrt{3} \sinh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right)}{\cosh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right)^2 - 1} \left[e^{2\sqrt{3}t} \cosh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right)^2 \right. \\ \left. - 2e^{\sqrt{3}t} \cosh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right) \sinh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right) + \cosh\left(2 \operatorname{arctanh} e^{\sqrt{3}t}\right)^2 - e^{2\sqrt{3}t} - 1 \right]$$

bulunmuş olur.

$H^+(r)$ Hiperboloid modelinin yüzeyi $x(u, v) = (r \sinh u \cos v, r \sinh u \sin v, r \cosh u)$ olarak verilmiştir [1]. $-1 < u < 1$, $-2\pi < v < 2\pi$ için eğrinin farklı açılardan grafikleri Şekil 3.1.2. gösterilmiştir.



Şekil 3.1.2. $\lambda = \sqrt{3}$ için $H^+(r)$ Hiperboloid modeli yüzeyinin üzerinde yatan spiral eğrisi

Örnek 3.3. $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = 1$ alalım. Bu durumda $\lambda = \cot \theta = 1$ olur. Buradan

$$\alpha_{\beta=1}(t) = \left(\frac{2e^t \cos(t)}{e^{2t} - 1}, \frac{2e^t \sin(t)}{e^{2t} - 1}, \frac{1 + e^{2t}}{e^{2t} - 1} \right)$$

denklemini için birinci türevler

$$\alpha'_1(t) = -2 \frac{e^t (\cos(t)(e^{2t} + 1) + \sin(t)(e^{2t} - 1))}{(e^{2t} - 1)^2}$$

$$\alpha'_2(t) = 2 \frac{e^t (\cos(t)(e^{2t} - 1) - \sin(t)(e^{2t} + 1))}{(e^{2t} - 1)^2}$$

$$\alpha'_3(t) = -4 \frac{e^{2t}}{(e^{2t} - 1)^2}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\|\alpha'_\beta(t)\| = \langle \alpha'_\beta, \alpha'_\beta \rangle = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{e^{2t}}{(e^{2t} - 1)^2}}$$

şeklinde bulunur. $\alpha_{\beta=1}(t)$ eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$\mathbf{T}_1(t) = (t_1(t), t_2(t), t_3(t))$$

için

$$t_1(t) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \operatorname{sgn} \frac{1}{(e^{2t} - 1)} (\cos(t)(e^{2t} + 1) + \sin(t)(e^{2t} - 1))}{e^{2t} - 1}$$

$$t_2(t) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \operatorname{sgn} \frac{1}{(e^{2t} - 1)} (-\sin(t)(e^{2t} + 1) + \cos(t)(e^{2t} - 1))}{e^{2t} - 1}$$

$$t_3(t) = -\frac{\operatorname{sgn} \frac{1}{(e^{2t} - 1)} \sqrt{2} e^t}{e^{2t} - 1}$$

elde edilir.

α_λ nın ikinci türevi için

$$\alpha_1''(t) = 4 \frac{e^t (4e^{2t} \cos(t) + \sin(t)(e^{4t} - 1))}{(e^{2t} - 1)^3}$$

$$\alpha_2''(t) = -4 \frac{e^t (-4e^{2t} \sin(t) + \cos(t)(e^{4t} - 1))}{(e^{2t} - 1)^3}$$

$$\alpha_3''(t) = 8 \frac{e^{2t} (e^{2t} + 1)}{(e^{2t} - 1)^3}$$

olmak üzere

$$\alpha_\beta''(t) = (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t), \alpha_3''(t))$$

olarak bulunur. $\alpha_\beta(t)$ nin birinci türevi ile ikinci türevinin vektörel çarpımı

$$\alpha_\beta'(t) \times \alpha_\beta''(t) = \left(16 \frac{e^{3t} \sin(t)}{(e^{2t} - 1)^3}, -16 \frac{e^{3t} \cos(t)}{(e^{2t} - 1)^3}, 8 \frac{e^{2t}}{(e^{2t} - 1)^2} \right)$$

elde edilir ve bu ifadenin normu aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\|\alpha_\beta'(t) \times \alpha_\beta''(t)\| = 8 \sqrt{-\frac{e^{4t} (e^{4t} - 6e^{2t} + 1)}{(e^{2t} - 1)^6}}$$

Böylece $\alpha_{\beta=1}(t)$ eğrisinin Binormalı

$$\mathbf{B}_1(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$$

olmak üzere

$$b_1(t) = -\frac{2e^{3t} \sin(t)}{(e^{2t}-1)^3 \sqrt{-\frac{e^{4t}(e^{4t}-6e^{2t}+1)}{(e^{2t}-1)^6}}}$$

$$b_2(t) = \frac{2e^{3t} \cos(t)}{(e^{2t}-1)^3 \sqrt{-\frac{e^{4t}(e^{4t}-6e^{2t}+1)}{(e^{2t}-1)^6}}}$$

$$b_3(t) = -\frac{e^{2t}}{(e^{2t}-1)^2 \sqrt{-\frac{e^{4t}(e^{4t}-6e^{2t}+1)}{(e^{2t}-1)^6}}}$$

şeklinde bulunur. Buradan asli normali

$$N_1(t) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t))$$

olmak üzere

$$n_1(t) = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{2} e^{2t} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2t}-1}\right) (\cos(t)(-e^{4t}+6e^{2t}-1) + \sin(t)(e^{4t}-1))}{(e^{2t}-1)^4 \sqrt{-\frac{e^{4t}(e^{4t}-6e^{2t}+1)}{(e^{2t}-1)^6}}}$$

$$n_2(t) = -\frac{\frac{1}{2} \sqrt{2} e^{2t} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2t}-1}\right) (\sin(t)(e^{4t}-6e^{2t}+1) + \cos(t)(e^{4t}-1))}{(e^{2t}-1)^4 \sqrt{-\frac{e^{4t}(e^{4t}-6e^{2t}+1)}{(e^{2t}-1)^6}}}$$

$$n_3(t) = \frac{(e^{2t}+1) \sqrt{2} e^{3t} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2t}-1}\right)}{(e^{2t}-1)^4 \sqrt{-\frac{e^{4t}(e^{4t}-6e^{2t}+1)}{(e^{2t}-1)^6}}}$$

elde edilir.

$\kappa_1(t)$ eğrilik fonksiyonu

$$\kappa_1(t) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2 \left[e^{4t} (e^{4t} - 6e^{2t} + 1) \right]}{(e^{2t} - 1)^6}} \frac{1}{(e^t)^3 \left(\frac{1}{(e^{2t} - 1)^2} \right)^{3/2}}$$

olarak bulunur. $\tau_1(t)$ Burulma fonksiyonu için $\alpha_\beta(t)$ eğrisinin üçüncü türevi

$$\begin{aligned} \alpha_1'''(t) &= -4 \frac{e^t \left(\sin(t) (e^{6t} + 9e^{4t} - 9e^{2t}) - \cos(t) (e^{6t} - 13e^{4t} - 13e^{2t} + 1) \right)}{(e^{2t} - 1)^4} \\ \alpha_2'''(t) &= -4 \frac{e^t \left(-\cos(t) (e^{6t} + 9e^{4t} - 9e^{2t} - 1) - \sin(t) (e^{6t} - 13e^{4t} - 13e^{2t} + 1) \right)}{(e^{2t} - 1)^4} \\ \alpha_3'''(t) &= -16 \frac{e^{2t} (e^{4t} + 4e^{2t} + 1)}{(e^{2t} - 1)^4} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\alpha_\beta'''(t) = \left(\alpha_1'''(t), \alpha_2'''(t), \alpha_3'''(t) \right)$$

olarak bulunur. $\tau_1(t)$ burulma fonksiyonu

$$\tau_1(t) = \frac{(e^{2t} - 1)^2}{-e^{4t} + 6e^{2t} - 1}$$

biçiminde elde edilir.

Frenet ani dönme vektörü,

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2e^t (\cos(t)(e^{4t} - 1) + 2\sin(t)e^{4t} - 8\sin(t)e^{2t} + 2\sin(t))}{(-e^{4t} + 6e^{2t} - 1)(e^{2t} - 1)}, \\ \frac{2e^t (\sin(t)(e^{4t} - 1) - 2\cos(t)e^{4t} + 8\cos(t)e^{2t} - 2\cos(t))}{(-e^{4t} + 6e^{2t} - 1)(e^{2t} - 1)}, \\ \frac{(e^{2t} - 1)^2}{-e^{4t} + 6e^{2t} - 1} \end{pmatrix}$$

bulunur.

Eğri boyunca yüzey normali

$$\mathbf{n}_\alpha(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2 \cos t}{\sqrt{\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2}}, \frac{\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2 \sin t}{\sqrt{\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2}}, \\ \frac{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t) \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2}{\sqrt{\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2}} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Yüzey üzerindeki α_β eğrisinin $\mathbf{g}$ geodezik normali

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) = & \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t) \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2t} - 1}\right) \left[\frac{2e^t \sin(t) \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t)}{(e^{2t} - 1) \sqrt{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2 - 1}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t) [-\sin(t)(e^{2t} + 1) + \cos(t)(e^{2t} - 1)])}{(e^{2t} - 1) \sqrt{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2 - 1}} \right] \right. \\ & \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t) \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2t} - 1}\right) \left[\frac{2e^t \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t) \cos(t)}{(e^{2t} - 1) \sqrt{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2 - 1}} \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t) [\cos(t)(-e^{2t} - 1) + \sin(t)(-e^{2t} + 1)])}{(e^{2t} - 1) \sqrt{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2 - 1}} \right] \right. \\ & \left. - \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2t} - 1}\right) \sqrt{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2 - 1} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Öncelikle $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ olmak üzere

$$v(t) = 2e^t \sqrt{\frac{2}{(e^{2t} - 1)^2}}$$

ile gösterelim.

Normal eğrilik

$$k_n = \frac{1}{4} e^{-t} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2t} - 1}\right) \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t) \left[\frac{\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t)(-6e^{2t} + 2e^{4t})}{(e^{2t} - 1)\sqrt{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2 - 1}} - \frac{4e^t \cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t)}{(e^{2t} - 1)\sqrt{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2 - 1}} \right]$$

şeklinde elde edilmiştir.

Geodezik eğrilik

$$k_g = \frac{1}{4} \frac{e^{-t} (e^{2t} - 1) \sqrt{2} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{e^{2t} - 1}\right) \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t) \cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t)}{\sqrt{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2 - 1}}$$

olarak bulunur.

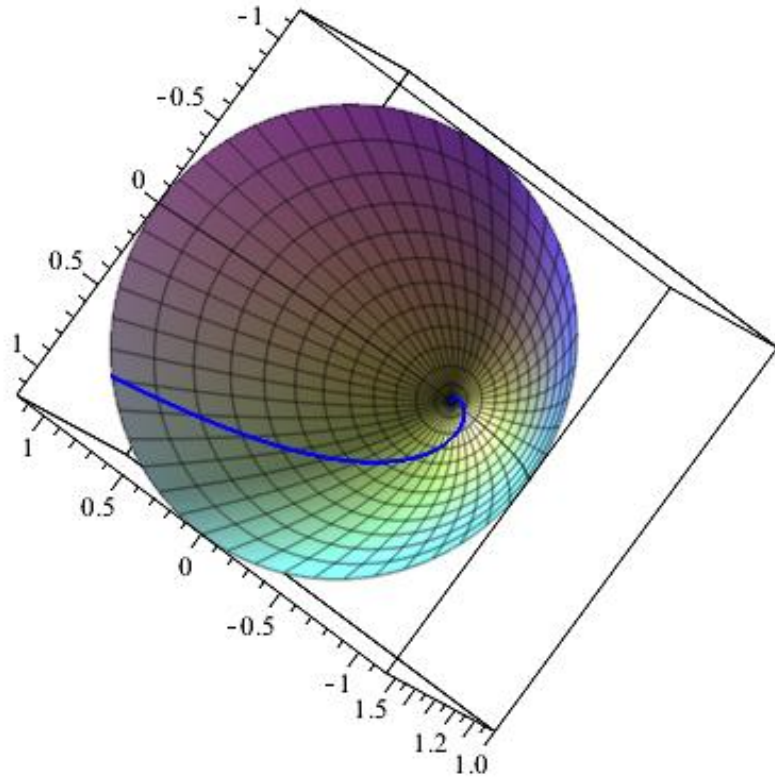
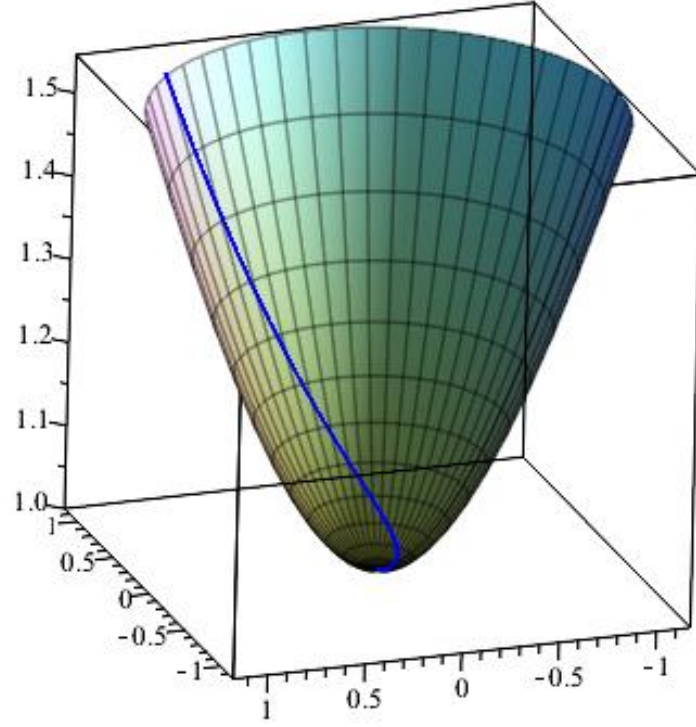
Geodezik burulma

$$\tau_g = \frac{1}{4} e^{-t} \cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t) \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t) \left[\frac{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2 (e^{2t} + 1)}{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2 - 1} - \frac{2e^t \cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2 \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^t) - e^{2t} - 1}{\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^t)^2 - 1} \right]$$

bulunmuş olur.

$H^+(r)$ Hiperboloid modeli yüzeyinin parametrik denklemi

$x(u, v) = (r \sinh u \cos v, r \sinh u \sin v, r \cosh u)$ olarak verilmiştir [1]. $-1 < u < 1$, $-2\pi < v < 2\pi$ için eğrinin farklı açılardan grafikleri aşağıdaki şekillerde Şekil 3.1.3. gösterilmiştir.



Şekil 3.1.3. $\lambda = 1$ için $H^+(r)$ Hiperboloid modeli yüzeyinin üzerinde yatan spiral eğrisi

Frenet ve Darboux çatısı arasındaki ilişki için (2.11) ve (2.12) denklemlerinden ve $\mathbf{g}$ ile $\mathbf{N}$ arasındaki merkez açısı ve $\mathbf{n}$ ile $\mathbf{B}$ arasındaki hiperbolik açının ϕ olmak üzere

$$\cosh \phi = - \frac{e^{2\lambda t} r^4 (\lambda^2 + 1) \cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) \sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})}{\sqrt{-\frac{e^{4\lambda t} r^4 (\lambda^2 + 1)^2 ((e^{2\lambda t} - 1)^2 - 4\lambda^2 e^{2\lambda t})}{(e^{2\lambda t} - 1)^6}} (e^{2\lambda t} - 1)^2 \sqrt{r^4 (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 - 1)}}$$

ve

$$\sinh \phi = - \left(\frac{\sqrt{\frac{r^2 (\lambda^2 + 1)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2}} r^3 e^{2\lambda t} (\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) (-4e^{4\lambda t} \lambda^2 - 4e^{\lambda t} \lambda^2)))}{\sqrt{-\frac{e^{4\lambda t} r^4 (\lambda^2 + 1)^2 ((e^{2\lambda t} - 1)^2 - 4\lambda^2 e^{2\lambda t})}{(e^{2\lambda t} - 1)^6}} \sqrt{r^4 (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 - 1) (e^{2\lambda t} - 1)^3}} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\frac{r^2 (\lambda^2 + 1)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2}} r^3 e^{2\lambda t} (\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) (\sinh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t}) (\lambda^2 e^{4\lambda t} + 6e^{2\lambda t} \lambda^2 + \lambda^2) - (e^{2\lambda t} - 1)^2))}{\sqrt{-\frac{e^{4\lambda t} r^4 (\lambda^2 + 1)^2 ((e^{2\lambda t} - 1)^2 - 4\lambda^2 e^{2\lambda t})}{(e^{2\lambda t} - 1)^6}} \sqrt{r^4 (\cosh(2 \operatorname{arctanh} e^{\lambda t})^2 - 1) (e^{2\lambda t} - 1)^3}} \right)$$

şeklinde elde edilir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, öncelikle $H^+(r)$ hiperboloid modeli üzerindeki spirallerin Frenet çatısı, Frenet türev formülleri, ani dönme vektörü hesaplanmıştır. İkinci olarak, bu eğrilerin Darboux çatısı, Darboux türev formülleri ve Darboux ani dönme vektörü elde edilmiştir.

Eğrinin diferansiyel geometrik özellikleri incelenmiştir. Bu eğrilerin helis ve düzlem eğrisi olmadığı görülmüştür. Eğrilikler $k_n \neq 0$, $k_g \neq 0$ ve $\tau_g \neq 0$ olmak üzere sırasıyla eğri asimptotik eğri, geodezik eğri ve eğrilik çizgisi olmadığı görülmüştür. Frenet ve Darboux çatıları arasındaki ilişki ortaya konmuştur.

λ nın $H^+(r)$ Hiperboloid modeli üzerinde $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\lambda = \sqrt{3}$ ve $\lambda = 1$ özel değerleri için Frenet ve Darboux çatıları ile eğrilik ve burulma incelenmiştir. Son olarak, λ nın bu özel değerleri için $H^+(r)$ Hiperboloid modeli yüzeyi üzerinde yatan spiral eğrilerinin Maple programı ile grafikleri çizilmiştir.

KAYNAKÇA

- [1] Aydinalp, M., Uğurlu, H. H. The causal spirals on the spheres of lorentz-minkowski 3-Space IR_1^3 . Algebras Groups And Geometries 37. 2021, 81 – 101.
- [2] López, R. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. International Electronic Journal of Geometry. 2014, 7(1), 44–107.
- [3] Uğurlu, H.H., Çalışkan, A. “Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi”, Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Manisa, Türkiye, 2012, 170 s.
- [4] Ünlütürk, Y., Savcı, Ü. Z. On non-unit speed curves in minkowski 3-space. Scientia Magna (8)4. 2012, 66 – 74.
- [5] Walrave, J. Curves and Surfaces in Minkowski Space. K.U. Leuven Üniversitesi, Faculteit Der Wetenschappen, Leuven, 1995, 147s. (Doktora Tezi).
- [6] Lazurcann, C., Spirals on surfaces of revolution, VisMath, 2014, 16 (2), 1-10.
- [7] Çiçek, V. Üç Boyutlu Öklidyen Ve Minkowski Uzayında Yüzeyler, Niğde Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Niğde, 2015, 77 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [8] Gürhan, N. Frenet Eğrisi İle Bağlantılı Eğriler Ve Uygulamaları, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İstanbul, 2013, 86 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [9] Öztürk, G. K-Sabit Eğriler. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Trabzon, 2019, 76 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [10] O'Neill, B. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, London, 1983.
- [11] DoCarmo, M.P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [12] Kazan, A. Minkowski 3-Uzayında Eğriler Ve Yüzeylerin Geometrisi. İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Malatya, 2011, 120 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [13] Ratcliffe J.G. Foundations of Hyperbolic Manifolds. Springer New York, 2006.
- [14] Babaarslan, M., Yaylı, Y. Space-like loxodromes on rotational surfaces in minkowski 3-space. Journal of mathematical analysis and applications. 2014, 409(1), 288-298.

[15] M, Çetin. Sabit Genişlikli Eğriler Ve Küresel Eğrilerin Diferansiyel Karakterizasyonları. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2015, 178 s. (Yüksek Lisans Tezi).

[16] Ali, A.T. Position vectors of spacelike general helices in Minkowski 3-space. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2010, 73(4), 1118–1126.

