



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**HADAMARD FONKSİYONEL KESİRLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ İÇİN İTERATİF YAKLAŞIM**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yıldırım DİNÇ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Samet MALDAR

AKSARAY, 2025

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 212342445 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Yıldırım DİNÇ** tarafından hazırlanan "**HADAMARD FONKSİYONEL KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ İÇİN İTERATİF YAKLAŞIM**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Samet MALDAR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Emirhan HACIOĞLU

Trakya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Doç. Dr. Yunus ATALAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 02 / 01 / 2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Fazlıye KARABÖRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Yıldırım DİNÇ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezinin tamamlanmasında emeği geçen herkese en içten teşekkürlerimi sunarım. Öncelikle tez çalışmam boyunca bilgi ve deneyimleriyle yol gösteren çalışmama yön veren danışmanım Doç. Dr. Samet MALDAR'a en derin şükranlarımı sunarım.

Tez savunma süresince yapıcı eleştirileri ve değerli katkılarıyla çalışmamın niteliğini yükselten jüri üyeleri Doç. Dr. Yunus ATALAN ve Dr. Öğr. Üyesi Emirhan HACIOĞLU'na teşekkür ederim.

Değerli katkılarınız için hepinize teşekkür ederim.

Yıldırım DİNÇ
Aksaray, 2025

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER.....	3
3. BİR DÖRT ADIMLI İTERASYON İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ	11
3.1 (STBn) İterasyonu ve Veri Bağlılığı	11
3.2 Hadamard Fonksiyonel Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Sabit Nokta Teorisi ile Çözümü ve Veri Bağlılığı	21
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	39
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ.....	44

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HADAMARD FONKSİYONEL KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ İÇİN İTERATİF YAKLAŞIM

Yıldırım DİNÇ

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Samet MALDAR

ÖZET

Sabit nokta teorisinde, lineer olmayan denklemlerin yaklaşık olarak çözülebilmesi için iterasyon yöntemleri etkin bir araç olmuştur. Bu tez çalışmasında, literatürde bulunan ve sabit noktayı mümkün olduğunca az sayıda adımla hesaplamak iddiası ile tanımlanan bir dört adımlı iterasyon yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem ile belirli şartlar altında veri bağıllığı sonucu elde edilmiştir. Bu sonuç bir örnek ile desteklenmiştir. Ayrıca bu iterasyon yöntemi mevcut literatürde yer alan sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir. Bu dört adımlı iterasyon kullanılarak uygun koşullar altında bir Hadamard fonksiyonel kesirli diferansiyel denklemin çözümü incelenmiştir. Bu diferansiyel denklem için aynı iterasyon yönteminden yararlanarak belirli şartlar altında veri bağıllığı sonucuna varılmıştır. Ek olarak bir örnek ile desteklenmiştir. Son olarak elde edilen sonuçlara yer verilmiştir ve gelecekte yapılacak çalışmalara yönelik öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, iterasyon yöntemi, veri bağıllığı, Hadamard fonksiyonel kesirli diferansiyel denklem.

Ocak, 2025; 44 sayfa

M.Sc. THESIS

**ITERATIVE APPROACH TO SOLUTION OF THE HADAMARD
FUNCTIONAL FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION**

Yıldırım DİNÇ

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Samet MALDAR

ABSTRACT

In fixed point theory, iteration methods have been an effective tool for solving nonlinear equations approximately. In this thesis, a four-step iteration method, which is found in the literature and is defined with the claim of calculating the fixed point with the fewest possible steps, has been used. With this method, a data dependency result has been obtained under certain conditions. This result has been supported with an example. In addition, this iteration method has included fixed point theorems in the current literature. Using this four-step iteration, the solution of a Hadamard functional fractional differential equation has been examined under appropriate conditions. Using the same iteration method for this differential equation, a data dependency result has been reached under certain conditions. In addition, it has been supported with an example. Finally, the results obtained are given and suggestions for future studies are presented.

Keywords: Fixed point, iteration method, data dependence, Hadamard functional fractional differential equation.

January, 2025; 44 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. T dönüşümünün zayıf contraction şartını sağlaması.....	18
---	----



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. (3.32) ile verilen iterasyon yönteminin yakınsaması.....	20
---	----



1. GİRİŞ

Matematikte lineer olmayan denklem veya denklem sistemlerinin çözümünün varlığının veya bu çözümlerin tekliklerinin belirlenmesi önemli bir yer tutmaktadır. Bu belirtilen lineer olmayan denklemler diferansiyel denklemler, integral denklemler, fark denklemleri, kısmi diferansiyel denklemler, kaotik sistem denklemleri, optimizasyon ve kısıtlamalı denklem sistemleri, denge problemleri, oyun teorisi gibi denklemleri içermektedir. Bu denklemlerin çözümüne ulaşmak ya da yaklaşık olarak çözümü elde edebilmek için matematikte birçok yöntem bulunmaktadır. Örneğin, bir lineer olmayan denklemin sayısal çözümüne ulaşmak için, uygun şartlar altında Newton yöntemi tercih edilebilir. Ayrıca, doğrudan analitik çözüm mümkün olmadığı durumlarda ve iteratif bir yaklaşım gerektiğinde de Newton yöntemi kullanılabilir. Benzer şekilde, lineer olmayan denklemlerin yaklaşık olarak çözümünde, özellikle sabit noktaların bulunmasında, sabit nokta iterasyon yöntemleri de sıkça tercih edilmektedir. Bu doğrultuda, 19. yüzyıla Picard [1] iteratif yaklaşım yöntemini sistematik hale getirerek, formülize edip diferansiyel denklemlerin çözümünde uygulamıştır. Burada kullanılan bu iteratif yaklaşıma Picard iterasyon yöntemi [1] veya ardışık yaklaşımlar yöntemi adı verilir. Picard ek olarak bu süreçlerin yakınsama garantilerini formalize etmiştir [1]. Iterasyon yöntemleri, bir T fonksiyonun $T(x) = x$ denklemini sağlayan x değerlerini hesaplamak üzere kullanılan etkin bir yöntemdir. Bu x değerlerine T fonksiyonun sabit noktası olarak adlandırılır [2]. Sabit nokta teorisinde uygun şartlarda belirli kurallar altında sıklıkla iterasyon yöntemleri tanımlanmaktadır. Bu bağlamda, 1953 yılında Mann iterasyonu [3], 1974 yılında Ishikawa iterasyonu [4], 2000 yılında Noor iterasyonu [5], Agarwal iterasyonu [6], Khan tarafından tanımlanan Picard Mann hibrit iterasyonu [7] gibi birçok iterasyon yöntemleri örnek olarak verilebilir. Bu bağlamda iterasyon yöntemleri kullanılarak birçok sabit nokta sonuçları ve teoremleri elde edilmiş ve edilmektedir.

Sabit nokta teorisindeki önemli bazı teoremlerden bahsetmek gerekirse; 1922 yılında Banach tarafından ortaya konulan Banach sabit nokta teoremi ile tam metrik uzaylarda sabit noktanın tekliği garanti altına almıştır [8]. Ayrıca 1909 yılında Brouwer tarafından [2], 1930 yılında Schauder tarafından [2], 1968 yılında Kannan tarafından [9], 1972 yılında Chatterjea tarafından [10] ve aynı yıl Zamfirescu tarafından [11] ortaya konulan sabit nokta teoremlerinde bahsetmek mümkündür. Günümüzde etkin

olarak kullanılan bu teoremlere ek birçok teorem ispatlanmakla birlikte, yeni teoremler ortaya konulmaktadır [12-18]. Ayrıca elde edilen teoremlerin ya da sonuçların daha genel hallerini ortaya koymak ayrı ve önemli çalışma alanlarından biridir. 1969 yılında Nadler tarafından Banach sabit nokta teoremini küme değerli dönüşümlere genellemesini [19] bu yöndeki çalışmalara örnek olarak verilebilir.

Daha önceki tartışmalara ek olarak sabit nokta teorisinde yakınsaklık, yakınsaklık anlamında denkliği, yakınsaklık hızı, veri bağılılığı ve kararlılık gibi etkin olarak araştırmacıların ilgisini çeken kavramlardan söz edilebilir [20-26].

Bu tez çalışmasında ise 2020 yılında Shatanawi vd. [27] tarafından tanımlanan dört adımlı iterasyon yöntemi kullanılarak zayıf contraction şartı altında veri bağılılığı sonucu elde edilmesi amaçlanmıştır. Shatanawi vd. [27] tarafından verilen örnek yeniden revize edilerek uygun şartlar altında veri bağı olduğu sonucunun bir uygulaması verilmiştir. Ayrıca, 2024 yılında Balachandra vd. [28] tarafından, Hadamard fonksiyonel kesirli diferansiyel denklemlerin sabit nokta teoremlerini kullanarak, uygun koşullar altında varlık ve teklik teoremleri ispatlamışlardır. Verilen bu şartlar altında bir Hadamard fonksiyonel kesirli diferansiyel denklem çözümü bu iterasyon yöntemi kullanarak incelenmiştir. Son olarak bu denklemin veri bağılılığı sonucuna varılmıştır ve örneklendirilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde tezin diğer bölümde kullanılan temel tanım, teorem, lemma ve sonuçlardan bahsedilecektir.

Tanım 2.1. X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için;

$$M1) d(x, y) \geq 0$$

$$M2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M3) d(x, y) = d(y, x)$$

$$M4) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şartlarını sağlayan d fonksiyonuna üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu, (X, d) ikilisine metrik uzay denir [29].

Tanım 2.2 X bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir [29].

Tanım 2.3 X bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Cauchy dizisi denir [29].

Tanım 2.4 (X, d) metrik uzayında alınan her keyfi cauchy dizisi yakınsak ise tam metrik uzay denir [29].

Tanım 2.5 (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için, $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir. f , X 'in her noktasında sürekli ise, f dönüşümüne X 'te süreklidir denir [30]

Tanım 2.6 L boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. $+: L \times L \rightarrow L$ ve $\cdot: K \times L \rightarrow L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L 'ye K cismi üzerinde vektör uzay (lineer uzay) denir:

L kümesi $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

V1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$

V2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$

V3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır,

V4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır,

V5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$

$x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

V6. $\alpha \cdot x \in L$

V7. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

V8. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

V9. $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

V10. $1 \cdot x = x$ dir (Burada 1, K 'nın birim elemanıdır).

$K = \mathbb{R}$ ise L ye reel vektör uzay, $K = \mathbb{C}$ ise L 'ye kompleks vektör uzay adı verilir [31].

Tanım 2.7 L bir reel vektör uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise, A kümesine konvektir denir [31].

Tanım 2.8 X bir vektör uzay olsun ve K cismi $\mathbb{R}$ olmak üzere, $\|\cdot\|: X \rightarrow K$ fonksiyonunun x noktasındaki değeri $\|x\|$ ile verilsin. Bu fonksiyon

N1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N2. Her $\alpha \in K$ ve her $x \in X$ için $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

N3. Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [32].

Tanım 2.9 X normlu vektör uzay olsun. X uzayı, $d(x, y) = \|x - y\| (x, y \in X)$ norm metriğine göre tam ise X 'e Banach uzayı denir [33].

Tanım 2.10 X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T 'nin sabit noktası denir ve T 'nin tüm sabit noktalarının kümesi F_T , $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.11 X bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \cdot d(x, y) \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı mevcut ise T 'ye bir Lipschitzian dönüşüm,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \quad (2.2)$$

ise T 'ye bir nonexpansive dönüşüm,

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \cdot d(x, y) \quad (2.3)$$

olacak şekilde en az bir $\lambda \in [0,1)$ sayısı bulunabiliyorsa T 'ye contraction dönüşüm,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) \quad (2.4)$$

ise T 'ye strict contraction dönüşüm [2],

$$d(Tx, Ty) \leq a d(x, y) + b d(x, Ty) \quad (2.5)$$

olacak şekilde en az bir $a \in [0,1)$ sayısı, $b \geq 0$ bulunabiliyorsa T 'ye zayıf contraction dönüşüm denir [34]. Bu verilen dönüşüm sınıflarının norm hali $d(x, y) = \|x - y\|$ eşitliği göz önüne alınarak yeniden ifade edilebilir.

$$\|Tx - Ty\| \leq a \|x - y\| + b \|x - Ty\| \quad (2.6)$$

Birinci kısımda belirtilen bazı teoremlerin ifadeleri:

Teorem 2.12 X bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ (2.3) şartını sağlayan bir contraction dönüşüm olsun. Bu durumda T, X 'te bir tek x sabit noktasına sahiptir ve herhangi bir $x_0 \in X$ için

$$x_{n+1} = Tx_n \quad (2.7)$$

burada $n = 0, 1, 2, \dots$ ile tanımlı Picard iterasyonu [1] tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ iterasyon dizisi x noktasına yakınsar. Bu teorem Banach Sabit Nokta Teoremi denir [8].

Teorem 2.13 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f 'nin $[a, b]$ aralığında bir sabit noktası vardır [2].

Teorem 2.14 X bir Banach uzayı, C , X 'in kompakt, konveks alt kümesi ve $f: C \rightarrow C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f , C 'de en az bir sabit noktaya sahiptir [2].

Teorem 2.15 X bir tam metrik uzayı, $T: C \rightarrow C$ (2.8) ile verilen bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda_1(d(x, y) + d(x, Ty)) \quad (2.8)$$

olacak şekilde bir $\lambda_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı varsa bu durumda T bir picard operatörüdür [9].

Teorem 2.16 X bir tam metrik uzayı, $T: C \rightarrow C$ (2.9) ile verilen bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda_2(d(x, Ty) + d(y, Tx)) \quad (2.9)$$

olacak şekilde bir $\lambda_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı varsa bu durumda T bir picard operatörüdür [10].

Teorem 2.17 X bir tam metrik uzayı, $T: C \rightarrow C$ (2.3), (2.8), (2.9) ile verilen dönüşümlerden en az birisinin doğru olduğu ve $\lambda \in [0, 1)$, $\lambda_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $\lambda_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ şartlarını sağlayan $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ sayıları varsa bu durumda T bir picard operatörüdür [11].

Birinci kısımda belirtilen iterasyonlara ek olarak sıklıkla karşılaşılan bazı iterasyon yöntemlerini adım sırasına göre verilirse:

İterasyon yöntemlerinin en genel hali: $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = f(T, x_n), \end{cases} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır. Burada X bir normlu uzay. f bir fonksiyon, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşümdür [2].

Tanım 2.18 Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}Tx_n \end{cases} \quad (2.11)$$

şeklindeki iterasyon yöntemine Krasnoselskii iterasyon yöntemi denir [35].

Tanım 2.19 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \in [0, 1]$ belirli şartları sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \end{cases} \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine (M_n) Mann iterasyon yöntemi denir [3].

Tanım 2.20 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ şartlarını sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \quad (2.13)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine (I_n) Ishikawa iterasyon yöntemi denir [4].

Literatürde bulunan bazı üç adımlı iterasyonlar ise:

Tanım 2.21 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ şartlarını sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)T x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \quad (2.14)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine (ARS_n) S iterasyon yöntemi denir [36].

Tanım 2.22 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ şartlarını sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \quad (2.15)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine (N_n) Noor iterasyon yöntemi denir [5].

Tanım 2.23 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ şartlarını sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)T y_n + \alpha_n T z_n \\ y_n = (1 - \beta_n)T x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanan iterasyon yöntemine Abbas ve Nazır İterasyon Yöntemi denir [37].

Tanım 2.24 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ şartlarını sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Ty_n + \alpha_nTz_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nz_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_nTx_n \end{cases} \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanan iterasyon yöntemine (S_n) Sintunavarat ve Pitea iterasyon yöntemi denir [38].

Dört adımlı bazı iterasyon yöntemleri ise

Tanım 2.25 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \mu_n \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_nTy_n \\ y_n = (1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)w_n + \gamma_nTw_n \\ w_n = (1 - \mu_n)x_n + \mu_nTx_n \end{cases} \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanan iterasyon yöntemine (EY_n) İterasyon Yöntemi denir [39].

Tanım 2.21 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \mu_n \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_nTy_n \\ y_n = (1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)w_n + \gamma_nTw_n \\ w_n = (1 - \mu_n)x_n + \mu_nTx_n \end{cases} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanan iterasyon yöntemine (MS_n) İterasyon Yöntemi denir [40].

Tanım 2.22 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \mu_n \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_nTy_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nTz_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_nTw_n \\ w_n = (1 - \mu_n)x_n + \mu_nTx_n \end{cases} \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanan iterasyon yöntemine (AH_n) İterasyon Yöntemi denir [41].

Tanım 2.23 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \mu_n \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Ty_n + \alpha_nTz_n \\ y_n = (1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)w_n + \gamma_nTw_n \\ w_n = (1 - \mu_n)x_n + \mu_nTx_n \end{cases} \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanan iterasyon yöntemine (GY_n) İterasyon Yöntemi denir [42].

Tanım 2.24 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ iki dizi olsun. Bu diziler sırasıyla α ve β limitlerine sahip olsunlar.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_n - \alpha|}{|\beta_n - \beta|} = l$$

olmak üzere;

1.Eğer $l = 0$ ise $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin α noktasına yakınsaması, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin β noktasına yakınsaması daha hızlıdır.

2.Eğer $0 < l < \infty$ ise $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizilerinin yakınsama hızları eşittir [43].

Tanım 2.25 X bir normlu uzay, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ iki dizi olsun. kabul edelim ki $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri $z \in X$ noktasına yakınsasın. 0 yakınsayan $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ negatif olmayan diziler $\|p_n - z\| \leq \alpha_n$ ve $\|q_n - z\| \leq \beta_n$ şartını sağlasın. Eğer $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı 0 yakınsıyorsa, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi de z noktasına $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsıyor denir [43].

Tanım 2.26: Bir X kümesi içinde tanımlı $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri verildiğinde, bu dizilerin her bir terimi sıfıra yaklaşırsa, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0 \quad (2.22)$$

şartı sağlanıyorsa, bu iki dizi denk olarak kabul edilir [44].

Tanım 2.27 Bir X kümesi içinde tanımlı $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri verildiğinde, her $k \in \mathbb{N}$ için bir $\varepsilon(k)$ değeri varsa ve $n \geq k$ olduğunda

$$\|x_n - y_n\| \leq \varepsilon(k) \quad (2.23)$$

şartı sağlanıyorsa $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin yaklaşık dizisi olarak adlandırılır [2].

Tanım 2.28 $T, S: X \rightarrow X$ iki operatör olsun. Her $x \in X$ ve uygun bir $\varepsilon > 0$ için

$$\|Tx - Sx\| \leq \varepsilon$$

ise S 'ye T 'nin bir yaklaşım operatörü denir [45].

Lemma 2.29 $\{a_n\}$ negatif olmayan bir dizi, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n \in (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve $\eta_n \geq 0$ olsun. Her $n \geq n_0$ için

$$a_{n+1} \leq (1 - \mu_n)a_n + \mu_n\eta_n$$

eşitsizliğinin sağlanacağı şekilde bir n_0 sayısı mevcut olsun. Bu durumda

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \eta_n$$

eşitsizliği sağlanır [45].

.

3. BİR DÖRT ADIMLI İTERASYON İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3.1 (SBT_n) İterasyonu ve Veri Bağlılığı

2020 yılında Shatanawi vd. [27], sabit noktayı mümkün olduğunca az sayıda adımla hesaplamak veya tahmin etmek için yeni bir iterasyon yöntemi tanımladılar. ‘Four-Step Iteration Scheme to Approximate Fixed Point for Weak Contractions, CMC, vol. 64, no. 3, pp. 1491-1504, 2020’ başlıklı çalışmada, Teorem 1’de, tanımlanan bu dört adımlı iterasyon yönteminin, Tanım 2.24 ile Tanım 2.25’teki ifadeler kullanılarak ve belirli şartlar altında, Sintunavarat ve Pitea [38], Agarwal, O'Regan ve Sahu [36], Mann [3], Ishikawa [5] tarafından tanımlanan iterasyon yöntemlerinden daha hızlı yakınsadığını ispatlanmıştır. Ayrıca aynı makalede bu iddiasını desteklemek için MATLAB programından yararlanılarak bazı sayısal örnekler verilmiştir. Son olarak Newton'un soğuma kanunundan ortaya çıkan bir problemi uygulamalı olarak ortaya koymuşlardır. Bu makalede dönüşüm sınıfı olarak zayıf contraction şartı kullanılmıştır [27]. Bu iterasyon yöntemi Shatanawi vd. [27] tarafından

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)Tz_n + \alpha_nTy_n \\y_n &= (1 - \beta_n)Tz_n + \beta_nTw_n \\z_n &= (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_nw_n \\w_n &= (1 - \mu_n)x_n + \mu_nTx_n\end{aligned}\tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanmış ve (SBT_n) olarak adlandırılmıştır. Burada $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \mu_n$ kontrol dizileridir. Ayrıca [27] ile verilen çalışmadaki Teorem 1 de $\alpha_n \in [\alpha, 1 - \alpha], \beta_n \in [\beta, 1 - \beta], \gamma_n \in [\gamma, 1 - \gamma], \mu_n \in [\mu, 1 - \mu]$, $\alpha, \beta, \gamma, \mu \in (1, \frac{1}{2})$ ve $\alpha < \frac{\gamma}{1-\gamma}$ olarak alınmıştır. Fakat (3.1) ile verilen iterasyon yöntemi kullanılarak dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağlı olup olmadığı daha önce araştırılmamıştır. Bu nedenle ilk olarak sabit nokta teorisinde veri bağlılığı kavramı üzerinde durulacaktır.

(3.1) ile verilen iterasyon yöntemi kullanılarak zayıf contraction şartı altında dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağlılığı incelenecektir:

Teorem 3.1 X bir Banach uzayı ve C bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere $T, S: C \rightarrow C$, (2.5) ile verilen şartı sağlayan zayıf contraction operatörler olsun. p sabit noktasına sahip S operatörü, p^* sabit noktasına sahip T 'nin

yaklaşım operatörü olsun. T operatörü için (3.1) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin. S operatörü için aşağıda verilen iterasyondan elde edilen dizi $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (1 - \alpha_n)Sk_n + \alpha_n Sv_n \\ v_n &= (1 - \beta_n)Sk_n + \beta_n Sh_n \\ k_n &= (1 - \gamma_n)u_n + \gamma_n h_n \\ h_n &= (1 - \mu_n)u_n + \mu_n Su_n \end{aligned} \quad (3.2)$$

burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \in [0,1]$ ve $\frac{1}{2} \leq \alpha_n$ dir. $\varepsilon > 0$ ve $\delta = \frac{\delta_1}{(1-\delta_2)} < 1$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ için $u_n \rightarrow p^*$ ise

$$\|p - p^*\| \leq \frac{[2 + 2\delta\gamma_n\mu_n + \delta^2\beta_n\mu_n + \delta^2(1 - \beta_n)\gamma_n\mu_n + \delta]\varepsilon}{1 - \delta}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat (2.5) ile verilen zayıf contraction şartı, (3.1) ve (3.2) ile verilen iterasyon yöntemleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} \|w_n - h_n\| &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|Tx_n - Su_n\| \\ &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|Tx_n - Tu_n\| + \mu_n\|Tu_n - Su_n\| \\ &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|Tx_n - Tu_n\| + \mu_n\varepsilon \end{aligned} \quad (3.3)$$

burada

$$\begin{aligned} \|Tx_n - Tu_n\| &\leq \delta_1\|x_n - u_n\| + \delta_2\|x_n - Tx_n\| \\ &\leq \delta_1\|x_n - u_n\| + \delta_2\|x_n - Tx_n\| + \delta_2\|Tx_n - Tu_n\| \\ (1 - \delta_2)\|Tx_n - Tu_n\| &\leq \delta_1\|x_n - u_n\| + \delta_2\|x_n - Tx_n\| \\ \|Tx_n - Tu_n\| &\leq \frac{\delta_1}{(1-\delta_2)}\|x_n - u_n\| + \frac{\delta_2}{(1-\delta_2)}\|x_n - Tx_n\| \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir. Ayrıca

$$A_1 = \frac{\delta_2}{(1 - \delta_2)}\|x_n - Tx_n\| \quad (3.5)$$

$$\delta = \frac{\delta_1}{(1 - \delta_2)}$$

olarak tanımlansın, (3.4) eşitsizliği ve (3.5) eşitlikleri (3.3) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|w_n - h_n\| &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|Tx_n - Tu_n\| + \mu_n\varepsilon \\ &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\delta\|x_n - u_n\| + \mu_nA_1 + \mu_n\varepsilon \\ &\leq (1 - \mu_n(1 - \delta))\|x_n - u_n\| + \mu_nA_1 + \mu_n\varepsilon \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|z_n - k_n\| &\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - u_n\| + \gamma_n\|w_n - h_n\| \\ &\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - u_n\| + \gamma_n(1 - \mu_n(1 - \delta))\|x_n - u_n\| \\ &\quad + \gamma_n\mu_nA_1 + \gamma_n\mu_n\varepsilon \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir. Burada

$$a_1 = (1 - \mu_n(1 - \delta)) \quad (3.8)$$

(3.8) eşitliği (3.7) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\|z_n - k_n\| \leq (1 - \gamma_n(1 - a_1))\|x_n - u_n\| + \gamma_n\mu_nA_1 + \gamma_n\mu_n\varepsilon_n \quad (3.9)$$

ve

$$\begin{aligned} \|y_n - v_n\| &\leq (1 - \beta_n)\|Tz_n - Sk_n\| + \beta_n\|Tw_n - Sh_n\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\|Tz_n - Tk_n\| + (1 - \beta_n)\|Tk_n - Sk_n\| \\ &\quad + \beta_n\|Tw_n - Th_n\| + \beta_n\|Th_n - Sh_n\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\|Tz_n - Tk_n\| + \beta_n\|Tw_n - Th_n\| + \varepsilon \end{aligned} \quad (3.10)$$

olur. Burada işlemlerde kolaylık sağlaması açısından aşağıdaki eşitlikler verilmiştir.

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\delta_2}{(1 - \delta_2)} \|w_n - Tw_n\| \\ A_3 &= \frac{\delta_2}{(1 - \delta_2)} \|z_n - Tz_n\| \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$A_4 = \frac{\delta_2}{(1 - \delta_2)} \|y_n - Ty_n\|$$

olarak alınır. (3.5) ve (3.11) eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|Tw_n - Th_n\| &\leq \frac{\delta_1}{(1 - \delta_2)} \|w_n - h_n\| + \frac{\delta_2}{(1 - \delta_2)} \|w_n - Tw_n\| \\ &= \frac{\delta_1}{(1 - \delta_2)} \|w_n - h_n\| + A_2 \\ &= \delta \|w_n - h_n\| + A_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

ve

$$\begin{aligned} \|Tz_n - Tk_n\| &\leq \frac{\delta_1}{(1 - \delta_2)} \|z_n - k_n\| + \frac{\delta_2}{(1 - \delta_2)} \|z_n - Tz_n\| \\ &= \frac{\delta_1}{(1 - \delta_2)} \|z_n - k_n\| + A_3 \\ &= \delta \|z_n - k_n\| + A_3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklinde elde edilir. (3.5), (3.8) ve (3.11) eşitlikleri, (3.6), (3.9), (3.12) ve (3.13) eşitsizlikleri kullanılarak (3.10) yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} \|y_n - v_n\| &\leq (1 - \beta_n)\delta \|z_n - k_n\| + (1 - \beta_n)A_3 + \beta_n\delta \|w_n - h_n\| \\ &\quad + \beta_n A_2 + \varepsilon \\ &\leq (1 - \beta_n)\delta [(1 - \gamma_n(1 - a_1))\|x_n - u_n\| + \gamma_n\mu_n A_1 + \gamma_n\mu_n \varepsilon] \\ &\quad + \beta_n\delta [(1 - \mu_n(1 - \delta))\|x_n - u_n\| + \mu_n A_1 + \mu_n \varepsilon] + \beta_n A_2 \\ &\quad + (1 - \beta_n)A_3 + \varepsilon \\ &\leq \delta \|x_n - u_n\| + (1 - \beta_n)\delta \gamma_n \mu_n A_1 + \beta_n \delta \mu_n A_1 + \beta_n A_2 \\ &\quad + (1 - \beta_n)A_3 + \beta_n \delta \mu_n \varepsilon + (1 - \beta_n)\delta \gamma_n \mu_n \varepsilon + \varepsilon \end{aligned} \quad (3.14)$$

sonucuna ulaşır. Burada $1 - \gamma_n(1 - a_1) < 1$, $1 - \mu_n(1 - \delta) < 1$ oldukları kullanıldı. Ayrıca

$$\|Ty_n - Tv_n\| \leq \frac{\delta_1}{(1 - \delta_2)} \|y_n - v_n\| + \frac{\delta_2}{(1 - \delta_2)} \|y_n - Ty_n\| \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta_1}{(1 - \delta_2)} \|y_n - v_n\| + A_4 \\
&= \delta \|y_n - v_n\| + A_4
\end{aligned}$$

ve $\frac{1}{2} \leq \alpha_n$ olduğu, (3.11), (3.12), (3.13), (3.15) eşitlikleri (3.7), (3.9), (3.14) eşitsizlikleri kullanılarak, gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq (1 - \alpha_n) \|Tz_n - Sk_n\| + \alpha_n \|Ty_n - Sv_n\| \\
&\leq (1 - \alpha_n) \|Tz_n - Tk_n\| + (1 - \alpha_n) \|Tk_n - Sk_n\| \\
&\quad + \alpha_n \|Ty_n - Tv_n\| + \alpha_n \|Tv_n - Sv_n\| \\
&\leq (1 - \alpha_n) \|Tz_n - Tk_n\| + \alpha_n \|Ty_n - Tv_n\| + \varepsilon \\
&\leq \delta(1 - \alpha_n) \|z_n - k_n\| + \alpha_n \delta \|y_n - v_n\| \\
&\quad + (1 - \alpha_n) A_3 + \alpha_n A_4 + \varepsilon \\
&\leq \delta(1 - \alpha_n)(1 - \gamma_n(1 - a_1)) \|x_n - u_n\| \\
&\quad + \delta(1 - \alpha_n) \gamma_n \mu_n A_1 + \delta(1 - \alpha_n) \gamma_n \mu_n \varepsilon \\
&\quad + \delta^2 \alpha_n \|x_n - u_n\| + \alpha_n \delta^2 (1 - \beta_n) \gamma_n \mu_n A_1 \\
&\quad + \delta^2 \alpha_n \beta_n \mu_n A_1 + \alpha_n \delta \beta_n A_2 + \alpha_n \delta (1 - \beta_n) A_3 \\
&\quad + \alpha_n \delta^2 \beta_n \mu_n \varepsilon + \alpha_n \delta^2 (1 - \beta_n) \gamma_n \mu_n \varepsilon + \alpha_n \delta \varepsilon \tag{3.16} \\
&\quad + (1 - \alpha_n) A_3 + \alpha_n A_4 + \varepsilon \\
&\leq \delta(1 - \alpha_n(1 - \delta)) \|x_n - u_n\| \\
&\quad + [\delta^2 \alpha_n (1 - \beta_n) \gamma_n \mu_n + \delta(1 - \alpha_n) \gamma_n \mu_n + \delta^2 \alpha_n \beta_n \mu_n] A_1 \\
&\quad + [\delta \alpha_n \beta_n] A_2 + [\delta \alpha_n (1 - \beta_n) + (1 - \alpha_n)] A_3 + \alpha_n A_4 \\
&\quad + [1 + \delta(1 - \alpha_n) \gamma_n \mu_n + \delta^2 \alpha_n \beta_n \mu_n + \delta^2 \alpha_n (1 - \beta_n) \gamma_n \mu_n \\
&\quad + \delta \alpha_n] \varepsilon \\
&\leq \delta(1 - \alpha_n(1 - \delta)) \|x_n - u_n\| \\
&\quad + \alpha_n [\delta^2 (1 - \beta_n) \gamma_n \mu_n + 2\delta \gamma_n \mu_n + \delta^2 \beta_n \mu_n] A_1 \\
&\quad + \alpha_n [\delta \beta_n] A_2 + \alpha_n [\delta(1 - \beta_n) + 2] A_3 + \alpha_n A_4 \\
&\quad + \alpha_n [2 + 2\delta \gamma_n \mu_n + \delta^2 \beta_n \mu_n + \delta^2 (1 - \beta_n) \gamma_n \mu_n + a_1] \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (2.5) ile verilen zayıf contraction şartı kullanılarak

$$\|Tx_n - Tp\| \leq \delta_1 \|x_n - p\| + \delta_2 \|x_n - Tp\| \leq (\delta_1 + \delta_2) \|x_n - p\| \quad (3.17)$$

olur. (3.17) eşitsizlik kullanılarak

$$\begin{aligned} \|w_n - p\| &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n\|Tx_n - p\| \\ &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n(\delta_1 + \delta_2) \|x_n - p\| \\ &\leq (1 - \mu_n(1 - \theta))\|x_n - p\| \end{aligned} \quad (3.18)$$

burada $\theta = (\delta_1 + \delta_2)$ dir. $(1 - \mu_n(1 - \theta)) < 1$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} \|z_n - p\| &\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n\|w_n - p\| \\ &\leq \|x_n - p\| \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. $\theta = (\delta_1 + \delta_2)$ ve. $(1 - \mu_n(1 - \theta)) < 1$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &\leq (1 - \beta_n)\|Tz_n - p\| + \beta_n\|Ty_n - p\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\theta\|z_n - p\| + \beta_n\theta\|w_n - p\| \\ &\leq \theta\|x_n - p\| \end{aligned} \quad (3.20)$$

ve

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq (1 - \alpha_n)\|Tz_n - p\| + \alpha_n\|Ty_n - p\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\theta\|x_n - p\| + \alpha_n\theta^2\|x_n - p\| \\ &\leq \theta(1 - \alpha_n(1 - \theta))\|x_n - p\| \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılarak limit alınırsa $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow p$ olur. (3.17) benzer şekilde (2.5) ile verilen zayıf contraction şartı kullanılarak

$$\|Tx_n - x_n\| \leq \|Tx_n - p\| + \|x_n - p\| \leq (\theta + 1) \|x_n - p\| \quad (3.22)$$

elde edilir. Aynı şekilde ve (3.20) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} \|Ty_n - y_n\| &\leq \|Ty_n - p\| + \|y_n - p\| \leq (\theta + 1)\|y_n - p\| \\ &\leq (\theta + 1)\theta\|x_n - p\| \end{aligned} \quad (3.23)$$

ve (3.19) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned}\|Tz_n - z_n\| &\leq \|Tz_n - p\| + \|z_n - p\| \leq (\theta + 1) \|z_n - p\| \\ &\leq (\theta + 1) \|x_n - p\|\end{aligned}\quad (3.24)$$

ve (3.19) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned}\|Tw_n - w_n\| &\leq \|Tw_n - p\| + \|w_n - p\| \leq (\theta + 1) \|w_n - p\| \\ &\leq (\theta + 1) (1 - \mu_n(1 - \theta)) \|x_n - p\|\end{aligned}\quad (3.25)$$

elde edilir.

O halde Lemma 2.29 daki şartların sağlandığını daha iyi görebilmek için aşağıda verilen eşitlikler dikkate alınarak

$$\begin{aligned}a_n &= \|x_n - u_n\|, \\ \mu_n &= \alpha_n(1 - \delta) \in (0,1) \\ \eta_n &= \frac{\left\{ \begin{aligned} &[\delta^2(1 - \beta_n)\gamma_n\mu_n + 2\delta\gamma_n\mu_n + \delta^2\beta_n\mu_n]A_1 \\ &+ [\delta\beta_n]A_2 + [\delta(1 - \beta_n) + 2]A_3 + A_4 \\ &+ [2 + 2\delta\gamma_n\mu_n + \delta^2\beta_n\mu_n + \delta^2(1 - \beta_n)\gamma_n\mu_n + \delta]\varepsilon \end{aligned} \right\}}{(1 - \delta)}\end{aligned}\quad (3.26)$$

şçilirse Lemma 2.29'den

$$\begin{aligned}0 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\{ \begin{aligned} &[\delta^2(1 - \beta_n)\gamma_n\mu_n + 2\delta\gamma_n\mu_n + \delta^2\beta_n\mu_n]A_1 \\ &+ [\delta\beta_n]A_2 + [\delta(1 - \beta_n) + 2]A_3 + A_4 \\ &+ [2 + 2\delta\gamma_n\mu_n + \delta^2\beta_n\mu_n + \delta^2(1 - \beta_n)\gamma_n\mu_n + \delta]\varepsilon \end{aligned} \right\}}{(1 - \delta)} \\ &= \frac{[2 + 2\delta\gamma_n\mu_n + \delta^2\beta_n\mu_n + \delta^2(1 - \beta_n)\gamma_n\mu_n + \delta]\varepsilon}{1 - \delta}\end{aligned}\quad (3.27)$$

elde edilir. [27] makale Teorem 1'den ya da (3.21) eşitsizliği göz önüne alınarak $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow p$ dir. Ayrıca kabul gereği $n \rightarrow \infty$ iken $u_n \rightarrow p^*$ ve $\delta = \frac{\delta_1}{(1 - \delta_2)} < 1$ dir. Sonuç olarak,

$$\|p - p^*\| \leq \frac{[2 + 2\delta\gamma_n\mu_n + \delta^2\beta_n\mu_n + \delta^2(1 - \beta_n)\gamma_n\mu_n + \delta]\varepsilon}{1 - \delta}\quad (3.28)$$

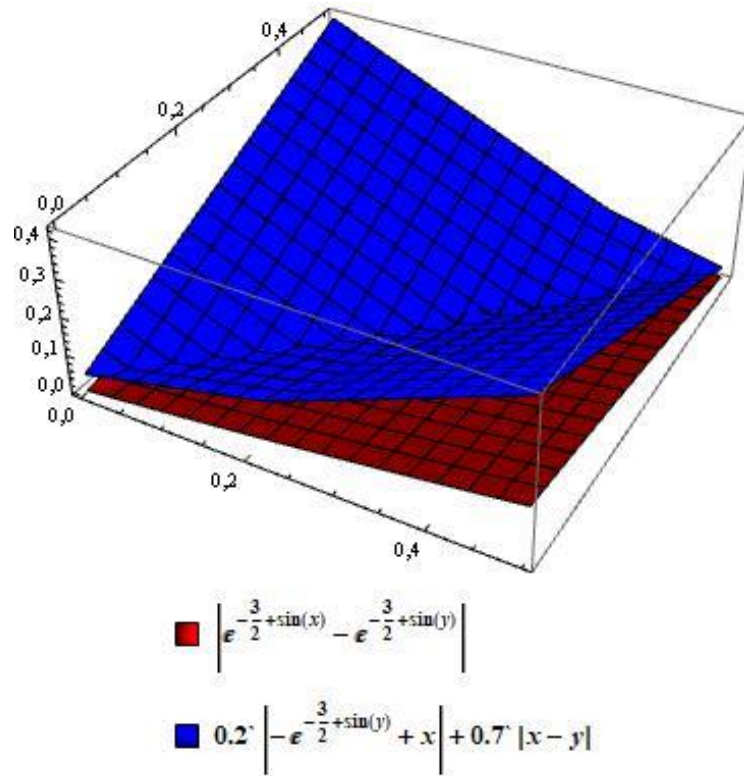
elde edilir.

Şimdi Teorem 3.1'in bir uygulaması için ilk olarak [27] ile verilen kaynaklar bölümündeki çalışmada, Example 2 de, Shatanawi vd. tarafından uygun şartlar altında (SBTn) iterasyon yöntemi (Sn), (ARSn), (In) ve (Mn) iterasyonlarından daha hızlı olduğunu göstermişlerdir. Bu örnek temel alınarak veri bağıllığı için yeniden düzenlenmiştir.

Örnek 3.2 $C = [0,2] \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde $\|x\| = |x|$ standart norm tanımlı olsun. $T: C \rightarrow C$,

$$Tx = e^{\sin(x) - \frac{3}{2}} \quad (3.29)$$

şeklinde tanımlansın. $\alpha_n \in [\alpha, 1 - \alpha], \beta_n \in [\beta, 1 - \beta], \gamma_n \in [\gamma, 1 - \gamma], \mu_n \in [\mu, 1 - \mu], \alpha, \beta, \gamma, \mu \in (1, \frac{1}{2})$ ve $\alpha < \frac{\gamma}{1-\gamma}$ olmak üzere $\beta = \gamma = \frac{2}{5}$ ve $\mu = \alpha = \frac{1}{4}$. Ayrıca $n = 1, 2, \dots$ için $\beta_n = \gamma_n = \frac{1}{2}$ ve $\alpha_n = \mu_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{4+n^2}$ olsun. (2.6) ile verilen zayıf contraction şartındaki $a = 0.7, b = 0.2$ olarak seçilsin. Ortalama değer teoreminden dolayı T dönüşümü zayıf contraction şartını sağlar. Ayrıca Mathematica programı kullanılarak zayıf contraction şartının sağlandığı da gösterilebilir (bkz. Şekil 3.1).



Şekil 3.1. T dönüşümünün zayıf contraction şartını sağlaması

Başlangıç noktası $x_0 = 2$ ve T nin sabit noktası MATLAB programı ile hesaplandığında $p = 0.299786903282166$ olarak elde edilmiştir [27]. Bu bilinen bilgiler doğrultusunda veri bağılılığı teoreminin bir uygulamasını ortaya koymak için gerekli düzenlemeler ve kabuller aşağıdaki gibi sebepleri ile birlikte verilmiştir.

Veri bağılılığı tanımı kullanılarak T operatörünün yaklaşım operatörü $S: C \rightarrow C$;

$$S(x) = 0.22x - 0.02x^4 \quad (3.30)$$

olarak seçilirse $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin sabit noktası $p^* = 0$ olarak hesaplanır. Ayrıca Tanım 2.28 kullanarak ve $|T - S| < \varepsilon$ gereğince ve $C = [0,2]$ aralığında olduğundan yani $x \in [0,2]$ için

$$\left| e^{\sin(x) - \frac{3}{2}} - (0.22x - 0.02x^4) \right| < 0.303 \quad (3.31)$$

olarak alınabilir. Teorem 3.1 de kullanılan $\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0.7 + 0.2 = 0.9$, ya da (2.6) ile verilen zayıf contraction şartındaki $\delta_1 = a = 0.7$, $\delta_2 = b = 0.2$ olarak olarak yazılabilir. (3.2) ile verilen iterasyon yönteminde yukarıda verilen veriler ile birlikte yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{8 + n^2}{4(4 + n^2)} (0.22k_n - 0.02k_n^4) \\ &\quad + \left(\frac{8 + 3n^2}{4(4 + n^2)} \right) (0.22v_n - 0.02v_n^4) \\ v_n &= \frac{1}{2} (0.22k_n - 0.02k_n^4) + \frac{1}{2} (0.22h_n - 0.02h_n^4) \\ k_n &= \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} h_n \\ h_n &= \frac{8 + n^2}{4(4 + n^2)} u_n + \left(\frac{8 + 3n^2}{4(4 + n^2)} \right) (0.22u_n - 0.02u_n^4) \end{aligned} \quad (3.32)$$

elde edilir.

Çizelge 3.1 de (3.32) ile verilen iterasyon yönteminin $x_0 = 2$ başlangıç koşulu ile yakınsaması Matlab programı yardımıyla elde edilmiştir. Sonuç olarak Çizelge 3.1 den de görüleceği üzere (3.32) ile verilen iterasyon yöntemi 12. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Çizelge 3.1. (3.32) ile verilen iterasyon yönteminin yakınsaması

u_0	2
u_1	0.128952730549081
u_2	0.010518973030658
u_3	0.000765707867279
$\vdots$	$\vdots$
u_{11}	0.0000000000000011
u_{12}	0

Yukarıdaki bütün kabuller ve elde edilen bazı sonuçlar Teorem 3.1 de elde edilen (3.38) eşitsizliğinde yerine yazıldığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
 |p - p^*| &= 0.299786903282166 \\
 &\leq \frac{[2 + 2\delta\gamma_n\mu_n + \delta^2\beta_n\mu_n + \delta^2(1 - \beta_n)\gamma_n\mu_n + \delta]\varepsilon}{1 - \delta} \\
 &= \frac{\left[2 + 2 \cdot 0.9 \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4 + n^2} \right) + (0.9)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4 + n^2} \right) \right.}{1 - 0.9} \left. + (0.9)^2 \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4 + n^2} \right) + 0.875 \right] 0.303}{1 - 0.9}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$n \rightarrow \infty$ iken limit aldığı durumda ise

$$|p - p^*| \leq 12.137$$

elde edilir.

Böylece Teorem 3.1'in bir uygulaması verilmiştir. Bundan sonraki sonuçlar ise bir lineer olmayan denklem için sabit nokta teoremleri üzerinde durulacaktır.

3.2 Hadamard Fonksiyonel Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Sabit Nokta Teorisi ile Çözümü ve Veri Bağlılığı

Bu bölümde Hadamard fonksiyonel kesirli diferansiyel denklemlerin sabit nokta teorisi ile çözümü için gerekli teoremler ve şartlar belirlenecektir.

Tüm sürekli fonksiyonların uzayı $C(J, \mathbb{R}) = B$ olmak üzere bu küme üzerinde tanımlı supremum normu verilsin. O halde $C(J, \mathbb{R}) = B$ bir Banach uzayı olur [28].

Aşağıdaki kesirli diferansiyel denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} {}^H D_{a^+}^{\alpha, \psi} x(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in J = [a, b], \\ x(a) &= x_a, \end{aligned} \quad (3.34)$$

burada ${}^H D_{a^+}^{\alpha, \psi}$, Hadamard fonksiyonel kesirli türevi, $0 < \alpha < 1$, $f: J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve tüm $t \in J$ ve $\psi'(t) > 0$ için $\psi \in C^1(J, \mathbb{R})$ dır. Bu problem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [28]:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \quad (3.35)$$

Bu integral denklem sabit nokta teorisinde operatör olarak

$$Tx(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \quad (3.36)$$

yazılabilir.

Hadamard fonksiyonel kesirli diferansiyel denklemlerin varlık teoremleri, sabit nokta teoremleri kullanılarak ve uygun koşullar altında, Balachandra ve arkadaşları [28] tarafından 2024 yılında ispatlanmıştır. Şimdi sonuçlarımızı elde edebilmek için gerekli teoremi verelim. Bu teorem Balachandra ve arkadaşları [28] tarafından (3.34) ile verilen problemin çözümünün varlığını ve tekliğini göstermektedir.

Teorem 3.3 L aşağıda verilen A1 şartını sağlayan bir pozitif sayı olsun. Ayrıca tüm $t \in J$ ve $u, v \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} A1) & |f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|, \\ A2) & \frac{L}{\Gamma(\alpha + 1)} (\ln \psi(b) - \ln \psi(a))^\alpha < 1 \end{aligned} \quad (3.37)$$

şartları altında (3.34) ile verilen problemin tek bir çözümü vardır [28].

Teoremlerin ispatındaki ara işlemlerde kullanılmak üzere aşağıdaki integral hesaplanması gerekir.

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \quad (3.38)$$

integralinin hesaplanması için değişken dönüşümü yapılırsa:

$$\psi(\tau) = k, \psi'(\tau) d\tau = dk,$$

Bu yapılan değişken değiştirmeden sonra integralin üst sınırı $\psi(t)$ ve alt sınırı $\psi(\alpha)$ olur.

$$\int_{\psi(\alpha)}^{\psi(t)} \frac{(\ln \psi(t) - \ln k)^{\alpha-1}}{k} dk$$

$$\ln k = z, \frac{1}{k} dk = dz$$

Bu yapılan değişken değiştirmeden sonra ise integralin üst sınırı $\ln \psi(\alpha)$ ve alt sınırı $\ln \psi(t)$ olur.

$$\int_{\ln \psi(t)}^{\ln \psi(\alpha)} (\ln \psi(t) - z)^{\alpha-1} dz$$

$$\ln \psi(t) - z = m, -dz = dm$$

integralin üst sınırı $\ln \psi(t) - \ln \psi(\alpha)$ ve alt sınır $\ln \psi(t) - \ln \psi(t) = 0$ olur.

$$\begin{aligned} - \int_0^{\ln \psi(t) - \ln \psi(\alpha)} (m)^{\alpha-1} dm &= - \left. \frac{m^\alpha}{\alpha} \right|_0^{\ln \psi(t) - \ln \psi(\alpha)} \\ &= \frac{(\ln \psi(t) - \ln \psi(\alpha))^\alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} d\tau = \frac{(\ln \psi(t) - \ln \psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad (3.39)$$

elde edilir.

Şimdi (3.1) ile verilen dört adımlı bir iterasyon yöntemi kullanılarak (3.34) ile verilen problemin çözümüne nasıl, hangi şartlar altında ulaşılabileceği aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.4 Teorem 3.3 ile verilen (A1) ve (A2) şartları altında (3.34)-(3.35) ile verilen problem p gibi bir tek çözüme sahiptir ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ kontrol dizileri $[0,1]$ aralığına ait olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartı altında (3.1) ile verilen dört adımlı iterasyon yönteminden elde edilen dizi bu çözüme yakınsar.

İspat. $T: B \rightarrow B$ olmak üzere

$$Tx_n(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \quad (3.40)$$

şeklinde yazılır. Bu operatörün sabit noktası p olmak üzere, (3.40) operatörü altında (3.1) ile verilen iterasyon yöntemi gerekli düzenlemeler ile aşağıda verilen hali elde edilir.

$$\begin{aligned} x_{n+1} = & \\ & (1 - \alpha_n) \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, z_n(\tau)) d\tau \right) \\ & + \alpha_n \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, y_n(\tau)) d\tau \right) \\ y_n = & \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} & (1 - \beta_n) \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, z_n(\tau)) d\tau \right) \\ & + \beta_n \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, w_n(\tau)) d\tau \right) \end{aligned}$$

$$z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n w_n$$

$$w_n = (1 - \mu_n)x_n$$

$$+\mu_n \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \right)$$

şeklinde yazılır. Tp değeri için:

$$Tp(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, p(\tau)) d\tau \quad (3.42)$$

olarak ifade edilebilir. İşlemlere yardımcı olması amacıyla Teorem 3.3 ile verilen teoremin ispatından yararlanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & |Tu_n - Tp| \\ & \leq \left| \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, p(\tau)) d\tau \right) \right| \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, p(\tau))| d\tau \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} L |x_n(\tau) - p(\tau)| d\tau \end{aligned} \quad (3.43)$$

ve ayrıca (3.43) ile verilen eşitsizliğin supremumu alınır:

$$\begin{aligned} & \|Tu_n - Tp\| \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} \|f(\tau, u_n(\tau)) - f(\tau, p(\tau))\| d\tau \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} L \|u_n - p\| d\tau \\ & = \frac{L \|u_n - p\|}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} d\tau \\ & \leq \frac{L \|u_n - p\|}{\Gamma(\alpha + 1)} (\ln \psi(b) - \ln \psi(a))^\alpha \end{aligned} \quad (3.44)$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.41) iterasyon yöntemi, (3.39) eşitliği ve (3.43) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \|w_n - p\| \leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| \\
& + \mu_n \left\| \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \right) \right. \\
& \left. - \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, p(\tau)) d\tau \right) \right\| \\
& \leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} d\tau \quad (3.44) \\
& \quad L\|x_n - p\| \\
& \leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n \frac{L\|x_n - p\|}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} d\tau \\
& \leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n \frac{L\|x_n - p\|}{\Gamma(\alpha + 1)} (\ln\psi(b) - \ln\psi(a))^\alpha
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\theta = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} L (\ln\psi(b) - \ln\psi(a))^\alpha$ olarak seçilirse (3.44) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \|w_n - p\| \leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \theta\mu_n\|x_n - p\| \\
& \leq (1 - \mu_n(1 - \theta))\|x_n - p\| \quad (3.45)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.41) iterasyon yöntemi ve (3.45) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \|z_n - p\| \leq (1 - \gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n\|w_n - p\| \\
& \leq (1 - \gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n(1 - \mu_n(1 - \theta))\|x_n - p\| \quad (3.46)
\end{aligned}$$

ve burada $(1 - \mu_n(1 - \theta)) < 1$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
& \|z_n - p\| \leq (1 - \gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n\|x_n - p\| \\
& \leq \|x_n - p\| \quad (3.47)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.41) iterasyon yöntemi, $\theta = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} L(\ln\psi(b) - \ln\psi(a))^\alpha$ eşitliği, (3.43)

eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \|y_n - p\| \\
& \leq (1 - \beta_n) \\
& \quad \left\| \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, z_n(\tau)) d\tau \right) \right. \\
& \quad \cdot \left. \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, p(\tau)) d\tau \right) \right\| \\
& \quad + \beta_n \left\| \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, w_n(\tau)) d\tau \right) \right. \\
& \quad \cdot \left. \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, p(\tau)) d\tau \right) \right\| \\
& \leq (1 - \beta_n) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} L \|z_n - p\| d\tau \tag{3.48} \\
& \quad + \beta_n \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} L \|w_n - p\| d\tau \\
& \leq (1 - \beta_n) \frac{L \|z_n - p\|}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} d\tau \\
& \quad + \beta_n \frac{L \|w_n - p\|}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} d\tau \\
& \leq (1 - \beta_n) \frac{L \|z_n - p\|}{\Gamma(\alpha + 1)} (\ln\psi(b) - \ln\psi(a))^\alpha \\
& \quad + \beta_n \frac{L \|w_n - p\|}{\Gamma(\alpha + 1)} (\ln\psi(b) - \ln\psi(a))^\alpha \\
& = \theta(1 - \beta_n) \|z_n - p\| + \theta\beta_n \|w_n - p\|
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.48) eşitsizliğinde (3.45) ve (3.47) eşitsizlikleri yerine yazılırsa ve $(1 - \mu_n(1 - \theta)) < 1$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &\leq \theta(1 - \beta_n)\|z_n - p\| + \theta\beta_n\|w_n - p\| \\
&\leq \theta(1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \theta\beta_n(1 - \mu_n(1 - \theta))\|x_n - p\| \\
&\leq \theta\|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.49}$$

olur. (3.41) iterasyon yöntemi, $\theta = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}L(\ln\psi(b) - \ln\psi(\tau a))^\alpha$ eşitliği, (3.43) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - p\| \\
&\leq (1 - \alpha_n) \\
&\quad \cdot \left\| \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, z_n(\tau)) d\tau \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, p(\tau)) d\tau \right) \right\| \\
&\quad + \alpha_n \left\| \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, y_n(\tau)) d\tau \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, p(\tau)) d\tau \right) \right\| \tag{3.50} \\
&\leq (1 - \alpha_n) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} L\|z_n - p\| d\tau \\
&\quad + \alpha_n \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} L\|y_n - p\| d\tau \\
&\leq (1 - \alpha_n) \frac{L\|z_n - p\|}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha_n \frac{L\|y_n - p\|}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} d\tau \\
& \leq (1 - \alpha_n) \frac{L\|z_n - p\|}{\Gamma(\alpha + 1)} (\ln\psi(b) - \ln\psi(a))^\alpha \\
& +\alpha_n \frac{L\|y_n - p\|}{\Gamma(\alpha + 1)} (\ln\psi(b) - \ln\psi(a))^\alpha \\
& = \theta(1 - \alpha_n)\|z_n - p\| + \theta\alpha_n\|y_n - p\|
\end{aligned}$$

(3.50) eşitsizliğinde (3.47) ve (3.49) eşitsizlikleri yerine yazılırsa ve $(1 - \mu_n(1 - \theta)) < 1$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| & \leq \theta(1 - \alpha_n)\|z_n - p\| + \theta\alpha_n\|y_n - p\| \\
& \leq \theta(1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n\theta^2\|x_n - p\| \\
& \leq \theta(1 - \alpha_n(1 - \theta))\|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.51}$$

sonucuna ulaşılır. (3.51) eşitsizliğinde tümevarıma geçilirse,

$$\|x_{n+1} - x_*\|_\infty \leq \theta^n \prod_{k=0}^n (1 - \alpha_k(1 - \theta)) \|x_0 - p\| \tag{3.52}$$

olur. $(1 - \alpha_k(1 - \theta)) < 1$ olduğundan ve her $x \in [0,1]$ için $1 - x \leq e^{-x}$ eşitsizliğinin sağlandığı bilindiğinden dolayı

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| & \leq \theta^n \|x_0 - p\| \prod_{k=0}^n e^{-(1-\theta)\alpha_k} \\
& = \theta^n \|x_0 - p\| e^{-(1-\theta)\sum_{k=0}^n \alpha_k}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için son eşitsizlikte limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ olur.

Teorem 3.4 ile verilen teoremin şartları azaltılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.5 Teorem 3.3 ile verilen (A1) -(A2) şartları altında (3.34) -(3.35) ile verilen problem p gibi bir tek çözüme sahiptir ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n\}_{n=0}^\infty, \{\gamma_n\}_{n=0}^\infty, \{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ kontrol dizileri $[0,1]$ aralığına ait olsun. Bu durumda (3.1) ile verilen dört adımlı iterasyon yönteminden elde edilen dizi bu çözüme yakınsar.

İspat Teorem 3.4 ispatında elde edilen (3.51) eşitsizliği ile verilen

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \theta(1 - \alpha_n(1 - \theta))\|x_n - p\| \quad (3.54)$$

bu eşitsizlikte $(1 - \alpha_n(1 - \theta)) < 1$ olması sebebi ile aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq \theta\|x_n - p\| \\ &\leq \theta^n\|x_0 - p\| \end{aligned} \quad (3.55)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \|x_n - p\| &\leq \theta\|x_{n-1} - p\| \\ \|x_{n-1} - p\| &\leq \theta\|x_{n-2} - p\| \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \|x_1 - p\| &\leq \theta\|x_0 - p\| \end{aligned} \quad (3.56)$$

olur. Son olarak

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \theta^n\|x_0 - p\| \quad (3.57)$$

elde edilir. Son olarak $n \rightarrow \infty$ için (3.57) eşitsizliğinde limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ olur. Bu teoremin sonucu olarak daha az şartla (3.34) -(3.35) ile verilen problemin çözümüne ulaşılabilir.

Teorem 3.1 de (2.5) ile verilen şartı sağlayan zayıf contraction altında (3.1) iterasyon yöntemi kullanarak veri bağlı olduğu gösterilmişti. Aşağıda verilen Teorem 3.6 ise, Teorem 3.5'nin ispatında (3.41) ile verilen iterasyon yöntemi kullanılarak dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağıllığı incelenecektir:

$T, S: B \rightarrow B$ tanımlı iki operatör, $f, g: J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\mathcal{C}(J, \mathbb{R}) = B$ bir Banach uzayı olmak üzere;

$$Tx(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (3.58)$$

ve

$$Sx(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} g(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (3.59)$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 3.6 Teorem 3.3 ile verilen (A1-A2) şartları altında (3.34)- (3.35) ile verilen problem p gibi bir tek çözüme sahiptir ve T operatörüyle inşa edilen ve (3.1) ile verilen iterasyondan elde edilen dizi $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ ile gösterilsin. $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ ise S operatörü (3.19) ile inşa edilen aşağıdaki iterasyondan elde edilen bir dizi olsun:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (1 - \alpha_n)Sk_n + \alpha_n Sv_n \\ v_n &= (1 - \beta_n)Sk_n + \beta_n Sh_n \\ k_n &= (1 - \gamma_n)u_n + \gamma_n h_n \\ h_n &= (1 - \mu_n)u_n + \mu_n Su_n \end{aligned} \quad (3.60)$$

burada $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n\}_{n=0}^\infty, \{\gamma_n\}_{n=0}^\infty, \{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ kontrol dizileri ve $\frac{1}{2} \leq \alpha_n$ şartını sağlamaktadır. Ayrıca $x_0 = u_0$ olmak üzere her $u \in B$ ve $\varepsilon \geq 0$ için ve $\|f(u) - g(u)\| \leq \varepsilon$ sağlansın. Eğer p ve p^* sırasıyla (3.58) ve (3.59) ile verilen eşitliklerin çözümleri ve $\theta = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} L(\ln\psi(b) - \ln\psi(a))^\alpha < 1$ şartını sağlıyor ise, bu durumda aşağıda verilen eşitsizlik geçerlidir:

$$\|p - p^*\| \leq \frac{(2\gamma_n\mu_n\theta + 2\theta + \delta(1 - \beta_n)\gamma_n\mu_n\theta + \beta_n\mu_n\theta\delta)\varepsilon}{1 - \delta} \quad (3.61)$$

İspat Bu teoremin istenilen sonucuna ulaşmak ve eşitsizliklerin ara işlemlerinde kullanmak için öncelikle aşağıdaki eşitsizliği verelim.

$$\begin{aligned} &|Ta_n - Tb_n| \\ &\leq \left| \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, a_n(\tau)) d\tau \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, b_n(\tau)) d\tau \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} |f(\tau, a_n(\tau)) - f(\tau, b_n(\tau))| d\tau \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} L|a_n(\tau) - b_n(\tau)| d\tau$$

ve ayrıca (3.62) ile verilen eşitsizliğin supremumu alınırsa:

$$\begin{aligned} & \|Ta_n - Tb_n\| \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} \|f(\tau, a_n(\tau)) - f(\tau, b_n(\tau))\| d\tau \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} L\|a_n - b_n\| d\tau \\ & = \frac{L\|a_n - b_n\|}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} d\tau \\ & \leq \frac{L\|a_n - b_n\|}{\Gamma(\alpha+1)} (\ln\psi(b) - \ln\psi(a))^\alpha \end{aligned} \tag{3.63}$$

(3.41) ve (3.60) ile verilen iterasyon yöntemi, Teorem 3.3 de verilen (A1)-(A2) şartları, (3.63) eşitsizliği, $\theta = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} L(\ln\psi(b) - \ln\psi(a))^\alpha < 1$ ve teoremin hipotezi kullanılarak;

$$\begin{aligned} & |Tx_n(t) - Su_n(t)| \\ & = \left| x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \right. \\ & \quad \left. - u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} g(\tau, u_n(\tau)) d\tau \right| \\ & \leq |x_0 - u_0| + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, u_n(\tau)) d\tau \right| \end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, u_n(\tau)) d\tau \right. \\
& \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} g(\tau, u_n(\tau)) d\tau \right| \\
& \leq \|x_0 - u_0\| \\
& + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} (f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, u_n(\tau))) d\tau \right| \\
& + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} (f(\tau, u_n(\tau)) - g(\tau, u_n(\tau))) d\tau \right| \\
& \leq |x_0 - u_0| \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, u_n(\tau))| d\tau \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} |f(\tau, u_n(\tau)) - g(\tau, u_n(\tau))| d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin supremumu alınırsa

$$\begin{aligned}
& \|Tx_n(t) - Su_n(t)\| \\
& \leq \|x_0 - u_0\| \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} \|f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, u_n(\tau))\| d\tau \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} \|f(\tau, u_n(\tau)) - g(\tau, u_n(\tau))\| d\tau \\
& \leq \|x_0 - u_0\| + \frac{L\|x_n - u_n\|}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} d\tau
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} d\tau \\
& \leq \|x_0 - u_0\| + \frac{L\|x_n - u_n\|}{\Gamma(\alpha+1)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^\alpha \\
& + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^\alpha \\
& = \|x_0 - u_0\| + \theta L\|x_n - u_n\| + \theta \varepsilon
\end{aligned}$$

(3.63) eşitsizliğinden ve $\theta = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} L (\ln \psi(b) - \ln \psi(a))^\alpha < 1$ yararlanarak ve (3.65) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|w_n - h_n\| & \leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|Tx_n - Su_n\| \\
& \leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|x_0 - u_0\| \\
& + \frac{\mu_n}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} \|f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, u_n(\tau))\| d\tau \\
& + \frac{\mu_n}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} \|f(\tau, u_n(\tau)) - g(\tau, u_n(\tau))\| d\tau \\
& \leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|x_0 - u_0\| + \mu_n\theta L\|x_n - u_n\| + \mu_n\theta \varepsilon \\
& = (1 - \mu_n(1 - \theta L))\|x_n - u_n\| + \mu_n\|x_0 - u_0\| + \mu_n\theta \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.66}$$

(3.66) eşitsizliği ve $(1 - \mu_n(1 - \theta L)) < 1$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|z_n - k_n\| & = (1 - \gamma_n)\|x_n - u_n\| + \gamma_n\|w_n - h_n\| \\
& \leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|x_0 - u_0\| + \mu_n\theta L\|x_n - u_n\| \\
& + \mu_n\theta \varepsilon \\
& = \|x_n - u_n\| + \gamma_n\mu_n\|x_0 - u_0\| + \gamma_n\mu_n\theta \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.67}$$

elde edilir. (3.62) ve (3.63) eşitsizlikleri ve (3.65) ve (3.66) eşitsizliklerine benzer işlemler yaparak

$$\begin{aligned}
& |Tz_n(t) - Sk_n(t)| \\
&= \left| x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, z_n(\tau)) d\tau \right. \\
&\quad \left. - u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} g(\tau, k_n(\tau)) d\tau \right| \\
&\leq \|x_0 - u_0\|
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
&+ \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} (f(\tau, z_n(\tau)) - f(\tau, k_n(\tau))) d\tau \right| \\
&+ \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} (f(\tau, k_n(\tau)) - g(\tau, k_n(\tau))) d\tau \right|
\end{aligned}$$

ve $\theta = \frac{L}{\Gamma(\alpha+1)} (\ln\psi(b) - \ln\psi(a))^\alpha < 1$ ve ayrıca (3.68) ile verilen eşitsizliğin supremumu alınır:

$$\begin{aligned}
& \|Tz_n(t) - Sk_n(t)\| \\
&\leq \|x_0 - u_0\| \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} \|f(\tau, z_n(\tau)) - f(\tau, k_n(\tau))\| d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} \|g(\tau, k_n(\tau)) - f(\tau, k_n(\tau))\| d\tau \\
&\leq \|x_0 - u_0\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} L \|z_n - k_n\| d\tau \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} d\tau \\
&\leq \|x_0 - u_0\| + \theta \|z_n - k_n\| + \theta \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.69}$$

elde edilir.

Ayrıca ara işlemler için gerekli olan aşağıdaki eşitsizlikler (3.62), (3.63), (3.64), (3.65), (3.68) ve (3.69) eşitsizliğindeki benzer işlemler yapılırsa

$$\|Ty_n(t) - Sv_n(t)\| \leq \|x_0 - u_0\| + \theta L\|y_n - v_n\| + \theta\varepsilon \quad (3.70)$$

son olarak

$$\|Tw_n(t) - Sh_n(t)\| \leq \|x_0 - u_0\| + \theta L\|w_n - h_n\| + \theta\varepsilon \quad (3.71)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.67), (3.68), (3.69) ve (3.71) eşitsizlikleri ve $(1 - \mu_n(1 - \theta L)) < 1$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \|y_n - v_n\| \\ &= (1 - \beta_n) \left\| \begin{aligned} & x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, z_n(\tau)) d\tau \\ & - u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} g(\tau, k_n(\tau)) d\tau \end{aligned} \right\| \\ &+ \beta_n \left\| \begin{aligned} & x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, w_n(\tau)) d\tau \\ & - u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} g(\tau, h_n(\tau)) d\tau \end{aligned} \right\| \quad (3.72) \\ &\leq \|x_0 - u_0\| + (1 - \beta_n)\theta L\|z_n - k_n\| + \beta_n\theta L\|w_n - h_n\| + \theta\varepsilon \\ &\leq \theta L\|x_n - u_n\| + (1 - \beta_n)\theta L\gamma_n\mu_n\|x_0 - u_0\| + (1 - \beta_n)\theta L\gamma_n\mu_n\theta\varepsilon \\ &\quad + \beta_n\theta L\mu_n\|x_0 - u_0\| + \beta_n\theta L\mu_n\theta\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1} - u_{n+1}\| \\ &= (1 - \alpha_n) \left\| \begin{aligned} & x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, z_n(\tau)) d\tau \\ & - u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln\psi(t) - \ln\psi(\tau))^{\alpha-1} g(\tau, k_n(\tau)) d\tau \end{aligned} \right\| \quad (3.73) \end{aligned}$$

$$+ \alpha_n \left| x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, y_n(\tau)) d\tau \right. \\ \left. - u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\ln \psi(t) - \ln \psi(\tau))^{\alpha-1} g(\tau, v_n(\tau)) d\tau \right|$$

(3.69), (3.70), (3.71) ve (3.72) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &= (1 - \alpha_n) \|x_0 - u_0\| + (1 - \alpha_n) \theta L \|z_n - k_n\| \\ &\quad + (1 - \alpha_n) \theta \varepsilon + \alpha_n \|x_0 - u_0\| + \alpha_n \theta L \|y_n - v_n\| + \alpha_n \theta \varepsilon \\ &= \|x_0 - u_0\| + (1 - \alpha_n) \theta L \|z_n - k_n\| + \alpha_n \theta L \|y_n - v_n\| + \theta \varepsilon \\ &\leq (1 - \alpha_n (1 - \theta L)) \|x_n - u_n\| + (1 - \alpha_n) \|x_0 - u_0\| \\ &\quad + (1 - \alpha_n) \gamma_n \mu_n \|x_0 - u_0\| + (1 - \alpha_n) \gamma_n \mu_n \theta \varepsilon \\ &\quad + (1 - \alpha_n) \theta \varepsilon + \alpha_n (1 - \beta_n) \theta L \gamma_n \mu_n \|x_0 - u_0\| \\ &\quad + \alpha_n (1 - \beta_n) \theta L \gamma_n \mu_n \theta \varepsilon + \alpha_n \beta_n \theta L \mu_n \|x_0 - u_0\| \\ &\quad + \alpha_n \beta_n \theta L \mu_n \theta \varepsilon \end{aligned} \tag{3.74}$$

(3.74) eşitsizliğinde $\delta = \theta L$ olarak alınır ve yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq (1 - \alpha_n (1 - \delta)) \|x_n - u_n\| \\ &\quad + \alpha_n (2 + 2\gamma_n \mu_n + \delta (1 - \beta_n) \gamma_n \mu_n + \delta \beta_n \mu_n) \|x_0 - u_0\| \\ &\quad + \alpha_n (2\gamma_n \mu_n \theta + 2\theta + \delta (1 - \beta_n) \gamma_n \mu_n \theta + \beta_n \mu_n \theta \delta) \varepsilon \end{aligned} \tag{3.75}$$

ve

$$\begin{aligned} a_n &= \|x_n - u_n\|, \\ \mu_n &= \alpha_n (1 - \delta) \in (0, 1) \\ \eta_n &= \frac{\{(2 + 2\gamma_n \mu_n + \delta (1 - \beta_n) \gamma_n \mu_n + \delta \beta_n \mu_n) \|x_0 - u_0\| + (2\gamma_n \mu_n \theta + 2\theta + \delta (1 - \beta_n) \gamma_n \mu_n \theta + \beta_n \mu_n \theta \delta) \varepsilon\}}{(1 - \delta)} \end{aligned} \tag{3.76}$$

şeklinde seçilirse Lemma 2.29'den

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\{ (2 + 2\gamma_n\mu_n + \delta(1 - \beta_n)\gamma_n\mu_n + \delta\beta_n\mu_n)\|x_0 - u_0\| \right\}}{(1 - \delta)} \\
&= \frac{(2\gamma_n\mu_n\theta + 2\theta + \delta(1 - \beta_n)\gamma_n\mu_n\theta + \beta_n\mu_n\theta\delta)\varepsilon}{1 - \delta}
\end{aligned}$$

elde edilir. Teoem 3.1 den $x_n \rightarrow p$ dir. Ayrıca kabul gereği $n \rightarrow \infty$ için $u_n \rightarrow p^*$ dır. Sonuç olarak,

$$\|p - p^*\| \leq \frac{(2\gamma_n\mu_n\theta + 2\theta + \delta(1 - \beta_n)\gamma_n\mu_n\theta + \beta_n\mu_n\theta\delta)\varepsilon}{1 - \delta} \quad (3.78)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6'in bir uygulaması için:

Örnek 3.7 Aşağıdaki kesirli diferansiyel denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
{}^H D_{a^+}^{\alpha, \psi} x(t) &= \frac{x(t)}{5(1+t)} + \frac{e^{-t}}{4}, \quad t \in J = [0,1], \\
x(0) &= 1,
\end{aligned} \quad (3.79)$$

burada ${}^H D_{a^+}^{\alpha, \psi}$, Hadamard fonksiyonel kesirli türevi, $\alpha = \frac{1}{2}$, $f: J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon,

$$f(t, x(t)) = \frac{x(t)}{5(1+t)} + \frac{e^{-t}}{4}$$

ve tüm $t \in J$ ve $\psi(t) = 2^t > 0$ için $\psi \in C^1(J, \mathbb{R})$ dır. Ayrıca

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \frac{1}{5(1+t)} |x - y|$$

ve

$$\frac{L}{\Gamma(\alpha+1)} (\ln \psi(b) - \ln \psi(a))^\alpha = \frac{L}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} (\ln 2 - \ln 1)^{\frac{1}{2}} < 0.1878 < 1.$$

Böylece (3.79) ile verilen problemin tek çözümü vardır [28].

Bu problem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir

$$Tx(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \ln 2 (\ln 2^t - \ln 2^\tau)^{\alpha-1} \left(\frac{x(\tau)}{5(1+\tau)} + \frac{e^{-\tau}}{4} \right) d\tau \quad (3.80)$$

yazılabilir. Ayrıca yaklaşım operatörü için

$$Su(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \ln 2 (\ln 2^t - \ln 2^\tau)^{\alpha-1} \left(\frac{u(\tau)}{5(1+\tau)} + \frac{\tau^2}{8} - \frac{\tau}{4} \right) d\tau \quad (3.81)$$

burada $u_0 = 1$ dir.

$$g(t, u(t)) = \frac{u(t)}{5(1+t)} + \frac{t^2}{8} - \frac{t}{4}.$$

Ayrıca $n = 1, 2, \dots$ için $\beta_n = \gamma_n = \frac{1}{2}$ ve $\alpha_n = \mu_n = \frac{3}{4}$ olsun.

$$\|f(u) - g(u)\| \leq 0.25 = \varepsilon,$$

$$L = \frac{1}{5(1+t)} = \frac{1}{10},$$

$$\theta = \frac{L}{\Gamma(\alpha+1)} (\ln \psi(b) - \ln \psi(a))^\alpha < 0.1878,$$

$$\delta = \theta L = 0.01878$$

verileri göz önüne alınırsa (3.61) eşitsizliği

$$\|p - p^*\| \leq 0.132089$$

olarak elde edilir.

.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonuç olarak, sabit nokta teorisi Hadamard fonksiyonel kesirli diferansiyel denklemin çözümüne tam olarak ya da yaklaşık olarak ulaşmak için güçlü ve etkili bir yöntem olduğu ayrıntılı olarak gösterilmiştir. Bu denklemlerin çözümüne ulaşmaya ek olarak farklı etkileşime girdiği diferansiyel denklemler, integral denklemler, fark denklemleri, kısmi diferansiyel denklemler, kaotik sistem denklemleri, optimizasyon ve kısıtlamalı denklem sistemleri, denge problemleri, oyun teorisi gibi çeşitli matematiksel denklemlerin çözümünde de kullanıldığı vurgulanmıştır.

Sabit nokta teorisi yoluyla, birçok bilim dalının zengin ve etkileyici uygulama alanlarına dair fikir edinilmiştir. Böylece öncelikli olarak kullanılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiş bir teoridir.

Daha önce yapılmış çalışmalardan bilindiği üzere yeni iterasyonlar tanımlamak, tanımlanan iterasyonları farklı uzaylarda ifade edebilmek ya da sabit nokta iterasyonları kullanarak belirli şartlar altında yakınsaklık, kararlılık sonucu, yakınsaklıklarının denkliği, veri bağıllığı sonucu ve lineer olmayan denklemlerin köklerinin yaklaşık olarak hesaplanması gibi birçok kavramı içermektedir.

Bu tezde ise, Picard ile başlayan iterasyon yöntemlerinin adım sayısına göre sınıflandırılarak bazı örneklerle yer verilmiştir. Ayrıca dört adımlı bir iterasyon yöntemi kullanılarak, belirli şartlar altında bazı sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Bu dört adımlı iterasyon ile zayıf contraction şartı altında sabit noktaların veri bağıllığı sonucuna varılmıştır. Yakınsaklık hızlarının karşılaştırılmasında kullanılan bir örnek revize edilerek veri bağıllığı sonucunun bir uygulaması olarak verilmiştir.

Bu çalışmanın asıl amacı, Hadamard fonksiyonel kesirli diferansiyel denklemin çözümü için bu dört adımlı iterasyon yöntemi kullanılarak ulaşılabileceği üzerinde durulmuş ve gerekli şartlar belirlenmiştir. Bazı şartların azaltılmasıyla bu sonuca ulaşılabileceği gerçeği ortaya konmuştur.

Son olarak, Hadamard fonksiyonel kesirli diferansiyel denklem ile yaklaşım operatörü yazılmıştır. Böylelikle bu operatörler altında sabit noktaların veri bağıllığı incelenmiştir. Teorinin sonucunu destekleyen bir örnek verilmiştir.

Daha sonra yapılabilir çalışmalara örnek teşkil edebilecek, bu tezde kullanılan teknikler ile farklı lineer olmayan denklemlerin yaklaşık çözümü için gerekli şartlar belirlenerek, benzer sonuçlar elde edilebilir. Ya da yeni iterasyon yöntemleri yazılarak yukarıda belirtilen sabit nokta sonuçları yeniden yeni şartlar ile elde edilebilir. Ek olarak literatürde bulunan sabit nokta teoremlerinin şartlarının azaltılması ile ilgili çalışmalar yapılabilir. Ayrıca farklı uzaylara taşınarak daha genel sabit nokta sonuçları da elde edilebilir.



KAYNAKLAR

1. Picard, E., 1890. Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 6, 4, 145-210.
2. Berinde, V., 2007. Iterative approximation of fixed points, Springer, Berlin.
3. Mann, W.R., 1953. Mean value methods in iteration, Proceedings of the American Mathematical Society, 4, 3, 506-510.
4. Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, Proceedings of the American Mathematical Society, 44, 1, 147-150.
5. Noor, M.A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 251, 1, 217- 229.
6. Agarwal, R. O Regan, D. ve Sahu, D., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 8, 1, 61-79.
7. Khan, S.H., 2013. A Picard Mann hybrid iterative process, Fixed Point Theory and Applications, 2013, 1, 1-10.
8. Banach, S., 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations intégrales, Fundamenta Mathematicae, 3, 1, 133- 181.
9. Kannan, R., 1968. Some results on fixed points, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 60, 1-2, 71-76.
10. Chatterjea, S. K., 1972. Fixed point theorems, Comptes rendus de l'Académie Bulgare des Sciences, 25, 727-730.
11. Zamfirescu, T., 1972. Fix point theorems in metric spaces, Archiv der Mathematik, 23, 1, 292-298.
12. Neumann, J.V., 1928. Zur theorie der gesellschaftsspiele, Mathematische Annalen, 100, 295-320.
13. Thianwan, S., 2009. Common fixed points of new iterations for two asymptotically nonexpansive nonself-mappings in a Banach space, Journal of Computational and Applied Mathematics, 224, 2, 688–695.
14. Maldar, S. ve Karakaya, V., 2022. Convergence of Jungck-Kirk type iteration method with applications, Punjab University Journal of Mathematics, 53, 2.
15. Atalan, Y. ve Kilic, E., 2022. Convergence and stability analysis of a new four step fixed-point algorithm, Aksaray University Journal of Science and Engineering, 6, 1, 57-70.

16. Karakaya, V., Atalan, Y., Dogan, K. ve Bouzara, N. E. H., 2017. Some fixed point results for a new three steps iteration process in Banach spaces, *Fixed Point Theory*, 18, 2, 625-640.
17. Özdemir, M. ve Akbulut, S., 2006. On the equivalence of some fixed point iterations, *Kyungpook Mathematical Journal*, 46, 211-217. 1.
18. Chauhan, S. S., Kumar, N., Imdad, M. ve Asim, M., 2023. New fixed point iteration and its rate of convergence, *Optimization*, 72, 9, 2415-2432.
19. Nadler, S. B. 1969. Multi-valued contraction mappings, *Pacific Journal of Mathematics*, 30, 2, 475-488.
20. Garodia, C., Uddin, I. ve Khan, S. H., 2020. Approximating common fixed points by a new faster iteration process, *Filomat*, 34, 6, 2047-2060.
21. Atalan, Y., 2019. On numerical approach to the rate of convergence and data dependence results for a new iterative scheme, *Konuralp Journal of Mathematics*, 7, 1, 97-106.
22. Çelik, R. ve Şimşek, N., 2022. Some convergence, stability, and data dependence results for K^* iterative method of quasi-strictly contractive mappings, *Turkish Journal of Mathematics*, 46, 7, 2819-2833.
23. Zaheer, S., Chanda, A. ve Nashine, H. K. 2024. Reckoning applications of Z-iteration: Data dependence and solution to a delay Caputo fractional differential equation, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 29, 5, 833-857.
24. Hacıoğlu, E. 2021. A comparative study on iterative algorithms of almost contractions in the context of convergence, stability and data dependency, *Computational and Applied Mathematics*, 40, 8, 282.
25. Kumam, W., Khammahawong, K. ve Kumam, P., 2019. Error estimate of data dependence for discontinuous operators by new iteration process with convergence analysis, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 40, 14, 1644-1677.
26. Zălinescu, C., 2021. On Berinde's method for comparing iterative processes, *Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering*, 2021, 1, 2.
27. Shatanawi, W., Bataihah, A. ve Tallafha, A., 2020. Four-step iteration scheme to approximate fixed point for weak contractions, *Computers, Materials and Continua*, 64, 1491-1504.
28. Balachandran, K., Matar, M., Annapoorani, N. ve Prabu, D. 2024. Hadamard functional fractional integrals and derivatives and fractional differential equations, *Filomat*, 38, 3, 779-792.
29. Kreyszig, E., 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New York.

30. Maddox, I.J., 1988. Elements of Functional Analysis, CUP Archive.
31. Brown, A.L. ve Page, A., 1970. Elements of Functional Analysis, Van Nostrand-Reinhold.
32. Pugachev, V.S. ve Sinitsyn, I.N., 1999. Lectures on Functional Analysis and Applications, World Scientific.
33. Curtain, R.F. ve Pritchard, A.J., 1977. Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Academic Press.
34. Berinde, V., 2004. Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration. Nonlinear Analysis Forum, 9, 1, 43-54.
35. Krasnoselskii, M.A., 1955. Two Remarks on the Method of Successive Approximations, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 10, 1, 123-127.
36. Agarwal, R. O Regan, D. ve Sahu, D., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 8, 1, 61-79.
37. Abbas, M. ve Nazir, T., 2014. A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems, Matematički Vesnik, 66, 2, 223-234.
38. Sintunavarat, W. ve Pitea, A., 2016. On a new iteration scheme for numerical reckoning fixed points of Berinde mappings with convergence analysis, Journal of Nonlinear Science and Applications, 9, 5, 2553-2562.
39. Atalan, Y. ve Erbaş, E., 2023. Analyzing stability and data dependence notions by a novel Jungck type iteration method, Journal of New Theory, 45, 1-17.
40. Kaya, M. K., 2022. Lineer olmayan bir denklem sınıfının iteratif çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Aksaray.
41. Asaduzzaman, M., ve Hossain, A., 2018. Data dependence for four-step fixed point iterative scheme allocating via contractive-like operators, Advances in Fixed Point Theory, 8, 2, 188-204.
42. Gündoğdu, E., 2023. Hiperbolik uzaylarda sabit nokta teorisi üzerine bazı sonuçlar, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Aksaray.
43. Berinde, V., 2004. Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasicontractive operators, Fixed Point Theory and Applications, 2014, 1.
44. Cardinali, T. ve Rubbioni, P., 2010. A generalization of the Caristi fixed point theorem in metric spaces, Fixed Point Theory, 11, 1, 3-10.
45. Şoltuz, S.M. ve Grosan, T., 2008. Data Dependence for Ishikawa Iteration When Dealing with Contractive-like Operators, Fixed Point Theory and Applications, 2008, 1, 1-7.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Yıldırım DİNÇ

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü, 2004-2008

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik A.B.D., 2022-2025

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Dinç, Y. ve Maldar, S., 2024. Iterative Approach To Solving A Hadamard Functional Fractional Differential Equation, 3rd International Korkut Ata Scientific Research Conference held on November 22-24, 2024 / Bahçe, Osmaniye, 3. Korkut Ata Abstract Book, 223.