



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

HALKALARDA ESNEK İDEALLERİN
GENELLEŞTİRMELERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim Halil KANAT

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK

TOKAT-2023

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HALKALARDA ESNEK İDEALLERİN GENELLEŞTİRMELERİ ÜZERİNE

İbrahim Halil KANAT

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2023, 60 sayfa

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde ileriki bölümlerde kullanacağımız; grup, halka, alt halka, ideal, bir idealin radikali, asal ideal, 1-yutan asal ideal gibi tanımlar ve bu tanımlarla ilgili teoremlere, ayrıca esnek kümelerin tanıtımından başlanarak esnek kümeler üzerinde inşa edilmiş bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümde, daha çok esnek kesişimsel halkaların ve esnek kesişimsel ideallerin cebirsel özellikleri incelenmiştir. İdealler cebirde oldukça önemli bir yere sahiptir; çünkü bir halkanın ideali/idealleri hakkında ne kadar bilgiye sahip olunursa bu, halkanın kendisi ile ilgili o kadar bilgiye sahip olunduğu anlamına gelmektedir. İdealler tek türlü olmayıp belki de bu türler arasındaki en önemlisi asal ideallerdir. Bu yüzden bu çalışmada, asal ideal kavramının esnek kümeler teorisine aktarımı ve esnek kesişimsel asal ideallerin genelleştirilmeleri üzerine çalışılmıştır. İkinci bölümde, esnek nilpotent eleman, esnek idempotent eleman, esnek sıfır bölen, esnek aşıkır olmayan kesişimsel ideal gibi bazı yeni tanımlara da yer verilmiş ve bazı cebirsel özellikler incelenmiştir. Ek olarak, esnek kesişimsel asal ideal kavramı üzerinde bu yeni tanımlara ait bir takım uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Üçüncü bölümde, esnek kesişimsel asal ideal kavramının genelleştirilmiş bir hali olan esnek kesişimsel yakın asal ideal kavramı tanıtılıp bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, yine esnek kesişimsel asal ideal kavramının başka bir genelleştirilmiş hali olan esnek kesişimsel 1-yutan asal ideal kavramı tanıtılıp bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölüm ile ilgili elde edilen sonuçlardan bazıları esnek kesişimsel 1-yutan asal ideal yardımıyla bir R halkasının 1-yutan asal idealinin elde edilmesi ve R halkasının ile R/I bölüm halkasının aynı özelliklere sahip birer esnek kesişimsel 1-yutan asal ideallerinin elde edilmesidir.

ANAHTAR KELİMELELER: Esnek Kümeler Teorisi, Esnek Kesişimsel Asal İdeal, Esnek Kesişimsel Yakın Asal İdeal, Esnek Kesişimsel 1-Yutan Asal İdeal, Esnek Nilpotent Eleman.

ABSTRACT

Master Thesis

ON GENERALIZATIONS OF SOFT IDEALS OF RINGS

İbrahim Halil KANAT

Tokat Gaziosmanpaşa University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
2023, 60 pages

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Filiz ÇITAK

In the first chapter of in this thesis, definitions such as group, ring, subring, ideal, radical of an ideal, prime ideal, 1-absorbing prime ideal, which we will use in the following sections, and theorems are given. Plus in this section, starting from the introduction of the theory of soft sets, some definitions and theorems built on soft sets are given. In this section, algebraic properties of soft int-rings and soft int-ideals are examined. On the other hand, ideals have a very crucial role in algebra; since the more we have information about the ideal(s) of a ring, the more information we have information about the ring itself. Ideals are not the only kind, perhaps the most important of these types are prime ideals. Therefore, in this study, the transformation of the concept of soft prime int-ideal to the theory of soft sets and the generalization of soft prime int-ideals have been studied. In the second section, some new definitions such as soft nilpotent element, soft idempotent element, soft zero divisor, soft non-explicit ideal were introduced, and applications of these definitions were also carried out. In addition, several applications of these new definitions were carried out as regards the soft prime int-ideal concept. In the third section, the first generalized form of the soft prime int-ideal concept, soft near prime int-ideal, is introduced and some algebraic properties are examined. In the fourth section, the concept of soft 1-absorbing prime int-ideal, which is another generalization of the concept of soft prime int-ideal, is introduced and its some algebraic properties are examined. Some studies related to the fourth chapter are creating a 1-absorbing prime ideal of R owing to soft 1-absorbing prime int-ideal of R and obtaining soft 1-absorbing prime int-ideals of R and R/I with the same characteristics.

KEYWORDS: Soft Set Theory, Soft int-Prime Ideal, Soft int-Near Prime Ideal, Soft int-1-Absorbing Prime Ideal, Soft Nilpotent Element.

ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK danışmanlığında hazırlamış olduğum Halkalarda Esnek İdeallerin Genelleştirmeleri Üzerine adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ediyorum.

İbrahim Halil KANAT



İçindekiler

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ETİK SÖZLEŞME	iii
ÖNSÖZ	v
1 KURAMSAL TEMELLER	3
1.1 Grup Teorisi ve Halka Teorisi ile İlgili Genel Bilgiler	3
1.2 Esnek Kümeler Teorisi ile İlgili Genel Bilgiler	12
2 Esnek Asal İdeal Üzerine Uygulamalar	37
3 Esnek Yakın Asal İdeal	42
4 Esnek 1-Yutan Asal İdeal	45
SONUÇ ve ÖNERİLER	51

ÖNSÖZ

Bu tezin oluşumunda, başta tez konusunun seçimi olmak üzere her aşamasında vaktini benden asla sakınmayan tez danışmanım olan değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK'a saygılarımı arz ediyorum.

Bölümümüzde, rahat ve huzurlu bir çalışma imkanı sağlayan başta Bölüm Başkanı'mız Prof. Dr. Ali YAKAR olmak üzere tüm bölüm hocalarıma saygılarımı ve teşekkürlerimi arz ediyorum.

Her türlü konuda desteklerini her zaman hissettiğim değerli hocalarım Arş. Gör. Dr. Adil KAYMAZ'a ve Arş. Gör. Dr. Dilek SABANCI'ya özel olarak saygı ve sevgilerimi sunuyorum.

Bugünlere gelmemi sağlayan, bana verdikleri emeklerinin karşılığını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim başta canım annem ve babam olmak üzere tüm aile üyelerine teşekkür ederim.

İbrahim Halil KANAT
Ağustos 2023

GİRİŞ

Gelişen ve değişen dünyada, belirsizlik içeren pek çok problem bulunmaktadır. Bu problemler son yıllarda bilim adamlarının dikkatini çekmektedir. Bilim adamları bu problemleri çözebilmek için bazı teoriler ileri sürdüler. Bu belirsiz problemlere çeşitli çözümler sunan teorilerden bazıları bulanık küme teorisi (Zadeh, 1965), kaba küme teorisi (Pawlak, 1982) ve esnek küme teorisidir (Molodstov, 1999). Belirsizlik içeren problemlerin çözümüne dolaylı ya da direkt çözüm üretebilmek adına ortaya atılan teorilerden biri olan esnek küme teorisi Molodstov tarafından tanıtıldı (Molodstov, 1999). Bu çalışmadan kısa süre sonra Maji ve ark. esnek kümeler üzerinde kesişim, birleşim, tümleyen gibi bazı işlemler tanımladılar (Maji ve ark., 2003). Yeni ve oldukça kullanışlı olan bu yapı, birçok yazar tarafından çeşitli alanlara uygulanmıştır. Çağman ve Enginoğlu bu yeni teoriyi kullanarak, seçenekler arasında bir dizi optimum öğeyi belirleyen esnek karar verme yöntemini incelediler. Tüm bu gelişmelerin yanı sıra esnek kümelerde pek çok cebirsel yapı tanımlanmaya başladı. Bunlardan bazıları; esnek grup (Aktaş ve Çağman, 2007), esnek halka (Acar ve ark., 2010), esnek gruba ait bazı yapıların tanımlanması (Sezer ve ark., 2014) ve BCK/BCI cebirlerinin tanımlanması (Jun, 2008) olarak gösterilebilir. Çağman ve ark. esnek kesişimsel grup kavramını tanıtarak daha önce tanımlanan esnek grup kavramına başka bir boyut kazandırdılar (Çağman ve ark., 2012). Çıtak ve Çağman esnek kesişimsel halka ve esnek kesişimsel idealleri tanıtip bazı cebirsel özelliklerini incelediler (Çıtak ve Çağman, 2015). Pek çok bilim insanı söz konusu teoriyi kendi alanlarına uyguladılar (Jana ve ark., 2019, Ayub ve ark., 2020, Sezgin ve ark., 2019, Jun ve ark., 2012). Bu yeni teori pek çok alana uygulanabilir olduğundan topoloji alanında da bazı gelişmeler yaşandı. Çağman ve ark. esnek topoloji kavramını tanıtip bazı özelliklerini incelediler (Çağman ve ark., 2011-b). Georgiou ve Megaritis esnek topoloji üzerine çalışıp pek çok yeni özellikleri incelediler (Georgiou Megaritis, 2014). Başka bilim insanları da esnek topoloji üzerine çalıştılar (Aydın ve Enginoğlu, 2021., Çağman ve ark., 2011, Enginoğlu ve ark., 2015). Bu teori birçok alanda olduğu gibi karar verme alanında da geniş bir yere sahiptir. Esnek küme teorisi kullanılarak, bazı bilim insanları esnek karar verme üzerine çalışmalar yürütmüşlerdir (Çağman ve Enginoğlu 2010, Çağman ve ark., 2011-a). Ayrıca, sezgisel bulanık parametrelili, sezgisel bulanık esnek matrisleri tanımlandı ve birkaç ana özelliği incelendi (Enginoğlu ve Arslan, 2020). Dalkılıç ve Demirtaş tarafından tüm dünyayı etkisi altına alan Covid-19 hastalığının muğlak bazı meselelerinde karar vermenin nasıl ele alınabileceği çalışıldı (Dalkılıç ve Demirtaş, 2022). Yine Dalkılıç ve Demirtaş tarafından aşılama taahhüdü ile Covid-19 hastalığı arasında kurulan ilişki, bu teori kullanılarak ilişki ölçülerine benzer şekilde desteklendi (Dalkılıç ve Demirtaş, 2022). Ayrıca bu teori, çizgi integrali (Acharjee ve Molodstov, 2021) ve olasılık teorisi (Molodstov, 2013) gibi matematiğin çok önemli alanlarına da uygulanmıştır.

Diğer taraftan idealler halka teorisinde oldukça önemli yer tutmaktadır; çünkü bir halkanın idealleri hakkındaki bilgiler, halkanın kendisini daha iyi tanımamızı sağlamaktadır. İdealler tek türlü olmayıp belki de en önemlisi asal ideallerdir. Bu çalışmada, öncelikle, asal ideallerin esnek kümeler teorisine aktarılmış hali olan esnek kesişimsel asal idealler (Ghosh ve ark., 2019) üzerine bir takım uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Örnek olarak bir η_R esnek kesişimsel asal ideal aracılığıyla R halkasının bir I asal ideali elde edilmiştir. Ardından esnek kesişimsel asal idealin genelleştirilmiş hali olan esnek kesişimsel yakın asal ideal kavramı tanıtılmış, esnek kesişimsel yakın asal idealin, esnek kesişimsel asal idealin genel hali olduğu kanıtlanmış ve aynı zamanda tersinin doğru olmadığı ters örnek verilerek kanıtlanmıştır. Ayrıca R değişmeli halka olmak üzere η_R nin esnek kesişimsel yakın asal ideal olması durumunda $\sqrt{\eta_R}$ nin bir esnek kesişimsel asal ideal olduğu kanıtlanarak bu iki kavram arasındaki ilişkinin güçlü olduğu gösterilmiştir. Bu bölümden sonra esnek kesişimsel 1-yutan asal ideal kavramı tanıtıldı, esnek kesişimsel asal idealin genel hali olduğu kanıtlanmış ve aynı zamanda tersinin doğru olmadığı ters örnek verilerek gösterilmiştir. Ayrıca R değişmeli halka olmak üzere η_R nin esnek kesişimsel 1-yutan asal ideal olması durumunda $\sqrt{\eta_R}$ nin bir esnek kesişimsel asal ideal olduğu ispat edilmiştir. Son olarak bu bölümde, esnek sıfır bölen, esnek nilpotent eleman gibi yeni kavramlar üzerinde uygulamalara yer verilmiştir.

1 KURAMSAL TEMELLER

1.1 Grup Teorisi ve Halka Teorisi ile İlgili Genel Bilgiler

Bu bölümde cebir ve esnek kümeler ile ilgili tezde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler hatırlatılacaktır.

Tanım 1.1. R boştan farklı bir küme ve $+$ da herhangi bir işlem olsun. Buna göre aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(R, +)$ cebirsel yapısına bir grup denir.

- (a) $\forall a, b \in R$ için $a + b \in R$ (Kapalılık özelliği)
- (b) $\forall a, b, c \in R$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Birleşme özelliği)
- (c) $\forall a \in R$ için $a + e = e + a = a$ olacak biçimde bir $e \in R$ vardır (Birim elemanın varlığı)
- (d) e, R nin birim elemanı olmak üzere $\forall a \in R$ için

$$a + a' = a' + a = e$$

olacak biçimde $a' \in R$ vardır (Ters elemanın varlığı).

(Taşcı, 2018, s.95)

Not 1.1. Bundan sonra, a elemanının $+$ işlemine göre tersi $-a$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2. $(R, +)$ bir grup olsun. $\forall a, b \in R$ için

$$a + b = b + a$$

oluyorsa $(R, +)$ cebirsel yapısına değişmeli (komutatif ya da abelyan) grup denir. (Taşcı, 2018, s.96)

Teorem 1.1. $(R, +)$ bir grup olsun. Buna göre

- (a) R nin birimi tektir.
- (b) R deki her elemanın tersi tektir.
- (c) Soldan ve sağdan kısaltma kuralları geçerlidir. Yani $\forall a, b, c \in R$ için
 - $a + b = a + c \implies b = c$ (Soldan kısaltma kuralı)
 - $b + a = c + a \implies b = c$ (Sağdan kısaltma kuralı)

(Taşcı, 2018, s.97)

Tanım 1.3. $(R, +)$ bir grup ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. S , R deki işleme göre bir grup oluyorsa $(S, +)$ ya $(R, +)$ nın bir alt grubu denir ve $S \leq R$ ile gösterilir. (Taşcı, 2018, s.107)

Teorem 1.2. $(R, +)$ bir grup ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. $S \leq R$ olması için gerek ve yeter şart

$$\forall a, b \in S \text{ için } a + (-b) \in S$$

olmasıdır. (Taşcı, 2018, s.108)

Teorem 1.3. R bir grup olsun. R nin sonlu sayıdaki altgruplarının kesişimi de R nin alt grubudur. (Taşcı, 2018, s.111)

Tanım 1.4. R bir grup ve $S \leq R$ olsun. $a \in R$ için

$$a + S = \{a + s : s \in S\}$$

kümesine S nin R deki a elemanını kapsayan sol yan kümesi (ya da koseti) ve

$$S + a = \{s + a : s \in S\}$$

kümesine S nin R deki a elemanını kapsayan sağ yan kümesi (ya da koseti) denir. (Taşcı, 2018, s.118)

Tanım 1.5. R bir grup ve $S \leq R$ olsun. $\forall a \in R$ için $a + S = S + a$ oluyorsa S alt grubuna R nin normal alt grubu denir ve $S \triangleleft R$ ile gösterilir. (Taşcı, 2018, s.132)

Tanım 1.6. $(R, +)$ ve $(S, \oplus)$ birer grup ve $f : R \longrightarrow S$ bir fonksiyon olsun. $\forall a, b \in R$ için

$$f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$$

oluyorsa f ye grup homomorfizması denir. (Taşcı, 2018, s.160)

Tanım 1.7. $f : G \longrightarrow H$ bir grup homomorfizması ve H grubunun birim elemanı e_H olsun. Bu homomorfizmanın çekirdeği $\text{Çek}f$ ile gösterilir ve

$$\text{Çek}f = \{g \in G : f(g) = e_H\}$$

ile tanımlanır. (Taşcı, 2018, s.165)

Tanım 1.8. $f : G \longrightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun. G nin f altındaki görüntüsü $f(G)$ ile gösterilir ve

$$f(G) = \{f(g) : g \in G\}$$

olarak tanımlanır. (Taşcı, 2018, s.165)

Teorem 1.4. $f : G \longrightarrow H$ bir grup homomorfizması ve $K \leq G$ olsun. Bu durumda $f(K) \leq f(G)$ dir. (Taşcı, 2018, s.165)

Tanım 1.9. R boştan farklı bir küme, $+$ ve $\cdot$ da birer işlem olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

- (a) $(R, +)$ değişmeli gruptur.
- (b) $\forall a, b \in R$ için $a \cdot b \in R$ dir.
- (c) $\forall a, b, c \in R$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ dir.
- (d) $\forall a, b, c \in R$ için
 - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dir.
 - $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ dir.

(Taşcı, 2018, s.287)

Not 1.2. Bundan sonra $\cdot$ işlemi, yazım kısalığı açısından kullanılmayacak, $a \cdot b$ yerine de ab yazılacaktır. Ayrıca $(R, +, \cdot)$ halkası yerine sadece R halkası yazılacaktır. (Taşcı, 2018, s.288)

Tanım 1.10. R halkasının $+$ işlemine göre birim elemanına halkanın sıfırı denir ve genel olarak 0_R ile gösterilir. Fakat bundan sonra yazım kısalığı açısından R halkasının sıfırı 0 ile gösterilecektir. (Taşcı, 2018, s.287)

Tanım 1.11. R halkasında $\forall a, b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R halkasına değişmeli ya da komutatif halka denir. (Taşcı, 2018, s.287)

Tanım 1.12. R halkasında $\forall a \in R$ için $a1_R = 1_R a = a$ olacak biçimde $1_R \in R$ varsa R halkasına birimli halka ve 1_R elemanına da halkanın birimi denir. Bundan sonra halka birimli ise birim elemanını kısaca 1 ile gösterilecektir. (Taşcı, 2018, s.287)

Tanım 1.13. R birimli halkasında ikinci işleme göre varsa tersi olan elemanlara tersinir ya da birimsel eleman denir. (Taşcı, 2018, s.289)

Teorem 1.5. R bir halka olmak üzere $\forall a, b, c \in R$ için

- (a) $0a = a0 = 0$
- (b) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$
- (c) $(-a)(-b) = ab$

eşitlikleri geçerlidir. (Taşcı, 2018, s.289)

Teorem 1.6. Birimli halkanın birimi tektir. (Taşcı, 2018, s.289)

Teorem 1.7. R birimli halka olsun. Bu durumda

$$(a) \quad \forall a \in R \text{ için } (-1)a = a(-1) = -a$$

$$(b) \quad (-1)(-1) = 1$$

eşitlikleri geçerlidir. (Taşcı, 2018, s.291)

Tanım 1.14. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. S kümesi R deki işlemlere göre bir halka oluyorsa S ye R nin alt halkası denir. (Taşcı, 2018, s.292)

Teorem 1.8. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. S nin R halkasının bir alt halkası olması için gerek ve şart

$$(a) \quad \forall a, b \in S \text{ için } a - b \in S$$

$$(b) \quad \forall a, b \in S \text{ için } ab \in S$$

dir. (Taşcı, 2018, s.293)

Teorem 1.9. R bir halka olsun. R nin sonlu sayıdaki alt halkalarının kesişimi de R nin alt halkasıdır. (Taşcı, 2018, s.295)

Tanım 1.15. R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. $ab = 0$ olacak biçimde bir $b \in R \setminus \{0\}$ varsa a elemanına sol sıfır bölen b elemanına da sağ sıfır bölen denir. a hem sağ hem sol sıfır bölen ise a elemanına kısaca sıfır bölen denir. R deki tüm sıfır bölenlerin kümesini $S(R)$ ile gösterilir. (Taşcı, 2018, s.296)

Tanım 1.16. R bir halka ve $r \in R$ olsun. Eğer $r^n = 0$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa r ye nilpotent eleman denir. R halkasının tüm nilpotent elemanlarının oluşturduğu küme $\text{Nil}(R)$ ile gösterilir. (Taşcı, 2018, s.298)

Tanım 1.17. Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz halkaya tamlik bölgesi denir. (Taşcı, 2018, s.299)

Tanım 1.18. R bir halka ve I da onun bir alt halkası olsun. $\forall r \in R$ ve $\forall a \in I$ için $ra \in I$ oluyorsa I ya R nin sol ideali, $ar \in I$ oluyorsa sağ ideali denir. I hem sağ hem sol ideal ise kısaca ideal denir. (Taşcı, 2018, s.306)

Tanım 1.19. Bir R halkasında $\{0\}$ ve R daima R nin idealleridir. R nin kendisi dışında kalan (varsa) tüm ideallerine R nin öz ya da aşık olmayan idealleri denir. (Taşcı, 2018, s.307)

Teorem 1.10. R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. I nin R halkasının bir ideali olması için gerek ve şart

- (a) $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$
- (b) $\forall a \in I$ ve $\forall r \in R$ için $ar, ra \in I$

olmasıdır. (Taşcı, 2018, s.307)

Teorem 1.11. R bir halka olsun. R nin sonlu sayıdaki ideallerinin kesişimi de R nin idealidir. (Taşcı, 2018, s.309)

Teorem 1.12. R bir halka ve I da onun bir ideali olsun. $R/I = \{I + r : r \in R\}$ kümesi üzerinde sırasıyla toplama ve çarpma işlemleri aşağıda verildiği şekilde tanımlansın. $\forall I + r_1, I + r_2 \in R/I$ için:

- $(I + r_1) \oplus (I + r_2) = I + (r_1 + r_2)$
- $(I + r_1) \odot (I + r_2) = I + (r_1 r_2)$

Bu durumda $(R/I, \oplus, \odot)$ cebirsel yapısı bir halkadır ve bu halkaya R nin I ya göre bölüm halkası denir. (Taşcı, 2018, s.313)

Tanım 1.20. I, R halkasının bir ideali olsun. $a, b \in R$ için $ab \in I$ olması durumunda $a \in I$ ya da $b \in I$ oluyorsa I ya R nin asal ideal denir. (Taşcı, 2018, s.315)

Teorem 1.13. I, R halkasının bir asal ideali olsun. $a \in R$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a^n \in I$ ise $a \in I$ dır. (Taşcı, 2018, s.315)

İspat. Tümevarım metodunu kullanalım. $n = 2$ için $a^2 \in I$ ise I asal ideal olduğundan $a \in I$ olur. $n = k$ için iddiamız doğru olsun. Yani $a^k \in I$ ise $a \in I$ olduğunu kabul edelim. $n = k + 1$ için

$$a^{k+1} \in I \implies a^k a \in I \implies a^k \in I \text{ ya da } a \in I$$

Buradan $a \in I$ olursa ispat biter. Kabulümüzden dolayı $a^k \in I$ ise $a \in I$ olur.

Tanım 1.21. R bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. Bu durumda,

$$\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } r^n \in I\}$$

kümesine I nin radikali denir. (Çallıalp ve Tekir, 2009, s.15)

Teorem 1.14. I, R değişmeli halkasının bir ideali ve $\sqrt{I}, I$ nin radikali olsun. Bu durumda,

- (a) $\sqrt{I}, R$ nin bir idealidir.

- (b) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
(c) I, R nin asal ideali ise $\sqrt{I} = I$.

(Çallıalp ve Tekir, 2009, s.16)

İspat.

- (a) I ideal olduğundan $0 = 0^1 \in I$ ise $0 \in \sqrt{I}$ olup $\sqrt{I} \neq \emptyset$ tir. Ayrıca $\sqrt{I} \subseteq R$ olduğu da açıktır. $\sqrt{I}$ nin ideal olma şartlarını sağlandığı gösterilecektir. $a, b \in \sqrt{I}$ olsun. Bu durumda $a^n, b^m \in I$ olacak biçimde $n, m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $n + m \in \mathbb{Z}^+$ ve $nm \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan

$$\bullet (a-b)^{n+m} = \binom{n+m}{0} \underbrace{a^{n+m}}_{=0} + \binom{n+m-1}{1} \underbrace{a^{n+m-1}b}_{=0} + \dots + \binom{n+m}{n+m-1} \underbrace{a b^{n+m-1}}_{=0} + \binom{n+m}{n+m} \underbrace{b^{n+m}}_{=0}$$

$= 0$ elde edilir. Buradan $a - b \in \sqrt{I}$ olduğu görülür.

- $\bullet \forall r \in R$ için $(ar)^n = a^n r^n = 0$ ise $ar \in \sqrt{I}$ olur. Aynı zamanda R değişmeli halka olduğundan $ra \in \sqrt{I}$ olacaktır.

Sonuç olarak, $\sqrt{I}$ bir idealdir.

- (b) $a \in \sqrt{\sqrt{I}}$ alalım. O halde $a^n \in \sqrt{I}$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu durumda $(a^n)^m = a^{nm} \in I$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $nm \in \mathbb{Z}^+$ olup $a \in \sqrt{I}$ elde edilir. Yani $\sqrt{\sqrt{I}} \subseteq \sqrt{I}$ olur. Diğer taraftan $b \in \sqrt{I}$ alalım. $b^1 \in \sqrt{I}$ olduğundan $b \in \sqrt{\sqrt{I}}$ olup $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}}$ elde edilir. Böylece $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ dır.
- (c) I, R nin bir asal ideali olsun. $a \in I$ alalım. Şu halde $a^1 \in I$ ise $a \in \sqrt{I}$ olup $I \subseteq \sqrt{I}$ elde edilir. Diğer taraftan $b \in \sqrt{I}$ alalım. O halde $b^m \in I$ olacak biçimde bir m pozitif tamsayısı vardır. I asal ideal olduğundan Teorem 1.13 gereğince $b \in I$ olup $\sqrt{I} \subseteq I$ olur. Sonuçta çift kapsamadan dolayı $\sqrt{I} = I$ eşitliği olduğu görülür.

Tanım 1.22. R ile S birer halka ve $f : R \longrightarrow S$ bir fonksiyon olsun. $\forall a, b \in R$ için

- $\bullet f(a + b) = f(a) + f(b)$
- $\bullet f(ab) = f(a)f(b)$

şartları sağlanıyorsa f ye halka homomorfizması denir. (Çallıalp ve Tekir, 2009, s.19)

Tanım 1.23. $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. S halkasının sıfırı 0_S olmak üzere

$$\text{Çek}f = \{r \in R : f(r) = 0_S\}$$

kümesine f nin çekirdeği denir. (Çallıalp ve Tekir, 2009, s.21)

Teorem 1.15. $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. $\text{Çek}f$, R nin idealidir. (Çallıalp ve Tekir, 2009, s.21)

Teorem 1.16. $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. R nin sıfırı 0_R ve S nin sıfırı da 0_S olmak üzere $f(0_R) = 0_S$ ve $\forall r \in R$ için $f(-r) = -f(r)$ dir. (Çallıalp ve Tekir, 2009, s.19)

Tanım 1.24. $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması ve I da R nin bir ideali olsun. Bu durumda

$$f(I) = \{f(a) \in S : a \in I\}$$

kümesine I idealinin homomorfik görüntüsü denir. (Çallıalp ve Tekir, 2009, s.24)

Teorem 1.17. $f : R \longrightarrow S$ örten halka homomorfizması ve I , R nin bir ideali olsun. $f(I)$, S nin idealidir. (Çallıalp ve Tekir, 2009, s.21)

İspat. Öncelikle f homomorfizma olduğundan $f(0_R) = 0_S$ olup $f(0_R) \in f(I)$ dır. Yani $f(I) \neq \emptyset$. $f(a), f(b) \in f(I)$ olsun.

- I ideal olup $a - b \in I$ dır. Ayrıca f halka homomorfizması olduğundan

$$f(a) - f(b) = f(a - b) \in f(I)$$

elde edilir.

- $f(r) \in S$ alalım. Ayrıca, I ideal olduğundan $ra \in I$ dır. Şu halde

$$f(r)f(a) = f(ra) \in f(I)$$

elde edilir. Benzer şekilde $ar \in f(I)$ olduğu da gösterilebilir. Sonuç olarak, $f(I)$ da S nin bir idealidir.

Teorem 1.18. $f : R \longrightarrow S$ örten halka homomorfizması, I , R nin asal ideali ve $\text{Çek}f \subseteq I$ olsun. O halde $f(I)$, S nin asal idealidir. (Çallıalp ve Tekir, 2009, s.27)

İspat. R ve S birer halka, $f : R \longrightarrow S$ örten halka homomorfizması ve I da R nin bir asal ideali olsun. Bir önceki teoremin ispatında $f(I)$ nın S nin ideal olduğunu gösterdik. Şimdi $f(I)$ nın S nin asal ideal olma şartını sağladığını göstereceğiz. $x, y \in f(I)$ alalım. O halde f örten olduğundan $f(a) = x, f(b) = y$ olacak biçimde $a, b \in R$ vardır. Şimdi $xy \in f(I)$ ise f halka homomorfizması olduğundan $f(a)f(b) = f(ab) \in f(I)$ olup $\text{Çek}f \subseteq I$ olduğundan $ab \in I$ elde edilir. I , R nin asal ideali olduğundan $a \in I$ ya da $b \in I$ olup buradan $f(a) \in f(I)$ ya da $f(b) \in f(I)$ olur. Şu halde $x \in f(I)$ ya da $y \in f(I)$ elde edilir. Dolayısıyla, $f(I)$ nın S nin asal ideali olduğu görülür.

Tanım 1.25. $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması ve J, S nin bir ideali olsun. Bu durumda

$$f^{-1}(J) = \{a \in R : f(a) \in J\}$$

kümesine J nin ters homomorfik görüntüsü denir. (Çallıalp ve Tekir, 2009, s.24)

Teorem 1.19. $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması ve J, S halkasının bir ideali olsun. $f^{-1}(J), R$ nin idealidir. (Çallıalp ve Tekir, 2009, s.21)

İspat. f halka homomorfizması ve J ideal olduğundan $f(0_R) = 0_S$ olup $f^{-1}(J) \neq \emptyset$ tir. $a, b \in f^{-1}(J)$ alalım. O halde $f(a), f(b) \in J$ ise $f(a) - f(b) \in J$ yani $f(a - b) \in J$ olur. Buradan $a - b \in f^{-1}(J)$ elde edilir. $\forall r \in R$ için J ideal olduğundan $f(a)f(r) = f(ar) \in f^{-1}(J)$ ise $ar \in f^{-1}(J)$ elde edilir. Benzer şekilde, $ra \in f^{-1}(J)$ olduğu da kolayca gösterilebilir. Sonuç olarak, $f^{-1}(J)$ bir idealdir.

Teorem 1.20. $f : R \longrightarrow S$ halka homomorfizması ve J, S nin bir asal ideali olsun. $f^{-1}(J)$ da R nin bir asal idealidir. (Çallıalp ve Tekir, 2009, s.24)

İspat. Bir önceki teoremin ispatında $f^{-1}(J)$ nin R de ideal olduğu gösterildi. Burada sadece $f^{-1}(J)$ nin asal ideal olma şartını sağladığını gösterilecektir. $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in f^{-1}(J)$ olsun. O halde $f(ab) \in J$ olup f halka homomorfizması olduğundan $f(a)f(b) \in J$ dir. J asal ideal olduğundan $f(a) \in J$ ya da $f(b) \in J$ dir. Buradan, $a \in f^{-1}(J)$ ya da $b \in f^{-1}(J)$ olup $f^{-1}(J)$ nin R de asal ideal olduğu görülür.

Tanım 1.26. R birimli ve değişmeli bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. Tersinir olmayan her $a, b, c \in R$ için $abc \in I$ olması durumunda $ab \in I$ ya da $c \in I$ oluyorsa I ya 1–yutan asal ideal denir. (Yassine ve ark., 2020, s.3)

Teorem 1.21. R birimli ve değişmeli halka ve I, R nin 1–yutan ideali olsun. Bu durumda, $x \in R$ ve $n \geq 2 \in \mathbb{N}$ için $x^n \in I$ ise $x^2 \in I$ dir. (Yassine ve ark., 2020)

İspat. Bu teoremin ispatı için tümevarım yöntemi kullanılacaktır. $n = 3$ olsun. Bu durumda $I, 1$ –yutan asal ideal olduğundan $x^3 \in I$ ise $x^2 \in I$ yada $x \in I$ dir. $x^2 \in I$ ise ispat biter. $x \in I$ ise I ideal olduğundan $x^2 \in I$ elde edilir. Şimdi $n = k$ için bu iddia doğru olsun. Yani $x^k \in I$ ise $x^2 \in I$ önermesi doğru olsun. $n = k + 1$ için

$$x^{k+1} \in I \implies x^{k-1}xx \in I \implies x^k \in I \text{ ya da } x \in I$$

olur. $x \in I$ ise I ideal olduğundan $x^2 \in I$ dir. Diğer taraftan, $x^k \in I$ ise yine kabulümüzden $x^2 \in I$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 1.22. I, R birimli ve değişmeli halkasının 1–yutan asal ideal olsun. Bu durumda $\sqrt{I}, R$ nin asal idealidir. (Yassine ve ark., 2020, s.3)

İspat. $x, y \in R$ olmak üzere $xy \in \sqrt{I}$ alalım. O halde $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ için $(xy)^n \in I$ dir. I , 1–yutan asal ideal olduğundan bir önceki teorem gereğince $(xy)^2 = x^2y^2 \in I$ olur. Buradan,

$$x^2y^2 = xxy^2 \in I \implies x^2 \in I \text{ ya da } y^2 \in I \implies x \in \sqrt{I} \text{ ya da } y \in \sqrt{I}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 1.23. Birimli ve değişmeli bir halkada her asal ideal 1–yutan asal idealdir. (Yassine ve ark., s.3)

Teorem 1.24. Birimli ve değişmeli bir halkada her 1-yutan asal ideal, asal ideal değildir. (Yassine ve ark., s.3)

Teorem 1.25. I, R birimli ve değişmeli halkasının 1–yutan asal ideali ve J, R nin bir öz ideali olsun. Tersinir olmayan $\forall x, y \in R$ için $xyJ \subseteq I$ ise $xy \in I$ ya da $J \subseteq I$ dir. (Yassine ve ark., s.4)

İspat. Aksini kabul edelim. Yani J öz ideal ve I , 1–yutan asal ideal olsun. Tersinir olmayan $\forall x, y \in R$ için $xyJ \subseteq I$ olması durumunda $xy \notin I$ ve $J \not\subseteq I$ olsun. Bu durumda $j \in J \setminus I$ olacak biçimde bir $j \in R$ vardır. Kabulümüzden dolayı $xyj \in I$ dir. I , 1–yutan asal ideal olduğundan ya $xy \in I$ yada $j \in I$ olması gerekir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak, kabulümüz yanlış olup teoremde geçen ifade doğrudur.

Teorem 1.26. R birimli ve değişmeli halkasında I bir öz ideal olsun. Aşağıda verilen ifadeler denktir.

- (a) I, R nin 1–yutan asal idealidir.
- (b) I_1, I_2 ve I_3, R nin öz ideallerinden bazıları olsun. Bu durumda $I_1I_2I_3 \subseteq I$ ise ya $I_1I_2 \subseteq I$ ya da $I_3 \subseteq I$.

(Yassine ve ark., s.4-5)

İspat. (a) $\implies$ (b):

$I_1I_2 \not\subseteq I$ olsun. $I_3 \subseteq I$ olduğunu gösterelim. $I_1I_2 \not\subseteq I$ olduğundan $a \in I_1$ ve $b \in I_2$ olmak üzere $ab \notin I$ dir. $I_1I_2I_3 \subseteq I$ olduğundan $abI_3 \subseteq I$ olmalıdır. I , 1–yutan asal ideal olduğundan Teorem 1.24 ten ötürü $I_3 \subseteq I$ olur.

(b) $\implies$ (a):

$a, b, c \in R$ tersinir olmayan elemanlar olsun. $ab \notin I$ olmak üzere $abc \in I$ alalım. $c \in I$ olduğunu gösterirsek ispat biter. I_1, I_2, I_3 öz ideallerini $I_1 = aR, I_2 = bR$ ve $I_3 = cR$ olarak kabul edelim. Kabulümüzden dolayı $ab \notin I$ olduğundan $I_1I_2 \not\subseteq I$ dir. O halde, $cR = I_3 \subseteq I$ olur. Buradan, $cR \subseteq I \implies c \in I$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 1.27. $f : R \longrightarrow S$ halka homomorfizması, R deki her tersinir olmayan elemanın f altındaki görüntüsü S de tersinir olmasın ve $f(1_R) = 1_S$ olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanır:

- (a) J, S nin 1–yutan asal ideali ise $f^{-1}(J)$ de R nin 1–yutan asal idealidir.
- (b) I, R nin 1–yutan asal ideali, f örten ve $\text{Çek}f \subseteq I$ ise $f(I), S$ nin 1–yutan asal idealidir.

(Yassine ve ark., s.8)

İspat.

- (a) J, S nin 1–yutan asal ideali olsun. $a, b, c \in R$ tersinir olmayan elemanlar olmak üzere $abc \in f^{-1}(J)$ alalım. Bu durumda, $f(abc) \in J$ dir. f halka homomorfizması olduğundan $f(abc) = f(a)f(b)f(c) \in J$ ise $f(a)f(b) = f(ab) \in J$ ya da $f(c) \in J$ dir. Yani $ab \in f^{-1}(J)$ ya da $c \in f^{-1}(J)$ olup ispat tamamlanır.
- (b) $x, y, z \in S$ tersinir olmayan elemanlar olmak üzere $xyz \in f(I)$ alalım. f örten olduğundan $f(a) = x, f(b) = y, f(c) = z$ olacak biçimde tersinir olmayan $a, b, c \in R$ vardır. Bu durumda, $f(abc) = f(a)f(b)f(c) = xyz \in f(I)$ olur. Öyleyse, $\text{Çek}f \subseteq f(I)$ olduğundan $abc \in I$ olup I, R nin 1–yutan asal ideali olduğundan $ab \in I$ ya da $c \in I$ elde edilir. O halde, $f(ab) = xy \in f(I)$ yada $f(c) = z \in f(I)$ olup istenilen elde edilir.

1.2 Esnek Kümeler Teorisi ile İlgili Genel Bilgiler

Tanım 1.27. U evrensel küme, $P(U)$, U nun kuvvet kümesi, E parametreler kümesi ve $F : E \longrightarrow P(U)$ bir fonksiyon olsun. (F, E) ikilisine bir esnek küme denir. Diğer bir deyişle bir esnek küme, U evrensel kümesinin alt kümelerinin parametreleşmiş halidir. (Molodstov, 1999, s.2)

Örnek 1.1. Bir sinema salonunda gösterimde olan $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$ filmlerinin türleri "çok güzel, çok kötü, komedi, uzun, sıkıcı" şeklindedir. $U = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5\}$ ve $E = \{e_1 = \text{çok güzel}, e_2 = \text{çok kötü}, e_3 = \text{komedi}, e_4 = \text{uzun}, e_5 = \text{sıkıcı}\}$ olsun. $F : E \longrightarrow P(U)$ fonksiyonu da şu şekilde tanımlayalım: $F(\text{çok güzel}) = \{\eta_1\}$, $F(\text{çok kötü}) = \{\eta_2\}$, $F(\text{komedi}) = \{\eta_1, \eta_5\}$, $F(\text{uzun}) = \{\eta_1, \eta_2\}$, $F(\text{sıkıcı}) = \{\eta_2, \eta_3\}$. (F, E) esnek kümesi

$$(F, E) = \{\{e_1, \{\eta_1\}\}, \{e_2, \{\eta_2\}\}, \{e_3, \{\eta_1, \eta_5\}\}, \{e_4, \{\eta_1, \eta_2\}\}, \{e_5, \{\eta_2, \eta_3\}\}\}$$

dir.

Tanım 1.28. (F, A) ile (G, B) , U üzerinde birer esnek küme olsun.

- $A \subset B$
- $\forall a \in A$ için $F(a) = G(a)$

şartları sağlanıyorsa (F, A) , (G, B) nin bir esnek alt kümesidir denir ve $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ ile gösterilir. (Maji ve ark, 2003, s.3)

Tanım 1.29. (F, A) ile (G, B) , U üzerinde birer esnek küme olsun.

- $B \subset A$
- $\forall b \in B$ için $G(b) = F(b)$

şartları sağlanıyorsa (F, A) , (G, B) nin bir üst esnek kümesidir denir ve $(F, A) \tilde{\supset} (G, B)$ ile gösterilir. (Maji ve ark, 2003, s.3)

Tanım 1.30. (F, A) ile (G, B) , U üzerinde birer esnek küme olsun. $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ ve $(G, B) \tilde{\subset} (F, A)$ oluyorsa (F, A) ile (G, B) esnek kümelerine eşit esnek kümeler denir. (Maji ve ark, 2003, s.3)

Örnek 1.2. $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametreler kümesi, $A = \{x_1, x_2\} \subset E$, $B = \{x_1, x_2, x_4\} \subset E$, $C = \{x_1, x_2\} \subset E$ ve U evrensel kümesi de $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ olsun.

- $F : A \longrightarrow P(U)$, $F(x_1) = \{u_1, u_4\}$, $F(x_2) = \{u_1, u_2, u_3\}$.
- $G : B \longrightarrow P(U)$, $G(x_1) = \{u_1, u_4\}$, $G(x_2) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $G(x_4) = \{u_2\}$.
- $H : C \longrightarrow P(U)$, $H(x_1) = \{u_1, u_4\}$, $H(x_2) = \{u_1, u_2, u_3\}$.

olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned} (F, A) &= \{\{x_1, \{u_1, u_4\}\}, \{x_2, \{u_1, u_2, u_3\}\}\} \\ (G, B) &= \{\{x_1, \{u_1, u_4\}\}, \{x_2, \{u_1, u_2, u_3\}\}, \{x_4, \{u_2\}\}\} \\ (H, C) &= \{\{x_1, \{u_1, u_4\}\}, \{x_2, \{u_1, u_2, u_3\}\}\} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca,

- $A \subset B$ ve $\forall x_i \in A$ için $F(x_i) = G(x_i)$ olduğundan $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ dir.
- $(F, A) \tilde{\subset} (H, C)$ ve $(H, C) \tilde{\subset} (F, A)$ olduğundan (F, A) ile (H, C) eşit esnek kümelerdir.

Tanım 1.31. (F, A) , U üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall a \in A$ için $F(a) = \emptyset$ ise (F, A) , U üzerinde boş esnek kümedir denir ve Φ_A ile gösterilir. (Maji ve ark, 2003, s.4)

Tanım 1.32. (F, A) , U üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall a \in A$ için $F(a) = U$ ise (F, A) , U üzerinde tam esnek kümedir denir ve U_A ile gösterilir. (Maji ve ark, 2003, s.4)

Tanım 1.33. (F, A) ile (G, B) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu iki esnek küme arasında " $\wedge$ " işlemi,

$$(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$$

olarak tanımlanır. Burada, $H : A \times B \longrightarrow P(U)$ ve $\forall (a, b) \in A \times B$ için $H(a, b) = F(a) \cap G(b)$ şeklindedir. (Maji ve ark, 2003, s.5)

Örnek 1.3. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_9\}$ ve $E = \{x_1, x_2, \dots, x_9\}$ olsun. $A = \{x_1, x_2\} \subset E$ ve $B = \{x_5, x_6\} \subset E$ alalım. $F : A \longrightarrow P(U)$ fonksiyonunu $F(x_1) = \{u_2, u_4, u_8\}$, $F(x_2) = \{u_1, u_2, u_5\}$ olarak ve $G : B \longrightarrow P(U)$ fonksiyonunu da $G(x_5) = \{u_2, u_3, u_5\}$, $G(x_6) = \{u_9\}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $H = \{\{x_1, x_5\}, \{x_1, x_6\}, \{x_2, x_5\}, \{x_2, x_6\}\}$ ve

- $H(x_1, x_5) = F(x_1) \cap G(x_5) = \{u_2\}$
- $H(x_1, x_6) = F(x_1) \cap G(x_6) = \emptyset$
- $H(x_2, x_5) = F(x_2) \cap G(x_5) = \{u_2, u_5\}$
- $H(x_2, x_6) = F(x_2) \cap G(x_6) = \emptyset$

olduğundan

$$(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B) = \left\{ \{ \{x_1, x_5\}, \{u_2\} \}, \{ \{x_1, x_6\}, \emptyset \}, \{ \{x_2, x_5\}, \{u_2, u_5\} \}, \{ \{x_2, x_6\}, \emptyset \} \right\} \text{ elde edilir.}$$

Tanım 1.34. (F, A) ile (G, B) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu iki esnek küme arasında " $\vee$ " işlemi,

$$(F, A) \vee (G, B) = (J, A \times B)$$

olarak tanımlanır. Burada, $J : A \times B \longrightarrow P(U)$ ve $\forall (a, b) \in A \times B$ için $J(a, b) = F(a) \cup G(b)$ şeklindedir. (Maji ve ark, 2003, s.5)

Örnek 1.4. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_9\}$ ve $E = \{x_1, x_2, \dots, x_9\}$ olsun. $A = \{x_1, x_2\} \subset E$ ve $B = \{x_5, x_6\} \subset E$ alalım. $F : A \longrightarrow P(U)$ fonksiyonunu $F(x_1) = \{u_2, u_4, u_8\}$, $F(x_2) = \{u_1, u_2, u_5\}$ olarak ve $G : B \longrightarrow P(U)$ fonksiyonunu da $G(x_5) = \{u_2, u_3, u_5\}$, $G(x_6) = \{u_9\}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $H = \{\{x_1, x_5\}, \{x_1, x_6\}, \{x_2, x_5\}, \{x_2, x_6\}\}$ ve

- $J(x_1, x_5) = F(x_1) \cup G(x_5) = \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_8\}$

- $J(x_1, x_6) = F(x_1) \cup G(x_6) = \{u_2, u_4, u_8, u_9\}$
- $J(x_2, x_5) = F(x_2) \cup G(x_5) = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$
- $J(x_2, x_6) = F(x_2) \cup G(x_6) = \{u_1, u_2, u_5, u_9\}$

olduğundan

$$(F, A) \vee (G, B) = (J, A \times B) = \left\{ \left\{ \{x_1, x_5\}, \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_8\} \right\}, \left\{ \{x_1, x_6\}, \{u_2, u_4, u_8, u_9\} \right\}, \left\{ \{x_2, x_5\}, \{u_1, u_2, u_3, u_5\} \right\}, \left\{ \{x_2, x_6\}, \{u_1, u_2, u_5, u_9\} \right\} \right\} \text{ elde edilir.}$$

Teorem 1.28. (F, A) ile (G, B) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Aşağıda verilen eşitlikler geçerlidir.

1. $((F, A) \vee (G, B))^c = (F, A)^c \wedge (G, B)^c$
2. $((F, A) \wedge (G, B))^c = (F, A)^c \vee (G, B)^c$

(Maji ve ark, 2003, s.5)

Tanım 1.35. (F, A) ile (G, B) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin birleşimi $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, A \cup B)$ ile gösterilir. Burada $\forall x \in A \cup B$ için

$$H(x) = \begin{cases} F(x) & , \quad x \in A \setminus B \text{ ise} \\ G(x) & , \quad x \in B \setminus A \text{ ise} \\ F(x) \cup G(x) & , \quad x \in A \cap B \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. (Maji ve ark, 2003, s.6)

Örnek 1.5. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_9\}$ ve $E = \{x_1, x_2, \dots, x_9\}$ olsun. $A = \{x_1, x_2\} \subset E$, $B = \{x_2, x_3\} \subset E$ alalım. $F : A \longrightarrow P(U)$ fonksiyonunu $F(x_1) = \{u_1, u_2, u_9\}$, $F(x_2) = \{u_5, u_7\}$ olarak ve $G(x_2) = \{u_3, u_8, u_9\}$, $G(x_3) = \{u_5, u_6, u_8\}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $H(x_1) = F(x_1) = \{u_1, u_2, u_9\}$, $H(x_2) = F(x_2) \cup G(x_2) = \{u_3, u_5, u_7, u_8, u_9\}$ ve $H(x_3) = G(x_3) = \{u_5, u_6, u_8\}$ olmak üzere

$$(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, A \cup B) = \left\{ \{x_1, \{u_1, u_2, u_9\}\}, \{x_2, \{u_3, u_5, u_7, u_8, u_9\}\}, \{x_3, \{u_5, u_6, u_8\}\} \right\}$$

elde edilir.

Teorem 1.29. (F, A) , U üzerinde bir esnek küme olsun. Aşağıda verilen ifadeler geçerlidir.

1. $(F, A) \tilde{\cup} (F, A) = (F, A)$
2. $(F, A) \tilde{\cap} (F, A) = (F, A)$

$$3. (F, A) \tilde{\cup} \Phi_A = (F, A)$$

$$4. (F, A) \tilde{\cap} \Phi_A = \Phi_A$$

$$5. (F, A) \tilde{\cup} U_A = U_A$$

$$6. (F, A) \tilde{\cap} U_A = (F, A)$$

(Maji ve ark, 2003, s.6)

Tanım 1.36. (F, A) , G grubunu üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall a \in A$ için $F(a) \leq G$ oluyorsa (F, A) ya G üzerinde bir esnek grup denir. (Aktaş ve Çağman, 2007, s.6)

Örnek 1.6. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $G = \mathbb{Z}_6$ olsun. $a \in A$ ve $g \in G$ olmak üzere $a\beta g \iff ag \equiv 0(\text{mod } 6)$ olarak tanımlayalım ve $F : A \longrightarrow P(G)$, $F(a) = \{g \in G : a\beta g\}$ kümesini belirleyelim:

- $F(1) = \{g \in G : 1 \cdot g \equiv 0(\text{mod } 6)\} = \{\bar{0}\} \leq G$
- $F(2) = \{g \in G : 2 \cdot g \equiv 0(\text{mod } 6)\} = \{\bar{0}, \bar{3}\} \leq G$
- $F(3) = \{g \in G : 3 \cdot g \equiv 0(\text{mod } 6)\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \leq G$

elde edilir. Şu halde $\forall a \in A$ için $F(a) \leq G$ olduğundan (F, A) , G üzerinde bir esnek gruptur.

Teorem 1.30. (F, A) ve (F', A) , G grubu üzerinde iki esnek grup olsun. Bu durumda, $(F, A) \tilde{\cap} (F', A)$ da G üzerinde bir esnek gruptur. (Aktaş ve Çağman, 2007, s.6-7)

İspat. Esnek kesişimin tanımından dolayı $(F, A) \tilde{\cap} (F', A) = (F'', A \cap A) = (F'', A)$ olur. Yani $(F, A) \tilde{\cap} (F', A)$ da G üzerinde bir esnek kümedir. $\forall a \in A$ için $F''(a) = F(a) \leq G$ ya da $F''(a) = F'(a) \leq G$ olduğundan (F'', A) , G üzerinde bir esnek gruptur.

Teorem 1.31. (F, A) ve (F', B) , G grubu üzerinde iki esnek grup ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Bu durumda, $(F, A) \tilde{\cup} (F', B)$ de G üzerinde bir esnek gruptur. (Aktaş ve Çağman, 2007, s.7)

İspat. Esnek birleşimin tanımından $(F, A) \tilde{\cup} (F', B) = (F'', A \cup B)$ olur. Burada $\forall x \in A \cup B$ için

$$F''(x) = \begin{cases} F(x) & , \quad x \in A \setminus B \text{ ise} \\ F'(x) & , \quad x \in B \setminus A \text{ ise} \\ F(x) \cup F'(x) & , \quad x \in A \cap B \text{ ise} \end{cases}$$

olduğunu hatırlayalım. Dolayısıyla $(F, A) \tilde{\cup} (F', B)$, G üzerinde bir esnek kümedir. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan $\forall x \in A \cup B$ için ya $x \in A \setminus B$ ya da $x \in B \setminus A$ dır. $x \in A \setminus B$ ise $F''(x) = F(x) \leq G$ olup (F'', A) , G üzerinde bir esnek grup olduğu görülür. Benzer şekilde $x \in B \setminus A$ ise $F''(x) = F'(x) \leq G$ olup (F'', A) , G üzerinde bir esnek grup olduğu görülür.

Teorem 1.32. (F, A) ve (F', B) , G grubu üzerinde iki esnek grup olsun. Bu durumda, $(F, A) \wedge (F', B)$ de G üzerinde bir esnek gruptur. (Aktaş ve Çağman, 2007, s.7)

İspat. "ve" operatörünün tanımından dolayı $(F, A) \wedge (F', B) = (F'', A \times B)$ olduğunu biliyoruz. Burada $\forall (a, b) \in A \times B$ için $F''(a, b) = F(a) \cap F'(b)$ olduğunu hatırlayalım. (F, A) ve (F', B) , G üzerinde birer esnek grup olduklarından $F(a) \leq G$ ve $F'(b) \leq G$ ve dolayısıyla $F(a) \cap F'(b) = F''(a, b) \leq G$ olup istenilen elde edilir.

Tanım 1.37. (F, A) , G üzerinde bir esnek grup olsun. Bu durumda,

1. G nin birim elemanı e olmak üzere $\forall a \in A$ için $F(a) = e$ ise (F, A) ya G üzerinde birim esnek grup denir.
2. $\forall a \in A$ için $F(a) = G$ ise (F, A) ya G üzerinde tam esnek grup denir.

(Aktaş ve Çağman, 2007, s.7)

Tanım 1.38. (F, A) ve (F', B) , G üzerinde birer esnek grup olsun.

1. $B \subset A$
2. $\forall b \in B$ için $F'(b) \leq F(b)$

koşulları sağlanıyorsa (F', B) , (F, A) nın bir esnek alt grubudur denir ve $(F', B) \tilde{\leq} (F, A)$ ile gösterilir. (Aktaş ve Çağman, 2007, s.7)

Teorem 1.33. (F, A) , G üzerinde bir esnek grup ve I indeks kümesi olmak üzere $\{(H_i, B_i) : i \in I\}$, (F, A) nın esnek alt gruplarının ailesi olsun. Bu durumda,

1. $\bigcap_{i \in I} (H_i, B_i) \tilde{\leq} (F, A)$ dır.
2. $\bigwedge_{i \in I} (H_i, B_i) \tilde{\leq} (F, A)$ dır.
3. $\forall i, j \in I$ için $H_i \cap H_j = \emptyset \implies \bigvee_{i \in I} (H_i, B_i) \tilde{\leq} (F, A)$ dır.

(Aktaş ve Çağman, 2007, s.8)

Teorem 1.34. (F, A) ile (H, B) , G üzerinde birer esnek grup ve $(H, B) \tilde{\leq} (F, A)$ olsun. $f : G \longrightarrow K$ bir grup homomorfizması ise $(f(F), A)$ ile $(f(H), B)$, K üzerinde birer esnek grup olup aynı zamanda $(f(H), B) \tilde{\leq} (f(F), A)$ dır. (Aktaş ve Çağman, 2007, s.8)

İspat. Öncelikle $\forall a \in A$ için $F(a) \leq G$ olduğundan $f(F(a)) \leq K$ ve benzer şekilde $\forall b \in B$ için $H(b) \leq G$ olduğundan $f(H(b)) \leq K$ olacaktır. Buradan $(f(F(a)), A)$ ve $(f(H(b)), B)$, K üzerinde birer esnek küme oldukları görülür. $(f(H), B) \tilde{\leq} (f(F), A)$ ise $\forall b \in B$ için $f(H(b)) \leq f(F(a))$ olur ki bu da istenileni verir.

Tanım 1.39. (F, A) ile (H, B) , sırasıyla G ve K üzerinde birer esnek grup, $f : G \longrightarrow K$ ve $g : A \longrightarrow B$ birer fonksiyon olsunlar.

1. f bir örten grup homomorfizması,
2. g bir örten fonksiyon,
3. $\forall a \in A$ için $f(F(a)) = H(g(a))$

şartları sağlanıyorsa (F, A) ile (H, B) , esnek homomorfiktirler denir ve $(F, A) \sim (H, B)$ ile gösterilir. Ayrıca (f, g) ye esnek homomorfizma denir. (Aktaş ve Çağman, 2007, s.8)

Tanım 1.40. (F, A) , G üzerinde bir esnek grup ve $(H, B) \tilde{\leq} (F, A)$ olsun. $\forall b \in B$ için $H(b) \triangleleft F(b)$ ise (H, B) ye (F, A) nın esnek normal altgrupudur denir ve $(H, B) \tilde{\triangleleft} (F, A)$ ile gösterilir. (Aktaş ve Çağman, 2007, s.8)

Teorem 1.35. (F, A) , G üzerinde bir esnek grup ve I indeks kümesi olmak üzere $\{(H_i, B_i) : i \in I\}$, (F, A) nın esnek normal altgruplarının ailesi olsun. Bu durumda,

1. $\bigcap_{i \in I} (H_i, B_i) \tilde{\triangleleft} (F, A)$ dır.
2. $\bigwedge_{i \in I} (H_i, B_i) \tilde{\triangleleft} (F, A)$ dır.
3. $\forall i, j \in I$ için $H_i \cap H_j = \emptyset \implies \bigvee_{i \in I} (H_i, B_i) \tilde{\triangleleft} (F, A)$ dır.

(Aktaş ve Çağman, 2007, s.8)

Tanım 1.41. (F, A) , U üzerinde bir esnek küme olsun. $S(F, A) = \{a \in A : F(a) \neq \emptyset\}$ kümesine (F, A) esnek kümesinin destekleyicisi denir. (Feng ve ark., 2008, s.3)

Tanım 1.42. R bir halka ve (F, A) da R üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall a \in A$ için $F(a)$, R nin bir alt halkası oluyorsa (F, A) ya R üzerinde bir esnek halka denir. (Acar ve ark., 2010, s.2)

Örnek 1.7. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $R = \mathbb{Z}_8$ olsun. $F : A \longrightarrow P(R)$ olmak üzere $\forall a \in A$ için $F(a) = \{r \in R : ar = 0\}$ olarak tanımlayalım.

- $F(1) = \{r \in R : 1 \cdot r \equiv 0(\text{mod } 8)\} = \{\bar{0}\}$
- $F(2) = \{r \in R : 2 \cdot r \equiv 0(\text{mod } 8)\} = \{\bar{0}, \bar{4}\}$
- $F(3) = \{r \in R : 3 \cdot r \equiv 0(\text{mod } 8)\} = \{\bar{0}\}$

olup $(F, A) = \{\{1, \{\bar{0}\}\}, \{2, \{\bar{0}, \bar{4}\}\}, \{3, \{\bar{0}\}\}\}$ elde edilir. $\forall a \in A$ için $F(a)$, R nin bir alt halkası olduğundan (F, A) , R üzerinde bir esnek halkadır.

Tanım 1.43. (F, A) ile (G, B) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin bi-kesişimleri $(F, A) \tilde{\cap} (G, B)$ ile gösterilir ve $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, A \cap B)$ olarak tanımlanır. Burada $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall x \in A \cap B$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ dir. (Feng ve ark., 2008, s.2)

Teorem 1.36. (F, A) ve (G, B) , R üzerinde birer esnek halka olsun. Bu durumda,

1. Boş esnek kümeden farklı olmak üzere $(F, A) \wedge (G, B)$ de R üzerinde esnek halkadır.
2. Boş esnek kümeden farklı olmak üzere $(F, A) \tilde{\cap} (G, B)$ de R üzerinde esnek halkadır.

(Acar ve ark., 2010, s.2)

İspat. 1. (F, A) ve (G, B) , R üzerinde birer esnek halka olduğundan $\forall a \in A$ için $F(a)$ ve $\forall b \in B$ için $G(b)$, R nin alt halkalarıdır. İki alt halkanın kesişimi de alt halka olduğundan $F(a) \cap G(b)$ alt halka olacaktır. $\tilde{\wedge}$ işleminin tanımından $(F, A) \tilde{\wedge} (G, B) = (H, A \times B)$ olup $\forall (a, b) \in A \times B$ için $H(a, b) = F(a) \cap G(b)$ olduğundan $\emptyset \neq (F, A) \tilde{\wedge} (G, B)$ de R üzerinde bir esnek halkadır.

2. $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, A \cap B)$ olduğunu biliyoruz. Burada $\forall x \in A \cap B$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ tir. $\emptyset \neq F(x)$ ile $\emptyset \neq G(x)$, R nin birer alt halkası olduğundan $H(x) = F(x) \cap G(x)$ de R nin bir alt halkası olacaktır. Şu halde $\emptyset \neq (F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, A \cap B)$ de R üzerinde bir esnek halkadır.

Tanım 1.44. (F, A) ve (G, B) , R üzerinde birer esnek halka olsunlar.

1. $B \subset A$,
2. $\forall b \in S(G, B)$ için $G(b)$, $F(b)$ nin alt halkası

şartları sağlanıyorsa (G, B) ye (F, A) nin bir esnek alt halkası denir. (Acar ve ark., 2010, s.3)

Örnek 1.8. $R = A = 2\mathbb{Z}$ ve $B = 6\mathbb{Z}$ olsun. $F : A \rightarrow P(\mathbb{Z})$ fonksiyonu $\forall x \in A$ için $F(x) = \{nx : n \in \mathbb{Z}\}$ ve $G : B \rightarrow P(\mathbb{Z})$ de $\forall x \in B$ için $G(x) = \{5nx : n \in \mathbb{Z}\}$ olarak tanımlansın. Buradan $F(x) = x\mathbb{Z}$ ve $G(x) = 5x\mathbb{Z}$ elde edilir. Sonuç olarak, $B \subset A$ ve $G(x)$, $F(x)$ in alt halkası olduğundan (G, B) , (F, A) nin bir esnek alt halkasıdır. (Acar ve ark., 2010, s.3)

Teorem 1.37. I parametreler kümesi olmak üzere $(\eta_i, A_i)_{i \in I}$, R üzerinde esnek halkaların ailesi olsun. Bu durumda,

1. $\emptyset \neq \bigwedge_{i \in I} (\eta_i, A_i)$, R üzerinde bir esnek halkadır.

2. $\emptyset \neq \tilde{\cap}_{i \in I}(\eta_i, A_i)$, R üzerinde bir esnek halkadır.

3. $\{A_i : i \in I\}$ ler ikişer ikişer birbirilerinden ayrık iseler $\tilde{\bigcup}_{i \in I}(\eta_i, A_i)$ R üzerinde bir esnek halkadır.

(Acar ve ark., 2010, s.3)

Tanım 1.45. (F, A) ve (G, I) , R üzerinde birer esnek halka olsunlar.

1. $I \subset A$,

2. $\forall x \in S(G, I)$ için $G(x)$, $F(x)$ in bir ideali

şartları sağlanıyorsa (G, I) ya (F, A) nın bir esnek ideali denir ve $(G, I) \tilde{\triangleleft} (F, A)$ ile gösterilir. (Acar ve ark., 2010, s.3)

Örnek 1.9. $R = A = \mathbb{Z}_4$ ve $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ olsun. $F : A \longrightarrow P(R)$ fonksiyonunu $F(x) = \{y \in R : xy \in \{\bar{0}, \bar{2}\}\}$ olarak ve $G : I \longrightarrow P(R)$ fonksiyonunu da $G(x) = \{y \in R : xy = \bar{0}\}$ olarak tanımlayalım. $F(\bar{0}) = R$, $F(\bar{1}) = \{\bar{0}, \bar{2}\}$, $F(\bar{2}) = R$, $F(\bar{3}) = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ ve $G(\bar{0}) = R$, $G(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$, $G(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ olup

$$(F, A) = \{\{\bar{0}, R\}, \{\bar{1}, \{\bar{0}, \bar{2}\}\}, \{\bar{2}, R\}, \{\bar{3}, \{\bar{0}, \bar{2}\}\}\}$$

$$(G, A) = \{\{\bar{0}, R\}, \{\bar{1}, \{\bar{0}, \bar{2}\}\}, \{\bar{2}, \{\bar{0}, \bar{2}\}\}\}$$

olduğu görülür. Bu durumda, $I \subset A$ ve $\forall x \in S(G, I)$ için $G(x)$, $F(x)$ in bir ideali olduğundan (G, I) , (F, A) nın bir esnek idealidir.

Teorem 1.38. (F, A) , R üzerinde bir esnek halka ve (G_1, I_1) ile (G_2, I_2) , (F, A) nın bir esnek ideali olsunlar. Bu durumda, boştan esnek kümeden farklı $(G_1, I_1) \tilde{\cap} (G_2, I_2)$ de (F, A) nın bir esnek idealidir. (Acar ve ark., 2010, s.3)

Teorem 1.39. (F, A) ve (H, B) , R üzerinde birer esnek halka olsunlar. $(G_1, I_1) \tilde{\triangleleft} (F, A)$ ve $(G_2, I_2) \tilde{\triangleleft} (H, B)$ ise $((G_1, I_1) \tilde{\cap} (G_2, I_2)) \tilde{\triangleleft} ((F, A) \tilde{\cap} (H, B))$ dir. (Acar ve ark., 2010, s.3)

Teorem 1.40. (F, A) , R üzerinde bir esnek halka ve (G_1, I_1) ile (G_2, I_2) , (F, A) nın bir esnek ideali olsunlar. Bu durumda $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ise $(G_1, I_1) \tilde{\bigcup} (G_2, I_2)$ de (F, A) nın bir esnek idealidir. (Acar ve ark., 2010, s.4)

Teorem 1.41. J parametreler kümesi olmak üzere $(G_j, I_j)_{j \in J}$, R üzerinde esnek halka olan (F, A) , idealler ailesi olsun. Bu durumda,

1. $\emptyset \neq \bigwedge_{i \in I}(G_j, I_j)$, (F, A) nın bir esnek idealidir.

2. $\emptyset \neq \tilde{\cap}_{i \in I}(G_j, I_j)$, (F, A) nın bir esnek idealidir.

3. $\{I_j : j \in J\}$ ler ikişier ikişer birbirilerinden ayrık iseler $\bigcup_{j \in J} (G_j, I_j)$, (F, A) nın bir esnek idealidir.

(Acar ve ark., 2010, s.4)

Molodstov'un (1999) esnek kümeler tanımı, Çağman ve Enginoğlu (2010) tarafından güncellenmiştir.

Tanım 1.46. U evrensel küme, E parametreler kümesi, $A \subseteq E$ ve $\eta_A : E \rightarrow P(U)$ olmak üzere η_A esnek kümesi

$$\eta_A = \{\{x, \eta_A(x)\} : x \in E, \eta_A(x) \in P(U)\}$$

olarak tanımlanır. Burada $x \notin A$ ise $\eta_A(x) = \emptyset$ dir. Ayrıca U üzerinde tanımlanabilecek tüm esnek kümelerin kümesi de $S(U)$ ile gösterilir. (Çağman ve Enginoğlu, 2010, s.2)

Tanım 1.47. $\eta_A \in S(U)$ olsun. $\forall x \in E$ için $\eta_A(x) = \emptyset$ ise η_A ya bir boş esnek küme denir ve $\eta_{\emptyset}$ ile gösterilir. $\forall x \in E$ için $\eta_A(x) = U$ ise η_A ya A -evrensel esnek küme denir ve $\eta_{\bar{A}}$ ile gösterilir. $A = E$ ise η_A ya evrensel esnek küme denir ve $\eta_{\bar{E}}$ ile gösterilir. (Çağman ve Enginoğlu, 2010, s.2)

Tanım 1.48. $\eta_A, \eta_B \in S(U)$ olsun. $\forall x \in E$ için $\eta_A(x) \subseteq \eta_B(x)$ ise η_A ya η_B nin bir esnek alt kümesi denir ve $\eta_A \subseteq \eta_B$ ile gösterilir. $\forall x \in E$ için $\eta_A(x) = \eta_B(x)$ ise η_A ile η_B ye esnek eşit kümeler denir. (Çağman ve Enginoğlu, 2010, s.2)

Tanım 1.49. $\eta_A \in S(U)$ olsun. η_A nın esnek tümleyeni η_A^c ile gösterilir ve $\eta_A^c = \{\{x, U \setminus \eta_A(x)\} : x \in E\}$ ile tanımlanır. (Çağman ve Enginoğlu, 2010, s.3)

Tanım 1.50. $\eta_A, \eta_B \in S(U)$ olsun. Bu iki esnek kümenin birleşimi $\eta_A \cup \eta_B$ ile gösterilir ve $\eta_A \cup \eta_B = \{\{x, \eta_A(x) \cup \eta_B(x)\} : x \in E\}$ ile tanımlanır. (Çağman ve Enginoğlu, 2010, s.3)

Tanım 1.51. $\eta_A, \eta_B \in S(U)$ olsun. Bu iki esnek kümenin kesişimi $\eta_A \cap \eta_B$ ile gösterilir ve $\eta_A \cap \eta_B = \{\{x, \eta_A(x) \cap \eta_B(x)\} : x \in E\}$ ile tanımlanır. (Çağman ve Enginoğlu, 2010, s.3)

Tanım 1.52. $\eta_A, \eta_B \in S(U)$ olsun. Bu iki esnek kümenin farkı $\eta_A \setminus \eta_B$ ile gösterilir ve $\eta_A \setminus \eta_B = \{\{x, \eta_A(x) \setminus \eta_B(x)\} : x \in E\}$ ile tanımlanır. (Çağman ve Enginoğlu, 2010, s.4)

Tanım 1.53. $\eta_A, \eta_B \in S(U)$ olsun. Bu iki esnek kümenin $\wedge$ -çarpımı $\eta_A \wedge \eta_B$ ile gösterilir ve $\eta_A \wedge \eta_B = \{\{(x, y), \eta_A(x) \cap \eta_B(y)\} : (x, y) \in E \times E\}$ ile tanımlanır. (Çağman ve Enginoğlu, 2010, s.4)

Tanım 1.54. $\eta_A, \eta_B \in S(U)$ olsun. Bu iki esnek kümenin $\vee$ -çarpımı $\eta_A \vee \eta_B$ ile gösterilir ve $\eta_A \vee \eta_B = \{\{(x, y), \eta_A(x) \cup \eta_B(y)\} : (x, y) \in E \times E\}$ ile tanımlanır. (Çağman ve Enginoğlu, 2010, s.4)

Tanım 1.55. $\eta_A, \eta_B \in S(U)$ olsun. Bu iki esnek kümenin $\tilde{\wedge}$ -çarpımı $\eta_A \tilde{\wedge} \eta_B$ ile gösterilir ve $\eta_A \tilde{\wedge} \eta_B = \{ \{(x, y), \eta_A(x) \cap (U \setminus \eta_B(y))\} : (x, y) \in E \times E \}$ ile tanımlanır. (Çağman ve Enginoğlu, 2010, s.4)

Tanım 1.56. $\eta_A, \eta_B \in S(U)$ olsun. Bu iki esnek kümenin $\tilde{\vee}$ -çarpımı $\eta_A \tilde{\vee} \eta_B$ ile gösterilir ve $\eta_A \tilde{\vee} \eta_B = \{ \{(x, y), \eta_A(x) \cup (U \setminus \eta_B(y))\} : (x, y) \in E \times E \}$ ile tanımlanır. (Çağman ve Enginoğlu, 2010, s.5)

Tanım 1.57. G bir grup ve $\eta_G \in S(U)$ olsun. $\forall x, y \in G$ için $\eta_G(xy) \supseteq \eta_G(x) \cap \eta_G(y)$ oluyorsa η_G ye U üzerinde bir esnek kesişimsel grupoid denir. (Çağman ve ark., 2012, s.2)

Tanım 1.58. G bir grup ve η_G , U üzerinde bir esnek grupoid olsun. $\forall x \in G$ için $\eta_G(x^{-1}) = \eta_G(x)$ oluyorsa η_G ye U üzerinde bir esnek kesişimsel grup denir. (Çağman ve ark., 2012, s.2)

Teorem 1.42. η_G , U üzerinde bir esnek kesişimsel grup olsun. O halde $\forall x \in G$ için $\eta_G(e) \supseteq \eta_G(x)$ tir. (Çağman ve ark., 2012, s.3)

İspat. η_G , U üzerinde bir esnek kesişimsel grup olduğundan $\forall x \in G$ için $\eta_G(e) = \eta_G(x^{-1}x) \supseteq \underbrace{\eta_G(x^{-1}) \cap \eta_G(x)}_{=\eta_G(x)} = \eta_G(x)$ olup istenilen elde edilir.

Teorem 1.43. $\eta_G \in S(U)$ olsun. η_G nin U üzerinde bir esnek kesişimsel grup olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in G$ için $\eta_G(xy^{-1}) \supseteq \eta_G(x) \cap \eta_G(y)$ olmasıdır. (Çağman ve ark., 2012, s.3)

İspat. $\implies$: η_G esnek kesişimsel grup olsun. Esnek kesişimsel grup tanımından η_G aynı zamanda esnek kesişimsel grupoidtir. Buradan, $\forall x, y \in G$ için $\eta_G(xy^{-1}) \supseteq \eta_G(x) \cap \eta_G(y^{-1}) = \eta_G(x) \cap \eta_G(y)$ olup istenilen elde edilir.

$\impliedby$: $\forall x, y \in G$ için $\eta_G(xy^{-1}) \supseteq \eta_G(x) \cap \eta_G(y)$ olsun. Öncelikle $\forall y \in G$ için $x = e$ seçersek $\eta_G(y^{-1}) \supseteq \eta_G(y)$ olur. Buradan,

$$\eta_G(y) = \eta_G((y^{-1})^{-1}) \supseteq \eta_G(y^{-1})$$

olduğu görülür yani $\forall y \in G$ için $\eta_G(y^{-1}) = \eta_G(y)$ dir. Sonuç olarak,

$$\eta_G(xy) = \eta_G(x) \cap \eta_G((y^{-1})^{-1}) \supseteq \eta_G(x) \cap \eta_G(y^{-1}) = \eta_G(x) \cap \eta_G(y)$$

olup η_G nin U üzerinde esnek kesişimsel grup olduğu görülür.

Örnek 1.10. $G = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde bir $\cdot$ işlemi tanımlanıyor. $(G, \cdot)$ cebirsel yapısına ait işlem tablosu aşağıda verilmiştir.

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Buradan $(G, \cdot)$ cebirsel yapısının bir grup olduğu açıktır. $\eta_G : G \longrightarrow S_3$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi alalım:

$$\eta_G(a) = S_3, \eta_G(b) = \eta_G(c) = \eta_G(d) = S_3 \setminus \{(23)\}$$

Böylece η_G, S_3 üzerinde esnek kesişimsel grup olma şartlarını sağlamaktadır. Çünkü

- $\eta_G(cd^{-1}) = \eta_G(cb) = \eta_G(d) \supseteq \eta_G(c) \cap \eta_G(d)$
- $\eta_G(dc^{-1}) = \eta_G(dc) = \eta_G(b) \supseteq \eta_G(d) \cap \eta_G(c)$
- $\eta_G(db^{-1}) = \eta_G(dd) = \eta_G(c) \supseteq \eta_G(d) \cap \eta_G(b)$
- $\eta_G(bd^{-1}) = \eta_G(bb) = \eta_G(c) \supseteq \eta_G(b) \cap \eta_G(d)$
- $\eta_G(cb^{-1}) = \eta_G(cd) = \eta_G(b) \supseteq \eta_G(c) \cap \eta_G(b)$
- $\eta_G(bc^{-1}) = \eta_G(bc) = \eta_G(d) \supseteq \eta_G(b) \cap \eta_G(c)$

koşulları sağlamaktadır.

Teorem 1.44. η_A ve η_B, U üzerinde birer esnek kesişimsel grup olsun. Bu durumda $\eta_A \wedge \eta_B$ de U üzerinde bir esnek kesişimsel gruptur. (Çağman ve ark., 2012, s.3)

İspat. $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B$ için

$$\begin{aligned}
\eta_{A \wedge B}((x_1, y_1)(x_2, y_2)^{-1}) &= \eta_{A \wedge B}((x_1, y_1)(x_2^{-1}, y_2^{-1})) \\
&= \eta_{A \wedge B}((x_1 x_2^{-1}, y_1 y_2^{-1})) \\
&= \eta_A(x_1 x_2^{-1}) \cap \eta_B(y_1 y_2^{-1}) \\
&\supseteq (\eta_A(x_1) \cap \eta_A(x_2)) \cap (\eta_B(y_1) \cap \eta_B(y_2)) \\
&= (\eta_A(x_1) \cap \eta_B(y_1)) \cap (\eta_A(x_2) \cap \eta_B(y_2)) \\
&= \eta_{A \wedge B}(x_1, y_1) \cap \eta_{A \wedge B}(x_2, y_2)
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

Tanım 1.59. $\eta_A, \eta_B \in S(U)$ olsun. Bu iki esnek kümenin esnek kartezyen çarpımı $\eta_A \tilde{\times} \eta_B$ ile gösterilir ve

$$\eta_A \tilde{\times} \eta_B = \{((x, y), \eta_A(x) \times \eta_B(y)) : (x, y) \in A \times B\}$$

ile tanımlanır. Burada $\eta_A(x) \times \eta_B(y) = \eta_{A \times B}(x, y)$ olarak tanımlanır. (Çağman ve ark., 2012, s.3)

Teorem 1.45. η_A ile η_B , U üzerinde birer esnek kesişimsel grup ise $\eta_A \tilde{\times} \eta_B$ de $U \times U$ üzerinde bir esnek kesişimsel gruptur. (Çağman ve ark., 2012, s.3)

İspat. $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B$ için

$$\begin{aligned} \eta_{A \times B}((x_1, y_1)(x_2, y_2)^{-1}) &= \eta_{A \times B}((x_1, y_1)(x_2^{-1}, y_2^{-1})) \\ &= \eta_{A \times B}((x_1 x_2^{-1}, y_1 y_2^{-1})) \\ &= \eta_A(x_1 x_2^{-1}) \times \eta_B(y_1 y_2^{-1}) \\ &\supseteq (\eta_A(x_1) \cap \eta_A(x_2)) \times (\eta_B(y_1) \cap \eta_B(y_2)) \\ &= (\eta_A(x_1) \times \eta_B(y_1)) \cap (\eta_A(x_2) \times \eta_B(y_2)) \\ &= \eta_{A \times B}(x_1, y_1) \cap \eta_{A \times B}(x_2, y_2) \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 1.46. η_A ile ζ_A , U üzerinde birer esnek kesişimsel grup ise $\eta_A \tilde{\cap} \zeta_A$ da U üzerinde bir esnek kesişimsel gruptur. (Çağman ve ark., 2012, s.4)

İspat. $\forall x, y \in A$ için

$$\begin{aligned} (\eta_A \tilde{\cap} \zeta_A)(xy^{-1}) &= \eta_A(xy^{-1}) \cap \zeta_A(xy^{-1}) \\ &\supseteq (\eta_A(x) \cap \eta_A(y)) \cap (\zeta_A(x) \cap \zeta_A(y)) \\ &= (\eta_A(x) \cap \zeta_A(x)) \cap (\eta_A(y) \cap \zeta_A(y)) \\ &= (\eta_A \tilde{\cap} \zeta_A)(x) \cap (\eta_A \tilde{\cap} \zeta_A)(y) \end{aligned}$$

Tanım 1.60. $\eta_A, \eta_B \in S(U)$ ve $h : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. η_A esnek kümesinin h fonksiyonu altındaki görüntüsü $h(\eta_A)$ ile gösterilir ve $\forall y \in B$ için

$$h(\eta_A) = \begin{cases} \bigcup \{\eta_A(x) : x \in A \text{ ve } h(x) = y\} & , \quad h^{-1}(y) \neq \emptyset \text{ ise} \\ \emptyset & , \quad \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. η_B nin h altındaki ters görüntüsü ise $h^{-1}(\eta_B)$ gösterilir ve $\forall x \in A$ için $h^{-1}(\eta_B)(x) = \eta_B(h(x))$ ile tanımlanır. (Çağman ve ark., 2012, s.6)

Teorem 1.47. η_G , U üzerinde bir esnek kesişimsel grup ve $h : G \longrightarrow H$ bir grup izomorfizması olsun. Bu durumda, $h(\eta_G)$ de U üzerinde bir esnek kesişimsel gruptur. (Çağman ve ark., 2012, s.7)

İspat. h örten olduğundan $\forall x, y \in G$ için $h(x) = u$ ve $h(y) = v$ olacak biçimde $u, v \in H$ vardır.

$$\begin{aligned}
(h(\eta_G))(uv) &= \bigcup \{ \eta_G(z) : z \in G, h(z) = uv \} \\
&= \bigcup \{ \eta_G(xy) : x, y \in G, h(xy) = uv \} \\
&= \bigcup \{ \eta_G(xy) : x, y \in G, h(x)h(y) = uv \} \\
&= \bigcup \{ \eta_G(xy) : x, y \in G, h(x) = u, h(y) = v \} \\
&\supseteq \bigcup \{ \eta_G(x) \cap \eta_G(y) : x, y \in G, h(x) = u, h(y) = v \} \\
&= (h(\eta_G))(u) \cap (h(\eta_G))(v)
\end{aligned}$$

ve aynı zamanda

$$\begin{aligned}
h(\eta_G)(u^{-1}) &= \bigcup \{ \eta_G(z) : z \in G, h(z) = u^{-1} \} \\
&= \bigcup \{ \eta_G(z^{-1}) : z \in G, h(z^{-1}) = u \} \\
&= h(\eta_G)(u)
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 1.48. η_G , U üzerinde bir esnek kesişimsel grup ve $h : G \longrightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun. Bu durumda, $h^{-1}(\eta_H)$ de U üzerinde bir esnek kesişimsel gruptur. (Çağman ve ark., 2012, s.7)

İspat. $\forall x, y \in G$ için

$$\begin{aligned}
h^{-1}(\eta_H)(xy) &= \eta_H(h(xy)) \\
&= \eta_H(h(x)h(y)) \\
&\supseteq \eta_H(h(x)) \cap \eta_H(h(y)) \\
&= h^{-1}(\eta_H)(x) \cap h^{-1}(\eta_H)(y)
\end{aligned}$$

ve aynı zamanda

$$\begin{aligned}
h^{-1}(\eta_H)(x^{-1}) &= \eta_H(h(x^{-1})) \\
&= \eta_H(h(x)) \\
&= h^{-1}(\eta_H)(x)
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Tanım 1.61. $(R, +, \cdot)$ bir halka ve $\eta_R \in S(U)$ olsun. η_R , ”+” işlemi ile birlikte U üzerinde bir esnek kesişimsel grup ve aynı zamanda η_R , ” $\cdot$ ” işlemi ile birlikte U üzerinde bir esnek kesişimsel grupoid ise η_R ye U üzerinde bir esnek kesişimsel halka denir. (Çıtak ve Çağman, 2015, s.2)

Teorem 1.49. R bir halka ve $\eta_R \in S(U)$ olsun. η_R nin U üzerinde bir esnek kesişimsel halka olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in R$ için

1. $\eta_R(x - y) \supseteq \eta_R(x) \cap \eta_R(y)$
2. $\eta_R(xy) \supseteq \eta_R(x) \cap \eta_R(y)$

dir. (Çıtak ve Çağman, 2015, s.2-3)

İspat. $\implies$: η_R , U üzerinde esnek kesişimsel halka ise verilen şartların sağlandığı açıktır. $\impliedby$: 2. şarttan η_R nin ” $\cdot$ ” işlemi ile birlikte U üzerinde esnek kesişimsel grupoid olma şartının sağladığı görülür. Bu yüzden sadece η_R nin ”+” işlemi ile birlikte U üzerinde esnek kesişimsel grup olma şartının sağlandığı gösterilmesi yeterlidir. Şimdi $x = 0$ için 1. maddeden $\eta_R(0 - y) = \eta_R(-y) \supseteq \eta_R(0) \cap \eta_R(y) = \eta_R(y)$ olduğunu görebiliriz. Aynı zamanda son kapsamadan yararlanılarak $\eta_R(y) = \eta_R(-(-y)) \supseteq \eta_R(-y)$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $\eta_R(-y) = \eta_R(y)$ dir. Son olarak

$$\eta_R(x + y) = \eta_R(x - (-y)) \supseteq \eta_R(x) \cap \eta_R(-y) = \eta_R(x) \cap \eta_R(y)$$

olup η_R nin ”+” işlemi ile birlikte U üzerinde bir esnek kesişimsel grup olduğu görülür.

Tanım 1.62. R bir halka ve η_R , U üzerinde bir esnek kesişimsel halka olsun. $\forall x, y \in R$ için $\eta_R(xy) \supseteq \eta_R(y)$ oluyorsa η_R ye U üzerinde bir esnek kesişimsel sol ideal denir. $\forall x, y \in R$ için $\eta_R(xy) \supseteq \eta_R(x)$ oluyorsa η_R ye U üzerinde bir esnek kesişimsel sağ ideal denir. η_R , U üzerinde hem esnek sol ideal hem de esnek sağ ideal ise η_R ye U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal denir. (Çıtak ve Çağman, 2015, s.3)

Teorem 1.50. R bir halka ve $\eta_R \in S(U)$ olsun. η_R nin U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in R$ için

$$1. \eta_R(x - y) \supseteq \eta_R(x) \cap \eta_R(y)$$

$$2. \eta_R(xy) \supseteq \eta_R(x) \cup \eta_R(y)$$

dir. (Çıtak ve Çağman, 2015, s.3)

İspat. $\implies$: η_R, U üzerinde esnek kesişimsel ideal ise tanımdan ötürü $\forall x, y \in R$ için $\eta_R(x - y) \supseteq \eta_R(x) \cap \eta_R(y)$ koşulunu sağlar. Aynı zamanda η_R esnek kesişimsel sol ideal olduğundan $\forall x, y \in R$ için $\eta_R(xy) \supseteq \eta_R(y)$ ve η_R esnek kesişimsel sağ ideal olduğundan $\forall x, y \in R$ için $\eta_R(xy) \supseteq \eta_R(x)$ dir. Buradan, $\eta_R(xy) \supseteq \eta_R(x) \cup \eta_R(y)$ olduğu görülür.

$\Leftarrow$: $\forall x, y \in R$ için $\eta_R(xy) \supseteq \eta_R(x) \cup \eta_R(y) \implies \eta_R(xy) \supseteq \eta_R(x)$ ve $\eta_R(xy) \supseteq \eta_R(x) \cup \eta_R(y) \implies \eta_R(xy) \supseteq \eta_R(y)$ elde edilir. Buradan $\eta_R(xy) \supseteq \eta_R(x) \cap \eta_R(y)$ olur. 1. maddeden dolayı ayrıca η_R nin hem esnek sol kesişimsel ideal ve hem de esnek sağ kesişimsel ideal olduğundan η_R, U üzerinde bir esnek kesişimsel idealdir.

Teorem 1.51. R birimli halka ve η_R, U üzerinde esnek kesişimsel ideal ise $\forall x \in R$ için $\eta_R(x) \supseteq \eta_R(1)$ dir. (Çıtak ve Çağman, 2015, s.3)

Teorem 1.52. R birimli halka ve η_R, U üzerinde esnek kesişimsel ideal ise tersinir olan $\forall x \in R$ için $\eta_R(x) = \eta_R(1)$ dir. (Çıtak ve Çağman, 2015, s.3)

Tanım 1.63. R bir halka ve η_R de U üzerinde bir esnek kesişimsel halka olsun. Bu durumda,

$$c\eta_R = \{x \in R : \eta_R(x) = \eta_R(0)\}$$

olarak tanımlanan kümeye η_R nin merkezi denir. (Çıtak ve Çağman, 2015, s.7)

Teorem 1.53. R bir halka ve η_R de U üzerinde bir esnek kesişimsel halka olsun. Bu durumda $c\eta_R, R$ nin bir alt halkasıdır. (Çıtak ve Çağman, 2015, s.7)

İspat. $0 \in c\eta_R \subseteq R$ olduğu açıktır. $x, y \in c\eta_R$ alalım. O halde $\eta_R(x) = \eta_R(y) = \eta_R(0)$ dir. η_R bir esnek kesişimsel halka olduğundan

$$\eta_R(x - y) \supseteq \eta_R(x) \cap \eta_R(y) = \eta_R(0) \implies x - y \in c\eta_R$$

ve ayrıca

$$\eta_R(xy) \supseteq \eta_R(x) \cap \eta_R(y) = \eta_R(0) \implies xy \in c\eta_R$$

olup istenilen elde edilir.

Teorem 1.54. R bir halka ve η_R de U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal olsun. Bu durumda, $c\eta_R, R$ nin bir idealidir. (Çıtak ve Çağman, 2015, s.7)

İspat. $0 \in c\eta_R \subseteq R$ olduğu açıktır. $x, y \in c\eta_R$ alalım. O halde $\eta_R(x) = \eta_R(y) = \eta_R(0)$ dır. η_R bir esnek kesişimsel ideal olduğundan

$$\eta_R(x - y) \supseteq \eta_R(x) \cap \eta_R(y) = \eta_R(0) \implies x - y \in c\eta_R$$

ve ayrıca $\forall r \in R$ için

$$\eta_R(xr) \supseteq \eta_R(x) \cup \eta_R(r) = \eta_R(0) \implies xr \in c\eta_R$$

olur. Benzer şekilde $rx \in R$ olduğu da kolaylıkla gösterilebilir. Sonuç olarak $c\eta_R$, R nin bir idealidir.

Teorem 1.55. η_R , U üzerinde bir esnek kesişimsel halka ve $h : R \longrightarrow H$ örten halka homomorfizması olsun. Bu durumda $h(\eta_R)$ de U üzerinde bir esnek kesişimsel halkadır. (Çıtak ve Çağman, 2015, s.8)

İspat. h örten olduğundan $\forall u, v \in H$ için $h(x) = u$ ve $h(y) = v$ olacak biçimde bir $x, y \in R$ vardır.

$$\begin{aligned} h(\eta_R)(u - v) &= \bigcup \{ \eta_R(z) : z \in R, h(z) = u - v \} \\ &= \bigcup \{ \eta_R(x - y) : x, y \in R, h(x - y) = u - v \} \\ &= \bigcup \{ \eta_R(x - y) : x, y \in R, h(x) - h(y) = u - v \} \\ &= \bigcup \{ \eta_R(x - y) : x, y \in R, h(x) = u, h(y) = v \} \\ &\supseteq \bigcup \{ \eta_R(x) \cap \eta_R(y) : x, y \in R, h(x) = u, h(y) = v \} \\ &= \bigcup \{ \eta_R(x) : x \in R, h(x) = u \} \cap \bigcup \{ \eta_R(y) : y \in R, h(y) = v \} \\ &= h(\eta_R)(u) \cap h(\eta_R)(v) \end{aligned}$$

ve aynı zamanda

$$\begin{aligned} h(\eta_R)(uv) &= \bigcup \{ \eta_R(z) : z \in R, h(z) = uv \} \\ &= \bigcup \{ \eta_R(xy) : x, y \in R, h(xy) = uv \} \\ &= \bigcup \{ \eta_R(xy) : x, y \in R, h(x)h(y) = uv \} \\ &= \bigcup \{ \eta_R(xy) : x, y \in R, h(x) = u, h(y) = v \} \\ &\supseteq \bigcup \{ \eta_R(x) \cap \eta_R(y) : x, y \in R, h(x) = u, h(y) = v \} \\ &= \bigcup \{ \eta_R(x) : x \in R, h(x) = u \} \cap \bigcup \{ \eta_R(y) : y \in R, h(y) = v \} \\ &= h(\eta_R)(u) \cap h(\eta_R)(v) \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 1.56. η_R , U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal ve $h : R \longrightarrow H$ örten halka homomorfizması olsun. Bu durumda, $h(\eta_R)$ de U üzerinde bir esnek kesişimsel idealdir. (Çıtak ve Çağman, 2015, s.8)

İspat. Bir önceki teoremin ispatından

$$\begin{aligned}
h(\eta_R)(uv) &= \bigcup \{ \eta_R(z) : z \in R, h(z) = uv \} \\
&= \bigcup \{ \eta_R(xy) : x, y \in R, h(xy) = uv \} \\
&= \bigcup \{ \eta_R(xy) : x, y \in R, h(x)h(y) = uv \} \\
&= \bigcup \{ \eta_R(xy) : x, y \in R, h(x) = u, h(y) = v \} \\
&\supseteq \bigcup \{ \eta_R(x) : x \in R, h(x) = u \} \\
&= h(\eta_R)(u)
\end{aligned}$$

olup $h(\eta_R)$, U üzerinde bir esnek kesişimsel sağ idealdir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
h(\eta_R)(uv) &= \bigcup \{ \eta_R(z) : z \in R, h(z) = uv \} \\
&= \bigcup \{ \eta_R(xy) : x, y \in R, h(xy) = uv \} \\
&= \bigcup \{ \eta_R(xy) : x, y \in R, h(x)h(y) = uv \} \\
&= \bigcup \{ \eta_R(xy) : x, y \in R, h(x) = u, h(y) = v \} \\
&\supseteq \bigcup \{ \eta_R(y) : y \in R, h(y) = v \} \\
&= h(\eta_R)(v)
\end{aligned}$$

olup $h(\eta_R)$, U üzerinde bir esnek kesişimsel sol idealdir. Sonuç olarak $h(\eta_R)$ de U üzerinde esnek kesişimsel idealdir.

Teorem 1.57. η_H , U üzerinde bir esnek kesişimsel halka ve $h : R \longrightarrow H$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda $h^{-1}(\eta_H)$ de U üzerinde bir esnek kesişimsel halkadır. (Çıtak ve Çağman, 2015, s.8)

İspat. $\forall x, y \in R$ için

$$\begin{aligned}
h^{-1}(\eta_H)(x - y) &= \eta_H(h(x - y)) \\
&= \eta_H(h(x) - h(y)) \\
&\supseteq \eta_H(h(x)) \cap \eta_H(h(y)) \\
&= h^{-1}(\eta_H)(x) \cap h^{-1}(\eta_H)(y)
\end{aligned}$$

ve aynı zamanda

$$\begin{aligned}
h^{-1}(\eta_H)(xy) &= \eta_H(h(xy)) \\
&= \eta_H(h(x)h(y)) \\
&\supseteq \eta_H(h(x)) \cap \eta_H(h(y)) \\
&= h^{-1}(\eta_H)(x) \cap h^{-1}(\eta_H)(y)
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

Teorem 1.58. η_H , U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal ve $h : R \longrightarrow H$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda $h^{-1}(\eta_H)$ de U üzerinde bir esnek kesişimsel idealdir. (Çıtak ve Çağman, 2015, s.8)

İspat. Bir önceki teoremin ispatına ek olarak $\forall x, y \in R$ için

$$\begin{aligned}
h^{-1}(\eta_H)(xy) &= \eta_H(h(xy)) \\
&= \eta_H(h(x)h(y)) \\
&\supseteq \eta_H(h(x)) \\
&= h^{-1}(\eta_H)(x)
\end{aligned}$$

ve ek olarak

$$\begin{aligned}
h^{-1}(\eta_H)(xy) &= \eta_H(h(xy)) \\
&= \eta_H(h(x)h(y)) \\
&\supseteq \eta_H(h(y)) \\
&= h^{-1}(\eta_H)(y)
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

Tanım 1.64. $\eta_A \in S(U)$ ve $T \subseteq U$ olsun. η_A esnek kümesinin T -genişleme kümesi η_A^T ile gösterilir ve $\eta_A^T = \{x \in A : \eta_A(x) \supseteq T\}$ ile tanımlanır. (Çağman ve ark., 2012, s.5)

Tanım 1.65. R halka ve $T \subseteq U$ olsun. η_A^T , R nin ideali oluyorsa η_A^T ye R nin T genişleme ideali denir. (Çağman ve ark., 2012, s.5)

Teorem 1.59. η_R , U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal ve $T \subseteq \eta_R(0)$ olsun. Bu durumda, η_R^T , R bir idealidir. (Çıtak ve Çağman, 2015, s.7)

İspat. $0 \in \eta_R^T$ olup $\emptyset \neq \eta_R^T \subseteq R$ dir. $x, y \in \eta_R^T$ alalım. O halde, $\eta_R(x), \eta_R(y) \supseteq T$ dir. η_R nin esnek kesişimsel ideal olmasından dolayı

$$\eta_R(x - y) \supseteq \eta_R(x) \cap \eta_R(y) \supseteq T \cap T = T \implies x - y \in \eta_R^T$$

dir. Aynı zamanda $\forall r \in R$ için

$$\eta_R(xr) \supseteq \eta_R(x) \cup \eta_R(r) \supseteq T \cup \eta_R(r) \supseteq T \implies xr \in \eta_R^T$$

elde edilir. Benzer şekilde $rx \in \eta_R^T$ olduğu da kolaylıkla gösterilebilir. Sonuç olarak, η_R^T , R nin bir idealidir.

Tanım 1.66. $\eta_A \in S(U)$ olsun. η_A nın görüntüsü $Im(\eta_A)$ ile gösterilir ve $Im(\eta_A) = \{\eta_A(x) : x \in A\}$ ile tanımlanır. (Ghosh ve ark., 2019, s.5)

Tanım 1.67. η_R , U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal ve $Im(\eta_R) = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ olsun. $i = 1, 2, 3, \dots, n$ olmak üzere η_{K_i} ler de η_R nin K_i genişleme idealleri olsun. η_R esnek kesişimsel idealin radikali $\sqrt{\eta_R} = \{(r, \sqrt{\eta_R}(r)) : r \in R\}$ ile gösterilir ve

$$\sqrt{\eta_R}(r) = \bigcup_{r \in \sqrt{\eta_{K_i}}} K_i$$

olarak tanımlanır. Burada $\sqrt{\eta_{K_i}}$ ler η_{K_i} ideallerinin radikali. (Ghosh ve ark., 2018)

Örnek 1.11. $U = S_6$ ve $R = \mathbb{Z}_6$ olsun. $\eta_R(\bar{0}) = S_3 = K_1$, $\eta_R(\bar{1}) = \eta_R(\bar{5}) = \{(1), (12)\} = K_2 = K_6$, $\eta_R(\bar{2}) = \eta_R(\bar{4}) = \{(1), (12), (123), (132)\} = K_3 = K_5$, $\eta_R(\bar{3}) = \{(1), (12), (13)\} = K_4$ olarak tanımladığımız η_R nin S_3 üzerinde bir esnek kesişimsel ideal olduğu kolaylıkla görülebilir. Şimdi η_R esnek kesişimsel idealin radikalini bulalım. Bunun için öncelikle η_{K_i} leri tespit edelim:

- $\eta_{K_1} = \{x \in R : \eta_R(x) \supseteq K_1\} = \{\bar{0}\} = \sqrt{\eta_{K_1}}$
- $\eta_{K_2} = \{x \in R : \eta_R(x) \supseteq K_2\} = \mathbb{Z}_6 = \sqrt{\eta_{K_2}}$
- $\eta_{K_3} = \{x \in R : \eta_R(x) \supseteq K_3\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \sqrt{\eta_{K_3}}$
- $\eta_{K_4} = \{x \in R : \eta_R(x) \supseteq K_4\} = \{\bar{0}, \bar{3}\} = \sqrt{\eta_{K_4}}$
- $\eta_{K_5} = \{x \in R : \eta_R(x) \supseteq K_5\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \sqrt{\eta_{K_5}}$
- $\eta_{K_6} = \{x \in R : \eta_R(x) \supseteq K_6\} = \mathbb{Z}_6 = \sqrt{\eta_{K_6}}$

Buradan $\sqrt{\eta_R}(\bar{0}) = S_3$, $\sqrt{\eta_R}(\bar{1}) = \{(1), (12)\}$, $\sqrt{\eta_R}(\bar{2}) = \{(1), (12), (123), (132)\}$, $\sqrt{\eta_R}(\bar{3}) = \{(1), (12), (13)\}$, $\sqrt{\eta_R}(\bar{4}) = \{(1), (12), (123), (132)\}$, $\sqrt{\eta_R}(\bar{5}) = \{(1), (12)\}$ elde edilir. Buradan bulduğumuz eşitlikler yerine yazılırsa:

$\sqrt{\eta_R} = \{\{\bar{0}, S_3\}, \{\bar{1}, \{(1), (12)\}\}, \{\bar{2}, \{(1), (12), (123), (132)\}\}, \{\bar{3}, \{(1), (12), (13)\}\}, \{\bar{4}, \{(1), (12), (123), (132)\}\}, \{\bar{5}, \{(1), (12)\}\}$ olarak elde edilir.

Örnek 1.12. $R = \mathbb{Z}_4$ ve $U = 2\mathbb{Z}$ olsun. $\eta_R(\bar{0}) = 2\mathbb{Z}$, $\eta_R(\bar{1}) = 8\mathbb{Z}$, $\eta_R(\bar{2}) = 4\mathbb{Z}$, $\eta_R(\bar{3}) = 8\mathbb{Z}$ olarak tanımlanırsa η_R nin U üzerinde esnek kesişimsel ideal olduğu kolaylıkla görülebilir. Buradan,

$$\eta_R = \{\{\bar{0}, 2\mathbb{Z}\}, \{\bar{1}, 8\mathbb{Z}\}, \{\bar{2}, 4\mathbb{Z}\}, \{\bar{3}, 8\mathbb{Z}\}\}$$

olarak gösterip ayrıca $K_1 = 2\mathbb{Z}$, $K_2 = 8\mathbb{Z}$, $K_3 = 4\mathbb{Z}$ ve $K_4 = 8\mathbb{Z}$ olarak alınırsa

- $\eta_{K_1} = \{x \in \mathbb{Z}_4 : \eta_R(x) \supseteq K_1\} = \{\bar{0}\} \implies \sqrt{\eta_{K_1}} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$
- $\eta_{K_2} = \{x \in \mathbb{Z}_4 : \eta_R(x) \supseteq K_2\} = R \implies \sqrt{\eta_{K_2}} = R$
- $\eta_{K_3} = \{x \in \mathbb{Z}_4 : \eta_R(x) \supseteq K_3\} = \{\bar{0}, \bar{2}\} \implies \sqrt{\eta_{K_3}} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$
- $\eta_{K_4} = \{x \in \mathbb{Z}_4 : \eta_R(x) \supseteq K_4\} = R \implies \sqrt{\eta_{K_4}} = R$

elde edilir. $\sqrt{\eta_R}(r) = \bigcup_{r \in \sqrt{\eta_{K_i}}} K_i$ olduğundan

- $\sqrt{\eta_R}(\bar{0}) = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 = 2\mathbb{Z}$ (Çünkü $\bar{0} \in \sqrt{\eta_{K_i}}, i = 1, 2, 3, 4$)
- $\sqrt{\eta_R}(\bar{1}) = K_2 \cup K_4 = 8\mathbb{Z}$ (Çünkü $\bar{1} \in \sqrt{\eta_{K_i}}, i = 2, 4$)
- $\sqrt{\eta_R}(\bar{2}) = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 = 2\mathbb{Z}$ (Çünkü $\bar{2} \in \sqrt{\eta_{K_i}}, i = 1, 2, 3, 4$)
- $\sqrt{\eta_R}(\bar{3}) = K_2 \cup K_4 = 8\mathbb{Z}$ (Çünkü $\bar{3} \in \sqrt{\eta_{K_i}}, i = 2, 4$)

Şu halde

$$\sqrt{\eta_R} = \{\{r, \sqrt{\eta_R}(r)\} : r \in R\} = \{\{\bar{0}, 2\mathbb{Z}\}, \{\bar{1}, 8\mathbb{Z}\}, \{\bar{2}, 2\mathbb{Z}\}, \{\bar{3}, 8\mathbb{Z}\}\}$$

elde edilir.

Teorem 1.60. η_R , U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal, $\sqrt{\eta_R}$ de η_R nin radikali olsun. Bu durumda

1. $\sqrt{\eta_R}(0) = \eta_R(0)$ dir.
2. $\sqrt{\eta_R} \supseteq \eta_R$ dir.
3. $\sqrt{\sqrt{\eta_R}} = \sqrt{\eta_R}$ dir.
4. $\forall r \in R$ için $\sqrt{\eta_R}(r) = \eta_R(r^n)$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

(Ghosh ve ark., 2018)

İspat. 1. $Im(\eta_R) = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $\eta_R(0) = K_i$ olsun. η_R bir esnek kesişimsel ideal olduğundan $\forall r \in R$ için $\eta_R(0) = K_i \supseteq \eta_R(r)$ dir. O halde

$$\sqrt{\eta_R}(0) = \bigcup_{0 \in \sqrt{\eta_{K_i}}} K_j = K_i = \eta_R(0)$$

olur.

2. $r \in R$ ve $1 \leq m \leq n$ olmak üzere $\eta_R(r) = K_m$ olsun. Bu durumda

$$\sqrt{\eta_R}(r) = \bigcup_{r \in \sqrt{\eta_{K_i}}} K_i \supseteq K_m$$

olduğundan $\sqrt{\eta_R} \tilde{\supseteq} \eta_R$ olur.

3. $\forall r \in R$ için

$$\sqrt{\sqrt{\eta_R}}(r) = \bigcup_{r \in \sqrt{\sqrt{\eta_{K_i}}}} K_i = \bigcup_{r \in \sqrt{\eta_{K_i}}} K_i = \sqrt{\eta_R}(r) \implies \sqrt{\sqrt{\eta_R}} = \sqrt{\eta_R}$$

elde edilir.

4. $\sqrt{\eta_R}(r) = \bigcup_{r \in \sqrt{\eta_{K_i}}} K_i \implies \exists n \in \mathbb{N}$ için $r^n \in \eta_{K_i} \implies \eta_R(r^n) \supseteq K_i \implies \sqrt{\eta_R}(r) = \eta_R(r^n)$

Teorem 1.61. η_R , U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal ve $\sqrt{\eta_R}$ de η_R nin esnek radikali olsun. Bu durumda

$$\sqrt{\eta_R}(r) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \eta_R(r^n)$$

dir. Ghosh ve ark., 2018)

İspat. Bir önceki teoremin 2. ve 4. maddeleri gereğince istenilen elde edilir.

Teorem 1.62. η_R , U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal ise $\sqrt{\eta_R}$ de U üzerinde bir esnek kesişimsel idealdir. (Ghosh ve ark., 2018)

İspat. $\forall x, y \in R$ için

$$\sqrt{\eta_R}(x - y) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \eta_R((x - y)^k) = \bigcup_{k=n+m \in \mathbb{N}} \eta_R((x - y)^{n+m}) \quad (1)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\begin{aligned}
(x-y)^{n+m} &= \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} x^{n+m-i} y^i \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n+m}{i} x^{n+m-i} y^i + \sum_{i=n+1}^{n+m} \binom{n+m}{i} x^{n+m-i} y^i \\
&= x^m \sum_{i=0}^n \binom{n+m}{i} x^{n-i} y^i + y^n \sum_{i=n+1}^{n+m} \binom{n+m}{i} x^{n+m-i} y^{i-n} \\
&= x^m r_1 + y^n r_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada bulduğumuz eşitliği (1) denkleminde yerine yazarsak

•

$$\begin{aligned}
\sqrt{\eta_R}(x-y) &= \bigcup_{k=n+m \in \mathbb{N}} \eta_R((x-y)^{n+m}) = \bigcup_{k=n+m \in \mathbb{N}} \eta_R((x^m r_1 + y^n r_2)) \\
&\supseteq \eta_R(x^m r_1 + y^n r_2) \\
&\supseteq \eta_R(x^m y_1) \cap \eta_R(y^n r_2) \\
&\supseteq \eta_R(x^m) \cap \eta_R(y^n) \\
&\supseteq \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} (\eta_R(x^m) \cap \eta_R(y^n)) \\
&= \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \eta_R(x^m) \right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \eta_R(y^n) \right) \\
&= \sqrt{\eta_R}(x) \cap \sqrt{\eta_R}(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda

•

$$\begin{aligned}
\sqrt{\eta_R}(xy) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \eta_R(xy)^n \supseteq \eta_R(xy)^n \supseteq \eta_R(xy) \supseteq \eta_R(x) \\
&\implies \sqrt{\sqrt{\eta_R}(xy)} \supseteq \sqrt{\eta_R}(x) \\
&\quad \sqrt{\eta_R}(xy) \supseteq \sqrt{\eta_R}(x)
\end{aligned}$$

olup $\sqrt{\eta_R}$ nin esnek sağ kesişimsel ideal olduğu görülür. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\sqrt{\eta_R}(xy) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \eta_R(xy)^n \supseteq \eta_R(xy)^n \supseteq \eta_R(xy) \supseteq \eta_R(y) \\ &\implies \sqrt{\sqrt{\eta_R}(xy)} \supseteq \sqrt{\eta_R}(y) \\ &\quad \sqrt{\eta_R}(xy) \supseteq \sqrt{\eta_R}(y)\end{aligned}$$

olup $\sqrt{\eta_R}$ nin esnek sol kesişimsel ideal olduğu da görülür.

Sonuç olarak $\sqrt{\eta_R}$ de U üzerinde bir esnek kesişimsel idealdir.

Tanım 1.68. η_R , U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal olsun. $\forall x, y \in R$ için $\eta_R(xy) = \eta_R(x)$ ya da $\eta_R(xy) = \eta_R(y)$ oluyorsa η_R ye U üzerinde esnek kesişimsel asal ideal denir. (Ghosh ve ark., 2019, s.7)

Teorem 1.63. η_R , U üzerinde esnek kesişimsel ideal olsun. η_R nin esnek kesişimsel asal ideal olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in R$ için $\eta_R(xy) = \eta_R(x) \cup \eta_R(y)$ olmasıdır. (Ghosh ve ark., 2019, s.8)

İspat. $\implies$: η_R , U üzerinde esnek kesişimsel asal ideal olsun. $\forall x, y \in R$ için $\eta_R(xy) = \eta_R(x)$ ya da $\eta_R(xy) = \eta_R(y)$ dir. Kabul edelim ki $\eta_R(xy) = \eta_R(x)$ olsun. η_R bir esnek kesişimsel ideal olduğundan

$$\eta_R(xy) \supseteq \eta_R(x) \cup \eta_R(y) \implies \eta_R(x) \supseteq \eta_R(x) \cup \eta_R(y) \implies \eta_R(x) \supseteq \eta_R(y)$$

olacaktır. Şu halde

$$\eta_R(x) = \eta_R(x) \cup \eta_R(y) = \eta_R(xy)$$

elde edilir.

$\Leftarrow$: $\forall x, y \in R$ için $\eta_R(xy) = \eta_R(x) \cup \eta_R(y)$ olsun. $\eta_R(xy) = \eta_R(x)$ ya da $\eta_R(xy) = \eta_R(y)$ olduğunu göstereyim. Aksini kabul edelim. Yani $\eta_R(xy) \neq \eta_R(x)$ ve $\eta_R(xy) \neq \eta_R(y)$ olsun. η_R esnek kesişimsel ideal olduğundan tanımdan ötürü $\eta_R(xy) \supseteq \eta_R(x)$ ve $\eta_R(xy) \supseteq \eta_R(y)$ dir. Buradan kabulümüz $\eta_R(xy) \supset \eta_R(x)$ ve $\eta_R(xy) \supset \eta_R(y)$ olarak ortaya çıkmaktadır. O halde $\eta_R(xy) \supset \eta_R(x) \cup \eta_R(y)$ olur ki bu da $\eta_R(xy) = \eta_R(x) \cup \eta_R(y)$ olması ile çelişir. Sonuç olarak kabulümüz yanlış olup $\eta_R(xy) = \eta_R(x)$ ya da $\eta_R(xy) = \eta_R(y)$ olup η_R nin esnek kesişimsel ideal olduğu sonucuna varılır.

Teorem 1.64. η_R , U üzerinde bir esnek kesişimsel asal ideal olsun. Bu durumda, $\sqrt{\eta_R} = \eta_R$ dir. (Ghosh ve ark., 2019)

İspat. η_R bir esnek kesişimsel asal ideal olduğundan $\forall x, y \in R$ için $\eta_R(xy) = \eta_R(x) \cup \eta_R(y)$ dir. $x = y$ alırsak $\eta_R(x^2) = \eta_R(x)$, $x^2 = y$ alırsak $\eta_R(x^3) = \eta_R(x) \cup \eta_R(x^2) = \eta_R(x)$ ve

$y = x^{n-1}$ alırsak da $\eta_R(x^n) = \eta_R(x)$ elde edilir. Buradan,

$$\sqrt{\eta_R}(x) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \eta_R(x^i) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \eta_R(x) = \eta_R(x)$$

olup buradan $\sqrt{\eta_R} = \eta_R$ olduğu anlaşılır.



2 Esnek Asal İdeal Üzerine Uygulamalar

Bu bölümde bazı yeni esnek cebirsel yapılar tanımlayıp bunların esnek asal ideal kavramı üzerinde uygulamalarını inceleyeceğiz. Çalışmanın bundan sonraki kısmı için yazım kısalığı açısından "kesişimsel" kelimesi kullanılmayacaktır. Ayrıca U üzerinde tanımlanan bir esnek ideal de R nin esnek ideali olarak belirtilecektir. Örnek olarak " η_R, U üzerinde bir esnek kesişimsel idealdir" yerine " η_R, R nin bir esnek idealidir" yazılacaktır.

Tanım 2.1. η_R, R nin bir esnek kümesi olsun. $\forall r \in R$ için $\eta_R(r) = \alpha$ ise η_R, R nin esnek idealidir. Bu tip esnek ideallere R nin esnek aşık ideal denir. Bu tip idealler dışında kalan tüm esnek ideallere de R nin esnek aşık olmayan ideali denir.

Tanım 2.2. η_R, R nin bir esnek ideali ve $r_i \in R$ olsun. $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\eta_R(r_i) \cup \eta_R(r_i^2) \cup \dots \cup \eta_R(r_i^n) = \bigcup_{j=1}^n \eta_R(r_i^j) = \eta_R(0)$$

oluyorsa $(r_i, \eta_R(r_i))$ ye η_R nin esnek nilpotent elemanı denir. Başka bir deyişle,

$$\text{Nil}(\eta_R) = \{(r_i, \eta_R(r_i)) \in \eta_R : \sqrt{\eta_R}(r_i) = \eta_R(0)\}$$

olarak tanımlanır.

Not 2.1. Bundan sonra $(r_i, \eta_R(r_i))$ esnek elemanımı kısaca $\eta_R^*(r_i)$ olarak göstereceğiz.

Teorem 2.1. η_R, R nin esnek aşık olmayan asal ideali olsun. Bu durumda, $r_i \in \text{Nil}(R)$ ise $\eta_R^*(r_i) \in \text{Nil}(\eta_R)$ dir.

İspat. $r_i \in \text{Nil}(R)$ ise $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ için $r_i^n = 0$ dir. η_R, R nin esnek asal ideali olduğundan

$$\eta_R(r_i^n) = \eta_R(0) \implies \eta_R(r_i) = \eta_R(0) \implies \sqrt{\eta_R}(r_i) = \eta_R(0) \implies \eta_R^*(r_i) \in \text{Nil}(\eta_R)$$

elde edilir.

Not 2.2. Yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. $R = \mathbb{Z}_6, U = S_3$ ve $\eta_R(\bar{0}) = \eta_R(\bar{2}) = \eta_R(\bar{4}) = S_3, \eta_R(\bar{1}) = \eta_R(\bar{3}) = \eta_R(\bar{5}) = \{(1)\}$ olsun. η_R nin R nin esnek asal ideal olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Burada $\sqrt{\eta_R}(\bar{2}) = \eta_R(\bar{0})$ olduğundan $\eta_R^*(\bar{2}) \in \text{Nil}(\eta_R)$ dir. Fakat $\bar{2} \notin \text{Nil}(R)$ dir.

Tanım 2.3. η_R, R nin esnek aşık olmayan ideali ve $r_i \in R$ olsun. $\eta_R(r_i^2) = \eta_R(r_i)$ oluyorsa $\eta_R^*(r_i)$ ye η_R nin esnek idempotent elemanı denir ve $\eta_R^*(r_i) \in \text{Ide}(\eta_R)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2. η_R, R nin esnek aşık olmayan asal ideali olsun. O halde, η_R nin her elemanı esnek idempotent elemandır.

İspat. Esnek asal ideal kavramının tanımı gereğince η_R esnek asal idealinde $\forall r_i \in R$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\eta_R(r_i^n) = \eta_R(r_i)$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikte $n = 2$ alırsak $\eta_R(r_i^2) = \eta_R(r_i)$ elde edileceğinden ispat biter.

Tanım 2.4. η_R , R nin esnek aşıkâr olmayan ideali ve $\eta_R(r_i) \neq \eta_R(0)$ olsun. $r_j \in R$ olmak üzere $\eta_R(r_i) \cup \eta_R(r_j) = \eta_R(0)$ olacak şekilde bir $\eta_R(r_j) \neq \eta_R(0)$ varsa $\eta_R^*(r_i)$ ve $\eta_R^*(r_j)$ ye η_R nin esnek sıfır bölenleri denir. η_R nin tüm esnek sıfır bölenlerinin esnek kümesi $ZD(\eta_R)$ ile gösterilir. Başka bir deyişle

$$ZD(\eta_R) = \{ \{r_i, \eta_R(r_i)\} \in \eta_R : \exists 0 \neq r_j \in R \text{ ve } \eta_R(r_j) \neq \eta_R(0) \text{ için } \eta_R(r_i) \cup \eta_R(r_j) = \eta_R(0) \}$$

dir.

Teorem 2.3. η_R , R nin esnek asal ideali ve $\eta_R : R \longrightarrow P(U)$ birebir olsun. r_i , R halkasında sıfır bölen ise $\eta_R^*(r_i)$ de η_R de esnek sıfır bölendir.

İspat. r_i , R halkasında bir sıfır bölen olsun. O halde η_R birebir olduğundan $\exists 0 \neq r_j \in R$ ve $\eta_R(r_j) \neq \eta_R(0)$ için $r_i r_j = 0$ dir. η_R esnek asal ideal olduğundan

$$\eta_R(0) = \eta_R(r_i r_j) = \eta_R(r_i) \cup \eta_R(r_j)$$

olup $\eta_R^*(r_i)$ in η_R de esnek sıfır bölen olduğu görülür.

Teorem 2.4. η_R , R nin birebir esnek asal ideali olsun. O halde $\text{Nil}(R) = \{0\}$ dir.

İspat. $r_i \in \text{Nil}(R)$ olsun. Bu durumda $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ için $r_i^n = 0$ dir. η_R birebir esnek asal ideal olduğundan

$$\eta_R(0) = \eta_R(r_i^n) = \eta_R(r_i) \implies r_i = 0$$

elde edilir.

Teorem 2.5. η_R , R nin birebir esnek asal ideali olsun. Bu durumda $\text{Nil}(\eta_R) = \eta_R^*(0)$ dir.

İspat. $\eta_R^*(r_i)$, η_R nin esnek nilpotent elemanı olsun. Bu durumda $\sqrt{\eta_R}(r_i) = \eta_R(0)$ dir. Buradan,

$$\eta_R(0) = \sqrt{\eta_R}(r_i) = \eta_R(r_i) \implies r_i = 0 \implies \text{Nil}(\eta_R) = \eta_R^*(0)$$

elde edilir.

Teorem 2.6. η_R , R nin esnek ideali ve $\eta_R^*(r_i)$ de η_R nin esnek sıfır böleni olsun. O halde $\exists r_j \in R \setminus \{0\}$ için $\eta_R^*(r_i r_j) \in \text{Nil}(\eta_R)$ dir.

İspat. $\eta_R(r_i)$ esnek sıfır bölen ise $\exists r_j \in R \setminus \{0\}$ ve $\eta_R(r_j) \neq \eta_R(0)$ için $\eta_R(r_i) \cup \eta_R(r_j) = \eta_R(0)$ dır. η_R , R nin esnek ideali olduğundan

$$\begin{aligned}\eta_R(r_i) \cup \eta_R(r_j) &= \eta_R(0) \\ \sqrt{\eta_R}(r_i) \cup \sqrt{\eta_R}(r_j) &= \eta_R(0) \\ \sqrt{\eta_R}(r_i r_j) &= \eta_R(0)\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\eta_R^*(r_i r_j) \in \text{Nil}(\eta_R)$ olduğu görülür.

Teorem 2.7. η_R , R nin bir esnek kümesi esnek küme ve

$$K = \{r_i \in R : \exists s_i \in R \text{ için } \eta_R(r_i) \cup \eta_R(s_i) = \eta_R(0)\}$$

olsun. Bu durumda η_R , R nin esnek asal ideali ise K , R nin asal idealidir.

İspat. η_R , R nin esnek asali ideal olsun. K nın asal ideal olma şartlarını sağladığını göstereceğiz.

- $0 \in K$ dır. Çünkü $r_i \in R$ olmak üzere $\eta_R(0) \supseteq \eta_R(r_i)$ olduğundan $\eta_R(r_i) \cup \eta_R(0) = \eta_R(0)$ dır.
- $K \subseteq R$ olduğu açıktır.
- $r_i, r_j \in K$ alalım. O halde $\exists s_i, s_j \in R$ için $\eta_R(r_i) \cup \eta_R(s_i) = \eta_R(0)$ ve $\eta_R(r_j) \cup \eta_R(s_j) = \eta_R(0)$ dır. Buradan,

$$\begin{aligned}\eta_R((r_i - r_j)s_i s_j) &= \eta_R(r_i s_i s_j - r_j s_j s_i) \\ &\supseteq \eta_R(r_i s_i s_j) \cap \eta_R(r_j s_j s_i) \\ &= [\underbrace{\eta_R(r_i) \cup \eta_R(s_i)}_{=\eta_R(0)} \cup \eta_R(s_j)] \cap [\underbrace{\eta_R(r_j) \cup \eta_R(s_j)}_{=\eta_R(0)} \cup \eta_R(s_i)] \\ &= \eta_R(0)\end{aligned}$$

olur. η_R , R nin esnek asal ideali olduğundan $\eta_R((r_i - r_j)s_i s_j) = \eta_R(r_i - r_j) \cup \eta_R(s_i s_j) = \eta_R(0)$ elde edilir. Bu durumda $r_i - r_j \in K$ olduğu görülür.

- η_R esnek asal ideal olduğundan $\forall r \in R$ için

$$\begin{aligned}
\eta_R(r_i r s_i) &= \eta_R(r_i r) \cup \eta_R(s_i) = \eta_R(r_i) \cup \eta_R(r) \cup \eta_R(s_i) \\
&= \underbrace{\eta_R(r_i) \cup \eta_R(s_i)}_{=\eta_R(0)} \cup \eta_R(r) \\
&= \eta_R(0) \\
&\implies r_i r \in K
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $rr_i \in K$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Buradan K nın R de ideal olduğu görülür. Şimdi de K nın asal ideal olduğunu gösterelim.

- $r_n, r_m \in R$ ve $r_m \notin K$ olmak üzere $r_n r_m \in K$ alalım. O halde $\exists r_k \in R$ için $\eta_R(r_n r_m) \cup \eta_R(r_k) = \eta_R(0)$ dır. Buradan η_R esnek asal ideal olduğundan

$$\begin{aligned}
\eta_R(0) &= \eta_R(r_n r_m) \cup \eta_R(r_k) \\
&= \eta_R(r_n) \cup \eta_R(r_m) \cup \eta_R(r_k) \\
&= \eta_R(r_n) \cup \eta_R(r_m r_k)
\end{aligned}$$

Böylece $r_n \in K$ elde edilir. Buradan, K nın R de asal ideal olduğu görülür.

Teorem 2.8. η_R , R nin esnek asal ideali ve $\alpha \subset P(U)$ olmak üzere

$$S = \{r_i \in R : \eta_R(r_i) = \alpha\} \cup \{0\}$$

kümesi R nin altgrubu olsun. Bu durumda

1. $\forall r \in R \setminus S$ için $\eta_R(r) \subset \alpha$ ise S , R nin idealidir.
2. $\cup\{\eta_R(r) : r \in R \setminus S\} \subset \alpha$ ise S , R nin asal idealidir.

İspat.

1. S nin ideal olma şartlarını sağladığını göstereceğiz. $\forall r_i, r_j \in S$ ve $\forall r \in R \setminus S$ için

- $\eta_R(r_i r_j) = \eta_R(r_i) \cup \eta_R(r_j) = \alpha \cup \alpha = \alpha \implies r_i r_j \in S$
- $\eta_R(r_i r) = \eta_R(r_i) \cup \eta_R(r) = \alpha \implies r_i r \in S$ (Çünkü $r \in R \setminus S$ olduğundan $\eta_R(r) \subset \alpha$ dır). Benzer şekilde $rr_i \in R$ olduğu da gösterilebilir.

Buradan S nin ideal olduğu görülür.

2. Öncelikle S nin ideal olduğunu gösterelim. $\forall r_i, r_j \in S$ ve $\forall r \in R \setminus S$ için

•

$$\begin{aligned}\eta_R(r_i r_j) &= \eta_R(r_i) \cup \eta_R(r_j) \\ &= \alpha \cup \alpha \\ &= \alpha\end{aligned}$$

Buradan $r_i r_j \in S$ olduğu görülür.

- Aynı zamanda $\eta_R(r) \subset \alpha$ olduğundan

$$\eta_R(r_i r) = \eta_R(r_i) \cup \eta_R(r) = \alpha$$

olup buradan $r_i r \in S$ elde edilir. Benzer şekilde $r r_i \in S$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece S nin R de ideal olduğu görülür. Şimdi S nin asal ideal olduğunu gösterelim. Bunun için de $r_n, r_m \in R$ olmak üzere $r_n r_m \in S$ alalım. Buradan,

$$\alpha = \eta_R(r_n r_m) = \eta_R(r_n) \cup \eta_R(r_m)$$

Böylece $r_n \in S$ ya da $r_m \in S$ olmalıdır, çünkü $\cup\{\eta_R(r) : r \in R \setminus S\} \subset \alpha$ dır. Yani $r_n, r_m \notin S$ olursa $\eta_R(r_n) \cup \eta_R(r_m) \subset \alpha$ olur ki bu da çelişkidir. Sonuç olarak S bu durumda asal idealdir.

3 Esnek Yakın Asal İdeal

Bu bölümde esnek asal ideal kavramının bir genelleşmiş hali olan esnek yakın asal ideal kavramını tanıtır ve bazı cebirsel özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 3.1. R birimli olmayan halka ve η_R de R nin esnek ideali olsun. $\forall r_i, r_j \in R$ için

$$\eta_R(r_i r_j) = \sqrt{\eta_R}(r_i) \cup \sqrt{\eta_R}(r_j)$$

oluyorsa η_R ye R nin esnek yakın asal ideali denir.

Teorem 3.1. R birimli olmayan halka ve η_R de R nin esnek yakın asal ideali olsun. Bu durumda $n \geq 2 \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\forall r_i \in R$ için

$$1. \eta_R(r_i^n) = \sqrt{\eta_R}(r_i)$$

$$2. \sqrt{\eta_R}(r_i) = \sqrt{\eta_R}(r_i^n)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. 1. $\forall r_i, r_j \in R$ için $\eta_R(r_i r_j) = \sqrt{\eta_R}(r_i) \cup \sqrt{\eta_R}(r_j)$ olduğundan

•

$$\begin{aligned} \eta_R(r_i^2) &= \eta_R(r_i \cdot r_i) = \sqrt{\eta_R}(r_i) \cup \sqrt{\eta_R}(r_i) \\ &= \sqrt{\eta_R}(r_i) \\ \sqrt{\eta_R}(r_i^2) &= \sqrt{\sqrt{\eta_R}(r_i)} \\ &= \sqrt{\eta_R}(r_i) \end{aligned}$$

$$\bullet \eta_R(r_i^3) = \eta_R(r_i^2 \cdot r_i) = \underbrace{\sqrt{\eta_R}(r_i^2)}_{=\sqrt{\eta_R}(r_i)} \cup \sqrt{\eta_R}(r_i) = \sqrt{\eta_R}(r_i)$$

Bu şekilde devam edilirse $\forall n \geq 4 \in \mathbb{Z}$ için

$$\bullet \eta_R(r_i^n) = \eta_R(r_i^{n-1} \cdot r_i) = \underbrace{\sqrt{\eta_R}(r_i^{n-1})}_{=\sqrt{\eta_R}(r_i)} \cup \sqrt{\eta_R}(r_i) = \sqrt{\eta_R}(r_i)$$

olup ispat tamamlanır.

2. İlk maddeden $\eta_R(r_i^n) = \sqrt{\eta_R}(r_i) \implies \sqrt{\eta_R}(r_i^n) = \sqrt{\sqrt{\eta_R}(r_i)} = \sqrt{\eta_R}(r_i)$ elde edilir.

Teorem 3.2. Her esnek asal ideal, esnek yakın asal idealdir.

İspat. η_R , R nin bir esnek asal ideal olsun. O halde $\forall r_i, r_j \in R$ için

$$\eta_R(r_i r_j) = \eta_R(r_i) \cup \eta_R(r_j) = \sqrt{\eta_R}(r_i) \cup \sqrt{\eta_R}(r_j)$$

olup her esnek asal idealin esnek yakın asal ideal olduğu görülür.

Not 3.1. Teorem 3.2 nin tersi doğru değildir. Başka bir deyişle her esnek yakın asal ideal, esnek asal değildir.

İspat. Her esnek yakın asal idealin esnek asal ideal olmadığını bir örnek vererek gösterelim. $R = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $+$ ve $\cdot$ işlemini şöyle tanımlansın:

$+$	a	b	c	$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c	a	a	a	a
b	b	c	a	b	a	a	a
c	c	a	b	c	a	a	a

$(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı birimli olmayan değişmeli halkadır. $\eta_R : R \rightarrow S_3$ fonksiyonunu

$$\eta_R(a) = S_3, \eta_R(b) = \{(1), (12)\}, \eta_R(c) = \{(1), (12)\}$$

olarak tanımladığımızda η_R , S_3 üzerinde esnek ideal olur. Çünkü

- $\eta_R(b - c) = \eta_R(c) \supseteq \eta_R(b) \cap \eta_R(c).$
- $\eta_R(c - b) = \eta_R(b) \supseteq \eta_R(c) \cap \eta_R(b).$
- $\eta_R(bc) = \eta_R(cb) = \eta_R(a) \supseteq \eta_R(b) \cup \eta_R(c).$

koşulları sağlanmaktadır. Ayrıca $\sqrt{\eta_R}(b) = \eta_R(b^2) = \eta_R(a) = S_3$ ve $\sqrt{\eta_R}(c) = \eta_R(c^2) = \eta_R(a) = S_3$ tür. $\forall r_i, r_j \in R$ için $r_i r_j = a$ olduğundan $\eta_R(r_i r_j) = \sqrt{\eta_R}(r_i) \cup \sqrt{\eta_R}(r_j) = S_3$ olacaktır. Bu yüzden de η_R , S_3 üzerinde esnek yakın asal idealdir. Fakat $\eta_R(bc) = \eta_R(a) = S_3$ ve $\eta_R(b) \cup \eta_R(c) = \{(1), (12)\} \neq \eta_R(bc)$ olduğundan η_R , R nin esnek asal ideali değildir.

Teorem 3.3. R birimli olmayan değişmeli halka olsun. Bu durumda η_R , R nin esnek yakın asal ideali ise $\sqrt{\eta_R}$, R nin esnek asal idealidir.

İspat. $\forall r_i, r_j \in R$ için

$$\sqrt{\eta_R}(r_i r_j) = \eta_R((r_i r_j)^2) = \eta_R(r_i^2 r_j^2) = \sqrt{\eta_R}(r_i^2) \cup \sqrt{\eta_R}(r_j^2) = \sqrt{\eta_R}(r_i) \cup \sqrt{\eta_R}(r_j)$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.4. Bir esnek yakın asal idealin örten halka homomorfizması altındaki görüntüsü de esnek yakın asal idealdir.

İspat. R ile S birimli olmayan birer halka, $\phi : R \longrightarrow S$ örten halka homomorfizması ve η_R de R nin esnek yakın asal ideali olsun. Öncelikle ilgili teorem gereği $\phi(\eta_R)$ nin S de bir esnek ideal olduğunu biliyoruz. Bu yüzden sadece yakın asal olma şartlarından sonuncu olanını ispatlayacağız. $\forall s_i, s_j \in S$ için

$$\begin{aligned}
\phi(\eta_R)(s_i s_j) &= \cup \{ \eta_R(r) : r \in R, \phi(r) = s_i s_j \} \\
&= \cup \{ \eta_R(r_i r_j) : r_i, r_j \in R, \phi(r_i r_j) = s_i s_j \} \\
&= \cup \{ \eta_R(r_i r_j) : r_i, r_j \in R, \phi(r_i) = s_i, \phi(r_j) = s_j \} \\
&= \bigcup \{ \sqrt{\eta_R}(r_i) \cup \sqrt{\eta_R}(r_j) : r_i, r_j \in R, \phi(r_i) = s_i, \phi(r_j) = s_j \} \\
&= \{ \cup \{ \sqrt{\eta_R}(r_i) : r_i \in R, \phi(r_i) = s_i \} \} \bigcup \{ \cup \{ \sqrt{\eta_R}(r_j) : r_j \in R, \phi(r_j) = s_j \} \} \\
&= \sqrt{\phi(\eta_R)}(s_i) \cup \sqrt{\phi(\eta_R)}(s_j)
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

Teorem 3.5. Bir esnek yakın asal idealin halka homomorfizması altındaki ters görüntüsü de esnek yakın asal idealdir.

İspat. R ile S birimli olmayan birer halka, $\phi : R \longrightarrow S$ halka homomorfizması ve η_S de S nin esnek yakın asal ideali olsun. Öncelikle ilgili teorem gereği $\phi^{-1}(\eta_S)$ nin R de bir esnek ideal olduğunu biliyoruz. Bu yüzden sadece yakın asal olma şartlarından sonuncu olanını ispatlayacağız. $\forall r_i, r_j \in R$ için

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(\eta_S)(r_i r_j) &= \eta_S(\phi(r_i r_j)) \\
&= \eta_S(\phi(r_i) \phi(r_j)) \\
&= \sqrt{\eta_S}(\phi(r_i)) \cup \sqrt{\eta_S}(\phi(r_j)) \\
&= \sqrt{\phi^{-1}(\eta_S)}(r_i) \cup \sqrt{\phi^{-1}(\eta_S)}(r_j)
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

4 Esnek 1-Yutan Asal İdeal

Bu bölümde esnek asal idealin başka bir genelleştirilmiş hali olan esnek 1–yutan asal ideal kavramını tanıtip bazı cebirsel özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 4.1. R birimli olmayan değişmeli bir halka ve η_R , R nin esnek ideali olsun. Bu durumda $\forall r_i, r_j, r_k \in R$ için

$$\eta_R(r_i r_j r_k) = \eta_R(r_i r_j) \cup \eta_R(r_k)$$

oluyorsa η_R ye R nin esnek 1–yutan asal ideali denir.

Teorem 4.1. η_R , R nin esnek 1–yutan asal ideali olsun. $n \geq 2 \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\forall r_i \in R$ için

1. $\eta_R(r_i^n) = \eta_R(r_i^2)$
2. $\sqrt{\eta_R}(r_i) = \eta_R(r_i^2)$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. 1. Tümevarım yöntemini kullanacağız. $n = 3$ için $\eta_R(r_i^3) = \eta_R(r_i r_i r_i) = \eta_R(r_i^2) \cup \eta_R(r_i) = \eta_R(r_i^2)$ dir. $k > 3$ için $\eta_R(r_i^k) = \eta_R(r_i^2)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\eta_R((r_i)^{k+1}) = \eta_R((r_i)^{k-1} r_i r_i) = \eta_R(r_i^k) \cup \eta_R(r_i) = \eta_R(r_i^k) = \eta_R(r_i^2)$$

olup ispat tamamlanır.

2.

$$\sqrt{\eta_R}(r_i) = \bigcup_{i=1}^n \eta_R(r_i^k) = \eta_R(r_i) \cup \eta_R(r_i^2) \cup \dots \cup \eta_R(r_i^n) = \eta_R(r_i^2)$$

Teorem 4.2. R birimli olmayan değişmeli halka ve η_R de R nin esnek 1–yutan asal ideali olsun. $\sqrt{\eta_R}$, R nin esnek asal idealdir.

İspat. η_R , R nin esnek asal ideali olsun. $\forall r_i, r_j \in R$ için

$$\sqrt{\eta_R}(r_i r_j) = \eta_R((r_i r_j)^2) = \eta_R(r_i^2 r_j^2) = \eta_R(r_i r_i r_j^2) = \eta_R(r_i^2) \cup \eta_R(r_j^2) = \sqrt{\eta_R}(r_i) \cup \sqrt{\eta_R}(r_j)$$

olup istenilen elde edilir.

Teorem 4.3. Her esnek asal ideal, esnek 1–yutan asal idealdir.

İspat. R birimli olmayan halka ve η_R , R nin esnek asal ideal olsun. Bu durumda $\forall r_i, r_j \in R$ için $\eta_R(r_i r_j) = \eta_R(r_i) \cup \eta_R(r_j)$ dir. O halde $\forall r_i, r_j, r_k \in R$ için R halka olduğundan $r_i r_j \in R$ olup $\eta_R(r_i r_j r_k) = \eta_R(r_i r_j) \cup \eta_R(r_k)$ eşitliği vardır. Sonuç olarak η_R , R nin esnek 1–yutan asal idealidir.

Not 4.1. Teorem 4.3 ün tersi doğru değildir. Başka bir ifadeyle her esnek 1–yutan asal ideal, esnek asal ideal değildir.

İspat. Her esnek 1–yutan idealin, esnek asal ideal olmadığını bir örnek ile göstereyim. $R = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $+$ ve $\cdot$ işlemlerini şöyle tanımlansın:

$+$	a	b	c	d	$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d	a	a	a	a	a
b	b	c	d	a	b	a	a	a	a
c	c	d	a	b	c	a	a	a	a
d	d	a	b	c	d	a	a	a	a

$(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı birimli olmayan halka olduğu açıktır. $\eta_R : R \rightarrow S_3$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi alalım:

$$\eta_R(a) = S_3, \eta_R(b) = \eta_R(c) = \eta_R(d) = S_3 \setminus \{(123)\}$$

Böylece η_R , S_3 üzerinde esnek ideal olma şartlarını sağlamaktadır. Çünkü

- $\eta_R(c - d) = \eta_R(c + b) = \eta_R(d) \supseteq \eta_R(c) \cap \eta_R(d)$
- $\eta_R(d - c) = \eta_R(d + c) = \eta_R(b) \supseteq \eta_R(d) \cap \eta_R(d)$
- $\eta_R(d - b) = \eta_R(d + d) = \eta_R(c) \supseteq \eta_R(d) \cap \eta_R(b)$
- $\eta_R(b - d) = \eta_R(b + b) = \eta_R(c) \supseteq \eta_R(b) \cap \eta_R(d)$
- $\eta_R(c - b) = \eta_R(c + d) = \eta_R(b) \supseteq \eta_R(c) \cap \eta_R(d)$
- $\eta_R(b - c) = \eta_R(b + c) = \eta_R(d) \supseteq \eta_R(b) \cap \eta_R(d)$
- $\forall r_i, r_j \in R$ için $\eta_R(r_i r_j) = \eta_R(a) \supseteq \eta_R(r_i) \cup \eta_R(r_j)$

koşulları sağlanır. Aynı zamanda $\forall r_i, r_j, r_k \in R$ için $\eta_R(r_i r_k r_k) = \eta_R(a) = \eta_R(r_i r_j) \cup \eta_R(r_k)$ olduğundan η_R , R nin esnek 1–yutan asal idealidir. Fakat, $\eta_R(bc) = \eta_R(a) \neq \eta_R(b) \cup \eta_R(c)$ olduğundan, η_R , R nin esnek asal ideali değildir.

Teorem 4.4. R birimli olmayan, değişmeli, sıfırdan farklı en az bir nilpotent elemanı olan bir halka ve $\forall r_i \in R \setminus \{0\}$ için $r_i^2 \neq 0$ olsun. Bu durumda η_R , birebir esnek 1–yutan asal ideal ise $\forall 0 \neq r_i \in R$ için $\sqrt{\eta_R^*(r_i)} \in ZD(\sqrt{\eta_R})$ dir.

İspat. $0 \neq r_j \in \text{Nil}(R)$ olsun. O halde $\exists n \geq 3 \in \mathbb{Z}$ için $r_j^n = 0$ dir. Bu durumda $\forall r_i \in R \setminus \{0\}$ için $r_i^n r_j^n = 0$ olup R değişmeli halka olduğundan $(r_i r_j)^n = 0$ elde edilir. Buradan,

$$\eta_R(0) = \sqrt{\eta_R}(0) = \eta_R(r_i^n r_j^n) = \eta_R(r_i^2 r_j^2) = \eta_R(r_i r_i r_j^2) = \eta_R(r_i^2) \cup \eta_R(r_j^2) = \sqrt{\eta_R}(r_i) \cup \sqrt{\eta_R}(r_j)$$

olup $\sqrt{\eta_R^*}(r_i) \tilde{\in} ZD(\sqrt{\eta_R})$ olduğu görülür.

Teorem 4.5. R birimli olmayan değişmeli halka ve η_R de esnek asal olmayan birebir esnek 1–yutan asal ideal olsun. $\eta_R^*(r_i) \tilde{\in} \text{Nil}(\eta_R)$ ve $\forall 0 \neq r_j \in R$ için $r_i r_j \neq 0$ ise $\eta_R^*(r_i) \tilde{\in} ZD(\eta_R)$ dir.

İspat. η_R esnek asal ideal olmayan birebir esnek 1–yutan asal ideal ve $\eta_R^*(r_i)$ esnek nilpotent eleman olduğundan $\sqrt{\eta_R}(r_i) = \eta_R(0) \neq \eta_R(r_i)$ dir. O halde η_R , R nin esnek 1–yutan asal ideali olduğundan $\eta_R(r_i^2) = \eta_R(0)$ dir. O halde $\forall r_j \in R \setminus \{0\}$ için $\eta_R(r_i^2) \cup \eta_R(r_j) = \eta_R(0)$ olur. Buradan, η_R esnek 1-yutan asal ideal olduğundan $\eta_R(r_i^2 r_j) = \eta_R(0)$ elde edilir. Böylece η_R esnek 1-yutan asal ideal olduğundan $\eta_R(r_i) \cup \eta_R(r_i r_j) = \eta_R(0)$ olduğu görülür. Sonuç olarak $\eta_R^*(r_i) \tilde{\in} ZD(\eta_R)$ olup istenilen elde edilir.

Teorem 4.6. R birimli olmayan değişmeli halka ve η_R , R nin esnek 1–yutan asal ideali olsun. $n > 2 \in \mathbb{Z}$ sabit sayı olmak üzere

$$Q = \{r_i \in R : \exists r \in R \text{ için } \eta_R(r_i r^n) = \eta_R(0)\}$$

olarak tanımlanan küme, R deki işlemler ile birlikte R nin bir idealidir.

İspat.

- $r \in R$ için $\eta_R(0 \cdot r^n) = \eta_R(0)$ olduğundan $0 \in Q$ dur.
- $Q \subseteq R$ dir.

$\forall r_i, r_j \in Q$ alalım. O halde $\exists r_k, r_l \in R$ için $\eta_R(r_i r_k^n) = \eta_R(r_i r_l^n) = \eta_R(0)$ dir.

•

$$\begin{aligned} \eta_R((r_i - r_j) r_k^n r_l^n) &= \eta_R(r_i r_k^n r_l^n - r_j r_k^n r_l^n) \\ &\supseteq \eta_R(r_i r_k^n r_l^n) \cap \eta_R(r_j r_k^n r_l^n) \\ &= [\eta_R(r_i r_k^n) \cup \eta_R(r_l^n)] \cap [\eta_R(r_j r_l^n) \cup \eta_R(r_k^n)] \\ &= \eta_R(0) \end{aligned}$$

Su halde $\eta_R((r_i - r_j) r_k^n r_l^n) = \eta_R(0)$

$$\eta_R((r_i - r_j)(r_k r_l)^n) = \eta_R(0)$$

olup buradan $r_i - r_j \in Q$ olduğu görülür.

- $\forall r \in R$ için

$$\eta_R(r_i r r_k^n) = \eta_R(r_i r_k^n r) = \eta_R(r_i r_k^n) \cup \eta_R(r) = \eta_R(0) \implies r_i r \in Q$$

Aynı zamanda, R değişmeli halka olduğundan $rr_i = r_i r \in Q$ dur. Sonuç olarak Q , R nin idealidir.

Teorem 4.7. R birimli olmayan değişmeli halka ve halkadaki birbirinden farklı her elemanın çarpımı halkanın sıfırına eşit olsun. η_R , R nin esnek 1–yutan asal ideali ise

$$\tau = \{r_i \in R : \sqrt{\eta_R}(r_i) = \eta_R(0)\}$$

R nin idealidir.

İspat. η_R esnek 1–yutan asal ideal olduğundan $\forall r_i \in R$ için $\eta_R(r_i^2) = \sqrt{\eta_R}(r_i)$ dir.

- $\eta_R(0^2) = \eta_R(0) \implies 0 \in \tau \implies \tau \neq \emptyset$. Aynı zamanda $\tau \subseteq R$ dir.
- $r_i, r_j \in \tau$ alalım. Bu durumda $\eta_R(r_i^2) = \eta_R(r_j^2) = \eta_R(0)$ dir. O halde

$$\begin{aligned} \eta_R((r_i - r_j)^2) &= \eta_R((r_i^2 - r_i r_j) - (r_i r_j - r_j^2)) \\ &\supseteq \eta_R(r_i^2 - r_i r_j) \cap \eta_R(r_i r_j - r_j^2) \\ &\supseteq \eta_R(r_i^2) \cap \eta_R(r_i r_j) \cap \eta_R(r_i r_j) \cap \eta_R(r_j^2) \\ &= \eta_R(0) \end{aligned}$$

$$\text{Şu halde } \eta_R((r_i - r_j)^2) = \sqrt{\eta_R}(r_i - r_j) = \eta_R(0)$$

olup $r_i - r_j \in \tau$ olduğu görülür.

- $\forall r \in R$ için

$$\eta_R((r_i r)^2) = \eta_R(r_i^2 r^2) = \eta_R(r_i^2) \cup \eta_R(r^2) = \eta_R(0) \implies r_i r \in \tau$$

Ayrıca, R değişmeli olduğundan $r_i r = r r_i \in \tau$ olup istenilen elde edilir.

Teorem 4.8. R birimli olmayan değişmeli halka, I onun bir ideali, $\forall r_i \in I \setminus \{0\}$ için $\eta_R(r_i) = \Gamma$ ve $\forall r_j \in R \setminus I$ için $\eta_R(r_j) = \Gamma^*$ olsun. η_R , R nin esnek 1–yutan asal ideal ise $\Gamma^* \subseteq \Gamma$ dir.

İspat. I bir ideal olduğundan $r_i \in I \implies r_i^2 \in I$ ve $\forall r_j \in R \setminus I$ için $r_i^2 r_j \in I$ dir. η_R esnek 1–yutan asal ideal olduğundan,

$$\eta_R(r_i^2 r_j) = \Gamma \implies \eta_R(r_i^2) \cup \eta_R(r_j) = \Gamma \implies \Gamma \cup \Gamma^* = \Gamma \implies \Gamma^* \subseteq \Gamma$$

elde edilir.

Teorem 4.9. R birimli olmayan değişmeli halka ve R nin bir 1–yutan asal ideali I olsun. $\forall r_i \in I$ için $\eta_R(r_i) = \eta_R(0)$ ise $\forall \sqrt{I} \setminus I$ için $\eta_R^*(r_j) \in \text{Nil}(\eta_R)$ dir.

İspat. $r_j \in \sqrt{I} \setminus I$ olsun. I , 1–yutan asal ideal olduğundan $r_j^2 \in I$ dir. η_R tanımından $\eta_R(r_j^2) = \eta_R(0)$ olur. Son olarak η_R esnek 1–yutan asal ideal olduğundan,

$$\sqrt{\eta_R}(r_j) = \eta_R(r_j^2) = \eta_R(0) \implies \eta_R(r_j) \in \text{Nil}(\eta_R)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.10. Esnek 1–yutan asal idealin örten halka homomorfizması altındaki görüntüsü de esnek 1–yutan asal idealdir.

İspat. $\phi : R \longrightarrow S$ örten halka homomorfizması ve η_R , R nin esnek 1–yutan asal ideali olsun. $\phi(\eta_R)$ nin S nin esnek 1–yutan asal ideal olduğunu göstereceğiz. Öncelikle ilgili teorem gereği $\phi(\eta_R)$ nin S nin esnek ideali olduğunu biliyoruz. Sadece $\phi(\eta_R)$ nin 1–yutan asallığını inceleyeceğiz.

- $\forall s_i, s_j, s_k \in S$ için

$$\begin{aligned} \phi(\eta_R)(s_i s_j s_k) &= \cup \{ \eta_R(r) : r \in R, \phi(r) = s_i s_j s_k \} \\ &= \cup \{ \eta_R(r_i r_j r_k) : r_i, r_j, r_k \in R, \phi(r_i r_j r_k) = s_i s_j s_k \} \\ &= \cup \{ \eta_R(r_i r_j r_k) : r_i, r_j, r_k \in R, \phi(r_i r_j) = s_i s_j, \phi(r_k) = s_k \} \\ &= \bigcup \{ \eta_R(r_i r_j) \cup \eta_R(r_k) : r_i, r_j, r_k \in R, \phi(r_i r_j) = s_i s_j, \phi(r_k) = s_k \} \\ &= \{ \cup \{ \eta_R(r_i r_j) : r_i, r_j \in R, \phi(r_i r_j) = s_i s_j \} \} \cup \{ \cup \{ \eta_R(r_k) : r_k \in R, \phi(r_k) = s_k \} \} \\ &= \phi(\eta_R)(s_i s_j) \cup \phi(\eta_R)(s_k) \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.11. Esnek 1–yutan asal idealin halka homomorfizması altındaki ters görüntüsü de esnek 1–yutan asal idealdir.

İspat. R ve S birimli olmayan değişmeli halka olmak üzere $\phi : R \longrightarrow S$ halka homomorfizması olsun. Yine ilgili teorem gereğince $\phi^{-1}(\eta_S)$ in ters homomorfik görüntüsünün R nin

ideali olduğunu biliyoruz. Sadece $\phi^{-1}(\eta_S)$ in R nin esnek 1–yutan asallığını inceleyeceğiz.
 $\forall r_i, r_j, r_k \in R$ için

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(\eta_S)(r_i r_j r_k) &= \eta_S(\phi(r_i r_j r_k)) \\ &= \eta_S(\phi(r_i r_j) \phi(r_k)) \\ &= \eta_S(\phi(r_i r_j)) \cup \eta_S(\phi(r_k)) \\ &= \phi^{-1}(\eta_S)(r_i r_j) \cup \phi^{-1}(\eta_S)(r_k)\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.12. I , birimli olmayan R halkasının bir ideali ve η_R de R nin aşıkâr olmayan esnek 1–yutan asal ideali olsun. Bu durumda η_R ile aynı cebirsel özelliklere sahip R/I bölüm halkasının esnek 1–yutan asal ideali vardır. Ayrıca her iki esnek 1–yutan asal ideallerin radikalleri de aynıdır.

İspat. $\zeta_{R/I}$ esnek kümesini $\forall r_i \in R$ için $\zeta_{R/I}(I + r_i) = \eta_R(r_i)$ olarak tanımlansın:
 $\forall I + r_i, I + r_j, I + r_k \in R/I$ için

- $\zeta_{R/I}((I + r_i) - (I + r_j)) = \zeta_{R/I}(I + (r_i - r_j)) = \eta_R(r_i - r_j) \supseteq \eta_R(r_i) \cap \eta_R(r_j) = \zeta_{R/I}(I + r_i) \cap \zeta_{R/I}(I + r_j)$
Ayrıca
- $\zeta_{R/I}((I + r_i)(I + r_j)) = \zeta_{R/I}(I + (r_i r_j)) = \eta_R(r_i r_j) \supseteq \eta_R(r_i) \cup \eta_R(r_j) = \zeta_{R/I}(I + r_i) \cup \zeta_{R/I}(I + r_j)$

olup $\zeta_{R/I}$ esnek kümesinin R/I nin esnek ideali olduğu görülür. Ayrıca

•

$$\begin{aligned}\zeta_{R/I}((I + r_i)(I + r_j)(I + r_k)) &= \zeta_{R/I}(I + (r_i r_j r_k)) \\ &= \eta_R(r_i r_j r_k) \\ &= \eta_R(r_i r_j) \cup \eta_R(r_k) \\ &= \zeta_{R/I}((I + r_i)(I + r_j)) \cup \zeta_{R/I}(I + r_k)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\zeta_{R/I}$ esnek idealin R/I nin esnek 1–yutan asal ideali olduğu sonucuna varılır. Son olarak $\sqrt{\zeta_{R/I}} = \sqrt{\eta_R}$ olduğunu gösterelim. $\forall I + r_i \in R/I$ için

$$\sqrt{\zeta_{R/I}}(I + r_i) = \bigcup_{l=1}^n \chi_{R/I}((I + r_i)^l) = \bigcup_{l=1}^n \chi_{R/I}(I + r_i^l) = \bigcup_{l=1}^n \eta_R(r_i^l) = \sqrt{\eta_R}(r_i)$$

SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde ileriki bölümlerde kullanacağımız; grup, halka, alt halka, ideal, bir idealin radikali, asal ideal, 1-yutan asal ideal gibi tanımlar ve bu tanımlarla ilgili teoremlere, ayrıca esnek kümelerin tanıtımından başlanarak esnek kümeler üzerinde inşa edilmiş bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümde, daha çok esnek kesişimsel halkaların ve esnek kesişimsel ideallerin cebirsel özellikleri incelenmiştir. İdealler cebirde oldukça önemli bir yere sahiptir; çünkü bir halkanın ideali/idealleri hakkında ne kadar bilgiye sahip olunursa bu, halkanın kendisi ile ilgili o kadar bilgiye sahip olunduğu anlamına gelmektedir. İdealler tek türlü olmayıp belki de bu türler arasındaki en önemlisi asal ideallerdir. Bu yüzden bu çalışmada, asal ideal kavramının esnek kümeler teorisine aktarımı ve esnek kesişimsel asal ideallerin genelleştirilmeleri üzerine çalışılmıştır. Bu tezin ikinci kısmında ilk olarak, esnek nilpotent eleman, esnek sıfır bölen, esnek aşikar olmayan ideal gibi yeni kavramlar tanıtılarak bunlara ait esnek asal ideal üzerinde uygulamalar yapılmıştır. Tezin üçüncü kısmında R birimli olmayan halka olmak üzere $\forall r_i, r_j \in R$ için $\eta_R(r_i r_j) = \sqrt{\eta_R}(r_i) \cup \sqrt{\eta_R}(r_j)$ olması durumu incelenmiş ve sonuçta yeni bir esnek ideal türü olarak ve ayrıca esnek asal ideallere bir üst kimlik kazandırarak esnek yakın asal ideal kavramı tanıtılmıştır. Başka bir deyişle her esnek asal ideal, esnek yakın asal ideal iken bu durumun tersinin doğru olmadığı kanıtlanmıştır. Ayrıca R halkasının değişmeli olması durumunda $\sqrt{\eta_R}$ nin esnek asal ideal olduğu kanıtlanarak bu iki esnek cebirsel yapı arasında sıkı bir geçişkenlik olduğu gösterilmiştir. Son olarak örten halka homomorfizması altında esnek yakın asal idealin cebirsel özelliklerinin korunduğu, yani $f : R \rightarrow S$ örten halka homomorfizması olmak üzere η_R esnek yakın asal idealin homomorfik görüntüsünün de S nin esnek yakın asal olduğu ispatlanmıştır. Dördüncü kısımda da yine R birimli olmayan halka olmak üzere $\forall r_i, r_j, r_k \in R$ için $\eta_R(r_i r_j r_k) = \eta_R(r_i r_j) \cup \eta_R(r_k)$ olması durumu incelenmiş ve sonuçta yine başka bir esnek ideal türü olan ve bununla birlikte esnek asal ideallere başka bir üst kimlik kazandırarak esnek 1-yutan asal ideal kavramı elde edilmiştir. Bu bölümde de her esnek asal idealin aynı zamanda esnek 1-yutan asal ideal olduğu ama bu durumun tersinin her zaman doğru olmadığı gösterilmiştir. Yine bu bölümde de R değişmeli halka olması durumunda $\sqrt{\eta_R}$ nin R nin esnek asal ideal olduğu kanıtlanmıştır. Ek olarak ikinci bölümde tanımladığımız esnek sıfır bölen ve esnek nilpotent eleman kavramının, esnek 1-yutan asal ideal üzerinde uygulamaları gerçekleştirilmiştir. Son olarak da örten halka homomorfizma altında esnek 1-yutan asal idealin cebirsel özelliklerinin korunduğu gösterilmiştir.

Bu tez çalışması sonucunda yukarıda verilen eşitliklerin başka versiyonlara evrilmesi sonucunda başka esnek ideal türleri elde edilebilebilir.

Kaynaklar

- Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B., 2010. Soft sets and soft rings. *Computers and Mathematics with Applications* (59), 3458 – 3463.
- Acharjee, S., Molodtsov, D., Soft Rational Line İntegral. 2021. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta Matematika Mekhanika Komp yuternye Nauki* 31, Pp. 578 – 596.
- Aktaş, H., Çağman N., 2007. Soft sets and soft groups. *Inform. Sci.* 177, 2726–2735.
- Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K., Shabir, M. On some new operations in soft set theory. *Comput. Math. Appl.* 2009, 57, 1547–1553.
- Ali, M.I., Shabir, M., Naz, M., Algebraic structures of soft sets associated with new operations. *Comput. Math. Appl.* 2011, 61, 2647–2654.
- Aydın, T, Enginoğlu, S. (2021). Some results on soft topological notions. *J New Results Sci* 10(1), 65–75.
- Ayub, S. , Shabir, M., Mahmood, W., 2020. New types of soft rough sets in groups based on normal soft groups. *Computational and Applied Mathematics* volume 39, Article number: 67 (2020).
- Çağman, N., Enginoğlu, S., 2010. Soft set theory and uni-int decision making. *European Journal of Operational Research* 207 (2010), 848–855.
- Çağman, N., Enginoğlu, S., Çıtak, F. 2011-a. Fuzzy soft set theory and its applications. *Iran J Fuzzy Syst* 8(3), 137–147.
- Çağman, N., Karataş, S., Enginoğlu, S., 2011-b. Soft Topology. *Computers and Mathematics with Applications* 62, 351-358.
- Çağman, N., Çıtak, F., Aktaş, H., 2012. Soft int-group and its applications to group theory. *Neural Comput and Applic* (2012) 21 (Suppl 1):,151–158.
- Çallıalp, F., Tekir, Ü., 2009. *Değişmeli Halkalar ve Modüller*. Birsen Kitapevi, 278. İstanbul.
- Çıtak, F., Çağman N., 2015. Soft int-rings and its algebraic applications. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems* 28, 1225-1233.
- Dalkılıç, O., Demirtaş, N., 2022-a. Algorithms for Covid-19 outbreak using soft set theory: estimation and application. *Soft Computing*.

- Dalkılıç, O., Demirtaş, N., 2022-b. A Mathematical Analysis of the Relationship Between the Vaccination Rate And COVID-19 Pandemic in Turkey. Turkish Journal of Forecasting vol. 06, no. 01, pp 01-07.
- Enginoğlu, S., Çağman, N., Karataş, S., Aydın T. 2015. On soft topology. El-Cezeri J Sci Eng 2(3), 23–38.
- Enginoğlu, S., Arslan, B., 2020. Intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft matrices and their application in decision-making. Computational and Applied Mathematics volume 39, Article number 325.
- Feng, F., Jun, Y.B., Zhao, X., 2008. Soft semirings. Comput. Math. Appl. 56 (2008) 2621-2628.
- Georgiou, D.N., Megatiris, A.C., 2014. Soft set theory and topology. Applied General Topology 15 no:1, 93-109.
- Ghosh, J., Mandal, D., Samanta, T.P., 2019. Soft prime and semiprime int-ideals of a ring. AIMS Mathematics 5(1), 732-745.
- Ghosh, J., Mandal, D., Samanta, T.K., 2018. Soft semiprimary int-ideals of a ring, Analele Universitatii Oradea Fasc. Matematica, 2 (2018), 141–151.
- Jana. C., Pal, M., Karaaslan, F., Sezgin, A., 2019. $(\mathcal{U}, \beta)$ -Soft Intersectional Rings and Ideals with their Applications. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., vol. 15(02), pages 333-350.
- Jun, Y.B., 2008. Soft BCK/BCI-algebras. Comp. and Math. with Applications 56, 1408-1413.
- Jun, Y.B., Lee, K.J., Roh, E.H. 2012. Intersectional soft BCK/BCI-ideals. Ann. Fuzzy Math. Inform. 4, 1–7.
- Maji, P.K., Biswas, R., Roy, A.R., 2003. Soft Set Theory. Computers and Mathematics with Applications 45, 555 – 562.
- Molodstov, D., 1999. Soft Set Theory-First Results. Computers and Mathematics with Applications 37, 19 – 31.
- Molodstov, D., Soft Probability of Large Deviations. 2013. Advances in Systems Science and Applications 13(1), 53-67.

- Mondal, S., Chiney, M., Samanta, S.K., 2015. Urysohn's lemma and Tietze's extension theorem in soft topology. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics* Volume 10 no. 6, 883-894.
- Pawlak, Z., (1982). Rough sets. *Int J Comput Inf Sci* 11, 341–356.
- Sezer, A.S., Çağman, N., Atagün A.O., 2014. Uni-soft substructures of groups. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*.
- Sezgin, A., Çağman, N., Çıtak, F., (2019) $\mathcal{U}$ – inclusions applied to group theory via soft set and logic. *Commun Faculty Sci Univ Ankara Series A1 Math Stat* 68(1), 334–352.
- Taşcı, D., 2018. Soyut Cebir. Gazi Kitapevi, 653, Ankara.
- Yassine, A., Nikmehr M.J., Nikandish R., 2020. On 1-absorbing Prime Ideals of Commutative Rings. *Journal of Algebra and its Applications*.
- Zadeh, L.A., (1965). Fuzzy sets. *Inf Control* 8, 338–353.