

11686

HALL HIGMAN TİPİ TEOREMLER-II

YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MATEMATİK)

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

İbrahim GÜNALTILI

Eylül 1990

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

A. O. Asar

Danışman

Prof.Dr. Ali Osman ASAR

Sınav Jürisi

Başkan : Prof.Dr.Ali Osman ASAR

A. O. Asar

Üye: Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU

H. Hacısalihoğlu

Üye : Doç.Dr.Seyit Ahmet KILIÇ

S. A. Kiliç

Bu Tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Tez Yazım Esaslarına uygundur.

Ahmet Biny

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa:</u>
ÖZ	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SEMBOLLER	v
GİRİŞ	1
BÖLÜM 0	
KULLANILAN BAZI TANIM VE TEOREMLER	8
BÖLÜM 1	
GRUP TEORİK İNCELEMELER	29
BÖLÜM 2	
BAZI ÖRNEKLER	41
BÖLÜM 3	
BAZI MİNİMAL $K[G]$ -MODÜLLER	49
BÖLÜM 4	
BAZI SİMPEKTİK İLKEL $K[G]$ -MODÜLLER	95
KAYNAKLAR	105
ÖZGEÇMİŞ	-

HALL-HİGMAN TİPİ TEOREMLER-II

(Yüksek Lisans Tezi)

İbrahim GÜNALTILI
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Eylül 1990

ÖZ

Bu çalışmada T.R. Berger'in "Hall-Higman Type Theorems, II" başlıklı makalesi incelenmiştir [1]

Bu makalede, Nilpotent gruplar için $K = GF(r)$ ($r > 1$ asal sayı) üzerindeki bütün minimal modüllerin bir tam sınıflandırması elde edilmiştir.

r bir asal sayı olmak üzere $K = GF(r)$ bir cisim, H nilpotent, V sadık indirgenmez $K[H]$ -modül, g, V üzerinde singüler olmayan simplektik bilineer form ve H, g formunu sabit bıraksın. Bu durumda H nın yapısı tam olarak belirlenmiştir.

V simplektik ilkel $K[H]$ -modül olduğu zaman H nın V üzerindeki temsili belirlenmiştir.

Bu tezde, Berger'in yukarıda sözü edilen çalışmalarını ayrıntılı ve anlaşılır bir şekilde ifade ettik. Bir çok noktaları açıklığa kavuşturduk ve boşlukları doldurduk. T.R. Berger minimal modül tanımındaki bir şartın gereksiz olduğunu daha önce göstermiştir. Biz bu durumu da elementer bir şekilde gösterdik.

HALL-HIGMAN TYPE THEOREMS-II

(M.Sc. Thesis)

İbrahim GÜNALTILI

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

September 1990

ABSTRACT

In this work, we studied the paper of T.R. Berger entitled "Hall-Higman type theorems, II" [1]

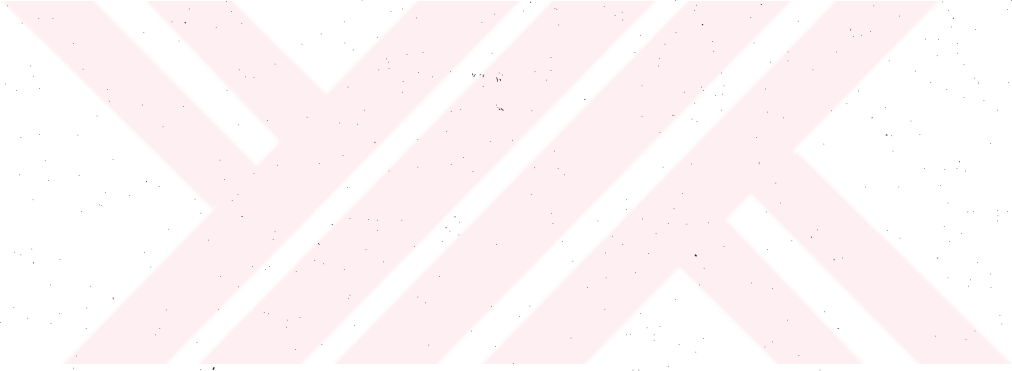
In this paper we obtain a complete classification of all minimal modules over $K = GF(r)$ for nilpotent groups ($r > 1$ a prime).

Suppose $K = GF(r)$ is a field for a prime r ; H is nilpotent; V is a faithful irreducible $K[H]$ -module; g is a non-singular symplectic bilinear form upon V and H fixes the form g . In this case, the structure of H is determined completely. It's representation upon V is described when V is symplectic primitive $K[H]$ -module.

In this thesis, we have prepared a detailed and readable account of the above mentioned works of Berger; we have clarified many points and filled in many gaps. T.R. Berger had shown before that one of the condition in the definition of a minimal module was unnecessary we have also shown this in elementary way.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisansa başlamamdan itibaren her adımda bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım, Cebir ve Sayılar Teorisi hakkındaki tüm bilgilerimi edinmem de yeterli düzeye gelmeme çalışan, ayrıca bu çalışmanın ortaya çıkmasında yakın ilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof.Dr. Ali Osman ASAR'a sonsuz minnet ve şükranlarımı sunarım.



SEMBOLLER

<u>Sembol</u>	<u>Anlam</u>
Q_m	Mertebesi $2m$ olan kuaterniyon grubu
D_m	Mertebesi $2m$ olan dihedral grubu
S_m	Mertebesi $2m$ olan yarıdihedral grubu
$\text{Aut}G$	G nin otomorfizmalarının grubu
$\text{Inn}G$	G nin iç otomorfizmalarının grubu
$\text{GF}(r)$	Mertebesi r olan cisim, r bir asal sayı
$\text{Gal}(\bar{k}/k)$	$\bar{k}$ nin tüm k -otomorfizmalarının grubu
$a b$	a böler b
$a \nmid b$	a bölmez b
$p^m a$	$p^m a$ ve $p^{m+1} \nmid a$
$N \subseteq G$	N , G nin alt kümesi
$N \leq G$	N , G nin altgrubu
$N \triangle H$	N , H grubunun normal alt grubudur
H/N	H nin N ile bölüm grubu
$C_H(N)$	N nin H içindeki merkezleyeni
$N_H(N)$	N nin H içindeki normalleyeni
$Z(H)$	H grubunun merkezi
$[x, y], x^{-1}y^{-1}xy$	x ve y nin komütatörü
$[H, H], H'$	H nin komütatör alt grubu
$ H $	H nin mertebesi
$o(g)$	g elemanının mertebesi

$[H : M]$	M nin H içindeki farklı kosetlerinin sayısı, $M \leq H$ olmak üzere M nin H içindeki indeksi
$H_x, C_H(x)$	x in H içindeki merkezleyeni, H üzerinde x in sabit bıraktığı noktaların grubu
$B \times C$	B ile C nin direkt çarpımı
$\mathbb{Z}_p \sim \mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Z}_p$ ile $\mathbb{Z}_p$ nin çelenk çarpımı
$\text{kar}(k)$	k cisminin karakteristiği
$V _M$	V nin M-modülüne kısıtlanmış
$X \setminus Y$	X de olan fakat Y de olmayan elemanların kümesi
$\text{ker} f$	f fonksiyonunun çekirdeği
$V _H$	$H \otimes_R V$, (V bir R-modülüdür)
$\langle x \rangle$	x tarafından üretilen devirli grup
$\text{deng}(H, x)$	x in H içindeki dengeleyeni, yani H nin x i sabit bırakan elemanların grubu (Burada G, X üzerine etki ediyor ve $x \in X$ dir)
$\text{deng}(G, V)$	$\{g \in G gV = V\}$ G nin V içindeki dengeleyeni
V^*	V vektör uzayının duali
$N_{\text{kar}} H$	N, H nin karakteristik altgrubu
$M \otimes_R N$	Sol R-modül N ile sağ R-modül M nin tensör çarpımı
$J(A)$	A nin Jacobson radikali
$\bigoplus_{i=1}^2 A_i = A_1 \oplus A_2$	A_1 ile A_2 nin dış direkt toplamı
$\text{Hom}_k(V, V)$	V den V ye k-homomorfizmalarının grubu
$\text{Mat}(n, k)$	Girişleri k da olan n x n tipinden matrislerin kümesi

Kx	H	K ile H nın G içindeki ikili kosetleri, $x \in G$
$ G _p$		G nin mertebesini bölen en büyük p -altgrubunun mertebesi
x^g		$gxg^{-1} : x, g \in G$
$H \tilde{\subset} G$		H grubu G grubunun bir öz altgrubuna izomorftur.
$A \cong B$		A ile B izomorftur.
$O_p(G)$		G nin maksimal normal p -altgrubu
$O^p(G)$		$G/O^p(G)$ p -grubu olacak şekilde G nin en küçük normal altgrubu
$\Omega(H)$		$\langle x \in H : x^p = 1 \rangle$
$\cup(H)$		$\langle x^p : x \in H \rangle$
$A \dot{\times} B$		A grubu ile B grubunun merkezi çarpımı
$M_1 \dot{+} M_2 = K$		M_1 ve M_2 modüllerinin iç direkt toplamı ($K = M_1 \cap M_2$ ve $M_1 \cap M_2 = (0)$)

GİRİŞ

T.R. Berger şu problemi gözönüne almıştır : G sonlu çözülebilir bir grup; A, G nin bir nilpotent otomorfizma grubu ve A ile G nin mertebeleri aralarında asal olsun. Yani $(|A|, |G|) = 1$ olsun.

Eğer A, G üzerine sabit noktasız etki ederse, yani $C_G(A) = \{1\}$ ise G nin Fitting uzunluğu, A nın kompozisyon uzunluğu ($|A|$ sayısını bölen asal sayıların (katları sayarak) sayısı) ile sınırlıdır.

T.R. Berger bu problemi araştırırken, Hall-Higman [2] de verilen meşhur Teorem B nin ispatında ki durumla karşı karşıya gelmiştir. Yani şu durum ortaya çıkmıştır.

p ve q asal sayılar olmak üzere Q bir q -grubu, $C \leq \text{Aut}(Q)$ ve devirli bir p -grubu, k bir sonlu cisim, $\text{kar}(k) = r$ ve V bir indirgenmez sadık $k[CQ]$ -modülüdür. Bu durumda ki CQ grubunun yapısı Hall-Higman'a ait Teorem B nin ispatında ve diğerleri tarafından geniş bir şekilde incelenmiştir. Esasen Teorem B'nin ispatında Q ya elemanter abelyan veya ekstra-özel olabilmektedir.

T.R. Berger'in çalışmasına kadar yukarıdaki şeklin ortaya çıktığı durumlarda asal sayıların üzerine bazı kısıtlamalar (Fermat asal sayısı olmayacak, mersenne asal sayısı olacak gibi) koyarak sonuçlar elde ediliyordu. T.R. Berger ise şu önemli durumu gözlemlemiştir.

Yukarıdaki şeklin ortaya çıktığı hemen bütün durumlarda C nin $Q^* = Q \setminus \{1\}$ üzerindeki etkisine yarı regülerdir, yani yörüngeler regüler yörüngedir. Bundan başka $V|_C$ modülü regüler $k[C]$ -modülü $k[C]$ -nin bir kopyasını direkt terim olarak içerir. Buradan hareketle, bir grubun bir modül üzerindeki etkisinin ne zaman regüler yörünge ve ne zaman regüler altmodül içerdiğini belirlemenin önemli olacağını düşünerek aşağıdaki önemli problemleri ortaya atmıştır.

AG bir grup olsun öyle ki G bu grubun bir çözülebilir normal altgrubu ve A , G nin bir nilpotent bütünleri olsun ($G \triangleleft AG$, $A \cap G = 1$). k bir sonlu cisim ve $\text{kar}(k) = r$ olsun. V bir indirgenmez sadık $k[AG]$ -modülü olsun.

(1) Hangi şartlar altında A nın $V \setminus \{0\}$ üzerindeki permütasyon etkisinin en az bir regüler yörüngesi vardır?

(2) s bir asal sayı olsun. $S \leq G$ bir ekstraözel s -altgrubu olsun, AG tarafından normallensin ve $(|A|, s) = 1$ olsun. $Z(S) \leq Z(AG)$ ve $S/Z(S)$, $AG/Z(S)$ nin bir minimal normal altgrubu olsun. Bundan başka $A, S/Z(S)$ üzerinde sadık etki etsin ve $r \neq s$ olsun.

Hangi şartlar altında $V|_A$ regüler $k[A]$ -modülü $k[A]$ ya izomorf bir direkt terim içerir?

(Hall-Higman Teorem B de $A = C$ ve $G = Q$ dur).

Birinci soru [3]'de ele alınmıştır ve A.Yalıncağlıoğlu tarafından [4]'de detaylı olarak incelenmiştir.

T.R. Berger ikinci soruyu [1] de incelemiştir. Bu makale burada ki çalışmamızın konusunu oluşturmaktadır. (1) ve (2)'nolu sorulara ait genel sonuçlar [5] de verilmiştir.

T.R. Berger (1) ve (2) nolu problemlerini "Hall-Higman tipi Teoremler" adı altında bir dizi makale içinde incelemiştir. Bu sonuçları kullanarak, girişin başında ifade edilen problemin bir çözümünü [6] da vermiştir. Bu çalışma S. Doğruöz tarafından [7] de detaylı olarak incelenmiştir. Anılan çalışma da eğer her $p \mid |A|$ için A'nın $Z_p \sim Z_p$ çelenk çarpımına izomorf faktörü yoksa G'nin Fitting uzunluğunu, A'nın kompozisyon uzunluğu ile sınırlı olduğu gösterilmiştir. Bu sonuç daha sonra A. Turull tarafından [[8], Theorem 4.7.] da genelleştirilmiştir.

Şimdi bizim esas konumuz olan (2) nolu soru'ya dönelim. Önce bu soruyla ilgili [5] de verilen genel sonucu ifade edelim.

HİPOTEZ : Aşağıdakiler sağlansın.

(1) AG bir çözülebilir grup, $G \triangleleft AG$, A nilpotent ve $(|A|, |G|) = 1$ olsun.

(2) Her $p \mid |A|$ için A'nın $Z_p \sim Z_p$ ye izomorf faktörü bulunmasın.

(3) $S \leq G$, AG'nin bir normal ekstra-özel s-alt grubu (s asal) ve $Z(S) \leq Z(AG)$ olsun.

(4) $C_A(S) = \{1\}$

- (5) $S / Z(S)$ indirgenmez AG-modülü;
- (6) k cebirsel kapalı bir cisim öyle ki $\text{kar}(k)$ ile $|A|s$ aralarında asal olsun.
- (7) V bir indirgenmez $k[AG]$ -modülü olsun ve $Z(S)$ ye göre aşık olsun.

TEOREM : Yukarıdaki hipotez sağlansın. O zaman ya $V|_A$ nın bir $k[A]$ -regüler direkt terimi vardır veya

- (1) $C_G(S / Z(S)) = G$ ve
- (2) (i) A devirlidir, veya
- (ii) A bir p -grubudur (p asal sayı).

(2)'nolu sorunun çözümünde $\bar{S} = S/Z(S)$ elemanter abelyan s -grubu olduğundan $GF(s)$ üzerinde bir vektör uzayıdır ve $GF(s)[AG]$ grup cebiri bu uzay üzerine etki etmektedir. Yani $\bar{S}$ bir $GF(s)[AG]$ -modülüdür. Bundan dolayı temsil teorisi kullanılarak AG nin $\bar{S}$ üzerinde ki etkisi incelenmektedir. Burada $\bar{S}$ nin belli bir minimal altmodülü $\bar{S}_0$ tarafından oluşturulduğu görülmektedir. Böylece problem $\bar{S}_0$ 'nin yapısının incelenmesine dönüşmektedir. Burada $S_0 \leq S$ ekstra-özel olmak üzere $\bar{S}_0 = S_0/Z(S)$ dir. Bundan böyle ;

$$N_{AG}(S_0) = A_0 G_0, \quad A_0 \leq A, \quad G_0 \leq G$$

dir.

Şimdi S_0 ekstra-özel olduğundan komutatör fonksiyonu, $\bar{S}_0$ üzerinde singüler olmayan bir simplektik bilineer form tanımlar ve bu form $A_0 G_0$ -invarianttır. Bu aşamada $\bar{S}_0$ aşağıdaki şartlardan birini sağlar.

(1) Her $L \triangle A_0 G_0$ için $\bar{S}_0|_L$ homojendir. (Yani $\bar{S}_0$ yarıilkeldir).

(2) $L \triangle A_0 G_0$ olsun. Eğer $t > 1$ bir tamsayı ve $\bar{S}_0|_L$ nin homojen bileşenleri $W_1, \dots, W_t$ olmak üzere

$$\bar{S}_0|_L = W_1 \oplus \dots \oplus W_t$$

ise o zaman

(a) $t = 2$

(b) W_1 tam izotropik ve

(c) eğer $M \leq \text{deng}(W_1)$ ve $M \triangle A_0 G_0$ ise o zaman $W_1|_M$ homojendir.

Yukarıdaki (1) ve (2) şartlarından birini sağlayan $\bar{S}_0$ modülüne minimal $A_0 G_0$ -modül denir.

T.R. Berger minimal modülleri genel olarak [9] da incelemiştir. Biz burada $A_0 G_0$ nin daha özel bir hali için minimal modülleri belirleyeceğiz. Eğer $G_0, \bar{S}_0$ üzerinde aşıkâr ise ($G_0 \subseteq C_{A_0 G_0}(\bar{S}_0)$) o zaman $A_0 G_0$ nin etkisi A_0 ın etkisine eşittir ve A_0 nilpotenttir. Böylece burada gözönüne alınan soru şudur.

SORU : Bir nilpotent grubun $GF(s)$ üzerindeki minimal modüllerin yapısı nedir?

Burada bir nilpotent grubun bütün minimal modüllerinin tasnifi yapılacaktır. 2. Bölüm'de dört örnek inşa edilmektedir. Minimal modüle sahip olan bir nilpotent grup daima bu örneklerde tanımlanan B grubunun bir alt-grubu olmaktadır. Nilpotent grup ve modüller aşağıdaki dört tipten biri olmaktadır.

- (i) bir devirli grup;
- (ii) ve (iii) iki farklı etkiye sahip olabilen bir kuaterniyon grup;
- (iv) mertebesi tek sayı olan bir devirli grup ile yarı dihedral, dihedral veya kuaterniyon bir 2-grubunun direkt çarpımıdır.

Yukarıdaki $\bar{S}_0$ modülü ilkel modüle karşılık gelmektedir. (hiç bir öz altmodülünden oluşturulmayan modül) Bundan dolayı $\bar{S}_0$ ye simplektik ilkel modül diyeceğiz. (hiç bir singüler olmayan öz altmodülden oluşturulmayan modül). O zaman minimal modüle de simplektik yarı ilkel modül denebilir. Fakat böyle bir tanım yapmayacağız. 4.6. Teorem de gösterildiği gibi simplektik ilkel modül bir minimal modüldür. Bu özellik [[9], Teorem 7.8. de] de gösterilmiştir.

Burada kullanılan bütün gruplar sonlu çözülebilir gruplardır.

$H = AN$, N devirli grubunun A nilpotent grubu ile yarıdirekt çarpımı olsun, yani $N \triangleleft AN$ ve $A \cap N = 1$ olsun. Bu durumda H nin öyle bir maksimal normal devirli M altgrubu vardır ki $N \leq M$ ve $C_H(M) = M$ dir.

Şimdi k bir sonlu cisim ve V bir minimal $k[H]$ -modülü olsun. k ya 1 'in $|M|$ yinci ilkel kökünün katılmasıyla elde edilen cisim $\tilde{k}$ olsun. O zaman $\tilde{k}$ içinde k nin öyle bir cisim genişlemesi $\hat{k}$ vardır ki eğer $\tilde{k}$ nin çarpımsal grubu $\tilde{k}^x$ nin $\text{Gal}(\tilde{k}/\hat{k})$ Galois grubu ile yarıdirekt çarpımı $T = \text{Gal}(\tilde{k}/\hat{k})\tilde{k}$ ise o zaman H dan T grubu içine bir monomorfizma ve V den $\tilde{k}^+$ üzerine bir k -vektör uzayı

izomorfizması vardır ve belli şartlar sağlanır. Böylece H ve V , iyi tanıdığımız $\text{Gal}(\tilde{k}/\hat{k})\tilde{k}^*$ ve $\tilde{k}^+$ yapıları içine taşınmış olmaktadır.

Bundan sonra $V|_M$ nin homojen olması durumunda 3.10. Teorem'i ve $V|_M$ nin iki ayrı homojen bileşenin toplamı olması durumunda ise 3.17. Teorem'i elde edilmektedir. Bu Teoremler A. Turull tarafından [8] de genelleştirilmiştir. Daha sonra $N = 1$ ve $H = A$ nilpotent olması durumunda; birinci halde 3.11. Teorem'i ve ikinci halde ise 3.19. Teorem'i elde edilmektedir.

$N = 1$ ve $H = A$ nilpotent olması özel durumunda birinci halde H nin devirli ya da kuaterniyon olduğunu ve 2.1. Örnek veya 2.2. örnekteki B nin altgrubuna izomorf olduğunu, ikinci halde ise H nin Kuaterniyon, diedral veya yarıdiedral olduğunu ve 2.3. Örnek veya 2.4. örnekteki B nin altgruplarına izomorf olduğu gösterilmektedir.

Son bölümde ise simplektik ilkel modülün minimal modül olduğu gösterilmiştir.

BÖLÜM O

KULLANILAN BAZI TANIM VE TEOREMLER

Bu çalışmada bütün gruplar sonlu ve çözülebilir alınmıştır.

O.1. TANIM : G bir grup ve H , G nin altgrubu olsun. H nin G içinde ki her sağ kosetinden yalnız bir eleman alarak oluşturulan T kümesine H nin G içindeki sağ transversali denir. $|T| = |G:H|$ ile gösterilir. Buna H nin G içindeki indeksi denir. Benzer şekilde sol transversal tanımlanır. (T kümesine H nin G içindeki koset temsilcilerinin bir tam kümesi de denir).

O.2. TANIM : G bir grup olsun. Eğer H ve K , $K \leq H$ olacak şekilde G nin iki normal altgrubu ise H/K ya G nin faktör grubu denir. Eğer H/K , G/K nin minimal normal altgrubu ise H/K ya G nin esas faktörü denir.

Eğer $H/K \leq Z(G/K)$ ise H/K ya merkez faktör denir.

O.3. TANIM : G bir grup olsun. G nin bütün maksimal altgruplarının kümesi M olsun. M nin bütün elemanlarının arakesitine G nin Frattini altgrubu denir. $\Phi(G)$ ile gösterilir.

O.4. TANIM : $p > 1$ bir asal sayı olmak üzere G bir p -grubu olsun. Eğer G elemanter abelyan ya da

$\Phi(G) = Z(G) = G'$ elemanter abelyan ise G ye özel p-grubu denir. G abelyan olmayan bir özel grup ve $Z(G)$ devirli ise G ye ekstra özel p-grubu denir.

0.5. TANIM : G bir grup olsun. $g \in G$ ve her $x \in G$ için $\tau_g : x \rightarrow g^{-1}xg$ biçiminde tanımlı G den G ye τ_g otomorfizmasına iç (inner) otomorfizma denir. G nin iç otomorfizmalarının grubu $\text{Inn}(G)$ ile gösterilir.

0.6. TANIM : G bir grup, H , G nin bir altgrubu ve α , G nin bir otomorfizması olmak üzere A , G nin otomorfizmalarının boş olmayan bir kümesi olsun. Eğer her $h \in H$ ve $\alpha \in A$ için $\alpha(h) \in H$ ise H ya G nin A-invaryant altgrubu denir.

Eğer H , $\text{Aut}(G)$ -invaryant ise H ya G nin karakteristik altgrubu denir. Eğer H , $\text{Inn}(G)$ -invaryant ise H ya G nin normal altgrubu denir.

0.7. TANIM : G herhangi bir grup olsun. Her $x \in G$ için

$$C_G(x) = \{g \in G : gx = xg\}$$

biçiminde tanımlanan $C_G(x)$, G nin bir altgrubudur. Bu gruba G içinde x in merkezleyeni denir. Aynı zamanda,

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x) = \{g \in G : gh = hg, \text{ her } h \in G\}$$

G nin bir karakteristik altgrubudur. Buna G nin merkezi denir. G nin bir H altgrubu için,

$$C_G(H) = \{g \in G : gh = hg, \text{ her } h \in H\}$$

altgrubuna H nin G içindeki merkezleyeni denir.

0.8. TANIM : Π asal sayıların herhangi bir kümesi, Π' de Π kümesine ait olmayan bütün asal sayıların kümesi olsun. G bir sonlu grup ve H da G nin bir altgrubu olsun.

$x \in G$ için $|x|$ in her asal böleni Π ye aitse x e bir Π -elaman denir. Eğer $|G|$ bir Π -eleman ise G ye bir Π -grup denir.

Eğer H bir Π -grup ve $|G : H|$ bir Π' -eleman ise H ya G nin S_{Π} -altgrubu denir. Aynı zamanda bu altgruba G nin Hall altgrubu denir.

0.9. TANIM : $a \geq 2$ bir tamsayı olsun.

$$Q_a = \langle h, k \mid h^{2^{a-1}} = k^2 = m, m^2 = 1, k^{-1}hk = h^{-1} \rangle$$

grupuna mertebesi 2^{a+1} olan genel kuaterniyon grup denir. Özel olarak $a=2$ ise bu gruba kuaterniyon grup denir.

$$D_m = \langle h, k \mid h^m = k^2 = 1, k^{-1}hk = h^{-1} \rangle$$

grupuna mertebesi $2m$ olan dihedral grup denir.

$$m > 3 \text{ için, } S_m = \langle x, y \mid x^{2^{m-1}} = y^2 = 1, x^y = x^{-1+2^{m-2}} \rangle$$

grupuna mertebesi 2^m olan yarıdihedral grup denir.

0.10. TANIM : G bir grup H ve K, G nin altgrupları ve $H \triangleleft G$ olsun. Eğer $G = HK$ ve $H \cap K = \{1\}$ ise G ye H nin K ile yarıdirekt çarpımı denir.

Eğer H bir grup ve $K \leq \text{Aut}(H)$ ise H nin K ile yarıdirekt çarpımı tanımlıdır.

0.11. TANIM : A bir halka ve $e \in A$ olsun $e^2 = e \neq 0$ ise e ye idempotent eleman denir. $e_1, e_2 \in A$ idempotentleri $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ şartını sağlıyorsa e_1, e_2 elemanları birbirlerine ortogonaldır denir. Bir $e \in A$ idempotent i A nın merkezinde ise bu idempotent e merkez idempotent denir. Ortogonal iki merkez idempotentin toplamı olarak yazılamayan bir merkez idempotent e ilkel merkez idempotent denir.

0.12. TANIM : R bir halka, M bir toplamsal abeliyan grup olsun. Eğer her $m, m_1, m_2 \in M$, $r, r_1, r_2 \in R$ için

$$(i) \quad r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$$

$$(ii) \quad (r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$$

$$(iii) \quad (r_1 r_2)m = r_1 (r_2 m)$$

olacak şekilde bir $rm \in M$ çarpımı tanımlanırsa o zaman M ye bir sol R-modül denir.

Eğer $1_R \in R$ ve her $m \in M$ için $1_R m = m$ ise M ye birimsel sol R-modül denir.

Eğer M birimsel sol R-modülü bir R-bazına sahipse M ye serbest sol R-modül denir.

Eğer R bir cisim ise birimsel serbest R-modülü M ye R üzerinde bir vektör uzayı denir.

0.13. TANIM : R bir birimli halka ve M bir sol R-modülü olsun. Eğer $M \neq \{0\}$ ve M nin sıfırdan farklı hiçbir özaltmodülü yoksa M ye bir indirgenmez (basit) sol R-modül denir.

Eğer M indirgenmez sol R-modüllerinin bir direkt toplamı ise M ye tam indirgenir denir.

O.14. TANIM : A bir halka, R birimli deęişimli bir halka olsun. Eğer A bir R-modülü ve her $a, b \in A$, $r \in R$ için

$$r(ab) = (ra)b = a(rb)$$

ise A ya R üzerinde bir cebir denir.

O.15. TANIM : R bir halka olsun. R nin toplamsal R^+ grubu, R üzerindeki tanımlanan çarpma işlemine göre bir sol R-modülüdür. Bu modüle R halkasının sol regüler modülü denir. R^R ile gösterilir. Benzer şekilde sağ regüler modülde tanımlanır. R nin regüler modülünün alt-modülleri R nin idealleridir.

O.16. TANIM : R birimli bir halka olsun. Eğer sol regüler R-modülü R^R tam indirgenir ise R ye bir yarıbasit halka denir. Eğer, R^R nin bütün indirgenmez altmodülleri izomorf ise R ye basit halka denir.

O.17. TANIM : A bir halka, M bir A-modül olsun. M nin bütün maksimal altmodüllerinin arakesitine M nin radikali denir ve $\text{rad}(M)$ ile gösterilir.

Sol regüler modülü A^A nın radikaline A nın Jacobson radikali denir. $J(A)$ ile gösterilir.

O.18. TANIM : G bir grup olsun. k bir cisim olsun. $g \in G$, $a_g \in k$ olmak üzere $\sum_{g \in G} a_g g$ şeklinde gösterilen ve sonlu sayıda a_g sıfırdan farklı olabilen bütün formal toplamaların kümesi $k[G]$ olsun. $k[G]$ üzerinde toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla,

$\sum_{g \in G} a_g g, \sum_{g \in G} b_g g \in k[G]$ için;

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} b_g g \right) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g \quad \text{ve}$$

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \left(\sum_{h \in G} b_h h \right) = \sum_{g, h \in G} a_g b_h gh$$

şeklinde tanımlanırsa $k[G]$ bir cebir yapılabilir. Bu cebire k üzerinde bir grup cebiri denir.

0.19. TANIM : M bir $k[G]$ -modül ve $\{S_i : i \in I\}$, M nin birbirine izomorf indirgenmez altmodüllerinin bir kümesi olsun. Eğer M , S_i altmodüllerin toplamı olarak yazılabiliyorsa M ye bir homojen $k[G]$ -modül denir.

Tam indirgenir $k[G]$ -modül M nin birbirine izomorf olmayan bütün indirgenmez altmodüllerin temsilcileri $S_1, S_2, \dots, S_n$ olsun. M nin S_i ye izomorf olan bütün altmodüllerinin toplamı M_i olsun. O zaman $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ dir. Buradaki M_i lere M nin homojen bileşenleri denir.

0.20. TANIM : k bir cisim, H bir G grubunun alt-grubu ve V bir sol $k[H]$ -modül olsun.

$$V|G = k[G] \otimes_{k[H]} V$$

tensör çarpımına V den oluşturulmuş modül denir.

0.21. TANIM : k bir cisim, A bir k -cebiri, V indirgenmez bir A -modül olsun. Eğer k nın her L genişlemesi için $V|L$ bir indirgenmez $A|L$ -modül ise V ye mutlak indirgenmez A -modül denir.

Eğer her indirgenmez A -modül V mutlak indirgenmez ise k ya A için bir parçalanma cismi denir.

Eğer k , $k[G]$ - grup cebiri için parçalanma cismi ise k , G grubu üzerinde parçalanma cismidir.

0.22. TANIM : k bir cisim, G bir grup ve V bir $k[G]$ -modül olsun. Eğer $\{V_1, V_2, \dots, V_s\}$, V nin aşikar olmayan altmodülleri ve her $g \in G$ için $gV_i \in \{V_1, \dots, V_s\}$ olmak üzere

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s \quad s > 1$$

ise V ye ilkel olmayan $k[G]$ - modül denir.

$\{V_1, \dots, V_s\}$ kümesine de G nin V üzerinde bir ilkel olmazlık sistemi denir.

Şimdi V indirgenmez $k[G]$ -modül olsun. Eğer H nin, V üzerinde bir ilkel olmazlık sistemi yoksa V ye ilkel $k[G]$ - modül denir.

V ilkel $k[G]$ -modül ise o zaman V oluşturulmuş $k[G]$ -modül olamaz. Mümkünse bir $H < G$ ve $V|_H$ nin bir öz altmodülü U için $U|^G = V$ olsun.

$$G = \bigcup_{i=1}^t g_i H \quad \text{ve} \quad i \neq j \text{ için } g_i H \cap g_j H = \emptyset \text{ olsun.}$$

$$\text{O zaman } U|^G = k[G] \otimes_{k[H]} U = \sum_{i=1}^t g_i \otimes U \text{ dir.}$$

Şimdi $t > 1$ olduğundan $g \otimes U, \dots, g_t \otimes U$, G nin bir ilkel olmazlık sistemini oluşturur. Gerçekten $g \in G$ ise $gg_i = g_j h$, $h \in H$ olduğundan

$$g(g_i \otimes U) = gg_i \otimes U = g_j h \otimes U = g_j \otimes U$$

dir. Fakat V ilkel $k[G]$ -modül olduğundan bu bir çelişkidir.

Tersine olarak eğer V öz oluşturulmuş $k[G]$ -modülü değilse o zaman ilkel $k[G]$ -modüldür. Çünkü V ilkel değilse bir ilkel olamazlık sistemi vardır ve o zaman V öz oluşturulmuş $k[G]$ -modüldür. ([11] Lemma 29.5.) Dolayısıyla yukarıdaki ilkellik tanımı V nin öz oluşturulmuş $k[G]$ -modülü olmasıyla eşdeğerdir. Esasen literatürde ilkellik tanımı ikinci şekilde de verilmektedir [Bak. [17]].

O.23. TANIM : V bir indirgenmez $k[G]$ -modülü olsun. Eğer her $N \triangleleft G$ için $V|_N$ homojen ise V ye bir yarıilkel $k[G]$ -modülü denir.

O.13. Teoremden görüldüğü gibi eğer V ilkel $k[G]$ -modülü ise o zaman V yarıilkeldir. Bunun tersi her zaman doğru değildir. Fakat G çözülebilir ise doğrudur [Bak. [17]].

O.24. TANIM : k bir cisim ve V , k üzerinde bir vektör uzayı olsun. $g: V \times V \rightarrow k$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $v, v_1, v_2 \in V$ ve $c_1, c_2 \in k$ için

$$1) \quad g(c_1 v_1 + c_2 v_2, v) = c_1 g(v_1, v) + c_2 g(v_2, v)$$

$$2) \quad g(v, c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 g(v, v_1) + c_2 g(v, v_2)$$

ise g ye V üzerinde bir bilineer form denir.

Eğer her $u, v \in V$ için

$$g(u, v) = g(v, u)$$

ise g ye simetrik bilinear form denir.

$$\text{Eğer } g(u, v) = -g(v, u)$$

ise g ye Skew-simetrik (alterne) bilinear form denir.

O.25. TANIM : k bir cisim, V , k üzerinde bir vektör uzayı ve g V üzerinde bir bilineer form olsun. Eğer,

$$(1) \quad \forall u, v \in V \text{ için } g(u, v) = -g(v, u)$$

$$(2) \quad \forall u \in V \text{ için } g(u, u) = 0$$

ise g ye V üzerinde bir simplektik bilineer form denir.

Burada eğer $\text{kar}(k) \neq 2$ ise (2) şartı (1) şartının bir sonucudur.

O.26. TANIM : k bir cisim, V k üzerinde bir vektör uzayı ve g , V üzerinde bir bilineer form olsun. Eğer her $0 \neq u \in V$ için $g(u, v) \neq 0$ olacak şekilde bir $v \in V$ varsa g ye singüler olmayan form veya g formu singüler değildir denir.

V nin bir altuzayı W olsun.

$$W^\perp = \{v \in V : g(w, v) = 0, \text{ her } w \in W \text{ için}\}$$

altuzayına W nin V içindeki sıfırlayanı denir. Eğer

$W \cap W^\perp = (0)$ ise W ye singüler olmayan altuzay denir.

Eğer $W \subseteq W^\perp$ ise W ya tam izotropik altuzay denir. Eğer

$W = W^\perp$ ise W ya maksimal izotropik altuzay denir.

Şimdi V , k üzerinde n boyutlu vektör uzayı ve $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, V nin bir k -bazı olsun. Her $1 \leq i, j \leq n$ için $a_{ij} = g(e_i, e_j)$ olmak üzere $[a_{ij}]$ matrisine g formunun B bazına göre matrisi denir. $[a_{ij}]$ matrisinin rankına g nin rankı denir.

O.27. TANIM : k bir cisim, A, k üzerinde bir cebir olsun. V , k üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun.

$$T : A \rightarrow \text{Hom}_K(V, V)$$

bir fonksiyon olsun. Eğer her $a_1, a_2, a \in A$ ve $t \in K$ için

$$(1) \quad T(a_1 + a_2) = T(a_1) + T(a_2)$$

$$(2) \quad T(a_1 a_2) = T(a_1) T(a_2)$$

$$(3) \quad T(ta) = tT(a)$$

$$(4) \quad T(1_A) = I_V$$

ise o zaman T ye A nın V üzerinde bir temsili denir. O zaman her $a \in A$ ve $v \in V$ için

$$a.v = T(a)(v)$$

skaler çarpıma göre V bir sol A -modüldür. Bunun terside doğrudur. Yani V bir A -modülü ise;

$$T : A \rightarrow \text{Hom}_K(V, V), \quad T(a)(v) = av$$

şeklinde tanımlı T , A nın bir temsilini tanımlar. Eğer A -modülü olarak V , indirgenmez ise T temsiline indirgenmez temsil, eğer V tam indirgenir ise T ye tam indirgenir temsil denir.

T_1 ve T_2 , A nın sırasıyla V_1 ve V_2 üzerinde iki temsil olsun. Eğer V_1 ve V_2 A -modül olarak izomorf iseler o zaman T_1 ve T_2 ye eşdeğer temsil denir. Başka bir deyişle, eğer $S : V_1 \rightarrow V_2$ tersinir lineer dönüşümü varsa öyle ki $a \in A, v \in V$ için

$$S(T_1(a)(v)) = T_2(a)(S(v))$$

ise T_1 ve T_2 eşdeğerdir.

0.28. TANIM : G bir grup, K bir cisim, V K üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. $GL(V, K)$, V üzerinde singüler olmayan (tersinir) lineer dönüşümlerin grubu olsun.

$$T : G \rightarrow GL(V, k)$$

bir grup homomorfizması ise T ye G nin V üzerindeki bir temsili denir. Bu G nin bir grup temsilidir.

$$T : k[G] \rightarrow \text{Hom}_k(V, V)$$

homomorfizması

$$T\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) = \sum_{g \in G} a_g T(g)$$

ile tanımlanırsa o zaman T , $k[G]$ nin V üzerinde bir temsili olur. Böylece T temsili V üzerinde $k[G]$ -modül yapısını tanımlar. Tersine olarak;

$$T : k[G] \rightarrow \text{Hom}_k(V, V)$$

homomorfizması $k[G]$ nin V üzerindeki bir temsili ise o zaman

$$T|_G : G \rightarrow GL(V, k)$$

homomorfizması da G nin V üzerindeki temsilidir. Gerçekten eğer $g \in G$ ise o zaman

$$T(g)T(g^{-1}) = T(gg^{-1}) = T(1_k[G]) = I_V$$

dir. Öyle ise $T(g)^{-1}$ vardır. Böylece $T(g) \in GL(V, k)$ dır.

Aynı zamanda her $g_1, g_2 \in G$ için $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$

dir. $T : G \rightarrow GL(V, k)$ G nin bir temsili olsun. Eğer T bir monomorfizma ise T temsiline sadık (faithful) denir.

Eğer her $g \in G$ için $T(g) = I_V$ ise T ye aşıkâr (trivial) temsil denir.

O.1. TEOREM : p bir asal sayı, P bir p -grubu olsun. Eğer P nin bütün karakteristik abelyan altgrupları devirli ise

(i) p tek olmak üzere, P eksponenti p olan bir ekstra-özel p -grubu ile devirli bir p -grubunun merkezi çarpımıdır. Ya da

(ii) $p = 2$ olmak üzere $P = E \times C$, bir ekstra-özel 2-grubu E ile devirli $|C| \geq 16$ olan dihedral veya yarı-dihedral ya da genel kuaterniyon grubu C nin merkezi çarpımıdır.

İSPAT : [10], Teorem 5.4.9.

O.2. TEOREM : P bir p -grubu, $P_0 \triangleleft P$ ve P_0 in P de normal olan her abelyan altgrubu devirli olsun. O zaman

- a) p tek ise P_0 devirlidir.
- b) $p = 2$ ise P_0 devirli ya da P_0 içinde indeksi 2 ve merkezleyeni kendisi olan, P de normal devirli bir C_0 altgrubu vardır.

İSPAT : [4], 3.2.Lemma.

O.3. TEOREM : G karakteristiği p olan bir cisim üzerinde tanımlı bir vektör uzayı üzerinde sadık indirgenmez bir temsile sahipse, o zaman G grubunun aşıkâr olmayan normal p -grupları yoktur.

İSPAT : [10], Teorem 3.1.3.

O.4. TEOREM : G bir grup olsun. Eğer G nin sadık indirgenmez bir temsili varsa, o zaman $Z(G)$ devirlidir.

İSPAT : [10], Teorem 3.2.2.

O.5. LEMMA : P bir p -grubu olsun. Eğer M , P nin bir maksimal normal abelyan altgrubu ise o zaman $C_P(M) = M$ dir.

İSPAT : [10], Lemma 5.3.12.

O.6. TEOREM : (P.Hall) G sonlu bir grup, Π $|G|$ yi bölen asal sayıların kümesi olsun. O zaman G bir Hall Π -altgruba sahiptir.

İSPAT : [11], Teorem 36.3.

O.7. TEOREM : G mertebesi n olan bir abelyan grup ve F birimin n yinci ilkel kökünü içeren bir cisim olsun. O zaman G nin F üzerindeki her indirgenmez temsili lineerdir.

İSPAT : [10], Teorem 3.2.4.

O.8. TEOREM : $m > 3$ bir tamsayı olmak üzere S_m yarıdihedral grup olsun. O zaman S_m nin maksimal altgrupları devirli, genel kuaterniyon ya da dihedraldir.

İSPAT : [10], Teorem 5.4.3.(g)

O.9. TEOREM : p bir asal sayı, P mertebesi p^m olan abelyan olmayan bir p -grubu ve H , P nin mertebesi p^{m-1} olan bir devirli altgrubu olsun.

$$M_m(p) = \langle x, y \mid x^{p^{m-1}} = y^p = 1, x^y = x^{1+p^{m-2}} \rangle$$

verilsin.

(i) p tek ise $P, M_m(p)$ ye izomorftur.

(ii) $p = 2$ ve $m = 3$ ise P ya dihedral ya da kuaterniyon grubuna izomorftur.

(iii) $p = 2$ ve $m > 3$ ise $P, M_m(2), D_m, Q_m$ ya da S_m ye izomorftur. Her bir durumda H, P nin bir maksimal devirli üreticidir.

İSPAT : [10], Teorem 5.4.4.

O.10. TEOREM : (Maschke Teoremi) G sonlu bir grup, k bir cisim ve $\text{kar}(k) \nmid |G|$ olsun. O zaman $k[G]$ grup cebiri bir yarıbasit halkadır.

İSPAT : [11], Teorem 3.1.

O.11. TEOREM : (Schur Lemma) A bir halka, V ve W indirgenmez A -modüller olsunlar. O zaman

(i) $V \not\cong W$ ise $\text{Hom}_A(V, W) = \{0\}$

(ii) $V \cong W$ ise $\text{Hom}_A(V, W)$ bir bölme halkasıdır.

İSPAT : [11], Lemma 2.1.

O.12. TEOREM : A bir yarıbasit halka olsun. O zaman

(1) A nın sonlu sayıda birbirine izomorf olmayan $L_1, L_2, \dots, L_s$ basit sol idealleri vardır.

(2) Eğer A nın L_1 ye izomorf olan bütün basit sol ideallerinin toplamı A_1 ise o zaman $A_1 A$ da iki yanlı idealdir ve bir basit halkadır.

$$(3) \quad A = \bigoplus_{i=1}^s A_i$$

(4) Eğer A_i nin birim elemanı e_i ise o zaman $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_s$ ve $A_i = Ae_i$ dir. Eğer $i \neq j$ ise $A_i A_j = 0$ dir.

İSPAT : [11] , Teorem 2.9.

0.13. TEOREM : (Clifford Teoremi) k herhangi bir cisim, V indirgenmez $k[G]$ -modülü, $N \trianglelefteq G$ olsun. Bu durumda $g \in G$ için W , V nin bir $k[N]$ -altmodülü olmak üzere;

$$gW = \{gw : w \in W\} \subseteq V$$

olarak tanımlanır.

(1) Eğer $w \neq 0$ olmak üzere W , V nin bir $k[N]$ -altmodülü ise o zaman $V = \sum_{g \in G} gW$ dir.

Eğer W indirgenmez ise her gW da indirgenmezdir ve $V|_N$ bir tam indirgenir $k[N]$ -modülüdür.

(2) $W_1, \dots, W_m$ ler V nin indirgenmez $k[N]$ -altmodüllerinin izomorfik sınıflarının temsilcileri olsun. V nin W_i ye izomorf olan bütün $k[N]$ -altmodüllerinin toplamı V_i ile gösterilsin. O zaman $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ dir. (V_i ler V nin homojen bileşenleridir).

(3) Eğer $g \in G$ ise her $gV_i = V_j$ dir. G , $\{V_1, \dots, V_m\}$ üzerinde geçişli (transitive) permütasyon grubudur.

(4) Eğer $H_1 = \{g \in G : gV_1 = V_1\}$ ise V_1 indirgenmez $k[H_1]$ -modülüdür ve $V \cong V_1|_G = k[G] \otimes_{k[H_1]}^{V_1}$ dir.

(5) Bir $e \geq 1$ tamsayısı için $V|_N \cong e(W_1 \oplus \dots \oplus W_m)$
(yani $W_1 \oplus \dots \oplus W_m$ nin e kopyasının direkt toplamıdır).

(6) G nin V ye karşılık gelen karakteri θ ve N nin W_i ye karşılık gelen karakteri χ_i olsun. O zaman en az $g_i \in G$ için $W_i \cong g_i W_1$ ve $\chi_i = \chi_1^{g_i}$ olmak üzere

$$\theta|_N = e(\chi_1 + \dots + \chi_m)$$

dır. Her $x \in N$ için $\chi_i^{g_i}, \chi_i^{g_i}(x) = \chi_1(x^{g_i})$ ile tanımlıdır.

İSPAT : [11] , Teorem 14.1.

0.14. TEOREM : A sonlu boyutlu k -cebiri V bir indirgenmez A -modülü olsun. O zaman V mutlak indirgenmez olması için gerek ve yeter şart $\text{End}_A(V) = k$ olmasıdır.

İSPAT : [11], Teorem 4.2.

0.15. TEOREM : (Wedderburn Teoremi) A bir birimli yarı basit halka olsun. O zaman A_i halkaları $i \neq j$ için $A_i A_j = 0$ özelliğine sahip olmak üzere;

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_r$$

dir. Bundan başka V_i ler birer indirgenmez A -modülü, $D_i = \text{End}_A(V_i)$ olmak üzere $A_i \cong \text{Mat}_{n_i}(D_i^{\text{op}}) \cong \text{End}_{D_i}(V_i)$ dir.

Her indirgenmez A -modülü bir tek V_i ye izomorftur ve $i \neq j$ ise $A_i V_j = \{0\}$, $A_i V_i = V_i$, $\dim_{D_i}(V_i) = n_i$ dir.

İSPAT : [11] , Teorem 2.17.

O.16. TEOREM : (Wedderburn) Her sonlu bölme hal-
kası bir cisimdir.

İSPAT : [11], Teorem 24.9.

O.17. TEOREM : M bir sol $K[G]$ -modül olsun.
 $H \leq G$ ve $\{1 = g_1, \dots, g_n\}$ kümesi H nın G içindeki koset
temsilcilerinin bir tam kümesi olsun. $M|_H$ nın bir alt-
modülü L için

$$M = \bigoplus_{i=1}^n g_i L$$

olsun. O zaman $K[G]$ - modülü olarak $M \cong L^G$ dir.

İSPAT : [12], Lemma 44.1.

O.18. TEOREM : K bir cisim F , K nın bir sonlu bo-
yutlu cisim genişlemesi olsun. O zaman her $u, v \in F$ için

$$(i) \quad \text{Nr}_K(u) \cdot \text{Nr}_K(v) = \text{Nr}_K(uv) \quad \text{ve}$$

$$\text{Tr}_K(u) + \text{Tr}_K(v) = \text{Tr}_K(u + v)$$

$$(ii) \quad \text{Eğer } u \in K \text{ ise } \text{Nr}_K(u) = u^{[F:K]} \text{ ve } \text{Tr}_K(u) = [F:K] \cdot u,$$

(iii) $\text{Nr}_K(u)$ ve $\text{Tr}_K(u)$ K 'nın elemanlarıdır. Daha
genel olarak $\text{Nr}_K(u) = [(-1)^n a_0]^{[F:K(u)]} \in K$ ve

$$\text{Tr}_K(u) = -[F:K(u)] a_{n-1} \in K$$

dır.

Burada $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in K[x]$ polinomu
 u nun indirgenmez polinomudur.

İSPAT : [13], Teorem V.7.3.

O.19. LEMMA : F bir cisim ve E, F nin bir sonlu
normal genişlemesi ve $\bar{F}, F$ nin bir cebirsel kapanışı olmak

üzere $F \leq E \leq \bar{F}$ olsun. $\text{Gal}(E/F) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ olsun. O zaman $\text{Tr}_F: E \rightarrow F$ fonksiyonu E üzerinde singüler olmayan bir simetrik bilinear formdur.

İSPAT : Tanımdan dolayı Tr_F bir bilinear formdur. $u, v \in E$ ise $\text{Tr}_F(uv) = \text{Tr}_F(vu)$ dur. Dolayısıyla Tr_F simetrik bilinear formdur.

Şimdi $u \in E$ ve $u \neq 0$ ise $uE^X = E^X$ olduğundan $\text{Tr}_F(uE^X) = \text{Tr}_F(E^X) \neq 0$ dır. Bundan dolayı Tr_F fonksiyonu singüler değildir [14].

0.20. LEMMA : $f, V/F$ üzerinde bir bilinear form olsun. V sonlu boyutlu ve V nin boyutu n olsun. V nin bir bazı $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. Her $1 \leq i, j \leq n$ için $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ olsun. f nin singüler olmaması için gerek ve yeter şart $[a_{ij}]$ matrisinin tersinir olmasıdır.

Şimdi $u \in V$ olsun. $L_u: V \rightarrow F$ ve $R_u: V \rightarrow F$ fonksiyonları her $v \in V$ için $L_u(v) = f(u, v)$ ve $R_u(v) = f(v, u)$ olarak tanımlansın. O zaman $L_u, R_u \in V^*$ dır. $L: u \rightarrow L_u$, $R: u \rightarrow R_u$ şeklinde tanımlı L, R fonksiyonları V den V^* içine lineer dönüşümlerdir ve $\text{rank}(L) = \text{rank}(R) = \text{rank}(f)$ dir. Özel olarak eğer f singüler değilse L ve R vektör uzaya izomorfizmalarıdır [14].

0.21. LEMMA : F -uzayı E üzerinde bir singüler olmayan bilinear form f olsun. $u \in E$ olsun. O zaman öyle bir $t \in E$ vardır ki her $w \in E$ için,

$$f(u, w) = \text{Tr}_F(tw)$$

dir. Burada $\text{Tr}_F: E \rightarrow F$ iz dönüşümdür.

İSPAT : $L_u: E \rightarrow F$, $L_u(w) = f(u, w)$ şeklinde tanımlı L_u fonksiyonu bir lineer fonksiyoneldir. Böylece $L_u \in E^*$ dır. Benzer şekilde $S_u: E \rightarrow F$, $S_u(w) = \text{Tr}_F(uw)$ şeklinde tanımlı S_u fonksiyonu da bir lineer fonksiyoneldir. Çünkü Tr_F, E üzerinde bir bilineer formdur. Bundan dolayı,

$$S: E \rightarrow E^*, S(u) = S_u$$

şeklinde tanımlı S fonksiyonu bir lineer dönüşümdür ve $\text{rank}(S) = \text{rank}(\text{Tr}_F)$ dir. Fakat Tr_F formu singüler olmadığından $\text{rank}(\text{Tr}_F) = \dim_F E = n$ dir. Böylece $\text{rank}(S) = n$ olduğundan S bir vektör uzay izomorfizmasıdır. Şimdi $L_u \in E^*$ olduğundan bir $t \in E$ için $S(t) = S_t = L_u$ dur. Böylece her $w \in E$ için

$$S_t(w) = \text{Tr}_F(tw) = L_u(w) = f(u, w)$$

dır [15].

0.22. LEMMA : E bir F cisminin sonlu normal genişlemesi ve $\text{Tr}_F: E \rightarrow F$ iz dönüşümü olsun. O zaman

$$\text{Tr}_F(w) = 1_F$$

olacak şekilde bir $w \in E$ vardır.

İSPAT : $\text{Gal}(E/F) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ olsun [13], Tanım V.7.1] den dolayı Tr_F dönüşümü, $z \in E$ için

$$\text{Tr}_F(z) = \sigma_1(z) + \dots + \sigma_n(z)$$

dır. O zaman [13], Lemma 7.5]` den dolayı,

$$0 \neq \sigma_1(z) + \dots + \sigma_n(z) = \text{Tr}_F(z)$$

olacak şekilde bir $z \in F$ vardır.

$\text{Tr}_F(z) \in F$ olduğundan $1 \leq i \leq n$ için

$\sigma_i(\text{Tr}_F(z)^{-1}z) = \text{Tr}_F(z)^{-1}\sigma_i(z)$ dir. Şimdi $w = \text{Tr}_F(z)^{-1}z$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\text{Tr}_F(w) &= \text{Tr}_F(\text{Tr}_F(z)^{-1}z) \\ &= \sigma_1(\text{Tr}_F(z)^{-1}z) + \dots + \sigma_n(\text{Tr}_F(z)^{-1}z) \\ &= \text{Tr}_F(z)^{-1}(\sigma_1(z) + \dots + \sigma_n(z)) \\ &= \text{Tr}_F(z)^{-1}\text{Tr}_F(z) = 1_F\end{aligned}$$

dir [13].

0.23. LEMMA : $F = \text{GF}(p^m)$ p^m elemanlı sonlu bir cisim ve $E = \text{GF}(p^{mn})$, F nin bir sonlu normal genişlemesi olsun. O zaman $\text{Nr}_F: E \rightarrow F$ ve $\text{Tr}_F: E \rightarrow F$ dönüşümleri örtendir.

İSPAT : E, F nin sonlu boyutlu bir genişlemesi olduğundan [[13], önerme 5.10] dan dolayı $\text{Gal}(E/F)$ Galois grubu mertebesi n olan devirli bir gruptur.

Şimdi σ , $\text{Gal}(E/F)$ nin bir üretici olsun. O zaman [[13], Lemma 5.5] den dolayı $\sigma: x \rightarrow x^{p^m}$ şeklinde tanımlı otomorfizmadır. 0.22.Lemma'dan dolayı $\text{Tr}_F(w) = 1_F$ olacak şekilde bir $w \in E$ vardır. Fakat σ nin sabit cismi F olduğundan her $u \in F$ için, $uw \in E$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned}\text{Tr}_F(uw) &= \sigma(uw) + \sigma^2(uw) + \dots + \sigma^{n-1}(uw) + uw \\ &= u(\sigma(w) + \sigma^2(w) + \dots + \sigma^{n-1}(w) + w) \\ &= u\text{Tr}_F(w) = u \cdot 1_F = u\end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı Tr_F örtendir.

Şimdi $\text{Nr}_F: E^X \rightarrow F^X$ dönüşümünün örten olduğunu gösterelim.

$$|E^x| = p^{mn} - 1 = (p^m - 1)(p^{m(n-1)} + \dots + p^m + 1)$$

dir. Aynı zamanda [13], Teorem 5.3 den dolayı E^x ve F^x devirlidir. Şimdi $E^x = \langle x \rangle$ ve $F^x = \langle k \rangle$ olsun. O zaman $o(x) = p^{mn} - 1$ ve $o(k) = p^m - 1$ dir.

$$\begin{aligned} \text{Nr}_F(x^{p^m}) &= x^{p^m} \sigma(x^{p^m}) \dots \sigma^{n-1}(x^{p^m}) \\ &= x^{p^m} \cdot x^{p^{2m}} \dots x^{p^{nm}} \\ &= x^{p^m(1 + p^m + \dots + p^{(n-1)m})} \end{aligned}$$

dir. Fakat,

$$\begin{aligned} o(x^{p^m(1 + p^m + \dots + p^{(n-1)m})}) &= \frac{(p^{mn} - 1)}{((p^{mn} - 1), p^m(1 + p^m + \dots + p^{(n-1)m}))} \\ &= \frac{p^{mn} - 1}{1 + p^m + \dots + p^{(n-1)m}} = p^m - 1 \end{aligned}$$

dir. Böylece $F^x = \langle x^{p^m(1 + p^m + \dots + p^{(n-1)m})} \rangle$ dir.

Bundan dolayı Nr_F ördendir.

0.24. TEOREM : A bir sol artınyan (artnıan) halka olsun. A'nın yarıbasit halka olması için gerek ve yeter şart $\text{rad}(A) = 0$ olmasıdır.

İSPAT : [16], Teorem 5.18.

BÖLÜM I

GRUP TEORİK İNCELEMELER

Bütün gruplar çözülebilirdir. Notasyonlarımız standarttır. Bir K cisminin toplamsal grubunu K^+ ve çarpımsal grubunu $K^\times$ ile göstereceğiz.

1.1. LEMMA : Kabul edelim ki $G = AN$ bir grup, N, G nin bir normal devirli altgrubu; A, N nin nilpotent bütünleyicisi ve $A \cap N = 1$ olsun. G nin her normal abelyan altgrubu devirli ise o zaman G grubu, $C_G(M) = M \geq N$ olan bir devirli M altgrubu içerir.

Bundan başka;

$$(a) \quad C_G(N) = (A \cap C_G(N)) \times N$$

$$(b) \quad (|A \cap C_G(N)|, |N|) = 1$$

(c) $M = C_G(N)$ ya da $[C_G(N):M] = 2$ ve $C_G(N)$ nin bir S_2 -altgrubu kuaterniyon, dihedral ya da yarıdihedraldir.

Burada kuaterniyon grubu mertebesi 8 olan kuaterniyon veya genel kuaterniyon grubudur.

İSPAT : G nin N yi içeren normal abelyan altgrupları içinde M maksimal altgrubunu seçelim. $M \triangleleft G$ olduğundan hipotezden dolayı M devirlidir. $M \geq N$ ve A nilpotent olduğundan G/M nilpotenttir.

Kabul edelim ki $C_G(M) > M$ olsun. D/M asal mertebe-

den ve $D/M \leq (C_G(M)/M) \cap Z(G/M)$ olsun. O zaman $D \trianglelefteq G$, $D > M$ ve D abelyandır. Fakat bu M nin maksimal olmasıyla çelişir. Böylece $C_G(M) = M$ elde edilir. $C = C_G(N)$ olsun. N abelyan ve $AN = G$ olduğundan $C = (A \cap C)N$ dir. Bundan başka $A \cap C \leq C_G(N)$ olduğundan, $A \cap C$, N yi merkezler ve $A \cap C \cap N \leq A \cap N = 1$ dir. Bundan dolayı

$$C = (A \cap C) \times N$$

dir. Böylece (a) nın ispatı tamamdır. $Z(A \cap C) \trianglelefteq G$ ve $N \trianglelefteq G$ olduğundan $Z(A \cap C)N \trianglelefteq G$ dir. Ayrıca $Z(A \cap C)N$ abelyan olduğundan, hipotezden dolayı devirlidir. O zaman $(|Z(A \cap C)|, |N|) = 1$ dir. Ayrıca A nilpotent olduğundan, $C \cap A \leq A$ da nilpotenttir. Bundan dolayı $|A \cap C|$ yi bölen asal sayılar $|Z(A \cap C)|$ yi de böler. Fakat $(|Z(A \cap C)|, |N|) = 1$ olduğundan $(|A \cap C|, |N|) = 1$ dir.

Şimdi kabul edelim ki $C > M$ olsun. P_0, C nin abelyan olmayan S_p -altgrubu öyleki $P_0 \leq A \cap C$ olsun. P de P_0 'ı içeren A nın S_p -altgrubu olsun. O zaman P, G nin bir S_p -altgrubudur. B, P_0 ın P de normal olan herhangi bir abelyan altgrubu olsun. N ile A nın p' -kısımı P_0 ı merkezlediğinden ve $B \trianglelefteq P$ olduğundan $B \trianglelefteq G$ dir. O zaman hipotezden B devirlidir. P_0 abelyan olmadığından O.2. Lemmadan dolayı $p = 2$ ve P_0, P de normal ve P_0 içinde indeksi 2 olan ve $C_p(C_0) = C_0$ olan devirli bir C_0 altgrubunu içerir. O zaman $C_0 \trianglelefteq P$ ve $P \leq A$ olduğundan $C_0 \trianglelefteq A$ dir. Ayrıca C_0, N yi merkezler. O halde $C_0 \trianglelefteq G$ dir. (a) dan dolayı C nilpotent olduğundan

$$C = P_0 \times O_2(C)$$

dir. Yukarıda görüldüğü gibi $O_2(C)$ abelyandır. Şimdi

$M_0 = C_0 \times O_2, (C)$ olsun. O zaman $[C: M_0] = 2$ ve $M_0 \triangleleft G$ dir. Aynı zamanda $C_G(M_0) \leq C_G(N) = C$ dir. Buradan $C_G(M_0) = C_C(M_0) = M_0$ dır. Böylece M_0, G nin N yi içeren bir normal maksimal abelyan altgrubudur. Eğer $M \neq M_0$ ise $[C: M_0] = 2$ olduğundan $MM_0 = C$ dir. Her iki halde $|M| = |M_0|$ dir. Bunun için $MM_0 = C$ haline bakmak yeter.

$M \neq M_0$ olduğundan öyle bir $c \in P_0 \setminus M_0$ vardır ki $c \in M$ dir. Aynı zamanda $P_0 = M_0 \langle c \rangle$ dir. P_0 abelyan olmadığından c, M_0 üzerinde mertebesi 2 olan bir otomorfizma tanımlar. O zaman $M_0 = \langle t \rangle$ olmak üzere $P_0' = \langle t^2 \rangle = [M_0, c]$ olduğu açıktır. $c \in M \triangleleft G$ olduğundan $t^2 \in M$ dir. Böylece $\langle t^2 \rangle \langle c \rangle \leq M$ dir. Aşıkarak $[P_0: \langle t^2 \rangle \langle c \rangle] = 2$ dir. Ayrıca $O_2, (C) \leq M$ dir. $[C: M] = 2$ ve $|M| = |M_0|$ dir. $p = 2$ için, P_0 in her karakteristik altgrubu G de normal olduğundan hipotezden dolayı devirli dir. Ayrıca P_0 , indeksi 2 olan devirli bir $M \cap P_0$ altgrubuna sahiptir. O.1. Teorem (ii) den dolayı $P_0 = E \times D$, bir ekstra özel 2-grubu E ile devirli veya $|D| \geq 16$ olan dihedral veya yarıdihedral ya da kuaterniyon altgrubu D nin merkezi çarpımıdır.

Mümkünse $E \neq 1$ olsun. Önce D devirli olsun. O zaman $D \leq C_G(M_0) \leq M_0$ olduğundan $D \leq M_0$ dır. Eğer $|D| \leq 2$ ise $D \leq E$ olduğundan $M_0 \leq E = P_0$ dir. O zaman $|M_0| = 4$ ve $[E: M_0] = 2$ olduğundan $|E| = 8$ ve böylece E kuaterniyon veya dihedraldir.

Şimdi $|D| \geq 4$ olsun. O zaman $D \leq M_0$ ve $\text{Exp}(M_0) = \text{Exp}(D)$ olduğundan $D = M_0$ olmalıdır. Fakat o zaman $E \leq M_0$ olur.

Bu bir çelişkidir.

Şimdi D devirli olmasın. O zaman $[D:D \cap M_0] = 2$ dir. Aynı zamanda $\exp(E) = 4 \leq \exp(D)$ olduğundan $\exp(M_0) = \exp(D \cap M_0)$ dır. O zaman $D \cap M_0 = M_0 \leq D$ dır. Fakat şimdi $E \leq M_0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu durumda $E = 1$ ve $P_0 = D$ dir. Böylece ispat tamamdır.

Şimdi gelecek sonuçlar için bazı notasyonları belirleyim. $\bar{k} \geq \hat{k} \geq k$, k nin sonlu genişlemesi $\text{Gal}(\bar{k} / \hat{k}) = \text{Aut}(\bar{k} / \hat{k})$ $\hat{k}$ üzerinde $\bar{k}$ nin Galois grubu olsun. $T = T(\bar{k} / \hat{k})\bar{k}^x$, $\bar{k}$ nin çarpımsal grubu $\bar{k}^x$ olmak üzere, $\bar{k}^x$ ile $\text{Gal}(\bar{k} / \hat{k})$ nin yarıdirekt çarpım grubu olsun. $\bar{k}$ ve $\hat{k}$ bilindiğinde daha basit olarak T ile gösterilir.

Şimdi $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k} / \hat{k})$, $x \in \bar{k}^x$ olmak üzere $\sigma x \in T(\bar{k}/\hat{k})$ elemanının $\bar{k}^+$ üzerine etkisi; $v \in \bar{k}^+$ için $\sigma x.v = \sigma(xv)$ olarak tanımlansın. Bu çarpmaya göre $\bar{k}^+$ sadık indirgenmez sol T -modülüdür. Bu bölümde G nin T nin bir altgrubu ile ve V nin $\bar{k}^+$ ile özdeş kılınabileceğini göstereceğiz. Daha sonra G nin T nin altgrubu olarak sağlama-sı gereken bir kaç şartı araştıracağız.

1.2. LEMMA : Kabul edelim ki G bir grup, $M \triangleleft G$, M devirli ve $C_G(M) = M$ olsun. k sonlu bir cisim, V sadık indirgenmez $k[G]$ -modül ve $V|_M$ homojen olsun. $\bar{k}$, k ya 1 in bir $|M|$ inci ilkel kökünün katılmasıyla elde edilen cisim olsun. O zaman $\bar{k}$ nin öyle bir $\hat{k}$ altcismi ve öyle

$$\varphi : G \rightarrow T(\bar{k}/\hat{k})$$

$$\Phi: V \rightarrow \bar{k}^+ \quad (\text{izomorfizma})$$

monomorfizmaları vardır ki

- (a) $\varphi(x)\Phi(v) = \Phi(xv), x \in G, v \in V$
- (b) $\varphi(x) = w, M = \langle x \rangle$ ise $k(w) = \bar{k}$
- (c) $\varphi(G)\bar{k}^x = T(\bar{k}/\hat{k}),$ ve
- (d) $\varphi(G) \cap \bar{k}^x = \varphi(M)$

dir.

İSPAT : $A = k[G]/J(k[G])$ olsun. 0.24. Teoremden dolayı A yarıbasittir. $J(k[G])V = \{0\}$ olduğundan V bir A -modüldür. $V, k[G]$ -modülü olarak indirgenmez olduğundan A -modülü olarak da indirgenmezdir. Schur Lemma'dan dolayı $F = \text{Hom}_A(V, V)$ bir bölme halkasıdır. Şimdi A yarıbasit olduğundan 0.12 Teorem'den dolayı halka olarak

$$A = \bigoplus_{i=1}^r A_i$$

yazılabilir. Burada her A_i bir (iki yanlı) idealdir ve $i \neq j$ için $A_i A_j = \{0\}$ dir. Ayrıca her $1 \leq i \leq r$ için öyle bir ilkel merkez idempotenti e_i vardır ki [Bak, [11]].

$$A_i = e_i A e_i = A e_i$$

dir. Öte yandan bir $1 \leq j \leq r$ için $A_j V \neq \{0\}$ dir. Fakat her $i \neq j$ için $A_i V = \{0\}$ dir. Böylece 0.15. Teorem'den dolayı

$$A e_j = A_j \cong \text{Hom}_F(V, V) \cong \text{Mat}(n_j, F^{\text{op}})$$

dir. k sonlu olduğundan F sonludur ve F bir bölme halkası olduğundan 0.16. Teorem'den dolayı F bir cisimdir. Yani k nin sonlu cisim genişlemesidir. Böylece

$A_e \cong \text{Mat}(m, F)$ dir. Burada $e = e_j$ ve $m = n_j$ dir. Buradan $F \cong Z(A_e)$ elde edilir. Böylece F yi $Z(A_e)$ ile özdeş kılabiliriz. Şimdi

$$\text{Hom}_{A_e}(V, V) = \text{Hom}_A(V, V) \cong F$$

olduğundan 0.14 Teorem'den dolayı F -uzayı olarak V , mutlak indirgenmez A_e -modülüdür. Fakat F nin hiç bir özalt cismi için V , mutlak indirgenmez değildir. V üzerinde G için herhangi bir parçalanma cismi K olsun. Şimdi 0.14. Teorem'den dolayı

$$\text{Hom}_{(eA)^K}(V^K, V^K) \cong K$$

olduğundan $Z(A_e) \tilde{\subset} K$ dir. Buradan $F \tilde{\subset} K$ bulunur[[4], 3.4. Lemma] dan dolayı $\bar{k}$, G için parçalanma cismi olduğundan $F \tilde{\subset} \bar{k}$ dir. $\bar{k}$ nin $\hat{k}$ altcismi $\hat{k} \cong F$ olarak tanımlansın. Böylece

$$(1) \quad \bar{k} \supseteq \hat{k} \cong F \quad \text{dir.}$$

$[eA:F] = m^2$ olsun. O zaman $\dim_F V = m$ ve buradan $\dim_{\bar{k}} V = (\dim_{\hat{k}} \bar{k})(\dim_{\hat{k}} V) = [\hat{k}:k] \cdot m$ dir. Ayrıca[[4], 3.4. Lemma] dan dolayı $[G:M] = m$ dir. Böylece

$$(2) \quad \dim_k V = m[\hat{k}:k], \quad m = [G:M]$$

elde edilir.

Şimdi $k[M]$ nin eA içindeki görüntüsü B olsun. $k[M]$ abelyan olduğundan B abelyandır. Öte yandan eA basit halka ve her basit sol ideali ($\neq 0$) V ye izomorftur. Ayrıca hipotezden dolayı $V|_M$ homojen olduğundan $A|_M$ homojendir. Özel olarak $B|_M$ homojendir. Yani, B , izomorf indirgenmez $k[M]$ -modüllerin direkt toplamıdır.

Fakat $k[M]$ yarıbasit halka olduğundan B halkası $k[M]$ nin basit bileşenine izomorftur. Yani B basit halkadır. O zaman Ae nin durumunda olduğu gibi $B = Z(B)$, k nın bir genişleme cisimidir.

Eğer $M = \langle y \rangle$ ise ve y nin eA içindeki görüntüsü $\bar{y}$ ise $k[M] = k[\langle y \rangle]$ nin eA içindeki görüntüsünün $k[\langle \bar{y} \rangle]$ olduğu açıktır. $B = k[\langle \bar{y} \rangle]$ cisim olduğundan ve $o(\bar{y}) = o(y) = |M|$ olduğundan B , k ya 1 in $|M|$ yinci ilkel kökünün katılmasıyla elde edilen cisim genişlemesidir.

Böylece $\bar{k}$ nin tanımından dolayı $B = \bar{k}$ dir. Şimdi $V|_M$, t -tane indirgenmez altmodülün direkt toplamı olsun. O zaman $\dim_B V = t$ dir. Buradan

$$(3) \quad \dim_k V = t[B:k] = t[\bar{k}:k]$$

elde edilir.

Şimdi $x \in G$ nin eA içindeki görüntüsü $\bar{x}$ olsun. $\psi_x : eA \rightarrow eA$, $\psi_x(y) = \bar{x}y\bar{x}^{-1}$ olarak tanımlansın. ψ_x , eA nın bir otomorfizmasıdır. Aynı zamanda $M \triangleleft G$ olduğundan ψ_x , B cisminin bir otomorfizmasıdır. Şimdi $x \mapsto \psi_x|_B$ eşlemesi G den $\text{Aut}(B)$ içine bir grup homomorfizmasıdır. G nin görüntüsü G_1 olsun. Bu homomorfizmanın çekirdeği $C_G(M) = M$ olduğundan $G/M \cong G_1 \subseteq \text{Aut}(B)$ dir. O zaman (2) den dolayı $|G_1| = m$ dir. Öte yandan $\bar{k}$ bir sonlu cisim olduğundan $\text{Aut}(B) = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ grubu devirlidir. O nedenle öyle bir $x \in G$ vardır ki $G_1 = \langle \psi_x \rangle$ dir. Burada $\psi_x = \psi_x|_B$ alınmıştır. $o(\psi_x) = m$ olduğundan $x^m \in M$ dir. O zaman $\bar{x}^m \in B$ dir. Bundan başka $\langle x, M \rangle = G$ olduğundan

ψ_x ile B birlikte eA basit cebirini üretir. Esasen $G_1 = \langle \psi_x \rangle$ olduğundan $G = \langle x, M \rangle = \langle x \rangle M$ dir. Böylece $G = \bigcup_{i=0}^{m-1} Mx^i$ yazılabilir.

$$\text{Buradan } k[G] = \bigcup_{i=0}^{m-1} k[M]x^i \text{ olduğundan } eA = \bigcup_{i=0}^{m-1} B\bar{x}^i$$

yazılabilir. $\bar{x}$, x in eA içindeki görüntüsüdür. ψ_x in B içindeki merkezleyeni (sabit cismi) R olsun. O zaman B abelyan olduğundan R, B ve $\bar{x}$ tarafından merkezlenir.

Buradan $R \subseteq Z(eA)$ bulunur. Şimdi $z \in Z(eA)$ olsun. O zaman $z = b\bar{x}^i$ olacak şekilde $b \in B$ ve $0 \leq i < m$ vardır.

O zaman her $b' \in B$ için $b'\bar{x}^i = \bar{x}^i b'$ olduğundan $\bar{x}^i$ B nin elemanlarıyla değişmelidir. Özel olarak $\bar{x}^i \bar{y} = \bar{y} \bar{x}^i$ dir.

Buradan,

$$y^{-1} \bar{x}^i y x^i \in k[M] \cap J(k[G]) = \{0\}$$

elde edilir. Çünkü $k[M]$ yarıbasit olduğundan $J(k[M]) = \{0\}$

ve $J(k[G]) \cap k[M] \subseteq J(k[M]) = \{0\}$ dir. Dolayısıyla

$x^i \in C_G(M) = M$ dir. Yani $x^i \in M$ dir. O zaman $z = x^i b \in B$

dir. Buradan $z(eA) \subseteq B$ olduğundan $z(eA) \subseteq R$ dir. Böylece

$z(eA) = R$ elde edilir. Dolayısıyla $R = F$ dir. Öte

yandan B, k nın bir normal cisim genişlemesi olduğun-

dan $|\langle \psi_x \rangle| = [B:F] = m$ dir. Böylece,

$$(4) \quad [G:M] = [B:F] = [\bar{k}:\hat{k}]$$

elde edilir.

Şimdi (2), (3) ve (4) den dolayı

$$t[\bar{k}:k] = m[\hat{k}:k] = [\bar{k}:\hat{k}][\hat{k}:k] = [\bar{k}:k]$$

oldüğundan

$$(5) \quad t = 1$$

elde edilir. (5) den dolayı $\dim_{\mathbb{P}} V = 1$ olduğundan V bir

indirgenmez B-modülüdür. Eğer $0 \neq v \in V$ ise $V = Bv$ yazılabilir.

Şimdi $\Phi: V \rightarrow \bar{k}^+$ ve $\varphi: G \rightarrow T(\bar{k}/\hat{k})$ dönüşümleri şöyle tanımlansınlar : $b, b_2 \in B, v \in V, x \in G$ için

$$\Phi(bv) = b, \varphi(x) = \psi_x b_2 \text{ ve } \psi_x(b)v = xv$$

şeklinde tanımlıdır.

$$(a) \quad \varphi(x)\Phi(v) = \varphi(x).1 = \varphi(x)$$

$$\Phi(xv) = \Phi(\psi_x(b)v) = \psi_x(b) = \varphi(x)$$

olduğundan (a) sağlanır.

(b) $M = \langle y \rangle$ olsun. V bir sadık $k[M]$ -modülü olduğundan y nin B içindeki görüntüsü w ise yani $yv = wv$ ise o zaman $o(y) = o(w)$ olur. Bundan dolayı $w, 1$ 'in bir $|M|$ yinci ilkel köküdür. Böylece $B = k(w)$ olur.

(c) $\varphi(x) = \psi_x b_2 \in \text{Gal}(\bar{k}/\hat{k})\bar{k}^x$ olduğundan $\psi_x \in \varphi(G)\bar{k}^x$ dır.

Ayrıca $\langle \psi_x \rangle = G_1 = \text{Gal}(\bar{k}/\hat{k})$ olduğundan

$$\varphi(G)\bar{k}^x = \text{Gal}(\bar{k}/\hat{k})\bar{k}^x = T(\bar{k}/\hat{k})$$

dır.

(d) $a \in \varphi(G) \cap \bar{k}^x$ olsun. O zaman $a = \varphi(x)$ olacak şekilde $x \in G$ vardır. Eğer $xv = \psi_x(b_2)v$ ise $\varphi(x) = \psi_x b_2$ dir. Buradan $a = \psi_x b_2$ bulunur. Böylece $\psi_x b_2 \in \bar{k}^x$ dır. Fakat $\psi_x \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ ve $\text{Gal}(\bar{k}/k) \cap \bar{k} = I$ olduğundan $\psi_x = I$ dır. Buradan $x \in C_G(M) = M$ bulunur. Bundan dolayı

$$a = b_2 \in \varphi(G) \cap B = \varphi(M) \text{ dir.}$$

Tanımdan dolayı $\varphi: G \rightarrow B$ bir k -izomorfizması ve $B \cong \bar{k}$ olduğundan $\bar{V} \cong \bar{k}^+$ dır. Bundan dolayı $V = \bar{k}^+$ alabiliriz.

Şimdi $x, y \in G$ olsun $xv = \psi_x(b_2)v$ ve $yv = \psi_y(b'_2)v$ olsun. O zaman $\varphi(x) = \psi_x b_2$ ve $\varphi(y) = \psi_y b'_2$ dır.

$$\begin{aligned}\varphi(x)\varphi(y) &= \psi_x b_2 \psi_y b'_2 = \psi_x \psi_y \psi_y^{-1}(b_2) b'_2 = \psi_{xy} \psi_y^{-1}(b_2) b'_2 \\ (xy)v &= x(yv) = x(\psi_y(b'_2)v) = \psi_x(\psi_y(b'_2)\psi_x(b_2))v \\ &= \psi_x \psi_y(b'_2 \psi_y^{-1}(b_2))v = \psi_{xy}(b'_2 \psi_y^{-1}(b_2))v\end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı

$$\varphi(xy) = \psi_{xy} b'_2 \psi_y^{-1}(b_2)$$

ve böylece $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ dir.

Şimdi $G \cong \varphi(G)$ olduğundan G yi $\varphi(G)$ ile özdeş kılarsak $G = \varphi(G)$ alabiliriz. O zaman $G \leq \mathbf{T}(\bar{k}/\hat{k})$ ve $G \cap \bar{k}^X = M$ dir.

1.3. LEMMA : Kabul edelim ki 1.2.Lemma sağlansın. $\gamma \in \bar{k}^X$ olsun

$\theta: \mathbf{T}(\bar{k}/\hat{k}) \rightarrow \mathbf{T}(\bar{k}/k)$ ve $\Theta: \bar{k}^+ \rightarrow \bar{k}^+$ dönüşümleri;

$$(i) \quad \sigma \in G = \text{Gal}(\bar{k}/\hat{k}), x \in \bar{k}^X \text{ için } \theta(\sigma x) = \sigma x \gamma^\sigma \gamma^{-1};$$

$$(ii) \quad v \in \bar{k}^+ \text{ için } \Theta(v) = v\gamma$$

şeklinde tanımlansın. O zaman θ bir monomorfizma ve Θ dönüşümü de bir izomorfizmadır. Bundan başka $\varphi' = \theta\varphi$ ve $\Phi' = \Theta\Phi$ dönüşümleri (1.2). Lemmanın (a)-(d) şartlarını sağlar.

İSPAT : Önce θ nın monomorfizma olduğunu göstere-
lim. Her $\sigma_1, \sigma_2 \in G$, $x_1, x_2 \in \bar{k}^X$ için $\sigma_1 x_1 = \sigma_2 x_2$ olsun. O zaman $\mathbf{T}(\bar{k}/\hat{k})$ yarıdirekt çarpım grubu olduğundan $\sigma_1 = \sigma_2$

ve $x_1 = x_2$ dir. Böylece $\theta(\sigma_1 x_1) = \theta(\sigma_2 x_2)$ dir. Θ halde θ iyi tanımlıdır. Her $\sigma_1 x_1, \sigma_2 x_2 \in \mathbf{T}(\bar{k}/\hat{k})$ için,

$$\begin{aligned}\theta(\sigma_1 x_1) \theta(\sigma_2 x_2) &= [\sigma_1 x_1 \gamma^{\sigma_1} \gamma^{-1}] [\sigma_2 x_2 \gamma^{\sigma_2} \gamma^{-1}] \\ &= \sigma_1 \sigma_2 (x_1 \gamma^{\sigma_1} \gamma^{-1})^{\sigma_2} x_2 \gamma^{\sigma_2} \gamma^{-1} \\ &= \sigma_1 \sigma_2 x_1^{\sigma_2} x_2 \gamma^{\sigma_1 \sigma_2} \gamma^{-1} \\ &= \theta(\sigma_1 \sigma_2 x_1^{\sigma_2} x_2) = \theta((\sigma_1 x_1)(\sigma_2 x_2))\end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı θ bir grup homomorfizmasıdır.

$\theta(\sigma_1 x_1) = \theta(\sigma_2 x_2)$ olsun. O zaman θ nın tanımından dolayı $\sigma_1 x_1 \gamma^{\sigma_1} \gamma^{-1} = \sigma_2 x_2 \gamma^{\sigma_2} \gamma^{-1}$ dir. Böylece $\sigma_1 x_1 = \sigma_2 x_2$ dir. O halde θ dönüşümü monomorfizmadır.

Θ nın izomorfizma olduğu benzer şekilde gösterilir. $\sigma \in G$, $x \in \bar{k}^x$ ve $v \in \bar{k}^+$ olsun.

$$\begin{aligned}\theta(\sigma x) \cdot \theta(v) &= [\sigma x \gamma^{\sigma} \gamma^{-1}] \cdot [v \gamma] = \sigma(x \gamma^{\sigma} v \gamma^{-1} \gamma) = \sigma(x \gamma^{\sigma} v) \\ &= \sigma(xv) \sigma(\gamma^{\sigma}) = \sigma(xv) \sigma(\sigma^{-1} \gamma \sigma) \\ &= \sigma(xv) \sigma(\sigma^{-1}(\gamma)) = \sigma(xv) \gamma = \theta(\sigma x \cdot v)\end{aligned}$$

dir. $\varphi: G \rightarrow \mathbf{T}(\bar{k}/\hat{k})$ ve $\Phi: V \rightarrow \bar{k}^+$ dönüşümleri 1.2.Lemmadaki gibi olmak üzere, $\varphi' = \theta \varphi: G \rightarrow \mathbf{T}(\bar{k}/k)$, $\Phi' = \theta \Phi: V \rightarrow \bar{k}^+$ dönüşümleri monomorfizmalardır ve (a) şartını sağlar.

Eğer $M = \langle x \rangle$ ve $\varphi'(x) = w'$ ise $k(w') = \bar{k}$ dir. Şimdi bunu gösterelim. $M = \langle x \rangle$ ve $\varphi'(x) = \theta(\varphi(x)) = w'$ olsun. O zaman $\varphi(x) = w$ olacak şekilde $w \in \mathbf{T}(\bar{k}/\hat{k})$ vardır. Fakat 1.2. Lemma (b) den dolayı $k(w) = \bar{k}$ ve $w, 1$ 'in $|M|$. ilkel köküdür. θ izomorfizma olduğundan $\theta(w) = w'$ elemanı da 1 in $|M|$. ilkel köküdür. O halde $k(w') = \bar{k}$ dir. Böylece (b) sağlanır.

1.2. Lemma'dan dolayı $\varphi(G)\bar{k}^X = \mathbb{T}(\bar{k}/\hat{k})$ ve θ izomorfizma olduğundan;

$$\begin{aligned}\theta(\varphi(G)\bar{k}^X) &= \theta(\varphi(G))\theta(\bar{k}^X) = \theta(\varphi(G))\bar{k}^X \\ &= \varphi'(G)\bar{k}^X = \mathbb{T}(\bar{k}/k) \text{ dır.}\end{aligned}$$

Çünkü θ nın tanımından dolayı, $\theta, \bar{k}^X$ üzerine aşikar etki eder. Bundan dolayı (c) sağlanır.

$a \in \varphi'(G) \cap \bar{k}^X$ olsun. O zaman $a = \varphi'(y) = \theta(\varphi(y)) \in \bar{k}^X$ olacak şekilde bir $y \in G$ vardır. Fakat $\theta, \bar{k}^X$ üzerine aşikar etki ettiğinden $\varphi(y) \in \varphi(G) \cap \bar{k}^X$ dır.

Ayrıca 1.2. Lemma (d) den dolayı $\varphi(G) \cap \bar{k}^X = \varphi(M)$ olduğundan $\varphi'(G) \cap \bar{k}^X = \varphi'(M)$ dir. O halde (d) şartı sağlanır. Böylece ispat tamamdır.

BÖLÜM 2

BAZI ÖRNEKLER

Bu kısımda bazı gruplar ve bu grupların etkilerine ait bazı örnekleri inceleyeceğiz. Bu gruplar ve etkileri, bundan sonraki teoremlerin kritik durumlarıdır. Bütün bunlar içinde dört tane etki vardır. Herbiri bir sayı ile indekslenmiştir. Bu çalışmamızın daha sonraki kısımlarında ortaya çıkan haller bu numaralarla indekslenecektir.

Şimdi aşağıdaki notasyonları sabitleştirelim.

r bir asalsayı, $m > 0$ bir tamsayı, $K = GF(r)$, $\tilde{K} = GF(r^m)$ ve $\hat{K} = GF(r^{2m})$ olsun. Bilindiği gibi bu durumda $\hat{K}$, $\tilde{K}$ nin derecesi 2 olan bir normal genişlemesi ve $x \rightarrow x^{r^m}$ eşlemesi $\hat{K}$ nin mertebesi 2 olan bir otomorfizmasıdır.

Her bir durumda B ve C altgruplarına sahip bir G grubu, bir $K[G]$ -modülü V , V üzerinde G grubu tarafından invariant kalan bir singüler olmayan simplektik bilinear g formunu tarif edeceğiz.

2.1. ÖRNEK : G , $(r^m + 1)$ mertebeli devirli bir gruptur. $V = \hat{K}^+$ ve $\varphi: \epsilon \rightarrow \epsilon^{r^m}$ eşlemesi $\hat{K}$ nin mertebesi 2 olan otomorfizması olsun. G , $\hat{K}^x$ nin mertebesi $(r^m + 1)$ olan çarpımsal altgrubu olsun. O zaman G abelian ve devirli olduğundan nilpotenttir.

Ayrıca G , V üzerinde çarpma gibi etki eder. $\text{Tr}: \tilde{K} \rightarrow K$ iz dönüşümü olsun. $\varphi(\mu) = -\mu$ olacak şekilde bir $\mu \in \hat{K}^X$ seçelim. Eğer $r = 2$ ise $\mu = 1$ olsun. $u, v \in V$ için g formunu,

$$g(u, v) = \text{Tr}(\mu(uv^\varphi - u^\varphi v))$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman g , V üzerinde bir singüler olmayan simplektik bilineer formdur. Çünkü $g(u, v) = -g(v, u)$ ve Tr dönüşümü singüler değildir. $G = B$ ve $C = 1$ olarak tanımlayalım.

$$\underline{2.2. \text{ ÖRNEK : } r^m \equiv -1 \pmod{4}, |G| = 2(r^m + 1),}$$

$r > 2$ dir. 2.1. Örnek'teki g formunu ve V vektör uzayını gözönüne alalım. Q , 2.1. Örnekteki G grubunun 2-sylow altgrubu ve C , 2.1. Örnekteki G grubu içinde Q nun Hall-bütünleri yani $C = O_2(G)$ olsun.

Şimdi $\nu^{r^m+1} = -1$ olacak şekilde $\nu \in \hat{K}^X$ seçelim. O zaman $o(\nu) = 2(r^m + 1)$ dir. $\langle \varphi \rangle \hat{K}^X$ yarıdirekt çarpım grubunu gözönüne alalım. Bu grup içinde, $B = \langle Q, \varphi \nu \rangle$ ve $G = CB$ olarak tanımlayalım. O zaman $2^t \parallel (r + 1)$ olmak üzere B , mertebesi 2^{t+1} olan kuaterniyon grubudur. Şimdi bunu gösterelim $r^m \equiv -1 \pmod{4}$ ise m tek tamsayıdır. Çünkü, eğer m çift ise $r > 2$ olduğundan $r^m \equiv 1 \pmod{4}$ dir. Bu bir çelişkidir. O halde m tek tamsayıdır. Şimdi $r^m + 1 = (r + 1)(r^{m-1} - r^{m-2} + \dots - r + 1)$ ifadesinde $(r^{m-1} - r^{m-2} + \dots - r + 1)$ çarpanı tek tamsayıdır. Dolayısıyla $Q = \langle q \rangle$ ise $o(q) = 2^t$ dir.

$$(\varphi \nu)^2 = \varphi \nu \varphi \nu = \varphi^2 \nu^\varphi \nu = \nu^{r^m+1} = -1 \text{ dir. O halde}$$

$$(\varphi \nu)^4 = 1 \text{ dir. } (\varphi \nu)^{-1} q (\varphi \nu) = \nu^{-1} \varphi^{-1} q \varphi \nu = \nu^{-1} q r^m \nu = q^{-1} \text{ dir.}$$

O halde $B = \langle q, \varphi \nu \mid q^{2^{t-1}} = (\varphi \nu)^2, (\varphi \nu)^4 = 1, (\varphi \nu)^{-1} q (\varphi \nu) = q^{+1} \rangle$ grubu kuaterniyon grubudur. Bundan başka C , $\varphi \nu$ ile ters çevirilen ve mertebesi $\frac{r^m + 1}{2^t}$ olan normal devirli gruptur. Çünkü, $c \in C$ ise $(\varphi \nu)^{-1} c (\varphi \nu) = c^{-1}$ dir. Ayrıca C , 2.1. Örnekteki G grubunun altgrubu olduğundan normal devirli gruptur. Son olarak $CQ = C \times Q$ bir direkt çarpımdır. Çünkü, C ve Q altgruplarının seçiminden dolayı $C \cap Q = 1$ dir. Fakat C ve Q normal altgrup olduğundan, $CQ = C \times Q$ bir direkt çarpımdır. Bundan başka,

$$|G| = 2(r^m + 1)$$

ve G nilpotenttir.

$x^{r^m + 1} = -1$ şartını sağlayan bütün x ler νQC dedir. Çünkü $\langle \nu \rangle = \langle \nu, QC \rangle$ mertebesi $2(r^m + 1)$ olan devirli grup ve $o(x) = 2(r^m + 1)$ olduğundan $x \in \langle \nu \rangle$ dir. Aynı zamanda $\nu^2 \in QC$ olduğundan $\langle \nu, QC \rangle = QC \cup \nu QC$ dir. Fakat $x \notin QC$ olduğundan $x \in \nu QC$ dir. O halde $x = \nu(ab)$ olacak şekilde $a \in Q$ ve $b \in C$ vardır. Bundan dolayı $\varphi x = \varphi \nu ab \in G$ dir. O halde G grubu ν elemanlarının seçiminden bağımsızdır.

2.3. ÖRNEK : $r^m \equiv 1 \pmod{4}$, $|G| = 2(r^m - 1)$, $r > 2$. dir. V bir $\{e_1, e_2\}$ bazına sahip 2-boyutlu $\tilde{K}$ -uzayı olsun. O zaman

$$V = \tilde{K}e_1 + \tilde{K}e_2$$

şeklinde tanımlanabilir.

$Q_0 = \langle \nu \rangle$ ve $C_0 = \langle \eta \rangle$ sırasıyla $\tilde{K}^X$ nin 2-sylow altgrubu ve Hall 2'-altgrubu olsun. $\{e_1, e_2\}$ bazına göre lineer dönüşümlerin matris gösterimini kullanarak;

$$Q = \left\langle \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu^{-1} \end{bmatrix} \right\rangle, \quad C = \left\langle \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{bmatrix} \right\rangle \text{ ve } \tau = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. $B = \langle Q, \tau \rangle$ ve $G = \langle B, C \rangle$ olarak tanımlansın. O zaman $2^t \parallel (r^m - 1)$ olmak üzere B , 2^{t+1} mertebeden kuaterniyon grubudur.

$2^t \parallel (r^m - 1)$ ve $|\tilde{K}^X| = r^m - 1$ olduğundan $|Q_0| = o(\nu) = 2^t$ dir. $Q = \langle q \rangle$ ise $o(q) = 2^t$ dir. $\tau^4 = I_{2 \times 2}$ olduğundan $o(\tau) = 4$ dir. Bundan başka,

$$\tau q \tau^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = q^{-1} \text{ ve } q^{2^{t-1}} = \tau^2$$

dir. Böylece B , mertebesi 2^{t+1} olan kuaterniyon grubudur. Bundan başka, $c \in C$ ise $\tau c \tau^{-1} = c^{-1}$ dir. Böylece C , G 'nin τ ile ters çevrilen normal devirli altgrubudur. Ayrıca C , $\tilde{K}^X$ nin Hall $2'$ -altgrubu olduğundan $C, (r^m - 1)/2^t$ mertebededir. Buradan özel olarak $(|C|, |B|) = 1$ dir.

τ, Q yu normallediğinden $B = \langle Q, \tau \rangle = \langle Q \rangle \langle \tau \rangle$ dur. $Q_0 C_0$ grubu abelyan olduğundan QC abelyandır ve τ tarafından normallenir. Esasen $QC = Q \times C$ dir.

$G = \langle B, C \rangle = \langle Q, \tau, C \rangle = QC \langle \tau \rangle = CQ \langle \tau \rangle = CB$ elde edilir. Buradan

$$|G| = |C| |B| = 2(r^m - 1)$$

oldüğünden G , mertebesi $2(r^m - 1)$ olan nilpotent olmayan bir metabelyan gruptur.

Eğer $\alpha, \beta, \beta' \in \tilde{K}$ olmak üzere $u = \alpha e_1 + \beta e_2$ ve $v = \alpha' e_1 + \beta' e_2$ ise g^* formu $g^*(u, v) = \alpha \beta' - \alpha' \beta$ olarak tanımlansın ve $\text{Tr} : \tilde{K} \rightarrow K$ iz dönüşümü olmak üzere

g formu $g(u,v) = \text{Tr}(g^*(u,v))$ olarak tanımlansın. O zaman g formu V üzerinde singüler olmayan simplektik bilinear formdur. Çünkü $g(u,v) = -g(v,u)$ ve Tr dönüşümü singüler değildir.

2.4. ÖRNEK : $m = 2n$, $r^n \equiv 1 \pmod{4}$, $|G| = 2(r^m - 1)$, $r > 2$ dir. V bir $\{e_1, e_2\}$ bazına sahip 2-boyutlu $\tilde{K}$ -uzayı olsun. O zaman V bir $2m$ -boyutlu K -uzayıdır. $\tilde{K}$ nin $\varphi: x \rightarrow x^{r^n}$ şeklinde tanımlı, mertebesi 2 olan φ otomorfizmasını gözönüne alalım.

$Q_0 = \langle \nu \rangle$, $\tilde{K}^x$ nin 2-sylow altgrubu, $D_0 = \langle \theta \rangle$, $\tilde{K}^x$ nin mertebesi $(r^n + 1)/2$ olan altgrubu ve $C_0 = \langle \eta \rangle$, $\tilde{K}^x$ içinde $Q_0 D_0$ 'ın Hall-bütünleri olsun. Tekrar V nin $\{e_1, e_2\}$ bazına göre lineer dönüşümlerin matris gösterimini kullanalım.

$$Q = \left\langle q = \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu^{-1} \end{bmatrix} \right\rangle, D = \left\langle \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^{-1} \end{bmatrix} \right\rangle \text{ ve } C = \left\langle \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{bmatrix} \right\rangle$$

olsun. $\tau = \begin{bmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{bmatrix}$ dönüşüm matrisi $\alpha, \beta \in \tilde{K}$ olmak üzere

$\tau(\alpha e_1 + \beta e_2) = \beta^\varphi e_1 - \alpha^\varphi e_2$ şeklinde tanımlansın. O zaman $G = \langle Q, C, D, \tau \rangle$ grubu, $2^t \parallel (r^n - 1)$ olmak üzere 2^{t+2} inci mertebeden yarıdihedral $S = \langle Q, \tau \rangle$ 2-sylow altgrubuna sahiptir. Şimdi bunu gösterelim. $2^t \parallel (r^n - 1)$ olduğundan k tek tamsayı olmak üzere $r^n - 1 = 2^t k$ dir. Ayrıca $|Q| = o(\nu) = 2^{t+1}$ olduğundan $(\nu^{2^t})^2 = 1$ dir. Böylece $\tilde{K}$ bir cisim olduğundan $\nu^{2^t} = -1$ dir. O halde

$$\nu^{r^n - 1} = (\nu^{2^t})^k = -1 \text{ ve } \nu^{2^t} = \nu^{r^n - 1} = -1$$

dir. $\alpha, \beta \in \tilde{K}$ için $\alpha e_1 + \beta e_2 \in V$ olsun. O zaman

$$q(\alpha e_1 + \beta e_2) = \nu \alpha e_1 + \nu^{-1} \beta e_2$$

$$\text{dir. } \sigma = \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{bmatrix} = q\tau \quad \text{olsun. O zaman}$$

$$\sigma(e_1) = q\tau(e_1 + 0e_2) = q(-e_2) = -\nu^{-1}e_2 \quad \text{ve}$$

$$\sigma^2(e_1) = \sigma(-\nu^{-1}e_2) = q(-\nu^{-\varphi}e_1) = -\nu^{-r^n+1}e_1 = -(-1)e_1 = e_1$$

dir. Benzer şekilde $\sigma^2(e_2) = e_2$ dir. Şimdi $\alpha, \beta \in \tilde{K}$ için $\alpha e_1 + \beta e_2 \in V$ olsun.

$$\sigma(\alpha e_1 + \beta e_2) = q\tau(\alpha e_1 + \beta e_2) = q(\beta^\varphi e_1 - \alpha^\varphi e_2) = \nu \beta^\varphi e_1 - \nu^{-1} \alpha^\varphi e_2$$

dir. O zaman

$$\begin{aligned} \sigma^2(\alpha e_1 + \beta e_2) &= \sigma(\nu \beta^\varphi e_1 - \nu^{-1} \alpha^\varphi e_2) = q(-\nu^{-\varphi} \alpha e_1 - \nu^\varphi \beta e_2) \\ &= -\nu^{-r^n+1} \alpha e_1 - \nu^{-1+r^n} \beta e_2 = -\nu^{-(r^n-1)} \alpha e_1 - \nu^{r^n-1} \beta e_2 \\ &= -(-1)^{-1} \alpha e_1 - (-1) \beta e_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 \end{aligned}$$

dir. O halde $\sigma^2 = I$ dir.

$$q^{-1} + 2^t = \begin{bmatrix} \nu^{-1} \nu^{2^t} & 0 \\ 0 & \nu^1 \nu^{-2^t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu^{-1} & 0 \\ 0 & -\nu \end{bmatrix}$$

dir. Böylece her $\alpha e_1 + \beta e_2 \in V$ için

$$q^{-1+2^t}(\alpha e_1 + \beta e_2) = -\nu^{-1} \alpha e_1 - \nu \beta e_2 \quad \text{dir. ...} (*)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} q \sigma(\alpha e_1 + \beta e_2) &= \sigma q(\nu \beta^\varphi e_1 - \nu^{-1} \alpha^\varphi e_2) = \sigma(\nu^2 \beta^\varphi e_1 - \nu^{-2} \alpha^\varphi e_2) \\ &= \nu (-\nu^{-2} \alpha^\varphi)^\varphi e_1 - \nu^{-1} (\nu^2 \beta^\varphi)^\varphi e_2 \\ &= -\nu^{1-2r^n} \alpha e_1 - \nu^{2r^n-1} \beta e_2 \\ &= -\nu (\nu^{-r^n})^2 \alpha e_1 - \nu^{-1} (\nu^{r^n})^2 \beta e_2 \\ &= -\nu \nu^{-2} \alpha e_1 - \nu^{-1} \nu^2 \beta e_2 = -\nu^{-1} \alpha e_1 - \nu \beta e_2 \quad \dots (**) \end{aligned}$$

O halde (*) ve (**) dan dolayı $\sigma^{-1}q\sigma = q^{-1+2^t}$ dir.

$S = \langle Q, \tau \rangle = \langle q, \sigma \mid q^{2^{t+1}} = \sigma^2 = 1, q^\sigma = \sigma^{-1}q\sigma = q^{-1+2^t} \rangle$,
G nin mertebesi 2^{t+2} olan yarıdihedral 2-sylow altgrubudur.

$$D = \left\langle d = \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^{-1} \end{bmatrix} \right\rangle \text{ olsun.}$$

$dq = qd$ olduğundan Q ile D komutatiftir. Bundan başka,

$$\begin{aligned} \tau d(\alpha e_1 + \beta e_2) &= \tau(\theta \alpha e_1 + \theta^{-1} \beta e_2) = \theta^{-\varphi} \beta^\varphi e_1 - \theta^\varphi \alpha^\varphi e_2 \quad \text{ve} \\ d\tau(\alpha e_1 + \beta e_2) &= \theta \beta^\varphi e_1 - \theta^{-1} \alpha^\varphi e_2 \quad \text{dir. Fakat } o(d) = o(\theta) = \frac{r^{n+1}}{2} \\ &\text{ olduğundan} \end{aligned}$$

$$\theta^{-\varphi} = \theta^{-r^{n-1}+1} = \theta \quad \text{ve} \quad \theta^\varphi = \theta^{r^{n+1}-1} = \theta^{-1} \quad \text{dir. O}$$

halde $\tau d = d\tau$ dir. Böylece D, S yi merkezler. Şimdi

$B = S \times D$ grubu tanımlanabilir. B nilpotenttir. Bundan başka

$$|C| = \frac{|\tilde{K}^X|}{|QD|} = \frac{r^{n-1}}{2^t} \quad \text{ve} \quad \frac{r^{n-1}}{2^t} \quad \text{tek tamsayıdır. Böylece}$$

$$C = \langle c \rangle \text{ ise } o(c) = \frac{r^{n-1}}{2^t} \quad \text{dir. O zaman } o(c) = o(\eta) = \frac{r^{n-1}}{2^t}$$

$$\text{ olduğundan } \eta^{r^n} = \eta \quad \text{dir.}$$

$$\tau c(\alpha e_1 + \beta e_2) = \eta^{-\varphi} \beta^\varphi e_1 - \eta^\varphi \alpha^\varphi e_2 = \eta^{-1} \beta^\varphi e_1 - \eta \alpha^\varphi e_2 \quad \text{ve}$$

$$c^{-1} \tau(\alpha e_1 + \beta e_2) = c^{-1}(\beta^\varphi e_1 - \alpha^\varphi e_2) = \eta^{-1} \beta^\varphi e_1 - \eta \alpha^\varphi e_2$$

dir. O halde $\tau c \tau^{-1} = c^{-1}$ dir. Dolayısıyla C, τ ile ters

çevrilir. Böylece $\tau, \langle Q, D, C \rangle$ grubunu normaller. Ay-

rıca $\langle Q, D, C \rangle = QDC$ abelyandır. Böylece $G = QDC \langle \tau \rangle$ dir.

Özel olarak $|G| = 2(r^m - 1)$ dir. G metabelyan nilpotent olmayan gruptur.

$u = \alpha e_1 + \beta e_2 \in V$, $v = \alpha' e_1 + \beta' e_2 \in V$ için g^* formu $g^*(u, v) = \beta \alpha' - \alpha \beta'$ olarak tanımlansın ve $\text{Tr} : \tilde{K} \rightarrow K$ izi dönüşümü olmak üzere $g(u, v) = \text{Tr}(g^*(u, v))$ olarak tanımlansın. O zaman g formu V üzerinde singüler olmayan bilineer formdur.

BÖLÜM 3

BAZI MINİMAL $K[G]$ -MODÜLLER

Kabul edelim ki H bir grup, k bir cisim, U bir indirgenmez $k[H]$ -modülü ve g, U üzerinde H tarafından invariant bırakılan bir singüler olmayan simplektik bilinear form olsun. Eğer,

(1) Her $N \trianglelefteq H$ için $U|_N$ homojen ya da

(2) $N \trianglelefteq H$, $t > 1$ ve $U_1, \dots, U_t, U|_N$ nin homojen bileşenleri olmak üzere $U|_N \cong U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_t$ iken

(i) $t = 2$

(ii) $i = 1, 2$ için U_i ler tam isotropik ve

(iii) $L \leq \text{deng}(H, U_1)$ ve $L \trianglelefteq H$ olan her L için $U_1|_L$ homojen ise U ya bir minimal $k[H]$ -modülü denir.

Burada (1) sağlanırsa U yarıilkel $k[H]$ -modülüdür.

(2) sağlanırsa ve $U|_N$ homojen değilse,

$$|H : \text{deng}(H, U_1)| = 2$$

dir.

Yukarıdaki tanımda 2(iii) şartı 2(i) ve 2(ii) şartlarının bir sonucudur. T.R. Berger bu durumu [[9], 7.11. Teorem] de göstermiştir. Biz bu durumu onun fikirlerini kullanarak, aşağıda gösterdik.

Şimdi yukarıdaki tanımın 2(i) ve 2(ii) şartları sağlansın. ve $S = \text{deng}(H, U_1)$ olsun.

Kabul edelim ki $L \leq S$ ve $L \triangle H$ için $U_1|_L$ homojen olmasın. O zaman $U|_L$ homojen değildir. Bundan dolayı 2(i) ve 2(ii) gereğince $C_1, C_2, U|_L$ nin homojen tam izotropik bileşenleri olmak üzere,

$$U|_L = C_1 \dot{+} C_2$$

dir. $U_1|_L$ homojen olmadığından her $i, j \in \{1, 2\}$ için $U_1 \cap C_j \neq \{0\}$ dir.

$S = \text{deng}(H, U_1)$ ve $S' = \text{deng}(H, C_1)$ ve $R = S \cap S'$ olsun. O zaman,

$$[H:S] = [H:S'] = [S:R] = [S':R] = 2 \text{ ve } [H:R] = 4$$

dir. $L \leq S \cap S'$ olduğundan her $i, j \in \{1, 2\}$ için $U_1 \cap C_j$ $k[L]$ -modülüdür. U_1 indirgenmez $k[S]$ -modülüdür.

(i) Her $i, j \in \{1, 2\}$ için $U_1 \cap C_j \neq U_1$ dir. Şimdi bunu gösterelim.

Mümkünse $U_1 \cap C_1 = U_1$ olsun. O zaman $U_1 \subseteq C_1$ dir. Fakat $U = U_1 \dot{+} U_2 = C_1 \dot{+} C_2$; $\dim_k U_1 = \dim_k U_2$ ve $\dim_k C_1 = \dim_k C_2$ olduğundan $U_1 = C_1$ dir. Fakat $U_1|_L$ homojen olmadığından bu çelişkidir. O halde $U_1 \cap C_1 \neq U_1$ dir. Diğerleri de benzer şekilde gösterilir.

(ii) Her $i, j \in \{1, 2\}$ için $U_1 \cap C_j$ indirgenmez $k[R]$ -modülüdür. $U_1 \cap C_1$ in indirgenmez $k[R]$ -modülü olduğunu gösterelim. $U_1|_S$ indirgenmez ve $L \triangle S$ olduğundan Clifford Teoreminden dolayı $U_1 = U_1 \cap C_1 \dot{+} U_1 \cap C_2$ dir. Aynı zamanda $U_1 \cap C_1$ ve $U_1 \cap C_2$ $k[R]$ -modülleridir. Fakat $[S:R] = 2$ olduğundan U_1 en çok iki indirgenmez $k[R]$ -alt-modülün toplamı olarak yazılabilir. Buradan (i) den dolayı $U_1 \cap C_1$ ve $U_1 \cap C_2$ indirgenmez $k[R]$ -modülleridir.

Diğerleri de benzer şekilde gösterilir.

Kolayca görüldüğü gibi $S \neq S'$ dır. Çünkü eğer $S = S'$ ise o zaman U_1 ve C_1 indirgenmez $k[S]$ -modülleri olduğundan $U_1 \cap C_1 = \{0\}$ veya $U_1 = C_1$ olmalıdır. Fakat $U_1 \cap C_1 \neq \{0\}$ olduğundan $U_1 = C_1$ olmalıdır. Bu ise kabulümüzle çelişir. Böylece $S \neq S'$ dır ve böylece $H = SS'$ dır. Şimdi $s \in S \setminus R$, $s' \in S' \setminus R$, $t = ss'$ ve $M = \langle t, R \rangle$ olsun. O zaman $[H:M] = 2$ dir. Şimdi

$$W_1 = U_1 \cap C_1 + U_2 \cap C_2$$

$$W_2 = U_1 \cap C_2 + U_2 \cap C_1$$

olsun. O zaman W_1, W_2 $k[M]$ -modülleridir. Çünkü Clifford Teoreminden dolayı $s'U_1 = U_2$, $sC_1 = C_2$ ve ayrıca $U_1 \cap C_j$ $k[R]$ -modülüdür. Bundan başka

$$U = W_1 + W_2$$

olduğu da aşıkardır.

(iii) W_1 ve W_2 singüler olmayan ve birbirlerine ortagonal olan altuzaylardır. U_1, U_2, C_1, C_2 tam izotropik uzaylar olduğundan W_1 ve W_2 nin birbirine ortogonal olduğu aşıkardır. Mümkünse W_1 singüler olsun. O zaman bir $0 \neq w \in W_1$ için $g(w, W_1) = 0$ dır. Fakat $W_1 \subseteq W_2^\perp$ olduğundan $g(w, W_2) = 0$ dır. İki eşitlikten $g(w, U) = 0$ dır. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla W_1 singüler olmayan altuzaydır. Benzer şekilde W_2 singüler olmayan altuzaydır.

(iv) W_1 ve W_2 indirgenmez $k[M]$ -modülleridir. Bu (ii) de olduğu gibi gösterelir.

(v) $U_1 \cap C_1, U_1 \cap C_2, U_2 \cap C_1$ ve $U_2 \cap C_2$ den herhangi ikisi $k[R]$ -modülü olarak izomorf olamaz.

$L \leq R$ olduğundan $U_1 \cap C_1$, $U_1 \cap C_2$ ve $U_2 \cap C_2$ den hiçbirine izomorf olamaz. Öyleyse yalnız $U_1 \cap C_1$ ile $U_2 \cap C_1$ e bakmak yeterlidir. Şimdi,

$$U_1 = U_1 \cap C_1 \dot{+} s(U_1 \cap C_1)$$

dir. $U_1 \cap C_1 \neq U_1$ olduğundan $U_1 \cap C_1$ bir $k[S]$ -modülü değildir. Aynı zamanda $[S:R] = 2$ olduğundan

$$\text{deng}(S, U_1 \cap C_1) = R$$

dir. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} (U_1 \cap C_1)|_R^S &= 1 \otimes (U_1 \cap C_1) + s \otimes (U_1 \cap C_1) \\ &\cong U_1 \cap C_1 + s(U_1 \cap C_1) = U_1 \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $(U_2 \cap C_1)|_R^S \cong U_2$ dir.

Şimdi eğer $U_1 \cap C_1$ ile $U_2 \cap C_2$ $k[R]$ -modülü olarak izomorf ise o zaman U_1 ile U_2 , $k[S]$ -modülü olduğundan $k[N]$ -modülü olarak izomorf olur. Bu çelişkidir. Dolayısıyla $U_1 \cap C_1$ ve $U_2 \cap C_1$ izomorf olamaz. Benzer şekilde $U_1 \cap C_2$ ve $U_2 \cap C_2$ izomorf değildir.

(vi) W_1 ve W_2 $k[M]$ -modülleri olarak izomorf değildir.

Eğer W_1 ile W_2 izomorf ise o zaman bunlar $k[R]$ -modülleri olarak izomorftur. Çünkü $R \leq M$ dir. O zaman (ii) den dolayı $U_1 \cap C_1, U_1 \cap C_2$ ve $U_2 \cap C_1$ den birine izomorf olmalıdır. Bu ise (v) ile çelişir.

Böylece şunu gösterdik $M \triangleleft H$ ve $U|_M = W_1 \dot{+} W_2$ öyle ki (iii), (iv) ve (v) ten dolayı W_1 ve W_2 singüler olmayan ve birbirine izomorf olmayan ortogonal homojen bileşenlerdir. Bu çelişkidir. Çünkü 2(ii) den dolayı bu durumda W_1 ve W_2 tam izotropiktir.

O halde $U_1|_L$ homojendir.

3.1. HİPOTEZ : $r > 1$ asalsayısı için $K = GF(r)$ olsun.

- (1) V bir $2m$ -boyutlu K -uzayı,
- (2) $g: V \times V \rightarrow K$ singüler olmayan simplektik bilinear form;
- (3) $H = AN$ bir grup N normal devirli altgrup, N nin nilpotent tümleyeni A ve burada $A \cap N = 1$ dir.
- (4) V sadık minimal $K[H]$ -modülü ve g, H tarafından invaryant bırakılsın.

O.3. Teorem'den dolayı N bir r -grubudur.

Şimdi ilk olarak H nin normal altgruplarının yapısını belirleyelim.

3.2. LEMMA : Eğer L, H nin normal abelyan altgrubu ise L devirlidir.

İSPAT : $L \triangleleft H$ olduğundan $Z(L) = L$ dir. Önce $V|_L$ homojen olsun. O zaman $V|_L$ nin öyle indirgenmez $U_1, U_2, \dots, U_t$ altmodülleri vardır ki

$$V|_L \cong U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_t$$

ve $1 \leq i, j \leq t$ için $U_i \cong U_j$ dir. Şimdi O.4. Teoremden dolayı L nin U_1 üzerindeki temsilinin çekirdeği K ise L/K devirlidir. Fakat $U_1 \cong U_i$ olduğundan her $i \geq 1$ için L nin U_i üzerindeki temsilinin çekirdeği K dir. Bundan dolayı L nin V üzerindeki temsilinin çekirdeği K dir. Fakat V sadık minimal $K[H]$ -modül olduğundan $K = \{1\}$ dir. Bundan dolayı $L/K = L$ devirlidir.

Şimdi ise W_i ler $V|_L$ nin homojen bileşenleri olmak üzere, $V|_L = W_1 \dot{+} \dots \dot{+} W_t$ $t > 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Fakat V sadık minimal $k[H]$ -modülü olduğundan $t = 2$, W_1, W_2 $V|_L$ nin tam iġotropik bileşenleridir. Eğer $x \in H$, $u_1 \in W_1, u_2 \in W_2$ ise H, g formunu sabit bıraktığından

$$g(xu_1, u_2) = g(xu_1, xx^{-1}u_2) = g(u_1, x^{-1}u_2)$$

dir.

Şimdi $x \in C_L(W_1)$ olsun. O zaman her $u_1 \in W_1$ için $xu_1 = u_1$ dir. Böylece $g(u_1, u_2 - x^{-1}u_2) = 0$ bulunur. Aynı zamanda W_2 , L -invariant olduğundan $u_2 - x^{-1}u_2 \in W_2$ dir. Böylece, $V = W_1 \dot{+} W_2$ olduğundan her $u \in V$ için $g(u, u_2 - x^{-1}u_2) = 0$ dir. Fakat g singüler olmayan simplektik bilineer olduğundan $u_2 - x^{-1}u_2 = 0$ ve buradan $xu_2 = u_2$ bulunur. Şimdi u_2 keyfi olduğundan $x \in C_L(W_2)$ dir. Bundan dolayı

$$C_L(W_1) \subseteq C_L(W_2)$$

dir. Benzer şekilde $C_L(W_2) \subseteq C_L(W_1)$ dir. Bundan dolayı L, W_1 üzerinde sadıktır. Çünkü L, W_1 üzerinde sadık değilse $C_L(W_1) \neq (0)$ ve $C_L(W_1) = C_L(W_2) \subseteq C_L(V)$ olduğundan $C_L(V) \neq (0)$ dır. Bu ise V nin sadık $K[H]$ -modül olmasıyla çelişir. Bundan dolayı $C_L(W_1) = (0)$ ve W_1 sadık $K[L]$ -modülüdür. W_1 homojen $K[L]$ -modülü ve L abelyan olduğundan ilk durumdan dolayı L devirlidir.

Şimdi 1.1. Lemma ve 3.2. Lemma'yı kullanarak aşağıdaki Lemmayı elde ederiz.

3.3. LEMMA : $H = AN$ grubu, N altgrubunu içeren ve $C_H(M) = M$ olacak şekilde normal devirli M altgrubu içerir.

Bundan başka,

$$a) \quad C_H(N) = (A \cap C_H(N)) \times N$$

$$b) \quad (|A \cap C_H(N)|, |N|) = 1$$

c) $M = C_H(N)$ ya da $[C_H(N):M] = 2$ ve $C_H(N)$ nin S_2 -altgrubu kuaterniyon, dihedral ya da yarı dihedraldir.

İSPAT : 3.2. Lemma'dan dolayı H nin her normal abelyan altgrubu devirli ve 1.1. Lemma'dan dolayı H, N yi içeren ve $C_H(M) = M$ olan bir normal devirli M altgrubu içerir. Bundan başka (a)-(c) şartları sağlanır. Böylece ispat tamamdır.

K^* , K ya birimin $|M|$ yinci ilkel kökünün katılmasıyla elde edilen cisim genişlemesi olsun. $V|_M$ nin durumuna göre H_0 ve U aşağıdaki şekilde tanımlansın.

- (1) Eğer $V|_M$ homojen ise $H_0 = H \geq M = N$ ve $U = V$;
- (2) Eğer $V_1, V_2, V|_M$ nin homojen bileşenleri olmak üzere, $V|_M = V_1 + V_2$ ise $H_0 \geq M \geq N$, $\text{deng}(H, V_1) = H_0$ ve $U = V_1$ olsun.

Her iki durumda da U bir indirgenmez $K[H_0]$ -modüldür. Ayrıca $U|_M$ homojendir.

(1) de $H = H_0$, $U = V$ indirgenmez $K[H]$ -modül ve $U|_M$ homojendir. (2) de ise V minimal $K[H]$ -modül olduğundan $U|_M$ homojendir. Şimdi $M \triangle H$ olduğundan Clifford Teoreminden dolayı H grubu $\{V_1, V_2\}$ üzerinde geçişli permütasyon grubudur. Bundan dolayı $[H:H_0] = 2$ ve böylece $H_0 \triangle H$ dir. Dolayısıyla V_2 de H_0 altında invaryanttır.

Öte yandan $V = V_1 \dot{+} V_2$ direkt toplam olduğundan V_2, V_1 e göre kontragradyanttır. Yani V_2 den V_1 in duali $V_1^* = \text{Hom}_K(V_1, K)$ içine bir K -monomorfizması vardır. Gerçekten $x \in V_2$ olsun. Her $v_1 \in V_1$ için $x^*(v_1) = g(v_1, x)$ olsun. O zaman $x^* \in V_1^*$ ve $x \rightarrow x^*$ eşlemesi aranan K -monomorfizmasıdır. Şimdi buradan yararlanarak $V_1|_{H_0}$ modülünün sadık olduğunu gösterebiliriz. Mümkünse $b \in H_0$ ve her $v_1 \in V_1$ için $b(v_1) = v_1$ olsun. $x \in V_2$ olsun. O zaman $bx \in V_2$ dir.

$(bx)^*(v_1) = g(v_1, bx) = g(b^{-1}v_1, x) = g(v_1, x) = x^*(v_1)$ olduğundan, $(bx)^* = x^*$ ve buradan $bx = x$ bulunur. Fakat o zaman her $v \in V$ için $bv = v$ olduğundan $b = 1$ olmalıdır. Bundan dolayı $V_1|_{H_0}$ sadıktır.

Şimdi 1.2. Lemma'nın bir uygulamasını elde edebiliriz.

3.4. LEMMA : K^* in öyle bir K_0 altcismi ve öyle $\psi: H_0 \rightarrow \mathbb{T}(K^*/K_0)$, $\Psi: U \rightarrow K^{*+}$ (bir izomorfizma) monomorfizmaları vardır ki

- a) her $x \in H_0$, $v \in U$ için $\psi(x)\Psi(v) = \Psi(xv)$;
- b) Eğer $M = \langle x \rangle$ ve $\psi(x) = w$ ise $K^* = K_0(w)$,
- c) $\psi(H_0)K^{*x} = \mathbb{T}(K^*/K_0)$ ve
- d) $\psi(H_0) \cap K^{*x} = \psi(M)$

dir.

İSPAT : H_0 grubu $C_{H_0}(M) = M$ olacak şekilde normal devirli M altgruba sahiptir. 3.1. Hipotez'den dolayı K sonlu bir cisimdir. Ayrıca U sadık indirgenmez $K[H_0]$ -modülü ve $U|_M$ homojendir.

Bundan başka $K^\star$ birimin $|M|$ yinci ilkel kökünün katılmasıyla K nın bir genişletme cisimidir. Böylece 1.2. Lemmanın bütün şartları sağlanır. Bundan dolayı $K^\star$ ın öyle bir K_0 altcismi ve öyle $\psi: H_0 \rightarrow T(K^\star/K_0)$ ve $\Psi: U \rightarrow K^{\star+}$ (bir izomorfizma) monomorfizmaları vardır ki (a)-(d) şartları sağlanır. Böylece ispat tamamdır.

Şimdi bundan sonraki kısımlar için bazı hazırlıklar yapalım. Her $x \in H$ için $\alpha, \alpha(x) = x^{-1}$ olarak tanımlı dönüşüm olsun. O zaman α, H üzerinde bir antiotomorfizmadır. Lineerlik yardımıyla $\alpha, K[H]$ ya genişletilebilir. O zaman $K[M]$ değişmeli olduğundan $\alpha, K[M]$ cebirinin bir otomorfizması olur. H, g formunu sabit bıraktığından $u, v \in V, x \in H$ için

$$g(xu, v) = g(u, x^{-1}v) = g(u, x^\alpha v)$$

dir. Buradan her $b \in K[H]$ için $g(bu, v) = g(u, b^\alpha v)$ elde edilir.

Artık 3.1. Hipotezde verilen minimal $K[H]$ -modülü V nin iki halini ayrı, ayrı inceleyeceğiz.

3.5. HİPOTEZ : Kabul edelim ki 3.1.Hipotezi sağlansın ve $V|_M$ homojen olsun. Bu durumda $U = V, H_0 = H$ dir. Bundan başka $V \cong K^{\star+}$ olduğundan $K^\star = \hat{K} = GF(r^{2m})$ dir. O zaman $\hat{K}$ nın $\varphi: \epsilon \rightarrow \epsilon^{r^m}$ şeklinde tanımlı bir φ otomorfizması vardır ve φ nin sabit cismi $\tilde{K} = GF(r^m)$ dir. Bundan başka $o(\varphi) = 2$ dir. 3.4. Lemmadan dolayı $\Psi: V \rightarrow \hat{K}^+$ bir K -uzayı izomorfizmasıdır ve $\psi: H \rightarrow \text{Gal}(\hat{K}/K) \hat{K}^\times$ bir gömmedir. Bu gömmelerde bir t elemanının görüntüsü $\bar{t}$ olsun. O zaman her $u, v \in V$ için, $g^\star(\bar{u}, \bar{v}) = g(u, v)$ şeklinde

tanımlı g^* fonksiyonu $\hat{K}^+$ üzerinde singüler olmayan bir simplektik bilineer formdur ve $g^*(\bar{x}\bar{u}, \bar{x}\bar{v}) = g^*(\bar{u}, \bar{v})$, $x \in H$ sağlanır. $e \in K[M]$ bir ilkel merkez idempotent eleman öyleki $eV \neq (0)$ olsun. Önce $V|_M$ nin indirgenmez olduğunu gösterelim. $\bar{V} = \hat{K}^+$ ve $\hat{K}^+$ bir indirgenmez $\hat{K}$ -modülüdür. $0 \neq v \in V$ ve $ev \neq 0$ olsun. O zaman $\bar{v} \neq 0$ olduğundan $\hat{K}\bar{v} \neq \{0\}$ dir. Böylece $\hat{K}\bar{v} = \hat{K}^+$ dir. Aynı zamanda 3.4. Lemma (b) den dolayı $\psi(K[M]) = \hat{K}$ dir.

Şimdi $K[M]v = (K[M]e)v$ dir. O zaman 3.4.Lemmadan dolayı

$$\psi(K[M]v) = \psi(K[M]ev) = \psi(K[M]e)\psi(v) = \hat{K}\bar{v} = \hat{K}^+$$

dir. Bundan dolayı $|K[M]ev| \geq |V|$ dir. Fakat aşıkarak $|V| = |K[M]ev|$ dir. O halde $V = (K[M]e)v$ bulunur. Bundan dolayı $V|_M$ indirgenmezdir. Şimdi e nin tek olduğunu gösterelim. 0.3. Teoremden dolayı M bir r' -grubu olduğundan 0.10. Teoremden dolayı $K[M]$ bir yarıbasit grup cebiridir. Dolayısıyla 0.15. Teoremden dolayı öyle $e_1, \dots, e_s$ ilkel merkez idempotentleri vardır ki

$$K[M] = \sum_{i=1}^s K[M]e_i$$

bir halka direkt toplamıdır. Buradan her $K[M]e_i$ bir basit halkadır. Bir $1 \leq j \leq s$ için $e_j V \neq (0)$ ve her $i \neq j$ için $e_i V = (0)$ dir. Buradan

$$K[M]V = (K[M]e_j)V = V$$

bulunur. $K[M]$ nin birim elemanı 1 olsun.

$$1 = e_j + (1-e_j)$$

oldüğünden $e = ee_j + e(1-e_j)$ dir. Burada ee_j ve $e(1-e_j)$

ortogonal merkez idempotentlerdir. Fakat e ilkel olduğundan ve $e_j V = e_j (eV) = (e_j e) V \neq (0)$ olduğundan $ee_j \neq 0$ dir. O zaman $e(1-e_j) = 0$ olmalıdır. Buradan $e = ee_j$ bulunur. Benzer şekilde $e_j = ee_j$ dir. Bundan dolayı $e = e_j$ dir. Böylece e nin tek olduğu gösterilmiş olur.

$$\text{Şimdi her } u, v \in V \text{ için } g(eu, v) = g(u, e^\alpha v) \quad (*)$$

dir. Fakat $eV = V$ ve g formu V üzerinde singüler olmadığından $g(eu, v) \neq 0$ olacak şekilde u ve v seçilebilir. O zaman $(*)$ eşitliğinin sağ tarafı sıfırdan farklı olduğundan $e^\alpha v \neq (0)$ dir. Fakat e tek olduğundan $e^\alpha = e$ dir. Bundan dolayı α , $K[M]$ e nin bir otomorfizmasıdır. Lineerlik yardımıyla ψ , $K[M]$ nin tamamına genişletilebilir. O zaman ψ , $K[M]$ e yi izomorf olarak $\hat{K}$ üzerine götürür. ψ bir halka homomorfizması olduğundan $K[M] e \cong \hat{K}$ bir cisim izomorfizmasıdır. $I = \ker(\psi)$ olsun. O zaman $K[M]/I \cong \hat{K}$ dir. Yukarıda görüldüğü gibi

$$K[M] = \sum_{i=1}^s K[M] e_i$$

dir. Burada her e_i bir ilkel merkez idempotent ve $K[M] e_i$ sonlu bir basit halkadır. Esasen M abelyan olduğundan $K[M] e_i$ abelyandır. O zaman $K[M] e_i$ bir cisimdir. Özel olarak $K[M] e$ cisimdir. Şimdi $i \neq j$ için $Ve_i = (0)$ olduğundan

$$\bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq s \\ i \neq j}} K[M] e_i \subseteq I$$

dir. $I \cap K[M] e$, $K[M] e$ nin bir öz ideali olduğundan $I \cap K[M] e = \{0\}$ dir. Dolayısıyla

$$K[M]/I \cong K[M] e \cong \hat{K}$$

dir. Yukarıda görüldüğü gibi α , $K[M]$ e nin bir otomor-
fizmasıdır ve $o(\alpha) = 2$ dir. O zaman $K[M]e \cong \hat{K}$ izomor-
fizmasından dolayı $\hat{K}$ nin α ya karşılık gelen bir α'
izomorfizması vardır. Öteyandan $\hat{K} = GF(r^{2m})$ olduğundan
 $\varphi: x \rightarrow x^{r^m}$ fonksiyonu $\hat{K}$ nin mertebesi 2 olan bir otomor-
fizmasıdır. Fakat $\hat{K}$ nin mertebesi 2 olan bir tek oto-
morfizması olduğundan $\alpha' = \varphi$ olmalıdır. Böylece yuka-
rıda izomorfizma esnasında α, φ ye gider.

Şimdi $b \in K[H]$ ve $u \in V$ için $\psi(b) = \bar{b}$ ve $\Psi(u) = \bar{u}$
notasyonlarını kullanalım. Her $u, v \in V$ için

$$g^*(\bar{u}, \bar{v}) = g(u, v)$$

şeklinde tanımlı g^* formu $\hat{K}^+$ üzerinde singüler olmayan
bir simplektik bilineer formdur ve

$$g^*(\bar{b}u, \bar{b}v) = g^*(\bar{u}, \bar{v}) \text{ ve } g^*(\bar{b}u, \bar{v}) = g^*(\bar{u}, \bar{b}^\varphi v)$$

elde edilir. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} g^*(\bar{u}, \bar{v}) &= g^*(\bar{u} \cdot \bar{1}, \bar{v}) = g^*(\bar{1}, \bar{u}^\varphi \bar{v}) = -g^*(\bar{u}^\varphi \bar{v}, \bar{1}) \\ &= -g^*(\bar{u}^\varphi \bar{v} \cdot \bar{1}, \bar{1}) = -g^*(\bar{1}, \bar{u} \bar{v}^\varphi) \end{aligned}$$

dir.

3.6. LEMMA : $b \in K[H]$ ve $u \in V$ için $\psi(b) = \bar{b}$,
 $\Psi(u) = \bar{u}$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır. Her $u, v \in V$
için

- (i) $g^*(\bar{1}, \bar{u}^\varphi \bar{v} + \bar{u} \bar{v}^\varphi) = 0$;
- (ii) $r > 2$ ise $g(u, v) = g^*(\bar{1}, 2^{-1} (\bar{u}^\varphi \bar{v} - \bar{u} \bar{v}^\varphi))$ ve
- (iii) $g(u, v) = g^*(\bar{1}, \bar{u}^\varphi \bar{v})$

dir.

İSPAT : Lemma'dan önce görüldüğü gibi

$$g^*(\bar{l}, \bar{u}^\varphi \bar{v}) = -g^*(\bar{l}, \bar{u} \bar{v}^\varphi)$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} g^*(\bar{l}, \bar{u}^\varphi \bar{v} + \bar{u} \bar{v}^\varphi) &= g^*(\bar{l}, \bar{u}^\varphi \bar{v}) + g^*(\bar{l}, \bar{u} \bar{v}^\varphi) \\ &= g^*(\bar{l}, \bar{u}^\varphi \bar{v}) - g^*(\bar{l}, \bar{u}^\varphi \bar{v}) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (i) sağlanır.

Öte yandan $g(u, v) = g^*(\bar{u}, \bar{v}) = g^*(\bar{l}, \bar{u}^\varphi \bar{v})$ olduğundan (iii): sağlanır. Şimdi (ii) yi gösterelim.

İlk olarak $r = 2$ durumunu inceleyelim.

(i) den dolayı $g^*(\bar{l}, \bar{u}^\varphi \bar{v}) = -g^*(\bar{l}, \bar{u} \bar{v}^\varphi) = g^*(\bar{l}, \bar{u} \bar{v}^\varphi)$ dir.

Şimdi g formu singüler olmadığından $\beta \rightarrow g^*(\bar{l}, \beta)$ dönüşümü $\hat{K}^+$ dan K^+ üzerine K -lineerdir. Bundan dolayı $\text{tr}: \hat{K} \rightarrow K$ iz dönüşümü olmak üzere 0.21.Lemma'dan dolayı $g^*(\bar{l}, \beta) = \text{tr}(\delta \beta)$ olacak şekilde β 'dan bağımsız bir $\delta \in \hat{K}^\times$ vardır. $\hat{K}^+$ 2-boyutlu $\tilde{K}$ -uzayı olduğundan $\text{Tr}': \hat{K} \rightarrow \tilde{K}$ iz dönüşümü $\bar{u} \rightarrow \text{Tr}'(\bar{u}) = \bar{u} + \bar{u}^\varphi$ şeklinde tanımlıdır. Fakat $\text{Tr}: \tilde{K} \rightarrow K$ iz dönüşümü için, $\text{tr} = \text{Tr} \circ \text{Tr}': \hat{K} \rightarrow K$ iz dönüşümü olduğundan;

$$g^*(\bar{l}, \beta) = \text{tr}(\delta \beta) = \text{Tr} \circ \text{Tr}'(\delta \beta) = \text{Tr}(\delta \beta + \delta^\varphi \beta^\varphi) \quad (*)$$

elde edilir. $g^*(\bar{l}, \beta) = g^*(\beta, \bar{l}, \bar{l}) = g^*(\bar{l}, \beta^\varphi)$ elde edilir. $r = 2$ olduğundan $g^*(\bar{l}, \beta) + g^*(\bar{l}, \beta^\varphi) = g^*(\bar{l}, \beta + \beta^\varphi) = 0$ dir. Böylece;

$$0 = g^*(\bar{l}, \beta + \beta^\varphi) = \text{tr}(\delta (\beta + \beta^\varphi)) = \text{Tr}((\delta + \delta^\varphi)(\beta + \beta^\varphi))$$

dir. $\beta \in \hat{K}^+$ keyfi olduğundan ve 0.23.Lemma'dan dolayı

$\text{Tr}': \hat{K} \rightarrow \tilde{K}$ iz dönüşümü örten olduğundan her $\gamma \in \tilde{K}^+$ için

$\text{Tr}((\delta + \delta^\varphi)\gamma) = 0$ dir. Fakat Tr singüler olmayan bilineer

form olduğundan $\delta + \delta^\varphi = 0$ ve $r = 2$ olduğundan $\delta = \delta^\varphi$ dir. Böylece $\delta \in \tilde{K}^X$ dir. O halde her $u, v \in V$ için (iii) ve (*) dan dolayı

$$g(u, v) = g^*(\bar{1}, \bar{u}^\varphi \bar{v}) = \text{Tr}(\delta(\bar{u}^\varphi \bar{v} - \bar{u} \bar{v}^\varphi))$$

dir. Şimdi $r > 2$ durumuna dönelim. $\bar{v} = \bar{1}$ alırsak (i) den dolayı her $u \in V$ için $g^*(\bar{1}, \bar{u}^\varphi + \bar{u}) = 0$ dir. Fakat $\text{Tr}' : \hat{K} \rightarrow \tilde{K}$ iz dönüşümü örten olduğundan her $\beta \in \tilde{K}^+$ için $g^*(\bar{1}, \beta) = 0$ elde edilir. Çünkü, Tr' örten olduğundan $\beta = \bar{u}^\varphi + \bar{u}$ olacak şekilde $\bar{u} \in \hat{K}^+$ vardır.

Şimdi $\mu^\varphi = -\mu$ olacak şekilde bir $\mu \in \tilde{K}^X$ seçelim. $\{1, \mu^{-1}\}$ $\hat{K}^+$ nın bir $\tilde{K}$ -bazıdır. O zaman

$$\hat{K}^+ = \tilde{K}^+ \cdot \bar{1} + \tilde{K} \cdot \mu^{-1}$$

dir. Şimdi $f: \hat{K}^+ \rightarrow 2^{-1} \mu^{-1} \tilde{K}^+$, $f(\bar{u}) = \bar{u}^\varphi - \bar{u}$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu fonksiyon iyi tanımlıdır. Gerçekten $\bar{u} \in \hat{K}^+$ ise $\bar{u} = a \cdot \bar{1} + b \mu^{-1}$ olacak şekilde $a, b \in \tilde{K}$ vardır. Üstelik $a^\varphi = a$ ve $b^\varphi = b$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} f(\bar{u}) &= f(a \cdot \bar{1} + b \mu^{-1}) = (a \cdot \bar{1} + b \mu^{-1})^\varphi - (a \cdot \bar{1} + b \mu^{-1}) \\ &= a \cdot \bar{1} + b(\mu^{-1})^\varphi - a \cdot \bar{1} - b \mu^{-1} \\ &= b(-\mu^{-1}) - b \mu^{-1} = -2b \mu^{-1} \\ &= (-2^{-1} \mu)(2^2 b) \in 2^{-1} \mu^{-1} \tilde{K}^+ \end{aligned}$$

bulunur. Burada 2^{-1} tanımlıdır. Çünkü $2 = 1 + 1 \in \tilde{K}$ ve $r > 2$ olduğundan $\tilde{K}$ içinde $2 \neq 0$ dir. Şimdi f nin örten olduğunu gösterelim. $\bar{k} \in \tilde{K}$ olsun. $\hat{K}$ içinde 2^{-1} ve $(2^{-1})^2 = 2^{-2}$ tanımlıdır. Dolayısıyla $(2^{-2})^\varphi = 2^{-2}$ dir.

Şimdi, $\bar{k} \in \tilde{K}$ için

$$f(-2^{-2} \mu^{-1} \bar{k}) = (-2^{-2} \mu^{-1} \bar{k})^\varphi - (-2^{-2} \mu^{-1} \bar{k})$$

$$= -2^{-2}(-\mu^{-1})\bar{k} + 2^{-2}\mu^{-1}\bar{k} = 2(2^{-2}\mu^{-1}\bar{k}) = 2^{-1}\mu^{-1}\bar{k}$$

dir. O halde f dönüşümü örtendir. Tekrar g^* formu singular olmadığından $\beta \rightarrow g^*(\bar{1}, 2^{-1}\mu^{-1}\beta)$ dönüşümü $\tilde{K}^+$ dan K^+ üzerine K -lineerdir. Böylece ilk durumdaki gibi $\text{Tr}: \tilde{K} \rightarrow K$ ile dönüşümü olmak üzere, her $\beta \in \tilde{K}^+$ için $g^*(\bar{1}, 2^{-1}\mu^{-1}\beta) = \text{Tr}(\delta\beta)$ olacak şekilde bir $\delta \in \tilde{K}^X$ vardır. Bundan başka her $u, v \in V$ için,

$$\begin{aligned} g^*(\bar{u}, \bar{v}) &= g^*(\bar{1}, \bar{u}^\varphi \bar{v}) = g^*(\bar{1}, 2^{-1}\bar{u}^\varphi \bar{v} + 2^{-1}\bar{u}^\varphi \bar{v}) \\ &= g^*(\bar{1}, 2^{-1}\bar{u}^\varphi \bar{v}) + g^*(\bar{1}, 2^{-1}\bar{u}^\varphi \bar{v}) \\ &= g^*(\bar{1}, 2^{-1}\bar{u}^\varphi \bar{v}) - g^*(\bar{1}, 2^{-1}\bar{u}^\varphi \bar{v}) \\ &= g^*(\bar{1}, 2^{-1}\mu^{-1}[\mu(\bar{u}^\varphi \bar{v} - \bar{u}^\varphi \bar{v})]) \\ &= \text{Tr}(\delta_\mu(\bar{u}^\varphi \bar{v} - \bar{u}^\varphi \bar{v})) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki Lemma'yı elde ederiz.

3.7. LEMMA : $\mu^\varphi = -\mu$ olacak şekilde $\mu \in \hat{K}^X$ seçilsin. Eğer $r = 2$ ise $\mu = 1$ olsun. O zaman her $u, v \in V$ için $\Psi(u) = \bar{u}$ olmak üzere,

$$g(u, v) = \text{Tr}(\delta_\mu(\bar{u}^\varphi \bar{v} - \bar{u}^\varphi \bar{v}))$$

olacak şekilde bir $\delta \in \tilde{K}^X$ vardır.

Şimdi ψ ve Ψ dönüşümlerini $\delta = 1$ olacak şekilde değiştirebileceğimizi gösterelim.

3.8. LEMMA : Eğer, $\mu \in K$ ve $\mu^\varphi = -\mu$ ise ($r = 2$ ise $\mu = 1$ dir) O zaman ψ ve Ψ dönüşümlerini, her $u, v \in V$ için

$$g(u, v) = \text{Tr}(\mu(\bar{u}^\varphi \bar{v} - \bar{u}^\varphi \bar{v}))$$

olacak şekilde seçebiliriz.

İSPAT : $\text{Nr}: \hat{K}^X \rightarrow \tilde{K}^X$, $\bar{u} \rightarrow \text{Nr}(\bar{u}) = \bar{u}\bar{u}^\varphi$ şeklinde ta-

nımlı norm dönüşümü 0.23. Lemma'dan dolayı örtendir. Böylece $\delta \in \hat{K}^X$ olduğundan $\gamma\gamma^\varphi = \delta$ olacak şekilde $\gamma \in \hat{K}^X$ seçebiliriz. O zaman 1.3. Lemma'da olduğu gibi γ ya bağılı olarak

$$\begin{aligned}\theta &: \mathbf{T}(\hat{K}/K) \rightarrow \mathbf{T}(\hat{K}/K) \quad \text{ve} \\ \Theta &: \hat{K}^+ \rightarrow \hat{K}^+\end{aligned}$$

dönüşümleri tanımlanabilir ve bu dönüşümler monomorfizmalardır.

$\psi' = \theta\psi$ ve $\Psi' = \Theta\Psi$ dönüşümleri 3.4. Lemmanın bütün şartlarını sağlar. Aynı zamanda her $\bar{u} \in \hat{K}^+$ için $\Theta(\bar{u}) = \bar{u}\gamma$ dır. Şimdi $u \in V$ için $\Psi'(u) = \tilde{u}$ ve $\Psi(u) = \bar{u}$ olsun. O zaman $\Psi'(u) = \Theta(\Psi(u)) = \bar{u}\gamma = \tilde{u}$ olduğundan 3.7. Lemma'dan dolayı her $u, v \in V$ için $\bar{u} = \tilde{u}\gamma^{-1}$ ve

$$\begin{aligned}g(u, v) &= \text{Tr}(\delta_\mu(\bar{u}^\varphi \bar{v} - \bar{u}\bar{v}^\varphi)) \\ &= \text{Tr}(\delta_\mu([\tilde{u}\gamma^{-1}]^\varphi (\tilde{v}\gamma^{-1}) - (\tilde{u}\gamma^{-1})[\tilde{v}\gamma^{-1}]^\varphi)) \\ &= \text{Tr}(\delta_\mu \gamma^{-\varphi} \gamma^{-1} (\tilde{u}^\varphi \tilde{v} - \tilde{u}\tilde{v}^\varphi)) \\ &= \text{Tr}(\mu(\tilde{u}^\varphi \tilde{v} - \tilde{u}\tilde{v}^\varphi))\end{aligned}$$

dir.

Şimdi $\mathbf{T}(\hat{K}/K_0)$ in yukarıda ki g formunu sabit bırakan bütün elemanlarının altgrubu $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^*(\hat{K}/K_0)$ olsun.

3.9. LEMMA : $\hat{K}_0, \hat{K}^X$ nin mertebesi $r^m + 1$ olan altgrubu ve $\sigma \in \text{Gal}(\hat{K}/K_0)$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

- (a) $\nu \in \hat{K}^X$ için $\sigma\nu \in \mathbf{T}^*$ olması için gerek ve yeter şart $\mu^\sigma \mu^{-1} \nu^\varphi \nu = 1$ olmasıdır.
- (b) $\mathbf{T}^* \cap \hat{K}^X = \hat{K}_0$
- (c) $\mathbf{T}^* \hat{K}^X = \mathbf{T}(\hat{K}/K_0)$

İSPAT : $\nu \in \hat{K}^x$ için $\sigma\nu \in \mathbb{T}^*$ olsun. O zaman $\mathbb{T}^*$ in tanımından her $u, w \in \hat{K}^+$ için,

$$g^*(\bar{u}, \bar{w}) = g^*(\sigma\nu.\bar{u}, \sigma\nu.\bar{w})$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mu(\bar{u}^\varphi \bar{w} - \bar{u}\bar{w}^\varphi)) &= \text{Tr}(\mu([\sigma\nu.\bar{u}]^\varphi (\sigma\nu.\bar{w}) - (\sigma\nu.\bar{u})[\sigma\nu.\bar{w}]^\varphi)) \\ &= \text{Tr}(\mu(\varphi(\sigma(\nu\bar{u}))\sigma(\nu\bar{w}) - \sigma(\nu\bar{u})\varphi(\sigma(\nu\bar{w})))) \\ &= \text{Tr}(\mu\sigma(\nu\bar{u}^\varphi \bar{w} - \nu\bar{u}\bar{w}^\varphi)) \\ &= \text{Tr}(\mu\sigma\nu^\varphi \nu.(\bar{u}^\varphi \bar{w} - \bar{u}\bar{w}^\varphi)) \\ &= \text{Tr}(\sigma\mu^\sigma \nu^\varphi \nu.(\bar{u}^\varphi \bar{w} - \bar{u}\bar{w}^\varphi)) \\ &= \text{Tr}(\sigma(\mu^\sigma \nu^\varphi \nu(\bar{u}^\varphi \bar{w} - \bar{u}\bar{w}^\varphi))) \\ &= \text{Tr}(\mu^\sigma \nu^\varphi \nu \mu^{-1}[\mu(\bar{u}^\varphi \bar{w} - \bar{u}\bar{w}^\varphi)]) \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\text{Tr}(\mu^\sigma \mu^{-1} \nu^\varphi \nu - 1)[\mu(\bar{u}^\varphi \bar{w} - \bar{u}\bar{w}^\varphi)] = 0$$

dir. Özel olarak $\bar{w} = \bar{1}$ alınırsa her $\bar{u} \in \hat{K}$ için

$$\text{Tr}(\mu^\sigma \mu^{-1} \nu^\varphi \nu - 1)[\mu(\bar{u}^\varphi - \bar{u})] = 0$$

dir. 3.6. Lemma'dan dolayı $f: \hat{K}^+ \rightarrow 2^{-1} \mu^{-1} \hat{K}^+$, $\bar{u} \rightarrow f(u) = \bar{u}^\varphi - \bar{u}$ şeklinde tanımlı f dönüşümü örtendir. Bundan dolayı,

her $t \in \hat{K}^+$ için $2^{-1} \mu^{-1} t = \bar{u}^\varphi - \bar{u}$ olacak şekilde bir $\bar{u} \in \hat{K}^+$ vardır. Dolayısıyla $2^{-1} t = \mu(\bar{u}^\varphi - \bar{u})$ dir. O halde

$\text{Tr}(2^{-1}(\mu^\sigma \mu^{-1} \nu^\varphi \nu - 1)t) = 0$ dir. Dolayısıyla Tr dönüşümü singüler olmayan bilineer form olduğundan $\mu^\sigma \mu^{-1} \nu^\varphi \nu = 1$ dir.

Tersine olarak $\mu^\sigma \mu^{-1} \nu^\varphi \nu = 1$ ise $\sigma\nu \in \mathbb{T}^*$ dir. Böylece (a) sağlanır.

Eğer $\sigma = 1$ ise $\sigma\nu = \nu \in \mathbb{T}^* \cap \hat{K}_0^x$ dir. Fakat (a) dan dolayı $\mu^\sigma \mu^{-1} \nu^\varphi \nu = \nu^\varphi \nu = \nu^{r^m+1} = 1$ dir. O zaman $\nu \in \hat{K}_0$ dir.

Böylece $\mathbb{T}^* \cap \hat{K}^x \subseteq \hat{K}_0$ dir. Aynı zamanda $\hat{K}_0 \subseteq \mathbb{T}^* \cap \hat{K}^x$ dir.

O halde (b) sağlanır.

$\sigma \in \text{Gal}(\hat{K}/K_0)$ keyfi olsun. O zaman $\sigma \in \mathbb{T}(\hat{K}/K_0)$ dir. $\mu^\sigma = -\mu$ olduğundan $(\mu^\sigma)^\sigma = (\mu^\sigma)^\sigma = -\mu^\sigma$ ve $(\mu^\sigma \mu^{-1})^\sigma = \mu^\sigma \mu^{-1}$ dir. Bundan dolayı $\mu^\sigma \mu^{-1} \in \tilde{K}^\times$ dir. Dolayısıyla $\mu^{-\sigma} \mu \in \tilde{K}^\times$ dir.

$\text{Nr}: \hat{K}^\times \rightarrow \tilde{K}^\times$, $\epsilon \rightarrow \epsilon \epsilon^{r^m}$ şeklinde tanımlı norm dönüşümü örten olduğundan $\text{Nr}(\nu) = \nu \nu^\sigma = \mu^{-\sigma} \mu$ olacak şekilde bir $\nu \in \hat{K}^\times$ vardır. O zaman $\mu^\sigma \mu^{-1} \nu \nu^\sigma = 1$ dir. Böylece (a) dan dolayı $\sigma \nu \in \mathbb{T}^\star$ dir. Bundan dolayı $\mathbb{T}^\star \hat{K}^\times = \mathbb{T}(\hat{K}/K_0)$ dir.

Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz.

3.10. TEOREM : 3.1. Hipotez'i ve 3.5. Hipotez'i verilsin. $\hat{K} = \text{GF}(r^{2m})$, $\tilde{K} = \text{GF}(r^m)$ ve $\varphi: \epsilon \rightarrow \epsilon^{r^m}$, $\hat{K}$ nin mertebesi 2 olan otomorfizması olsun. $\mu^\sigma = -\mu$ olacak şekilde $\mu \in \hat{K}^\times$ verilsin. Eğer $r = 2$ ise $\mu = 1$ olsun. $\text{Tr}: \tilde{K} \rightarrow K$ iz dönüşümü olmak üzere, her $\bar{u}, \bar{v} \in \tilde{K}^+$ için $g^\star$ formu,

$$g^\star(\bar{u}, \bar{v}) = \text{Tr}(\mu(\bar{u}^\sigma \bar{v} - \bar{u} \bar{v}^\sigma))$$

olarak tanımlansın. $\hat{K}_0$, $\hat{K}^\times$ nin mertebesi $r^m + 1$ olan altgrubu olsun. $\mathbb{T}(\hat{K}/K)$ nin $g^\star$ formunu sabit bırakan elemanlarının altgrubu $\mathbb{T}^\star = \mathbb{T}^\star(\hat{K}/K)$ olsun. O zaman $\psi: H \rightarrow \mathbb{T}^\star$ ve $\Psi: V \rightarrow \hat{K}^+$ (bir izomorfizma) monomorfizmaları vardır ki

- (a) Her $x \in H$, $u \in V$ için $\psi(x)\Psi(u) = \Psi(xu)$,
- (b) $M = \langle x \rangle$ ve $\psi(x) = w$ ise $w \in \hat{K}_0$ ve $K(w) = \hat{K}$;
- (c) $\psi(H) \cap \hat{K}^\times = \psi(M)$ ve
- (d) Her $u, v \in V$ için $g(u, v) = g^\star(\Psi(u), \Psi(v))$

dir.

İSPAT : Bu 3.4. Lemma'nın, 3.8. Lemma'nın ve 3.9. Lemmanın bir sonucudur. Buradaki ψ ve Ψ dönüşümleri 3.8. Lemma'daki ψ', Ψ' dönüşümleri olarak tanımlıdır. H, g formunu sabit bıraktığından $\psi(H), g^*$ formunu sabit bırakır. Dolayısıyla $\psi(H) \leq \mathbf{T}^*(\hat{K}/K)$ dır. İspatın kalan kısmı yukarıdaki Lemmaların basit bir sonucudur.

GÖZLEM : V nin minimal $K[H]$ -modül olması yerine sadece $V|_M$ nin indirgenmez olduğunu kabul etmek yeterlidir.

3.11. TEOREM : 3.1. Hipotezi ve 3.5. Hipotezi verilsin. Kabul edelim ki $H = A$ nilpotent ve $N = 1$ olsun. O zaman

(1) H devirli ve $G_0, 2.1.$ Örnek'teki G grubunun altgrubu olmak üzere $H, V, g, 2.1.$ Örnek'teki G_0, V ve g ile özdeş kılınabilir.

(2) H kuaterniyon ve $B_0, 2.2.$ Örnek'teki B grubunun bir altgrubu olmak üzere $H, V, g, 2.2.$ Örnek'teki B_0, V ve g ile özdeş kılınabilir.

İSPAT : $V|_M$ homojen olması durumunda $H = AN$ grubunu H nin nilpotent olması halinde karakterize edebiliriz. Öyleyse $H = AN$ grubunda $N = (1)$ olsun. O zaman 3.3. Lemma'dan dolayı $M = C_H(N) = H$ veya $[H:M] = 2$ dir ve H nin Sylow 2-altgrubu kuaterniyon, dihedral veya yarıdihedraldir.

Önce $H = M$ devirli olsun. 3.10. Teorem'den dolayı $H \cong \psi(H) = \psi(M) \leq \hat{K}_0$ ve $|\hat{K}_0| = r^m + 1$ dir. Aynı zamanda

g^* formu 2.1. Örnek'teki formun aynısıdır. Bundan dolayı $V \cong \hat{K}^+$ dir. Bundan dolayı H grubunu 2.1.Örnek'teki G grubunun bir altgrubu ile ve g ile V yi de 2.1. Örnek'teki g , V ile özdeş kılabiliriz. Şimdi

Şimdi $[H:M] = 2$ olsun. O zaman

$$\frac{(H)\hat{K}^X}{\hat{K}^X} \cong \frac{\psi(H)}{\psi(H) \cap \hat{K}^X} = \frac{\psi(H)}{\psi(M)} \cong \frac{H}{M} \text{ olduğundan } [\psi(H)\hat{K}^X : \hat{K}^X] = 2$$

dir. $H = \langle x, M \rangle$ olacak şekilde H - M nin bir 2-elemanı x vardır. O zaman $\psi(x) \in \psi(H)\hat{K}^X - \hat{K}^X$ dir. Fakat 3.4. Lemma (c) den dolayı $\psi(H)\hat{K}^X = T(\hat{K}/K)$ olduğundan

$$[\text{Gal}(\hat{K}/K)\hat{K}^X : \hat{K}^X] = 2$$

dir. Buradan $\text{Gal}(\hat{K}/K)\hat{K}^X = \langle \varphi \rangle \hat{K}^X$ dir. Böylece bir $\nu \in \hat{K}^X$ için $\psi(x) = \varphi \nu$ dir. H nilpotent olduğundan $r > 2$ dir.

$M_0 \leq M$, H nin Hall 2'-altgrubu olsun. Eğer $\xi \in \psi(M_0) \leq \psi(M)$ ise $\xi^{r^m+1} = 1$ dir. O zaman

$$(\varphi \nu)^{-1} \xi (\varphi \nu) = \nu^{-1} \varphi \xi \varphi \nu = \nu^{-1} \xi \varphi \nu = \xi \varphi = \xi^{r^m} = \xi^{-1}$$

dir. $\xi = \psi(y)$ olacak şekilde bir $y \in M_0$ vardır ve x, y elemanını merkezler. Çünkü x bir 2-elemanı, y 2'-elemanıdır ve H nilpotenttir. Diğer taraftan,

$$\psi(x)^{-1} \psi(y) \psi(x) = \psi(x^{-1} y x) = \psi(y) = \psi(y^{-1}) \text{ ve } \psi$$

monomorfizma olduğundan $y^2 = 1$ dir. Bundan dolayı $y = 1$

dir. Dolayısıyla $M_0 = \{1\}$ dir. O halde H bir 2-grubudur.

Şimdi ξ , M nin elemanları üzerinde değişirse $\psi(M)$

nin her elemanı $\psi(x)$ tarafından tersine götürülür. O zaman

x elemanı M yi tersine götürür. 3.10. Teorem'den dolayı

$\varphi \nu \in T^*$ dir. O zaman 3.9. Lemma (a) dan dolayı

$$\mu \varphi \mu^{-1} \nu \nu \varphi = -\nu \nu \varphi = 1 \text{ dir. Fakat } \psi(x)^2 = (\varphi \nu) (\varphi \nu) = \nu \varphi \nu = -1$$

olduğundan $(\psi(x))^4 = 1$ dir. Dolayısıyla $x^4 = 1$ dir. Aynı zamanda M devirli ve x tarafından tersine götürüldüğünden $H = \langle x, M \rangle$ bir kuaterniyon grubudur. Bundan başka $4 \mid |H|$ dir. Fakat M , H nin maksimal normal devirli altgrubu olduğundan $4 \mid |H|$ dir. Böylece $4 \mid (r^m + 1)$ dir.

Şimdi 2.2. Örnekteki G grubunu gözönüne alalım. $H = \langle x, M \rangle$ olduğundan $\psi(H) = \langle \psi(x), \psi(M) \rangle$ dir. Fakat $\psi(M) \leq \hat{K}_0$ olduğundan $\psi(H) \leq G$ dir ve $\psi(H)$ bir 2-grubudur. B, G nin Sylow 2-altgrubu olduğundan $d\psi(H)d^{-1} \leq B$ olacak şekilde $d \in G$ vardır. Eğer $x \in H$, $u \in V$ ise ψ', Ψ' dönüşümleri $\psi'(x) = d\psi(x)d^{-1}$ ve $\Psi'(u) = d\Psi(u)$ olarak tanımlansın. $d \in G$ olduğundan d, g^* formunu invaryant bırakır. Böylece ψ ve Ψ dönüşümleri ψ', Ψ' dönüşümleriyle yer değiştirilebilir. Böylece $H \cong \psi'(H) \leq B$ dir. $B_0 = \psi'(H)$ olsun. O zaman H, V, g ile B_0, V, g özdeş kılınabilir.

GÖZLEM : 3.10. Teorem'de olduğu gibi burada da sadece $V|_M$ nin indirgenmez olduğunu kabul ediyoruz.

Böylece $V|_M$ nin homojen olması durumundaki bütün sınıflandırmayı tamamladık.

Şimdi $V|_M$ nin homojen olmaması durumunu gözönüne alalım.

3.12. HİPOTEZ : 3.1. Hipotezi verilsin. $V_1, V_2, V|_M$ nin homojen bileşenleri olmak üzere $V|_M = V_1 \dot{+} V_2$ olsun.

Buradan $H_0 = \text{deng}(H, V_1)$ olduğundan Clifford Teoreminden dolayı $[H:H_0] = 2$ ve $H_0 \geq M \geq N$ dir. Öte yandan $U = V_1$ ve 3.4. Lemma'dan dolayı $U \cong K^*$ olduğundan $K^* = \tilde{K} = GF(r^m)$ alınabilir.

3.13. LEMMA : $eV_1 \neq (0)$ olacak şekilde $K[M]$ nin bir ilkel merkez idempotent elemanı e olsun. $e_0 = e + e^\alpha$ olarak verilsin. ψ yi $K[M]$ ye lineer olarak genişletebiliriz. O zaman

$\psi: K[M]e \rightarrow \tilde{K}$ bir K -izomorfizmasıdır. $\psi(u_1) = 1$ olacak şekilde $u_1 \in V_1$ seçelim. $0 \neq u_2 \in V_2$ vardır ve

(1) Her $v \in V$ için $v = b(u_1 + u_2)$ olacak şekilde bir tek $b \in K[M]e_0$ vardır.

(2) Eğer $b, c \in K[M]e_0$ ise $\text{Tr}: \tilde{K} \rightarrow K$ iz dönüşümü olmak üzere

$g(b(u_1 + u_2), c(u_1 + u_2)) = \text{Tr}(\psi(b^\alpha e) \psi(c e) - \psi(c^\alpha e) \psi(b e))$ dir.

İSPAT : $e \in K[M]$ ilkel merkez idempotent eleman ve $eV_1 \neq (0)$ olsun. O zaman e^α bir ilkel merkez idempotenttir. $V_1|_M$ homojen olduğundan 3.5. Hipotez'den sonra gösterildiği gibi 3.4. Lemma (b) den dolayı $V_1|_M$ indirgenmez ve e tektir. Böylece $eV_1 = V_1$ dir.

V bir minimal $K[H]$ -modül olduğundan $V_1, V_2, V|_M$ nin tam izotropik ve birbirlerinin bütünleri olan iki alt uzayı olduğundan $0 \neq g(v_1, v_2)$ olacak şekilde $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ seçebiliriz. Böylece

$$0 \neq g(v_1, v_2) = g(e v_1, v_2) = g(v_1, e^\alpha v_2)$$

dir. Böylece $e^\alpha V_2 \neq (0)$ dır. Fakat V_1 ve V_2 izomorfik $K[M]$ -modülleri olmadığından $eV_2 = (0)$ dır. Buradan $e \neq e^\alpha$ bulunur. Fakat e^α ilkel merkez idempotent olduğundan $ee^\alpha = 0$ olmalıdır. Şimdi

$$K[M]e_0 = K[M]e + K[M]e^\alpha$$

olsun. $V_1|_M$ indirgenmez olduğundan $0 \neq v \in V_1$ için

$$V_1 = K[M]v = (K[M]e)v$$

yazılabilir. Öte yandan 3.4. Lemma'dan dolayı

$\Psi: V_1 \rightarrow \tilde{K}^+$ bir izomorfizma olduğundan $\Psi(u_1) = 1$ olacak şekilde $u_1 \in V_1$ vardır ve u_1 tektir. O zaman $u_1 \neq 0$ olduğundan,

$$V_1 = K[M]u_1 = (K[M]e)u_1$$

yazılabilir. Böylece her $v \in V_1$ için $v = bu_1$ olacak şekilde bir $b \in K[M]e$ vardır. Burada b elemanı tektir. Çünkü 3.5. Hipotez'den sonraki ispatta olduğu gibi

$\psi: K[M]e \rightarrow \tilde{K}$ bir K -lineer izomorfizmadır. Şimdi mümkünse $b_1 \in K[M]e$ için $v = b_1u_1$ olsun. O zaman $bu_1 = b_1u_1$ olduğundan $(b-b_1)u_1 = 0$ dır. Böylece

$$0 = \Psi((b-b_1)u_1) = \psi(b-b_1)\Psi(u_1) = \psi(b-b_1)$$

dir. Fakat ψ izomorfizma olduğundan $b-b_1 = 0$ dır. Dolayısıyla $b = b_1$ dir.

Benzer şekilde öyle bir $0 \neq u' \in V_2$ vardır ki

$$V_2 = K[M]u' = (K[M]e^\alpha)u'$$

ve her $v' \in V_2$ için $v' = b'u'$ olacak şekilde bir tek $b' \in K[M]e^\alpha$ vardır. Buradan $b' = ke^\alpha$ olacak şekilde $k \in K[M]$ vardır. Böylece, $b'u_1 = (ke^\alpha)(eu_1) = 0$ dır. Benzer şekilde $bu' = 0$ dır. Dolayısıyla

$v + v' = bu_1 + b'u' = bu_1 + b'u' + b'u_1 + bu' = (b + b')(u_1 + u')$ dir. Buradan b ve b' tek olduğundan $b + b' \in K[M]e_0$ tektir. Dolayısıyla her $v'' \in V$ için $v'' = b''(u_1 + u')$ olacak şekilde bir tek $b'' \in K[M]e_0$ vardır.

Şimdi $u' \in V_2$ için özel bir seçim yapalım. $V_1, V_2, V|_M$ nin tam izotropik altuzayları olduğundan ve $(K[M]e)u_1 = V_1$ olduğundan $d \xrightarrow{\theta} g(u', du_1)$ dönüşümü $K[M]e$ den K üzerine K -lineerdir.

$\psi: K[M]e \rightarrow \tilde{K}$ bir izomorfizma olduğundan $\psi^{-1}: \tilde{K} \rightarrow K[M]e$ ters dönüşümü vardır ve bir izomorfizmadır. Böylece $f: \tilde{K} \rightarrow K, f(\beta) = g(u', \psi^{-1}(\beta)u_1)$ şeklinde tanımlı f dönüşümü bir K -lineerdir ve dolayısıyla lineer fonksiyoneldir. Ayrıca örten-dir.

Her $\beta \in \tilde{K}$ için $\theta \psi^{-1}(\beta) = g(u', \psi^{-1}(\beta)u_1) = f(\beta)$ olduğundan $f = \theta \psi^{-1}$ dir. Sağ taraf örten olduğundan f örten-dir. Bundan dolayı $\text{Tr}: \tilde{K} \rightarrow K$ izdönüşümü olmak üzere, 0.21. Lemma'dan dolayı, $f(\beta) = \text{Tr}(\gamma\beta)$ olacak şekilde bir $\gamma \in \tilde{K}^x$ vardır. Şimdi $d = \psi^{-1}(\gamma^{-1}) \in K[M]e$ ve $u_2 = d^\alpha u' \in V_2$ olsun. O zaman $b \in K[M]e$ ve $\psi(b) = \beta$ için

$$\begin{aligned} g(u_2, bu_1) &= g(d^\alpha u', bu_1) = g(u', d(bu_1)) \\ &= g(u', \psi^{-1}(\gamma^{-1})(\psi^{-1}(\beta)u_1)) \\ &= g(u', \psi^{-1}(\gamma^{-1}\beta)u_1) = \text{Tr}(\gamma(\gamma^{-1}\beta)) \\ &= \text{Tr}(\beta) = \text{Tr}(\psi(b)) \end{aligned}$$

dir. Böylece u' yerine u_2 yi alabiliriz. $u, v \in V$ olsun. Yukarıda olduğu gibi $u = b(u_1 + u_2)$ ve $v = c(u_1 + u_2)$ olacak şekilde bir tek $b, c \in K[M]e_0$ vardır.

$$\begin{aligned} g(u, v) &= g(b(u_1 + u_2), c(u_1 + u_2)) \\ &= g(bu_1, cu_1) + g(bu_1, cu_2) + g(bu_2, cu_1) + g(bu_2, cu_2) \end{aligned}$$

dir. Fakat $V_1, V_2, V|_M$ nin tam izotropik altuzayları olduğundan $g(bu_1, cu_1) = 0$ ve $g(bu_2, cu_2) = 0$ dir. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned}
g(u,v) &= g(bu_1, cu_2) + g(bu_2, cu_1) \\
&= g(b(e^\alpha u_2), c(eu_1)) + g(b(eu_1), c(e^\alpha u_2)) \\
&= g(u_2, (b^\alpha e)(ce)u_1) - g(u_2, (c^\alpha e)(be)u_1) \\
&= g(u_2, [(b^\alpha e)ce - (c^\alpha e)be]u_1) \\
&= \text{Tr}(\psi((b^\alpha e)ce - (c^\alpha e)be)) \\
&= \text{Tr}(\psi(b^\alpha e)\psi(ce) - \psi(c^\alpha e)\psi(be))
\end{aligned}$$

dir.

Şimdi M ve V_2 için ψ', Ψ' dönüşümlerini inşa edelim.

3.14. LEMMA : $x \in M$ için $\psi'(x) = \psi^\alpha(x) = \psi(x^{-1})$ olarak verilsin. O zaman $\psi': M \rightarrow \tilde{K}^X$ bir monomorfizmadır. ψ' dönüşümünü $K[M]$ ye lineer olarak genişletebiliriz. O zaman $\psi': K[M]e^\alpha \rightarrow \tilde{K}$ bir K -izomorfizmasıdır.

Eğer $u \in V_2$ ise $bu_2 = u$ olacak şekilde bir tek $b \in K[M]e^\alpha$ vardır. Ψ' dönüşümü $\Psi'(u) = \psi'(b)$ olarak tanımlansın. O zaman $\Psi': V_2 \rightarrow \tilde{K}$ dönüşümü bir K -izomorfizmasıdır. Aynı zamanda her $x \in M, u \in V_2$ için,

$$\psi'(x)\Psi'(u) = \Psi'(xu)$$

dur.

İSPAT : 3.5. Hipotezden sonraki ispat'ta görüldüğü gibi $\psi: K[M]e \rightarrow \tilde{K}$ bir halka izomorfizmasıdır. Öte yandan $\alpha: K[M] \rightarrow K[M]$ bir otomorfizmadır. $\alpha|_{K[M]e^\alpha}, K[M]e^\alpha$ dan $K[M]e$ üzerine bir izomorfizmadır. Bundan dolayı $\psi' = \psi^\alpha$, $K[M]e^\alpha$ dan $\tilde{K}$ üzerine bir izomorfizmadır.

3.13. Lemma'dan dolayı $u = bu_2$ olacak şekilde bir tek $b \in K[M]e^\alpha$ vardır. Ψ' dönüşümü,

$$\Psi': V_2 \rightarrow \tilde{K}^+, u \rightarrow \Psi'(u) = \psi'(b)$$

olarak tanımlansın.

ψ' bir K -izomorfizması olduğundan Ψ' dönüşümü bir K -izomorfizmasıdır.

$$\begin{aligned} x \in M, u \in V_2 \text{ ve } b \in K[M]e^\alpha \text{ için } u = bu_2 \text{ olduğun-} \\ \text{dan } \psi'(x)\Psi'(u) = \psi_\alpha(x)\psi'(b) = \psi(\alpha(x))\psi(\alpha(b)) \\ = \psi(\alpha(bx)) = \psi'(bx) = \Psi'(bxu_2) = \Psi'(xu) \end{aligned}$$

dir.

Şimdi M, V, g için bir kanonik (standart) form verebilecek durumdayız.

W bir 2-boyutlu $\tilde{K}$ -uzayı ve $\{e_1, e_2\}$ W nin bir $\tilde{K}$ -bazı olsun. Kabul edelim ki $u, v \in V$ ve $b, c \in K[M]e_0$ için $u = b(u_1 + u_2)$ ve $v = c(u_1 + u_2)$ olsun.

$$\Psi_0: V \rightarrow W$$

dönüşümü $\Psi_0(u) = \psi(be)e_1 + \psi'(be^\alpha)e_2$ şeklinde tanımlansın. $\bar{g}$ formu,

$g(u, v) = \bar{g}(\psi(be)e_1 + \psi'(be^\alpha)e_2, \psi(ce)e_1 + \psi'(ce^\alpha)e_2)$ şeklinde tanımlansın. O zaman $\bar{g}$ formu W üzerinde singüler olmayan simplektik bilinear formdur.

$$\text{Ayrıca, } \psi_0: M \rightarrow GL(2, \tilde{K}), \psi_0(x) = \begin{bmatrix} \psi(x) & 0 \\ 0 & \psi'(x) \end{bmatrix},$$

$x \in M$ olsun. O zaman $\psi_0(x)$ matrisi W nin $\{e_1, e_2\}$ bazına göre lineer dönüşümüne karşılık gelir.

3.15. LEMMA : Eğer $x \in M$ ve $u \in V$ ise ψ_0, Ψ_0 dönüşümleri birer monomorfizmalardır. Bundan başka $\Psi_0(xu) = \psi_0(x)\Psi_0(u)$ dur.

Ayrıca $v \in V$ ise $g(u, v) = \bar{g}(\Psi_0(u), \Psi_0(v))$ dir.

Eğer $\Psi_0(u) = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ ve $\Psi_0(v) = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$ ise $\text{Tr}: \tilde{K} \rightarrow K$ iz dönüşümü olmak üzere,

$$\bar{g}(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) = \text{Tr}(\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)$$

dir.

İSPAT : $e_0 = e + e^\alpha$ dir. $\alpha, K[M]$ nin bir otomorfizmasıdır. $x \in M$ için, $\psi_0(x) = \begin{bmatrix} \psi(x) & 0 \\ 0 & \psi'(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise $\psi(x) = \psi'(x) = 1$ dir. Fakat ψ, ψ' dönüşümleri monomorfizmalar olduğundan $x = 1$ dir. Bundan dolayı ψ_0 bir monomorfizmadır.

$u, v \in V$ olsun. 3.13. Lemma'dan dolayı öyle $b, c \in K[M]e_0$ vardır ki $u = b(u_1 + u_2)$, $v = c(u_1 + u_2)$ ve b, c tektir. O zaman

$u + v = (b + c)u_1 + (b + c)u_2 = (b + c)(u_1 + u_2)$ ve $b + c \in K[M]e_0$ tektir. Buradan,

$$\begin{aligned} \Psi_0(u + v) &= \Psi_0(b + c)(u_1 + u_2) \\ &= \psi((b + c)e)e_1 + \psi'((b + c)e^\alpha)e_2 \\ &= \psi(be)e_1 + \psi'(be^\alpha)e_2 + \psi(ce)e_1 + \psi'(ce^\alpha)e_2 \\ &= \Psi_0(u) + \Psi_0(v) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla Ψ_0 bir homomorfizmadır.

$\Psi_0(u) = \psi(be)e_1 + \psi'(be^\alpha)e_2 = 0e_1 + 0e_2$ ise $\psi(be) = \psi'(be^\alpha) = 0$ dir. Fakat ψ monomorfizma ve $e \neq 0$ olduğundan $b = 0$ dir.

Şimdi $x \in M$ ve $w \in V$ olsun. 3.13. Lemma'dan dolayı $w = d(u_1 + u_2)$ olacak şekilde $d \in K[M]e_0$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned}
\psi_0(x)\psi_0(w) &= \psi_0(x)(\psi(de)e_1 + \psi'(de^\alpha)e_2) \\
&= \begin{bmatrix} \psi(x) & 0 \\ 0 & \psi'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(de) & 0 \\ 0 & \psi'(de^\alpha) \end{bmatrix} \\
&= \psi(x)\psi(de)e_1 + \psi'(x)\psi'(de^\alpha)e_2 \\
&= \psi(x(de))e_1 + \psi'(x(de^\alpha))e_2 \\
&= \psi_0(xw)
\end{aligned}$$

dir.

$u, v \in V$ olsun. O zaman 3.13. Lemma'dan dolayı $u = b(u_1 + u_2)$ ve $v = c(u_1 + u_2)$ olacak şekilde bir tek $b, c \in K[M]e_0$ vardır. Şimdi $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \tilde{K}^x$ için

$$\psi_0(u) = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \quad \text{ve} \quad \psi_0(v) = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$$

olsun. O zaman ψ_0 dönüşümünün tanımından,

$$\beta_1 = \psi(be), \quad \beta_2 = \psi'(be^\alpha), \quad \gamma_1 = \psi(ce), \quad \gamma_2 = \psi'(ce^\alpha)$$

dir. Fakat 3.14. Lemma'da tanımlanan $\bar{g}$ formunun tanımından,

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\psi_0(u), \psi_0(v)) &= \bar{g}(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) \\
&= \bar{g}(\psi(be)e_1 + \psi'(be^\alpha)e_2, \psi(ce)e_1 + \psi'(ce^\alpha)e_2)
\end{aligned}$$

dir. Fakat 3.13. Lemma'nın ispatında olduğu gibi

$$\begin{aligned}
g(u, v) &= \bar{g}(\psi_0(u), \psi_0(v)) = \text{Tr}(\psi(b^\alpha e)\psi(ce) - \psi(c^\alpha e)\psi(be)) \\
&= \text{Tr}(\psi'(be^\alpha)\psi(ce) - \psi'(ce^\alpha)\psi(be)) = \text{Tr}(\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi amacımız dönüşümünü H nin tamamına genişletmektir.

3.16. LEMMA : $T^\dagger = T^\dagger(\tilde{K}/K)$ olsun.

$$T^\dagger = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma\nu & 0 \\ 0 & \sigma\nu^{-1} \end{bmatrix} : \sigma \in \text{Aut}(\tilde{K}), \nu \in \tilde{K}^x \right\rangle$$

olsun. O zaman $T^\dagger$, V nin bir $\{e_1, e_2\}$ $\tilde{K}$ -bazına göre yazılabilen K -lineer dönüşümlerin bir grubudur. Bundan başka, $T^\dagger$, V nin $\psi_0(M)$ yi normalleyen ve 3.15. Lemma'-da verilen $\bar{g}$ formunu sabit bırakan bütün K -lineer dönüşümlerinin grubudur.

İSPAT : Her matrise bir lineer dönüşüm karşılık gelir. Bundan dolayı $T^\dagger$ grubunun elemanları V nin $\{e_1, e_2\}$ $\tilde{K}$ -bazına göre K -lineer dönüşümlerine karşılık gelir. Dolayısıyla $T^\dagger$, V nin $\tilde{K}$ -lineer dönüşümlerinin bir grubudur.

$\tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2 \in \tilde{K}$ olmak üzere $u = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ ve $w = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$ olsun. O zaman $\tau u = \beta_2 e_1 - \beta_1 e_2$, $\tau w = \gamma_2 e_1 - \gamma_1 e_2$ dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \bar{g}(\tau u, \tau w) &= \bar{g}(\beta_2 e_1 - \beta_1 e_2, \gamma_2 e_1 - \gamma_1 e_2) \\ &= \text{Tr}((- \beta_1)(\gamma_2) - (\beta_2)(- \gamma_1)) \\ &= \text{Tr}(\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2) = \bar{g}(u, w) \end{aligned}$$

dir. Böylece $\tau \in T^\dagger$, $\bar{g}$ formunu sabit bırakır.

$\tau_0 = \begin{bmatrix} \sigma \nu & 0 \\ 0 & \sigma \nu^{-1} \end{bmatrix}$ olsun. O zaman

$\tau_0 u = (\sigma \nu \cdot \beta_1) e_1 + (\sigma \nu^{-1} \cdot \beta_2) e_2$ ve $\tau_0 w = (\sigma \nu \cdot \gamma_1) e_1 + (\sigma \nu^{-1} \cdot \gamma_2) e_2$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \bar{g}(\tau_0 u, \tau_0 w) &= \bar{g}(\sigma(\nu \beta_1) e_1 + \sigma(\nu^{-1} \beta_2) e_2, \sigma(\nu \gamma_1) e_1 + \sigma(\nu^{-1} \gamma_2) e_2) \\ &= \text{Tr}(\sigma(\nu^{-1} \beta_2) \sigma(\nu \gamma_1) - \sigma(\nu \beta_1) \sigma(\nu^{-1} \gamma_2)) \\ &= \text{Tr}(\sigma(\nu^{-1} \nu (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2))) \end{aligned}$$

$$\bar{g}(\tau_0 u, \tau_0 w) = \text{Tr}(\sigma(\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)) = \text{Tr}(\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2) = \bar{g}(u, w)$$

dir. Böylece $\mathbb{T}^\dagger$ grubu $\bar{g}$ formunu sabit bırakır.

$$\mathbb{T}_0^\dagger = \left\langle \begin{bmatrix} \sigma\nu & 0 \\ 0 & \sigma\nu^{-1} \end{bmatrix} : \sigma \in \text{Aut}(K), \nu \in \tilde{K}^\times \right\rangle$$

$= \text{deng}(\mathbb{T}^\dagger, \tilde{K}e_1)$ dir. Çünkü

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{T}^\dagger \text{ için } \tau(\tilde{K}e_1) = \tilde{K}e_2$$

olduğundan $\tau \notin \text{deng}(\mathbb{T}^\dagger, \tilde{K}e_1)$ dir. Fakat $\tau_0 \in \mathbb{T}^\dagger$ için

$\tau_0(\tilde{K}e_1) = \tilde{K}e_1$ dir. Bundan dolayı $\mathbb{T}_0^\dagger = \text{deng}(\mathbb{T}^\dagger, \tilde{K}e_1)$ dir.

$$\psi_0(M) = \left\langle \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix} : \xi = \psi(x), x \in M \right\rangle$$

olduğundan $\mathbb{T}^\dagger, \psi_0(M)$ yi normaller. Şimdi bunu gösterelim.

$$\sigma \in \text{Aut}(\tilde{K}), \nu \in \tilde{K}^\times \text{ için } \tau_0 = \begin{bmatrix} \sigma\nu & 0 \\ 0 & \sigma\nu^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{T}^\dagger \text{ ve } x \in M,$$

$$\psi(x) = \xi \text{ için } \psi_0(x) = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix} \text{ olsun. O zaman}$$

$$\begin{aligned} \tau_0 \psi_0(x) \tau_0^{-1} &= \begin{bmatrix} \sigma\nu & 0 \\ 0 & (\sigma\nu)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\sigma\nu)^{-1} & 0 \\ 0 & \sigma\nu \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \xi^{\sigma^{-1}} & 0 \\ 0 & \xi^{-\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^{-1}(\xi) & 0 \\ 0 & \sigma(\xi^{-1}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. Fakat $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{K})$ olduğundan $\sigma, \tilde{K}$ nın bir K -otomorfizmasıdır. Dolayısıyla $\sigma \in \text{Gal}(\tilde{K}/K)$ dir.

Böylece $\xi^{-\sigma} \in \psi(M)$ dir. Bundan dolayı $\tau_0 \psi_0(x) \tau_0^{-1} \in \psi_0(M)$

$$\text{dir. Benzer şekilde } \tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{T}^\dagger \text{ için}$$

$\tau \psi_0(x) \tau^{-1} \in \psi_0(M)$ dir. O halde $\mathbb{T}^\dagger, \psi_0(M)$ yi normaller.

G, V nin $\bar{g}$ formunu sabit bırakan ve $\psi_0(M)$ yi normalleyen bütün K -lineer dönüşümlerin grubu olsun.

$G_0 = \text{deng}(G, \tilde{K}e_1)$ olsun. O zaman $T^\dagger \leq G$ ve $T_0^\dagger \leq G_0$ dır. Biz $G = T^\dagger$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$G, \psi_0(M)$ yi normaller ve $\tilde{K}e_1, \tilde{K}e_2$ izomorfik olmayan $\psi_0(M)$ -modülleridir. Çünkü $V_1|_M \neq V_2|_M$ dir. Böylece $[G:G_0] = 2$ dir. Dolayısıyla $[T^\dagger:T_0^\dagger] = 2$ dir. Eğer $G_0 = T_0^\dagger$ ise $G = T^\dagger$ dir. Bunun için $G_0 = T_0^\dagger$ olduğunu gösterirsek ispat tamamdır.

$G_0 \triangleleft G$ ve $G_0, \bar{g}$ formunu sabit bıraktığından, 3.4.Lemma'nın ispatında olduğu gibi $G_0, \tilde{K}e_1$ üzerinde sadıktır.

Şimdi $G_0^*, \tilde{K}e_1$ üzerinde G_0^* in etkisiyle tanımlanan grup olsun. $\tilde{K}e_1$ üzerinde $\psi_0(M)$ nin etkisiyle tanımlanan grup $\psi(M)$ dir. Böylece $\psi(M), G_0^*$ in bir normal alt grubudur. Ayrıca 3.5. Hipotezden sonra gösterildiği gibi $V_1|_M$ indirgenmez olduğundan $\psi_0(M), \tilde{K}e_1$ üzerinde indirgenmezdir.

Şimdi $G_0^* \leq T^\dagger(\tilde{K}/K)$ olduğunu gösterelim. M devirli olduğundan $\psi_0(M)$ devirlidir.

$$b = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix} \in \psi_0(M)$$

olsun. $G_0, \tilde{K}e_1$ i sabit bıraktığından $a \in C_{G_0}(\psi_0(M))$ elemanı,

$$a = \begin{bmatrix} \sigma_1 x & \sigma_2 z \\ 0 & \sigma_3 t \end{bmatrix} \quad \sigma_1 x, \sigma_2 z, \sigma_3 t \in T(\tilde{K}/K)$$

biçiminde bir matristir. Fakat

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 x & \sigma_2 z \\ 0 & \sigma_3 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 x & \sigma_2 z \\ 0 & \sigma_3 t \end{bmatrix}$$

eşitliğinden
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 x \xi & \sigma_2 z \xi^{-1} \\ 0 & \sigma_3 t \xi^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \sigma_1 x & \xi \sigma_2 z \\ 0 & \xi^{-1} \sigma_3 t \end{bmatrix}$$

ve

$$\sigma_1 x \xi = \xi \sigma_1 x, \quad \sigma_2 z \xi^{-1} = \xi \sigma_2 z \quad \text{ve} \quad \sigma_3 t \xi^{-1} = \xi^{-1} \sigma_3 t$$

dir. $\sigma_1 x \xi = \xi \sigma_1 x = \sigma_1 \xi^{\sigma_1} x$ olduğundan $\xi^{\sigma_1} = \xi$ ve $\sigma_3 t \xi^{-1} = \xi^{-1} \sigma_3 t = \sigma_3 \xi^{-\sigma_3} t$ olduğundan $\xi^{-\sigma_3} = \xi^{-1}$ dir.

Ayrıca $\sigma_2 z \xi^{-1} = \xi \sigma_2 z = \sigma_2 \xi^{\sigma_2} z$ olduğundan $\xi^{\sigma_2} = \xi^{-1}$ dir.

Böylece $\xi = \xi^{\sigma_1}$ ve $\xi^{-\sigma_2} = \xi^{-1}$ bulunur. Fakat $\tilde{K} = K(\xi)$ olduğundan $\sigma_1 = \sigma_3 = 1$ olmalıdır. O halde

$$a = \begin{bmatrix} x & \sigma z \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

alabiliriz. Bundan dolayı,

$$C_{G_0}(\psi_0(M)) = \left\langle \begin{bmatrix} x & \sigma z \\ 0 & t \end{bmatrix} : x, t, z \in \tilde{K}^X, \sigma \in \text{Aut}(\tilde{K}/K), \sigma^2 = 1 \right\rangle \text{ dir.}$$

$C_{G_0}(\psi_0(M))$ nin $\tilde{K}e_1$ e kısıtlanmasıyla tanımlanan, grup L olsun. O zaman

$$\tilde{K}^X = L = C_{G_0}^*(\psi(M)) = C_{G_0}^*(\tilde{K}^X)$$

dir. Aynı zamanda $\tilde{K}e_1$, $\psi_0(M)$ ye göre indirgenmez olduğundan $\tilde{K}e$, $C_{G_0}^*(\psi_0(M))$ ye göre indirgenmez ve $\tilde{K}^X \triangleleft G_0^*$ dir. Dolayısıyla 1.2.Lemma'dan dolayı G_0^* grubu $\mathbb{T}(\tilde{K}/K)$ içine gömülebilir.

$$\text{Ayrıca } |\mathbb{T}(\tilde{K}/K)| = |\mathbb{T}_0^\dagger| \quad \text{dir. Böylece,}$$

$|G_0^*| \leq |T(K/K)| = |T_0^\dagger|$ dir. Fakat $T_0^\dagger \leq G_0$ ve $|G_0^*| = |G_0|$ olduğundan $G_0 = T_0^\dagger$ dir. Böylece $G = T^\dagger(\tilde{K}/K)$ dir ve ispat tamamdır.

Şimdi ψ_0 dönüşümünü H ya genişletebileceğimizi gösterelim.

$x \in H$ için $\psi'(x)\psi_0(u) = \psi_0(xu)$ eşitliği W nin $\psi_0(M)$ yi normalleyen bir K -lineer $\psi'_0(x)$ dönüşümünü tanımlar. Bunu şöyle gösterebiliriz. $b \in K, \psi_0(u) \in W$ için $\psi'_0(x)(\psi_0(u)b) = \psi'_0(x)\psi_0(ub) = \psi_0((xu)b) = (\psi'_0(x)\psi_0(u))b$ dir. Dolayısıyla $\psi'_0(x)$, W nin K -lineer dönüşümüdür.

Aynı zamanda $x \in M$ ise 3.15. Lemma'dan dolayı $\psi'_0(x) = \psi_0(x)$ dir. 3.13. Lemma ve 3.15. Lemma'dan dolayı $\psi'_0(x)$ $\bar{g}$ formunu sabit bırakır. $x, y \in H, \psi_0(u) \in W, u \in V$ için

$\psi'_0(xy)\psi_0(u) = \psi_0((xy)u) = \psi'_0(x)\psi_0(yu) = \psi'_0(x)\psi'_0(y)\psi_0(u)$ dir. Böylece $\psi'_0(xy) = \psi_0(x)\psi'_0(y)$ dir. O halde ψ'_0 bir homomorfizmadır.

Şimdi ψ'_0 nün H üzerinde bir monomorfizma olduğunu gösterelim. $\psi'_0|_M = \psi_0$, M üzerinde bir monomorfizmadır. $K = \ker(\psi'_0)$ olsun. $K \triangle H$ ve $K \cap M = \{1\}$ olduğundan K, M yi merkezler. O zaman $K \leq C_H(M) \leq M$ olduğundan $K = \{1\}$ dir. Bunu şu şekilde de gösterebiliriz. $x \in K$ olsun. O zaman $\psi'_0(x)$, W üzerinde birim lineer dönüşümdür. $u \in V$ olsun. $\psi_0(u) \in W$ ve $\psi'_0(x)\psi_0(u) = \psi_0(xu) = \psi_0(u)$ dur. Fakat ψ_0 birebir olduğundan $xu = u$ ve H, V üzerinde sadık olduğundan $x = 1$ olmalıdır. Dolayısıyla $K = \langle 1 \rangle$ dir. Ayrıca $M \triangle H$ olduğundan $\psi_0(x)$, $\psi_0(M)$ yi normaller.

O halde 3.16. Lemma'dan dolayı $\psi_0'(x) \in \mathbb{T}^\dagger(\tilde{K}/K)$ dır.

Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz.

3.17. TEOREM : 3.1. Hipotez ve 3.12. Hipotez'leri verilsin. $\tilde{K} = GF(r^m)$, $\mathbb{T}^\dagger(\tilde{K}/K)$, $W, \bar{g}$ ve $\{e_1, e_2\}$ 3.16. Lemma'daki gibi tanımlansın. O zaman öyle

$$\psi_0: H \rightarrow \mathbb{T}^\dagger(\tilde{K}/K) \text{ ve}$$

$$\Psi_0: V \rightarrow W \text{ (bir } K\text{-izomorfizması)}$$

monomorfizmaları vardır ki,

$$(a) \text{ Her } x \in H, u \in V \text{ için } \psi_0(x)\Psi_0(u) = \Psi_0(xu)$$

$$(b) \text{ Eğer } M = \langle x \rangle \text{ ise } \psi_0(x) = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{bmatrix}, w \in \tilde{K}^\times \text{ ve} \\ K(w) = \tilde{K}.$$

$$(c) \psi_0(M) \cap \left\langle \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix} : \xi \in \tilde{K}^\times \right\rangle = \psi_0(M) \text{ ve}$$

$$(d) \text{ Her } u, v \in V \text{ için } g(u, v) = \bar{g}(\Psi_0(u), \Psi_0(v)) \\ \text{dir.}$$

Artık $V|_M$ nin homojen olmaması halinde ve H nin nilpotent olması halinde H nin karakterizasyonunu yapabiliriz. Bu durumda $N = \{1\}$ ve $H = A$ alabiliriz. O zaman 3.3. Lemma'dan dolayı $M = H$ ya da $[H:M] = 2$ dir.

Eğer $M = H$ ise V $K[M]$ -modülü olarak indirgenmezdir. Bu durum 3.12. Hipotez'le çelişir. O halde $[H:M] = 2$ ve H nilpotent olduğundan $r > 2$ dir.

x_1 bir 2'-eleman ve x_2 bir 2-elemanı olmak üzere,

$$M = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle$$

alabiliriz. 3.17. Lemma'dan dolayı $w, \eta \in \tilde{K}^\times$ için

$$\psi_0(x_1) = \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{bmatrix}, \quad \psi_0(x_2) = \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$y \in H-M$ 2-elemanı için, $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{K})$ ve $\nu \in \tilde{K}^\times$ olmak üzere,

$$\psi_0(y) = \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma\nu^{-1} \\ -\sigma\nu & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Çünkü $y \in H-M$ ve $[H:M] = 2$ olduğundan

$$H = M \cup yM \text{ ve } \psi_0(M) \cap \psi_0(yM) = \emptyset$$

$$\text{dir. Böylece } \psi_0(y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma\nu & 0 \\ 0 & \sigma\nu^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma\nu^{-1} \\ -\sigma\nu & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Buradan, } \psi_0(y^2) = \bar{y}^2 = \begin{bmatrix} -\sigma^2\nu^{-\sigma\nu} & 0 \\ 0 & -\sigma^2\nu^{\sigma\nu^{-1}} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Fakat $y^2 \in M$ ve $\psi(M) \leq \tilde{K}$ olduğundan

$-\sigma^2\nu^{\sigma\nu} \in \tilde{K}$ dir. Buradan $\sigma^2 = 1$ bulunur. $-\nu^{-\sigma\nu} = \xi$ ol-

$$\text{sun. O zaman } \psi_0(y^2) = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Şimdi $\sigma^2 = 1$ ve $-\nu^{\sigma\nu} = \xi$ eşitliğini gözönüne alalım. Burada iki olasılık vardır.

3.18. LEMMA : $\sigma = 1$ ya da $m = 2n$ ve $\sigma: \epsilon \rightarrow \epsilon^{r^n}$ dir.

İSPAT : İlk olarak $\sigma = 1$ durumunu inceleyelim. Bu durum 2.3. Örnekteki hale karşılık gelir. $\sigma = 1$ olduğundan

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & \nu^{-1} \\ -\nu & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Kolayca görüldüğü gibi $\bar{y}$ elemanı

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{bmatrix}$$

elemanını tersine götürür. Yani $\bar{x}_1 \bar{y} = \bar{x}_1^{-1}$ ve $\bar{x}_2 \bar{y} = \bar{x}_2^{-1}$ dir. Fakat H nilpotent ve $\bar{x}_2$ bir 2'-elemanı olduğundan $\bar{x}_2 = 1$ olmalıdır. Dolayısıyla $\psi_0(H)$ bir 2-grubudur. 3.17. Teorem'den dolayı $\psi_0: H \rightarrow \mathbb{T}^\dagger(K/K)$ bir monomorfizma olduğundan ψ_0, H dan $\psi_0(H)$ üzerine bir izomorfizmadır. Bundan dolayı H bir 2-grubudur. Aynı zamanda $-\nu^{-\sigma} \nu = -\nu^{-1} \nu = -1$ olduğundan $\bar{y}^2 = -1$ ve $|\bar{y}| = 4$ dür. Şimdi $y \in H-M$ elemanı keyfi ve M yi eşlenikleme ile tersine götürdüğünden H kuaterniyon grubudur.

$4 \mid |M|$ ve 3.17. Lemma (b) den dolayı $|M| \mid (r^m - 1)$ olduğundan $4 \mid (r^m - 1)$ dir. Böylece, $r^m \equiv 1 \pmod{4}$ dir.

$\hat{K}^X$ içinde ξ bir 2'-eleman ve θ bir 2-eleman olmak üzere $\nu = \xi \theta$ olan $\epsilon^2 = \xi$ olacak şekilde $\epsilon \in \hat{K}^X$ vardır.

$$d = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{bmatrix}$$

olsun. ψ'_0 ve Ψ'_0 dönüşümleri her $u \in V$ ve $z \in H$ için

$$\Psi'_0(u) = d\Psi_0(u), \quad \psi'_0(z) = d\psi_0(z)d^{-1}$$

şeklinde tanımlansın. $d \in \mathbb{T}_0^\dagger$ olduğundan d, $\bar{g}$ formunu sabit bırakır. Böylece ψ_0, Ψ_0 dönüşümleri yerine ψ'_0, Ψ'_0 dönüşümlerini alabiliriz. Fakat, $\psi_0(M)$ diyagonal matrislerden oluştuğu için d, $\psi_0(M)$ yi merkezler. Bundan dolayı M üzerinde $\psi_0 = \psi'_0$ dür. Bundan başka $y \in H-M$ için

$$\psi_0(y) = \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & \nu^{-1} \\ -\nu & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \theta^{-1} = \nu^{-1} \xi$$

olduğundan,

$$\psi'_0(y) = d\psi(y)d^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \xi \nu^{-1} \\ -\xi^{-1} \nu & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta^{-1} \\ -\theta & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Böylece $\psi'_0(H)$ 2.3. Örnek'teki B grubunun alt grubudur. Gerçekten, 2.3. Örnekte,

$$Q = \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu^{-1} \end{bmatrix} : \nu \in \tilde{K}^\times \quad \tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $B = \langle Q, \tau \rangle$ dir. $\psi_0(M) \leq Q$ ve

$o(\psi_0(y)) = o(\tau) = 4$ dir. Bundan dolayı $\psi'_0(H)$ B'nin bir alt grubuna izomorftur.

Şimdi $\sigma: \epsilon \rightarrow \epsilon^{r^n}$ ve $m = 2n$ durumunu inceleyelim. Bu durumda $-\nu^{-\sigma} \nu = -\nu^{1-r^n} = \xi$ dir. Eşleniklemeyle

$$\bar{x}_1 \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \nu^{-1} \\ -\sigma \nu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\sigma \nu^\sigma \\ \sigma \nu^\sigma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^{-\sigma} & 0 \\ 0 & w^\sigma \end{bmatrix}$$

dir. Fakat H nilpotent ve $\bar{x}_1$, 2'-elemanı olduğundan $\bar{x}_1 \bar{y} = \bar{x}_1$ dir. Dolayısıyla,

$$\bar{x}_1 \bar{y} = \begin{bmatrix} w^{-\sigma} & 0 \\ 0 & w^\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{bmatrix}$$

dir. Buradan $w^\sigma = w^{r^n} = w^{-1}$ ve sonuç olarak $w^{r^n+1} = 1$ elde edilir. O halde $|\langle w \rangle| = (r^n + 1)$ dir.

$$2.4. \text{ örnek'teki } D = \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^{-1} \end{bmatrix} \text{ grubunu göz-}$$

önüne alalım. O zaman $\psi_0(H)$ nin Hall 2'-alt grubu D nin bir alt grubudur.

$[\psi_0(H) : \psi_0(M)] = 2$ olduğundan $\psi_0(H)$ nin Hall 2'-alt grubu $O_2, (\psi_0(M)) = \langle \bar{x}_1 \rangle$ olduğu açıktır.

Tekrar eşleniklemeyle,

$$\bar{x}_2 \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \nu^{-1} \\ -\sigma \nu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\sigma \nu^{-\sigma} \\ \sigma \nu^{\sigma} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta^{-\sigma} & 0 \\ 0 & \eta^{\sigma} \end{bmatrix}$$

dır. 3.3. Lemma'dan dolayı H'nin 2-Sylow altgrubu kuaterniyon, dihedral ya da yarıdihedraldir.

Şimdi $o(\eta) = 2^t$ veya $o(\eta) = 2^{t+1}$ olarak tanımlamak suretiyle, $\eta^{-\sigma} = \eta^{2^{t-1}}$ olarak yazılabilir.

$o(\eta) = 2^s$ olsun. Eğer $\langle \bar{x}_2, \bar{y} \rangle$ dihedral veya kuaterniyon ise $\bar{x}_2 \bar{y} = \bar{x}_2^{-1}$ olduğundan $\eta^{-\sigma} = \eta^{-1} = \eta^{2^{s-1}}$ yazılabilir. Bu durumda $t = s$ alabiliriz.

Eğer $\langle \bar{x}_2, \bar{y} \rangle$ yarıdihedral ise o zaman $\bar{x}_2 \bar{y} = \bar{x}_2^{-1+2^{s-1}}$ olduğundan, $\eta^{-\sigma} = \eta^{-1+2^{s-1}}$ dir. Bu durumda $t + 1 = s$ olabiliriz. Önce $o(\eta) = 2^t$ olsun. O zaman $\eta^{-\sigma} = \eta^{-1}$ olduğundan $\eta^{\sigma} = \eta$ ve buradan $\eta^{r^n-1} = 1$ bulunur. O zaman $2^t | (r^n-1)$ olmalıdır. Üstelik $2^t \geq 4$ olması gerektiğinden $4 | (r^n-1)$ dir. Bu durumda $r^n \equiv 1 \pmod{4}$ tür.

Şimdi ise $o(\eta) = 2^{t+1}$ olsun. Bu halde $\langle \bar{x}_2, \bar{y} \rangle$ yarıdihedral olduğundan $t \geq 2$ dir.

Şimdi $\eta^{2^{t+1}} = \eta^{2 \cdot 2^t} = 1$ olduğundan $\eta^{2^t} = -1$ olmalıdır. Dolayısıyla $\eta^{\sigma} = \eta^{r^n} = \eta^{1-2^t} = -\eta$ ve buradan $\eta^{r^n-1} = -1$ bulunur. O zaman $\eta^{2(r^n-1)} = 1$ olduğundan $2^t | (r^n-1)$ ve buradan $t \geq 2$ olduğundan $4 | (r^n-1)$ elde edilir. O halde $r^n \equiv 1 \pmod{4}$ tür.

$2^s | (r^n-1)$ olmak üzere $\rho \in \tilde{K}^{\times}$ ve $o(\rho) = 2^{s+1}$ olsun.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{bmatrix}$$

olsun. O zaman $H_1 = \langle \psi_0(H), \bar{x}_0 \rangle \geq \psi_0(H)$ ve H_1 nilpotenttir.

$2^s \mid (r^n - 1)$ olduğundan $2^{s+1} \nmid (r^n - 1)$ dir. Böylece $\langle \rho \rangle \tilde{K}^X$ nin Sylow 2-altgrubudur.

$\xi, \theta \in \tilde{K}^X$ sırasıyla $2'$ -elemanı ve 2-elemanı olmak üzere $\nu = \xi \theta$ olsun.

$$\begin{bmatrix} \theta^{-1} & 0 \\ 0 & \theta \end{bmatrix} = \bar{w} \in H_1$$

olmak üzere $\bar{y}$ yerine $\bar{y}' = \bar{y}\bar{w}$ elemanını alalım. O zaman

$$\bar{y}' = \bar{y}\bar{w} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma\nu^{-1} \\ -\sigma\nu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^{-1} & 0 \\ 0 & \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma\xi^{-1} \\ \sigma\xi & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Burada ν yerine ξ gelmiştir ve ξ bir $2'$ -elemanıdır.

Böylece $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma\nu^{-1} \\ -\sigma\nu & 0 \end{bmatrix}$ ifadesinde ν nün bir

$2'$ -elemanı olduğunu kabul edebiliriz.

Şimdi $\langle \bar{y}, \bar{x}_0 \rangle$ yarıdihedral olduğundan $o(\bar{y}) = 2$ ya da $o(\bar{y}) = 4$ tür.

Kabul edelim ki $\bar{y}^2 = 1$ olsun. O zaman $-\nu^{-\sigma}\nu = \xi = 1$ ve buradan $\nu^{r^n} = -\nu$ dür. Buradan $\nu^{2(r^n-1)} = 1$ elde edilir. Fakat ν bir $2'$ -elemanı olduğundan $\nu^{r^n-1} = 1$ ve buradan $\nu^{r^n} = \nu$ olmalıdır. Bu durum imkansızdır. Bundan dolayı $o(\bar{y}) = 4$ tür. Böylece $-\nu^{-\sigma}\nu = \xi = -1$ ve buradan $\nu^\sigma = \nu$ dür. Özel olarak $\nu \in GF(r^n)$ dir. O zaman ν $2'$ -elemanı olduğundan öyle bir $\lambda \in GF(r^n)$ vardır ki $\lambda^2 = \nu$ dür.

$$d = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$$

olsun. $\psi'_0(x) = d\psi_0(x)d^{-1}$, $\Psi'_0(u) = d\Psi_0(u)$ ve $H'_1 = dH_1d^{-1}$ olsun. d $\bar{g}$ formunu sabit bıraktığından ψ_0, Ψ_0 yerine ψ'_0, Ψ'_0 dönüşümlerini alabiliriz. O zaman

$$\psi'_0(\bar{y}) = d\bar{y}d^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma\nu^{-1} \\ -\sigma\nu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $\bar{y}_0$ elemanı $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix}$ şeklini alır. Ayrıca

$\psi'_0(\bar{x}_0) = d\bar{x}_0d^{-1} = \bar{x}_0$ dir. Böylece $\langle \bar{y}, \bar{x}_0 \rangle$ yarıdihedral grubu 2.4. Örnekteki yarıdihedral S grubunun aynıdır. Buna gösterelim. $o(\rho) = 2^{s+1}$, $2^s \mid (r^n-1)$ ve $o(\rho) = 2$ dir.

$$a = \bar{y}\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma\rho^{-1} \\ -\sigma\rho & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{olsun. O zaman } a^2 = \begin{bmatrix} -\rho^{1-r^n+1} & 0 \\ 0 & -\rho^{r^n-1} \end{bmatrix}$$

dir. Fakat $\rho^{2^{s+1}} = (\rho^{2^s})^2 = 1$ ve ρ bir 2-elemanı olduğundan $\rho^{r^n-1} = \rho^{2^s} = -1$ dir. Yerine konursa

$$a^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ elde edilir. Bundan başka}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 a &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma\rho^{-1} \\ -\sigma\rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma\rho^{-1} \\ -\sigma\rho & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sigma\rho^{-2}\sigma\rho & 0 \\ 0 & -\sigma\rho^2\sigma\rho^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho^{-2r^n} & 0 \\ 0 & -\rho^{2r^n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. $\rho^{2^{s+1}} = 1$ ve $2^{s+1} \mid 2(r^n-1)$ olduğundan $\rho^{2(r^n-1)} = 1$ ve buradan $-\rho^{2r^n-1} = -\rho^{2(r^n-1)+1} = -\rho$ ve $-\rho^{-2r^n+1} = -\rho^{2(r^n-1)-1} = -\rho^{-1}$ elde edilir.

Öte yandan $\rho^{2^{s+1}} = 1$ olduğundan $(\rho^{2^s})^2 = 1$ ve

buradan $\rho^{2^S} = -1$ ve buradan $(\rho^{2^S})^{-1} = \rho^{-2^S} = -1 = \rho^{2^S}$ bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \begin{bmatrix} -\rho^{-2r^{n+1}} & 0 \\ 0 & -\rho^{2r^{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho^{-1} & 0 \\ 0 & -\rho \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \rho^{2^S-1} & 0 \\ 0 & \rho^{-2^S+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0^{2^S-1} \\ 0 & \rho^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \bar{x}_0^{-1+2^S} \end{aligned}$$

dir. O halde $\langle \bar{y}, \bar{x}_0 \rangle$ yarıdihedral grubu 2.4. Örnekteki yarıdihedral S grubunun anısıdır. Ayrıca $\psi_0(M)$ nin 2'-altgrubu $\langle \bar{x}_1 \rangle = O_2, (H) = O_2, (H_1)$ 2.4. Örnekteki D grubu içindedir.

Şimdi 2.4. Örnekte $B = S \times D$ olduğundan $\psi_0'(H) \leq H_1 \leq B$ dir.

Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz.

3.19. TEOREM : 3.1. Hipotezi ve 3.12. Hipotezi verilsin. $H = A$ nilpotent ve $N = \{1\}$ olsun. O zaman $r > 2$ dir ve aşağıdakilerden biri sağlanır.

(1) H kuaterniyon grubudur ve $B_0, 2.3.$ Örnekteki B grubunun altgrubu olmak üzere H, V, g 2.3. Örnekteki B_0, V, g ile özdeştir.

(2) H nın kuaterniyon, dihedral ya da yarı dihedral bir S_2 -altgrubu vardır ve H, V, g 2.4. Örnekteki B_0, V, g ile özdeştir. Burada $B_0 \leq B$ ve $B, 2.4.$ Örnekteki altgruptur.

Şimdi 3.11. Teoremi ve 3.19. Teoremi birleştirerek aşağıdaki Teoremi elde ederiz.

3.20. TEOREM : 3.1. Hipotezi' verilsin. Kabul edelim ki $H = A$ nilpotent ve $N = \{1\}$ olsun. O zaman $B_0, (2.1)-(2.4)$ örneklerdeki B altgrubunun altgrubu olmak üzere H, V, g bu örneklerdeki B_0, V, g ile özdeştir.

Şimdi H grubunun nilpotent olması durumunda (2.2)-(2.4) örnekleri üzerine bazı sınırlamalar koyabiliriz.

3.21. LEMMA :

(1) 2.2. Örnekteki B altgrubu V üzerinde indirgenmez ise $m = 1$ dir.

(2) 2.3. Örnekteki B altgrubu V üzerinde indirgenmez ise $m = 2^s$ dir.

ISPAT : (1) 2.2. Örnekteki B altgrubunu gözönüne alalım. Kabul edelim ki $V|_B$ indirgenmez olsun. B kuaterniyon grubu olduğundan 3.11. Teorem de $B = H$ alabiliriz. 2.2. Örnekte,

$B = \langle \varphi\nu, Q \rangle$, $\nu^\varphi = -\nu$, $\nu \in \hat{K}^x$, $\varphi: \epsilon \rightarrow \epsilon^{r^m}$ ve $|B| = 2^{t+1}$ dir.

Şimdi $Q = \langle w \rangle$ ve $o(w) = 2^t$ olsun. 2.2. Örnek'te $2^t | r^m + 1$ olduğundan $r^m \equiv -1 \pmod{4}$ tür. Dolayısıyla m tek'tir. Ayrıca

$$r^m + 1 = (r + 1)(r^{m-1} - r^{m-2} + \dots + r^2 - r + 1)$$

dir. Bu durumda ikinci çarpan tek tamsayıdır. Dolayısıyla $2^t | (r + 1)$ dir. O zaman $w^{r^{2-1}} = 1$ dir. O halde $w \in GF(r^2)$ ve böylece $K(w) \subseteq GF(r^2) \subseteq GF(r^{2m}) = \hat{K}$ elde edilir.

0.9. Teorem'den dolayı Q B nin maksimal normal ve devirli altgrubudur. Dolayısıyla $Q = M$ alabiliriz. O zaman 3.10. Teorem (b) den dolayı $\hat{K} = K(w)$ dir. O halde $\hat{K} = GF(r^2)$ dir.

Şimdi $GF(r^{2m}) = GF(r^2)$ olduğundan $m = 1$ bulunur.

(2) Şimdi 2.3. Örnekteki B altgrubunu gözönüne alalım. Kabul edelim ki $V|_B$ indirgenmez olsun. $2^t | (r^m - 1)$ olmak üzere B mertebesi $2^t + 1$ olan kuaterniyon grubu olduğundan 3.19. Teorem (1) de $B = H$ alabiliriz. Öte yandan 2.3. Örnekte

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{bmatrix},$$

$o(w) = 2^t$ olmak üzere $B = \langle \tau, Q \rangle$ dur. $r^m \equiv 1 \pmod{4}$ tür. Böylece m sayısı n bir tek sayı ve $s \geq 0$ olmak üzere $m = 2^s n$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca,

$$r^m - 1 = (r^{2^s} - 1)(r^{2^s(n-1)} + \dots + r^{2^s} + 1)$$

dir. Bu durumda ikinci çarpan tek tamsayıdır. Çünkü $r > 2$ dir. Dolayısıyla $2^t | (r^{2^s} - 1)$ dir. Böylece $w \in GF(r^{2^s})$ dir. Öte yandan 0.9. Teoremden dolayı Q, B nin maksimal normal ve devirli altgrubudur. Böylece 0.5. Lemma'dan dolayı $C_B(Q) = Q$ dur. Dolayısıyla $Q = M$ alabiliriz. O zaman 3.17. Teorem (b) den dolayı $\tilde{K} = K(w)$ dur.

Şimdi $\tilde{K} \subseteq GF(r^{2^s}) \subseteq \tilde{K}$ olduğundan $\tilde{K} = GF(r^{2^s})$ dir. Öte yandan $\tilde{K} = GF(r^m)$ olduğundan $GF(r^{2^s}) = GF(r^m)$ dir. Buradan $m = 2^s$ bulunur.

3.22. LEMMA : 2.4. Örnekteki S grubunu gözönüne alalım.

$$y = \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{elemanı } Q \text{ nun üretici, } m = 2n \text{ ve}$$

$K^* = GF(r^n)$ olsun. T, S nin bir maksimal altgrubu olsun.

(1) $T = Q$ olsun. O zaman T devirlidir ve

$V|_T = \tilde{K}e_1 + \tilde{K}e_2$ iki tam izotropik altuzayın toplamıdır.

(2) $T = \langle \tau y, y^2 \rangle$ olsun. O zaman T dihedraldir ve

$$V|_T = (K^*e_1 + K^*\nu e_2) + (K^*\nu e_1 + K^*e_2)$$

iki tam izotropik altuzayın toplamıdır.

(3) $T = \langle \tau, y^2 \rangle$ olsun. O zaman T kuaterniyon ve

$$V|_T = (K^*(1+\nu)e_1 + K^*(1-\nu)e_2) + (K^*(1+\nu^{-1})e_1 + K^*(1-\nu^{-1})e_2)$$

iki singüler olmayan ve karşılıklı ortogonal olan altuzayın toplamıdır. Bundan başka,

$$y(K^*(1+\nu)e_1 + K^*(1-\nu)e_2) = K^*(1+\nu^{-1})e_1 + K^*(1-\nu^{-1})e_2$$

dir.

$$\text{ISPAT : } 2.4. \text{ Örnekte } \tau = \begin{bmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{bmatrix},$$

$\tau(\alpha e_1 + \beta e_2) = \beta^\varphi e_1 - \alpha^\varphi e_2$ dir. $2^t \mid (r^n - 1)$ olmak üzere

$Q = \langle y \rangle$ mertebesi $2^t + 1$ dir. $S = \langle Q, \tau \rangle$ mertebesi

$2^t + 2$ olan yarıdihedral S_2 -altgrubudur. Bundan dolayı

0.8. Teoremden dolayı S nin maksimal T altgrubu devirli veya diedral veya genel kuaterniyon olmak durumundadır.

$$o(y) = 2^{t+1} \text{ olduğundan } \nu^{2^{t+1}} = 1 \text{ dir. Fakat}$$

$$2^t \mid (r^n - 1) \text{ olduğundan } \nu^{r^n} = -\nu \text{ ve } (\nu^2)^{r^n} = \nu_2 \text{ dir.}$$

Böylece $\nu^2 \in K^*$ dir. Bundan dolayı V nin bütün K^* -altuzayları y^2 altında invarianttir.

(1) $T = Q$ olsun. O zaman T devirlidir. y elemanı

$\tilde{K}e_1$ ve $\tilde{K}e_2$ altuzaylarını sabit bıraktığından bu altuzayların her biri T -modülüdür. g formu $u = \alpha e_1 + \beta e_2$,

$v = \alpha' e_1 + \beta' e_2$ için $g(u, v) = \text{Tr}(\beta \alpha' - \alpha \beta')$ olarak tanım-

landığından, $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 0$ ve $g(e_1, e_2) = \text{Tr}(-1) \neq 0$ dır. Dolayısıyla Ke_1 ve Ke_2 tam izotropik altuzaylardır.

(2) $T = \langle \tau_Y, Y^2 \rangle$ olsun. $o(\tau_Y) = 2$ ve τ_Y, Y^2 yi tersine götürdüğünden T dihedraldir.

$\tau_Y(e_1) = \tau(Ye_1) = -\nu^\varphi e_2 = \nu e_2$ ve $\tau_Y(\nu e_2) = \tau(e_2) = e_1$ dir. Bundan dolayı $V|_T$ nin $(K^\star e_1 + K^\star \nu e_2)$ ve $(K^\star \nu e_1 + K^\star e_2)$ altuzayları T -invarianttır. Dolayısıyla bu altuzaylar $K[T]$ -modülü ve m -boyutlu K -uzayıdır.

Aynı zamanda bu altuzayların kesişimi sıfırdır.

Bundan dolayı,

$$V|_T = (K^\star e_1 + K^\star \nu e_2) \dot{+} (K^\star \nu e_1 + K^\star e_2)$$

dir. $\alpha e_1 + \beta \nu e_2 \in K^\star e_1 + K^\star \nu e_2$ ve $\alpha' e_1 + \beta' \nu e_2 \in K^\star e_1 + K^\star \nu e_2$ olsun. O zaman $\text{tr}: K^\star \rightarrow K$ ve $\text{Tr}': \tilde{K} \rightarrow K^\star$ izdönüşümleri olmak üzere,

$$\begin{aligned} g(\alpha e_1 + \beta \nu e_2, \alpha' e_1 + \beta' \nu e_2) &= \text{Tr}(\beta \nu \alpha' - \beta' \nu \alpha) \\ &= \text{tr}(\beta \nu \alpha' - \beta' \nu \alpha + \beta^\varphi \nu^\varphi (\alpha')^\varphi - (\beta')^\varphi \nu^\varphi \alpha^\varphi) \\ &= \text{tr}(\beta \nu \alpha' - \beta' \nu \alpha - \beta \nu \alpha' + \beta' \nu \alpha) = \text{tr}(0) = 0 \end{aligned}$$

dir.

Şimdi $w, z \in K^\star \nu e_1 + K^\star e_2$ olsun. $y(K e_1 + K^\star \nu e_2) = K^\star \nu e_1 + K^\star e_2$ olduğundan öyle $u, v \in K^\star e_1 + K^\star \nu e_2$ vardır ki $w = yu$ ve $z = yv$ dir. Aynı zamanda g formu T -tarafından invariant bırakıldığından

$$g(w, z) = g(yu, yv) = g(u, v) = 0$$

dir. Dolayısıyla $V|_T$ nin ayrışımındaki direkt faktörler tam izotropiktir.

(3) $T = \langle \tau, y^2 \rangle$ olsun. $o(\tau) = 4$, $(y^2)^{2^{t-1}} = \tau^2$ ve τ, y^2 elemanını tersine götürdüğünden T genel kuaterniyondur. $k, k' \in K^\star$ için,

$\tau(k(1+\nu)e_1 + k'(1-\nu)e_2) = k'(1+\nu)e_1 + k(1-\nu)e_2$ olduğundan $V|_T$ nin $K^\star(1+\nu)e_1 + K^\star(1-\nu)e_2$ altuzayı T -invarianttır.

Benzer şekilde $V|_T$ nin $K^\star(1+\nu^{-1})e_1 + K^\star(1-\nu^{-1})e_2$ altuzayı T -invarianttır. Ayrıca V nin her $K^\star$ -altuzayı y^2 -invarianttır. Bundan dolayı bu altuzaylar $K[T]$ -modülüdür. Ayrıca yukardaki iki altuzayın kesişimi (0) dır. Dolayısıyla,

$$V|_T = (K^\star(1+\nu)e_1 + K^\star(1-\nu)e_2) + (K^\star(1+\nu^{-1})e_1 + K^\star(1-\nu^{-1})e_2)$$

dir. $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in K^\star$ için $u = \alpha(1+\nu)e_1 + \beta(1-\nu)e_2$

$v = \alpha'(1+\nu^{-1})e_1 + \beta'(1-\nu^{-1})e_2$ olsun. O zaman,

$$g(u, v) = \text{Tr}(\beta(1-\nu)\alpha'(1+\nu^{-1}) - \alpha(1+\nu)\beta'(1-\nu^{-1}))$$

$$= \text{Tr}(\beta\alpha'(\nu^{-1}-\nu) - \alpha\beta'(\nu-\nu^{-1}))$$

$$= \text{tr}((\beta\alpha' + \alpha\beta')(\nu^{-1}-\nu + (\nu^{-1}-\nu)x^n))$$

$$= \text{tr}((\beta\alpha' + \alpha\beta')(\nu^{-1}-\nu-\nu^{-1} + \nu)) = \text{tr}(0) = 0$$

dir. O halde bu iki altuzay birbirleriyle ortogonaldır.

Bundan başka

$$y(K^\star(1+\nu)e_1 + K^\star(1-\nu)e_2) = K^\star(\nu + \nu^2)e_1 + K^\star(\nu^{-1}-\nu^{-2})e_2$$

$$= K^\star\nu^2(1+\nu^{-1})e_1 + K^\star\nu^2(\nu^{-1}-\nu^{-2})e_2$$

$$= K^\star(1+\nu^{-1})e_1 + K^\star(1-\nu^{-1})e_2$$

dir.

$\nu x^n = -\nu$ olduğundan bu altuzaylar τ altında invarianttır. Böylece (3) ün ispatı tamamdır.

BÖLÜM 4

BAZI SIMPLEKTİK İLKEİ K[G]-MODÜİLER

0.22. Tanım'da ilkel modül tanımı yapılmıştır.

Tanımı takip eden açıklama'da görüldüğü gibi, eğer bir indirgenmez $k[H]$ -modülü V hiç bir öz altmodülü tarafından oluşturulamaz ise V ye bir ilkel $k[H]$ -modülü denir. Burada buna paralel olarak simplektik ilkel $k[H]$ -modülü tanımlanacaktır. Bu tip modüllerin yapısı Berger tarafından [9] da verilmiştir.

Aşağıdaki bilgiler bu çalışmadan alınmıştır. Burada V nin simplektik ilkel olması halinde minimal $k[H]$ - modülü olduğu gösterilecek ve bundan önceki kısımdan yararlanarak H nin nilpotent olması halinde V ve H tam olarak belirlenecektir.

4.1. HİPOTEZ : K bir sonlu cisim, H bir grup ve V bir indirgenmez $K[H]$ -modülü olsun.

$g : V \times V \rightarrow K$ bir singüler olmayan simplektik bilinear form ve H , g formunu sabit bıraksın.

4.2. TANIM : 4.1. Hipotez'i verilsin. Eğer,

(1) Bir $H_0 \leq H$ altgrubu için U , V nin bir $K[H_0]$ - altmodülü,

(2) g , U üzerinde singüler olmayan simplektik bilinear form,

$$(3) \quad U|_H \cong V \text{ ve}$$

(4) Eğer $x, y \in H$ ve $xH_0 \neq yH_0$ ise xU ve yU ortogonal ise V ye U dan simplektik olarak oluşturulmuş $k[H]$ -modül denir.

Tanımdan görüldüğü gibi V simplektik ilkel değilse ilkel olamaz.

4.3. LEMMA: ([9], 7.5. Teorem) 4.1. Hipotezi veril-sin. Eğer $N \triangle H$ ve V_i ler V_N nin homojen bileşenleri olmak üzere, $V|_N = V_1 + \dots + V_t$ ise o zaman bütün V_i alt-uzayları ya singüler değildir ya da izotropiktir.

İSPAT : $S = \text{deng}(H, V_1)$ olsun. S g formunu sabit bıraktığından $V_1 \cap V_1^\perp$ bir $K[S]$ -modüldür. Clifford Teoreminden dolayı V_1 bir indirgenmez $K[S]$ -modülü ve $V_1|_H \cong V$ dir. Bundan dolayı $V_1 \cap V_1^\perp = V_1$ ya da $V_1 \cap V_1^\perp = (0)$ dır.

Eğer $V_1 \cap V_1^\perp = V_1$ ise V_1 izotropiktir. Eğer $V_1 \cap V_1^\perp = (0)$ ise V_1 singüler değildir. Öte yandan Clifford Teoreminden dolayı her $i = 1, 2, \dots, t$ için $V_i = h_i V_1$ olacak şekilde $h_i \in H$ vardır. Aynı zamanda g formu H -in-varyanttır. Buradan;

$$g(V_i, V_i) = g(h_i V_1, h_i V_1) = g(V_1, V_1)$$

dir. Bundan dolayı V_1 izotropikse V_i izotropiktir. V_1 singüler altuzay değilse V_i singüler değildir. Böylece ispat tamamdır.

4.4. LEMMA : ([9], 7.6. Lemma) 4.3. Lemma'da eğer V_1 singüler değilse o zaman V_i lerin tümü ikişerli ortogonaldır ve V, V_1 den simplektik olarak oluşturulmuş

$K[H]$ - modülüdür.

İSPAT : Her $i = 1, 2, \dots, t$ için $V_i = h_i V_1$ olacak şekilde $h_i \in H$ vardır. H grubu g formunu sabit bıraktığından $j > 1$ için V_1 ile V_j lerin ortogonal olduğunu gösterirsek Lemmanın birinci kısmı ispatlanmış olur. V_1 singüler olmadığından $V_1 \cap V_1^\perp = (0)$ dir. Aynı zamanda g formu N tarafından sabit bırakıldığından $V_1^\perp$ $K[N]$ -modülüdür. Yani V_1 in V içinde bir $K[N]$ -bütünleridir. Fakat V_i ler $K[N]$ nin homojen bileşenleri olduğundan $\sum_{i>1} V_i \subseteq V_1^\perp$ in V içinde tek bütünleridir. Bundan dolayı $V_1^\perp = \sum_{i>1} V_i$ dir. Lemmanın ikinci kısmı ilk kısmın ve Clifford Teoreminin bir sonucudur. Böylece ispat tamamdır.

4.5. LEMMA : ([9], 7.7. Lemma) 4.3. Lemmada eğer V_1 izotropik ise o zaman bir $x \in H$ vardır ve

- (a) $x^2 \in S = \text{deng}(H, V_1)$ ve $x \in N_H(S)$ dir.
- (b) $U = V_1 + xV_1$ bir singüler olmayan $K[M]$ -modülüdür. Burada $M = \langle S, x \rangle$ dir.
- (c) V, U dan simplektik olarak oluşturulur.
- (d) $C_S(V_1) = C_S(xV_1)$

dir.

İSPAT : V_1 izotropik olduğundan $V_1 \subseteq V_1^\perp$ dir. $V|_N$ tam indirgenir olduğundan V içinde $K[N]$ -modülü $V_1^\perp$ nin bir $K[N]$ -bütünleri $V^\star$ bulabiliriz ve $V = V^\star + V_1$ dir.

V singüler olmadığından $V^\star + V_1$ de singüler değildir. g formu $V^\star + V_1$ üzerinde singüler olmadığından ve N altgrubu g formunu sabit bıraktığından $V^\star, V_1$ e kontragradyanttır.

Özel olarak V^* bir homojen $K[N]$ -modülüdür.

$\dim V^* = \dim V$ olduğundan $V^*|_N$ nin homojen bileşenidir. Böylece bir $1 \leq j \leq t$ için $V^* = V_j$ dir.

Clifford Teoreminden $V_j = xV_1$ olacak şekilde bir $x \in H$ vardır. Böylece $\sum_{i \neq 1, j} V_i$ V içinde $(V_1 + V_j)$ nin bir tek $K[N]$ -bütünleridir. Fakat $(V_1 + V_j)$ nin $K[N]$ -bütünleri $(V_1 + V_j)^\perp$ dir. Bundan dolayı,

$$(V_1 + V_j)^\perp = \sum_{i \neq 1, j} V_i$$

dir. Şimdi $y \in H$ için $yV_1 = V_1$ ya da $yxV_1 = V_1$ olsun. O zaman $y(V_1 + xV_1) = V_1 + V_1$ dir. Çünkü $yV_1 = V_1$ ise $y(V_1 + xV_1) = V_1 + yxV_1$ dir. $yx \in H$ olduğundan bir $i \in I$ için $yxV_1 = V_i$ dir. Dolayısıyla $y(V_1 + xV_1) = V_1 + V_i$ dir.

Eğer $yxV_1 = V_1$ ise o zaman $y(V_1 + xV_1) = yV_1 + V_1$ dir. Tekrar $y \in H$ olduğundan bir $i \in I$ için $yV_1 = V_i$ dir. Dolayısıyla $y(V_1 + xV_1) = V_i + V_1$ dir. $V_1 \subset V_1^\perp$ olduğundan $\sum_{s \neq 1, j} V_s \subset V_1^\perp$ dir. Fakat $V_1 + V_j$ singüler olmadığından $i = j$ ve $\{yV_1, yxV_1\} = \{V_1, xV_1\}$ dir.

Şimdi $y = x$ alınabileceğini gösterelim. Mümkünse $\{xV_1, x^2V_1\} \neq \{V_1, xV_1\}$ olsun. O zaman $x^2V_1 \neq V_1, xV_1 \neq x^2V_1$ dir. Fakat $x^2V_1, V|_N$ nin bir homojen bileşeni olduğundan bir $i \neq 1, j$ için $x^2V_1 = V_i$ olmalıdır. O zaman yukarıda görüldüğü gibi $x^2V_1 \in (V_1 + xV_1)^\perp$ dir. Fakat g formu H tarafından sabit bırakıldığından

$$0 = g(xV_1, x^2V_1) = g(V_1, xV_1)$$

dir. Bu imkansızdır. Çünkü $V_1 + xV_1$ bir singüler olmayan altuzaydır. Bundan dolayı $y = x$ alınabilir. O zaman

$\{xV_1, x^2V_1\} = \{V_1, xV_1\}$ dir. Dolayısıyla $x^2V_1 = V_1$ ve $x^2 \in S$ dir.

Eğer $y \in S$ ile $yV_1 = V_1$ dir. Böylece

$$\{yV_1, yxV_1\} = \{V_1, yxV_1\} = \{V_1, xV_1\}$$

dir. Buradan $x^{-1}yxV_1 = V_1$ ve $x^{-1}yx \in S$ dir. Böylece (a) sağlanır.

$M = \langle S, x \rangle$ olsun. O zaman $[M:S] = 2$ dir. Bundan dolayı $S \triangleleft M$ dir. Böylece $M = S \langle x \rangle$ dir. (a) nin ispatında görüldüğü gibi $x(V_1 \dot{+} xV_1) = V_1 \dot{+} xV_1$ ve $s \in S$ için $s(V_1 \dot{+} xV_1) = sV_1 \dot{+} sxV_1 = V_1 \dot{+} x(x^{-1}sx)V_1 = V_1 \dot{+} xV_1$ dir. Bundan dolayı $U = V_1 \dot{+} xV_1$ bir $K[M]$ -modülüdür.

Böylece (b) nin ispatı tamamdır. Şimdi O.13. Teoremden dolayı $V_1|_H^H = K[H] \otimes_{K[S]} V_1 \cong V$ dir. Fakat $V_1|_H^H \cong (V_1|_M^M)|_H^H \cong U|_H^H$ olduğundan $V \cong K[H] \otimes_{K[M]} U$ dir. Böylece eğer M nin H içindeki sol koset temsilcilerinin bir tam kümesi $\{1 = t_1, \dots, t_s\}$ ise

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^s t_i \otimes U$$

dur. Buradan görüldüğü gibi her $y \in H \setminus M$ için $yU \neq U$ dur. Fakat o zaman $yV_1 \neq V_1$ ve $yxV_1 \neq xV_1$ olduğundan $yV_1 \subseteq (V_1 \dot{+} xV_1)^\perp = U^\perp$ dir. Aynı zamanda $yxV_1 \neq V_1$, $yxV_1 \neq xV_1$ olduğu gösterilebilir. Böylece $yxV_1 \subseteq U^\perp$ ve dolayısıyla $yU \subseteq U^\perp$ dir.

Sonuç olarak $y \in H$ olmak üzere farklı yU modülleri ortogonaldır. Böylece (c) gösterilmiş olur.

S grubu g formunu sabit bırakır ve V_1, xV_1 altuzayları üzerine etki eder. Aynı zamanda $V_1 \dot{+} xV_1$ altuzayı

singüler değildir ve V_1, xV_1 in bütünleridir. Bundan dolayı 3.2. Lemmanın ispatında olduğu gibi $C_S(V_1) = C_S(xV_1)$ dir. Böylece ispat tamamdır.

Şimdi aşağıdaki önemli sonucu elde edebiliriz.

4.6. TEOREM : Eğer V bir simplektik ilker $K[H]$ -modülü ise o zaman V bir minimal $K[H]$ -modülüdür.

İSPAT : Eğer her $N \triangle H$ için $V|_N$ homojen ise V bir minimal $K[H]$ -modülüdür. Öyleyse bir $N \triangle H$ için $V|_N$ nin homojen bileşenleri $t > 1$ bir tamsayı olmak üzere $V_1, \dots, V_t$ olsun. O zaman

$$V|_N = V_1 \dot{+} \dots \dot{+} V_t$$

dir. 4.3. Lemma'dan dolayı V_i lerin tümü ya tam izotropik veya singüler olmayan altuzaylardır.

$S = \text{deng}(H, V_1)$ olsun. O zaman Clifford Teoreminden dolayı V_1 indirgenmez $K[S]$ -modülüdür.

Eğer V_i ler singüler olmayan altuzaylar ise 4.4. Lemmadan dolayı $V_i|_H \cong V$ ve V_i ler ortogonaldir. Dolayısıyla V, V_i den simplektik olarak oluşturulur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece V_i lerin tümü tam izotropiktir. Dolayısıyla 4.5. Lemmadan dolayı $[M : S] = 2$ olacak şekilde $M > S$ grubu vardır ve 4.5. Lemma (c) den dolayı $V, V_i \dot{+} V_j$ den simplektik olarak oluşturulur. Fakat V simplektik ilkel olduğundan $V = V_i \dot{+} V_j$ dir ve $t = 2$ dir. Böylece minimal modül tanımının 2(i) ve 2(ii) şartı sağlanır. O halde V minimal $K[H]$ -modülüdür.

Böylece $H \leq B$ olmak üzere (2.1)-(2.4) örneklerden

birini gözönüne alıyoruz.

4.8. LEMMA : Eğer $H, 2.2.$ örnekteki gibi ise $m=1$ dir.

İSPAT : 3.21. Lemma (1) in bir sonucudur.

4.9. LEMMA : Eğer $B, 2.2.$ Örnek ya da $2.3.$ örnekteki kuaterniyon grubu, $B_0 \leq B$ bir kuaterniyon altgrubu ve $m = 1$ ise V simplektik ilkel $K[B_0]$ -modülüdür.

İSPAT : B_0 kuaterniyon altgrubu ve $\dim_K(V) = 2$ olduğundan V indirgenmez $K[B_0]$ -modülüdür. Fakat $\dim_K(V) = 2$ olduğundan V öz singüler olmayan, K -altuzaylara sahip değildir. Böylece V simplektik ilkel $K[B_0]$ -modülüdür.

4.10. LEMMA : Eğer $H, 2.3.$ örnekteki B grubunun altgrubu ise $m = 1$ ve $r \equiv 1 \pmod{4}$ dür.

İSPAT : Mümkünse $[B:B_0] = 2$ olmak üzere V nin bir B_0 -altmodülü W için V, W dan simplektik olarak oluşturulmuş $K[B]$ -modülü olsun. O zaman $z \in B-B_0$ olmak üzere $V = W + zW$ dir. Eğer $H \leq B_0$ ise W ve zW öz H -modülleridir. Böylece $V|_H$ indirgenirdir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $H \not\leq B_0$ dir. Böylece $B_0H = B$ dir. Şimdi $z \in H$ alınabilir. Fakat o zaman bir H -modül olarak V , bir $H_0 = H \cap B_0$ modül W dan simplektik olarak oluşturulmuş modüldür. Bu ise $V|_H$ nin simplektik ilkel olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $V|_B$ simplektik ilkeldir. 2.3. Örnekten görüldüğü gibi $B = \langle Q, \tau \rangle$, $Q = \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu^{-1} \end{bmatrix}$,

$2^t \mid (r^m - 1)$ olmak üzere $o(\nu) = 2^t$ ve $\tau = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dir.

Böylece 3.21.Lemma (2) den dolayı $m = 2^s$ dir. Şimdi $m = 1$ ve $r \equiv 1 \pmod{4}$ olduğunu gösterelim.

Mümkünse $s > 1$ olsun. O zaman $m > 2$ çift olduğundan $r^{m/2} \equiv 1 \pmod{4}$ dir. Ayrıca $r^m - 1 = (r^{m/2} - 1)(r^{m/2} + 1)$ dir. $4 \mid (r^{m/2} - 1)$ olduğundan $2 \mid (r^{m/2} + 1)$ dir. Dolayısıyla $2^{t-1} \mid (r^{m/2} - 1)$ dir. $K^* = GF(r^{m/2})$ ve $\varphi: \epsilon \rightarrow \epsilon^{r^{m/2}}$, $\tilde{K}$ nin mertebesi 2 olan otomorfizması olsun. $\text{tr}: K^* \rightarrow K$ izdönüşümü olsun. $o(\nu) = 2^t$ ve $2^{t-1} \mid (r^{m/2} - 1)$ olduğundan

$$\nu^\varphi = \nu^{r^{m/2}} = -\nu \text{ ve } \nu^2 \in K^*$$

dir. $W = K^*e_1 + K^*e_2$ olsun. $B_0 = \langle \tau, y^2 \rangle \leq B$ olsun. $\tau(K^*e_1 + K^*e_2) = K^*e_1 + K^*e_2$ ve $y^2(K^*e_1 + K^*e_2) = K^*e_1 + K^*e_2$ olduğundan W B_0 -invarianttır. Ayrıca,

$$yW = K^*\nu e_1 + (K^*\nu)^{-1}e_2 = K^*\nu e_1 + K^*\nu e_2$$

dir. $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in K^*$ olsun. O zaman $\nu^\varphi = -\nu$ olduğundan $g(\beta_1e_1 + \beta_2e_2, \gamma\nu e_1 + \gamma\nu e_2) = \text{Tr}(\beta_1\gamma_2\nu - \beta_2\gamma_1\nu)$

$$= \text{tr}((\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(\nu + \nu^\varphi))$$

$$= \text{tr}(0) = 0$$

dir. Bundan dolayı W ve yW ortogonaldır. V singüler olmadığından W da singüler değildir. Böylece V, W dan simplektik olarak oluşturulmuştur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $s \leq 1$ dir.

$s = 1$ olsun. Kabul edelim ki $r \equiv 1 \pmod{4}$ olsun. $r^m = r^2 \equiv 1 \pmod{4}$ ve $4 \mid (r-1)$ olduğundan $2 \mid (r+1)$ dir. Dolayısıyla $2^{t-1} \mid (r-1)$ dir. $\varphi: \epsilon \rightarrow \epsilon^r$, $\tilde{K}$ nin mertebesi 2 olan otomorfizması olsun. O zaman $\nu^\varphi = \nu^r = -\nu$ ve

$\nu^2 \in K = GF(r)$ dır. $W = Ke_1 + Ke_2$ olsun. Yukarıda görüldüğü gibi W , $B_0 = \langle \tau, y^2 \rangle$ -invarianttır. Aynı zamanda $yW = K\nu e_1 + K\nu e_2$ dır. Yukarıda olduğu gibi W ve yW ortogonaldır. V singüler olmadığından W da singüler değildir. Dolayısıyla V , W dan simplektik olarak oluşturulmuştur. Bu ise çelişkidir. O halde $r \equiv -1 \pmod{4}$ dır. O zaman $4 \mid (r+1)$ ve $2 \mid (r-1)$ dir. Dolayısıyla $2^{t-1} \mid (r+1)$ dir. $\varphi: \epsilon \rightarrow \epsilon^r, \tilde{K}$ nin mertebesi 2 olan otomorfizması olsun. O zaman $\nu^\varphi = \nu^r = -\nu^{-1}$ dir. $\beta^\varphi = \beta^{-1} = -\beta$ olacak şekilde mertebesi 4 olan bir β elemanı seçebiliriz.

$W = \{\gamma e_1 + (\gamma\beta)^\varphi e_2 \mid \gamma \in \tilde{K}\}$ olsun. O zaman W , V nin bir 2-boyutlu K -altuzayıdır. Gerçekten kolayca görüleceği gibi eğer $t \in \tilde{K}$ ve $\tilde{K} = K(t)$ ise $\tilde{K} = \{a+bt \mid a, b \in K\}$ dır. 2.3.Örnekte olduğu gibi $\{e_1, e_2\}$, V nin bir K -bazı olsun.

$\{te_1 - t^\varphi \beta e_2, e_1 - \beta e_2\}$ nin W nin bir K -bazı olduğunu gösterelim. $(a+bt)e_1 - (a+bt)^\varphi e_2 = a(e_1 - \beta e_2) + b(te_1 - t^\varphi \beta e_2)$ dir. $a(te_1 - t^\varphi e_2) + b(e_1 - e_2) = 0$ ise $(at+b)e_1 - (at^\varphi \beta + b\beta)e_2 = 0$ dir. Buradan $at + b = 0$ ve $at^\varphi \beta + b\beta = 0$ dır. Eğer $a \neq 0$ ise $t = -\frac{b}{a} \in K$ dır. Bu ise bir çelişkidir. O halde $a = 0$ dır. Dolayısıyla $b = 0$ dır. Bundan dolayı $\{te_1 - t^\varphi \beta e_2, e_1 - \beta e_2\}$, W nin bir K -bazıdır. Dolayısıyla W, V nin 2-boyutlu K -altuzayıdır. Şimdi

$$y^2(\gamma e_1 + (\gamma\beta)^\varphi e_2) = \gamma\nu^2 e_1 + \nu^{-2}(\gamma\beta)^\varphi e_2 = (\gamma\nu^2)e_1 + [(\nu^2\gamma\beta)]^\varphi e_2 \in W$$

dir. Aynı zamanda

$$\tau y(\gamma e_1 + (\gamma\beta)^\varphi e_2) = (\gamma\beta\nu)^\varphi e_1 + [(\nu\gamma\beta)^\varphi \beta]^\varphi e_2 \in W$$

dir. Böylece W , $B_0 = \langle \tau y, y^2 \rangle$ -invarianttır. Ayrıca

$y(\gamma e_1 + (\gamma\beta)^\varphi e_2) = (\gamma\nu)e_1 - (\nu\gamma\beta)^\varphi e_2$ dir. Dolayısıyla
 $yW = \{\gamma e_1 - (\gamma\beta)^\varphi e_2 \mid \gamma \in \tilde{K}\}$ dır. Böylece $V|_{B_0} = W + yW$,
 V nin bir $K[B_0]$ -ayrışımıdır. $\gamma e_1 + (\gamma\beta)^\varphi e_2 \in W$ ve
 $\alpha e_1 - (\alpha\beta)^\varphi e_2 \in yW$ olsun.

$$\begin{aligned} g(\gamma e_1 + (\gamma\beta)^\varphi e_2, \alpha e_1 - (\alpha\beta)^\varphi e_2) &= \text{Tr}(-\gamma(\alpha\beta)^\varphi - (\gamma\beta)^\varphi \alpha) \\ &= -\gamma\alpha^\varphi(\beta^\varphi + \beta) - \gamma^\varphi\alpha(\beta^\varphi + \beta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece W ve yW ortogonaldır. V singüler olmadı-
ğından W da singüler değildir. Dolayısıyla V, W dan
simplektik olarak oluşturulmuştur. Bu bir çelişkidir.
O halde $s=0$ ve $m=1$ dir. Bu durumda, $r^m \equiv 1 \pmod{4}$ oldu-
ğundan $r \equiv 1 \pmod{4}$ dir.

4.11. LEMMA : Eğer 2.4.Örnekteki B altgrubu
ve $H \leq B$ ise H bir 2-grubu değildir.

İSPAT : 2.4. Örnekteki S grubunu gözönüne alalım.
3.22.Lemmadan dolayı S nin bütün altgrupları V üzerinde
indirgenirdir. Dolayısıyla eğer $H < S$ ise $V|_H$ indirge-
nir. Bu ise 4.2.Hipotezimizle çelişir. O halde $H \not< S$
dir.

Şimdi $H = S$ olsun. 3.22. Lemma (3) den dolayı
 $\langle \tau, \gamma^2 \rangle \leq S$ altgrubu için $V|_S, K^*(1+\nu)e_1 + K^*(1-\nu)e_2$
den simplektik olarak oluşturulmuştur. Böylece V bir
simplektik ilkel $K[S]$ -modülü olamaz. Fakat $V|_H$ simplek-
tik ilkel olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $H \not\leq S$
dir. Fakat $B = S \times D$ ve $|D| = \frac{r^n+1}{2}$ tek olduğundan
 $|H \cap D| > 1$ dir. O halde H bir 2-grubu değildir.

KAYNAKLAR

1. Berger, T.R., "Hall-Higman Type Theorems, II" Trans. Amer. Math. Soc. 205,47-69 (1975).
2. Hall, P. and Higman, G., "On the p-length of p-solvable groups and reduction theorem's for Burnside's problem," Proc. London Math. Soc. 6, 1-42, (1956).
3. Berger, T.R., "Hall-Higman Type Theorems, I" Can. J. Math. Vol XXVI 3, 513-531, (1974).
4. Yalincaklıoğlu, A. "Hall-Higman Tipi Teoremler" Yüksek Lisans Tezi, G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, (1990).
5. Berger, T.R. "Hall-Higman Type Theorems, VI" J. Algebra, 51, 416-424, (1978).
6. Berger, T.R., "Automorphisms of Solvable Groups" J. Algebra, 27, 311-340, (1973).
7. Doğruöz, S. "Çözümlü Grupların Otomorfizmaları" Yüksek Lisans Tezi, G.Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü, (1989).
8. Turull, A. "Supersolvable automorphism groups of solvable groups", Math. Z., 183 (1983), 47-73.
9. Berger, T.R. "Hall-Higman Type Theorems, V" Pacific J. Math. 73, 1-62, (1977).
10. Gorenstain, D. "Finite Groups", Harper and Row, Publishers, New York-Evanston-London, (1971).

11. Dornhoff, L. "Group Representation Theory A" Marcel Dekker, Inc., New-York (1967).
12. Curtis, C.W. and Reiner, I.N., Representation Theory of Finite Groups and Association Algebras, New-York, (1962).
13. Hungerford, T.W., "Algebra", Holt, Rinehart and Winston Company, (1973).
14. Hoffman, K. and Kunze, R. "Linear Algebra" Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, Inc.
15. Asar, A.O. Yayınlanmamış notlar.
16. Curtis, C.W. and Reiner, I.N., Methods of Representation Theory Volume I, John Wiley, Sons, New-York-Chichester-Bristone, Toronto.
17. Berger, T.R. "Primitive Solvable Groups", J. Algebra, 33, 9-21, (1975).

ÖZGEÇMİŞ

ÖZGEÇMİŞ

İbrahim Günaltılı 1961 yılında Kahramanmaraş'ın Afşin İlçesi Tanır kasabasında doğdu.

İlk ve orta öğrenimini Tanır ilkokulu, Tanır ortaokulu ve Gaziantep Teknik Lisesinde tamamladı.

Yüksek öğrenimini Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde tamamladığı 1987 yılında Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesine araştırma görevlisi olarak atandı. Halen bu görevini yürütmektedir.



Bülent SAVAŞLI

Çelik-Bağlan Yayıncılık A.Ş.

Bayındır Sokak No.: 40/A

YENİŞEHİR-ANKARA

Tel : 133 35 66