

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HARDY TOPLAMLARI ÜZERİNE

Mümün CAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANTALYA

2000

HARDY TOPLAMLARI ÜZERİNE

Mümün CAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EKİM – 2000

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARDY TOPLAMLARI ÜZERİNE

Mümün CAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 17/10/ 2000 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından 95 (A.95) not takdir edilerek
Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

JÜRİ : Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Doğan ÇOKER

Prof. Dr. Nuri ÜNAL



ÖZET

HARDY TOPLAMLARI ÜZERİNE

Mümün CAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Veli KURT

Ekim-2000, 35 Sayfa

Bu çalışmanın esası $s_1(h,k)$, $s_2(h,k)$, $s_3(h,k)$, $s_5(h,k)$ Hardy toplamlarında Rademacher'ın iki sorusunu araştırıp yanıtlamaktır. Daha sonra bu toplamların sağladığı bazı eşitsizlikleri ifade etmektir. İlk olarak Dedekind toplamı, Hardy toplamının tanımları, bu toplamın bazı özellikleri, aralarındaki bağıntılar ve sağladıkları temel eşitlikler verildi.

$S(h,k)$, $s_4(h,k)$ toplamının seri açılımı yardımıyla ifadesi ve sağladıkları bazı eşitlikler verildi.

Son bölümde $s_1(h,k)$, $s_2(h,k)$, $s_3(h,k)$, $s_5(h,k)$ Hardy toplamının seri açılımı ve bazı eşitsizlikler ispatlandı.

ANAHTAR KELİMELER : Dedekind Toplamı, Hardy Toplamı, Farey Kesri

JÜRİ : Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Doğan ÇOKER

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

ABSTRACT

ON HARDY SUMS

Mümün Can

M.S. in Mathematics

Adviser: Prof. Dr. Veli KURT

Oktober – 2000, 35 Pages

The main purpose of this study is to investigate extensively Rademacher's two questions on $s_1(h, k)$, $s_2(h, k)$, $s_3(h, k)$, $s_5(h, k)$ Hardy sums. First, Dedekind sums and Hardy sums are defined and fundamental properties of these sums are given.

Afterwards, some relations and expressions on $S(h, k)$, $s_4(h, k)$ are given.

At the end, we obtain some equalities and inequalities on $s_1(h, k)$, $s_2(h, k)$, $s_3(h, k)$, $s_5(h, k)$ Hardy sums. The answers of Rademacher's questions are obtained on this $s_1(h, k)$, $s_2(h, k)$, $s_3(h, k)$, $s_5(h, k)$ sums.

KEY WORDS : Dedekind Sums, Hardy Sums, Farey Fractions

COMMITTEE : Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Doğan ÇOKER

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

ÖNSÖZ

$s_1(h,k)$, $s_2(h,k)$, $s_3(h,k)$, $s_5(h,k)$ Hardy toplamlarında Rademacher'in iki sorusunun incelendiği bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümünde ileriki bölümlerde kullanılacak olan bazı kavramlar hakkında ön bilgi ve tanımlar verilmiştir. İkinci bölümde Dedekind toplamı ile Hardy toplamının temel özellikleri incelenmiş ve bu toplamlar arasındaki bağıntılar ve gerçekledikleri bazı eşitlikler verilmiştir. Tezin son bölümünde $s_1(h,k)$, $s_2(h,k)$, $s_3(h,k)$, $s_5(h,k)$ Hardy toplamının seri açılımı ve sağladıkları bazı eşitsizlikler ispatlanmıştır.

Bu tez çalışması boyunca bilgi ve desteğini benden esirgemeyen danışman hocam sayın Prof. Dr. Veli KURT'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Çalışmanın Kapsamı.....	1
1.2 Temel Kavamlar ve Gösterimler.....	1
2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMA.....	4
2.1 Dedekind Toplamları ve Genel Özellikleri.....	4
2.2 Hardy Toplamları.....	7
2.3 Dedekind Toplamlarının İşareti.....	10
3. MATERYAL ve METOD.....	11
3.1 $S(h,k)$ ve $s_4(h,k)$ Toplamları.....	11
3.2 Rademacher'ın Soruları.....	18
4. BULGULAR.....	20
4.1 $s_1(h,k)$, $s_2(h,k)$, $s_3(h,k)$, $s_5(h,k)$ Toplamlarının Seri İfadeleri.....	20
4.2 $s_1(h,k)$, $s_3(h,k)$, $s_5(h,k)$ Toplamlarının Sınırlılığı ve Sağladıkları Bazı Eşitsizlikler.....	28
SONUÇ.....	33
KAYNAKLAR.....	34
ÖZGEÇMİŞ.....	36

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı

Dedekind 1930 'lu yıllarda kendi adıyla tanımlanan Dedekind – Eta fonksiyonunun logaritmik dönüşümü üzerine çalışırken bazı toplamlara rastladı. Bu toplamları $s(h,k)$ ile gösterdi. Daha sonra bu toplamlar Dedekind toplamları olarak adlandırıldı. Bu toplamın temel bağıntısı olan reciprocity bağıntısının değişik ispatları Rademacher (1956,1961,1971), Apostol (1950), Carlitz (1953,1974), Berndt (1976), Sitaramachandrarao (1987) tarafından verildi.

Berndt, klasik theta fonksiyonlarının logaritmik dönüşümünde Hardy toplamları olarak bilinen $s_i(h,k)$, ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) toplamları arasında bazı bağıntıları ve reciprocity bağıntısını verdi. Daha sonra bu toplamların analitik ifadeleri Berndt ve Goldberg (1982) tarafından ispatlandı.

Rademacher'ın 1963 yılında sayılar teorisi sempozyumunda ardışık Farey kesirlerinde, Dedekind toplamının işareti hakkındaki sorusu, farklı yoldan Asai (1984) ve Rosen (1977) tarafından ispatlandı. Meyer (1997) benzer soruları $S(h,k)$, $s_4(h,k)$ Hardy toplamlarına uyguladı.

Bu çalışmada benzer soruları $s_1(h,k)$, $s_2(h,k)$, $s_3(h,k)$, $s_5(h,k)$ Hardy toplamlarına uygulayarak bu toplamlar arasında bazı bağıntılar, eşitsizlikler ve sonuçlar elde edilmiştir.

1.2. Temel Kavramlar ve Gösterimler

Tanım 1.2.1: $x \in \mathbf{R}$, $((x))$ fonksiyonu

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2}, & x \notin \mathbf{Z} \\ 0, & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

ifadesi ile tanımlanır. Dedekind toplamı, $h, k \in \mathbf{Z}$, $k > 0$ ve $(h,k) = 1$ için

$$s(h,k) = \sum_{\mu \pmod{k}} \left(\left(\frac{\mu}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{h\mu}{k} \right) \right)$$

eşitliği ile tanımlanır. Dedekind toplamı

$$s(h,k) + s(k,h) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{k} + \frac{k}{h} + \frac{1}{hk} \right)$$

reciprocity bağıntısını gerçekler. Bu bağıntının çeşitli ispatları Rademacher ve Whiteman (1941), Rademacher ve Grosswald (1972), Apostol (1974) tarafından yapılmıştır. Reciprocity bağıntısının genelleştirmesi olan üç-terim bağıntılarını Carlitz (1965, 1975, 1978, 1980) vermiştir.

Tanım 1.2.3 : Farey Kesri:

Azalan $\frac{h}{k}$ rasyonel kesrinin $1 \leq k \leq n$ ve $0 \leq \frac{h}{k} \leq 1$ koşuluna uyan kesirler kümesine n .

dereceden Farey kesirler dizisi denir ve F_n ile gösterilir. Burada $(h,k) = 1$, F_n Farey kesirler kümesindeki her bir kesrin paydası n 'den küçük veya eşittir. F_n 'nin bazı elemanları aşağıdaki gibi yazılır,

$$F_1 : \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$$

$$F_2 : \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

$$F_3 : \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$$

$$F_4 : \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$$

⋮

ve bu kesirler ardışık Farey kesirleridir (Apostol[2] 1976,s.98). $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ardışık iki Farey kesri $((a,b) = (c,d) = 1)$ ise $bc - ad = \pm 1$ eşitliği sağlanır.

Tanım 1.2.4 : Mediant: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ardışık Farey kesirleri ise bu kesirlerin mediantı $\frac{a+c}{b+d}$ olup

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

eşitsizliği sağlanır (Apostol[2], 1976,s.98).

Tanım 1.2.5 : $h, k \in \mathbf{Z}$, $k > 0$, $(h,k) = 1$ olsun. Hardy toplamı aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır.

$$S(h, k) = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1+\left[\frac{hj}{k}\right]}$$

$$s_1(h, k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{\left[\frac{hj}{k}\right]} \left(\left(\frac{j}{k} \right) \right)$$

$$s_2(h, k) = \sum_{j=1}^k (-1)^j \left(\left(\frac{j}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{hj}{k} \right) \right)$$

$$s_3(h, k) = \sum_{j=1}^k (-1)^j \left(\left(\frac{hj}{k} \right) \right)$$

$$s_4(h, k) = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{\left[\frac{hj}{k}\right]}$$

$$s_5(h, k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+\left[\frac{hj}{k}\right]} \left(\left(\frac{j}{k} \right) \right)$$

2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMA

2.1. Dedekind Toplamı ve Genel Özellikleri

Dedekind toplamı Tanım 1.2.2 'de

$$s(h, k) = \sum_{\mu \pmod{k}} \left(\left(\frac{\mu}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{h\mu}{k} \right) \right)$$

eşitliği ile tanımlanmıştır. Burada $h, k \in \mathbf{Z}$, $k > 0$ ve $(h, k) = 1$ dir. Tanım 1.2.1 yardımıyla bu eşitliği

$$s(h, k) = \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{\mu}{k} \left(\frac{h\mu}{k} - \left[\frac{h\mu}{k} \right] - \frac{1}{2} \right)$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 2.1.1 : $h, k \in \mathbf{Z}$, $k > 0$ ve $(h, k) = 1$ olmak üzere

- i. $h' \equiv \pm h \pmod{k}$ ise $s(h', k) = \pm s(h, k)$,
- ii. $h h' \equiv \mp 1 \pmod{k}$ ise $s(h', k) = \pm s(h, k)$,
- iii. $h^2 + 1 \equiv 0 \pmod{k}$ ise $s(h, k) = 0$.

Bu teoremin ispatı Apostol ([2], 1976, s. 62), Rademacher ve Groswald ([23], 1972) tarafından verilmiştir. $((-x)) = -((x))$ olmasından Dedekind toplamı

$$s(-h, k) = -s(h, k)$$

eşitliğini gerçekler.

Önteorem 2.1.2 : $x \in \mathbf{R}$ olmak üzere

$$\sum_{\lambda=0}^{k-1} \left(\left(\frac{\lambda}{k} + \frac{x}{k} \right) \right) = ((x)).$$

İspat : Rademacher ve Whiteman (1941), Rademacher ve Groswald (1972).

Teorem 2.1.3 : p bir asal sayı olmak üzere

$$s(ph, pk) = s(h, k).$$

İspat : Rademacher ve Whiteman ([21], 1941).

Teorem 2.1.4 : p bir asal sayı olmak üzere

$$s(ph, k) + \sum_{m=0}^{p-1} s(h + mk, pk) = (p + 1)s(h, k)$$

özdeşliği vardır.

İspat : Knopp ([17], 1980).

Teorem 2.1.5 : $(h, k) = 1$, $h, k \in \mathbf{Z}$, $k > 0$ ise

$$s(h, k) + s(k, h) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{k} + \frac{k}{h} + \frac{1}{hk} \right)$$

reciprocity bağıntısı gerçekleşir.

Bu teoremin ispatı, tanımdan, $\cot$ fonksiyonunu kullanarak, bazı seri ifadeleri ve düzgün dörtyüzlü yardımıyla farklı şekillerde yapılmıştır; Apostol (1976, s. 63), Groswald (1971), Rademacher ve Groswald (1972). Daha sonra bu bağıntının üç-terim genelleştirmeleri Carlitz (1974, 1975, 1978) tarafından yapılmıştır. Biz burada ki ispatı tanımları kullanarak yapacağız.

İspat:

$$S = s(h, k) + s(k, h) = \sum_{\mu \pmod{k}} \left(\left(\frac{\mu}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{h\mu}{k} \right) \right) + \sum_{v \pmod{h}} \left(\left(\frac{v}{h} \right) \right) \left(\left(\frac{kv}{h} \right) \right)$$

olsun. Önteorem 2.1.2'yi uygularsak,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\mu=0}^{k-1} \left(\left(\frac{\mu}{k} \right) \right) \sum_{v=0}^{h-1} \left(\left(\frac{v}{h} + \frac{\mu}{k} \right) \right) + \sum_{v=0}^{h-1} \left(\left(\frac{v}{h} \right) \right) \sum_{\mu=0}^{k-1} \left(\left(\frac{v}{h} + \frac{\mu}{k} \right) \right) \\ &= \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{h-1} \left(\left(\frac{v}{h} + \frac{\mu}{k} \right) \right) \left\{ \left(\left(\frac{\mu}{k} \right) \right) + \left(\left(\frac{v}{h} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

yazılır. $((x))$ fonksiyonunun tanımından

$$S = \sum_{\mu=1}^{k-1} \sum_{v=1}^{h-1} \left(\left(\frac{v}{h} + \frac{\mu}{k} \right) \right) \left\{ \frac{v}{h} + \frac{\mu}{k} - 1 \right\} + \sum_{v=1}^{h-1} \left(\left(\frac{v}{h} \right) \right) \left(\frac{v}{h} - \frac{1}{2} \right) + \sum_{\mu=1}^{k-1} \left(\left(\frac{\mu}{k} \right) \right) \left(\frac{\mu}{k} - \frac{1}{2} \right) \quad (2.1)$$

eşitliği elde edilir. $x = 0$ için Önteorem 2.1.2'den

$$\sum_{\mu \pmod k} \left(\left(\frac{\mu}{k} \right) \right) = 0 \text{ ve } \sum_{v \pmod h} \left(\left(\frac{v}{h} \right) \right) = 0.$$

Bunlar (2.1)'de yazılır ve yeniden düzenlenirse

$$S = \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{h-1} \left(\left(\frac{v}{h} + \frac{\mu}{k} \right) \right) \left(\frac{v}{h} + \frac{\mu}{k} - 1 \right)$$

elde edilir. Şimdi

$$T = \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{h-1} \left\{ \left(\left(\frac{v}{h} + \frac{\mu}{k} \right) \right) - \left(\frac{v}{h} + \frac{\mu}{k} - 1 \right) \right\}^2$$

toplamını tanımlayalım.

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{h-1} \left(\frac{v}{h} + \frac{\mu}{k} - 1 \right)^2 - 2 \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{h-1} \left\{ \left(\left(\frac{v}{h} + \frac{\mu}{k} \right) \right) \left(\frac{v}{h} + \frac{\mu}{k} - 1 \right) \right\} + \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{h-1} \left(\left(\frac{v}{h} + \frac{\mu}{k} \right) \right)^2 \\ &= S_1 - 2S_2 + S_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

dır. Burada

$$S = S_2 \quad (2.3)$$

dir.

$$S_1 = \frac{h}{k^2} \sum_{\mu=0}^{k-1} \mu^2 + \frac{k}{h^2} \sum_{v=0}^{h-1} v^2 + hk + \frac{2}{kh} \sum_{\mu=0}^{k-1} \mu \sum_{v=0}^{h-1} v - \frac{2h}{k} \sum_{\mu=0}^{k-1} \mu - \frac{2k}{h} \sum_{v=0}^{h-1} v$$

dır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$S_1 = \frac{h}{6k} + \frac{k}{6h} + \frac{hk}{6} + \frac{1}{2} \quad (2.4)$$

elde edilir. $(h,k) = 1$, μ , k modülüne göre ve v 'de h modülüne göre bütün değerleri aldığından $\delta = h\mu + kv$ 'de hk modülüne göre tüm değerleri alır.

$$S_3 = \sum_{\delta=0}^{hk-1} \left(\left(\frac{\delta}{hk} \right) \right)^2 = s(1, hk) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{6hk} + \frac{hk}{12} \quad (2.5)$$

bulunur. Diğer taraftan, T hesaplanırsa

$$T = \frac{1}{4}hk + \frac{3}{4} \quad (2.6)$$

şeklinde bulunur. (2.3), (2.4), (2.5) ve (2.6) denklemleri (2.2)'de yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa istenen

$$S = \frac{1}{2}(S_1 - T + S_3) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{k} + \frac{k}{h} + \frac{1}{hk}\right)$$

bağıntısı elde edilir.

2.2. Hardy Toplamları

Hardy toplamları Tanım 1.2.5'de verilmişti. Şimdi bu toplamların bazı özelliklerini görelim.

Teorem 2.2.1 : $(h,k) = 1$, $h, k \in \mathbf{Z}$, $k > 0$ olsun. Hardy toplamları ile Dedekind toplamı arasında aşağıdaki eşitlikler vardır.

- i. $h + k$ tek ise $(h,k) = 8s(h,2k) + 8s(2h,k) - 20s(h,k)$,
- ii. h çift ise $s_1(h,k) = 2s(h,k) - 4s(h,2k)$,
- iii. k çift ise $s_2(h,k) = -s(h,k) + 2s(2h,k)$,
- iv. k tek ise $s_3(h,k) = 2s(h,k) - 4s(2h,k)$,
- v. h tek ise $s_4(h,k) = -4s(h,k) + 8s(h,k)$,
- vi. $h + k$ çift ise $s_5(h,k) = -10s(h,k) + 4s(2h,k) + 4s(h,2k)$.

Bu teoremin ispatında $((x))$ fonksiyonunun bazı özelliklerini kullanacağız

$x \notin \mathbf{Z}$ ise

$$(-1)^{[x]} = 2((x)) - 4\left(\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

eşitliği vardır (Rademacher ve Whitemann (1941)). $((x))$ fonksiyonun tanımından

$$\begin{aligned}
2\left(\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 4\left(\left(\frac{x}{2}\right)\right) &= 2\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2}\right] - \frac{1}{2}\right) \\
&= 1 - 2[x] + 4\left[\frac{x}{2}\right] = 1 - 2[x] + 4\left[\frac{[x]}{2}\right] \\
&= \begin{cases} 1 - 2[x] + 4\frac{[x]}{2} & , [x] \text{ çift ise} \\ 1 - 2[x] + 4\left(\frac{[x]-1}{2}\right) & , [x] \text{ tek ise} \end{cases} \\
&= (-1)^{[x]}.
\end{aligned}$$

İspat : ii. $(h,k) = 1$ ve h çift olduğundan

$$\begin{aligned}
s_1(h,k) &= \sum_{j=1}^k (-1)^{\left[\frac{hj}{k}\right]} \left(\left(\frac{j}{k}\right)\right) \\
&= 2 \sum_{j=1}^{k-1} \left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right) \left(\left(\frac{j}{k}\right)\right) - 4 \sum_{j=1}^{k-1} \left(\left(\frac{hj}{2k}\right)\right) \left(\left(\frac{j}{k}\right)\right) \\
&= 2s(h,k) - 4s\left(\frac{h}{2}, k\right) = 2s(h,k) - 4s(h,2k)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 2.2.2 : $(h,k) = 1$ ve $h, k \in \mathbf{Z}, k > 0$ olsun. Bu durumda,

- i. k tek ise $s_1(k,h) = s_2(h,k) = 0$,
- ii. k çift ise $s_3(h,k) = 0$,
- iii. $h + k$ tek ise $s_5(h,k) = 0$.

Bu teoremin ispatı tanım yardımıyla kolayca bulunur.

Teorem 2.2.3 : Hardy toplamlarının analitik ifadeleri aşağıdaki eşitliklerle verilir.

$$\text{i. } h + k \text{ tek ise } S(h,k) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \tan\left(\frac{\pi h(2n-1)}{2k}\right),$$

- ii. h çift ve k tek ise $s_1(h, k) = -\frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ 2n-1 \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cot\left(\frac{\pi h(2n-1)}{2k}\right),$
- iii. h tek ve k çift ise $s_2(h, k) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ 2n \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{n} \tan\left(\frac{\pi hn}{k}\right),$
- iv. k tek ise $s_3(h, k) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan\left(\frac{\pi hn}{k}\right),$
- v. h tek ise $s_4(h, k) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cot\left(\frac{\pi h(2n-1)}{2k}\right),$
- vi. h ve k tek ise $s_5(h, k) = \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ 2n-1 \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \tan\left(\frac{\pi h(2n-1)}{2k}\right).$

Burada $(h, k) = 1$ ve $k > 0$.

İspat : Teoremin iki farklı ispatı yapılmıştır. Bunlardan biri Goldberg (1981, thesis), diğeri Berndt ve Goldberg ([6], 1982).

Teorem 2.2.4 : Hardy toplamaları aşağıdaki üç-terim bağıntısını gerçekler.

- i. a, a' çift ve $cc' \equiv 1 \pmod{2a}$ ise

$$S(bc', a) + S(ca', b) + S(ab', c) = 1$$

- ii. a, a' çift ve $cc' \equiv 1 \pmod{2a}$ ise

$$s_3(ab', c) + s_1(ca', b) - \frac{1}{2} s_4(bc', a) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2bc}$$

- iii. b çift ise

$$s_1(bc', a) - 2s_2(ca', b) + s_3(ab', c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{bc} + \frac{c}{ab} \right)$$

dır.

Bundan başka a, a' çift ve $cc' \equiv 1 \pmod{2a}$ ise

$$s(2ab',c) + s(ca',2b) + s(bc',a) = -\frac{1}{4} + \frac{a}{6bc} + \frac{b}{24ac} + \frac{c}{24ab}$$

ve b çift ise

$$s(2ab',c) + s(2ca',b) + s(2bc',a) = -\frac{1}{4} + \frac{a}{6bc} + \frac{b}{24ac} + \frac{c}{24ab}$$

İspat : Pettet ve Sitaramachandrarao ([20], 1987).

2.3. Dedekind Toplamının İşareti

1963 yılında sayılar teorisi sempozyumunda H. Rademacher, Dedekind toplamları ile ilgili üç problem önermişti ([24], 1974). Bunlar sırasıyla aşağıdadır;

1. $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}$ ardışık iki Farey kesri olsun. Eğer $s(h_1, k_1) > 0$ ve $s(h_2, k_2) > 0$ ise $s(h_1+h_2, k_1+k_2) > 0$ mıdır?
2. $s(h, k)$ toplamı düzlemde yoğun mudur?
3. $s(h, k)$ toplamı herhangi bir reel sayının komşuluğunda sınırlı mıdır?

Bu sorulardan birincisinin yanıtı ters bir örnek göstererek Rosen ([25], 1977) tarafından verildi. Örneğin $\frac{10}{27} < \frac{3}{8}$ iki ardışık Farey kesri ve bunların mediantı $\frac{13}{35}$ dir.

$$s(10,27) = \frac{1}{162} > 0 \text{ ve } s(3,8) = \frac{1}{10} > 0 \text{ olmasına karşın } s(13,35) = -\frac{1}{14} < 0.$$

Diğer taraftan Asai ([3], 1984) $D(h,k)=12ks(h,k)$ fonksiyonunu tanımlayarak negatif olduğunu farklı bir yoldan ispatladı.

İkinci sorunun yanıtı Hickerson ([16], 1977) tarafından sürekli kesirler yardımıyla yapıldı. Sürekli kesirler kullanılarak Dedekind toplamı ile ilgili çeşitli bağıntılar Lin ([18],1992) tarafından verildi.

Üçüncü sorunun ilk ispatı Barkan ([5], 1977) tarafından yapıldı. Daha sonra farklı yollardan sınırlılığı ispatlandı.

3. MATERİYAL ve METOD

3.1. S(h,k) ve s₄(h,k) Toplamları

Önteorem 3.1.1 : $(c,d) = 1$ ve $c > 0$ olsun.

- i. c ve d tek ise $S(d,c) = 0$,
- ii. d çift ise $s_4(d,c) = 0$.

İspat :

- i. c, d tek olduğundan bazı $n \in \mathbb{Z}$ için $d = c - 2n$ olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} S(d,c) &= S(c - 2n,c) = \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{j+1+\left[\frac{(c-2n)j}{c}\right]} \\ &= \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{2j+1+\left[\frac{-2nj}{c}\right]} = \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{\left[\frac{2nj}{c}\right]}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

(3.1)'in üstleri j ve $(c - j)$ olan terimlerin işaretleri zıt olduğundan toplamları sıfırdır.

- ii. Benzer olarak bulunabilir.

Teorem 3.1.2 : $(a,b) = 1$, $0 \leq a \leq b$, x, y negatif olmaya tamsayılar öyle ki $ay - bx = \pm 1$ sağlansın ve $y > 0$ olsun. Bu durumda $k \in \mathbb{N}$ için

- i. $S(x+ak, y+bk) = \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{(a+b)\ell} \left\{ S(a, b) \pm (-1)^{a+b} \right\} + (-1)^{(a+b)k} S(x, y),$
- ii. $s_4(x+ak, y+bk) = \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{a\ell} \left\{ s_4(a, b) \mp (-1)^a \right\} + (-1)^{ak} s_4(x, y).$

Bu teoremi ispatlamadan önce aşağıdaki üç önteoremi ispatlayalım.

Önteorem 3.1.3 : $(a,b) = 1$, $0 \leq a \leq b$ olsun. $1 \leq m \leq b$, $0 \leq \ell < k$ ve $ay - bx = \pm 1$ olacak şekilde negatif olmayan x, y, m, ℓ, k tamsayıları verilsin ve $y > 0$ olsun. Bu durumda

- i. $\left[\frac{(x + ak)m \mp \ell}{y + bk} \right] = \left[\frac{(x + ak)m}{y + bk} \right],$

ii. Eğer $m < y$ ise

$$\left[\frac{(x + ak)m \mp k}{y + bk} \right] = \left[\frac{(x + ak)m}{y + bk} \right].$$

İspat : $\ell = 0$ için eşitsizliğin sağlandığı açıktır. $1 \leq \ell < k$ için

$$\left[\frac{(x + ak)m \mp (k - 1)}{y + bk} \right] = \left[\frac{(x + ak)m}{y + bk} \right]$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki

$$\left[\frac{(x + ak)m \mp (k - 1)}{y + bk} \right] \neq \left[\frac{(x + ak)m}{y + bk} \right] \quad (3.2)$$

olsun. $b \geq 1, y \geq 1$ olduğundan $(k - 1) < (y + bk)$ olur, buradan

$$\left[\frac{(x + ak)m \mp (k - 1)}{y + bk} \right] = \left[\frac{(x + ak)m}{y + bk} \right] \mp 1 \quad (3.3)$$

elde edilir. (3.3) doğru ise

$$(y + bk) \mid (x + ak)m \mp j \quad (3.4)$$

olacak şekilde $1 \leq j \leq k - 1, j \in \mathbf{Z}$ vardır. Eğer (3.4) doğru ise öyle $t > 0$ vardır ki

$$(y + bk)t = (x + ak)m \mp j \quad (3.5)$$

eşitliği sağlanır. $(a, b) = 1$ ve $ay - bx = \pm 1$ olduğundan

$$a(y + bk) - b(x + ak) = \pm 1 \quad (3.6)$$

ve

$$-aj(y + bk) - (-bj)(x + ak) = \mp j \quad (3.7)$$

olur.

$A(y + bk) - B(x + ak) = \mp j$ denkleminin bir çözümü $n \in \mathbf{Z}$ için

$$A = -aj + n(x + ak), B = -bj + n(y + bk) \quad (3.8)$$

dır. (3.5), (3.7) ve (3.8)'den

$$m = -bj + n_0(y + bk) \text{ ve } t = -aj + n_0(x + ak)$$

olur. m için ifadeyi yeniden düzenleyerek

$$m = b(n_0k - j) + n_0y \quad (3.9)$$

olur.

- i. $n_0 > 0$ ise $k > j$ olduğundan $m > b$ bulunur,
- ii. $n_0 \leq 0$ ise $m < 0$ olur ki bu da varsayımla çelişki teşkil eder. Bu da

(3.2)'deki varsayıma bir çelişki olup, önteorem ispatlanmış olur.

Önteorem 3.1.4 : $(a,b) = 1$, $ay - bx = \pm 1$ ve $1 \leq m < b$ olacak şekilde a, b, x, y, m negatif olmayan tamsayılar ve $y > 0$ olsun. $k \in \mathbf{N}$ için

$$\left[\frac{(x + ak)m}{y + bk} \right] = \left[\frac{ma}{b} \right]. \quad (3.10)$$

İspat : $(a,b) = 1$ ve $m < b$ olduğundan $b \nmid ma$. $ay - bx = \pm 1$ ve $\frac{m}{y + bk} < 1$ eşitsizliğini

kullanarak

$$\begin{aligned} \left[\frac{(x + ak)m}{y + bk} \right] &= \left[\frac{(x + ak)m}{y + bk} - \frac{ma}{b} + \frac{ma}{b} \right] = \left[\frac{ma}{b} \mp \frac{m}{b(y + bk)} \right] \\ &= \left[\frac{ma}{b} \mp \frac{m/(y + bk)}{b} \right] = \left[\frac{ma}{b} \right] \end{aligned}$$

elde olur.

Önteorem 3.1.5 : $(a,b) = 1$, $ay - bx = \pm 1$ ve $1 \leq m < y$ olacak şekilde a, b, x, y, m negatif olmayan tamsayılar ve $y > 0$ olsun. $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ için

$$\left[\frac{(x + ak)m}{y + bk} \right] = \left[\frac{mx}{y} \right] \quad (3.11)$$

İspat : $k = 0$ için açıktır. $k \geq 1$ için $ay - bx = \pm 1$ den

$$\left[\frac{mx}{y} \right] = \left[\frac{(x + ak)m}{y + bk} \right] = \left[\frac{(x + ak)m}{y + bk} + \frac{(x + a(k+1))m}{y + b(k+1)} - \frac{(x + a(k+1))m}{y + b(k+1)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{(x + a(k+1))^m}{y + b(k+1)} \mp \frac{m}{(y + bk)(y + b(k+1))} \right] \\
&= \left[\frac{(x + a(k+1))^m}{y + b(k+1)} \mp \frac{m/(y + bk)}{(y + b(k+1))} \right]
\end{aligned}$$

$m/(y + bk) < 1$ ve (3.6)'dan $(y + b(k+1)) \nmid m(x + a(k+1))$,

$$\left[\frac{(x + ak)^m}{y + bk} \right] = \left[\frac{mx}{y} \right]$$

bulunur.

Teorem 3.1.2'nin ispatı :

$$\begin{aligned}
\text{i. } S(x+ak, y+bk) &= \sum_{j=1}^{y+bk-1} (-1)^{j+1+\left[\frac{(x+ak)j}{y+bk}\right]} = \sum_{j=1}^{bk} (-1)^{j+1+\left[\frac{(x+ak)j}{y+bk}\right]} \\
&\quad + \sum_{j=bk+1}^{y+bk-1} (-1)^{j+1+\left[\frac{(x+ak)j}{y+bk}\right]}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Sağdaki ilk toplama R_1 , ikinciye R_2 diyelim. R_1 toplamı

$$R_1 = \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{j=b\ell+1}^{b(\ell+1)} (-1)^{j+1+\left[\frac{(x+ak)j}{y+bk}\right]} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{m=1}^b (-1)^{m+b\ell+1+\left[\frac{(x+ak)(m+b\ell)}{y+bk}\right]} \quad (3.12)$$

olarak yazılabilir. $ay - bx = \pm 1$ den

$$\begin{aligned}
\left[\frac{(x + ak)(m + b\ell)}{y + bk} \right] &= \left[\frac{(x + ak)m + bx\ell + abk\ell}{y + bk} \right] = \left[\frac{(x + ak)m + (ay \mp 1)\ell + abk\ell}{y + bk} \right] \\
&= \left[\frac{(x + ak)m \mp \ell + a\ell(y + bk)}{y + bk} \right] = \left[\frac{(x + ak)m \mp \ell}{y + bk} \right] + a\ell \quad (3.13)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.12), (3.13) ve Önteorem 3.1.3.i 'den

$$R_1 = \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{(a+b)\ell} \sum_{m=1}^b (-1)^{m+1+\left[\frac{(x+ak)m}{y+bk}\right]}$$

bulunur. Önteorem 3.1.4'ü kullanarak

$$R_1 = \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{(a+b)\ell} \left\{ \sum_{m=1}^b (-1)^{m+1+\left[\frac{ma}{b}\right]} + (-1)^{b+1+\left[\frac{(x+ak)b}{y+bk}\right]} \right\} \quad (3.14)$$

elde edilir. Toplamın son terimi

$$\begin{aligned} b+1 + \left[\frac{(x+ak)b}{y+bk} \right] &= b+1 + \left[\frac{bx+abk}{y+bk} \right] \\ &= b+1 + \left[\frac{ay \mp 1 + abk}{y+bk} \right] = b+1 + a + \left[\frac{\mp 1}{y+bk} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

olarak yazılabilir. (3.15), (3.14) ve $S(a,b)$ 'nin tanımından

$$R_1 = \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{(a+b)\ell} \left\{ S(a,b) \pm (-1)^{a+b} \right\} \quad (3.16)$$

bulunur.

Şimdi R_2 'yi hesaplayalım. Önteorem 3.1.4 ve Önteorem 3.1.5.i 'yi kullanarak

$$\begin{aligned} R_2 &= \sum_{j=bk+1}^{y+bk-1} (-1)^{j+1+\left[\frac{(x+ak)j}{y+bk}\right]} = \sum_{m=1}^{y-1} (-1)^{m+bk+1+\left[\frac{(x+ak)(m+bk)}{y+bk}\right]} \\ &= \sum_{m=1}^{y-1} (-1)^{m+bk+1+ak+\left[\frac{(x+ak)m \mp k}{y+bk}\right]} = (-1)^{(a+b)k} \sum_{m=1}^{y-1} (-1)^{m+1+\left[\frac{(x+ak)m}{y+bk}\right]} \\ &= (-1)^{(a+b)k} \sum_{m=1}^{y-1} (-1)^{m+1+\left[\frac{mx}{y}\right]} = (-1)^{(a+b)k} S(x,y) \end{aligned} \quad (3.17)$$

eşitliği yazılabilir. (3.16) ve (3.17)'yi birleştirerek

$$S(x+ak, y+bk) = \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{(a+b)\ell} \left\{ S(a,b) \pm (-1)^{a+b} \right\} + (-1)^{(a+b)k} S(x,y)$$

elde edilir.

ii. Aynı yöntemle bulunur.

Sonuç 3.1.6 : $(a,b) = 1$, $0 \leq a \leq b$ ve $ay - bx = \pm 1$ olacak şekilde x, y negatif olmayan tamsayılar ve $y > 0$ olsun. Bu durumda

- i. a ve b tek ise $S(x+ak, y+bk) = \pm k + S(x, y)$,
- ii. a çift ise $s_4(x+ak, y+bk) = \mp k + s_4(x, y)$.

İspat: i. $a + b$ çift olduğundan Teorem 3.1.2.i ve Önerme 3.1.1.i 'den

$$S(x+ak, y+bk) = \pm k + S(x, y)$$

elde edilir.

- ii. a çift olduğundan Teorem 3.1.2.ii ve Önerme 3.1.1.ii 'den

$$s_4(x+ak, y+bk) = \mp k + s_4(x, y)$$

bulunur.

Sonuç 3.1.7 : $(a,b) = 1$, $0 \leq a \leq b$ ve $ay - bx = \pm 1$ olacak şekilde x, y negatif olmayan tamsayılar ve $y > 0$ olsun. Bu durumda

- i. $a + b$, x ve y tek ise

$$S(x+ak, y+bk) = \begin{cases} 0 & k \text{ çift ise} \\ S(a, b) \mp 1 & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

- ii. a tek, x çift ise

$$s_4(x+ak, y+bk) = \begin{cases} 0 & k \text{ çift ise} \\ s_4(a, b) \pm 1 & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

İspat : i. Teorem 3.1.2.i ve Önerme 3.1.1.i 'den

$$\begin{aligned} S(x+ak, y+bk) &= \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell \{S(a, b) \mp 1\} \\ &= \begin{cases} 0 & k \text{ çift ise} \\ S(a, b) \mp 1 & k \text{ tek ise} \end{cases} \end{aligned}$$

bulunur.

- ii. Benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 3.1.8 : $(a,b) = 1$, $0 \leq a \leq b$ ve $ay - bx = \pm 1$ olacak şekilde x, y negatif olmayan tamsayılar ve $y > 0$ olsun. Bu durumda

i. $a + b$ tek ve $x + y$ tek ise

$$S(x+ak, y+bk) = \begin{cases} S(a, b) \mp 1 & k \text{ çift ise} \\ 0 & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

ii. a tek ve x tek ise

$$s_4(x+ak, y+bk) = \begin{cases} s_4(a, b) \pm 1 & k \text{ çift ise} \\ 0 & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

İspat: i. $k = 1$ için $ay - bx = \pm 1$ ve Önteorem 3.1.1 'den $S(x+a, y+b) = 0$, $2 \leq k$ ise Önteorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 'den

$$S(x+ak, y+bk) = S(x+a+a(k-1), y+b+b(k-1))$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k-2} (-1)^\ell \{S(a, b) \mp 1\} + (-1)^{k-1} S(x+a, y+b)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k-2} (-1)^\ell \{S(a, b) \mp 1\} = \begin{cases} S(a, b) \mp 1 & k \text{ çift ise} \\ 0 & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

bulunur.

ii. Benzer yöntemle gösterilir.

Sonuç 3.1.9 : $(a,b) = 1$, $0 \leq a \leq b$ ve $ay - bx = \pm 1$ olacak şekilde x, y negatif olmayan tamsayılar ve $y > 0$ olsun. Bu durumda

i. $a + b$ tek ve $x + y$ tek ise $S(a,b) - S(x,y) = \pm 1$,

ii. a tek ve x tek ise $s_4(a,b) - s_4(x,y) = \mp 1$.

İspat : i. Teorem 3.1.2.i 'de $k = 1$ alalım

$$S(x+a, y+b) = S(a, b) \pm (-1)^{a+b} + (-1)^{a+b} S(x, y) \quad (3.18)$$

elde edilir. $k = 1$ için Sonuç 3.1.8.i 'den

$$S(x+a, y+b) = 0 \quad (3.19)$$

bulunur. Böylece

$$S(a,b) - S(x,y) = \pm 1$$

elde olur.

ii. Aynı yöntemle bulunur.

Sonuç 3.1.10 : $(a,b) = 1$, $0 \leq a \leq b$ ve $ay - bx = \pm 1$ olacak şekilde x, y negatif olmayan tamsayılar ve $y > 0$ olsun. Bu durumda

i. $a + b$ tek, $x + y$ tek ve k çift ise $S(x+ak, y+bk) = S(x,y)$,

ii. a tek, x tek ve k çift ise $s_4(x+ak, y+bk) = s_4(x,y)$.

İspat: i. Sonuç 3.1.8.i 'den

$$S(x+ak, y+bk) = S(a,b) \mp 1$$

elde olur. Sonuç 3.1.9.i 'den

$$S(x+ak, y+bk) = S(x,y).$$

ii. Benzer şekilde bulunur.

3.2. Rademacher'ın Soruları

$S(d,c)$ toplamı ile ilgili olarak Rademacher'ın sorularını tekrar ele alalım. $(d,c)=1$

ve $g(\frac{d}{c}) = S(d,c)$ olarak tanımlayalım. $q \in \mathbf{Z}$ için $S(qd, qc) \neq S(d,c)$.

1. $g(x)$ herhangi bir reel sayının komşuluğunda sınırlı mıdır?

2. $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}$ ardışık iki Farey kesri olsun. Eğer $g(\frac{h_1}{k_1}) > 0$ ve $g(\frac{h_2}{k_2}) > 0$ ise

$g(\frac{h_1 + h_2}{k_1 + k_2}) \geq 0$ mıdır?

$$g(\frac{d}{c} + 2) = S(d+2c, c)$$

$$= \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{j+1+\left[\frac{(d+2c)j}{c}\right]} = \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{j+1+\left[\frac{dj}{c}\right]} = S(d,c) = g(\frac{d}{c}). \quad (3.20)$$

Bu ifade, $g(x)$ fonksiyonunun 2 ile periyodik olduğunu gösterir. Ayrıca

$$S(d+c,c) = \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{j+1+\left[\frac{(d+c)j}{c}\right]} = \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{2j+1+\left[\frac{dj}{c}\right]} = -\sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{\left[\frac{dj}{c}\right]} = -s_4(d,c). \quad (3.21)$$

Teorem 3.2.1 : $g(x)$ fonksiyonu herhangi bir gerçel sayının komşuluğunda alttan ve üstten sınırsızdır.

İspat: $r \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ verilsin ve (3.20) 'den $r \in [0,2)$ alabiliriz. $r \in [0,1]$ ise $(a,b)=1$, a , b tek ve

$$\left| r - \frac{a}{b} \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\frac{a}{b}$ vardır.

$ay_1 - bx_1 = 1$ olacak şekilde $x_1, y_1 \in \mathbf{N}$ olsun. Yeteri kadar büyük $k \in \mathbf{N}$ için

$$\left| r - \frac{x_1 + ak}{y_1 + bk} \right| < \varepsilon$$

olur. Sonuç 3.1.6.i 'den

$$g\left(\frac{x_1 + ak}{y_1 + bk}\right) = k + O(1), k \rightarrow \infty \text{ için üstten sınırsız olur.}$$

Benzer olarak $ay_2 - bx_2 = -1$ ve

$$\left| r - \frac{x_2 + ak}{y_2 + bk} \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $x_2, y_2 \in \mathbf{N}$ vardır. Sonuç 3.1.6.i 'den

$$g\left(\frac{x_2 + ak}{y_2 + bk}\right) = -k + O(1), k \rightarrow \infty \text{ için alttan sınırsızdır.}$$

Bu son iki ifadeden $g(x)$, bu komşulukta sınırsızdır.

Eğer $r \in (1,2)$ ise aynı yöntem $(r-1)$ için uygulanıp aynı sonuçlar elde edilir.

4. BULGULAR

4.1. $s_1(h,k)$, $s_2(h,k)$, $s_3(h,k)$, $s_5(h,k)$ Toplamlarının Seri İfadeleri

Teorem 4.1.1 : $(a,b) = 1$, $0 \leq a \leq b$ ve $ay - bx = \pm 1$ olacak şekilde x, y negatif olmayan tamsayılar ve $y > 0$ olsun. Bu durumda $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad s_1(x+ak, y+bk) &= -\frac{1}{2}s_4(x+ak, y+bk) + \frac{b}{2(y+bk)} \left(2s_1(a,b) \mp (-1)^a \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{a\ell} \right. \\ &+ (-1)^{ak} \frac{1}{2(y+bk)} (bks_4(x,y) + 2ys_1(x,y)) + \frac{b}{y+bk} \left(s_4(a,b) \mp (-1)^a \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{a\ell} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\left. \left. + (-1)^{ak} \frac{1}{2}s_4(x,y) \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \text{ii.} \quad s_2(x+ak, y+bk) &= -\frac{1}{2}s_3(x+ak, y+bk) + \frac{(x+ak)(y+bk-1)}{2(y+bk)} (-1)^{y+bk-1} \\ &- \frac{(-1)^{y+bk-1}}{2(y+bk)} \left[\frac{y+bk}{2} \right] + \frac{1}{y+bk} \left(bs_2(a,b) + (-1)^b \frac{a(b-1)}{2} - (-1)^b \frac{1}{2} \left[\frac{b}{2} \right] \right) \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{b\ell} \\ &+ \frac{1}{y+bk} \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{b\ell} \left\{ \left(2a\ell \left[\frac{b}{2} \right] - ab(\ell+1)^2 - b(\ell+1) \left[\frac{\mp 1}{y+bk} \right] \right) (-1)^b + s_3(a,b) \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \right\} \\ &+ \frac{1+(-1)^b}{2(y+bk)} \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{b\ell} b\ell \left(a\ell - \frac{1}{2} \right) + \frac{(-1)^{y+bk}}{y+bk} \left(\frac{x(y-1)}{2} + \left(ak + \frac{bxk}{y} - \frac{1}{2} \right) \left[\frac{y}{2} \right] \right) \\ &+ \frac{(-1)^{bk}}{y+bk} \left(ys_2(x,y) + \frac{2bk+y}{2}s_3(x,y) + bk \left(ak - \frac{1}{2} \right) \frac{1+(-1)^y}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{iii.} \quad s_3(x+ak, y+bk) &= \frac{x+ak}{y+bk} \left[\frac{y+bk}{2} \right] (-1)^{y+bk-1} + \frac{1-(-1)^{bk}}{4} + (-1)^{y+bk} \frac{x}{y} \left[\frac{y}{2} \right] \\ &+ \left((-1)^b \left(\frac{a}{b} \left[\frac{b}{2} \right] - a - \left[\frac{\mp 1}{y+bk} \right] \right) - \frac{1+(-1)^b}{4} + s_3(a,b) \right) \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{b\ell} + (-1)^{bk} s_3(x,y) \end{aligned}$$

$$+ a \frac{1 - (-1)^b}{2} \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{b\ell} \ell + (-1)^{bk} a k \frac{1 + (-1)^y}{2}, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } s_5(x+ak, y+bk) &= \frac{1}{2} S(x+ak, y+bk) + \frac{(-1)^{(a+b)k}}{y+bk} \left(y s_5(x, y) - \frac{2bk+y}{2} S(x, y) \right) \\ &\quad + \frac{b}{y+bk} \left(s_5(a, b) \mp \frac{(-1)^{a+b}}{2} \right) \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{(a+b)\ell} \\ &\quad - \frac{b}{y+bk} \left(S(a, b) \pm (-1)^{a+b} \right) \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{(a+b)\ell} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

İspat: $s_1(a, b)$ 'nin tanımından

$$\begin{aligned} \text{i. } s_1(x+ak, y+bk) &= \sum_{j=1}^{y+bk-1} (-1)^{\left\lfloor \frac{(x+ak)j}{y+bk} \right\rfloor} \left(\left(\frac{j}{y+bk} \right) \right) \\ &= \frac{1}{y+bk} \sum_{j=1}^{y+bk-1} j (-1)^{\left\lfloor \frac{(x+ak)j}{y+bk} \right\rfloor} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{y+bk-1} (-1)^{\left\lfloor \frac{(x+ak)j}{y+bk} \right\rfloor} \end{aligned} \quad (4.5)$$

yazılır. (4.5)'in sağ tarafındaki ilk terimi A, ikinci terimi ise B ile gösterelim. $s_4(a, b)$ 'nin tanımı göz önüne alınırsa $B = s_4(x+ak, y+bk)$ olduğu görülür. Şimdi A toplamını hesaplayalım.

$$A = \sum_{j=1}^{bk} j (-1)^{\left\lfloor \frac{(x+ak)j}{y+bk} \right\rfloor} + \sum_{j=bk+1}^{y+bk-1} j (-1)^{\left\lfloor \frac{(x+ak)j}{y+bk} \right\rfloor} = A_1 + A_2 \quad (4.6)$$

olarak yazılabilir. $j = m + b\ell$ dönüşümü yapılırsa

$$A_1 = \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{j=b\ell+1}^{b(\ell+1)} j (-1)^{\left\lfloor \frac{(x+ak)j}{y+bk} \right\rfloor} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{m=1}^b (m + b\ell) (-1)^{\left\lfloor \frac{(x+ak)(m+b\ell)}{y+bk} \right\rfloor}$$

olur. (3.13) ve Önteorem 3.1.4'den

$$A_1 = \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{a\ell} \sum_{m=1}^b m (-1)^{\left\lfloor \frac{(x+ak)m}{y+bk} \right\rfloor} + \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{a\ell} b\ell \sum_{m=1}^b (-1)^{\left\lfloor \frac{(x+ak)m}{y+bk} \right\rfloor}$$

elde edilir.

$$A_{1,1} = \sum_{m=1}^b m (-1)^{\left\lfloor \frac{(x+ak)m}{y+bk} \right\rfloor} \text{ ve } A_{1,2} = \sum_{m=1}^b (-1)^{\left\lfloor \frac{(x+ak)m}{y+bk} \right\rfloor}$$

denirse

$$A_1 = \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{a\ell} A_{1,1} + \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{a\ell} A_{1,2} \quad (4.7)$$

olur. Şimdi $A_{1,1}$ ve $A_{1,2}$ hesaplayalım.

$$A_{1,1} = \sum_{m=1}^{b-1} m (-1)^{\left\lfloor \frac{(x+ak)m}{y+bk} \right\rfloor} + b (-1)^{\left\lfloor \frac{(x+ak)b}{y+bk} \right\rfloor}$$

$$\left\lfloor \frac{(x+ak)b}{y+bk} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{ay \mp 1 + abk}{y+bk} \right\rfloor = a + \left\lfloor \frac{\mp 1}{y+bk} \right\rfloor \text{ ve Önteorem 3.1.4'den}$$

$$A_{1,1} = \sum_{m=1}^{b-1} m (-1)^{\left\lfloor \frac{ma}{b} \right\rfloor} \mp b (-1)^a$$

bulunur. Diğer taraftan

$$s_1(a,b) = \frac{1}{b} \sum_{m=1}^{b-1} m (-1)^{\left\lfloor \frac{ma}{b} \right\rfloor} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{b-1} (-1)^{\left\lfloor \frac{ma}{b} \right\rfloor}$$

den

$$\sum_{m=1}^{b-1} m (-1)^{\left\lfloor \frac{ma}{b} \right\rfloor} = b s_1(a,b) + \frac{b}{2} s_4(a,b)$$

bulunur. O halde

$$A_{1,1} = bs_1(a,b) + \frac{b}{2} s_4(a,b) \mp b(-1)^a$$

olur. Benzer şekilde

$$A_{1,2} = s_4(a,b) \mp (-1)^a$$

bulunur. Bunlar (4.7)'de yerleştirilirse

$$A_1 = bs_1(a,b) \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{a\ell} + b(s_4(a,b) \mp (-1)^a) \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{a\ell} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \mp \frac{b}{2} (-1)^a \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{a\ell}$$

elde edilir. Şimdi A_2 'yi hesaplayalım. Önteorem 3.1.3.ii 'den

$$A_2 = (-1)^{ak} \left\{ ys_1(x,y) + \frac{2bk+y}{2} s_4(x,y) \right\}$$

Bu sonuçlar (4.5)'de yerine yazılırsa (4.1) elde edilir.

Aynı hesaplama yöntemiyle $s_2(x+ak,y+bk)$, $s_3(x+ak,y+bk)$, $s_5(x+ak,y+bk)$ toplamaları için de ifade edilen sonuçlar elde edilir.

Bundan sonra vereceğimiz sonuçlarda Teorem 4.1.1'in varsayımları kabul edilecektir.

Sonuç 4.1.2 :

- i. a, x tek ve k çift ise $s_1(x+ak,y+bk) = 0$
- ii. a, x tek ve k tek ise $s_1(x+ak,y+bk) = -\frac{1}{2} s_4(x,y) \pm \frac{b}{2(y+bk)}$

İspat: Teorem 2.2.2.i 'den $s_1(a,b) = s_1(x,y) = 0$ ve (4.1) ifadesinde bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \text{i. } s_1(x+ak,y+bk) &= -\frac{1}{2} s_4(x+ak,y+bk) + (-1)^k \frac{1}{2(y+bk)} bks_4(x,y) \\ &\pm \frac{b}{2(y+bk)} \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell + \frac{b}{y+bk} (s_4(a,b) \pm 1) \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell \left(\ell + \frac{1}{2} \right) + (-1)^k \frac{1}{2} s_4(x,y) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. k çift olduğundan da

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell \ell = -\frac{k}{2} \text{ ve } \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell = 0$$

olduğu kolayca görülür [Apostol ve Vu ([2],1982,s. 20)]. Sonuç 3.1.9.ii ve Sonuç 3.1.10.ii göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} s_1(x+ak, y+bk) &= -\frac{1}{2} s_4(x, y) + \frac{bk}{2(y+bk)} s_4(x, y) \\ &\quad - \frac{bk}{2(y+bk)} s_4(x, y) + \frac{1}{2} s_4(x, y) = 0 \end{aligned}$$

ii. a, x ve k tek olduğundan Sonuç 3.1.8.ii ve Sonuç 3.1.9.ii gereği

$$\begin{aligned} s_1(x+ak, y+bk) &= \frac{b}{y+bk} (s_4(a, b) \mp 1) \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell \ell - \frac{2bk+y}{2(y+bk)} s_4(x, y) \\ &\quad + \frac{b}{(y+bk)} \left(\frac{1}{2} s_4(a, b) \mp 1 \right) \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell \end{aligned}$$

Diğer taraftan k tek için

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell \ell = \left[\frac{k}{2} \right] (-1)^{k-1} = \frac{k-1}{2} \text{ ve } \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell = 1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} s_1(x+ak, y+bk) &= \frac{b(k-1)}{2(y+bk)} s_4(x, y) - \frac{bk}{2(y+bk)} s_4(x, y) - \frac{1}{2} s_4(x, y) \\ &\quad + \frac{b}{2(y+bk)} s_4(x, y) \mp \frac{b}{2(y+bk)} = -\frac{1}{2} s_4(x, y) \mp \frac{b}{2(y+bk)} \end{aligned}$$

Sonuç 4.1.3 :

- i. b çift ise $4s_2(a, b) + 2s_3(x, y) = \pm \frac{y^2 - by + 1}{by}$
- ii. y çift ise $4s_2(x, y) + 2s_3(a, b) = \mp \frac{b^2 - by + 1}{by}$

İspat: $s_2(x+ak, y+bk)$, (4.2) yardımıyla

$$s_2(x+ak, y+bk) = -\frac{1}{2} s_3(x+ak, y+bk) + \frac{(x+ak)(y+bk-1)}{2(y+bk)} (-1)^{y+bk-1} \\ - \frac{(-1)^{y+bk-1}}{2(y+bk)} \left[\frac{y+bk}{2} \right] - \frac{1}{y+bk} (A_1 + A_2)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$A_1 = \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{b\ell} \left(\frac{a(b-1)}{2} (-1)^{b-1} - bs_2(a, b) \right) + \frac{1+(-1)^b}{2} \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{b\ell} \left(\frac{b\ell}{2} - ab\ell^2 \right) \\ + \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{b\ell} \left((-1)^{b-1} \left[\frac{b}{2} \right] \left(2a\ell - \frac{1}{2} \right) - bs_3(a, b) \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \right) \\ + (-1)^b \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{b\ell} ab(\ell+1)^2 + (-1)^b \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{b\ell} b(\ell+1) \left[\frac{\mp 1}{y+bk} \right].$$

$$A_2 = (-1)^{y+bk-1} \left(ak + \frac{bkx}{y} - \frac{1}{2} \right) \left[\frac{y}{2} \right] + (-1)^{bk} \frac{1+(-1)^y}{2} \left(\frac{1}{2} bk - abk^2 \right) \\ - (-1)^{y+bk} \frac{x(y-1)}{2} - (-1)^{bk} \left(\frac{2bk+y}{2} s_3(x, y) + ys_2(x, y) \right)$$

dır.

i. b çift olsun. $ay - bx = \pm 1$ den y tek ve Teorem 2.2.2 'den $s_3(a, b) = s_2(x, y) = 0$ olup,

$$A_1 = -bs_2(a, b) + \frac{ak}{2} + \frac{abk^2}{2} + \frac{bk^2}{4} + \frac{bk^2}{2} \left[\frac{\mp 1}{y+bk} \right] + \frac{bk}{2} \left[\frac{\mp 1}{y+bk} \right]$$

ve

$$A_2 = \frac{xy}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{4} + \frac{1}{4} + \frac{aky}{2} - \frac{ak}{2} + \frac{bkx}{2} - \frac{bkx}{2y} - \frac{2bk+y}{2} s_3(x, y)$$

bulunur. Bu değerleri yukarıda yerine yazıp, ilk olarak $ay - bx = -1$ alınır ve gerekli işlemler yapılır ise sonucun ilk kısmı, $ay - bx = 1$ alınır ise sonucun ikinci kısmı elde edilir.

ii. y çift olsun. $ay - bx = \pm 1$ den b tek ve Teorem 2.2.2 'den $s_3(x,y) = s_2(a,b) = 0$ olur ve i.) 'deki yöntemle benzer şekilde bulunur.

Sonuç 4.1.4 : b, y tek ve k tek ise $s_3(a,b) - s_3(x,y) = \pm \frac{1}{2by}(by - 1)$

İspat: b, y tek ve k tek ise $y+bk$ çift olur ve Teorem 2.2.2 'den $s_3(x+ak, y+bk) = 0$ olur. Bu değerler (4.3)'de yerine yazılır ve bazı işlemler yapılır ise

$$s_3(a,b) - s_3(x,y) = \frac{x}{2y} - \frac{a}{2b} - \frac{1}{2} - \left[\frac{\mp 1}{y + bk} \right]$$

elde edilir. $ay - bx = -1$ alınırsa

$$s_3(a,b) - s_3(x,y) = -\frac{1}{2by}(by - 1)$$

bulunur, $ay - bx = 1$ alınırsa

$$s_3(a,b) - s_3(x,y) = \frac{1}{2by}(by - 1)$$

elde edilir.

Sonuç: 4.1.5 :

i. $a + b$ tek, $x + y$ tek ve k çift ise $s_5(x+ak, y+bk) = 0$,

ii. $a + b$ tek, $x + y$ tek ve k tek ise $s_5(x+ak, y+bk) = \frac{1}{2} S(x, y) \pm \frac{b}{2(y + bk)}$.

İspat: i. $a + b$ tek, $x + y$ tek olsun. Teorem 2.2.2 'den $s_5(a,b) = s_5(x,y) = 0$ ve (4.4) denkleminde Sonuç 3.1.10.i kullanılırsa

$$s_5(x+ak, y+bk) = \frac{1}{2} S(x, y) \pm \frac{b}{2(y + bk)} \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell - \frac{2bk + y}{2(y + bk)} S(x, y) \\ - \frac{b}{y + bk} (S(a, b) \mp 1) \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell \left(\ell + \frac{1}{2} \right)$$

elde edilir. Sonuç 3.1.9.i kullanılır ve k 'nın çift olduğu göz önüne alınırsa

$$s_5(x+ak, y+bk) = \frac{1}{2} S(x, y) - \frac{bk}{2(y+bk)} S(x, y) - \frac{1}{2} S(x, y) + \frac{bk}{2(y+bk)} S(x, y) = 0$$

ii. $a + b$ tek, $x + y$ tek ve k tek olduğundan Sonuç 3.1.8.i ve Sonuç 3.1.9.i gereği

$$\begin{aligned} s_5(x+ak, y+bk) &= -\frac{b}{2(y+bk)} (S(x, y) \mp 1) - \frac{b(k-1)}{2(y+bk)} S(x, y) + \frac{2bk+y}{2(y+bk)} S(x, y) \\ &= \frac{1}{2} S(x, y) \pm \frac{b}{2(y+bk)} \end{aligned}$$

Sonuç 4.1.6 :

i. a çift ise $2s_1(a, b) + s_4(x, y) = \mp \frac{y-b}{b}$

ii. a, b tek ise $2s_5(a, b) - S(x, y) = \mp \frac{y-b}{b}$

İspat: i. a çift olduğundan Teorem 2.2.2 gereği $s_4(a, b) = 0$ ve Sonuç 3.1.6.ii göz önüne alınarak (4.1) bağıntısında gerekli işlemler yapılırsa

$$s_1(x+ak, y+bk) = \pm \frac{(y-b)k}{2(y+bk)} + \frac{bk}{(y+bk)} s_1(a, b) + \frac{bk}{2(y+bk)} s_4(x, y)$$

elde edilir. $x + ak$ tek olduğundan Teorem 2.2.2 gereği $s_1(x+ak, y+bk) = 0$ dır. Buradan istenen sonuç çıkar.

ii. Benzer şekilde bulunur.

Sonuç 4.1.7 : b çift ise

$$s_3(x+ak, y+bk) = -\frac{x+ak}{2(y+bk)} - k \left(\frac{1}{2} + \left[\frac{\mp 1}{y+bk} \right] \right) + \frac{x}{2y} + s_3(x, y).$$

İspat: b çift olsun. Teorem 2.2.2 gereği $s_3(a, b) = 0$ ve $ay - bx = \pm 1$ den y tek olur. (4.3) bağıntısında gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} s_3(x+ak, y+bk) &= -\frac{x+ak}{2(y+bk)} + \frac{x}{2} + \frac{ak}{2} - \frac{k}{2} - ak - k \left[\frac{\mp 1}{y+bk} \right] - \frac{x}{2} + \frac{x}{2y} + s_3(x, y) \\ &= -\frac{x+ak}{2(y+bk)} - k \left(\frac{1}{2} + \left[\frac{\mp 1}{y+bk} \right] \right) + \frac{x}{2y} + s_3(x, y) \end{aligned}$$

bulunur.

4.2. $s_1(h,k)$, $s_3(h,k)$, $s_5(h,k)$ Toplamlarının Sınırlılığı ve Sağladıkları Bazı Eşitsizlikler

Sonuç 4.2.1 : $(a,b) = 1$, a, b, x tek ve $a^2 \equiv -1 \pmod{b}$ olsun.

- i. Eğer $ay - bx = 1$ ise $-2 \leq s_1(x+ak, y+bk) \leq \frac{3}{2}$
- ii. Eğer $ay - bx = -1$ ise $-\frac{3}{2} \leq s_1(x+ak, y+bk) \leq 2$

İspat: a, b , tek ve $a^2 \equiv -1 \pmod{b}$ olduğundan $s_4(a,b) = 0$ (Goldberg [14], 1981, s. 110), Teorem 2.2.2 ve Sonuç 3.1.9.ii 'den $s_1(a,b) = s_1(x,y) = 0$ ve $s_4(x,y) = \pm 1$. Bu değerler altında (4.1) bağıntısı yeniden düzenlenirse

$$s_1(x+ak, y+bk) = \pm \left(-\frac{1}{2} \frac{1+(-1)^k}{2} - (-1)^k \frac{b}{y+bk} \left[\frac{k}{2} \right] + (-1)^k \frac{bk}{y+bk} \right) \\ \pm \left((-1)^k \frac{y}{2(y+bk)} + \frac{b}{y+bk} \frac{1-(-1)^k}{2} \right)$$

olur.

i. $ay - bx = 1$ olsun

$$s_1(x+ak, y+bk) = -\frac{1}{2} \frac{1+(-1)^k}{2} - (-1)^k \frac{b}{y+bk} \left[\frac{k}{2} \right] + (-1)^k \frac{bk}{y+bk} + \frac{(-1)^k y}{2(y+bk)} \\ + \frac{b}{y+bk} \frac{1-(-1)^k}{2} \\ \geq -\frac{1}{2} - \frac{bk}{2(y+bk)} - \frac{bk}{y+bk} - \frac{y}{2(y+bk)} \\ = -\frac{1}{2} - \frac{3bk}{2(y+bk)} - \frac{y}{2(y+bk)}$$

$k \rightarrow \infty$ için $s_1(x+ak, y+bk) \geq -2$ olur.

Diğer taraftan

$$s_1(x+ak, y+bk) \leq \frac{b(k-1)}{2(y+bk)} + \frac{bk}{y+bk} + \frac{y}{2(y+bk)} + \frac{b}{y+bk} = \frac{1}{2} + \frac{2bk+b}{2(y+bk)}$$

$k \rightarrow \infty$ için $s_1(x+ak, y+bk) \leq \frac{3}{2}$ bulunur.

ii. Benzer şekilde $ay - bx = -1$ ise $-\frac{3}{2} \leq s_1(x+ak, y+bk) \leq 2$ olduğu görülür.

Sonuç olarak a, b, x tek ve $a^2 \equiv -1 \pmod{b}$ koşulları altında

$$|s_1(x+ak, y+bk)| \leq 2$$

Sonuç 4.2.2 : $(a, b) = 1$, a çift, b tek, $x + y$ tek ve $a^2 \equiv -1 \pmod{b}$ olsun.

i. Eğer $ay - bx = 1$ ise $-2 \leq s_5(x+ak, y+bk) \leq \frac{3}{2}$,

ii. Eğer $ay - bx = -1$ ise $-\frac{3}{2} \leq s_5(x+ak, y+bk) \leq 2$.

İspat: a çift, b tek ve $a^2 \equiv -1 \pmod{b}$ olduğundan $S(a, b) = 0$ (Goldberg [14], 1981, s. 110), Teorem 2.2.2 ve Sonuç 3.1.9.ii 'den $s_5(a, b) = s_5(x, y) = 0$ ve $S(x, y) = \mp 1$. Bu değerler altında (4.4) bağıntısı yeniden düzenlenirse

$$s_5(x+ak, y+bk) = \pm \left(-\frac{1}{2} \frac{1+(-1)^k}{2} - (-1)^k \frac{b}{y+bk} \left[\frac{k}{2} \right] + (-1)^k \frac{bk}{y+bk} \right) \\ \pm \left((-1)^k \frac{y}{2(y+bk)} + \frac{b}{y+bk} \frac{1-(-1)^k}{2} \right)$$

olarak yazılabilir.

i. $ay - bx = 1$ olsun.

$$s_5(x+ak, y+bk) = -\frac{1}{2} \frac{1+(-1)^k}{2} - (-1)^k \frac{b}{y+bk} \left[\frac{k}{2} \right] + (-1)^k \frac{bk}{y+bk} + \frac{(-1)^k y}{2(y+bk)} \\ + \frac{b}{y+bk} \frac{1-(-1)^k}{2} \geq -\frac{1}{2} - \frac{bk}{2(y+bk)} - \frac{bk}{y+bk} - \frac{y}{2(y+bk)}$$

$$= -1 - \frac{bk}{y + bk}$$

$k \rightarrow \infty$ için $s_5(x+ak, y+bk) \geq -2$ olur.

Benzer düşünceyle,

$$s_5(x+ak, y+bk) \leq \frac{b(k-1)}{2(y+bk)} + \frac{bk}{y+bk} + \frac{y}{2(y+bk)} = \frac{1}{2} + \frac{bk}{y+bk} - \frac{b}{2(y+bk)}$$

olur. $k \rightarrow \infty$ için $s_5(x+ak, y+bk) \leq \frac{3}{2}$ bulunur.

ii. Benzer şekilde $ay - bx = -1$ ise $-\frac{3}{2} \leq s_5(x+ak, y+bk) \leq 2$ olduğu görülür.

Sonuç olarak a çift, b tek, $x + y$ tek ve $a^2 \equiv -1 \pmod{b}$ koşulları altında

$$|s_5(x+ak, y+bk)| \leq 2$$

Sonuç 4.2.3 : a ve x tek olsun.

i. Eğer $s_4(x, y) \geq 0$ ise $-2s_4(x, y) \leq s_1(x+ak, y+bk) \leq \frac{3}{2} s_4(x, y)$

ii. Eğer $s_4(x, y) \leq 0$ ise $\frac{3}{2} s_4(x, y) \leq s_1(x+ak, y+bk) \leq -2 s_4(x, y)$

İspat: a , x tek olduğundan Teorem 2.2.2 ve Sonuç 3.1.9.ii 'den $s_1(a, b) = s_1(x, y) = 0$ ve $s_4(x, y) = s_4(a, b) \pm 1$. Bu değerlerle birlikte Teorem 3.1.2 'de göz önüne alınarak (4.1) bağıntısı yeniden düzenlenirse

$$s_1(x+ak, y+bk) = \left(-\frac{1}{2} \frac{1 + (-1)^k}{2} - (-1)^k \frac{b}{y+bk} \left[\frac{k}{2} \right] + (-1)^k \frac{bk}{y+bk} \right) s_4(x, y) \\ + \left((-1)^k \frac{y}{2(y+bk)} + \frac{b}{y+bk} \frac{1 - (-1)^k}{2} \right) s_4(x, y) \mp \frac{b}{2(y+bk)} \frac{1 - (-1)^k}{2}$$

ifadesi elde edilir.

Eğer $s_4(x, y) \geq 0$ ise Sonuç 4.2.1.i 'deki işlemler tekrarlanır, eğer $s_4(x, y) \leq 0$ ise Sonuç 4.2.1.ii 'deki işlemler tekrarlanır.

Sonuç olarak, eğer a ve x tek ise

$$|s_1(x+ak, y+bk)| \leq 2 |s_4(x, y)|.$$

Sonuç 4.2.4 : $a + b$ tek, $x + y$ tek olsun.

i. Eğer $S(x, y) \geq 0$ ise $-\frac{3}{2} S(x, y) \leq s_5(x+ak, y+bk) \leq 2 S(x, y)$,

ii. Eğer $S(x, y) \leq 0$ ise $2S(x, y) \leq s_5(x+ak, y+bk) \leq -\frac{3}{2} S(x, y)$.

İspat: Sonuç 4.2.3 'e benzer şekilde istenen sonuç kolayca görülebilir.

Sonuç olarak, eğer $a + b$ tek ve $x + y$ tek ise

$$|s_5(x+ak, y+bk)| \leq 2 |S(x, y)|$$

$g(x)$ fonksiyonu 3.2 kesiminde ifade edilen fonksiyon olup $g\left(\frac{a}{b}\right) = s_3(a, b)$ olarak

alalım. Tanımdan, $g(x)$ fonksiyonu 1 ile periyodik olduğu görülebilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{a}{b} + 1\right) &= g\left(\frac{a+b}{b}\right) = s_3(a+b, b) = \sum_{r=1}^{b-1} (-1)^r \left(\left(\frac{(a+b)r}{b} \right) \right) = \sum_{r=1}^{b-1} (-1)^r \left(\left(r + \frac{ar}{b} \right) \right) \\ &= \sum_{r=1}^{b-1} (-1)^r \left(\left(\frac{ar}{b} \right) \right) = s_3(a, b) = g\left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Teorem 4.2.5 : $g(x) = s_3(x+ak, y+bk)$ fonksiyonu bir gerçel sayının komşuluğunda alttan ve üstten sınırsızdır.

İspat: $r \in \mathbf{R}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. (4.8)'den $r \in [0, 1)$ varsayabiliriz. Bu durumda öyle $\frac{a}{b}$ sayısı vardır ki $(a, b) = 1$, b çift ve

$$\left| r - \frac{a}{b} \right| < \varepsilon$$

olur. $ay_1 - bx_1 = 1$ olacak şekilde $x_1, y_1 \in \mathbf{N}$ vardır. Bu durumda yeteri kadar büyük $k \in \mathbf{N}$ için

$$\left| r - \frac{x_1 + ak}{y_1 + bk} \right| < \varepsilon$$

sağlanır. Şimdi Sonuç 4.1.7'yi uygularsak

$$g\left(\frac{x_1 + ak}{y_1 + bk}\right) = \frac{k}{2} - \frac{x_1 + ak}{2(y_1 + bk)} + \frac{x_1}{2y_1} + s_3(x_1, y_1)$$

elde edilir. $k \rightarrow \infty$ için üstten sınırsız olduğu görülür.

Benzer şekilde $ay_2 - bx_2 = -1$ ve

$$\left| r - \frac{x_2 + ak}{y_2 + bk} \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $x_2, y_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Sonuç 4.1.7'den

$$g\left(\frac{x_2 + ak}{y_2 + bk}\right) = -\frac{k}{2} - \frac{x_2 + ak}{2(y_2 + bk)} + \frac{x_2}{2y_2} + s_3(x_2, y_2)$$

elde edilir. $k \rightarrow -\infty$ için alttan sınırsızdır.

Sonuç 4.2.6 : $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}$ ardışık Farey kesri olsun. Bu kesirlerin mediantı $\frac{h_1 + h_2}{k_1 + k_2}$

olmak üzere,

i. $s_3(h_1, k_1) \neq 0$ ve $s_3(h_2, k_2) \neq 0$ ise $s_3(h_1 + h_2, k_1 + k_2) = 0$

ii. $s_1(h_1, k_1) \neq 0$ ($s_1(h_2, k_2) \neq 0$) ise $s_1(h_2, k_2) = 0$ ($s_1(h_1, k_1) = 0$) ve $s_1(h_1 + h_2, k_1 + k_2) = 0$

iii. $s_2(h_1, k_1) \neq 0$ ($s_2(h_2, k_2) \neq 0$) ise $s_2(h_2, k_2) = 0$ ($s_2(h_1, k_1) = 0$) ve $s_2(h_1 + h_2, k_1 + k_2) = 0$

iv. $s_5(h_1, k_1) \neq 0$ ($s_5(h_2, k_2) \neq 0$) ise $s_5(h_2, k_2) = 0$ ($s_5(h_1, k_1) = 0$) ve $s_5(h_1 + h_2, k_1 + k_2) = 0$

İspat: i. $s_3(h_1, k_1) \neq 0$ ve $s_3(h_2, k_2) \neq 0$ olduğundan Teorem 2.2.2 gereği k_1 ve k_2 tek olmak zorunda. Böylece $k_1 + k_2$ çift olur, bu ise $s_3(h_1 + h_2, k_1 + k_2) = 0$ olması demektir.

ii. Eğer $s_1(h_1, k_1) \neq 0$ ($s_1(h_2, k_2) \neq 0$) iken $s_1(h_2, k_2) \neq 0$ ($s_1(h_1, k_1) \neq 0$) olsa Teorem 2.2.2'den h_1 ve h_2 çift olmalı. Ancak ardışık Farey kesirlerinin $h_2 k_1 - h_1 k_2 = \pm 1$ özelliği ile çelişir. Böylece h_1 (h_2) çift ise h_2 (h_1) tek olmalı, bu da $(h_1 + h_2)$ 'nin tek olması demektir. Yine Teorem 2.2.2'yi uygularsak istenen sonuç çıkar.

Aynı düşünceyle **iii.)** ve **iv.)** 'de elde edilir.

SONUÇ

Hardy toplamları olarak bilinen $S(h,k)$, $s_i(h,k)$, $i=1,2,3,4,5$ fonksiyonlarından $S(h,k)$ ve $s_4(h,k)$ fonksiyonları için J. Meyer seri ifadelerini, aralarında gerçekledikleri bazı bağıntıları ispatladı.

Biz de burada benzer yöntemle $s_1(h,k)$, $s_2(h,k)$, $s_3(h,k)$, $s_5(h,k)$ için seri ifadelerini verdik. Rademacher'in soruları yanıtlanmıştır. Bundan başka bu toplamların sağladığı bazı eşitsizlikler verilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] APOSTOL, T. M. 1976. Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory. *Springer-Verlag*, pp 199 .
- [2] APOSTOL, T. M. and Vu, T. H. 1982. Elementary properties of Berndt's reciprocity laws. *Pacific J. Math.*, 98, 1: 17-23.
- [3] ASAI, T. 1986. Some arithmetic on Dedekind sums. *J. Math. Soc. Japan*, 38, 1: 163-172.
- [4] ASAI, T. 1993. On the sign problems of Dedekind sums. *Reports of the Faculty of Science Shizuoka Univ.*, 27: 9-12.
- [5] BARKAN, P. 1977. Sur les sommes de Dedekind et les fractions continues finies. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 284: 923-926.
- [6] BERNDT, B. C. and GOLDBERG, L. 1982. Analitical properties of aritmetic sums arising in the theory of the classical theta functions. *Siam J. Math. Anal.*, 15, 1: 143-150.
- [7] CARLITZ, L. 1965. A theorem on generalized Dedekind sums. *Acta Arith.*, XI: 253-260.
- [8] CARLITZ, L. 1974. Inversions and generalized Dedekind sums. *Abhandlurgen Math. Seminar. Univ. Hamburg*: 41-52.
- [9] CARLITZ, L. 1975. A three-term relations for some sums related to Dedekind sums. *Pacific J. Math.*, 57: 339-348.
- [10] CARLITZ, L. 1975. Some sums involving fractional parts. *Amer. Math. Monthly* 82: 264-269.
- [11] CARLITZ, L. 1977. Some sums containing the greatest integer function. *Fibonacci Quaterly*, 15: 78-84.
- [12] CARLITZ, L. 1978. Many-term relations for multiple Dedekind sums. *Ind. J. Math.*, 20: 77-89.
- [13] CARLITZ, L. 1980. A reciprocity theorem and a three-term relations for generalized Dedekind-Rademacher sums. *Acta Arith.*, XXXVII : 117-132.
- [14] GOLDBERG, L. 1981. Transformations of Theta Functions and Analogues of Dedekind Sums. *Thesis, University of Illinois. Urbana*, pp 125.
- [15] GROSWALD, E. 1971. Dedekind-Rademacher sums. *Amer. Math. Monthly*, 78: 614-644.
- [16] HICKERSON, D. 1977. Continued fractions and density result for Dedekind sums. *J. Reine Angew. Math.*, 290: 113-116.
- [17] KNOPP, M.I. 1980. Hecke operations and an identity for the Dedekind sums. *J. Number Theory*, 12: 2-9.
- [18] LIN, C.Y. 1992. On an algorithm for the Dedekind sums. *Chinese J. Math.*, 20, 3: 275-282.

- [19] MEYER, J. L. 1997. Properties of certain integer-valued analogues of Dedekind sums. *Acta Arith. LXXXII*, 3: 229-242.
- [20] PETET, R.M. and SITARAMACHANDRARAO, R. 1987. Three – term relations for Hardy sums. *J. Number Theory*, 25: 328-339.
- [21] RADEMACHER, H. and WHITHEMAN, A. 1941. Theorems on Dedekind sums. *Amer. J. Math.*, 63: 377-407.
- [22] RADEMACHER, H. 1964. Some remarks on certain generalized Dedekind sums. *Acta Arith. IX*: 97-105.
- [23] RADEMACHER, H. and GROSWALD, E. 1972. Dedekind Sums. *The Mathematical Association of America*, pp 102.
- [24] RADEMACHER, H. 1974. Collected Papers of Hans Rademacher. *The Massachusetts Institute of Technology II*: 619-629.
- [25] ROSEN, K. 1977. On the sign of some Dedekind sums. *J. Number Theory*, 9: 209-212.
- [26] SITARAMACHANDRARAO, R. 1987. Dedekind and Hardy sums. *Acta Arith. XLIII*: 325-340.

ÖZGEÇMİŞ

Mümün Can, 1973 yılında Bulgaristan'ın Kırcaali kentinde doğdu. İlk, orta öğrenimini Bulgaristan'da, lise öğrenimini ise Bursa'da tamamladı. 1993 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 1997 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Mayıs 1999 'da Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Eylül 1998-Ekim 2000 tarihleri arasında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Öğrenimini tamamladı. Halen Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmakta.