



**T.C.
BURSA TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**HAREKETSİZ ALAN PROBLEMLERİ İÇİN FEniCS ORTAMINDA
RBVMS METODU İLE BİR HESAPLAMALI AKIŞKANLAR DİNAMİĞİ
ÇÖZÜCÜ GELİŞTİRİLMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İsmail HOŞ

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Makine Mühendisliği Tezli Yüksek Lisans Programı

TEMMUZ 2024

**T.C.
BURSA TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**HAREKETSİZ ALAN PROBLEMLERİ İÇİN FEniCS ORTAMINDA
RBVMS METODU İLE BİR HESAPLAMALI AKIŞKANLAR DİNAMİĞİ
ÇÖZÜCÜ GELİŞTİRİLMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**İsmail HOŞ
(22434964033)
ORCID: 0000-0001-9392-7101**

**Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Makine Mühendisliği Tezli Yüksek Lisans Programı**

**Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Levent AYDINBAKAR
ORCID: 0000-0002-8820-9874**

TEMMUZ 2024



20.04.2016 tarihli Resmî Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Bursa Teknik Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

İNTİHAL BEYANI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belgelediğimi, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Öğrencinin Adı Soyadı: İsmail HOŞ

İmzası:





Aileme,

ÖNSÖZ

Bu tez, hesaplamalı akışkanlar dinamiği alanındaki yoğun çalışma ve araştırmalarımın sonucudur. Bu süreçte elde ettiğim bilgi ve tecrübeleri bir araya getirerek hem akademik kariyerime hem de mühendislik alanına katkıda bulunmayı hedeflemekteyim. Öncelikle, bu çalışmanın her aşamasında bana rehberlik eden ve tüm bilgilerini benimle paylaşan değerli danışmanım Dr. Levent AYDINBAKAR'a en içten teşekkürlerimi ve saygımı sunarım. Yüksek lisans serüvenim boyunca bana yol gösterici olmuş, hesaplamalı akışkanlar dinamiği ve kullandığım açık kaynaklı tüm yazılımlar hakkında bilgi birikimlerini ve deneyimlerini en iyi şekilde bana öğretmiş ve motivasyonumu telkinleriyle hep yüksek tutmuştur. Bu çalışmanın teknik kısmında, Linux, Python, LaTeX, TikZ, PGFPlots, Gnuplot ve ParaView gibi açık kaynaklı yazılım araçlarını kullandım. Bu açık kaynaklı araçlar sayesinde, Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği ve Sonlu Elemanlar Yöntemi konularında ve teknik doküman hazırlama konusunda kariyerime katkı sağlayacak birçok ilerleme kaydedebildim. Ayrıca, tez çalışmam sırasında Kalıntı Tabanlı Çok Ölçekli “Residual-Based Variational Multiscale” ismi verilen yöntemleri kullanarak elde ettiğim sonuçların doğruluğunu ve güvenilirliğini test etmek için kullanmış olduğum referans çalışmalara katkıda bulunan araştırmacılara da teşekkür ederim. Son olarak, daima yanımda olan ve desteğini hiçbir zaman benden esirgemeyen aileme ve dostlarıma teşekkür ederim. Onların anlayışı ve sabrı, bu zorlu süreçte bana her zaman güç verdi ve çalışmalarımı azimle sürdürmem için motivasyon kaynağı oldu. Bu çalışmamın, hesaplamalı akışkanlar dinamiği alanında yapılan açık kaynak araştırmalarına ve çeşitli mühendislik uygulamalarına katkı sağlamasını umuyorum. Ayrıca, gelecekte bu alanda çalışacak olan tüm araştırmacılar ve açık kaynak araçlar geliştiren meslektaşlarım için faydalı bir kaynak olmasını temenni ediyorum. Tezimin hazırlık sürecinde emeği geçen herkese en derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Temmuz 2024

İsmail HOŞ
(Makine Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
KISALTMALAR	ix
SEMBOLLER	x
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xvi
1. GİRİŞ	1
1.1 Sonlu Elemanlar Metoduna Genel Bakış	4
1.2 Sonlu Elemanlar ve Sonlu Hacimler Metodu.....	4
1.3 FEniCS ve Çözücü Geliştirme Süreci	6
2. YÖNETİM DENKLEMLERİ.....	8
2.1 Navier-Stokes Denklemleri	8
2.2 Navier-Stokes Denklemlerinin Zayıf Formunun Türetilmesi	8
3. RBVMS FORMÜLASYONLARININ TÜRETİLMESİ.....	9
3.1 Ölçek Ayırıklaştırma	9
3.2 Stabilizasyon Parametreleri.....	10
3.3 RBVMS Denklemi	11
4. TEST HESAPLAMALARI.....	12
4.1 Kapak Tahrikli Akış Problemi	12
4.1.1 Problem tanımı	12
4.1.2 Sınır koşulları.....	14
4.1.3 Ağ yapısı	14
4.1.4 Hesaplama koşulları.....	16
4.1.5 Sonuçlar ve tartışma.....	17
4.2 Dönen Silindir Etrafındaki Akış Problemi	23
4.2.1 Problem tanımı	23
4.2.2 Sınır koşulları.....	24
4.2.3 Ağ yapısı	24
4.2.4 Hesaplama koşulları.....	26
4.2.5 Sonuçlar ve tartışma.....	26
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	30
KAYNAKLAR	32
EKLER.....	36
ÖZGEÇMİŞ.....	39

KISALTMALAR

ALE-VMS	: Keyfi Lagrange-Euler Varyasyonel Çok Ölçekli
CFD	: Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği
CFL	: Courant Sayısı
FEM	: Sonlu Elemanlar Metodu
FFC	: FEniCS Form Derleyici
FSI	: Akışkan-Yapı Etkileşimi
FVM	: Sonlu Hacimler Metodu
IGA	: İzogeometrik Analiz
LES	: Büyük Girdap Simülasyonu
PDE	: Kısmi Diferansiyel Denklemler
RBVMS	: Kalıntı Tabanlı Varyasyonel Çok Ölçekli
ST-VMS	: Uzay-Zaman Varyasyonel Çok Ölçekli
UFL	: Birleşik Form Dili

SEMBOLLER

σ	: Cauchy gerilme tensörü
α	: Silindir dönme hızı
ρ	: Yoğunluk
Δt	: Zaman adımı
Δx	: En küçük ağ boyutu
∇	: Diverjans operatörü
a	: Boyut
b	: Boyut
C	: Sabit
$C_{\Delta t}$	: Courant sayısı
C_D	: Sürüklenme kuvveti
C_L	: Kaldırma kuvveti
d	: Boyut
D	: Silindir çapı
f	: Dış kuvvet
l	: Boyut
L	: Kapak uzunluğu, Karakteristik uzunluk
p	: Basınç
p'	: İnce ölçekli basınç
p^h	: Kaba ölçekli basınç
q'	: İnce ölçekli sonlu elemanlar test fonksiyonu
q	: Sonlu elemanlar test fonksiyonu
q^h	: Kaba ölçekli sonlu elemanlar test fonksiyonu
r	: Konum vektörü
r_C	: Süreklilik kalıntısı
Re	: Reynolds sayısı
r_M	: Momentum kalıntısı
t	: Zaman
trG	: Eleman metrik tensörü iz düşümü

U	: Hareketli duvar hızı, Giriş hızı
u'	: İnce ölçekli hız
u_1	: Yataydaki hız değeri
u_2	: Düşeydeki hız değeri
u^h	: Kaba ölçekli hız
u^h	: Kaba ölçekli hız değeri
u_{silindir}	: Doğrusal hız vektörü
w'	: İnce ölçekli sonlu elemanlar test fonksiyonu
w	: Sonlu elemanlar test fonksiyonu
w^h	: Kaba ölçekli sonlu elemanlar test fonksiyonu
x_1	: Yatay doğrultu
x_2	: Düşey doğrultu
ε	: Şekil değiştirme hızı tensörü
μ	: Dinamik viskozite
ν	: Dinamik viskozite
ν_{LSIC}	: Stabilizasyon parametresi
ξ	: Referans koordinat değeri
τ_{SUPS}	: Stabilizasyon parametresi
ω	: Açısal hız
Ω	: Hesaplama alanı

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 : Ağ bağımsızlık çalışması için ağ değerleri.....	15
Çizelge 4.2 : Akış alanlarının eleman ve düğüm sayıları.	16
Çizelge 4.3 : Hesaplama alanının ağ sayısı.	24



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1: Çözücü geliştirme süreci genel özet şematik görseli.....	7
Şekil 3.1: Türbülanslı hız dalgalanmalarının, kaba ölçekli (u^h) ve ince ölçekli (u') bileşenlere ayrıştırılması. Kaba ölçekli bileşen, genel akış davranışını temsil ederken, ince ölçekli bileşen, türbülansın yüksek frekanslı, küçük ölçekli dalgalanmalarını yakalar.....	9
Şekil 4.1 : Hesaplama alanları.	13
Şekil 4.2 : Farklı sayısal ağ değerleri. (a) M1, (b) M2, (c) M3 ve (d) M4 yoğunluğundaki sayısal ağ değerleri.	15
Şekil 4.3 : Akış alanların ağ yapısı. (a) kare, (b) daire, (c) yatay elips ve (d) düşey elips şeklindeki engeller etrafında oluşturulan ağ yapıları gösterilmektedir.....	16
Şekil 4.4 : Farklı ağ yoğunluklarında akım çizgileri. Yukarıdan aşağıya ve soldan sağa sırasıyla M1, M2, M3 ve M4 numaralı sayısal ağlar için akım çizgileri.....	17
Şekil 4.5 : Hız profilleri elde etmek için oluşturulan çizgiler. Kesikli mavi çizgiler, akış profilinin çıkarıldığı (hız değerleri verilerinin alındığı) sırasıyla düşey ve yatay merkez hatlarını göstermektedir.....	18
Şekil 4.6 : M3 numaralı sayısal ağ kullanılarak elde edilen merkez hattı boyunca hız profilleri ($Re = 100$ için).	18
Şekil 4.7 : Kare (solda) ve daire (sağda) engel geometrisi için akım çizgileri. (a) $Re = 100$ (b) $Re = 400$ ve (c) $Re = 1000$. Kırmızı “+” işaretleri referans çalışmadaki [42] birincil ve ikincil girdapların ayrı ayrı $[x, y]$ koordinatlarını belirtir.....	19
Şekil 4.8 : Yatay elips (solda) ve düşey elips (sağda) engel geometrisi için akım çizgileri. (a) $Re = 100$ (b) $Re = 400$ ve (c) $Re = 1000$. Kırmızı “+” işaretleri referans çalışmadaki [42] birincil ve ikincil girdapların ayrı ayrı $[x, y]$ koordinatlarını belirtir.	20
Şekil 4.9 : Farklı geometrik şekiller etrafındaki yatay yönde (merkez hattı) akış profillerinin karşılaştırması. Her bir şekil için, Reynolds sayıları $Re = 100$, $Re = 400$ ve $Re = 1000$ için akış profilleri verilmiştir.....	21
Şekil 4.10 : Farklı geometrik şekiller etrafındaki düşey yönde (merkez hattı) akış profillerinin karşılaştırması. Her bir şekil için, Reynolds sayıları $Re = 100$, $Re = 400$ ve $Re = 1000$ için akış profilleri verilmiştir.....	22
Şekil 4.11 : Hesaplama alanı.	23
Şekil 4.12 : Doğrusal hız vektörü tanımlaması. ω 'nin r ile çarpılmasıyla elde edilen u_{silindir} vektörleri mavi renk ile gösterilmiştir. Kırmızı noktalar ise silindir üzerindeki sonlu elemanlar ağ kontrol noktalarını temsil etmektedir.	24
Şekil 4.13 : Sayısal ağ yapısı, yukarıdan aşağıya doğru ana hesaplama alanı, 4x yakınlaştırma, 16x yakınlaştırma.	25

Şekil 4.14 : Farklı α değerleri için C_D ve C_L arasındaki ilişkiyi gösteren referans ve mevcut çalışma verileri.....	26
Şekil 4.15 : Farklı α değerleri için zamana bağlı olarak C_L değişimi. Kırmızı noktalar, referans çalışmanın verilerini, mavi çizgiler ise mevcut çalışmanın sonuçlarını göstermektedir.....	27
Şekil 4.16 : $t = 200$ için $\alpha = (1,0), (2,07), (2,5), (3,5), (4,0)$ ve $(4,2)$ değerleri için girdap konturları. Sol tarafta yukarıdan aşağıya mevcut çalışma ve sağ tarafta referanstan [43] uyarlanmış karşılık gelen şekiller. Mavi renk dönen silindiri, kırmızı renk girdap konturlarının pozitif değerlerini (referansta kesik çizgilerle), siyah ise girdap konturlarının negatif değerlerini (referansta kesik çizgilerle) gösterir.	29



HAREKETSİZ ALAN PROBLEMLERİ İÇİN FEniCS ORTAMINDA RBVMS METODU İLE BİR HESAPLAMALI AKIŞKANLAR DİNAMİĞİ ÇÖZÜCÜ GELİŞTİRİLMESİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında, hareketsiz alan problemleri için FEniCS ortamında “Kalıntı Tabanlı Varyasyonel Çok Ölçekli” (“Residual-Based Variational Multiscale,” RBVMS) metodu ile bir Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği (“Computational Fluid Dynamics,” CFD) çözücüsü geliştirilmiştir. FEniCS, Sonlu Elemanlar Metodu (“Finite Element Method,” FEM) ile diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan açık kaynaklı bir yazılım kütüphanesidir ve bilimsel hesaplamalar için güçlü bir araçtır. RBVMS yöntemi, Navier-Stokes denklemlerinin çözümünde akışın modellenmesi için kullanılır ve çözülmemiş ölçeklerin etkisini minimize eder. Bu yöntem, yüksek doğruluk ve kararlılık sağlamak amacıyla stabilizasyon teknikleri kullanarak daha doğru sonuçlar elde etmeyi amaçlar. Tez kapsamında, RBVMS yönteminin teorik temelleri ayrıntılı bir şekilde ele alınmış ve bu yöntemin FEniCS platformunda nasıl uygulanacağı açıklanmıştır. Geliştirilen çözücünün etkinliğini ve doğruluğunu değerlendirmek amacıyla iki temel test problemi üzerinde çalışmalar gerçekleştirilmiştir: Kapak tahrikli akış problemi ve dönen silindir etrafındaki akış problemi. Bu test problemleri, literatürde yaygın olarak kullanılan ve CFD çözücülerinin doğruluğunu test etmek için ideal referanslar olarak ele alınmıştır. Kapak tahrikli akış problemi için yapılan analizlerde, farklı ağ yapıları Reynolds sayıları ve engel geometrileri kullanılarak akış çözümlerinin doğruluğu incelenmiştir. Ağ bağımsızlık çalışmaları sonucunda, en uygun ağ yoğunluğu belirlenmiş, bu yoğunluk için farklı modeller üzerinde CFD analizleri yapılmış ve elde edilen sonuçlar literatürdeki referans çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar sonucunda, geliştirilen çözücünün akış karakteristiklerini doğru bir şekilde temsil ettiği ve güvenilir sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Dönen silindir etrafındaki akış problemi için ise, silindirin dönme hızının farklı değerleri kullanılarak akış yapıları ve girdap dinamikleri incelenmiştir. Bu analizler sonucunda, geliştirilen çözücünün yüksek Reynolds sayılarında bile doğru ve kararlı sonuçlar verdiği belirlenmiştir. Ayrıca, farklı hız oranlarına göre elde edilen akış karakteristikleri, literatürdeki referans verilerle büyük ölçüde uyumlu bulunmuştur. Yapılan çalışma, FEniCS ortamında RBVMS yöntemi ile CFD çözücüsü geliştirilmesi konusunda akademik literatüre önemli bir katkı sağlamaktadır. Geliştirilen çözücü, hareketsiz alan problemlerinde çeşitli mühendislik uygulamalarında da kullanılabilecek etkin ve esnek bir araç olarak değerlendirilmektedir. Çalışmanın sonuçları, FEniCS ve RBVMS yönteminin CFD alanında daha geniş uygulamalara yönelik potansiyelini ortaya koymaktadır.

Anahtar kelimeler: FEniCS, Hesaplamalı akışkanlar dinamiği, Açık-kaynak, Sonlu elemanlar metodu, Kalıntı-tabanlı varyasyonel çok ölçekli metot.

A COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS SOLVER DEVELOPMENT FOR NON-MOVING DOMAIN PROBLEMS IN FEniCS ENVIRONMENT BASED ON THE RESIDUAL-BASED VARIATIONAL MULTISCALE METHOD

SUMMARY

This thesis presents the development of a Computational Fluid Dynamics (CFD) solver for non-moving domain problems in FEniCS, employing the Residual-Based Variational Multiscale (RBVMS) method. FEniCS is an open-source software library for solving differential equations using the finite element method, offering a powerful tool for scientific computing. The RBVMS method is employed for modeling flow in solving Navier-Stokes equations, with the objective of minimizing the effect of unresolved scales. This method aims to obtain more accurate results by using stabilization techniques to provide high accuracy and stability. In this thesis, the theoretical foundations of the RBVMS method are discussed in detail, and the implementation of this method on the FEniCS platform is explained. In order to evaluate the effectiveness and accuracy of the developed solver, two main test problems are studied: the lid-driven cavity problem and the flow around a rotating cylinder problem. These test problems are widely used in the literature and are considered ideal references for testing the accuracy of Computational Fluid Dynamics (CFD) solvers. In the analyses for the lid-driven cavity problem, the accuracy of the flow solutions was investigated using different mesh structures, Reynolds numbers, and obstacle geometries. Following the completion of the mesh independence studies, the optimal mesh density was determined, and the results obtained were compared with reference studies in the literature. The findings of these comparisons indicate that the developed solver accurately represents the flow characteristics and provides reliable results. For the flow problem around a rotating cylinder, flow structures and vortex dynamics are analyzed by using different values of the rotational speed of the cylinder. The results of these analyses demonstrated that the developed solver produces accurate and stable results even at high Reynolds numbers. Moreover, the flow characteristics obtained for different velocity ratios were found to be in good agreement with the reference data in the literature. This study makes an important contribution to the development of a CFD solver with the RBVMS method in FEniCS. The developed solver is considered an efficient and flexible tool that can be used in various engineering applications in still field problems. The findings of this study indicate the potential of FEniCS and the RBVMS method for broader applications in CFD.

Keywords: FEniCS, Computational fluid dynamics, Open-source, Finite element method, Residual-based variational multiscale method.

1. GİRİŞ

Hesaplamalı akışkanlar dinamiği (“Computational Fluid Dynamics” CFD) günümüzde çeşitli sektörlerde yeni ürünlerin tasarımı ve mevcut ürünlerin iyileştirilmesi için yaygın olarak kullanılan bir araçtır. Bu alanda çok sayıda açık kaynaklı (örneğin OpenFOAM, SU2, Palabos, MFIX, Elmer, Gerris) ve ticari program (örneğin Ansys/Fluent, FloEFD, StarCCM+, Cradle) kullanılmaktadır. Açık kaynaklı veya ticari çok sayıda yazılım ve paket program bulunmasına rağmen, daha verimli ve daha doğru hesaplamalar yapmak amacıyla hem mevcut hem de yenileri her geçen gün geliştirilmeye devam etmektedir. Sonlu Hacim Metodu (“Finite Volume Method,” FVM) tabanlı çözümler CFD analizlerinde yaygın olarak kullanılırken, akademik alandaki son gelişmeler Sonlu Elemanlar Metodu (“Finite Element Method,” FEM) tabanlı çözümlerin dikkate değer bir başarı elde etmesine yol açmıştır [1]. Ayrıca FEM, Akışkan-Yapı Etkileşimi (“Fluid-Structure Interaction,” FSI) gibi çoklu fizik simülasyonlarında [2] ve İzogeometrik Analiz (“Isogeometric Analysis” IGA) [3] gibi daha verimli yöntemlerle birlikte kullanılmaya daha uygun olduğundan, FEM tabanlı yöntemlerin değeri her geçen gün artmaktadır. Bu çalışmada, FVM tabanlı modelleme yöntemlerinden en başarılısı olarak kabul edilen Büyük Girdap Simülasyonu’nun (“Large-Eddy Simulation,” LES) FEM eşdeğeri olarak kabul edilen Kalıntı Tabanlı Varyasyonel Çok Ölçekli (“Residual-Based Variational Multiscale,” RBVMS) metod, akışı modellemek için kullanılacaktır. RBVMS ilk olarak Thomas J.R. Hughes ve ekibi tarafından geliştirilmiş [4,5] ve birçok çalışmada başarıyla kullanılmıştır [6-10]. RBVMS metodu, türbülans modellemesinde önemli bir yaklaşım olarak öne çıkmakla birlikte, temel prensipleri ve uygulamaları üzerine yapılan çalışmalar, hesaplamalı mekanik alanında yüksek doğruluk ve kararlılık sağlamaktadır [6]. RBVMS yöntemini LES için uygulayan çalışmalar, türbülans modellemesinde önemli katkılarda bulunmuş ve LES tipi varyasyonel çok ölçekli bir türbülans teorisi sunarak bu yöntemin etkinliğini göstermiştir [7]. Yöntemin süreklilik üzerindeki rolünü inceleyen çalışmalar ise, IGA’da kullanılan standart sonlu elemanlar ile RBVMS yönteminin türbülanslı akış problemlerindeki performansını karşılaştırmış ve yöntemin

kararlılığını ortaya koymuştur [8]. Türbülanslı Taylor-Couette akışının RBVMS yöntemi ile LES gerçekleştiren araştırmalar, bu yöntemin IGA ile kullanıldığında, yüksek Reynolds sayılarında bile kararlı hesaplamalar sonrasında doğru sonuçlar verdiğini göstermiştir [9]. Ayrıca, IGA ile RBVMS yöntemini birleştirerek duvar sınırlamalı türbülanslı akışların modellenmesini ele alan çalışmalar, yönetim denklemlerinin zayıf formuna uygulanmış sınır koşulları ve homojen ağlar kullanarak türbülanslı akış problemlerini incelemiş ve yöntemin etkinliğini bir kez daha doğrulamıştır [10]. Bu yöntemin hareketli alan problemlerini çözmek için kullanılmasını sağlayacak geliştirmelerin yapılmasıyla ortaya çıkan yeni yöntem Keyfi Lagrange-Euler Varyasyonel Çok Ölçekli (“Arbitrary Lagrangian-Eulerian Variational Multiscale,” ALE-VMS) olarak adlandırılmıştır. VMS'nin ALE versiyonu olan bu yöntem biyomedikal ve tıp [11-14], yenilenebilir enerji araçları [15-19], deniz araçları [20], uzay ve havacılık araçları [21] vb. birçok FSI ve hareketli alan problemlerinde başarıyla kullanılmıştır [22-24]. Benzer şekilde hareketli alan problemlerinde farklı bir zaman entegrasyonu kullanılmasını sağlayan benzer bir yöntem de Uzay-Zaman Varyasyonel Çok Ölçekli (“Space-Time Variational Multiscale,” ST-VMS) olarak adlandırılmıştır. Bu yöntem ayrıca çeşitli rüzgâr türbini analizlerinde [25], bazı canlıların aerodinamik davranışlarında [26], kardiyolojide [27], bazı otomobil parçalarının aerodinamik analizlerinde [28] kullanılmıştır. ST-VMS yöntemi, IGA ile birleştiğinde, türbülanslı akış problemlerinde yüksek doğruluk ve kararlılık sunmaktadır. Taylor-Couette akışının incelenmesinde, ST-VMS metodu, özellikle yüksek Reynolds sayılarında doğru sonuçlar elde edilmesini sağlamıştır [29]. Benzer şekilde, U-şeklindeki bir kanal içerisindeki türbülanslı akışın modellenmesinde de ST-VMS yöntemi ve izogeometrik ayrıklaştırma kullanılarak akışın dinamik özellikleri başarılı bir şekilde modellenmiştir [30]. Böylece başarısı birçok çalışma ile kanıtlanmış olan yöntem, yapılacak çalışma için temel motivasyon olmuştur. Bu çalışmada, sıkıştırılamaz bir akışkan akışının modellenmesi için RBVMS [4,5,31] yöntemi kullanılmıştır. Denklemlerin zayıf formuna RBVMS uygulayarak, küçük ölçekli akış dinamiklerinin etkisi stabilizasyon parametreleri aracılığıyla kontrol edilir, böylece çözüm doğruluğu ve kararlılığı sağlanır. Bu çalışmada, FEniCS kullanarak RBVMS denklemlerini verimli bir şekilde çözebilen bir CFD programı oluşturulacaktır [32,33]. FEniCS bilimsel ve mühendislik uygulamalarında diferansiyel denklemleri çözmek için yaygın olarak kullanılan açık kaynaklı bir yazılım paketidir [34]. Güçlü bir matematiksel ifade dili sağlayarak ayrıklaştırılmış

diferansiyel denklemleri içeren hesaplamalar için çözümünü verimli hale getirir [35]. Karmaşık matematiksel problemleri çözmek için FEM kullanır ve değişkenlerin doğal tanımına, varyasyonel formülasyonlara ve zayıf çözümlere izin verir [36]. FEniCS, çok yönlü yetenekleri ve RBVMS gibi ileri matematik formülasyonlarına entegrasyonu sayesinde araştırmacılara ve mühendislere çok çeşitli bilimsel hesaplama ve diferansiyel denklem problemlerinin üstesinden gelmek için güçlü bir araç sunmaktadır. Probleme özgü formüller FEM kullanılarak uygun bir forma (varyasyonel form) dönüştürüldükten sonra, Birleşik Form Dili (“Unified Form Language”, UFL) adı verilen bir dilde FEniCS'e aktarılır [37]. Sonuçta FEniCS bu denklemleri verimli bir şekilde çözebilen bir bilgisayar programı üretir. Bu çalışmanın temel motivasyonlarından biri, bu amaçla yapılmış çok az sayıda çalışma [38-40] olmasıdır. RBVMS, yüksek doğruluk gerektiren türbülanslı akışlar ve çoklu fizik problemler için güçlü bir yöntem olduğunu ispatlamasının yanı sıra FEniCS'in de esnekliği bu yöntemin etkin bir şekilde uygulanmasını sağlar. Böylece FSI gibi karmaşık çoklu fizik simülasyonlarında esnek ve geniş kullanım imkânı sunması ve karmaşık diferansiyel denklemlerin entegrasyonunun da kolaylıkla uygulanabilir olup çözülmesi, bu çalışmaya motivasyon sağlamıştır. Geliştirilen CFD programı, başlangıç olarak hareketsiz alan problemlerine uygulanabilecek esnek ve kullanıcı dostu bir yapıya sahiptir. FEniCS'in Python programlama dilini kullanıyor olması ve geliştirilen programın da bu dilde yazılmış olması, denklemler üzerinde kolayca manipülasyonlar yapılmasına imkân verir. Ek olarak problemlerin çıktılarını almak için yeni kod parçalarını entegre etmeyi oldukça kolay hale getirir. Bu esneklik, kullanıcıların çözücüye ihtiyaçlarına göre uyarlamalarına ve özel çözümler üretmelerine geniş olanak tanır. Programın doğruluğunu ve güvenilirliğini test etmek amacıyla, klasik bir kıyaslama çalışması olan kapak tahrikli akış problemi ve dönen bir silindir etrafındaki akış problemi için analizler yürütülecektir. Bu doğrulama çalışmasında, literatürde bulunan farklı çalışmalar [41-43] referans alınarak hem nitel hem de nicel karşılaştırmalar yapılacak ve programın sonuçları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Nitel karşılaştırmalar, akış çizgileri, girdap yapıları ve genel akış davranışları gibi görsel sonuçların gözlemlenmesini içerecek ve bu sonuçların literatürdeki çalışmalarla uyumu değerlendirilecektir. Nicel karşılaştırmalar ise hız profilleri, sürüklenme ve kaldırma katsayıları gibi sayısal verilerin analizi ile yapılacaktır. Böylece çözücünün güvenilirliğini, esnekliğini ve doğruluğunu ortaya koyarak kullanıcıların çözücüye güvenle kullanabilmeleri ve geliştirebilmeleri için sağlam bir temel sunacaktır.

1.1 Sonlu Elemanlar Metoduna Genel Bakış

Akışkanlar dinamiği formülasyonları genellikle sadece bir cebirsel denklem sistemi içinde değerlendirilerek çözülebilen doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemler içerir. Bu amaçla kullanılan ana yöntemlerden biri Sonlu Elemanlar Metodudur (FEM). Bir diferansiyel denklem sisteminin çözümü için, FEM iki ana bileşen üzerine kurulur. Bunlardan ilki problemin zayıf (varyasyonel) formu, ikincisi ise zayıf formdaki denklemlerin çözüme yaklaştırılmasıdır. Navier-Stokes denklemlerinin varyasyonel formu bu tezin ilerleyen bölümlerinde verilmiştir. FEM'in akışkan problemlerini çözmek için bazı dezavantajları olduğuna dair yaygın bir kanı olsa da kararlı ve çok ölçekli sonlu elemanlar teknikleri bu eksiklikleri gidermektedir [2,29,30,44]. Bu yöntemde, çözüm alanı öncelikle sonlu sayıda küçük elemana bölünür. Her bir eleman için, çözülmesi istenen diferansiyel denklemler zayıf formülasyona dönüştürülür ve eleman denklemleri elde edilir. Bu denklemler, elemanın köşelerinde veya kenarlarındaki düğümlerde tanımlanan bilinmeyenler cinsinden ifade edilir. Çözüm, düğümlerdeki değerler kullanılarak şekil fonksiyonları ile ifade edilir. Eleman denklemleri, tüm düğümlerdeki bilinmeyenleri bulmak için çözülürken, sınır koşulları da düğüm noktaları üzerinde tanımlanır. Özellikle karmaşık akış problemlerinde, RBVMS yöntemi gibi stabilizasyon teknikleri kullanan yöntemler ele alınır. RBVMS yönteminde, büyük ölçekli çözümler düğüm noktalarında hesaplanırken, küçük ölçekli yapıların etkilerini modellemek için kalıntılar (residuals) eleman iç noktalarında (örneğin, sayısal integrasyon noktalarında) hesaplanır. Eleman içindeki integraller sayısal integrasyon teknikleri ile hesaplanır. Tüm elemanların çözümleri birleştirilerek global bir denklem sistemi oluşturulur ve bu sistem çözülerek tüm çözüm alanı için yaklaşık bir çözüm elde edilir. Oluşan büyük denklem sistemi, doğrudan veya iteratif yöntemlerle çözülür. RBVMS yöntemi, büyük ve küçük ölçekli akış yapılarını ayırarak yüksek doğrulukta ve kararlı çözümler sunar.

1.2 Sonlu Elemanlar ve Sonlu Hacimler Metodu

FVM'da kullanılan Reynolds Ortalamalı Navier-Stokes ("Reynolds-Averaged Navier-Stokes," RANS) yöntemi, türbülanslı akışları modellemek için kullanılan bir yaklaşımlardan biridir. Bu yöntemde, akış değişkenleri, zamana bağlı bir ortalama değer ve buna eklenen dalgalanan bir bileşen olarak ayrıştırılır. Ortalama akış

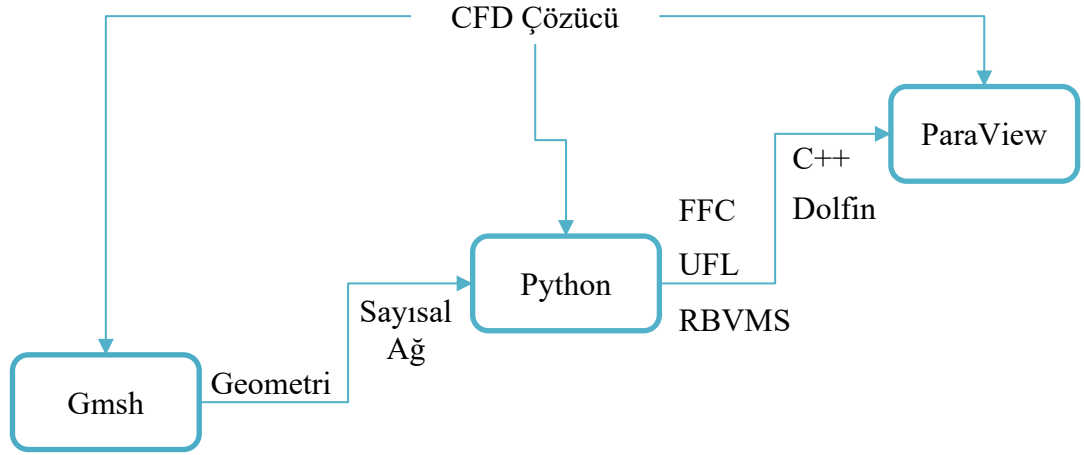
denklemleri, bu ayrıştırma kullanılarak Navier-Stokes denklemlerinden türetilir. Ancak, bu süreçte ortaya çıkan bilinmeyen dalgalanan bileşenlerin etkilerini temsil etmek için ek modellere ihtiyaç duyulur. Bilinmeyen dalgalanan bileşenler ifadesini biraz daha açmak gerekirse, türbülanslı akıslarda ortaya çıkan ve zaman ortalamasından sapmaları temsil eden bileşenlerdir. Bu bileşenler, türbülanslı akışın küçük ölçekli ve hızlı değişen parçalarıdır. RANS yönteminde, bu dalgalanmaların etkilerini doğrudan çözmek yerine, ortalama denklemlere ek modeller eklenerek temsil edilirler. Bu süreç, türbülansın karmaşıklığını basitleştirir ancak ek modellere ihtiyaç duyulduğundan dolayı ek belirsizlikler de getirebilir. Bu modeller, genellikle türbülanslı viskozite gibi kavramları kullanarak, ortalama akış üzerindeki türbülans etkilerini tahmin etmeye çalışır. RANS modelleri, hesaplama açısından verimli olsalar da özellikle akışın zamana bağlı ayrıntılarını ve büyük ölçekli kararsızlıkları yakalamakta zorluk yaşayabilirler. Yine FVM'da kullanılan yöntemlerden olan LES, türbülanslı akışları simüle etmek için kullanılan bir diğer yaklaşımdır. Bu yöntemde, denklemlerin çözümü için bir filtreleme işlemi uygulanır. Bu filtrelemeden kasıt, akışkanlar mekaniği denklemlerindeki çözümün, belirli bir ölçek aralığında büyük girdapların doğrudan çözülmesini ve küçük ölçekli türbülansların alt ağ ölçeği (subgrid scale) modelleri ile temsil edilmesini sağlar. Bu işlem, yüksek frekanslı bileşenlerin (küçük girdaplar) ayrıştırılmasını ve düşük frekanslı bileşenlerin (büyük girdaplar) çözülmesini mümkün kılar. Yani akıştaki büyük ölçekli girdaplar doğrudan hesaplanırken, küçük ölçekli girdapların etkileri çeşitli alt ağ ölçeği modelleriyle modellenir. Bu alt ağ ölçeği ifadesinden kasıt ise, hesaplama ağı çözünürlüğünün altında kalan, yani doğrudan çözülemeyen küçük ölçekli türbülanslı hareketleri ifade eder. Bu küçük ölçekleri çözmek için ise Smagorinsky modeli gibi ek türbülans modelleri kullanılır. Smagorinsky modeli, küçük ölçekli türbülans etkilerini modellemek için kullanılır. Bu model, türbülanslı akışın viskoz etkilerini hesaba katmak amacıyla yerel gerinim hızına dayalı bir çalkantı (eddy) viskozitesi tanımlar. Eddy viskozitesi akışın yerel gerinim hızına bağlı olarak belirlenen bir viskozite katsayısıdır. Bu, türbülansın viskoz etkilerinin hesaplanmasını ve modellenmesini sağlar. Yani türbülanslı akıslarda büyük ölçekli hareketlerin küçük ölçekli hareketlere enerji transferini modellemek için kullanılır. LES, akışın zamana bağlı özelliklerini ve büyük ölçekli kararsızlıkları daha iyi yakalayabilir, ancak RANS'a kıyasla daha yüksek hesaplama maliyetine sahiptir ve ince çözünürlüklü ağlar gerektirir. RBVMS hem büyük hem de küçük ölçekli akış yapılarını aynı anda modelleyerek hem yüksek

doğruluk hem de hesaplama verimliliği sunar. RBVMS'de, büyük ölçekli çözümler düğüm noktalarında hesaplanırken, küçük ölçekli yapıların etkileri eleman iç noktalarında kalıntılar üzerinden değerlendirilir. Bu yaklaşım, özellikle karmaşık geometrilere ve yüksek Reynolds sayılı akışlarda LES'e kıyasla daha düşük hesaplama maliyetleriyle daha doğru ve kararlı sonuçlar elde etmeyi mümkün kılar. Aslında RBVMS de, LES'te olduğu gibi, küçük ölçekleri yakalamak için alt ağ ölçeği modellemesi kullanır, ancak bu modelleme, çözümün kalıntılarına dayalı olarak yapılır ve ek bir türbülans modeline ihtiyaç duymaz ve RBVMS'deki ince ölçek yaklaşımı, Navier-Stokes denklemlerinin ayrıklaştırılması nedeniyle kaybolan bilgiyi temsil eden kaba ölçekli denklemlerin kalıntılarına dayanmaktadır [7]. Bu kalıntı bilgisini dahil ederek, RBVMS, açık bir alt ağ ölçeği (küçük ölçekli türbülans etkileri vb.) modeline ihtiyaç duymadan bu küçük ölçeklerin etkilerini dolaylı olarak hesaba katar. Bu da RBVMS'yi daha esnek ve hesaplama açısından daha verimli hale getirir.

1.3 FEniCS ve Çözücü Geliştirme Süreci

Çözücü geliştirme sürecinde, Şekil 1.1'de verilen şemada gösterildiği gibi, FEniCS birkaç belirgin adımı takip eder. FEniCS, FEM kullanarak Kısmi Diferansiyel Denklemleri ("Partial Differential Equations," PDE) çözmek için geliştirilmiş açık kaynaklı bir yazılım paketi olarak aşağıdaki avantajları sunar:

- Açık Kaynak: Geniş bir kullanıcı topluluğu tarafından desteklenir ve ücretsiz olarak kullanılabilir.
- Yüksek Performans: Optimize edilmiş hesaplama yöntemleri ve paralel hesaplama desteği ile yüksek performans sağlar.
- Kullanıcı Dostu: Python arayüzü sayesinde kullanıcı dostudur ve öğrenmesi kolaydır.
- Modüler Yapı: Farklı modüller ve bileşenlerle genişletilebilir bir yapıya sahiptir.



Şekil 1.1: Çözücü geliştirme süreci genel özet şematik görseli.

Süreç, geometri ve sayısal ağın tanımlandığı açık kaynaklı bir ağ oluşturucu olan Gmsh'te geometri oluşturulmasıyla başlar. Bu geometri daha sonra FEniCS ortamına girilir. FEniCS'in temel bileşenlerinden biri, PDE'leri formüle etmek için yüksek seviyeli bir dil olan UFL'dir. UFL, kullanıcıların matematiksel ifadeleri ve denklemleri, geleneksel matematiksel notasyona çok benzeyen bir sözdizimiyle yazmalarına olanak tanır, bu da kodun daha okunabilir ve anlaşılır olmasını sağlar. Yani burada RBVMS denklemi UFL aracılığıyla FEniCS'e entegre edilmek üzere yazılır. FEniCS Form Derleyici ("FEniCS Form Compiler," FFC), UFL tarafından sağlanan yüksek seviyeli matematiksel ifadeleri, sonlu eleman analizi için gerekli olan düşük seviyeli C++ koduna dönüştüren bir diğer kritik bileşendir. Bu derleme süreci, Dolfin tarafından yürütülebilecek verimli kodlar üretir. Dolfin, sonlu elemanlar yöntemini kullanarak PDE'leri çözen C++/Python kütüphanesi olarak işlev görür. Karmaşık geometriler ve çoklu fizik problemlerini destekler. Python, bu ekosistemde merkezi bir rol oynayarak farklı bileşenlerin entegrasyonunu kolaylaştırır ve problem kurulumu ile çözüm yürütmesi için bir betik arayüzü sağlar. FEniCS simülasyonlarından elde edilen sonuçlar, açık kaynaklı bir veri analizi ve görselleştirme uygulaması olan ParaView kullanılarak görselleştirilebilir, böylece kullanıcılar simülasyon sonuçlarını etkili bir şekilde yorumlayabilir ve analiz edebilir. Özetlemek gerekirse, Şekil 1.1, Gmsh'te geometri oluşturulması, ardından UFL'de problemin formüle edilmesi, FFC tarafından kod üretilmesi, Python kullanılarak Dolfin tarafından hesaplamaların yürütülmesi ve nihayetinde ParaView'de görselleştirme aşamalarını içeren bir iş akışını göstermektedir.

2. YÖNETİM DENKLEMLERİ

Akışkanlar mekaniğinin yönetim denklemleri Navier-Stokes denklemleridir. Bu bölümde gösterilen denklemler çoğunlukla referans [31]'den alınmıştır. Vektörel ifadeler kalın harflerle gösterilmiştir.

2.1 Navier-Stokes Denklemleri

Sıkıştırılamaz akışlar için Navier-Stokes denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.2)$$

Burada, ρ yoğunluk, $\mathbf{u}$ hız, t zaman, $\mathbf{f}$ dış kuvvetler ve $\boldsymbol{\sigma}$ ile tanımlanan Cauchy gerilme tensörüdür:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.3)$$

p , $\mathbf{I}$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}$ sırasıyla basınç, birim tensörü ve şekil değiştirme hızı tensörüdür. Şekil değiştirme hızı tensörü ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 0.5(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.4)$$

2.2 Navier-Stokes Denklemlerinin Zayıf Formunun Türetilmesi

Navier-Stokes denklemlerinin zayıf formu, doğrusal momentum denklemi ve kütle dengesi denkleminin uygun test fonksiyonlarıyla ($\mathbf{w}$ ve q) çarpılması, hesaplama alanı (Ω) üzerinde integre edilmesi ve aşağıdaki gibi toplanmasıyla yazılabilir:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0. \quad (2.5)$$

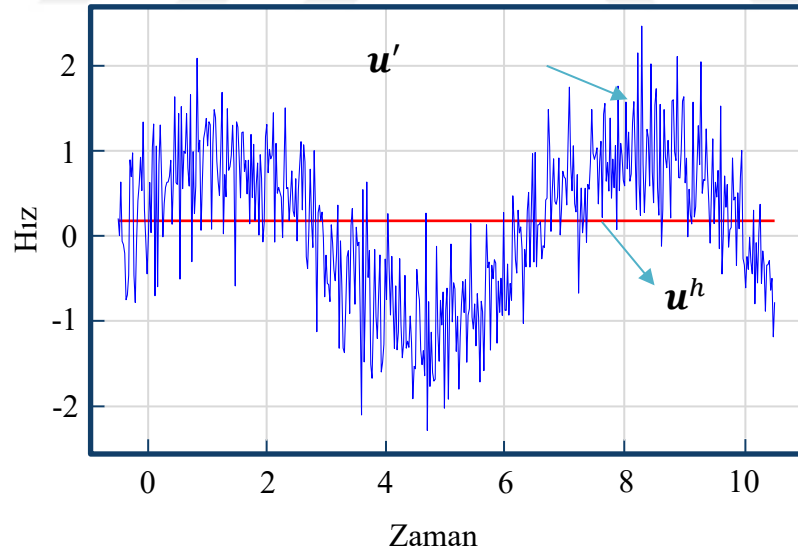
Burada, $\mathbf{w}$ ve q , $\mathbf{u}$ ve p için sonlu elemanlar test fonksiyonlarıdır.

3. RBVMS FORMÜLASYONLARININ TÜRETİLMESİ

Bu bölümde, sıkıştırılamaz akışlar için Navier-Stokes denklemlerinin RBVMS formülasyonları tanıtılmaktadır. Formülasyon, ölçek ayırıklaştırma işlemi ve stabilizasyon parametrelerinin tanımlanmasının ardından yazılır.

3.1 Ölçek Ayırıklaştırma

Navier-Stokes denklemlerinin sayısal çözümlerinde kararsızlıkların önlenmesi için stabilizasyon teknikleri uygulanır. Bu teknikler, kaba ve ince ölçekler ayrıştırılarak stabilizasyon terimleri eklenmesiyle gerçekleşir. Şekil 3.1'de temsili olarak gösterildiği gibi sonlu elemanlarda kaba ölçekli çözümler problemin genel yapısını, ince ölçekli çözümler ise küçük ölçekli özellikleri yakalar. Çözümde önce yapılan ölçek ayrımı, büyük ve küçük ölçeklerin aynı anda ve doğrudan çözülmesini sağlar. Bu, modellemenin doğruluğunu artırır ve ek hata payını azaltır.



Şekil 3.1: Türbülanslı hız dalgalanmalarının, kaba ölçekli (u^h) ve ince ölçekli (u') bileşenlere ayrıştırılması. Kaba ölçekli bileşen, genel akış davranışını temsil ederken, ince ölçekli bileşen, türbülansın yüksek frekanslı, küçük ölçekli dalgalanmalarını yakalar.

Böylece küçük ölçekli türbülans ve diğer fiziksel süreçlerin modellenmesi sağlanır. İşlem aşağıdaki gibi gerçekleştirilir:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^h, \quad (3.1)$$

$$p = p' + p^h, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}^h, \quad (3.3)$$

$$q = q' + q^h \quad (3.4)$$

Burada “'” ve “^h” üst indisleri ince ve kaba ölçekleri temsil etmektedir.

3.2 Stabilizasyon Parametreleri

İnce ölçekli hız ve basınç alanlarını modellemek için, kalıntı ifadeleri kullanılır:

$$\mathbf{u}' = -\frac{\tau_{\text{SUPS}}}{\rho} \mathbf{r}_M, \quad (3.5)$$

$$p' = -\rho \nu_{\text{LSIC}} r_C. \quad (3.6)$$

Burada $\mathbf{r}_M$ ve r_C sırasıyla momentum ve süreklilik denklemlerinin kalıntılarıdır ve aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\mathbf{r}_M = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.7)$$

$$r_C = \nabla \cdot \mathbf{u}^h, \quad (3.8)$$

Bu formülasyonda $\boldsymbol{\sigma}$ 'nın da tıpkı diğer denklem parametrelerinde olduğu gibi kaba ölçeği “^h” kullanarak $\mathbf{u}^h$ ve p^h ile yazıldığını da ifade etmek gerekir.

Stabilizasyon parametreleri birçok şekilde yazılabilir. Bu çalışmada şu şekilde kullanılmıştır:

$$\tau_{\text{SUPS}} = \left(\frac{4}{\Delta t^2} + \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{G} \mathbf{u}^h + C \nu^2 \mathbf{G} : \mathbf{G} \right)^{-0.5}, \quad (3.9)$$

$$\nu_{\text{LSIC}} = (\text{tr} \mathbf{G} \tau_{\text{SUPS}})^{-1}. \quad (3.10)$$

Burada, C bir sabit ve $\text{tr}\mathbf{G}$ ise aşağıdaki şekilde yazılan metrik tensör elemanının iz düşümüdür:

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \xi^\top}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3.11)$$

3.3 RBVMS Denklemi

Bölüm 3.1 ve 3.2’de verilen formülasyonlar Navier-Stokes denklemlerinin zayıf formuna uygulandığında RBVMS formülasyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir [31]:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega + \int_{\Omega} q^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} \left(\mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{w}^h + \frac{\nabla q^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M d\Omega \\ & - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} \mathbf{w}^h \cdot (\mathbf{r}_M \cdot \nabla \mathbf{u}^h) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}^h r_C d\Omega \\ & - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{\nabla \mathbf{w}^h}{\rho} : (\tau_{\text{SUPS}} \mathbf{r}_M) (\tau_{\text{SUPS}} \mathbf{r}_M) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

4. TEST HESAPLAMALARI

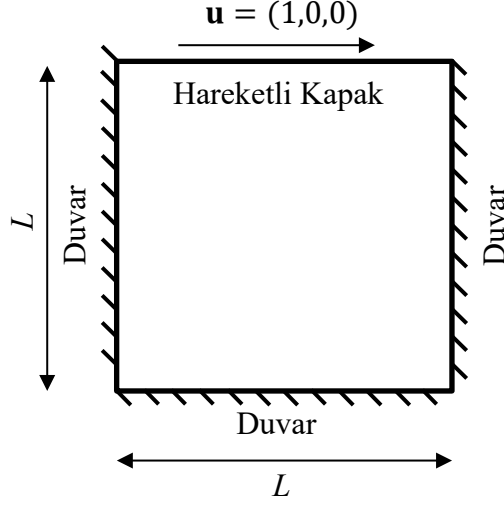
Çözücü kodun etkinliğini değerlendirmek amacıyla iki farklı temel problem üzerinde doğrulama çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Bu bölümde, klasik kapak tahrikli akış problemi (lid-driven cavity) ve dönen bir silindir etrafındaki akış problemi incelenmiştir. Her iki problem de CFD alanında yaygın olarak kullanılan ve literatürde sıklıkla referans alınan temel test problemleri arasında yer almaktadır. Referans alınan bu çalışmalarla [41-43] nicel ve nitel karşılaştırmalar yapılmıştır.

4.1 Kapak Tahrikli Akış Problemi

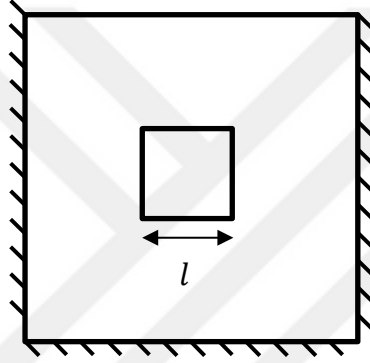
Hareketli bir kapak tarafından oluşturulan kapalı bir devridaim şeklindeki akış, akışkanlar mekaniği alanında temel bir problem teşkil etmektedir ve yeni geliştirilen CFD çözücülerin doğruluğunu ve kararlılığını test etmek için ideal bir referans olarak kabul edilmektedir [45]. Bu bölümde, çözücü kodun etkinliğini değerlendirmek için iki farklı çalışma referans alınmıştır. Doğrulama süreci, sıkıştırılamaz akış rejiminde tek taraflı kapak tahrikli akış probleminin geleneksel kıyaslama çalışmasıyla niceliksel ve niteliksel olarak karşılaştırılmasıyla gerçekleştirilmiştir [41]. Bu problem, içindeki akışkanın üst duvarının hareketiyle yönlendirildiği, diğer duvarlar tarafından da sınırlanan kare şeklinde bir boşlukta meydana gelmektedir. Daha sonra, çözücü farklı Reynolds sayısı değerlerinde ($Re = 100, 400$ ve 1000) tek taraflı kapak tahrikli akış geometrisinin merkezine yerleştirilen farklı geometrik şekillerin (kare, daire ve elips) akış özelliklerini ve girdap dinamiklerini farklı bir nümerik yöntem ile inceleyen başka bir çalışma ile test edilmiştir [42]. Hesaplamalarda, problem boyutsuz değerler kullanılarak ele alınmıştır.

4.1.1 Problem tanımı

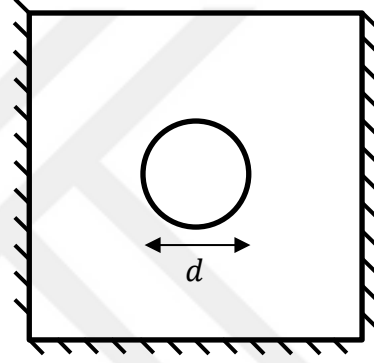
Bu akışkanlar mekaniği problemi için, hesaplama alanının iki boyutlu bir versiyonu Şekil 4.1'de gösterildiği gibi oluşturulmuştur.



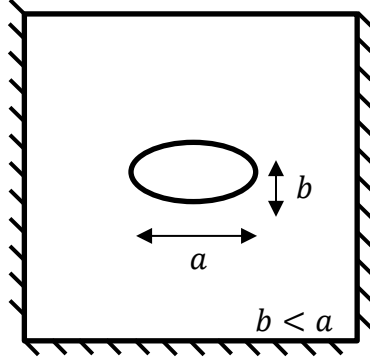
(a)



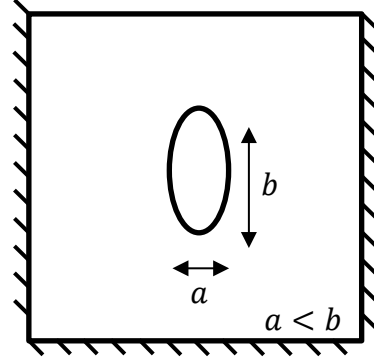
(b)



(c)



(d)



(e)

Şekil 4.1 : Hesaplama alanları.

Şekil 4.1’de, (b), (c), (d) ve (e) bu çalışmadaki çeşitli engel geometrilerine sahip akış alanı konfigürasyonunu göstermektedir. Genel model $L \times L$ uzunluğunda olup $L = 1$ olarak alınmıştır. Tüm engel geometrileri boşluğun merkezine yerleştirilmiştir. Eliptik engel durumunda iki farklı konumlandırma ele alınmıştır. Elipsin ana eksen kapağın hareket yönü ile aynı hizada olduğunda yatay ve ana eksen kapağın hareketine dik olarak hizalandığında düşey olarak ele alınmıştır. Dairesel engel için $d = 0,4L$

olarak alınmıştır. Kare engel için $l = 0,3L$ ve yatay elips engel olduğunda $a = 0,4L$ ve $b = 0,2L$ olarak alınmıştır. Düşey elips engel olduğunda ise tam tersi olarak değerler alınmıştır.

4.1.2 Sınır koşulları

Sınır koşulları FEniCS'de Dirichlet sınırıyla uygulanmıştır. Hareketli kapak olarak adlandırılan üst duvarda $\mathbf{u} = (1,0,0)$ hızı, diğer üç duvarda (sol, sağ ve alt duvar) ise $\mathbf{u} = (0,0,0)$ olup kaymama duvar sınır şartı uygulanmıştır. İçinde engellerin bulunduğu modeller için de aynı koşullarla birlikte engel geometrisinin duvarı da $\mathbf{u} = (0,0,0)$ olarak tanımlanıp benzer şekilde kaymama duvar sınır şartı uygulanmıştır. Çalışma için kullanılan Reynolds Sayısı değerleri 100, 400 ve 1000'dir.

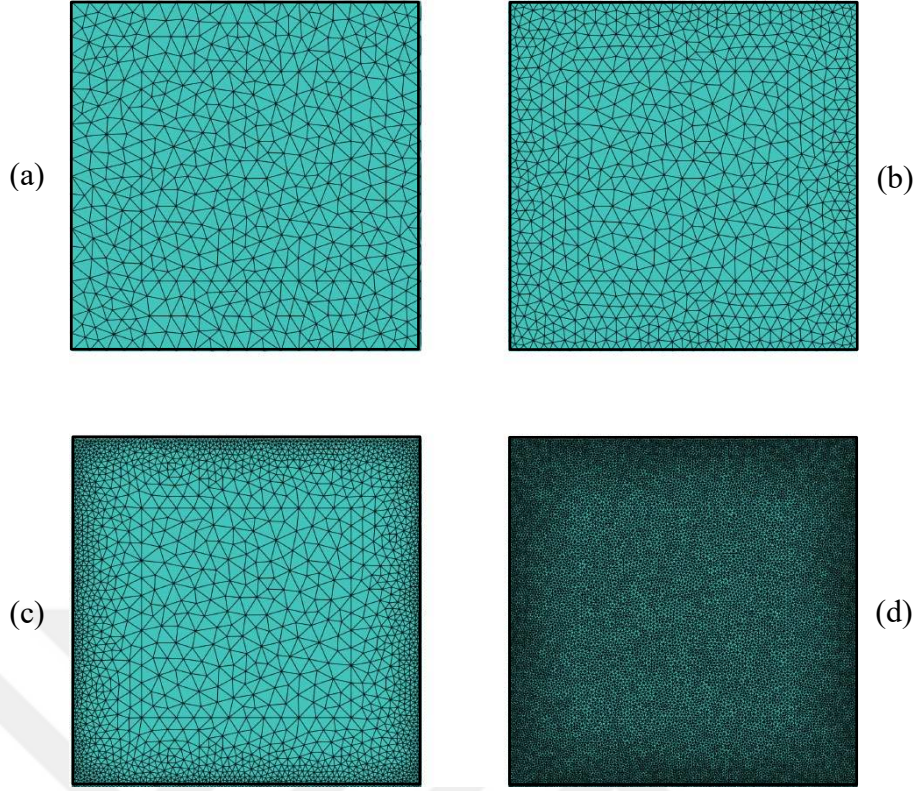
Reynolds Sayısı da aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} \quad (4.1)$$

Burada U kapak hızı, L kapağın uzunluğu, ρ yoğunluk ve μ dinamik viskozitedir. $\rho = 1$, ve $\mu = \rho UL/Re$ şeklinde boyutsuz olarak kullanılmıştır.

4.1.3 Ağ yapısı

Uygun ve doğru bir ağ oluşturma, analizin doğruluğunu ve hesaplama verimliliğini doğrudan etkilediği için CFD simülasyonlarında çok önemli bir rol oynar. Girdap oluşumu veya akış ayrılması gibi akış özelliklerinin ayrıntılarını yakalamak için genellikle daha ince bir ağ gereklidir. Bununla birlikte, ağ yoğunluğundaki gelişigüzel artışlar, hesaplama kaynaklarında ve analiz süresinde önemli artışlara yol açabilir. Akış olayının gerçekleştiği alanlara odaklanarak ve uyarlanabilir ağ optimizasyonu gibi teknikler kullanarak, diğer alanlardaki gereksiz ağ yoğunluğu en aza indirilebilir. Bu çalışmadaki sonlu elemanlar ağı iki boyutlu üçgensel elemanlardan oluşmaktadır. Tüm ağlar açık kaynaklı bir ağ oluşturma aracı olan Gmsh programı kullanılarak parametrik olarak oluşturulmuştur. İlk doğrulama çalışması için $Re=100$ değeri referans alınarak [41] dört farklı sayısal ağ değerinde Şekil 4.2'de gösterildiği gibi gerçekleştirilmiştir.



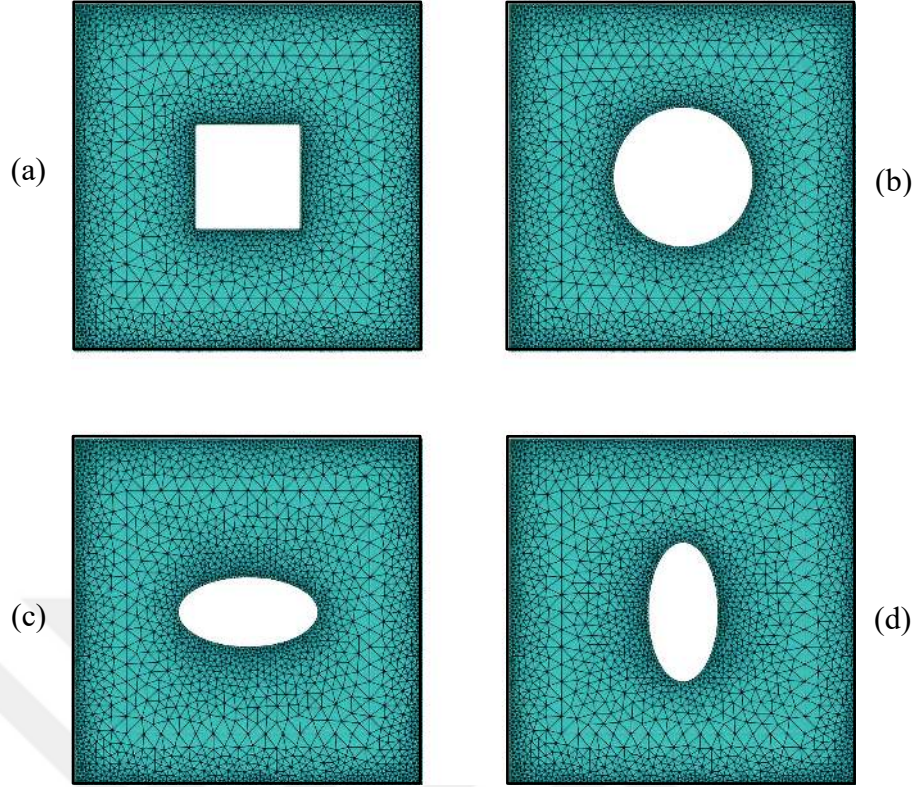
Şekil 4.2 : Farklı sayısal ağ değerleri. (a) M1, (b) M2, (c) M3 ve (d) M4 yoğunluğundaki sayısal ağ değerleri.

Uygulanan dört farklı ağ sayısı için Çizelge 4.1’de yer alan ağ sayıları kullanılmıştır. Hesaplama sonuçları ağ sayısından bağımsız hale gelene kadar M1, M2, M3 ve M4 numaralı sayısal ağ değerleri ile çalışılmıştır. Her bir ağ çalışmasında sonuçlar elde edilip tüm analizlerde M3 numaralı sayısal ağ sayısının kullanılmasına karar verilmiştir.

Çizelge 4.1 : Ağ bağımsızlık çalışması için ağ değerleri.

Geometri	Eleman sayısı	Düğüm sayısı
M1	1038	560
M2	1574	856
M3	2517	4632
M4	46184	23493

İkinci doğrulama ise farklı bir nümerik yöntem kullanarak gerçekleştirilmiş olan, farklı Reynolds sayısı değerlerinde ve ana akış alanı içerisinde farklı geometrik şekillerdeki engelleri barındıran bir başka çalışma [42] ile gerçekleştirilmiştir. Ağ sayısı olarak Şekil 4.3’teki gibi M3 numaralı sayısal ağ kullanılmıştır. Akım çizgilerini ve girdapları daha iyi yakalayabilmek için kritik bölgelere daha sık ağ uygulanmıştır. Her bir akış alanı için Çizelge 4.2’de yer alan ağ sayıları kullanılmıştır.



Şekil 4.3 : Akış alanların ağ yapısı. (a) kare, (b) daire, (c) yatay elips ve (d) düşey elips şeklindeki engeller etrafında oluşturulan ağ yapıları gösterilmektedir.

Çizelge 4.2 : Akış alanlarının eleman ve düğüm sayıları.

Geometri	Eleman sayısı	Düğüm sayısı
Kare	4946	2733
Daire	4790	2658
Yatay elips	4914	2707
Düşey elips	4914	2707

4.1.4 Hesaplama koşulları

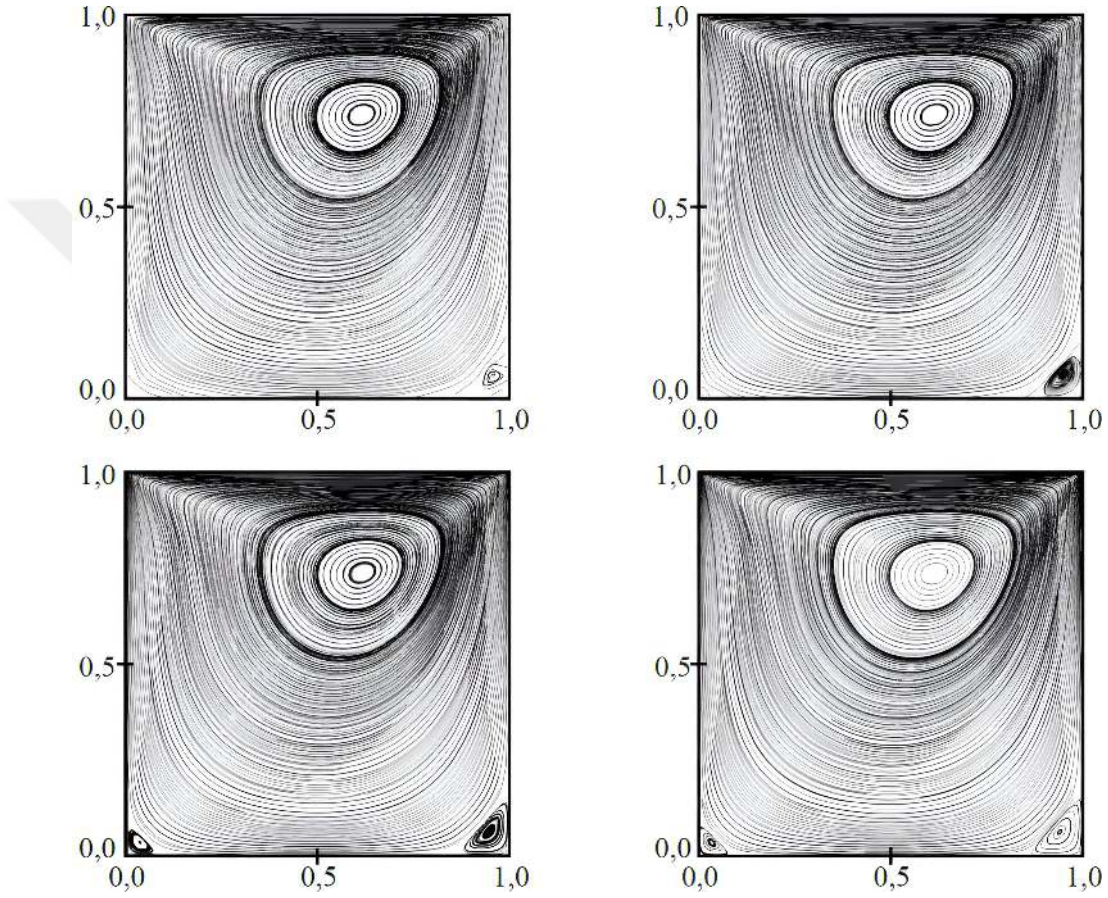
Zamana bağlı hesaplamalarda, zaman adımı boyutunu belirlemek için boyutsuz bir sayı kullanılır. Bu sayı Courant Sayısı (CFL) adlandırılır ve aşağıdaki denklemle tanımlanır:

$$C_{\Delta t} = \frac{U\Delta t}{\Delta x} \quad (4.2)$$

Burada Δt ve Δx zaman adımı boyutu ve minimum ağ eleman boyutudur. Bu çalışmada da tüm hesaplamalar için $C_{\Delta t} = 1$ olarak alınmıştır. Böylece $\Delta x = 0,1$ ve $C_{\Delta t} = 1$ olduğu için $\Delta t = 0,1$ olur.

4.1.5 Sonuçlar ve tartişma

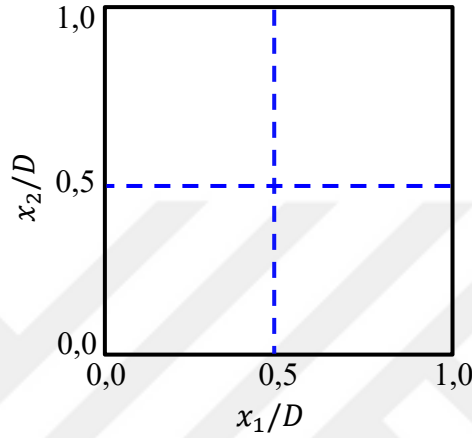
Bu bölümde, sayısal olarak elde edilen çıktılar incelenmiş ve referans çalışmalarla karşılaştırılmıştır. İlk olarak, literatürde yaygın olarak ele alınan bir kapak tahrikli akış kıyaslaması ile doğrulama çalışması gerçekleştirilmiştir [41]. Bu doğrulama çalışmasından önce farklı ağ yoğunluklarında (M1, M2, M3 ve M4) analizler yürütülmüş ve ağ bağımsızlık çalışması gerçekleştirilmiştir. Bu ağ bağımsızlık çalışması sonuçları şekil 4.4'te gösterildiği gibi nitel olarak irdelenmiştir.



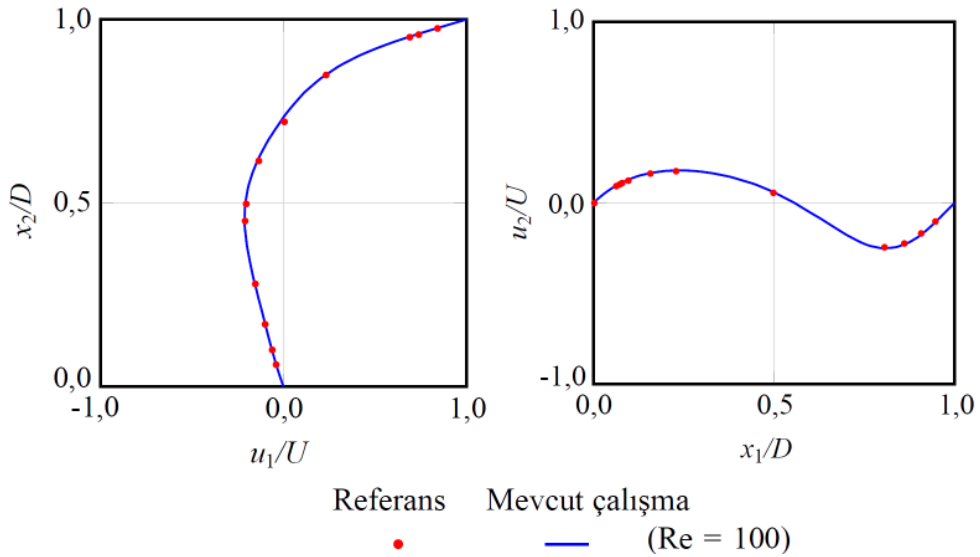
şekil 4.4 : Farklı ağ yoğunluklarında akım çizgileri. Yukarıdan aşağıya ve soldan sağa sırasıyla M1, M2, M3 ve M4 numaralı sayısal ağlar için akım çizgileri.

M1 numaralı sayısal ağ ile gerçekleştirilen analizde ikincil girdaplar yakalanmazken, M2 numaralı sayısal ağ ile yapılanda ise sadece bir adet ikincil girdap tespit edilmiştir. Bunun aksine, M3 numaralı sayısal ağ ile gerçekleştirilen analizde, her iki ikincil girdap da doğru ve net bir şekilde yakalanmıştır. M4 numaralı sayısal ağ ile gerçekleştirilen analizde, sonuçların ağ yoğunluğuna bağlı olarak değişmediği gözlemlenmiştir. Bu durum, ağ bağımsızlığının sağlandığını ve M3 numaralı sayısal ağın, akış özelliklerini doğru bir şekilde temsil edebildiğini göstermektedir. Seyrek ağlar, akışın karmaşık bölgelerindeki detayları yakalayamazken, daha yoğun ağlar bu

detayları daha iyi temsil edebilmiştir. Ancak, çok sık ağ kullanımı hesaplama maliyetlerini artırabileceğinden optimum ağ yoğunluğunun belirlenmesi önemlidir. Bu çalışmada, M3 numaralı sayısal ağın hem hesaplama verimliliği hem de doğruluk açısından en uygun çözüm olduğu sonucuna varılmıştır. Bu sebeple ikinci kıyaslama çalışmasında da M3 numaralı sayısal ağ yoğunluğu kullanılmıştır. Şekil 4.5'te hız profillerini elde etmek için belirlenen merkez hattı doğrultuları Şekil 4.6'da ise bu merkez hatları boyunca elde edilen hız profilleri verilmiştir.



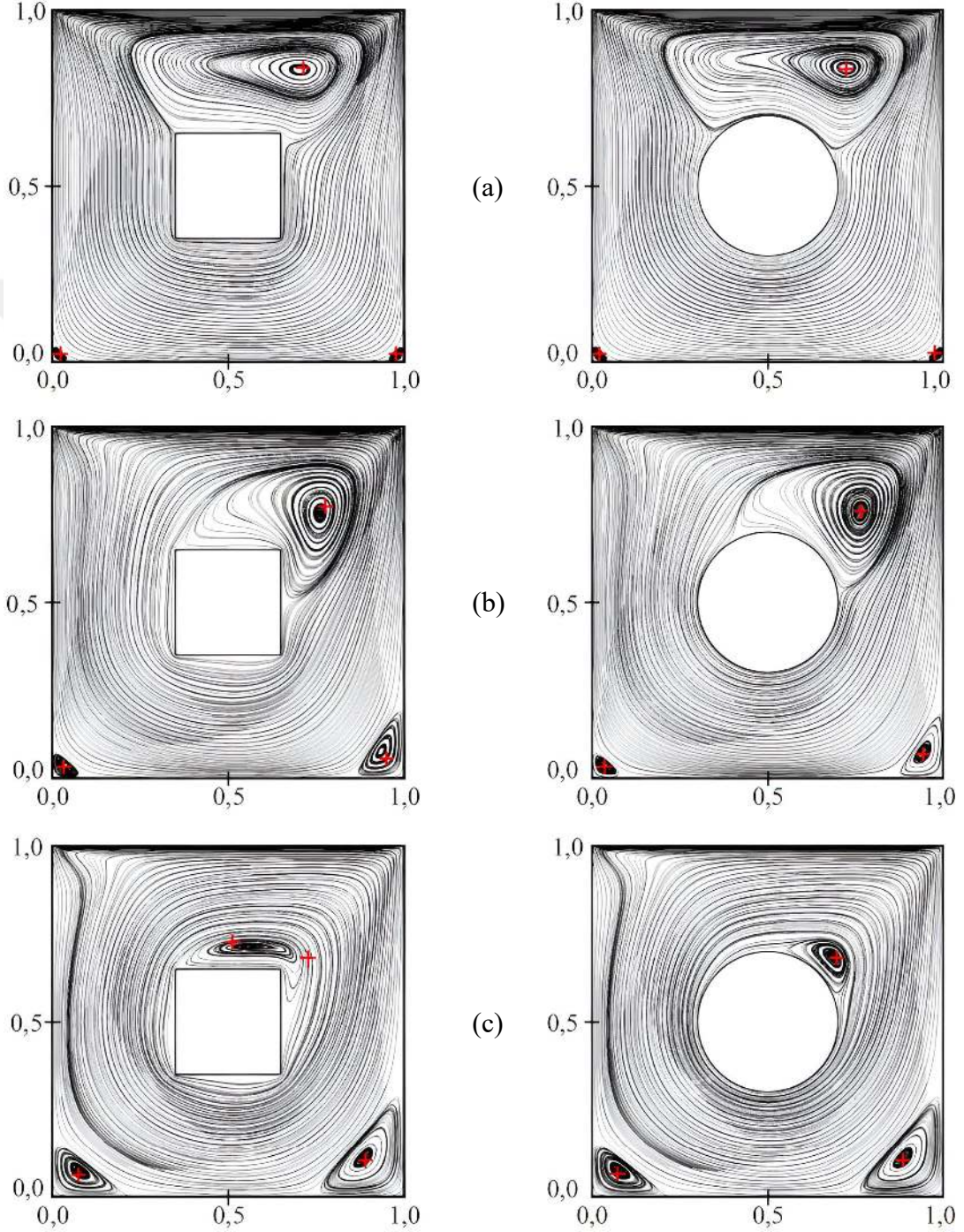
Şekil 4.5 : Hız profilleri elde etmek için oluşturulan çizgiler. Kesikli mavi çizgiler, akış profilinin çıkarıldığı (hız değerleri verilerinin alındığı) sırasıyla düşey ve yatay merkez hatlarını göstermektedir.



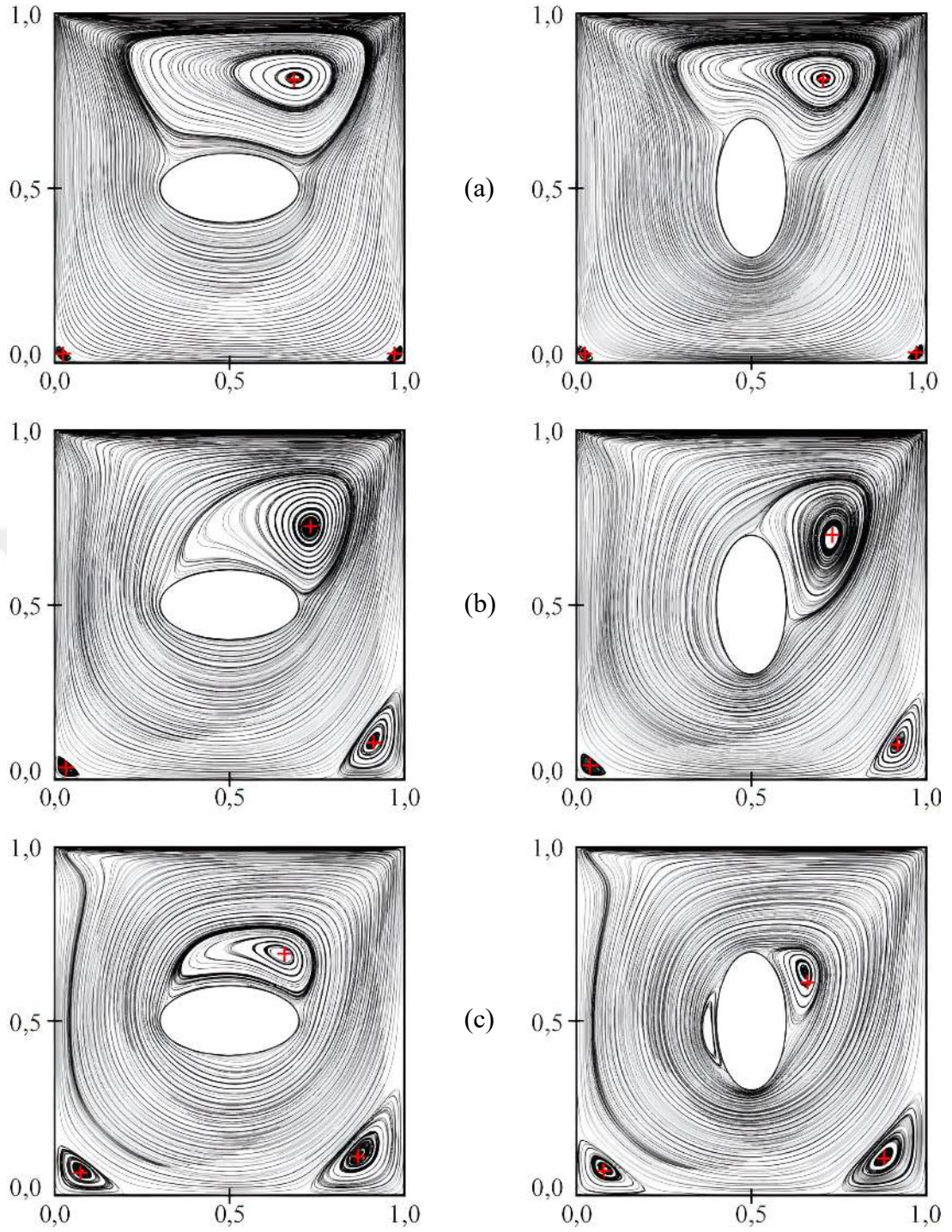
Şekil 4.6 : M3 numaralı sayısal ağ kullanılarak elde edilen merkez hattı boyunca hız profilleri (Re = 100 için).

Şekil 4.6'daki grafikler merkez hattı boyunca akış profillerinin referans çalışmaya [41] oldukça yakın sonuçlar verdiğini göstermektedir. Bu doğrulama, kullanılan ağ yapısının ve sayısal yöntemin güvenilirliğini ve doğruluğunu desteklemektedir. Şekil

4.7 ve Şekil 4.8’de ise farklı Reynolds sayıları ve geometrik engeller için ikinci çalışmanın sonuçları verilmiştir. Görsellerde yer alan kırmızı renkli “+” işareti, referans çalışmada yer alan girdapların $[x, y]$ merkez konumunu belirtmektedir. Bu işaretler, mevcut çalışma ile referans çalışma arasındaki girdap konumlarının uyumunu nitel olarak ortaya koymaktadır.



Şekil 4.7 : Kare (solda) ve daire (sağda) engel geometrisi için akım çizgileri. (a) $Re = 100$ (b) $Re = 400$ ve (c) $Re = 1000$. Kırmızı “+” işaretleri referans çalışmadaki [42] birincil ve ikincil girdapların ayrı ayrı $[x, y]$ koordinatlarını belirtir.

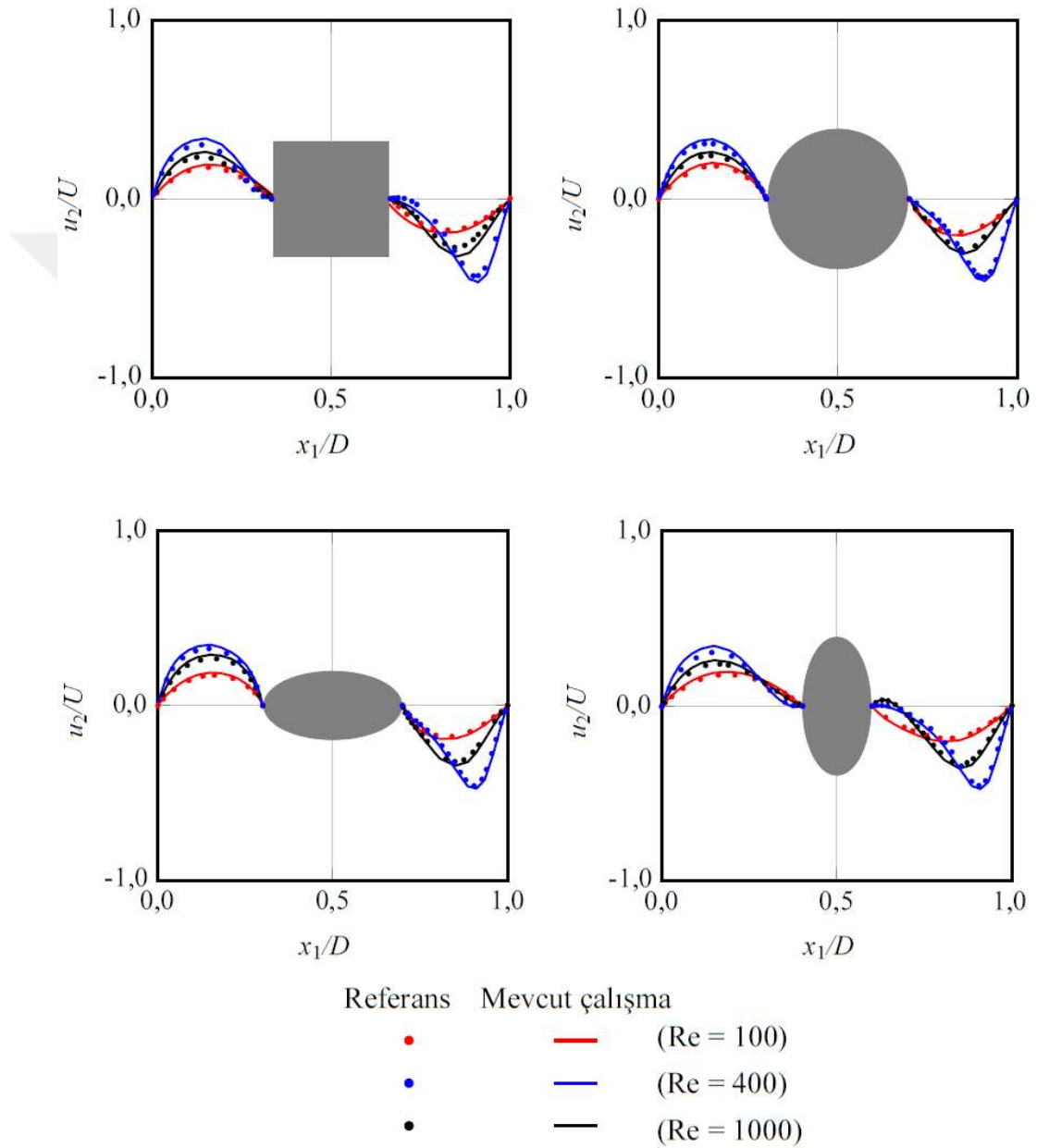


Şekil 4.8 : Yatay elips (solda) ve düşey elips (sağda) engel geometrisi için akım çizgileri. (a) $Re = 100$ (b) $Re = 400$ ve (c) $Re = 1000$. Kırmızı “+” işaretleri referans çalışmadaki [42] birincil ve ikincil girdapların ayrı ayrı $[x, y]$ koordinatlarını belirtir.

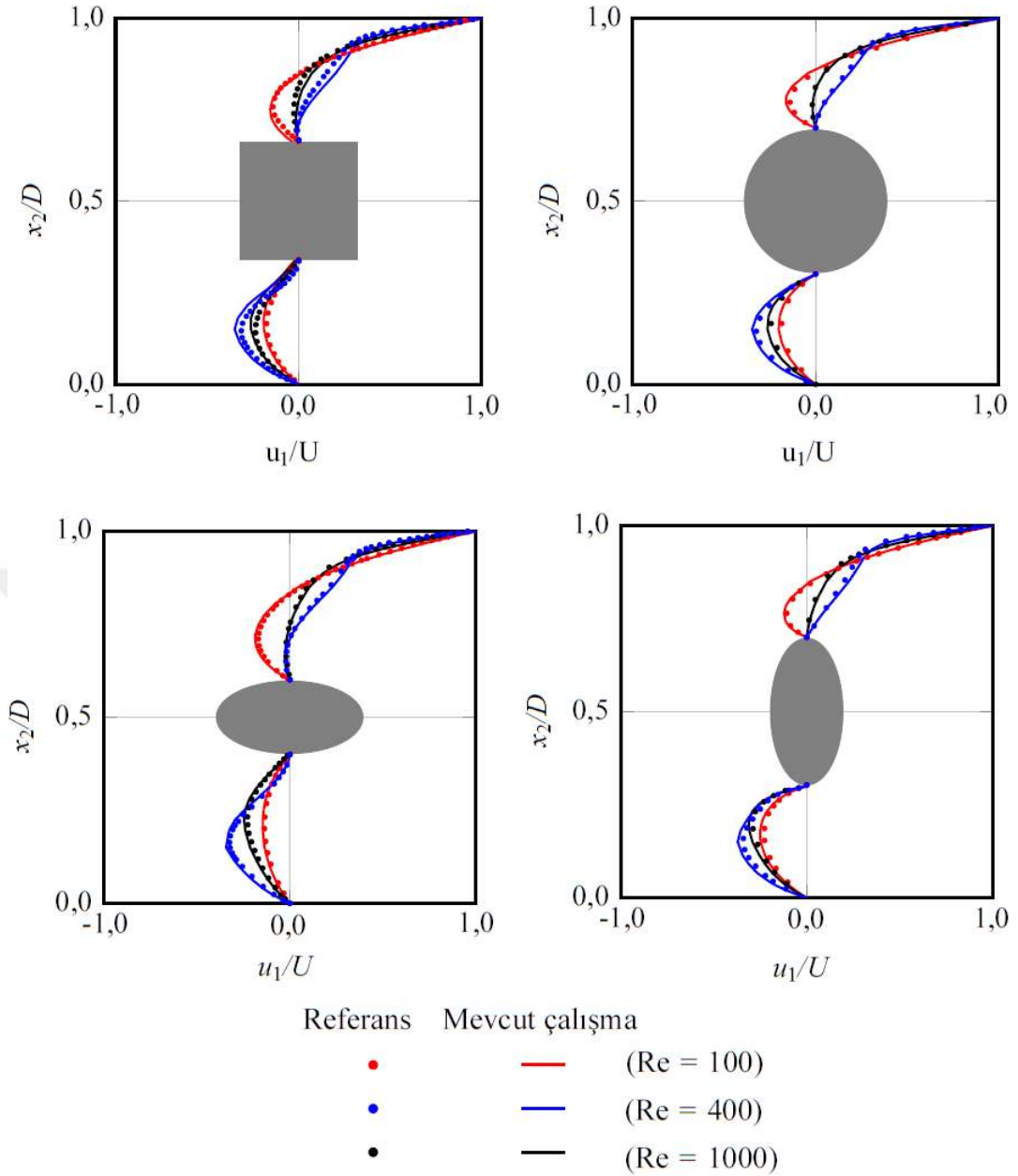
Şekil 4.7 ve Şekil 4.8 incelendiğinde, elde edilen akım çizgileri, birincil ve ikincil girdap konumlarının ve akış karakteristiklerinin bir önceki doğrulama çalışmasında olduğu gibi referans çalışmaya [42] oldukça yakın sonuçlar verdiğini göstermektedir. Böylece, kullanılan ağ yapısının ve yöntemin güvenilirliğini farklı bir sayısal çalışma

ile daha desteklenmektedir. Ayrıca, akış yapılarının ve girdapların doğru bir şekilde yakalanması, özellikle yüksek Reynolds sayılarında ve karmaşık geometrilerde bile metodun etkinliğini ortaya koymaktadır.

Analiz sonuçlarının nicel karşılaştırmalarında ise şekilde Şekil 4.9 ve Şekil 4.10'daki grafiklerde yatay ve düşey merkez hattı üzerinde çizilen bir çizgiden sırasıyla ortalama u_1 hızı ve u_2 hızı değerleri $Re = 100$, $Re = 400$ ve $Re = 1000$ için verilmiştir.



Şekil 4.9 : Farklı geometrik şekiller etrafındaki yatay yönde (merkez hattı) akış profillerinin karşılaştırması. Her bir şekil için, Reynolds sayıları $Re = 100$, $Re = 400$ ve $Re = 1000$ için akış profilleri verilmiştir.



Şekil 4.10 : Farklı geometrik şekiller etrafındaki düşey yönde (merkez hattı) akış profillerinin karşılaştırması. Her bir şekil için, Reynolds sayıları $Re = 100$, $Re = 400$ ve $Re = 1000$ için akış profilleri verilmiştir.

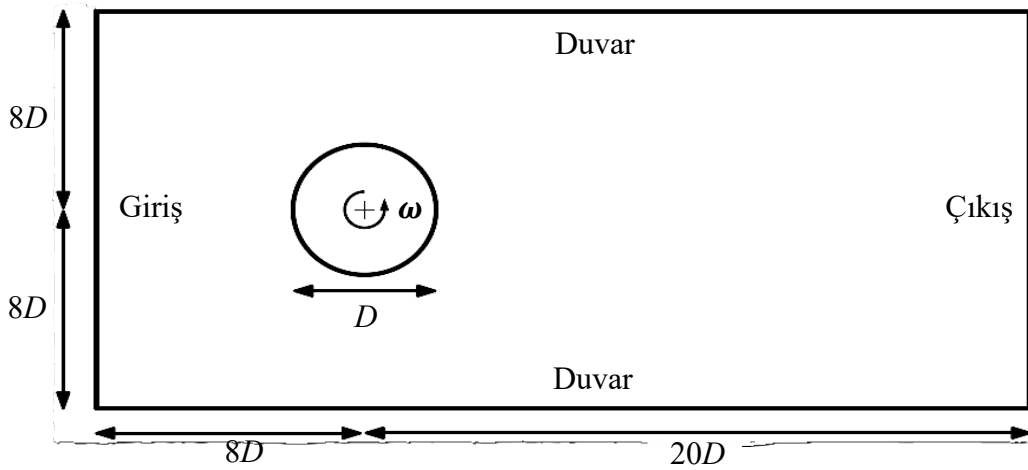
Şekil 4.9 ve Şekil 4.10'daki grafikler, farklı Reynolds sayılarında ($Re = 100$, $Re = 400$, $Re = 1000$) akış hızlarının boyutsuz olarak ele alınmış profillerini (u_2/U ve u_1/U) ve düşey/yatay (x_2/D ve x_1/D) konumlarını göstermektedir. Her bir şekil (kare, daire, yatay elips, düşey elips) için referans çalışmadaki değerleri ve mevcut çalışmanın sonuçları karşılaştırılmıştır. Mevcut çalışma ve referans çalışması sonuçları arasındaki uyum, kullanılan ağ yapısının ve sayısal yöntemin güvenilirliğini ortaya koymaktadır.

4.2 Dönen Silindir Etrafındaki Akış Problemi

Dönen bir silindir etrafındaki akış dinamikleri birçok mühendislik uygulamasında temel problemlerden biridir. Özellikle havacılık, denizcilik, rüzgâr enerjisi ve endüstriyel akış kontrolü gibi çeşitli alanlarda uygulamalar için temel oluşturmaktadır [46-48]. Akışın kontrolü, sürüklenme kuvvetinin azaltılması, girdap kaynaklı titreşimlerin bastırılması ve enerji verimliliğinin artırılması gibi çeşitli amaçlarla kullanılabilmektedir. Bu bölümde, çözücü kodun etkinliğini değerlendirmek için ikinci bir problem olan dönen silindir etrafındaki akış hakkında yapılan bir çalışma referans alınmıştır. [43] Doğrulama süreci, dönen bir silindir etrafındaki akış yapılarının ve girdap oluşumu fenomeninin silindir dönme hızlarına (α) göre değişimini araştıran ve farklı dönme hızlarında akışın kararlılığını inceleyen bu referans çalışmayı [43], geliştirilen çözücü ile yapılan analizler sonucu kıyaslamayı hedeflemektedir. Gerçekleştirilen doğrulama süreci ile dönen silindir etrafındaki akışın modellenmesi ve çözümlemesi için yeni sunulan çözücünün yetkinliği ortaya koyulmaktadır.

4.2.1 Problem tanımı

Hesaplama alanının iki boyutlu hali Şekil 4.11'de gösterildiği gibi oluşturulmuştur.



Şekil 4.11 : Hesaplama alanı.

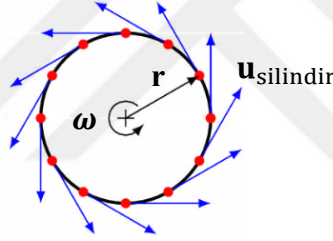
Silindir çapı D olup, giriş bölgesinden $8D$, üst ve alt duvarlardan $8D$ mesafede, çıkış bölgesinden ise $20D$ mesafede konumlandırılmıştır. Bu düzenleme, kenar etkilerini minimize etmek ve silindir etrafındaki akışın tam olarak çözülebilmesini sağlamak amacıyla optimize edilmiştir. ω ise açısal hız vektörüdür.

4.2.2 Sınır koşulları

Hesaplama alanı girişinde, serbest akış hızı boyutsuz olarak tanımlanarak $U = 1$ olacak şekilde bir hız profili uygulanmıştır. Bu hız profili, Dirichlet sınır koşulu olarak tanımlanmıştır. Çıkış bölgesinde Neumann sınır koşulu, alt ve üst duvarlarda ise kaymama duvar sınır şartı uygulanmıştır. Bu sebeple duvar sınırları boyunca hız bileşenleri sıfırdır. Silindir yüzeyinde, dönme hareketine bağlı olarak yüzeydeki düğüm noktalarındaki doğrusal hız vektörleri tanımlanmıştır. Bu yüzden silindirin açısal hızı, silindir yüzeyindeki düğüm noktalarındaki doğrusal hız vektörlerine dönüştürülmüştür. Şekil 4.12’de de gösterildiği üzere silindirin açısal hızı ω ile konum vektörü $\mathbf{r}$ ‘nin vektörel çarpımı alınarak $\mathbf{u}_{\text{silindir}}$ olarak denklem (4.3)’deki gibi tanımlanan doğrusal hız vektörleri elde edilmiştir.

$$\mathbf{u}_{\text{silindir}} = \omega \times \mathbf{r} \quad (4.3)$$

Bu hız vektörleri de Dirichlet sınır koşulu olarak uygulanmış.



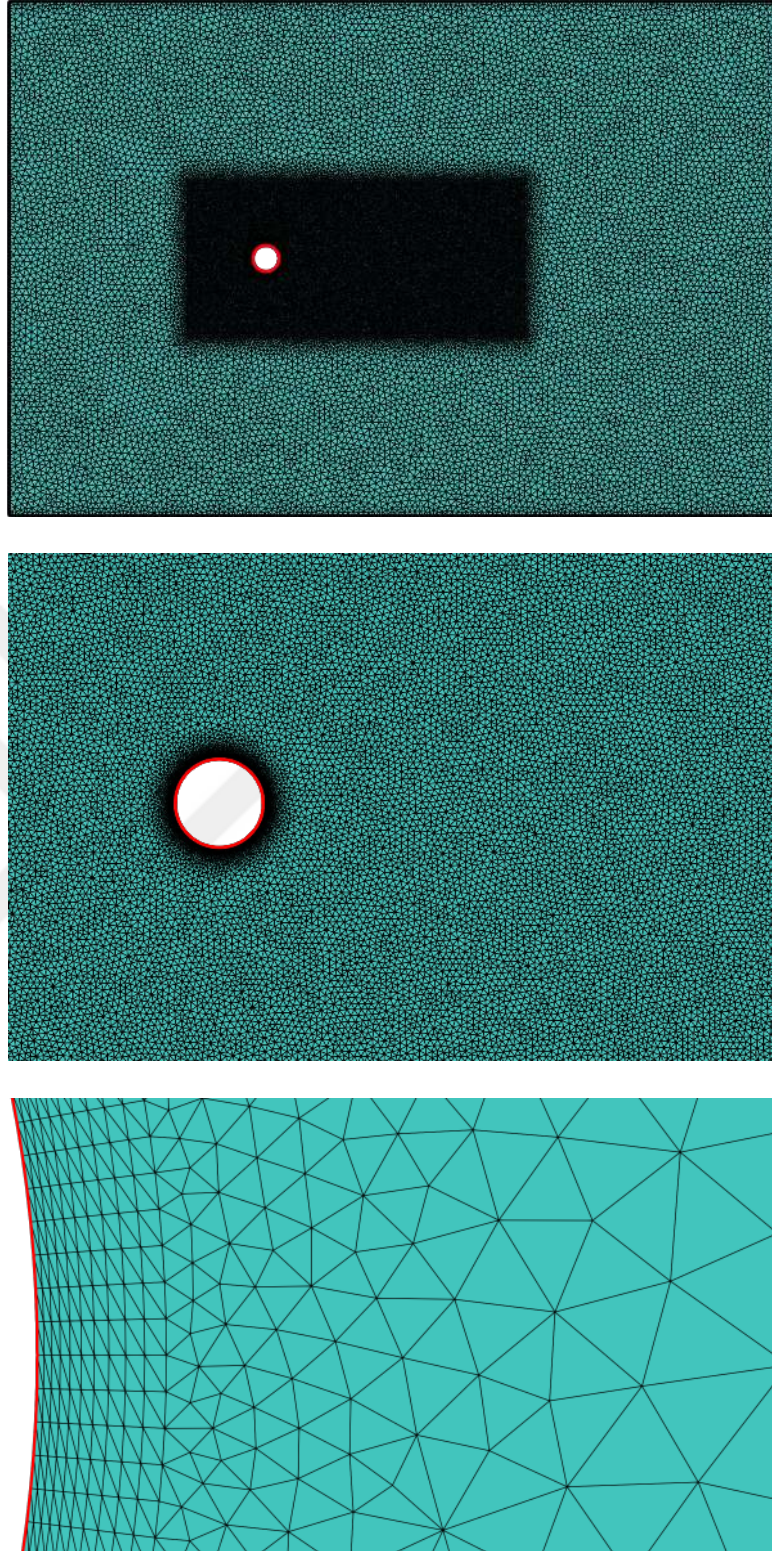
Şekil 4.12 : Doğrusal hız vektörü tanımlaması. ω ’nin $\mathbf{r}$ ile çarpılmasıyla elde edilen $\mathbf{u}_{\text{silindir}}$ vektörleri mavi renk ile gösterilmiştir. Kırmızı noktalar ise silindir üzerindeki sonlu elemanlar ağ kontrol noktalarını temsil etmektedir.

4.2.3 Ağ yapısı

Şekil 4.13, iyileştirilmiş ve optimize edilmiş sayısal ağ yapısının farklı yakınlaştırma oranlarında nasıl görüldüğünü göstermektedir. Çizelge 4.3’te ise sayısal ağın eleman ve düğüm sayısı verilmektedir. Ana hesaplama alanı, geniş bir perspektiften genel düzeni ve ağın genel yapısını sergilerken, silindirin etrafındaki akış alanını ve ağ düzenini göstermektedir. Genel hesaplama alanı ağ yapısı, 4x yakınlaştırılmış silindir çevresi ve 16x yakınlaştırılmış silindir cidarının gösterildiği görsellerde silindirin çevresindeki ağ yoğunluğunun nasıl optimize edildiği vurgulanmaktadır.

Çizelge 4.3 : Hesaplama alanının ağ sayısı.

Eleman sayısı	Düğüm sayısı
63152	31920



Şekil 4.13 : Sayısal ağ yapısı, yukarıdan aşağıya doğru ana hesaplama alanı, 4x yakınlaştırma, 16x yakınlaştırma.

Sonuç olarak, bu ağ düzenlemesi özellikle akışın hız ve basınç değişimlerinin kritik olduğu bölgelerde ağın nasıl sıklaştırıldığını göstermektedir.

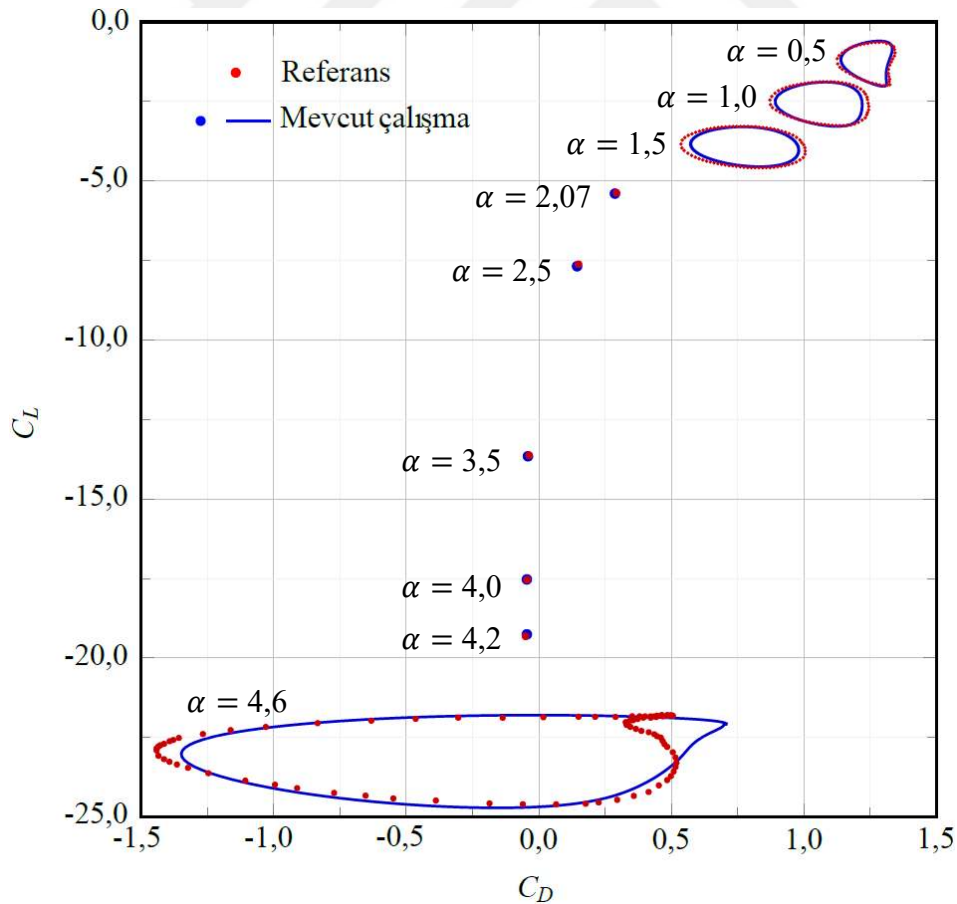
4.2.4 Hesaplama koşulları

Hesaplamalar, referans çalışmada incelenen Reynolds değeri ($Re = 200$) [43] için gerçekleştirilmiştir ve Reynolds sayısı Denklem (4.1)'deki formülle tanımlanmış olup L yerine silindirin çapı olan D ele alınmıştır. Burada $U = 1$ giriş hızı, $D = 1$ silindir çapı, $\rho = 1$ yoğunluktur ve $\mu = \rho UL/Re$ olarak boyutsuz şekilde tanımlanmıştır. Silindirin dönme hızı ise, referans çalışmada α olarak tanımlanan hız oranı ile ifade edilmiştir. Bu hız oranı giriş hızı U ile silindir yüzeyindeki doğrusal hız vektörlerinin büyüklüğü $\|\mathbf{u}_{\text{silindir}}\|$ arasındaki oran olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\alpha = \frac{U}{\|\mathbf{u}_{\text{silindir}}\|} \quad (4.4)$$

4.2.5 Sonuçlar ve tartışma

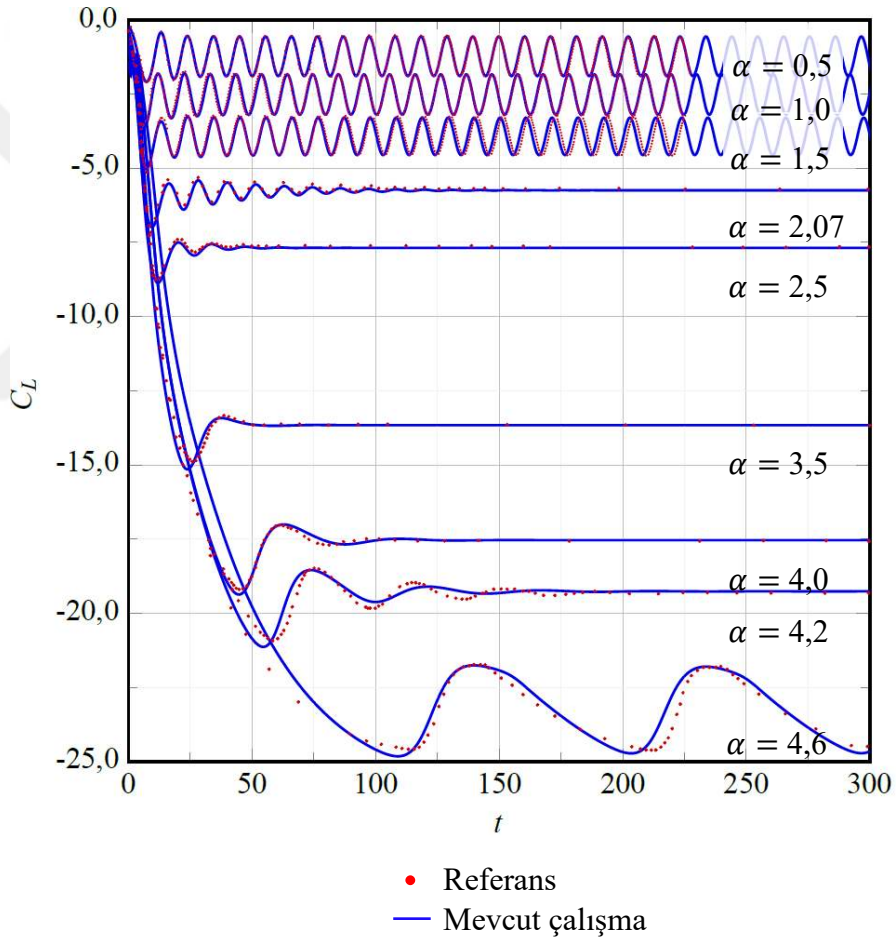
Şekil 4.14'te, farklı α değerleri için sürüklenme katsayısı (C_D) ile kaldırma katsayısı (C_L) arasındaki ilişkiyi gösterilmektedir.



Şekil 4.14 : Farklı α değerleri için C_D ve C_L arasındaki ilişkiyi gösteren referans ve mevcut çalışma verileri.

Burada α değerleri sırasıyla (0,5), (1,0), (1,5), (2,07), (2,5), (3,5), (4,0), (4,2) ve (4,6) olarak ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlar, referans verileri ile büyük ölçüde uyum içerisindedir. Bu, kullanılan yöntem ve hesaplamaların doğruluğunu ve güvenilirliğini de desteklemektedir. Farklı α değerlerinde elde edilen sonuçlar, aerodinamik davranış ve akış karakteristiği açısından oldukça tutarlılık göstermektedir. Böylece, mevcut çalışmanın literatürdeki benzer çalışmalarla uyumlu ve güvenilir olacağı sonucuna varılmıştır.

Şekil 4.15'te farklı α değerleri için C_L değerinin zamana göre değişimi verilmiştir. Grafik, α değerlerinin akış karakteristikleri üzerindeki etkilerini net bir şekilde ortaya koyarak referans çalışma ile de oldukça uyum içerisinde olduğunu göstermektedir.

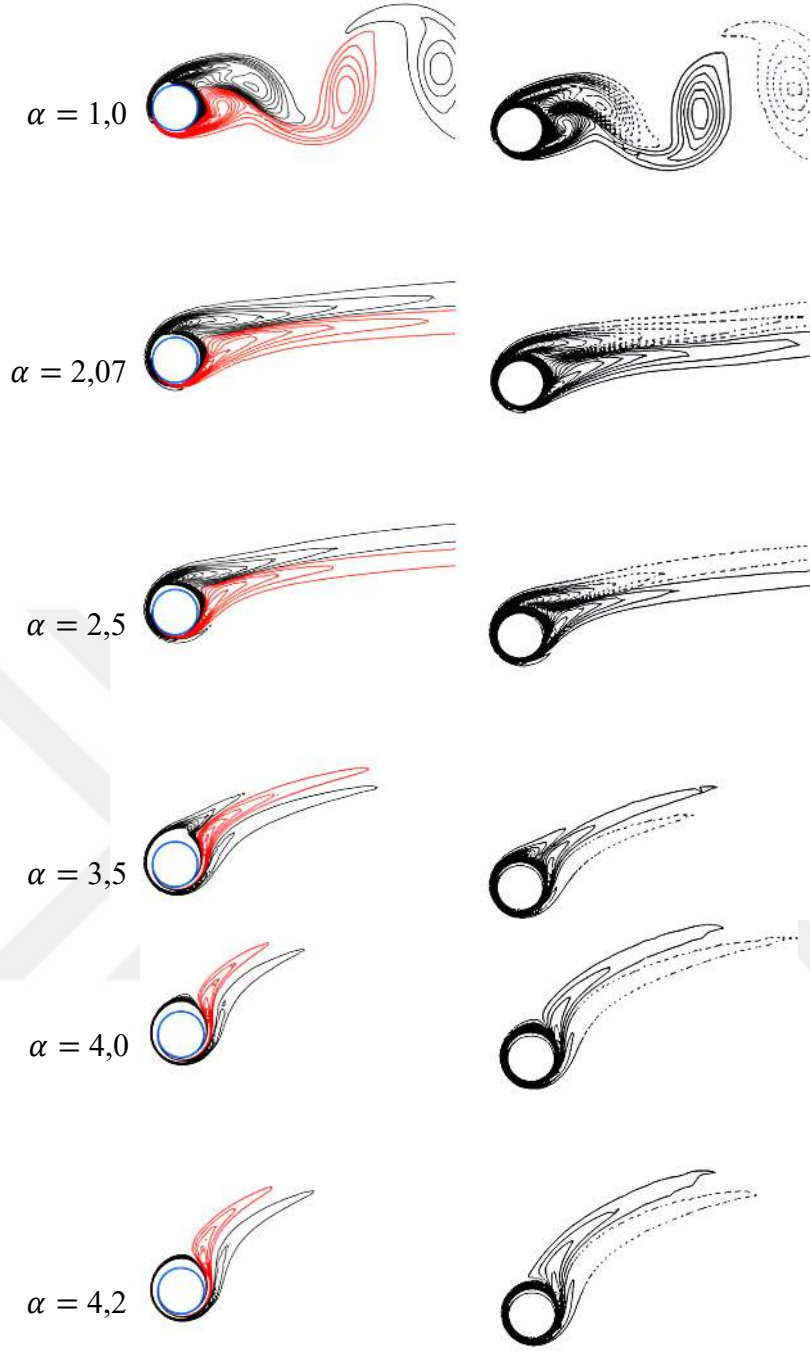


Şekil 4.15 : Farklı α değerleri için zamana bağlı olarak C_L değişimi. Kırmızı noktalar, referans çalışmanın verilerini, mavi çizgiler ise mevcut çalışmanın sonuçlarını göstermektedir.

Şekil 4.15'te düşük α değerlerinde (0,5), (1,0), ve (1,5) C_L için belirgin salınımlar gözlemlenmektedir. Bu, silindirin dönme hızının nispeten düşük olduğu durumlarda akışın daha kararsız olduğunu göstermektedir. Bu salınımlar, dönen silindir etrafındaki

akışın periyodik olarak ayrılmasından kaynaklanmaktadır. Orta seviyedeki α değerlerinde (2,07), (2,5), (3,5), (4,0) ve (4,2) C_L için meydana gelen salınımların azaldığı ve nispeten daha kararlı bir akış rejimine geçiş yapıldığı görülmektedir. Burada akış, daha düzenli ve öngörülebilir bir yapıya bürünmektedir. Bu durum, dönen silindirin etrafındaki akışın, belirli dönme hızlarının üzerinde kararlı davrandığını ve akış ayrılmalarının değiştiğini işaret etmektedir. Ancak $\alpha = 4.6$ olduğunda C_L değerinde periyodik olmayan yeni bir dalgalanma ortaya çıkmıştır. Bu durum, dönen silindirin etrafındaki akışın, bu dönme hızında yeni bir kararsızlık moduna geçtiğini göstermektedir. Bu kararsızlık, yüksek dönme hızının, silindirin etrafındaki akış yapısını yeniden organize ederek, akış ayrılması süreçlerini etkilediğini ve bu nedenle C_L 'de düzensiz dalgalanmalara yol açtığını göstermektedir. Tüm analiz sonuçları için grafik incelendiğinde, elde edilen sonuçlar referans verileri ile büyük ölçüde örtüşmekte ve kullanılan yöntemin güvenilirliğini teyit etmektedir.

Şekil 4.16, farklı α değerleri için $t = 200$ anında girdap konturlarını göstermektedir. Sol tarafta mevcut çalışma görselleri, sağ tarafta ise referans çalışmadan uyarlanmış görseller yer almaktadır. Görüldüğü üzere, α değerinin artmasıyla birlikte girdapların boyutu ve karmaşıklığı belirgin bir şekilde artmaktadır. $\alpha = 1,0$ için nispeten simetrik ve düzenli bir yapı sergileyen girdaplar, α değerinin artışıyla daha uzun mesafelere yayılmakta ve daha karmaşık bir yapıya dönüşmektedir. Özellikle $\alpha = 3,5$ ve $\alpha = 4,2$ değerlerinde, girdapların daha güçlü hale geldiği, akışın ayrılma ve yeniden birleşme noktalarının daha belirgin olduğu gözlemlenmektedir. Böylece, elde edilen sonuçların literatürdeki referans çalışmalarla uyumlu olduğu ve modelin güvenilirliğini gösterilmektedir.



Şekil 4.16 : $t = 200$ için $\alpha = (1,0), (2,07), (2,5), (3,5), (4,0)$ ve $(4,2)$ değerleri için girdap konturları. Sol tarafta yukarıdan aşağıya mevcut çalışma ve sağ tarafta referanstan [43] uyarlanmış karşılık gelen şekiller. Mavi renk dönen silindiri, kırmızı renk girdap konturlarının pozitif değerlerini (referansta kesik çizgilerle), siyah ise girdap konturlarının negatif değerlerini (referansta kesik çizgilerle) gösterir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, hareketsiz alan problemleri için FEniCS ortamında RBVMS yöntemi ile bir CFD çözücüsü geliştirilmiştir. Çalışmanın temel amacı, FEniCS'in sunduğu imkanları kullanarak sonlu elemanlar yöntemi ile diferansiyel denklemlerin çözümünde RBVMS metodunu etkin bir şekilde uygulamaktır. Geliştirilen çözücünün doğrulanması ve performansının detaylı olarak değerlendirilmesi, iki klasik test problemi üzerinde gerçekleştirilmiştir: Kapak tahrikli akış ve dönen silindir etrafındaki akış problemi. Kapak tahrikli akış problemi, farklı ağ yapıları ve Reynolds sayıları kullanılarak analiz edilmiş ve elde edilen sonuçlar literatürdeki referans çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Doğrulama çalışmaları, çözücünün akış karakteristiklerini doğru bir şekilde temsil ettiğini ve güvenilir sonuçlar verdiğini göstermiştir. Dönen silindir etrafındaki akış problemi için ise, silindirin farklı dönme hızlarında akış yapıları ve girdap dinamikleri incelenmiştir. Bu analizler sonucunda, farklı hız oranlarına göre elde edilen akış karakteristikleri, literatürdeki referans verilerle büyük ölçüde uyumlu bulunmuştur. Ayrıca çalışma, FEniCS ortamında RBVMS yöntemi ile CFD çözücüsü geliştirilmesi konusunda ilk önemli katkıyı sağlamaktadır. Geliştirilen çözücü, etkin ve esnek bir araç olarak değerlendirilmektedir.

Bu çalışmalar sonucunda aşağıdaki bulgular elde edilmiştir:

- FEniCS ortamında RBVMS yönteminin başarılı bir şekilde uygulanması.
- Geliştirilen çözücünün test problemleri ile kapsamlı bir şekilde doğrulanması.
- Çözücünün doğruluğu, kararlılığı ve esnekliğinin sunulması.
- Açık kaynaklı araçların CFD uygulamalarında etkin kullanımı.

Bu tez çalışmasının sonuçları çözücünün daha geniş uygulamalara yönelik bir potansiyel ortaya koyabilir. Ayrıca sonuçlar, açık kaynaklı platformların, hesaplamalı akışkanlar dinamiği araştırmaları ve uygulamalarının ilerletilmesindeki önemini vurgulamaktadır.

Gelecekteki Çalışma Planları:

- Isıl-akışkan problemleri: Isı transferi ve akışkan hareketi arasındaki etkileşimlerin modellenmesi ve simülasyonu hedeflenmektedir. Bu, endüstriyel süreçlerde ve enerji sistemlerinde büyük öneme sahiptir. Özellikle, doğal konveksiyon, zorlanmış konveksiyon ve faz değişimlerinin olduğu sistemler üzerinde durulacaktır.
- FSI problemleri: Akışkanların ve katı yapıların karşılıklı etkileşimlerinin detaylı bir şekilde incelenmesi planlanmaktadır. Bu tür problemler, mühendislikte yaygın olarak karşımıza çıkmakta olup, köprülerdeki rüzgar etkisi, uçak kanatlarının titreşim analizi ve biyomedikal uygulamalarda damar içi akışkan dinamikleri gibi çeşitli alanlarda kritik öneme sahiptir.
- IGA ile kesin geometri temsili: IGA yöntemi kullanılarak daha kesin ve detaylı geometri temsili sağlanacaktır. IGA, bilgisayar destekli tasarım ve analiz süreçlerini birleştirerek, geometrik doğruluğun artmasını ve daha hassas simülasyon sonuçlarının elde edilmesini mümkün kılar. Bu sayede, karmaşık yapıların ve yüzeylerin modellenmesi ve analizi daha etkin bir şekilde gerçekleştirilecektir.
- IGA ile Kesin Hareket Temsili: IGA yöntemleriyle, akışkanların ve yapıların hareketlerinin daha hassas bir şekilde modellenmesi ve simülasyonu hedeflenmektedir. Bu, özellikle dinamik sistemlerin analizi ve kontrolü için önemlidir. Yüksek doğruluk gerektiren aerodinamik çalışmalar, biyomekanik simülasyonlar ve otomotiv uygulamaları bu kapsamda değerlendirilecektir.

Gelecek çalışmalar, bu çözücünün daha karmaşık ve dinamik problemlere uygulanmasını ve FEniCS platformu ile RBVMS metodolojisinin ve gelişmiş versiyonlarının avantajlarının daha geniş kapsamda kullanılmasını araştırmayı hedeflemektedir. Bu planlar, özellikle ısıl-akışkan problemleri ve akışkan-katı etkileşimi problemleri üzerinde yoğunlaşmayı, IGA yöntemleriyle geometri ve hareketin kesin temsiliyi sağlamayı amaçlamaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Tezduyar, T. E., & Takizawa, K. (2019). Space–time computations in practical engineering applications: a summary of the 25-year history. *Computational Mechanics*, 63(4), 747-753.
- [2] Bazilevs, Y., Takizawa, K., & Tezduyar, T. E. (2013). *Computational fluid-structure interaction: methods and applications*. John Wiley & Sons.
- [3] Cottrell, J. A., Hughes, T. J., & Bazilevs, Y. (2009). *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons.
- [4] Hughes, T. J. (1995). Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles, and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1-4), 387-401.
- [5] Hughes, T. J., Feijóo, G. R., Mazzei, L., & Quincy, J. B. (1998). The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 166(1-2), 3-24.
- [6] Bazilevs, Y., Michler, C., Calo, V. M., & Hughes, T. (2010). Isogeometric variational multiscale modeling of wall-bounded turbulent flows with weakly enforced boundary conditions on unstretched meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(13-16), 780-790.
- [7] Bazilevs, Y., Calo, V. M., Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., Reali, A., & Scovazzi, G. (2007). Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 197(1-4), 173-201.
- [8] Akkerman, I., Bazilevs, Y., Calo, V. M., Hughes, T. J. R., & Hulshoff, S. (2008). The role of continuity in residual-based variational multiscale modeling of turbulence. *Computational Mechanics*, 41(3), 371-378.
- [9] Bazilevs, Y., & Akkerman, I. (2010). Large eddy simulation of turbulent Taylor–Couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. *Journal of Computational Physics*, 229(9), 3402-3414.
- [10] Bazilevs, Y., Michler, C., Calo, V. M., & Hughes, T. (2010). Isogeometric variational multiscale modeling of wall-bounded turbulent flows with weakly enforced boundary conditions on unstretched meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(13-16), 780-790.
- [11] M. C. Hsu, D. Kamensky, Y. Bazilevs, M. S. Sacks, and T. J. R. Hughes. (2014). Fluid–structure interaction analysis of bioprosthetic heart

valves: significance of arterial wall deformation. *Computational Mechanics*, 54(4):1055–1071.

- [12] **D. Kamensky, M. C. Hsu, D. Schillinger, J.A. Evans, A. Aggarwal, Y. Bazilevs, M. S. Sacks, T. J. R. Hughes, and Y. Bazilevs.** (2015). An immersogeometric variational framework for fluid–structure interaction: application to bioprosthetic heart valves. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 284:1005–1053.
- [13] **K. Takizawa, Y. Bazilevs, and T. E. Tezduyar.** (2014). Space-time and ale-vms techniques for patient-specific cardiovascular fluid-structure interaction modeling. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 19:171–225.
- [14] **M. C. Hsu and Y. Bazilevs.** (2011). Blood vessel tissue prestress modeling for vascular fluid–structure interaction simulations. *Finite Element in Analysis and Design*, 47(6):593–599.
- [15] **Y. Bazilevs, Hsu, M. C., K. Takizawa, and T. E. Tezduyar.** (2012). Ale-vms and st-vms methods for computer modeling of wind-turbine rotor aerodynamics and fluid–structure interaction. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 22(supp02):1230002.
- [16] **Bazilevs, Y., Hsu, M. C., Akkerman, I., Wright, S., Takizawa, K., Henicke, B., ... & Tezduyar, T.** (2011). 3D simulation of wind turbine rotors at full scale. Part I: Geometry modeling and aerodynamics. *International journal for numerical methods in fluids*, 65(1-3), 207-235.
- [17] **Bazilevs, Y., Hsu, M. C., Kiendl, J., Wüchner, R., & Bletzinger, K. U.** (2011). 3D simulation of wind turbine rotors at full scale. Part II: Fluid–structure interaction modeling with composite blades. *International Journal for numerical methods in fluids*, 65(1-3), 236-253.
- [18] **Hsu, M. C., Akkerman, I., & Bazilevs, Y.** (2011). High-performance computing of wind turbine aerodynamics using isogeometric analysis. *Computers & Fluids*, 49(1), 93-100.
- [19] **Korobenko, A., Hsu, M. C., Akkerman, I., Tippmann, J., & Bazilevs, Y.** (2013). Structural mechanics modeling and FSI simulation of wind turbines. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(02), 249-272.
- [20] **Akkerman, I., Bazilevs, Y., Benson, D. J., Farthing, M. W., & Kees, C. E.** (2012). Free-surface flow and fluid-object interaction modeling with emphasis on ship hydrodynamics.
- [21] **Terahara, T., Takizawa, K., Avsar, R., & Tezduyar, T. E.** (2023). T-splines computational membrane–cable structural mechanics with continuity and smoothness: II. Spacecraft parachutes. *Computational Mechanics*, 71(4), 677-686.
- [22] **Bazilevs, Y., Takizawa, K., & Tezduyar, T. E.** (2013). Challenges and directions in computational fluid–structure interaction. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(02), 215-221.

- [23] **Takizawa, K., Tezduyar, T. E., & Avsar, R.** (2020). A low-distortion mesh moving method based on fiber-reinforced hyperelasticity and optimized zero-stress state. *Computational Mechanics*, 65, 1567-1591.
- [24] **Augier, B., Yan, J., Korobenko, A., Czarnowski, J., Ketterman, G., & Bazilevs, Y.** (2015). Experimental and numerical FSI study of compliant hydrofoils. *Computational Mechanics*, 55, 1079-1090.
- [25] **Takizawa, K., Henicke, B., Tezduyar, T. E., Hsu, M. C., & Bazilevs, Y.** (2011). Stabilized space-time computation of wind-turbine rotor aerodynamics. *Computational Mechanics*, 48, 333-344.
- [26] **Takizawa, K., Henicke, B., Puntel, A., Kostov, N., & Tezduyar, T. E.** (2012). Space-time techniques for computational aerodynamics modeling of flapping wings of an actual locust. *Computational Mechanics*, 50, 743-760.
- [27] **Takizawa, K., Tezduyar, T. E., Terahara, T., & Sasaki, T.** (2017). Heart valve flow computation with the integrated space-time VMS, slip interface, topology change and isogeometric discretization methods. *Computers & Fluids*, 158, 176-188.
- [28] **Takizawa, K., Tezduyar, T. E., Kuraishi, T., Tabata, S., & Takagi, H.** (2016). Computational thermo-fluid analysis of a disk brake. *Computational Mechanics*, 57, 965-977.
- [29] **Aydinbakar, L., Takizawa, K., Tezduyar, T. E., & Kuraishi, T.** (2021). Space-time VMS isogeometric analysis of the Taylor-Couette flow. *Computational Mechanics*, 67, 1515-1541.
- [30] **Aydinbakar, L., Takizawa, K., Tezduyar, T. E., & Matsuda, D.** (2021). U-duct turbulent-flow computation with the ST-VMS method and isogeometric discretization. *Computational Mechanics*, 67, 823-843.
- [31] **Aydinbakar, L.** (2021). *A Comparative Turbomachinery Flow Study with the Conservative and Nonconservative Forms of the Space-Time Variational Multiscale Method in the Inertial and Non-inertial Reference Frames* (Doctoral dissertation, 早稲田大学).
- [32] **Kumar, R. V., & Nagaraja, K. V.** (2023). Steady solver for incompressible Navier-Stokes equation with automated adaptive mesh refinement using FEniCS. *Materials Today: Proceedings*.
- [33] **Alnæs, M., Blechta, J., Hake, J., Johansson, A., Kehlet, B., Logg, A., ... & Wells, G. N.** (2015). The FEniCS project version 1.5. *Archive of numerical software*, 3(100).
- [34] **Langtangen, H. P., & Logg, A.** (2016). Solving PDEs in minutes-the FEniCS tutorial volume i. URL <https://fenicsproject.org/book>.
- [35] **Logg, A., Mardal, K. A., & Wells, G. (Eds.).** (2012). *Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book* (Vol. 84). Springer Science & Business Media.
- [36] **Langtangen, H. P., & Logg, A.** (2017). *Solving PDEs in python: the FEniCS tutorial I*. Springer Nature.

- [37] **Alnæs, M. S., Logg, A., Ølgaard, K. B., Rognes, M. E., & Wells, G. N.** (2014). Unified form language: A domain-specific language for weak formulations of partial differential equations. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 40(2), 1-37.
- [38] **Zhu, Q., & Yan, J.** (2021). A moving-domain CFD solver in FEniCS with applications to tidal turbine simulations in turbulent flows. *Computers & Mathematics with Applications*, 81, 532-546.
- [39] **Kamensky, D.** (2021). Open-source immersogeometric analysis of fluid–structure interaction using FEniCS and tIGAr. *Computers & Mathematics with Applications*, 81, 634-648.
- [40] **Kamensky, D., & Bazilevs, Y.** (2019). tIGAr: Automating isogeometric analysis with FEniCS. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 344, 477-498.
- [41] **Ghia, U. K. N. G., Ghia, K. N., & Shin, C. T.** (1982). High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of computational physics*, 48(3), 387-411.
- [42] **Rajan, I., & Perumal, D. A.** (2021). Flow Dynamics of Lid-Driven Cavities with obstacles of various shapes and configurations using the Lattice Boltzmann Method. *Journal of Thermal Engineering*, 7(2), 83-102.
- [43] **Mittal, S., & Kumar, B.** (2003). Flow past a rotating cylinder. *Journal of fluid mechanics*, 476, 303-334.
- [44] **Hughes, T. J.** (2003). *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Courier Corporation.
- [45] **Shankar, P. N., & Deshpande, M.** (2000). Fluid mechanics in the driven cavity. *Annual review of fluid mechanics*, 32(1), 93-136.
- [46] **Tang, T., Zhu, H., Song, J., Ma, B., & Zhou, T.** (2022). The state-of-the-art review on the wake alteration of a rotating cylinder and the associated interaction with flow-induced vibration. *Ocean Engineering*, 254, 111340.
- [47] **Dabiri, J. O.** (2011). Potential order-of-magnitude enhancement of wind farm power density via counter-rotating vertical-axis wind turbine arrays. *Journal of renewable and sustainable energy*, 3(4).
- [48] **Lu, R., & Ringsberg, J. W.** (2020). Ship energy performance study of three wind-assisted ship propulsion technologies including a parametric study of the Flettner rotor technology. *Ships and Offshore Structures*, 15(3), 249-258.

EKLER

EK A: FEniCS Entegrasyonu



EK A

Denklem (2.3)'te verilen σ FEniCS'e aşağıdaki şekilde uygulanabilir:

```
I = Identity(ufl.shape(u)[0])  
sigma = -p*I + 2.0*mu*sym(grad(u))
```

Burada, $\text{sym}(\text{grad}(u))$ Denklem (2.4)'ü hesaplar. Denklem (3.5) ve (3.6)'de tanımlanan u' ve p' şu şekilde uygulanır:

```
u_prime = -tau_SUPS / rho * res_mom  
p_prime = rho * -nu_LSIC * res_con
```

Denklem (3.7) ve (3.8)'teki r_{Mom} ve r_{Con} değerleri UFL'de aşağıdaki gibi yazılır:

```
i,j=ufl.indices(2)  
res_mom = rho*(dot(u, nabla_grad(u)) \\  
+ u_t) \\  
- as_tensor(grad(sigma)[i,j],(i,))  
res_con = div(u)
```

Denklem (3.9) ve (3.10)'te tanımlanan τ_{SUPS} ve ν_{LSIC} aşağıda verildiği gibi yazılır:

```
tau_SUPS = (4/(Dt**2) + inner(u,G*u) \\  
+ 3.0 * (mu/rho)**2 \\  
* inner(G,G))**(-1/2)  
nu_LSIC = (tr(G)*tau_SUPS)**(-1)
```

Son olarak, Denklem (3.11)'daki G ise aşağıdaki şekilde uygulanır:

```
G = inv(ufl.Jacobian(mesh)*0.5).T \
```

$$* \text{inv}(\text{ufl.Jacobian}(\text{mesh})*0.5)$$

Nihayetinde, Denklem (3.12)'nin tüm parçaları tanımlanmış olur. Daha sonra, UFL'deki bu tanımları kullanarak ana denklem olan VMS denklemi, aşağıda verildiği gibi FEniCS'e uygulanabilir:

$$\begin{aligned} \text{VMS} = & (\text{rho} * \text{inner}(\text{dot}(\text{u}, \text{nabla_grad}(\text{u})) \backslash + \text{u_t}, \text{w}) \\ & + \text{inner}(\text{sigma}, \text{nabla_grad}(\text{w})) \\ & + \text{inner}(\text{div}(\text{u}), \text{q}) \\ & - \text{inner}(\text{dot}(\text{u}, \text{nabla_grad}(\text{w})) \backslash \\ & + \text{grad}(\text{q})/\text{rho}, \text{u_prime} * \text{rho}) \\ & + \text{inner}(\text{w}, \text{dot}(\text{u_prime} * \text{rho}, \backslash \\ & \text{nabla_grad}(\text{u}))) \\ & - \text{inner}(\text{p_prime}, \text{div}(\text{w})) \\ & - \text{inner}(\text{grad}(\text{w}), \backslash \\ & \text{outer}(\text{u_prime} * \text{rho}, \backslash \\ & \text{u_prime} * \text{rho}))/\text{rho}) * \text{dx} \end{aligned}$$

Buradaki u_t ifadesi, Denklem (3.12)'deki $\frac{\partial u}{\partial t}$ terimidir. Hız vektörünün zamana göre türevini tanımlamak için Genelleştirilmiş- α yöntemi kullanılmıştır [39, 40].