

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



HARMONİK GEOMETRİK POLİNOMLAR VE SAYILAR

Pınar AKKANAT

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



HARMONİK GEOMETRİK POLİNOMLAR VE SAYILAR

Pınar AKKANAT

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK GEOMETRİK POLİNOMLAR VE SAYILAR

Pınar AKKANAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 25/06/2025 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Levent KARGIN (Danışman)

Doç. Dr. M. Cihat DAĞLI

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

HARMONİK GEOMETRİK POLİNOMLAR VE SAYILAR

Pınar AKKANAT

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Levent KARGIN

Haziran 2025; 28 sayfa

Bu tez çalışmasında öncelikle harmonik geometrik polinomların üreteç fonksiyonu elde edilecektir. Elde edilecek bu üreteç fonksiyonu yardımıyla, harmonik geometrik ve geometrik polinomlar için yeni kapalı formüller türetilenektir. Ayrıca, harmonik geometrik ve geometrik polinomların, iki geometrik polinomun çarpımlarının toplamaları şeklinde ifade edilip edilemeyeceği araştırılacak ve bu toplamaların yine harmonik geometrik ve geometrik polinomlar cinsinden yazılabileceği gösterilecektir. Son olarak, harmonik geometrik polinomların Euler ve Bernoulli sayıları ile olan ilişkileri ortaya konulacak; bu ilişkiler aracılığıyla, söz konusu polinomlar için elde edilen özellikler ilgili özel sayılara da aktarılacaktır.

ANAHTAR KELİMELEER: Bernoulli sayıları, Euler sayıları, Geometrik polinomlar, Harmonik geometrik polinomlar, Sıralı Bell sayıları.

JÜRİ: Doç. Dr. Levent KARGIN

Doç. Dr. M. Cihat DAĞLI

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

HARMONIC GEOMETRIC POLYNOMIALS AND NUMBERS

Pınar AKKANAT

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Levent KARGIN

June 2025; 28 pages

In this thesis, we first obtain the generating function of the harmonic-geometric polynomials. Using the generating function, new closed-form expressions for harmonic geometric and geometric polynomials are derived. Furthermore, we investigate whether the sums of products of two geometric polynomials can be expressed in terms of harmonic-geometric and geometric polynomials, and it is shown that such expressions are indeed possible. Finally, we establish the relationships between harmonic geometric polynomials and the Euler and Bernoulli numbers. Through these connections, the properties obtained for the polynomials are extended to these special numbers.

KEYWORDS: Bernoulli numbers, Euler numbers, Geometric polynomials, Harmonic geometric polynomials, Ordered Bell numbers.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Levent KARGIN

Assoc. Prof. Dr. M. Cihat DAĞLI

Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular olmak üzere dört ana bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde II. tip Stirling sayıları, üstel polinomlar ve geometrik polinomlar hakkında tarihsel bilgiler verilip bu polinomlara ait özelliklerden bahsederek bu tezde ele alınan harmonik geometrik polinomların incelendiği özellikler için motivasyon verilmiştir.

Kaynak Taraması bölümünde geometrik polinomlara ait bazı özellikler incelenmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde üreteç fonksiyonları yöntemi tanıtılmıştır.

Bulgular bölümünde ilk olarak harmonik geometrik polinomların üreteç fonksiyonunu elde edilmiş, bu üreteç fonksiyonu yardımıyla harmonik geometrik ve geometrik polinomlar için yeni kapalı formüller elde edilmiştir. Bunun dışında harmonik geometrik ve geometrik polinomların, iki geometrik polinomun çarpımların toplamalarının yine harmonik geometrik ve geometrik polinomlar cinsinden yazılabildiğini gösterilmiştir. Son olarak harmonik geometrik polinomların Euler ve Bernoulli sayıları ile olan ilişkileri tespit edilmiş, bu ilişkiler yardımıyla bu polinomlar için elde edilen özellikler bu sayılara taşınmıştır. Tezin diğer bölümleri Sonuç, Kaynaklar ve Özgeçmiş ile bitmektedir.

Bu çalışmanın, bu alana anlamlı katkılar sunacağı ve ilgili konularda yapılan bilimsel araştırmalara yeni bakış açıları kazandırarak araştırmacılara ilham kaynağı olacağını düşünmekteyim.

Bu tez çalışması için bilgi ve tecrübelerini eksik etmeyen ve çalışmaya her koşulda zaman ayıran sayın danışmanım Doç. Dr. Levent Kargın'a teşekkür ederim ve saygılarımı sunarım. Yüksek lisans eğitimimde emeği geçen tüm bölüm hocalarıma, her zaman varlıkları ile yanımda olduklarını hissettiren ve beni destekleyen aileme ve kıymetli dostlarıma ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	8
2.1. Geometrik Polinomlar	8
3. MATERYAL VE METOT	13
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	15
4.1. Euler Sayılarına Uygulamaları	21
4.2. Bernoulli Sayılarına Uygulamaları	21
5. SONUÇLAR	25
6. KAYNAKLAR	26
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Harmonik Geometrik Polinomlar ve Sayılar” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

25/06/2025

Pınar AKKANAT



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\binom{n}{k}$: Binom katsayısı

$[n]_k$: I. tip Stirling sayısı

$\{n\}_k$: II. tip Stirling sayısı

B_n : Bernoulli sayısı

$B_{n,p}$: p -Bernoulli sayısı

E_n : Euler sayısı

H_n : Harmonik sayı

${}_Hw_n(x)$: Harmonik geometrik polinom

${}_Hw_n$: Harmonik geometrik sayı

$w_n(x)$: Geometrik polinom

w_n : Sıralı Bell sayısı

$\varphi_n(x)$: Üstel polinom

φ_n : Bell sayısı

1. GİRİŞ

$n = 4$ olsun ve Pascal üçgeninin n . satırındaki terimleri, değişen işaretlerle ele alalım:

$$(1, -4, 6, -4, 1).$$

Bu listeyi bir vektör olarak düşünelim ve bunu ardışık tamsayıların karelerinden oluşan bir vektörle skaler çarpıma tabi tutalım:

$$(1, -4, 6, -4, 1) \cdot (0, 1, 4, 9, 16) = 0.$$

Sonra küpleri deneyelim:

$$(1, -4, 6, -4, 1) \cdot (0, 1, 8, 27, 64) = 0.$$

Şu ana kadar bir sonuç elde edemedik. Birinci dereceden kuvvetler ve sıfırcı dereceden kuvvetlerden oluşan vektörler de skaler çarpım olarak sıfır verir. Ancak, dördüncü dereceden kuvvetleri denediğimizde farklı bir sonuç elde ederiz.

$$(1, -4, 6, -4, 1) \cdot (0, 1, 16, 81, 256) = 24,$$

bulunur ki bu $n!$ değerine eşittir.

Bunların hepsi şu garip hesaplamaların örnekleridir:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^m = \begin{cases} 0, & \text{eğer } m < n, \\ (-1)^n n!, & \text{eğer } m = n, \end{cases} \quad (1.1)$$

ve bu ifadeye zaman zaman kitaplarda ve makalelerde rastlanır. Bu sadece ilginç bir tesadüf mü, yoksa arkasında daha büyük bir şey mi var? Ayrıca, $m > n$ olduğunda ne olur? Bu teorem açıkça daha fazla açıklamayı hak ediyor. (1.1) formülünün gizemi, Stirling sayılarıyla olan bağlantısı sayesinde açığa çıkar. Klasik analizdeki eski bir sonuç bunu ortaya koyar.

$$(-1)^n n! \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^m.$$

Burada $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$, II. tip Stirling sayılarıdır (Graham vd. 1994, Gould ve Quaintance 2007).

Bu sayıların şu özellikleri vardır: Eğer $m < n$ ise $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} = 0$ olur ve $\left\{ \begin{matrix} m \\ m \end{matrix} \right\} = 1$ dir. Bu

sayılar kombinatorik terimlerle şu şekilde tanımlanabilir: $\left\{ \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right\}$, m elemanlı bir kümenin n boş olmayan alt kümeye ayrılma sayısını gösterir. Şaşırtıcıdır ki, Stirling sayıları yaklaşık bir yüzyıl sonra bambaşka bir bağlamda yeniden karşımıza çıkmıştır. Bu sayılar, Alman matematikçi Johann August Grunert'in (1797–1872) (Grunert 1843) numaralı çalışmasında yeniden ortaya konmuştur. Grunert, $\left\{ \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right\}$ sayılarına, üstel fonksiyon e^x üzerine $x \frac{d}{dx} = (xD)$ diferansiyel operatörünü art arda uygulayarak ulaşmıştır. Bu işlem, bir polinom dizisi üretmektedir.

$$\begin{aligned} (xD) e^x &= x e^x \\ (xD)^2 e^x &= (x^2 + x) e^x \\ (xD)^3 e^x &= (x^3 + 3x^2 + x) e^x \\ &\vdots \\ (xD)^m e^x &= \left(\left\{ \begin{smallmatrix} m \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} x + \cdots + \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ m \end{smallmatrix} \right\} x^m \right) e^x. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Grunert'in çalışmalarında görünen bu polinomlar, $n = 0, 1, \dots$, için

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^k \quad (1.3)$$

olarak gösterilir. İlk birkaç terimi

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2 + x, \varphi_3(x) = x^3 + 3x^2 + x$$

dir. (1.2) formülünden üstel polinomlar

$$\varphi_m(x) = e^{-x} (xD)^m e^x \quad (1.4)$$

biçiminde operatör yardımıyla veya

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{x(e^t-1)} \quad (1.5)$$

üreteç fonksiyoları yardımıyla tanımlanabilir. Bu polinomlar birçok matematikçi tarafından ele alınmıştır. Örneğin S. Ramanujan $\varphi_n(x)$ polinomlarını ayrıntılı olarak incelemiştir. Ramanujan'ın bu çalışmaları daha sonra Berndt tarafından sunulmuştur (Berndt 1985). Bu polinomlar daha sonraları Bell (Bell 1934a) ve Touchard (Touchard 1933, Touchard 1956) tarafından da incelenmiştir. Bell ve Touchard, bu polinomlara üstel fonksiyonlarla

ilişkisinden dolayı “üstel polinomlar” adını vermiştir . Aslında Bell, (Bell 1934b) numaralı çalışmasında çok değişkenli daha genel bir polinom sınıfı olan $Y_{n,k}$ yi tanıtmış ve $\varphi_n(x)$ bu sınıfın tek değişkenli özel bir durumu olarak ortaya çıkmıştır. Bu nedenle $\varphi_n(x)$ polinomları, literatürde tek değişkenli Bell polinomları olarak da bilinmektedir (Carlitz 1962, Gould ve Quaintance 2007, Zhao 2003).

Üstel polinomlarda $x = 1$ alınırsa

$$b_n = \varphi_n(1) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

elde edilir. Bu sayılar bazen üstel sayılar olarak adlandırılrsa da, daha yaygın ve yerleşik olan adları Bell sayılarıdır. Bu sayılar, hem sayma problemlerinde hem de analitik bağlamda çeşitli ilginç uygulamalara sahiptir. n . Bell sayısı n elemanlı bir kümenin kaç farklı şekilde boş olmayan ayırık alt kümelerle bölünebileceğini ifade eder. Analitik olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^m \frac{x^n}{n!}$$

serisinin hesabında ortaya çıkmaktadır. Yukarıdaki serinin $x = 1$ durumunun hesabı çok uzun ve ilginç bir geçmişe sahiptir. Bu seri ile ilk olarak 1877’de Dobinski ilgilenmiştir. Bu nedenle literatürde Dobinski formülü olarak bilinmektedir. Ancak Dobinski bu seriyi sadece $m = 8$ değerine kadar hesaplayabilmiştir (Dobinski 1877). Hemen sonra Ligowski (Ligowski 1878), bu serinin hesabı için bir yineleme bağıntısı elde etmiştir. Ancak bu sonuçlardan daha önce Grunert (1.4) formülü yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^m \frac{x^n}{n!} = \varphi_m(x) e^x$$

şekilde zaten hesaplamıştır. Üstel polinomların ve Bell sayılarının sağladığı diğer özellikler için çalışmalarına bakabilirsiniz (Boyadzhiev 2005, Boyadzhiev 2009, Boyadzhiev 2012, Brychkov 2018, Dil ve Kurt 2011).

(xD) operatörünün m defa e^x fonksiyonuna uygulanmasından sonra ortaya çıkan polinomun matematikteki bazı problemlere çözüm getirmesinden dolayı bu operatörün herhangi n kez türevlenebilir bir f fonksiyonuna uygulandığında ortaya çıkan durum merak konusu olmuş ve aşağıdaki formüle ulaşılmıştır:

$$(xD)^n f(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x). \quad (1.6)$$

Bu formül ilk olarak Grunert tarafından verilmiştir (Grunert 1843). Formülün ispatında kullanılan teknikte Mellin dönüşümünden yararlanılmasından dolayı bu operatör literatürde Mellin türev olarak bilinmektedir. Bu ispatı (Boyadzhiev 2009) makalesinde bulabilirsiniz. Ayrıca bu formül Gould'un (Gould 2000) kitabında tümevarım yardımıyla ispatlanmıştır. Mellin türev operatörünün ilginç bir uygulamasını da ilgili çalışmadan bulunabilir (Knopf 2003). (1.6) formülünde

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

alınırsa

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x) = k! \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

olduğundan

$$(xD)^n \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! \left(\frac{x}{1-x} \right)^k$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki ifadeyi

$$\sum_{k=0}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} k! x^k = w_m(x) \quad (1.7)$$

olarak tanımlayacak olursak

$$(xD)^n \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} w_n \left(\frac{x}{1-x} \right)$$

elde edilir. $|x| < 1$ olduğu bölgede

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

seri açılımından yararlanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^m x^n = \frac{1}{1-x} w_m \left(\frac{x}{1-x} \right)$$

bulunur. İlk bir kaç terimi aşağıdaki gibidir:

$$w_0(x) = 1, w_1(x) = x, w_2(x) = 2x^2 + x.$$

Euler'in $w_m(x)$ polinomlarına (Euler 1755) eserinin 2. cildinin VII. bölümünde, 389. sayfada rastlanmaktadır. Euler bu polinomları $(xD)^n (1/(1-x))$ türevlerini doğrudan

hesaplayarak elde etmiştir. Bu polinomlar aynı zamanda Schwatt'ın (1924) kitabında karşımıza çıkmaktadır. Bu polinomlar literatürde geometrik seri ile olan ilişkisinden dolayı geometrik polinomlar olarak bilinmektedir. Geometrik polinomlar ile üstel polinomlar arasında (Boyadzhiev 2005)

$$w_n(x) = \int_0^{\infty} \varphi_n(x\lambda) e^{-\lambda} d\lambda$$

şeklinde verilen integral gösterimi mevcuttur. Bu gösterim yardımıyla geometrik polinomlara ait birçok özelliğe ulaşılabilir. Örneğin (1.5) yardımıyla geometrik polinomların aşağıdaki üreteç fonksiyonu tarafından üretildiği tespit edilebilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1 - x(e^t - 1)}. \quad (1.8)$$

Bu polinomun özel durumlarında sayılar teorisinde önemli yere sahip bazı sayı ailelerine ulaşılmaktadır. Örneğin (1.7) formülünde $x = 1$ alınırsa

$$w_m = \sum_{k=0}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} k!$$

elde edilir. Bu ifade bir kümenin sıralı ayırık alt kümelerine bölünme sayısını hesaplar. Bu nedenle literatürde sıralı Bell sayıları olarak adlandırılmaktadır. $x = -1/2$ alınırsa n . Euler sayısına ulaşılır (Boyadzhiev 2009). Yani

$$w_n\left(-\frac{1}{2}\right) = E_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{k!}{2^k}$$

dir. B_n , n . Bernoulli sayısı ile olan ilişkisine (1.8) formülünde integral alınarak ulaşılır (Kargın 2017). Yani

$$B_n = \int_0^1 w_n(-x) dx$$

dir. Geometrik polinomlar ve sıralı Bell sayılarının sağladığı diğer özellikler için (Boyadzhiev 2005, Boyadzhiev 2012, Dil ve Kurt 2011, Kargın 2017, Kargın ve Cencki 2022, Kargın ve Cay 2022, Kellner 2014, Boyadzhiev ve Dil 2016, Mihoubi ve Mezö 2014, Taharbouchet 2019, Tanny 1974, Diagana ve Maiga 2017, Dasef ve Kautz 1997, Gross 1962) çalışmaları ve içindeki diğer atıflar incelenebilir.

Dil ve Kurt, 2012 yılında yapmış oldukları çalışmada bu sefer Mellin türev operatöründe f fonksiyonu olarak

$$f(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

olarak k kez türevini

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{-\ln(1-x)}{1-x} \right) = \frac{k!(H_k - \ln(1-x))}{(1-x)^{k+1}}$$

şeklinde hesaplamışlardır (Dil ve Kurt 2012). Bu türev (1.6) formülünde yazıldığında

$$\begin{aligned} (xD)^n \left(\frac{-\ln(1-x)}{1-x} \right) &= \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! H_k \left(\frac{x}{1-x} \right)^k \\ &\quad - \frac{\ln(1-x)}{1-x} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! \left(\frac{x}{1-x} \right)^k \end{aligned}$$

elde edilir. İkinci toplam geometrik polinomlardır. İlk toplam

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! H_k x^k = {}_H w_n(x)$$

olarak tanımlanacak olursa

$$(xD)^m \left(\frac{-\ln(1-x)}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x} {}_H w_m \left(\frac{x}{1-x} \right) - \frac{\ln(1-x)}{1-x} w_m \left(\frac{x}{1-x} \right) \quad (1.9)$$

bulunur. Diğer taraftan burada seçilen f fonksiyonu ilk n doğal sayının çarpmaya göre terslerinin toplamı olan H_n harmonik sayıların üretic fonksiyonudur. Yani,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

dir. Bu durumda (1.9) formülünden Harmonik sayıları içeren aşağıdaki seri için bir hesaplama formülü elde edilmiş olunur:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n n^m x^n = \frac{1}{1-x} {}_H w_m \left(\frac{x}{1-x} \right) - \frac{\ln(1-x)}{1-x} w_m \left(\frac{x}{1-x} \right).$$

Ortaya çıkan polinomun hem harmonik sayılarla hem de geometrik polinomlarla ilişkisinden dolayı ${}_H w_n(x)$ polinomu harmonik geometrik polinomlar olarak adlandırılmıştır.

Dil ve Kurt bu çalışmasında yukarıdaki seri dışında harmonik sayıları içeren bir çok farklı seriyi geometrik ve harmonik geometrik polinomlar cinsinden hesaplamışlardır. Örneğin aşağıdaki seriler verilen hesaplamalardan sadece iki tanesidir.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} (1^m H_1 + 2^m H_2 + \cdots + n^m H_n) x^n \\
&= \frac{1}{(1-x)^2} \left[{}_H w_m \left(\frac{x}{1-x} \right) - w_m \left(\frac{x}{1-x} \right) \ln(1-x) \right], \\
& \sum_{n=0}^{\infty} (n^m + n^{m-1} + \cdots + n + 1) H_n x^n \\
&= \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^m \left\{ {}_H w_k \left(\frac{x}{1-x} \right) - w_k \left(\frac{x}{1-x} \right) \ln(1-x) \right\}.
\end{aligned}$$

Dil ve Kurt'dan sonra bu polinomlarla Keller (2014) çalışmasında ilgilenmiştir. Keller bu çalışmasında ${}_H w_m \left(\frac{-1}{2} \right)$ değerlerin Genocchi sayılarıyla ilişkili olduğu göstermiştir. Tek n durumunda ise, ${}_H w_m \left(\frac{-1}{2} \right)$ değeri bu sayıların konvolüsyonları cinsinden ifade edilebildiğini ispatlamıştır. Çalışmanın devamında, söz konusu konvolüsyonların Bernoulli ve Genocchi sayılarının Miki tipi konvolüsyonlarıyla bağlantısı incelemiş ve bunların bazılarına ilişkin 2-adik değerlemeler elde etmiştir.

Biz de bu tez çalışmasında ilk olarak harmonik geometrik polinomların üreteç fonksiyonunu elde ettik. Elde edilen üreteç fonksiyonu yardımıyla harmonik geometrik ve geometrik polinomlar için yeni kapalı formüller elde edilmiştir. Bunun dışında harmonik geometrik ve geometrik polinomların, iki geometrik polinomun çarpımların toplamalarının yine harmonik geometrik ve geometrik polinomlar cinsinden yazılabildiğini gösterdik. Son olarak harmonik geometrik polinomların Euler ve Bernoulli sayıları ile olan ilişkileri tespit edilmiş, bu ilişkiler yardımıyla bu polinomlar için elde edilen özellikler bu sayılara taşınmıştır.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Geometrik Polinomlar

Geometrik polinomlarla ilgili birçok farklı yöntem kullanılarak birçok çalışma mevcuttur. Örneğin Dil ve Kurt, 2011 yılındaki çalışmalarında Euler-Siedel matris yöntemini kullanarak

$$\begin{aligned} w_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w_k(x), \\ w_{n+1}(x) &= x \frac{d}{dx} ((1+x) w_n(x)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

bağıntılarına ulaşırken (Keller, 2014) yılındaki çalışmasında

$$\int_0^1 w_n(-x) dx = B_n, \quad (2.2)$$

olduğunu tespit etmiştir. Burada B_n , n . Bernoulli sayıdır. Biz ise bu bölümde tez çalışmamızda uyguladığımız yönteme benzer olması sebebiyle (Kargın 2017) ve (Kargın ve Cay 2022) makalesindeki elde edilen sonuçlardan bahsedeceğiz. (Kargın 2017) çalışmasında ilk olarak iki değişkenli geometrik polinom aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x; y) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{xt}}{1 - y(e^t - 1)}. \quad (2.3)$$

Buradan

$$w_n(0; y) = w_n(y), \quad w_n(0; 1) = w_n$$

olduğu açıktır. Şimdi bu çalışmadaki bazı sonuçları verelim:

Teorem 2.1. *Negatif olmayan tamsayılar için*

$$(y+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w_k(y) w_{n-k}(y) = w_{n+1}(y) + w_n(y)$$

dir. $y = 1$ için

$$2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w_k w_{n-k} = w_{n+1} + w_n$$

bulunur.

İspat (2.3) formülünde t ye göre türev alırsa

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{xt}}{1 - y(e^t - 1)} \right) = \frac{xe^{xt}}{1 - y(e^t - 1)} + \frac{ye^t}{1 - y(e^t - 1)} \frac{e^{xt}}{1 - y(e^t - 1)}$$

bulunur. $x = x_1 + x_2 - 1$ alınıp gerekli düzenlemeler yapılsa

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{xt}}{1 - y(e^t - 1)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n+1}(x_1 + x_2 - 1; y) \frac{t^n}{n!},$$

$$\frac{xe^{xt}}{1 - y(e^t - 1)} = (x_1 + x_2 - 1) \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x_1 + x_2 - 1; y) \frac{t^n}{n!},$$

$$\begin{aligned} \frac{ye^t}{1 - y(e^t - 1)} \frac{e^{xt}}{1 - y(e^t - 1)} &= y \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x_1; y) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x_2; y) \frac{t^n}{n!} \right) \\ &= y \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w_k(x_1; y) w_{n-k}(x_2; y) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ teriminin katsayıları karşılaştırıldığında

$$y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w_k(x_1; y) w_{n-k}(x_2; y) = w_{n+1}(x_1 + x_2 - 1; y) - (x_1 + x_2 - 1) w_n(x_1 + x_2 - 1; y)$$

sonucuna ulaşılır. $x_1 = x_2 = 0$ alındığında istenen sonuca ulaşılır. $\square$

Teorem 2.2. *Negatif olmayan tamsayılar ve $y_1 \neq y_2$ için*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w_k(y_1) w_{n-k}(y_2) = \frac{y_2 w_{n+1}(y_2) + y_1 w_n(y_1)}{y_2 - y_1} \quad (2.4)$$

dir.

İspat (2.3) formülünden

$$\frac{e^{x_1 t}}{1 - y_1(e^t - 1)} \frac{e^{x_2 t}}{1 - y_2(e^t - 1)} = \frac{y_2}{y_2 - y_1} \left(\frac{e^{(x_1+x_2)t}}{1 - y_2(e^t - 1)} \right) - \frac{y_1}{y_2 - y_1} \left(\frac{e^{(x_1+x_2)t}}{1 - y_1(e^t - 1)} \right)$$

bulunur. Yukarıdaki teoremden uyulan benzer işlemler uygulanıp $x_1 = x_2 = 0$ alınırsa istenen elde edilir. $\square$

Teorem 2.3. *Pozitif tamsayılar için*

$$w_n(y) = y \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{n+k} k! (y+1)^{k-1}$$

dir. $y = 1$ alınırsa

$$w_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{n+k} k! 2^{k-1}$$

olur.

İspat (2.3) formülünde y yerine $-y - 1$ alınırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$w_n(x; y-1) = (-1)^n w_n(1-x; -y)$$

bulunur. Aynı zamanda

$$y w_n(1; y) = (1+y) w_n(y)$$

olduğu açıktır. Buradan

$$w_n(y) = \frac{y}{(1+y)} w_n(-y-1) \quad (2.5)$$

elde edilir. (2.3) formülünde yerine yazılırsa istenen elde edilir. $\square$

(2.5) formülünde $y = 1$ alınırsa

$$(-1)^n 2w_n = w_n(-2)$$

bulunur. Bu durumda (2.4) formülünde $y_2 = -1, y_1 = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 2.4. *Pozitif tamsayılar için*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k w_k w_{n-k} = \begin{cases} 0, & n \text{ tek ise;} \\ \frac{4}{3} w_n, & n \text{ çift ise,} \end{cases}$$

olur. Aşağıdaki teoremden (2.2) formülünün bir genellemesi verilmiştir.

Teorem 2.5. *Negatif olmayan m ve pozitif n değerleri için*

$$\int_{-1}^0 w_m(y) w_n(y) dy = (-1)^m \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} B_{n+j}$$

dir.

İspat (2.2) formülünün her iki tarafından y değişkenine göre -1 den 0 a integral alınırsa

$$\int_0^1 y w_n(y) dy = -(B_{n+1} + B_n)$$

bulunur. Buradan tümevarımla devam edersek negatif olmayan k ve pozitif n değerleri için

$$\int_0^1 y^k w_n(y) dy = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=0}^k \begin{bmatrix} k+1 \\ j+1 \end{bmatrix} B_{n+j}$$

dir. Burada $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ ifadesi I. tip Stirling sayılarıdır (Graham vd. 1994). Yukarıdaki formülde ilk olarak sol tarafa aşağıdaki işlem uygulanırsa

$$\sum_{k=0}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} k! \int_0^1 y^k w_n(y) dy = \int_0^1 w_m(y) w_n(y) dy$$

bulunur. Sağ taraf ise

$$\sum_{k=0}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^k \sum_{j=0}^k \begin{bmatrix} k+1 \\ j+1 \end{bmatrix} B_{n+j} = \sum_{j=0}^m B_{n+j} \sum_{k=j}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} k+1 \\ j+1 \end{bmatrix} (-1)^k$$

bulunur. Yukarıda

$$\sum_{k=j}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} k+1 \\ j+1 \end{bmatrix} (-1)^k = (-1)^m \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}$$

olduğu kullanılırsa istenen elde edilir. $\square$

(Kargın ve Cay 2022) makalesinde bu teorem geliştirilerek geometrik polinomların yarı-ortonormalliğine ulaşmıştır. Teorem ve ispatı vermeden önce biraz hatırlatma yapalım. p -Bernoulli sayıları $B_{n,p}$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır (Rahmani 2015):

$$B_{n,p} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^k k! \binom{k+p+1}{k}, \quad n, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Bunlar, $B_{n,0} = B_n$ özdeşliği ile Bernoulli sayıları ilişkilidir ve bu formül sağlanır (Kargın 2017):

$$\frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p \begin{bmatrix} p+1 \\ k+1 \end{bmatrix} B_{n+k} = (-1)^{n-1} \frac{p+1}{p+2} B_{n-1,p+1}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \quad (2.6)$$

Ayrıca aşağıdaki integral temsili de sağlanır (Rahmani 2015):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n,p}}{n!} t^n = \int_0^1 \frac{(1-x)^p}{1+x(e^t-1)} dx. \quad (2.7)$$

Daha fazla ayrıntı için bkz. (Kargın 2017; Kargın 2018; Kargın 2020; Kargın ve Cenkcı 2019; Kargın ve Rahmani 2018). Artık ana sonucumuzu ifade edip ispatlayabiliriz.

Teorem 2.6. *Negatif olmayan n ve m tamsayıları için $n + m \geq 1$ olmak üzere*

$$\int_0^1 \frac{1-x}{x} w_n(-x) w_m(-x) dx = (-1)^n B_{n+m} \quad (2.8)$$

dir.

İspat Denklem (1.8) kullanılarak, integral temsili (2.7) şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{B_{n,p}}{p+1} = \int_0^1 (1-x)^p w_n(-x) dx.$$

Bu eşitliğin her iki tarafı z^p ile çarpılır ve $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$ ($|u| < 1$) açılımı kullanılırsa

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_{n,p}}{p+1} z^p = \int_0^1 \frac{w_n(-x)}{1-(1-x)z} dx$$

elde edilir. Bu ifadede $z = 1 - e^{-z}$ olarak seçilirse ve II. tip Stirling sayılarına ait üreteç fonksiyonu (Graham vd. 1994)

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{z^n}{n!} = \frac{(e^z - 1)^k}{k!}$$

kullanılarak aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$\int_0^1 w_n(-x) w_m(x-1) dx = \sum_{p=0}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \right\} (-1)^p p! \frac{B_{n,p}}{p+1}. \quad (2.9)$$

Ayrıca, (Rahmani, 2015) çalışmasında elde edilen formül

$$\frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p \left[\begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right] (-1)^k B_{n+k} = \frac{B_{n,p}}{p+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

denklemine ve Graham vd. (1994) tarafından verilen

$$\sum_{p=k}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right] (-1)^{p-k} = \delta_{m,k}$$

özdeşliği kullanılarak

$$\int_0^1 w_n(-x) w_m(x-1) dx = B_{n+m}$$

elde edilir. Son olarak, (2.5) nolu denklem yukarıda yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir. $\square$

Sonuç olarak, tek indeksli ve 1'den büyük olan tüm Bernoulli sayıları sıfır olduğundan, sağ taraf $n + m$ tek ve 1'den büyük olduğunda sıfır olur; bu durumda geometrik polinomlar, $\mu(x) = (1-x)/x$ ağırlık fonksiyonu ile yarı-ortonormal olur.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde bu tezde kullanılan üreteç fonksiyonu tekniğinin tanımı ve bazı özellikleri verilecektir. Bu bölümde (Wilf 2005) kaynağından yararlanılmıştır. Üreteç fonksiyonları, sayı dizilerini temsil etmek ve bu diziler üzerinde cebirsel işlemler gerçekleştirmek amacıyla kullanılan güçlü bir araçtır. Matematikte özellikle kombinatorik hesaplamalarda, sayma problemlerinde, yineleme ilişkilerinin çözümünde ve özel fonksiyonların analizinde sıkça başvurulur. İlk defa 1730 yılında Abraham de Moivre tarafından tanımlanmıştır. Bir $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sayı dizisini üreten sıradan üreteç fonksiyonu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

biçiminde tanımlanır. Bu sayı dizisi aynı zamanda

$$\ddot{U}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

biçiminde de tanımlanır. Bu tip fonksiyonlara üstel üreteç fonksiyonu denir. Bu iki üreteç fonksiyonu dışında Lambert tipli, Bell tipli ve Dirichlet tipli üreteç fonksiyonları da vardır. Ancak bu tez çalışmasında ilgilenilmediği için bahsedilmeyecektir. Sıradan ve üstel üreteç fonksiyonlara bir örnek verecek olursak $(a_n) = (1, 1, 1, \dots)$ dizisi için

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

dir. Bir üreteç fonksiyonu, her x için yakınsak olmak zorunda değildir. Problemde ilgilenilen durum sayı dizisinin özellikleri olduğundan yakınsak olduğu belli bir bölge olması yeterlidir. Ancak iki farklı fonksiyona yapılan aritmetik işlemlerde yakınsak oldukları bölgenin kesişiminin boştan farklı olduğuna dikkat etmek gerekmektedir. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ serileri $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ve $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ sayı dizilerinin iki sıradan üreteç fonksiyonu olsun. Üreteç fonksiyonlarının temel özellikleri aşağıdaki gibidir:

Toplama veya Çıkarma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mp \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \mp b_n) x^n.$$

Çarpma (Cauchy çarpımı)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

Kaydırma operatörü

$$x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

Türev operatörü

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

İntegral operatörü

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)} x^n.$$

Şimdi bu tezde kullanılan sayı dizilerine ait üreteç fonksiyonlarını liste halinde verelim.

Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \quad (3.1)$$

iken Euler sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\frac{2}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!} \quad (3.2)$$

dir. II. tip Stirling sayılarının üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{t^n}{n!} = \frac{(e^t - 1)^k}{k!} \quad (3.3)$$

iken sıradan üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} t^n = \frac{t^k}{(1-t)(1-2t)\cdots(1-kt)}$$

formundadır. I. tip Stirling sayılarının sıradan üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] t^k = t(t+1)\cdots(t+n-1).$$

Bununla birlikte üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \frac{t^n}{n!} = \frac{(-\ln(1-t))^k}{k!}$$

dir. Son olarak da harmonik sayılar

$$\sum_{n=k}^{\infty} H_n t^n = \frac{-\ln(1-t)}{1-t}, \quad (3.4)$$

sıradan üreteç fonksiyonu tarafından üretilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Harmonik geometrik polinomlar

$${}_Hw_n(x) = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! H_k x^k \quad (4.1)$$

biçiminde tanımlanır (Dil ve Kurt 2012).

İlk birkaç terim aşağıdaki gibidir:

$${}_Hw_0(x) = 0,$$

$${}_Hw_1(x) = x,$$

$${}_Hw_2(x) = x + 3x^2,$$

$${}_Hw_3(x) = x + 9x^2 + 11x^3,$$

$${}_Hw_4(x) = x + 21x^2 + 66x^3 + 50x^4.$$

$x = 1$ için harmonik geometrik sayılar aşağıdaki gibi elde edilir.

$${}_Hw_n(1) := {}_Hw_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! H_k. \quad (4.2)$$

Teorem 4.1. *Harmonik geometrik polinom ve sayılar aşağıdaki üreteç fonksiyonları tarafından üretilir:*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_Hw_n(x) \frac{t^n}{n!} &= -\frac{\ln(1 - x(e^t - 1))}{1 - x(e^t - 1)}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} {}_Hw_n \frac{t^n}{n!} &= -\frac{\ln(2 - e^t)}{2 - e^t}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

İspat (4.1) ifadesinin her iki tarafı $t^n/n!$ ile çarpılıp n üzerinden sonsuz toplam alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_Hw_n(x) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! H_k x^k \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k! H_k x^k \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıda (3.3) ve (3.4) kullanılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_Hw_n(x) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} H_k (x(e^t - 1))^k \\ &= -\frac{\ln(1 - x(e^t - 1))}{1 - x(e^t - 1)} \end{aligned}$$

bulunur. □

Teorem 4.2. *Negatif olmayan tamsayı değerleri için*

$$(x+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} {}_H w_{n-k}(x) w_k(x) = {}_H w_{n+1}(x) + {}_H w_n(x) - w_{n+1}(x) \quad (4.4)$$

dir. Özel durumda

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} {}_H w_{n-k} w_k = \frac{1}{2} ({}_H w_{n+1} + {}_H w_n - w_{n+1})$$

olur.

İspat (4.3) te t 'ye göre türev alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_H w_{n+1}(x) \frac{t^n}{n!} &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{\ln(1-x(e^t-1))}{1-x(e^t-1)} \right) \\ &= -\frac{\ln(1-x(e^t-1))}{(1-x(e^t-1))} \frac{x e^t}{(1-x(e^t-1))} \\ &\quad + \frac{x e^t}{(1-x(e^t-1))} \frac{1}{(1-x(e^t-1))} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k w_k(-1-x) {}_H w_{n-k}(x) \right) \frac{t^n}{n!} \\ &\quad + x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k w_k(-1-x) w_{n-k}(x) \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

bulunur. $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırıldığında

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} {}_H w_{n+1}(x) &= {}_H w_n(x) + w_n(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} w_k(-1-x) ({}_H w_{n-k}(x) + w_{n-k}(x)) \\ &= {}_H w_n(x) + w_n(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{x+1}{x} w_k(x) ({}_H w_{n-k}(x) + w_{n-k}(x)) \\ &= {}_H w_n(x) + w_n(x) + \frac{x+1}{x} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} w_k(x) {}_H w_{n-k}(x) \\ &\quad + \frac{x+1}{x} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} w_k(x) w_{n-k}(x) \\ &= {}_H w_n(x) + w_n(x) + \frac{x+1}{x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w_k(x) {}_H w_{n-k}(x) \\ &\quad - \frac{x+1}{x} {}_H w_n(x) + \frac{x+1}{x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w_k(x) w_{n-k}(x) - \frac{x+1}{x} w_n(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (Kargın 2017)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w_k(x) w_{n-k}(x) = \frac{1}{1+x} (w_{n+1}(x) + w_n(x)) \quad (4.5)$$

olduğu kullanılırsa istenen elde edilir. $\square$

Teorem 4.3. Her n pozitif tamsayısı için

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{w_k(x) w_{n-k}(x)}{k+1} = \frac{H w_{n+1}(x)}{(1+x)(n+1)} + \frac{1}{1+x} w_n(x) \quad (4.6)$$

bağıntısı sağlanır.

Özel olarak $x = 1$ alınır

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{w_k w_{n-k}}{k+1} = \frac{H w_{n+1}}{2(n+1)} + \frac{w_n}{2} \quad (4.7)$$

elde edilir.

İspat (4.3) kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} H w_k(x) \frac{t^k}{k!} &= -\ln(1 - x(e^t - 1)) \frac{1}{1 - x(e^t - 1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x(e^t - 1))^{n+1}}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) \frac{t^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) \frac{t^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n+1} \frac{(e^t - 1)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

bulunur. Burada (3.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} H w_k(x) \frac{t^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) \frac{t^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n+1} \sum_{j=n}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} j+1 \\ n+1 \end{matrix} \right\} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) \frac{t^k}{k!} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^j \left\{ \begin{matrix} j+1 \\ n+1 \end{matrix} \right\} n! x^{n+1} \right) \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} x w_k(x) \frac{t^{k+1}}{k!} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda II. tip Stirling sayılarının yineleme bağıntısı (Gould ve Quaintance 2007)

$$\left\{ \begin{matrix} j+1 \\ n+1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j \\ n+1 \end{matrix} \right\} (n+1) + \left\{ \begin{matrix} j \\ n \end{matrix} \right\} \quad (4.8)$$

kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} {}_H w_k(x) \frac{t^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) \frac{t^k}{k!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} \sum_{n=0}^{j-1} \left\{ \begin{matrix} j \\ n+1 \end{matrix} \right\} (n+1)! x^{n+1} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) \frac{t^k}{k!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} \sum_{n=0}^j \left\{ \begin{matrix} j \\ n \end{matrix} \right\} n! x^{n+1} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} x w_k(x) \frac{t^{k+1}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) \frac{t^k}{k!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} \sum_{n=1}^j \left\{ \begin{matrix} j \\ n \end{matrix} \right\} n! x^n \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) \frac{t^k}{k!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} \sum_{n=0}^j \left\{ \begin{matrix} j \\ n \end{matrix} \right\} n! x^{n+1} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) \frac{t^{k+1}}{k!} x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) \frac{t^k}{k!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} w_j(x) (1+x) \\
&+ x \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) \frac{t^{k+1}}{k!}
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak gerekli düzenlemeler yapıp $\frac{t^k}{k!}$ katsayılarının karşılaştırılması sonucu istenen elde edilir. $\square$

(4.6) formülünde $x \rightarrow -x - 1$ alınırsa, $n \geq 1$ için (Kargın 2017)

$$w_n(-x-1) = (-1)^n \frac{x+1}{x} w_n(x) \quad (4.9)$$

olduğundan

$$x {}_H w_{n+1}(-1-x) = (-1)^{n+1} (x+1) ({}_H w_{n+1}(x) + n w_n(x)), \quad n \geq 0, \quad (4.10)$$

sonucuna ulaşılır. Buradan $x = 1$ alındığında

$${}_H w_{n+1}(-2) = (-1)^{n+1} 2 ({}_H w_{n+1} + n w_n), \quad n \geq 0,$$

olduğu görülür. O halde aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 4.4. Pozitif tamsayılar için

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! H_k \left((-1)^{n-k} x (x+1)^{k-1} - x^k \right) = (n-1) w_{n-1}(x) \quad (4.11)$$

ve

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! H_k \left((-1)^{n-k} 2^{k-1} - 1 \right) = (n-1) w_{n-1}$$

dir.

Önerme 4.5. $n \geq 2$ için

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} {}_H w_k(x) = \frac{(x+1)}{x} ({}_H w_n(x) - w_{n-1}(x)) \quad (4.12)$$

dir. Özel durumda

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} {}_H w_k = 2 ({}_H w_n - w_{n-1})$$

bulunur.

İspat (4.3)'te $x \rightarrow -x - 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} {}_H w_n(-x-1) \frac{t^n}{n!} &= \frac{-t}{(1-x(e^{-t}-1))} e^{-t} \\ &\quad - \frac{\ln((1-x(e^{-t}-1)))}{(1-x(e^{-t}-1))} e^{-t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n w_{n-1}(1; x) \frac{t^n}{n!} \\ &\quad + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} {}_H w_k(x) \right) (-1)^n \frac{t^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

olur. $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırıldığında

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} {}_H w_k(x) = (-1)^n {}_H w_n(-x-1) - n w_{n-1}(1; x)$$

bulunur. Burada $n \geq 1$ için $w_n(1; x) = \frac{1+x}{x} w_n(x)$ olduğu görülür ve (4.10) bağıntısı kullanılırsa (4.12) özdeşliği elde edilir. $\square$

Teorem 4.6. Negatif olmayan tamsayı değerleri için

$${}_H w_{n+1}(x) = x \frac{d}{dx} ((1+x) {}_H w_n(x)) + x w_n(x) \quad (4.13)$$

dir. Buradan

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! H_k ((k+1)x^{k+1} + kx^k) = {}_H w_{n+1}(x) - x w_n(x) \quad (4.14)$$

ve

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! H_k ((k+1)x^2 + x)(1+x)^{k-1} = {}_H w_{n+1}(x) + (n - (1+x)) w_n(x) \quad (4.15)$$

yazılabilir. Dolayısıyla $x = 1$ için

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (2k+1) k! H_k = {}_H w_{n+1} - w_n$$

ve

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{(k+2)! H_k}{k+1} 2^{k-1} = {}_H w_{n+1} + (n-2) w_n$$

vardır.

İspat (4.3) formülünde x e göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} {}_H w_n(x) \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{d}{dx} \left(-\frac{\ln(1 - x(e^t - 1))}{1 - x(e^t - 1)} \right) \\ &= \frac{-\ln(1 - x(e^t - 1))}{1 - x(e^t - 1)} \frac{e^t - 1}{1 - x(e^t - 1)} + \frac{e^t - 1}{1 - x(e^t - 1)} \frac{1}{1 - x(e^t - 1)} \\ &= \frac{-\ln(1 - x(e^t - 1))}{1 - x(e^t - 1)} \left(\frac{1}{-x} + \frac{1}{x} \frac{1}{1 - x(e^t - 1)} \right) \\ &+ \frac{1}{1 - x(e^t - 1)} \left(\frac{1}{-x} + \frac{1}{x} \frac{1}{1 - x(e^t - 1)} \right) \end{aligned}$$

formunda yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} {}_H w_n(x) \frac{t^n}{n!} &= -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} {}_H w_n(x) \frac{t^n}{n!} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \frac{t^n}{n!} \\ &+ \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}_H w_n(x) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} {}_H w_k(x) \frac{t^k}{k!} \right) \\ &+ \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) \frac{t^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıda gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dx} {}_H w_n(x) &= -{}_H w_n(x) - w_n(x) \\ &+ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} {}_H w_{n-k}(x) w_k(x) \\ &+ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w_{n-k}(x) w_k(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda (4.4) formülü kullanıldığında istenen elde edilir. $\square$

4.1. Euler Sayılarına Uygulamaları

(1.8)'de $x = -1/2$ alınıp (3.2) ile karşılaştırıldığında $w_n(-1/2) = E_n$ olduğu görülür. Buradan da (4.10) kullanılarak

$$((-1)^n - 1)_H w_{n+1}(-1/2) = nE_n$$

bulunur. Böylece $E_{2n} = 0$ olduğu tekrar ispatlanmış olur. Ayrıca

$${}_H w_{2n}(-1/2) = \frac{(1 - 2n)}{2} E_{2n-1} \quad (4.16)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (4.1) ve (4.6) formüllerinden aşağıdaki sonuca kolaylıkla ulaşılır:

Sonuç 4.7. $n \geq 1$ tamsayıları için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \left\{ \begin{matrix} 2n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{k! H_k}{2^{k-1}} &= (2n - 1) E_{2n-1}, \\ \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} \left\{ \begin{matrix} 2n-1 \\ k \end{matrix} \right\} (k-1) \frac{k! H_k}{2^k} &= (n-1) E_{2n-1}, \\ \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} \frac{E_k E_{2n-1-k}}{k+1} &= \frac{2n+1}{2n} E_{2n-1} \end{aligned}$$

özdeşlikleri sağlanır.

4.2. Bernoulli Sayılarına Uygulamaları

(4.3) özdeşliğinde x 'e göre 0'dan 1'e integral alındığında $z = 1 + x(e^t - 1)$ değişken değişimi ile

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_0^1 {}_H w_n(-x) dx = \frac{-1}{2} \frac{t^2}{e^t - 1}$$

bulunur. (3.1) formülü kullanıldığında ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\int_0^1 {}_H w_n(-x) dx = \frac{-1}{2} n B_{n-1}$$

elde edilir. Buradan pozitif tamsayı değerleri için

$$\frac{1}{2}nB_{n-1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{k!H_k}{k+1}$$

bilinen bağıntısına ulaşılır. Bu sonuç daha önce (Keller 2014) makalesinde farklı bir ispat yöntemiyle verilmiştir. (4.10) formülü

$${}_Hw_{n+1}(x-1) = (-1)^n \frac{1-x}{x} {}_Hw_{n+1}(-x) - n \frac{1-x}{x} w_n(-x)$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda benzer adımlarla

$$\int_0^1 {}_Hw_{n+1}(x-1)dx = \int_0^1 {}_Hw_{n+1}(-y)dy = \frac{-1}{2} (n+1) B_n$$

ve

$$\int_0^1 \frac{1-x}{x} w_n(-x)dx = B_n$$

olduğundan

$$\int_0^1 \frac{1-x}{x} {}_Hw_{n+1}(-x)dx = \frac{(-1)^n}{2} (n-1) B_n$$

olur. Böylece,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{(k-1)!H_k}{(k+1)} = \frac{(n-2)}{2} B_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

bulunur. Benzer şekilde (4.14)'ten

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{k!H_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{(n-1)}{2} B_n - B_{n+1}, \quad n \geq 1,$$

elde edilir. (4.13) formülü

$$\frac{d}{dx} ((1+x) {}_Hw_n(x)) = \frac{1}{x} {}_Hw_{n+1}(x) - w_n(x)$$

biçiminde yazılabilir. Her iki tarafta x yerine $-x$ alınıp 0'dan 1'e integral alınırsa ve (2.2) formülü kullanılırsa

$$\int_0^1 \frac{1}{x} {}_Hw_{n+1}(-x)dx = - \int_0^1 w_n(-x)dx = -B_n \quad (4.17)$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} k! H_{k+1} = B_n$$

sonucuna ulaşılır.

(4.13) formülünde x yerine $-x$ alınıp 0'dan 1'e integral alınıp

$$\int_0^1 x w_n(-x) dx = B_{n+1} + B_n$$

ve

$$\int_0^1 {}_H w_n(-x) dx = \frac{-1}{2} n B_{n-1} \quad (4.18)$$

olduğu kullanılırsa

$$\int_0^1 x {}_H w_n(-x) dx = B_{n+1} - \frac{(n-1)}{2} B_n - \frac{n}{2} B_{n-1} \quad (4.19)$$

bulunur. (4.19) formülünden

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{k! H_k}{k+2} = B_{n+1} - \frac{(n-1)}{2} B_n - \frac{n}{2} B_{n-1}$$

$m \geq 1$ için $B_{2m+1} = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k \left\{ \begin{matrix} 2m \\ k \end{matrix} \right\} \frac{k! H_k}{k+2} &= \frac{(1-2m)}{2} B_{2m} + \frac{\delta_{m,1}}{2} \\ \sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k \left\{ \begin{matrix} 2m-1 \\ k \end{matrix} \right\} \frac{k! H_k}{k+2} &= B_{2m} - \frac{2m-1}{2} B_{2m-2} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.10) formülü

$${}_H w_{n+1}(-1+x) = (-1)^n \frac{1-x}{x} {}_H w_{n+1}(-x) + (-1)^n n \frac{1-x}{x} w_n(-x)$$

biçiminde yazılabilir. Burada her iki taraf $w_m(-x)$ ile çarpılıp 0'dan 1'e integral alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 {}_H w_{n+1}(x-1) w_m(-x) dx &= (-1)^n \int_0^1 \frac{1-x}{x} {}_H w_{n+1}(-x) w_m(-x) dx \\ &+ (-1)^n n \int_0^1 \frac{1-x}{x} w_n(-x) w_m(-x) dx \end{aligned}$$

bulunur. İlk integralde (4.9) formülü kullanılırsa

$$\int_0^1 {}_H w_{n+1}(x-1)w_m(-x)dx = (-1)^{m+1} \int_0^1 \frac{1-x}{x} {}_H w_{n+1}(-x)w_m(-x)dx$$

elde edilir. Son olarak (2.8) kullanılırsa aşağıdaki teoreme ulaşılır:

Teorem 4.8. $n + m \geq 1$ için n ve m herhangi negatif olmayan tam sayılar olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$((-1)^n - (-1)^m) \int_0^1 \frac{1-x}{x} {}_H w_{n+1}(-x)w_{m+1}(-x)dx = nB_{n+m+1}. \quad (4.20)$$

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında öncelikle harmonik geometrik polinomların üreteç fonksiyonu elde edilmiştir. Elde edilen bu üreteç fonksiyonu yardımıyla, harmonik geometrik ve geometrik polinomlar için yeni kapalı formüller türetilmiştir. Ayrıca, harmonik geometrik ve geometrik polinomların, iki geometrik polinomun çarpımlarının toplamaları şeklinde ifade edilip edilemeyeceği araştırılmış ve bu toplamaların yine harmonik geometrik ve geometrik polinomlar cinsinden yazılabileceği gösterilmiştir. Son olarak, harmonik geometrik polinomların Euler ve Bernoulli sayıları ile olan ilişkileri ortaya konmuş; bu ilişkiler aracılığıyla, söz konusu polinomlar için elde edilen özellikler ilgili özel sayılara da aktarılmıştır.

6. KAYNAKLAR

- Berndt, B. C. 1985. Ramanujan's Notebooks, Part I. Springer.
- Bell, E. T. 1934. Exponential numbers. *The American Mathematical Monthly*, 41(7), 411–419.
- Bell, E. T. 1934. Exponential polynomials. *Annals of Mathematics*, 35(2), 258–277.
- Boyadzhiev, K. N. 2005. A series transformation formula and related polynomials. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, (23), 3849–3866.
- Boyadzhiev, K. N. 2009. Exponential polynomials, Stirling numbers, and evaluation of some gamma integrals. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 168672.
- Boyadzhiev, K. N. 2012. Close encounters with the Stirling numbers of the second kind. *Mathematics Magazine*, 85(4), 252–266.
- Boyadzhiev, K. N. 2014. Power series with binomial sums and asymptotic expansions. *International Journal of Mathematical Analysis*, 8(28), 1389–1414.
- Boyadzhiev, K. N., & Dil, A. 2016. Geometric polynomials: properties and applications to series with zeta values. *Analysis Mathematica*, 42, 203–224.
- Brychkov, Y. A. 2018. Some properties of the exponential polynomials. *Integral Transforms and Special Functions*, 29(7), 571–579.
- Carlitz, L. 1962. Single variable Bell polynomials. *Collectanea Mathematica*, vol. 14, pp. 13–25.
- Dasef, M. E., & Kautz, S. M. 1997. Some sums of some importance. *The College Mathematics Journal*, 28(1), 52–55.
- Diagana, T., & Maiga, H. 2017. Some new identities and congruences for Fubini numbers. *Journal of Number Theory*, 173, 547–569.
- Dil, A. ve Kurt, V. 2011. Investigating geometric and exponential polynomials with Euler–Seidel matrices. *Journal of Integer Sequences*, 14, Article 11.4.6.

- Dil, A. ve Kurt, V. 2012. Polynomials Related to Harmonic Numbers and Evaluation of Harmonic Number Series I, *Integers* 12.
- Dobinski, G. 1877. Summirung der Reihe $\sum nm/n!$ für $m= 1, 2, 3, 4, 5$. *Arch. für Mat. und Physik*, 61, 333-336.
- Graham, R. L., Knuth, D. E., & Patashnik, O. 1994. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science* (2nd ed.). Addison-Wesley.
- Grunert, J.A. 1843. Über die Summerung der Reihen...," *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 25, pp. 240–279.
- Gould, H. W. 1978. Euler's formula for n th differences of powers. *American Mathematical Monthly*, 85(6), 450–467.
- Gould, H. W. 2000. *Topics in Combinatorics*, H. W. Gould, 2nd edition.
- Gould, H. W., ve Quaintance, J. 2007. A linear binomial recurrence and the Bell numbers and polynomials. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 371-385.
- Gross, O. A. 1962. Preferential arrangements. *The American Mathematical Monthly*, 69(1), 4-8.
- Ligowski, W. 1878. Zur summerung der Reihe.. *Archiv der Mathematik und Physik*, 62, 334-335.
- Kargın, L. 2017. Some formulae for products of geometric polynomials with applications. *Journal of Integer Sequences*, 20, Article 17.4.4.
- Kargın, L. 2018. p -Bernoulli and geometric polynomials. *International Journal of Number Theory*, 14(2), 595–613. <https://doi.org/10.1142/S1793042118500345>
- Kargın, L. 2020. Poly- p -Bernoulli polynomials and generalized Arakawa-Kaneko zeta function. *Lithuanian Mathematical Journal*, 60(1), 29–50.
- Kargın, L. ve Cenkci, M. 2022. Recurrences and congruences for higher order geometric polynomials and related numbers. *Ukrainian Mathematical Journal*, 73, 12.

- Kargın, L. ve Cay, E. 2022. Semiorthogonality of geometric polynomials. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 19(3), 129.
- Kargın, L. ve Rahmani, M. 2018. A closed formula for the generating function of p -Bernoulli numbers. *Quaestiones Mathematicae*, 41(7), 975–983.
- Kellner, B. C. 2014. Identities between polynomials related to Stirling and harmonic numbers, *Integers* 14 article ID A54.
- Knopf, P. M. 2003. The operator $(x \frac{d}{dx})^n$ and its application to series. *Mathematics Magazine*, 76(5), 364–371.
- Mezö, I. 2014. Periodicity of the last digits of some combinatorial sequences. *J. Integer Sequences*, 17, Article 14.1.1.
- Mihoubi, M., & Taharbouchet, S. 2019. Identities and congruences involving the geometric polynomials. *Miskolc Mathematical Notes*, 20(1), 395–408.
- Rahmani, M. 2015. On p -Bernoulli numbers and polynomials. *Journal of Number Theory*, 157, 350–366.
- Schwatt, I. J. 1924. An introduction to the operations with series. Chelsea, New York.
- Tanny, S. M. 1975. On some numbers related to the Bell numbers. *Canadian Mathematical Bulletin*, 17(5), 733–738.
- Touchard, J. 1933. Propriétés arithmétiques de certains nombres récurrents. Secrétariat de la société scientifique.
- Touchard, J. 1956. Nombres exponentiels et nombres de Bernoulli. *Canadian Journal of Mathematics*, 8, 305–320.
- Wilf, H. S. 2005. Generating functionology. CRC press.
- Zhao, Y. Q. 2003. A uniform asymptotic expansion of the single variable Bell polynomials. *Journal of computational and applied mathematics*, 150(2), 329–355.

ÖZGEÇMİŞ

Pınar AKKANAT

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2021-2025	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2010-2016	Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik, İstanbul