

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



HARMONİK ÜSTEL POLİNOMLAR VE SAYILAR

Havva KOÇAK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2024

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



HARMONİK ÜSTEL POLİNOMLAR VE SAYILAR

Havva KOÇAK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2024

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK ÜSTEL POLİNOMLAR VE SAYILAR

Havva KOÇAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 24/06/2024 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU (Danışman)

Doç. Dr. Levent KARGIN

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

HARMONİK ÜSTEL POLİNOMLAR VE SAYILAR

Havva KOÇAK

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Mutlu GÜLOĞLU

Haziran 2024; 22 sayfa

Bu tez çalışmasında harmonik sayıların ve hipergeometrik fonksiyonların üreteç fonksiyonları yardımıyla harmonik üstel polinomların üreteç fonksiyonu elde edilmiştir. Bu üreteç fonksiyonu kullanılarak (sayılar teorisinde önemli bir yere sahip olan) Bernoulli sayıları ve üstel polinomların, harmonik üstel polinomlarla arasında yeni bağıntılar elde edilmiştir. Bu kapsamda elde edilen üreteç fonksiyonunun türevi yardımıyla, harmonik üstel polinomlar, üstel polinomlar ve bu polinomların türevleri arasında yeni bağıntılar bulunmuştur. Ayrıca harmonik üstel polinomların Bernoulli sayıları ile arasında bir yineleme bağıntısı ve üstel polinomlar cinsinden integral temsili elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Bernoulli Sayıları, Harmonik Sayılar, Harmonik Üstel Polinomlar, Hipergeometrik Fonksiyonlar, İkinci Tip Stirling Sayıları, İkinci Tip r -Stirling Sayıları, Üstel Polinomlar.

JÜRİ: Dr. Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU

Doç. Dr. Levent KARGIN

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

HARMONIC EXPONENTIAL POLYNOMIALS AND NUMBERS

Havva KOÇAK

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mutlu GÜLOĞLU

June 2024; 22 pages

In this thesis, the generating function of harmonic exponential polynomials is obtained by means of generating functions of harmonic numbers and hypergeometric functions. Using this generating function, new relations obtained between the Bernoulli numbers (which has an important place in number theory) and harmonic exponential polynomials. Within this context, with the help of the derivative of the obtained generating function, new connections have been found between harmonic exponential polynomials, exponential polynomials and the derivatives of these polynomials. Additionally, a recursive relation between harmonic exponential polynomials and Bernoulli numbers is established, along with an integral representation in terms of the exponential polynomials.

KEYWORDS: Bernoulli Numbers, Exponential Numbers, Harmonic Exponential Numbers, Harmonic Numbers, Hypergeometric Functions, Stirling Numbers of the Second Type, r-Stirling Numbers of the Second Type.

COMMITTEE: Asst. Prof. Dr. Mutlu GÜLOĞLU

Assoc. Prof. Dr. Levent KARGIN

Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma, Sonuçlar olmak üzere beş ana bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde üstel polinomların ortaya çıkma sürecine, harmonik üstel polinomlar ve sayıların ikinci tip Stirling sayıları cinsinden tanımına yer verilmiştir. Harmonik üstel polinomların üreteç fonksiyonu ile elde edilecek olan yeni bağıntılar hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

Kaynak Taraması bölümünde elde edilen yeni bağıntılar arasındaki ilişkiyi iyi anlamak için kullanılacak olan temel kavramlar ve gösterimlere yer verilmiştir. Bunun için öncelikle ikinci tip Stirling sayıları tanıtılmıştır. Bu sayıların bir genellemesi olan ikinci tip r -Stirling sayıları tanıtılmış ve bilinen bazı özel durumları verilmiştir. Ayrıca üstel polinomlar, harmonik üstel polinomlar ve Bernoulli sayılarının ikinci tip Stirling sayıları cinsinden üreteç fonksiyonlarına yer verilmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde yeni bağıntıları oluştururken sıkça kullanılan Cauchy çarpımı, harmonik üstel polinomların üreteç fonksiyonu elde edilirken kullanılan hipergeometrik serilerin tanımı ve bu serilerin harmonik seri cinsinden eşitliği verilmiştir. Ayrıca üstel polinomların Bernoulli sayılarına eşitliği ile bilinen integral temsili ve kanıtı verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde öncelikle harmonik üstel polinomların üreteç fonksiyonu elde edilmiştir. Bu üreteç fonksiyonunun x e göre ve t ye göre kısmi türevleri alınarak harmonik üstel polinomlar ile üstel polinomların ve bu polinomların birinci ve ikinci dereceden türevleri arasında yeni bağıntılara ulaşılmıştır. Ayrıca harmonik üstel polinomların Bernoulli sayıları ile arasında yeni bir yineleme bağıntısı ve üstel polinomlar cinsinden integral temsili elde edilmiştir. Tezin diğer bölümleri Sonuçlar ve Kaynaklar bölümlerinden oluşmaktadır. Son kısımda ise özgeçmiş ile bitmektedir.

Bu çalışmasının harmonik üstel polinomlar konusunda çalışma yapacak araştırmacılara bir kaynak oluşturacağı ve sonraki akademik çalışmalar için fikir vereceğine inanmaktayım.

Bu tez çalışması için bilgi ve tecrübeleri ile destek olan sayın danışmanım Dr. Öğretim Üyesi Mutlu Güloğlu'na ve yüksek lisans eğitimimde emeği geçen tüm bölüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum “Harmonik Üstel Polinomlar ve Sayılar” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

.../.../2024

Havva KOÇAK



SİMGELER

Simgeler:

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$(n)_k$	: Artan faktöriyel (Pochhammer sembolü)
$\binom{n}{k}$	: Binom katsayıları
$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$	: İkinci tip Stirling sayıları
$\left\{ \begin{smallmatrix} n+r \\ k+r \end{smallmatrix} \right\}_r$	: İkinci tip r -Stirling sayıları
H_n	: Harmonik sayılar
$\phi_n(x)$	: Üstel polinomlar
ϕ_n	: Üstel sayılar (Bell sayısı)
$\phi_n^h(x)$	: Harmonik üstel polinomlar
ϕ_n^h	: Harmonik üstel sayılar
$B_n(x)$	: Bernoulli polinomları
B_n	: Bernoulli sayıları
${}_pF_q(a, b; c; z)$	: Hipergeometrik fonksiyonlar
$\phi_{m,r}(x)$	: r -Üstel polinomları

1. GİRİŞ

Üstel polinomlarla ilgili bilgi verilmeden önce $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$ serisinden bahsedilmesi gerekir. Bu serinin 1800'lü yıllara dayanan uzun bir geçmişi vardır. Bu seriyi hesaplama sorunu Dobinski, çözümü ise Ligowski tarafından makale olarak sunulmaktadır (Dobinski 1877; Ligowski 1878). Dobinski S_n dizisinin ilk terimlerinden bazılarını önceki seriler cinsinden aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} = 1 + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots \end{aligned}$$

$$S_1 = e$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = 1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \dots \\ &= 1 + \frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots\right) + \left(\frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} \dots\right) \end{aligned}$$

$$S_2 = e + S_1 = 2e$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{k!} = \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \dots \\ &= 1 + \frac{4}{1!} + \frac{9}{2!} + \frac{14}{3!} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) + \left(\frac{2}{1!} + \frac{4}{2!} + \frac{6}{3!} + \dots\right) + \left(\frac{1}{1!} + \frac{4}{2!} + \frac{9}{3!} + \dots\right) \\ &= e + 2S_1 + S_2 \end{aligned}$$

$$S_3 = 5e$$

Benzer şekilde ilerlenirse $S_4 = 15e$, $S_5 = 52e$, $S_6 = 203e$, $S_7 = 877e$, $S_8 = 4140e$ olarak elde edilir.

Bu yöntem ilk sekiz terim dışındaki n ler için doğru değildir. Ancak Ligowski daha iyi bir yöntem bulmuştur (Ligowski 1878). S_n sayıları için üreteç fonksiyonu sağlayan bu yöntem

$$e^{ez} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kz}}{k!}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \frac{z^n}{n!} \\
e^{e^z} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{z^n}{n!}
\end{aligned}$$

şeklinde. Grunert S_n ile ilgili bu bağıntıları ilerleterek aşağıdaki gibi bir bağıntı elde etmiştir:

$$\begin{aligned}
\left(x \frac{d}{dx}\right)^n e^x &= \left(x \frac{d}{dx}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{x^k}{k!} \\
&= e^x \phi_n(x)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Bu bağıntıdaki e^x in katsayılarını $\phi_n(x)$ üstel polinomu olarak tanımlamıştır (Grunert 1843). Kolayca görülebileceği gibi ϕ_n , n -inci dereceden bir polinomdur.

$\phi_n(x)$ polinomları S. Ramanujan tarafından yayınlanmamış not defterlerinde daha sistematik bir şekilde incelenmiştir. Ramanujan'ın çalışması kaynakça bölümünde daha detaylı incelenebilir (Berndt 1985). Bell ve Touchard ise üstel fonksiyonla ilişkileri nedeniyle bunları üstel polinomlar olarak adlandırmıştır (Bell 1934; Touchard 1956). Aslında Bell, özel bir durumu olarak ϕ_n i de içeren $Y_{n,k}$ şeklindeki birçok polinomdan oluşan genel bir polinom sınıfını tanıtmıştır (Bell 1934). Bu nedenle $\phi_n(x)$ tek değişkenli Bell polinomları olarak da bilinir (Carlitz 1962; Zhao 2003). Üstel polinomlar ikinci tip Stirling sayıları, $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, cinsinden şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned}
\phi_n(x) &= \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} x + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} x^2 + \cdots + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} x^n \\
&= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^k
\end{aligned}$$

Burada $n \in \mathbb{N}$ dir (Grunert 1843). Stirling sayıları sadece üstel polinomlar değil sayılar teorisindeki birçok önemli sayı ve polinom ailelerinin hesaplama formüllerinde kolaylık sağlamaktadır. Bunlardan bazıları bu tez çalışmasında kullanılacağı için bahsedilmesi gerekir.

Bernoulli sayıları, B_n , ikinci tip Stirling sayıları cinsinden

$$B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \frac{k!}{k+1}$$

olarak tanımlanır (Apostol 2008).

Harmonik üstel polinomlar, $\phi_n^h(x)$, ve harmonik üstel sayılar, sırasıyla ikinci tip Stirling sayıları cinsinden

$$\phi_n^h(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} H_k x^k$$

ve

$$\phi_n^h := \phi_n^h(1) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} H_k$$

şeklinde tanımlanır (Dil vd. 2012). Burada H_k harmonik sayıdır.

Bu tez çalışmasında yukarıda kısaca bahsedilen polinomlar ve sayılarla ilgili yeni bir bakış açısı kazanmak istenmiştir. Bunun için öncelikle harmonik üstel polinomların üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} = e^{x(e^t-1)} {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \middle| -x(e^t-1) \right)$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada harmonik üstel polinomların harmonik sayılar ve hipergeometrik polinomlarla arasındaki bağıntılar kullanılmıştır. Bu üreteç fonksiyonu yardımıyla harmonik üstel polinomların üstel polinomlar, harmonik sayılar ve Bernoulli sayıları ile arasındaki ilişkiler kullanılarak önceden bilinen birçok bağıntıya ulaşıldığı gibi birçok yeni yineleme bağıntıları elde edilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Temel Kavramlar ve Gösterimler

Bu tez çalışmasında kullanılan bazı tanımlar, temel bağıntılar ve formüller bu alt başlıkta verilecektir. Temel kavram ve gösterimler için Broder 1984, Boyadzhiev 2009, Dil vd. 2011, Dil vd. 2012, Gould 2016, Graham vd. 1994, Grunert 1843, Mező 2011, Wilf 1994 kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.1. *S boştan farklı bir küme olsun. S nin boştan farklı ve ikili ayrık alt kümelerden oluşan, birleşimleri S kümesini veren altkümelerinin bir ailesine S nin bir parçalanışı ya da ayrışımı denir.*

Tanım 2.2. *$n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin k alt kümeden oluşan parçalanışlarının sayısı ikinci tip Stirling sayısı olarak adlandırılır ve $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ şeklinde gösterilir.*

Örneğin; $S = \{1, 2, 3\}$ olsun. Üç alt kümeden oluşan bir küme parçalanışı $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ şeklindedir. Çünkü yukarıdaki tanımda bahsedildiği üzere $\{1\} \cap \{2\} = \{2\} \cap \{3\} = \{1\} \cap \{3\} = \emptyset$ ve $S = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$ şeklindeki küme parçalanışı koşullarını sağlar. O halde $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ dir. İki alt kümeden oluşan parçalanışlar ise $\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}$ dir. Gerçekten de $\{1\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \cap \{1, 3\} = \{3\} \cap \{1, 2\} = \emptyset$ dir ve $\{1\} \cup \{2, 3\} = \{2\} \cup \{1, 3\} = \{3\} \cup \{1, 2\} = S$ dir. O halde $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 3$ dür. Benzer şekilde bir alt kümeden oluşan küme parçalanışı $\{\{1, 2, 3\}\}$ dir. Bu durumda $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ olur. Sonuç olarak üç elemanlı bir kümenin toplamda beş küme parçalanışı olduğu kolaylıkla görülür (Gould 2016).

İkinci tip Stirling sayılarının tanımından görüleceği üzere bu sayılar, negatif olmayan değerler alır. $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ dir. $n, k \in \mathbb{Z}^+$ iken $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ k \end{smallmatrix} \right\} = 0$ dir. $1 \leq n < k$ iken $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = 0$ ve $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1$ dir.

Tanım 2.3. (Grunert 1843) *$n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\phi_n(x)$ ile gösterilen üstel polinomlar, Stirling sayıları cinsinden*

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^k \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada birkaç tane üstel polinom şu şekildedir:

$$\phi_0(x) = 1 \quad (2.2)$$

$$\phi_1(x) = x$$

$$\phi_2(x) = x + x^2$$

$$\phi_3(x) = x + 3x^2 + x^3$$

$$\vdots$$

Üstel polinomlar arasında

$$\frac{\phi_{n+1}(x)}{x} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k(x) \quad (2.3)$$

şeklinde bir bağıntı bulunmaktadır (Boyadzhiev 2009). Üstel polinomlar ve üstel polinomların birinci dereceden türevi arasında

$$\frac{d[\phi_n(x)]}{dx} = \frac{\phi_{n+1}(x)}{x} - \phi_n(x) \quad (2.4)$$

eşitliği vardır (Dil vd. 2011). Ayrıca (2.1) de $x = 1$ için

$$\phi_n := \phi_n(1) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

bağıntısı üstel sayılar ya da Bell sayısı olarak adlandırılır. Birkaç tane Bell sayısı aşağıdaki gibidir:

$$\phi_0 = 1, \phi_1 = 1, \phi_2 = 2, \phi_3 = 5, \phi_4 = 15, \dots$$

Tanım 2.4. (Broder 1984) $r, n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r$ ile gösterilen ikinci tip r -Stirling sayılarının üreteç fonksiyonu $t \in \mathbb{C}$ için

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!} = \frac{(e^t - 1)^k e^{rt}}{k!}$$

şeklindedir.

İkinci tip r -Stirling sayıları, $r = 0$ ve $r = 1$ durumunda ikinci tip Stirling sayılarına indirgenir:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_0 = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \text{ ve } \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}_1 = \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}. \quad (2.5)$$

Tanım 2.5. (Mező 2011) $x \in \mathbb{C}$ ve $r, m, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\phi_{m,r}(x)$ r -Üstel polinomları

$$\phi_{m,r}(x) = \sum_{k=0}^m \left\{ \begin{matrix} m+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r x^k$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $r = 0$ için

$$\phi_m(x) := \phi_{m,0}(x) = \sum_{k=0}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} x^k \quad (2.6)$$

ve $r = 1$ için

$$\phi_{m,1}(x) := \frac{\phi_{m+1}(x)}{x} = \sum_{k=0}^m \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} x^k \quad (2.7)$$

dir.

Tanım 2.6. (Graham vd. 1994) $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

harmonik serisinin

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

şeklindeki n -inci kısmi toplamına n -inci harmonik sayı denir. Burada $H_0 = 0$ dir.

Tanım 2.7. (Dil vd. 2012) $n, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve H_k harmonik sayı olmak üzere harmonik üstel polinomlar

$$\phi_n^h(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} H_k x^k \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Birkaç tane harmonik üstel polinom şu şekildedir:

$$\phi_0^h(x) = 0$$

$$\phi_1^h(x) = x$$

$$\phi_2^h(x) = x + \frac{3}{2}x^2$$

$$\phi_3^h(x) = x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3$$

$$\phi_4^h(x) = x + \frac{21}{2}x^2 + 11x^3 + \frac{25}{12}x^4$$

$$\begin{aligned}\phi_5^h(x) &= x + \frac{45}{2}x^2 + \frac{275}{6}x^3 + \frac{250}{12}x^4 + \frac{137}{60}x^5 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Ayrıca $x = 1$ için

$$\phi_n^h := \phi_n^h(1) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} H_k$$

toplamı harmonik üstel sayılar şeklinde tanımlanır. Birkaç tane harmonik üstel sayı şu şekildedir:

$$\phi_0^h = 0, \phi_1^h = 1, \phi_2^h = \frac{5}{2}, \phi_3^h = \frac{22}{3}, \phi_4^h = \frac{295}{12}, \phi_5^h = \frac{1849}{20}, \dots$$

Tanım 2.8. (Wilf 1994) $\{b_n\}$ bir dizi olmak üzere

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonuna $\{b_n\}$ dizisinin üstel üreteç fonksiyonu denir.

NOT: $k \in \mathbb{Z}$ ve $x \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (2.9)$$

ifadesi e^x in kuvvet serisi açılımıdır (Graham vd. 1994). Dikkat edilirse e^x fonksiyonunun $\{1\}$ sabit dizisinin üstel üreteç fonksiyonu olduğu görülmektedir. Şimdi üstel polinomun başka bir tanımını verelim. Bu tanım Ligowski formülü olarak da adlandırılır.

Tanım 2.9. (Graham vd. 1994) $x \in \mathbb{C}$ olsun. $m, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve $m \geq n$ olmak üzere ikinci tip Stirling sayılarının üstel üreteç fonksiyonu

$$\frac{(e^x - 1)^n}{n!} = \sum_{m=n}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} \frac{x^m}{m!} \quad (2.10)$$

şeklindedir.

Tanım 2.10. (Graham vd. 1994) $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve $x \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\phi_n(x)$ üstel polinomu

$$e^{x(e^t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.11)$$

üreteç fonksiyonu ile de tanımlanır.

2.2. Bernoulli Polinomları ve Bernoulli Sayıları

Bu alt bölümde, tez çalışmasındaki yeni bağıntıları elde ederken kullanılacak olan Bernoulli polinomları ve sayılarından kısaca bahsedilecektir. Burada, Gould 2016, Comtet 1974 ve Knuth 1993 kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.11. (Comtet 1974; Gould 2016) $t \in \mathbb{C}$ olsun. $|t| < 2\pi$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $B_n(x)$ Bernoulli polinomunun üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{tx}}{e^t - 1} \quad (2.12)$$

şeklindedir.

Bernoulli polinom dizisinin ilk altı terimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x \\ B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42} \end{aligned}$$

(2.12) de $x = 0$ için B_n ile gösterilen n -inci Bernoulli sayısının üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1} \quad (2.13)$$

şeklindedir. Bernoulli sayılarının ilk birkaç değeri aşağıdaki gibidir:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, \dots$$

Burada, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $n = 2k+1$ iken $B_n = 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca Bernoulli sayılarının ortaya çıkışı Faulhaber formülü olarak bilinen

$$\sum_{k=1}^n k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$$

formülüne dayandığı söylenmektedir. Bu formülün Bernoulli sayıları cinsinden

$$\sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} n^k \quad (2.14)$$

şeklinde eşiti vardır (Knuth 1993).



3. MATERYAL VE METOT

Tanım 3.1. (Gould 1972) $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ve $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ karmaşık terimli iki sonsuz seri olmak üzere bu serilerin çarpımı

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k a_m b_{k-m} \right)$$

şeklindedir. Bu çarpıma Cauchy çarpımı denir.

Teorem 3.2. (Berndt 1985) $p, n, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\int_0^x \phi_p(t) dt = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k}(1) \phi_k(x). \quad (3.1)$$

İspat $Re(\lambda) > 0, |w| \leq 1, x \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$h_s(x, \lambda, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w^k}{(\lambda + k)^s}$$

genelleştirilmiş serisinde $p \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve $\lambda = w = 1$ için

$$h_{-p}(x) =: h_{-p}(x, 1, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p + n^p)$$

şeklindedir (Boyadzhiev 2007).

$$h_{-p}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} n^p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p)$$

Sağdaki ikinci toplamda (2.14) kullanılarak

$$h_{-p}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} n^p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} n^k$$

elde edilir. Sağdaki ilk toplamda (1.1) den

$$h_{-p}(x) = e^x \phi_p(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} n^k$$

olur. (Boyadzhiev 2007) den $h_{-p}(x) = e^x \phi_p(x) + e^x \int_0^x \phi_p(t) dt$ eşitliği kullanılarak

$$e^x \phi_p(x) + e^x \int_0^x \phi_p(t) dt = e^x \phi_p(x) + \frac{e^x}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} \phi_k(x)$$

$$e^x \phi_p(x) + e^x \int_0^x \phi_p(t) dt = e^x \phi_p(x) + \frac{e^x}{p+1} \sum_{k=1}^p \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} \phi_k(x)$$

$$\int_0^x \phi_p(t) dt = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} \phi_k(x)$$

bulunur. İspat tamamlanır. $\square$

Tanım 3.3. (Comtet 1974; Graham vd. 1994) $x \in \mathbb{C}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $(x)_0 = 1$ olmak üzere $k \in \mathbb{N}$ iken artan faktöriyel ya da Pochhammer sembolü

$$(x)_k = x(x+1)(x+2) \cdots (x+k-1)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.4. (Graham vd. 1994) a_i ve b_j birer gerçel parametre (genellikle tamsayı), $t \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere genel hipergeometrik seri, t cinsinden bir kuvvet serisidir ve artan faktöriyel cinsinden

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3, \dots, a_p \\ b_1, b_2, b_3, \dots, b_q \end{matrix} \middle| t \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n (a_3)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n (b_3)_n \dots (b_q)_n} \frac{t^n}{n!} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca, $p = q = 2$ için (3.2) bağıntısının harmonik sayılar cinsinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{z^n}{n!} = ze^z {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \middle| -z \right) \quad (3.3)$$

eşitliği vardır (Hansen 1975).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde harmonik sayıların ve hipergeometrik fonksiyonların üreteç fonksiyonları yardımıyla $\phi_n^h(x)$ harmonik üstel polinomların üreteç fonksiyonu ve bu üreteç fonksiyonu yardımıyla yeni yineleme bağıntıları elde edilmiştir. Öncelikle artan faktöriyel tanımı kullanılarak ${}_2F_2$ hipergeometrik fonksiyonunun toplam şeklindeki eşitliği elde edilecektir. Bu amaçla ilk olarak (3.2) bağıntısında $t = -x(e^t - 1)$ alarak

$$\begin{aligned} {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \middle| -x(e^t - 1) \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n(1)_n}{(2)_n(2)_n} \frac{(-x(e^t - 1))^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x(e^t - 1))^n}{(n+1)(n+1)!} \end{aligned} \quad (4.1)$$

elde edelim. Şimdi $n, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve H_k harmonik sayı olmak üzere (2.8) kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} H_k x^k \right] \frac{t^n}{n!} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} H_k x^k \right] \left[\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{t^n}{n!} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. (2.10) dan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k \frac{(x(e^t - 1))^k}{k!}$$

elde edilir. (3.3) de $z = x(e^t - 1)$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} = x(e^t - 1) e^{x(e^t - 1)} {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \middle| -x(e^t - 1) \right)$$

dir. Buradan (4.1) gereği

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} &= x(e^t - 1) e^{x(e^t - 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x(e^t - 1))^n}{(n+1)(n+1)!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} &= e^{x(e^t - 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x(e^t - 1))^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde $\phi_n^h(x)$ harmonik üstel polinomların üreteç fonksiyonu elde edilir.

Şimdi, $\phi_n^h(x)$ harmonik üstel polinomunun üreteç fonksiyonu yardımıyla, harmonik üstel polinomların üstel polinomlar, harmonik sayılar ve Bernoulli sayıları ile arasındaki ilişkiler kullanılarak yeni yineleme bağıntıları elde edilecektir.

Teorem 4.1. $\forall n \geq 1$ için

$$\frac{d(\phi_n^h(x))}{dx} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \phi_k^h(x) + \frac{\phi_n(x)}{x} \quad (4.3)$$

İspat (4.2) de x e göre kısmi türev alınarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [\phi_n^h(x)]' \frac{t^n}{n!} &= (e^t - 1)e^{x(e^t-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x(e^t - 1))^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} \\ &\quad + e^{x(e^t-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x(e^t - 1))^n (e^t - 1)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki ilk toplamda (4.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [\phi_n^h(x)]' \frac{t^n}{n!} &= (e^t - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} + e^{x(e^t-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x(e^t - 1))^{n-1} (e^t - 1)}{n!} \\ &= (e^t - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} - \frac{e^{x(e^t-1)}}{x(e^t - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x(e^t - 1))^n (e^t - 1)}{n!} \\ &= (e^t - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} - \frac{e^{x(e^t-1)}}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x(e^t - 1))^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. (2.9) gereği

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [\phi_n^h(x)]' \frac{t^n}{n!} &= (e^t - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} - \frac{e^{x(e^t-1)}}{x} (e^{-x(e^t-1)} - 1) \\ &= (e^t - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} - \frac{1}{x} + \frac{e^{x(e^t-1)}}{x} \end{aligned}$$

bulunur. (2.9) ve (2.11) kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [\phi_n^h(x)]' \frac{t^n}{n!} &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} \right] - \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(x)}{x} \frac{t^n}{n!} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} \right] - \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(x)}{x} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitliğin sağ tarafında Cauchy çarpımı yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\phi_n^h(x)]' \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!} \phi_k^h(x) \frac{t^k}{k!} \right] - \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(x)}{x} \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki ikinci toplamda $n = 0$ durumu ayrı yazılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\phi_n^h(x)]' \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^n}{(n-k)!} \frac{\phi_k^h(x)}{k!} \right] - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)}{x} \frac{t^n}{n!} + \frac{\phi_0(x)}{x}$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki k ya bağlı toplam $n!$ ile genişletilerek

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [\phi_n^h(x)]' \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^n}{(n-k)!} \frac{\phi_k^h(x)}{k!} \right] - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)}{x} \frac{t^n}{n!} + \frac{\phi_0(x)}{x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \phi_k^h(x) \right] \frac{t^n}{n!} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)}{x} \frac{t^n}{n!} + \frac{\phi_0(x)}{x} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin solundaki toplamda $\phi_0^h(x) = 0$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\phi_n^h(x)]' \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \phi_k^h(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)}{x} \right] \frac{t^n}{n!}$$

bağıntısında $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılarak $n \geq 1$ için istenen sonuca ulaşılır. $\square$

Teorem 4.2. $\forall n \geq 0$ için

$$\phi_{n+1}^h(x) = x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k^h(x) + \frac{1}{(n+1)} \left[\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_{n+1-k}(1) \phi_k(x) \right] \quad (4.4)$$

İspat (4.2) de t ye göre kısmi türev alınarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} &= x e^t e^{x(e^t-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x(e^t-1))^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} \\ &\quad + e^{x(e^t-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x(e^t-1))^n x e^t}{(n+1)!} \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Burada eşitliğin solundaki toplamı $n = 0$ dan ve eşitliğin sağındaki ikinci toplamı da $n = 1$ den başlatıp sağdaki ilk toplamda (4.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{n+1}^h(x) \frac{t^n}{n!} &= x e^t \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} + e^{x(e^t-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x(e^t-1))^{n-1} x e^t}{n!} \\ &= x e^t \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} - \frac{x e^t e^{x(e^t-1)}}{x(e^t-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x(e^t-1))^n}{n!} \\ &= x e^t \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} - \frac{e^t e^{x(e^t-1)}}{(e^t-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x(e^t-1))^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. (2.9) dan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_{n+1}^h(x) \frac{t^n}{n!} = x \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} \right] - \frac{e^t e^{x(e^t-1)}}{(e^t-1)} (e^{-x(e^t-1)} - 1)$$

olup Cauchy çarpımı kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_{n+1}^h(x) \frac{t^n}{n!} = x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \phi_k^h(x) \frac{t^k}{k!} \right] \right\} - \frac{e^t}{(e^t-1)} + \frac{e^t e^{x(e^t-1)}}{(e^t-1)}$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k^h(x) \right] \frac{t^n}{n!} + \frac{e^t}{(e^t - 1)} \left(e^{x(e^t - 1)} - 1 \right)$$

elde edilir. (2.11) gereği

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_{n+1}^h(x) \frac{t^n}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k^h(x) \right] \frac{t^n}{n!} + \frac{e^t}{(e^t - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Burada sağdaki toplamı t ile genişletip (2.12) kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{n+1}^h(x) \frac{t^n}{n!} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k^h(x) \right] \frac{t^n}{n!} + \frac{te^t}{(e^t - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \frac{t^{n-1}}{n!} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k^h(x) \right] \frac{t^n}{n!} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n(1) \frac{t^n}{n!} \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \frac{t^{n-1}}{n!} \right] \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k^h(x) \right] \frac{t^n}{n!} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n(1) \frac{t^n}{n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \phi_{n+1}(x) \frac{t^n}{(n+1)!} \right] \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sağında Cauchy çarpımı yapılarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{n+1}^h(x) \frac{t^n}{n!} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k^h(x) \right] \frac{t^n}{n!} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n B_{n-k}(1) \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \phi_{k+1}(x) \frac{t^k}{(k+1)!} \right] \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k^h(x) \right] \frac{t^n}{n!} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n B_{n-k}(1) \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \phi_{k+1}(x) \frac{t^k}{(k+1)!} \right] \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k^h(x) \right] \frac{t^n}{n!} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} B_{n-k}(1) \phi_{k+1}(x) \right] \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k^h(x) \right] \frac{t^n}{n!} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!(n+1)} \left[\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_{n+1-k}(1) \phi_k(x) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k^h(x) + \frac{1}{(n+1)} \left[\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_{n+1-k}(1) \phi_k(x) \right] \right\} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılarak istenen sonuca ulaşılır. $\square$

Teorem 4.3.

$$\phi_{n+1}^h(x) + \phi_n(x) - x \left[\frac{d[\phi_n^h(x)]}{dx} + \phi_n^h(x) \right] = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{B_{n+1-k}(1)\phi_k(x)}{n+1}$$

İspat (4.3) de eşitliğin sağındaki ilk toplama n -inci terim ekleyip çıkartılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d[\phi_n^h(x)]}{dx} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k^h(x) - \phi_n^h(x) + \frac{\phi_n(x)}{x} \\ x \frac{d[\phi_n^h(x)]}{dx} &= x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k^h(x) - x \phi_n^h(x) + \phi_n(x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. Burada toplam kısmının (4.4) deki eşiti kullanılarak

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}^h(x) - \frac{1}{(n+1)} \left[\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_{n+1-k}(1)\phi_k(x) \right] &= x \frac{d[\phi_n^h(x)]}{dx} + x \phi_n^h(x) - \phi_n(x) \\ \phi_{n+1}^h(x) + \phi_n(x) - x \left[\frac{d[\phi_n^h(x)]}{dx} + \phi_n^h(x) \right] &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{B_{n+1-k}(1)\phi_k(x)}{n+1} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $\square$

Sonuç 4.4.

$$\phi_{n+1}^h(x) - x \left[\frac{d[\phi_n^h(x)]}{dx} + \phi_n^h(x) \right] = -\phi_n(x) + \int_0^x \phi_n(t) dt$$

İspat (3.1) den yararlanılarak (4.4) şu şekilde ifade edilebilir:

$$\phi_{n+1}^h(x) = x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k^h(x) + \int_0^x \phi_n(t) dt.$$

Bu eşitlikteki toplam yerine (4.5) kullanılarak

$$\phi_{n+1}^h(x) - x \left[\frac{d[\phi_n^h(x)]}{dx} + \phi_n^h(x) \right] = -\phi_n(x) + \int_0^x \phi_n(t) dt \quad (4.6)$$

sonucuna ulaşılır. $\square$

Sonuç 4.5. Harmonik üstel polinomlar aşağıdaki ikinci dereceden diferansiyel denklemi sağlar:

$$xY_n'' + (1+x)Y_n' + Y_n - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} Y_k = c_n$$

Burada $Y_n = \phi_n^h(x)$ ve $c_n = 2\left(\frac{\phi_{n+1}(x)}{x} - \phi_n(x)\right)$ dir.

İspat (4.6) bağıntısının x e göre türevi alınırsa

$$\frac{d[\phi_{n+1}^h(x)]}{dx} + \frac{d[\phi_n(x)]}{dx} - \phi_n(x) = x \frac{d^2[\phi_n^h(x)]}{dx^2} + \frac{d[\phi_n^h(x)]}{dx} + x \frac{d[\phi_n^h(x)]}{dx} + \phi_n^h(x)$$

elde edilir. (2.4) ve (4.3) kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \phi_k^h(x) + \frac{\phi_{n+1}(x)}{x} + \frac{d[\phi_n(x)]}{dx} - \phi_n(x) &= x \frac{d^2[\phi_n^h(x)]}{dx^2} + (1+x) \frac{d[\phi_n^h(x)]}{dx} + \phi_n^h(x) \\ \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \phi_k^h(x) + 2 \frac{\phi_{n+1}(x)}{x} - 2\phi_n(x) &= x \frac{d^2[\phi_n^h(x)]}{dx^2} + (1+x) \frac{d[\phi_n^h(x)]}{dx} + \phi_n^h(x) \\ x \frac{d^2[\phi_n^h(x)]}{dx^2} + (1+x) \frac{d[\phi_n^h(x)]}{dx} + \phi_n^h(x) - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \phi_k^h(x) &= 2 \left(\frac{\phi_{n+1}(x)}{x} - \phi_n(x) \right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. $\square$

Teorem 4.6. *Harmonik üstel polinomlar üstel polinomların lineer kombinasyonu olarak yazılabilirler.*

$$\phi_n^h(x) = \phi_{n+1}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \left[\sum_{m=k}^n \binom{n}{m} \left\{ \begin{matrix} m \\ k+1 \end{matrix} \right\} \phi_{n-m}(x) \right]$$

İspat (4.2) ve (2.11) kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} &= e^{x(e^t-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x(e^t-1))^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x) \frac{t^k}{k!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x(e^t-1))^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. (2.10) gereği bu ifade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x) \frac{t^k}{k!} \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \left\{ \sum_{n=0}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ n+1 \end{matrix} \right\} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \right\} \right]$$

olarak yazılır. Burada $a_m = \sum_{n=0}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ n+1 \end{matrix} \right\} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)}$ olarak alıp Cauchy çarpımı uygulanarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x) \frac{t^k}{k!} \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{t^m}{m!} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^k a_m \frac{t^m}{m!} \phi_{k-m}(x) \frac{t^{k-m}}{(k-m)!} \right] \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafı $k!$ ile genişletilerek

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} a_m \phi_{k-m}(x) \frac{t^k}{k!} \right]$$

elde edilir. Sağdaki toplamda k yerine n yazılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a_m \phi_{n-m}(x) \right] \frac{t^n}{n!}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\frac{t^n}{n!}$ katsayı karşılaştırması yapılırsa

$$\phi_n^h(x) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left\{ \sum_{k=0}^m \binom{m}{k+1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right\} \phi_{n-m}(x)$$

$$\phi_n^h(x) = x \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \phi_{n-m}(x) + \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left\{ \sum_{k=1}^m \binom{m}{k+1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right\} \phi_{n-m}(x)$$

olur. İlk toplamda tersten sayılarak

$$\phi_n^h(x) = x \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \phi_m(x) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \left[\sum_{m=k}^n \binom{n}{m} \left\{ \binom{m}{k+1} \right\} \phi_{n-m}(x) \right]$$

elde edilir. Burada (2.3) deki eşitlik yardımıyla

$$\phi_n^h(x) = \phi_{n+1}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \left[\sum_{m=k}^n \binom{n}{m} \left\{ \binom{m}{k+1} \right\} \phi_{n-m}(x) \right]$$

sonucuna ulaşılır. □

Teorem 4.7.

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \phi_k(-x) \phi_{m-k+1}^h(x) = \int_0^x \phi_{m,1}(-y) dy$$

İspat (4.2) bağıntısı

$$e^{-x(e^t-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x(e^t-1))^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$$

şeklinde yazılabilir. (2.11) kullanılarak

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(-x) \frac{t^k}{k!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^h(x) \frac{t^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x(e^t-1))^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafında Cauchy çarpımı uygulanarak

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \phi_k(-x) \frac{t^k}{k!} \phi_{m-k}^h(x) \frac{t^{m-k}}{(m-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x(e^t - 1))^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$$

olur. Şimdi eşitliğin sol tarafını $m!$ ile genişletip sağındaki toplamda (2.10) kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \phi_k(-x) \phi_{m-k}^h(x) \right] \frac{t^m}{m!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \sum_{m=n+1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} m \\ n+1 \end{matrix} \right\} \frac{t^m}{m!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \sum_{m=n}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} \frac{t^m}{m!} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{n=1}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin solundaki toplamda $m = 0$ durumu toplamın sonucunu sıfır yaptığından $m = 1$ den başlatılırsa

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \phi_k(-x) \phi_{m-k}^h(x) \right] \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right] \frac{t^m}{m!}$$

olur. Burada $\frac{t^m}{m!}$ katsayı karşılaştırması yapılarak

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \phi_k(-x) \phi_{m-k}^h(x) = \sum_{n=1}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

bulunur. Bu eşitlikte m yerine $m + 1$ yazılarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \phi_k(-x) \phi_{m-k+1}^h(x) &= \sum_{n=1}^{m+1} \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \right\} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \\ &= \sum_{n=0}^m \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ n+1 \end{matrix} \right\} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

bulunur. (2.7) de x e göre integral alarak $\int_0^x \phi_{m,1}(-y) dy = \sum_{k=0}^m \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$

eşitliği yardımıyla

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \phi_k(-x) \phi_{m-k+1}^h(x) = \int_0^x \phi_{m,1}(-y) dy$$

bulunur. (2.7) den

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \phi_k(-x) \phi_{m-k+1}^h(x) = - \int_0^x \frac{\phi_{m+1}(-y)}{y} dy$$

sonucuna ulaşılır. □

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada harmonik üstel polinomların üreteç fonksiyonu kullanılarak yeni bağıntılara ulaşılmıştır. Harmonik üstel polinomların üstel polinomlar ve bu polinomların türevleri arasında yeni yineleme bağıntıları bulunmuştur. Harmonik üstel polinomlar ile üstel polinomların ve bu polinomların birinci ve ikinci dereceden türevleri arasında yeni bağıntılara ulaşılmıştır. Ayrıca harmonik üstel polinomların Bernoulli sayıları ile arasında yeni bir yineleme bağıntısı ve üstel polinomlar cinsinden integral temsili elde edilmiştir.

Bu çalışmadaki bulgular kullanılarak yeni çalışmalar yapılabilir.



6. KAYNAKLAR

- Apostol, T. M. 2008. A primer on Bernoulli numbers and polynomials. Mathematics Magazine, 81, 3, 13, Pasadena.
- Bell, E. T. 1934. Exponential polynomials, Annals of Mathematics, 35, 2, pp. 258–277.
- Berndt, B. C. 1985. Ramanujan’s Notebooks. Part I , Springer, New York, 368 s.
- Bona, M. 2005. Introduction to Enumerative Combinatorics. The McGraw Hill. Companies, Newyork, 526 s.
- Boyadzhiev, K. N. 2007. “Polyexponentials,” <http://www.arxiv.org/pdf/0710.1332> [Son erişim tarihi: 25.03.2024].
- Boyadzhiev, K. N. 2009. *Exponential Polynomials, Stirling numbers and evulation of some Gamma integrals*. 18 s.
- Boyadzhiev, K. N. 2018. Notes on the Binomial transform theory and table with appendix on Stirling transform. World Scientific Publishing Company, USA, 195 s.
- Broder, A. Z. 1984. *The r -Stirling numbers*. *Discrete Mathematics*, 49, 3, 241-259.
- Carlitz, L. 1962. Single variable Bell polynomials, *Collectanea Mathematica*, 14, pp. 13–25.
- Comtet, L. 1974. *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*. Reidel Publishing Company: Dordrecht-Holland, Boston, 343 s.
- Dil, A. and Kurt, V. 2011. Investigating Geometric and Exponential Polynomials with Euler-Seidel Matrices. *Journal of Integer Sequences*, vol. 14, 12s.
- Dil, A. and Kurt, V. 2012. Polynomials Related to Harmonic Numbers and Evaluation of Harmonic Number Series I. *Integers, The Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 12, A38 , 18 s.

- Dobinski, G. 1877. "Summerung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, für $x = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$," Archiv der Mathematik und Physik, vol. 61, pp. 333–336.
- Gould, H. W. 1972. Combinatorial Identities. Morgantown Printing and Binding Company, Morgantown, 22 s.
- Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O. 1994. Concrete Mathematics, A Foundation for Computer Science. 2nd ed. Addison-Wesley Publishing Company: Reading, Massachusetts, 678 s.
- Grunert, J. A. 1843. Über die Summerung der Reihen..., J. Reine Angew. Math., 25, pp. 240–279.
- Hansen, E. R. 1975. A Table of Series and Products. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. 523 s.
- Knuth, D. E. 1993. Johann Faulhaber and sums of powers. Math. Comput. 61(203): 277–294.
- Ligowski, W. 1878. "Zur summerung der Reihe...", Archiv der Mathematik und Physik, Hindawi Limited, 62, pp. 334–335.
- Mező, I. 2011. The r-Bell Numbers. Journal of Integer Sequences, 14, 1, Hungary, 14 s.
- Quaintance, J. and Gould, H. W. 2016. Combinatorial Identities for Stirling Numbers: The Unpublished Notes of H. W. Gould. World Scientific. Publishing Company, London, 260 s.
- Touchard, J. 1933. Propriétés arithmétiques de certains nombres récurrents, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles A, 53, pp. 21–31.
- Wilf, H. S. 1994. Generating functionology, 3rd. ed. A K Peters Ltd, Wellesley, Massachusetts, 245 s.
- Zhao, Y. Q. 2003. A uniform asymptotic expansion of the single variable Bell polynomials, Journal of Computational and Applied Mathematics, 150, 2, pp. 329–355.

ÖZGEÇMİŞ

Havva KOÇAK

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2021- 2024	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2013-2017	Fen Fakültesi, Antalya