



**HATTAF KESİRLİ DİFERENSİYEL
DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rabia SOLAK

Danışman
Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos 2024

Bu tez çalışması 22.FEN.BİL.44 numaralı proje Afyon Kocatepe Üniversitesi
Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**HATTAF KESİRLİ DİFERENSİYEL
DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ**

Rabia SOLAK

**Danışman
Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos 2024

TEZ ONAY SAYFASI

Rabia SOLAK tarafından hazırlanan “ Hattaf Kesirli Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümleri ” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 09/08/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK

Başkan : Prof. Dr. Deniz UÇAR
Uşak Üniv., Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fak.

Üye : Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak.

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Tuğba YALÇIN UZUN
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Bekir YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

09/08/2024

.....

Rabia Solak

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HATTAF KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Rabia SOLAK

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmından oluşmaktadır dolayısıyla kesirli diferansiyel denklem sistemleri üzerine ve bu konuda yapılan çalışmalar sunulmuştur. İkinci bölümde temel kavramlar ve teoremler yazılmış olup Caputo-Fabrizio kesirli türevi, Riemann-Liouville kesirli türevi, Atangana Baleanu kesirli türevlerinin ve kesirli integrallerinin tanımları verilmiştir. Üçüncü bölümde tezimizle alakalı olan lineer denklem sistemlerinin tanımı ve tarihçesi verilmiştir. Dördüncü bölümde ise tekil olmayan çekirdeğe sahip yeni genelleştirmiş Hattaf kesirli türev tanımını ve özel halleri verilmiştir. Beşinci bölümde ise tezimizin ana konusu olan Caputo-Fabrizio kesirli türevinin lineer denklem sistemlerinin çözümlerinden faydalanarak Hattaf kesirli türevinin lineer denklem sistemi ve çözümleri elde edilmiştir. Bu bölümde sunulan teoremler kullanılarak sağlanılan doğrusal denklem sistemi çalışmanın temelini oluşturmuştur. Son bölüm yani altıncı bölümde çalışma boyunca faydalandığım literatürdeki kaynaklar listeli halde gösterilmiştir.

2024, v + 25 sayfa

Anahtar Kelimeler : Hattaf Kesirli Türevi, Lineer Denklem Sistemleri.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOLUTIONS OF HATTAF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS

Rabia SOLAK

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK

This thesis study consists of six chapters.

The first part consists of the introduction, so the fractional differential equation systems and studies on this subject are presented. In the second part, basic concepts and theorems have been written, Caputo-Fabrizio fractional derivative, Riemann-Liouville fractional derivative, Atangana Baleanu fractional derivatives and fractional integrals definitions are given. In the third chapter, the definition and history of linear equation systems related to our thesis are given. In the fourth chapter, the new generalized Hattaf fractional derivative definition with a non-singular kernel and its special cases are given. In the fifth chapter, we examine the Caputo-Fabrizio fractional derivative, which is the main subject of our thesis. By using the solutions of linear equation systems, the linear equation system and solutions of Hattaf fractional derivative were obtained. Lemmas presented in this section The system of linear equations obtained using it formed the basis of the study. In the last section, the sixth section, the sources in the literature used during the study are listed. In the last section, the sixth section, the sources in the literature that I used throughout the study are listed.

2024, v + 25 pages

Keywords : Hattaf Fractional Derivative, Linear Equation Systems.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam için konu belirlenmesi, çalışmalarımın yönlendirilmesi ve tezimin yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı danışman hocam Sayın Prof. Dr. SERMİN ÖZTÜRK'e, araştırma ve yazım süresince yardımlarını ve desteğini hiç esirgemeyen bölüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim-Öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan ve her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca, hayatım boyunca her konuda maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Rabia SOLAK
Afyonkarahisar 2024

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	IV
SİMGELER DİZİNİ	V
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	4
2.1 Gamma Fonksiyonu	4
2.2 Beta Fonksiyonu	5
2.3 Bir Parametrelili Ve İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu	5
2.4 Riemann-Liouville Kesirli Türevi	6
2.5 Caputo Kesirli Türevi	6
2.6 Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi	7
2.7 Atangana-Baleanu Kesirli Türevi	9
2.8 Ağırlıklı Atangana-Baleanu Kesirli Türevi	11
3 LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ	12
4 HATTAF KESİRLİ TÜREVİ	14
5 GENELLEŞTİRİLMİŞ HATTAF KESİRLİ TÜREVİNİN LİNEER DENK- LEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ	18
6 KAYNAKLAR	23
ÖZGEÇMİŞ	24

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümesi
I	$\mathbb{R}$ ' de bir aralık
$\mathbb{R}_+$	Pozitif gerçel sayılar kümesi
f'	f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
f''	f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
$D^\alpha f(x)$	Riemann-Liouville Kesirli Türevi
E_α	α mertebeli Mittag-Leffler Türevi
$E_{\alpha,\beta}$	İki Parametrelili Mittag-Leffler Türevi
${}^C D^\alpha f(x)$	Caputo Kesirli Türevi
${}^{C-F} D^\alpha f(x)$	Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi
${}^{ABR} D^\alpha f(x)$	Riemann-Liouville Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevi
${}^{ABC} D^\alpha f(x)$	Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevi
${}^H D^\alpha f(x)$	Genelleştirilmiş Hattaf Kesirli Türevi

1. GİRİŞ

Kesirli türev ve integral, klasik türev ve integral kavramlarının genellemeleridir. Kesirli türev ve integral tanımları, tamsayı türev ve integral tanımları kadar eskidir ve kesirli hesap teriminden ilk defa 1695 yılında söz edilmiştir (Miller 1993). Uzun süre bu konuyla yalnızca teorik matematikçiler ilgilense de, son zamanlarda araştırma bulmak mümkündür. Uygulamalı matematikçiler ve çeşitli alanlardan araştırmacılar tarafından bu konuyla ilgili çalışmalar yapılmıştır. Kesirli türev ile klasik analiz arasındaki temel fark, klasik analizde olduğu gibi tek tip bir tanımın bulunmamasıdır. Bunlardan bazıları Riemann-Liouville (1855), Caputo (1967), Grünwald-Letnikov (1976), Caputo-Fabrizio (2015), Atangana-Baleanu (2016) kesirli türevleridir. Tanımlar arasında geçişler olsa da tanımlarda ve tanımların fiziksel yorumlarında farklılık göstermektedir.

Kesirli hesap, teori ve uygulamalarda sağlam ve giderek büyüyen bir çalışma yapısı olduğundan son yıllarda birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir. Kesirli büyümenin önemi sadece temel ve uygulamalı matematikte değil aynı zamanda fizik, kimya, mühendislik, biyoloji ve diğer alanlarda da fark edilir. Kesirli integrallerin ve kesirli türevlerin tanımları, kesirli hesabın başladığı 1695'ten bu yana çok sayıda olmuştur ve zamanla yeni türevler ve kesirli integraller ortaya çıkmıştır. Bu kesirli türevler ve integraller farklı çekirdeklere sahiptir. Bu da tanım sayısını artırıyor.

Evrendeki fiziksel ve biyolojik unsurları izah etmenin en mantıklı yolu "diferansiyel denklemler" kavramını kullanmaktır. Diferansiyel denklem, bir veya daha fazla fonksiyonu ve bunların türevlerini içeren matematiksel bir denklemdir.

$n \in \mathbb{N}$ ve $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. Öyle ise

$$\mathbb{D}^n x(t) = f(t, x(t))$$

ifadesine n.mertebeden adi diferansiyel denklem adı verilir (Hartman 2002). Bu denklem eşitliği ile birlikte

$$\mathbb{D}^k x(t_0) = x_0^{(k)}, T = 0, 1, \dots, n-1,$$

başlangıç koşulları verildikten sonra verilen iki denklem başlangıç değer problemleri olarak tanımlanır. Eğer birinci denklemde $n \in R$ veya $n \in C$ varsa, yani bağımsız değişken x 'in bağımsız değişken t 'ye göre kesirli türevlerini içeriyorsa, o zaman ilk denkleme kesirli diferansiyel denklem denir.

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde anlatılmaktadır. $y^{(n)}$ ifadesi, y 'nin x 'e göre n .türevini göstermektedir.

Tanım 1.0.1 x_t 'ler değişkenler ($t = 1, 2, \dots, n$), ve $a_t, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \dots + m_{1n}x_n = b_1$$

$$m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + \dots + m_{2n}x_n = b_2$$

$\vdots$

$$m_{t1}x_1 + m_{t2}x_2 + \dots + a_{tn}x_n = b_t$$

biçimindeki ifade edilen denklemlere lineer denklem sistemi denir (Boelkins vd. 2009).

Kesirli sistemler, yani keyfi dereceden integro-diferansiyel denklemlerle ifade edilen denklemler, son yıllarda sistem teorisinde sıkça duymaya başladığımız konulardan birisidir. Matematiksel arka planın daha iyi anlaşılması, kesirli dereceli sistemlerle ilgili çalışmaların artmasına yol açmıştır. Özellikle son on yılda, kesirli türev, kontrol teorisi dahil olmak üzere birçok alanda kendisini dahil etmiştir. Genel olarak, kesirli diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini bazı analitik yöntemlerle çözmek zordur bu sebepten bir çok bilim insanı için merak konusu olmuştur ve bu sayede çok fazla çalışmalar yapılmıştır.

Wei vd. (2019), bilinmeyen başlangıç koşulları olan gürültülü bir ortamda bir kesirli lineer sistem sınıfı için sözde durumun kesirli integralini ve türevini tahmin etmek için asimptotik olmayan ve sağlam bir yöntem önermektedir. Losada ve Nieto (2021) Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu türevlerinin özel durumlarını incelediler. Shuo Wang ve arkadaşları 2022 yılında bizimde tezimize katkı sağladığı Caputo-Fabrizio kesirli türevinin kesir dereceli lineer sisteminin analitik çözümlerini

klasik çözümle karşılaştırdılar (Wang vd. 2022).

Sistem şu şekildedir (Wang vd. 2022):

$${}^C D_t^\alpha X(t) = AX(t) \quad (1.1)$$

burada $0 < \alpha < 1$, $X(t) = [x(t), y(t)]'$ ve $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Tanımlanan kesirli türev ise Caputo-Fabrizio kesirli türevidir.

$${}^C D_t^\alpha x(t) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_0^t \exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)\right] x'(s) ds \quad (1.2)$$

Kesirli dereceli lineer sistemi $\det(A) \neq 0$ varsayımı altında ele alınıyor. Lineer cebirin teorik bilgisine göre, eğer A tekil olmayan bir matris ise, o zaman $B = T^{-1}AT$ ve $X(t) = T\tilde{X}(t)$ şeklinde tekil olmayan bir T matrisi vardır. Burada B bir jordandır, ve $\tilde{X}(t) = [u(t), \nu(t)]'$ dır. A'nın karşılık gelen polinomu

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - p\lambda + q$$

ile $p = a_{11} + a_{22}$ ve $q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ sıfırları olan $\lambda = \frac{1}{2}(p - \sqrt{p^2 - 4q})$ ve $\mu = \frac{1}{2}(p + \sqrt{p^2 - 4q})$.

Böylece sistem şu hale gelecektir.

$$D_t^\alpha \tilde{X}(t) = T^{-1}AT\tilde{X}(t) = B\tilde{X}(t), \quad (1.3)$$

Burada B, aşağıdaki normal formlardan birisidir:

$L(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\mathcal{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\mathcal{R}(\nu, \gamma) = \begin{pmatrix} \nu & \gamma \\ -\gamma & \nu \end{pmatrix}$ burada λ, μ, ν , ve γ , $\mu \neq 0$ ve $\gamma > 0$ gerçekte sayılardır. $\lambda = \mu \neq 0$ ise, $\mathcal{L}(\lambda, \mu)$ 'nin özel bir durumu olacaktır. Ve bu nedenle durumları tek tek ele almamız gerekiyor.

Eğer $A = \mathcal{L}(\lambda, \mu)$ ise sistem şu şekilde olacaktır.

$$D_t^\alpha x(t) = \lambda x(t) \quad (1.4)$$

$$D_t^\alpha y(t) = \mu y(t) \quad (1.5)$$

$\alpha = 1$ için sistem aşağıdaki gibi klasik lineer sisteme geri döndüğünü gözlemleriz.

$$x'(t) = \lambda x(t) \quad (1.6)$$

$$y'(t) = \mu y(t) \quad (1.7)$$

$x(t) = c_1 e^{\lambda t}$, $y(t) = c_2 e^{\mu t}$ çözümlerine sahiptir.

Fiziksel olayları tanımlayan diferansiyel denklemlerin sırası, ilgili fiziksel olayın değişim hızını belirler. Böylece kesirli türev, tamsayı diferansiyel denklemlerin bazı fiziksel olayları açıklamadaki eksikliklerini telafi etmekle kalmaz, aynı zamanda fiziksel olayların doğasının anlaşılmasında da önemli bir rol oynar.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölüm tezde yer alan önemli tanım, teorem ve teoremlerin ispatından oluşmaktadır.

2.1 Gamma Fonksiyonu

Tanım 2.1.1 Gamma fonksiyonu kesirli hesabın önemli işlevlerinden biridir. Bu fonksiyon, pozitif tanımlı n için Euler integrali ile ifade edilir.

$n > 0$ alınır ;

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

olarak tanımlanır (Podlubny 1999). Aynı zamanda n 'nin pozitif değerleri için, $\Gamma(n)$ fonksiyonunun yakınsadığı değeri incelersek $n!$ 'a yakınsadığı görülmektedir.

$n=1$ için,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^0 e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} (1 - e^{-T}) = 1$$

elde edilir.

n yerine $n+1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x^n e^{-x} dx \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ (x^n)(e^{-x}) \Big|_0^T - \int_0^{\infty} (-e^{-x})(nx^{n-1}) dx \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ (-T^n)(e^{-T}) + n \int_0^T (x^{n-1})(e^{-x}) dx \right\} = n\Gamma(n) \end{aligned}$$

elde edilir. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $n = 1, 2, \dots$ için değerler verilirse;

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1 + 1) = 1\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2 + 1) = 2\Gamma(2) = 2!$$

$$\dots = \dots = \dots$$

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

verilen gamma fonksiyonunun $n!$ 'e yakınsadığı gösterilmiş olup, bu sebeple Gamma fonksiyonuna genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak ifade edilmektedir.

2.2 Beta Fonksiyonu

Euler'in ikinci integrali olarak söz edilen Beta fonksiyonu için x ve y pozitif tanımlı olmak üzere, $\mathbb{R}(a), \mathbb{R}(b) > 0$

$$\beta(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

olarak ifade edilir (Podlubny 1999). Herhangi pozitif olmayan a ya da b değerleri için bu integral ıraksaktır.

Gamma fonksiyonu ve Beta fonksiyonu arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

$$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

2.3 Bir Parametrelili Ve İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonunun kesirli analizde oldukça yararlı olduğu zaten biliniyor. Ayrıca, Pskhu tarafından önerilenler gibi diğer bazı kesirli diferansiyel integrallerin tanımlarının önemli bir parçası olmuştur (Pskhu 2004).

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0$$

olarak tanımlanan E_α fonksiyonuna (seri yakınsak olduğunda) α mertebeli bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu denir (Povstenko 2015).

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0$$

ile tanımlanan $E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonuna (seri yakınsak olduğunda) α ve β parametreleri ile birlikte iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu denir.

2.4 Riemann-Liouville Kesirli Türevi

Riemann-Liouville kesirli türev tanımı, kesirli türev ve integral teoremlerinin gelişmesinde ve bunların matematik ve bazı mühendislik uygulamalarında önemli bir rol oynar.

Tanım 2.4.1 $[a, b]$, $(-\infty < a < b < \infty)$ $\mathbb{R}$ reel ekseninde sonlu bir aralık olsun. $a > 0$ olan $x \in [n - 1, n)$ olmak üzere α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali şu şekile tanımlanır (Samko 2015).

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, x > a$$

Tanım 2.4.2 $I = (a, b)$ aralığında $f(x) \in AC^n$ ve $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. f fonksiyonu α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi şu şekilde verilir.

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n I^{n-\alpha} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \end{aligned}$$

2.5 Caputo Kesirli Türevi

Tanım 2.5.1 Pozitif gerçel sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonu $\alpha \in (n - 1, n]$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere f fonksiyonunun α mertebeden Caputo kesirli türevi şöyle tanımlanır (Samko 2015, Losada vd. 2015).

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau$$

Caputo kesirli türevi çeşitli modellemelerde çok fazla pratiğe sahip olmasına rağmen bazen kullanışlı değildir. Dezavantajlarından bahsedecek olursak, birincisi Caputo operatörünün tekil olmayan tipte çekirdek fonksiyonuna sahip olmasıdır. Diğeri ise Caputo kesirli türevinin çekirdek fonksiyonu kuvvet fonksiyonu biçiminde olduğundan bu operatör üstel tipteki modellemede fayda sağlamamıştır.

Bu yukarıda verilen eksiklikler dikkate alınarak singüler olmayan çekirdek fonksiyonuna sahip olan Caputo-Fabrizio kesirli türevi 2015 yılında literatüre kazandırılmıştır.

2.6 Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi

Caputo-Fabrizio kesirli türevi şu şekildedir (Caputo vd. 2015).

Tanım 2.6.1 $0 < \alpha < 1$, $a \in [-\infty, t)$ ve $b > a$ için $f \in H^1(a, b)$ (şeklinde 1-boyutlu Sobolev uzayı) olmak üzere

$${}^{C-F}D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\tau) \exp \left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha} \right] d\tau \quad (2.1)$$

Burada $M(0) = M(1) = 1$ olmak üzere $M(\alpha)$ normalleştirme fonksiyonudur.

Yukarıdaki tanımda $\sigma = \frac{1-\alpha}{\alpha} \in [0, \infty]$, $\alpha = \frac{1}{1+\sigma} \in [0, 1]$ alınırsa Caputo-Fabrizio kesirli türevi

$${}^{C-F}D_t^\sigma f(t) = \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(\tau) \exp \left[-\frac{(t-\tau)}{\sigma} \right] d\tau \quad (2.2)$$

şeklini alır.

Burada $\sigma \in [0, \infty]$ ve $N(\sigma)$, $N(0) = N(\infty) = 1$ olacak şekilde $M(\alpha)$ 'a karşılık gelen terimdir.

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \exp \left[-\frac{(t-\tau)}{\sigma} \right] = \delta(t-\tau) \quad (2.3)$$

$\alpha = 1$ için $\sigma = 0$ olur.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} D_t^{(\alpha)} f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\tau) \exp \left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha} \right] d\tau \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(\tau) \exp \left[-\frac{(t-\tau)}{\sigma} \right] d\tau = f'(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\alpha = 0$ için $\sigma = +\infty$ olur.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} D_t^{(\alpha)} f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\tau) \exp \left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha} \right] d\tau \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(\tau) \exp \left[-\frac{(t-\tau)}{\sigma} \right] d\tau = f(t) - f(a) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Tanım 2.6.2 $n \geq 1$ is $\alpha \in [0, 1]$ ise $(n+\alpha)$ mertebesindeki $D_t^{(\alpha+n)} f(t)$ kesirli türevi şu şekilde tanımlanır.

$${}^{C-F}D_t^{(\alpha+n)} f(t) := {}^{C-F}D_t^{(\alpha)} \left[D_t^{(n)} f(t) \right] \quad (2.6)$$

Teorem 2.6.3 Caputo-Fabrizio türevinde f fonksiyonu için $f^{(t)}(a) = 0$, $t = 1, 2, \dots, k$ olduğunda semi-grup özelliği sağlanır. O halde

$${}^{C-F}D_t^{(n)} \left[D_t^{(\alpha)} f(t) \right] = D_t^{(\alpha)} \left[D_t^{(n)} f(t) \right] \quad (2.7)$$

Caputo-Fabrizio kesirli türevinin Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{ {}^{C-F}D^\alpha f(t) \} &= \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] f'(\tau) d\tau \right\} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \mathcal{L}\left\{ \int_0^t \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] f'(\tau) d\tau \right\}\end{aligned}$$

konvolüsyon özelliğinden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f * g\} &= \mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \right\} \\ \mathcal{L}\{f * g\} &= \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\} = F(s) \cdot G(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{ {}^{C-F}D_t^\alpha f(t) \} &= \frac{1}{(1-\alpha)} \mathcal{L}\left\{ f'(\tau) * \exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau\right] \right\} \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)} \mathcal{L}\{f'(\tau)\} \mathcal{L}\left\{ \exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau\right] \right\} \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)} \left[\frac{1}{s + \frac{\alpha}{1-\alpha}} s \mathcal{L}\{f(\tau) - f(0)\} \right] \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)} \left[\frac{1-\alpha}{s(1-\alpha) + \alpha} (sF(s) - f(0)) \right] \\ &= \frac{sF(s) - f(0)}{s + \alpha(1-s)}\end{aligned}$$

Benzer bir şekilde,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{ {}^{C-F}D_t^{(\alpha+1)} f(t) \} &= \frac{1}{(1-\alpha)} \mathcal{L}\{f''(t)\} \mathcal{L}\left\{ \exp\left[-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right] \right\} \\ &= \frac{[s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)]}{s + \alpha(1-s)}\end{aligned}$$

Sonunda,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[{}^{C-F}D_t^{(\alpha+n)} f(t) \right] &= \frac{1}{1-\alpha} \mathcal{L}\{f^{(n+1)}(t)\} \mathcal{L}\left\{ \exp\left[-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right] \right\} \\ &= \frac{s^{n+1} \mathcal{L}\{f(t)\} - s^n f(0) - s^{n-1} f'(0) \dots - f^{(n)}(0)}{s + \alpha(1-s)}\end{aligned}$$

Laplace dönüşümünü Caputo-Fabrizio kesirli integralini elde etmek için kullanabiliriz. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere.

$${}^{C-F}D^\alpha f(t) = u(t), t \geq 0 \quad (2.8)$$

Kesirli diferansiyel denklemini ele alalım

Laplace dönüşümünü kullanarak

$$\mathcal{L} \{ {}^{C-F}D^\alpha f(t) \} (s) = \mathcal{L} \{ u(t) \} (s), s > 0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{M(\alpha)}{(s + \alpha(1 - s))} (sF(s) - f(0)) &= \mathcal{L} \{ u(t) \} (s), s > 0 \\ \mathcal{L} \{ f(t) \} (s) &= \frac{1}{s}f(0) + \frac{\alpha}{sM(\alpha)}\mathcal{L} \{ u(t) \} (s) + \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)}\mathcal{L} \{ u(t) \} (s) \end{aligned}$$

Ters laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$f(t) = \frac{(1 - \alpha)}{M(\alpha)}u(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t u(\tau) d\tau + f(0) \quad (2.9)$$

elde edilir.

$$f(t) = \frac{(1 - \alpha)}{M(\alpha)}u(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t u(\tau) d\tau + c, t \geq 0, c \in \mathbb{R}$$

(2.8) denkleminin çözümüdür. Buradan, Caputo-Fabrizio kesirli integrali tanımlanmıştır.

Tanım 2.6.4 $0 < \alpha < 1$ olsun, bu f fonksiyonun α mertebesinin kesirli integrali şu şekilde tanımlanır.

$$I^\alpha f(t) = \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t f(\tau) d\tau, t \geq 0$$

2.7 Atangana-Baleanu Kesirli Türevi

Atangana ve Baleanu 2016 yılında Caputo-Fabrizio kesirli türevindeki çekirdek fonksiyonunun Mittag-Leffler fonksiyonu ile yer değiştirilmesiyle oluşmuştur.

Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türevlerine ilişkili olarak Atangana-Baleanu kesirli türevi ve integrali günümüzde matematiksel modelleme konusunda önemli bir etkisi olmuştur (Atangana vd. 2016).

Tanım 2.7.1 (Riemann-Liouville anlamında Atangana-Baleanu Türevi)

$f \in H^1(a, b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere RL anlamında Atangana-Baleanu türevi

$${}^{ABR}D_t^\alpha (f(t)) = \frac{B(\alpha)}{1 - \alpha} \frac{d}{dt} \int_b^t f'(x) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t - x)^\alpha}{1 - \alpha} \right] dx$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.7.2 $f \in H^1(a, b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olsun. O halde Caputo türevi anlamında Atangana-Baleanu yeni kesirli operatörü

$${}^{ABC}D_t^\alpha(f(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(x) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] dx$$

olarak tanımlanır.

Burada

$$E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

Mittag-Leffler fonksiyonu ve $B(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ dır.

Genellikle basitçe 1 olarak alınan bu çarpan fonksiyonunun getirilmesinin nedeni, örneğin bazı modelleme problemlerinde, farklılaşma mertebesi α üzerinden integral almak istenmesidir. Bazı α değerlerinin diğerlerinden daha fazla katkıda bulunmasını isteyebiliriz ve bu nedenle α 'nın farklı değerlerini ağırlıklandırmak için kendimize alan bırakmış oluruz.

Riemann Liouville türevine bağlı Atangana-Baleanu kesirli türevi, Caputo türevine bağlı Atangana-Baleanu kesirli türevi $\alpha \rightarrow 0$ da ki türevi hesaplandığında fonksiyonun kendisi elde edilemediği için ele alınmıştır.

Teorem 2.7.3 $f \in H^1(a, b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olsun. İki türev arasındaki bağlantı

$${}_0^{ABC}D_t^\alpha(f(t)) = {}_0^{ABR}D_t^\alpha(f(t)) - \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} f(0) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right]$$

bağıntısı ile açıklanır.

$f, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n . mertebeden diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise

$f^{(f)}(0)$ $k = (1, 2, 3, \dots, n)$ koşulları altında

$${}_0^{ABC}D_t^\alpha \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{d^n}{dt^n} ({}_0^{ABR}D_t^\alpha(f(t)))$$

bağıntısı geçerlidir.

Tanım 2.7.4 Atangana-Baleanu İntegrali

$${}_0^{ABC}I_t^\alpha f(t) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(y)(t-y)^{1-\alpha} dy$$

$\alpha = 0$ olduğunda başlangıç fonksiyonu, $\alpha = 1$ olduğunda klasik integral elde edilir.

2.8 Ağırlıklı Atangana–Baleanu Kesirli Türevi

Tanım 2.8.1 $0 < \alpha < 1$ için, $f(t) \in W^1(0, T]$ fonksiyonunun Caputo anlamda ağırlıklı Atangana–Baleanu kesirli türevi $\omega(t)$ ağırlık fonksiyonuna göre şu şekilde tanımlanır (Al-Refai 2020).

$$({}^C D_\omega^\alpha f)(t) = \frac{M(\alpha)}{1 - \alpha} \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t E_\alpha[-\mu_\alpha(t-s)^\alpha] \frac{d}{ds}(\omega f)(s), t > 0.$$

Burada $[0, T]$ üzerinde $\omega \in C^1[0, T]$, $\omega, \omega' M(\alpha) M(0) = M(1) = 1$ 'i sağlayan bir normalleştirme fonksiyonudur, $E_\alpha(t)$ Mittag-Leffler fonksiyonu olarak bilinir, $W^1(0, T]$, $f \in C^1(0, T]$ fonksiyonlarının uzayını gösterir ve

$$\mu_\alpha = \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

Yukarıdaki integral-diferansiyel operatör şu şekilde yazılabilir:

$$({}^C D_\omega^\alpha f)(t) = \frac{M(\alpha)}{1 - \alpha} \frac{1}{\omega(t)} \left(E_\alpha[-\mu_\alpha t^\alpha] \frac{d}{dt}(\omega f)(t) \right), t > 0.$$

Tanım 2.8.2 $0 < \alpha < 1$ için, ω ağırlık fonksiyonuna göre $f \in L^1(0, t)$ 'nin α mertebesindeki ağırlıklı Atangana–Baleanu kesirli integrali şu şekilde tanımlanır:

$$({}^C I_\omega^\alpha f)(t) = \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \omega(s) f(s) ds.$$

Uyarı 2.8.3 $\omega(t) = 1$ için, ağırlıklı Atangana–Baleanu kesirli integrali, düzenli Atangana–Baleanu kesirli integraliyle çıkarır;

3. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

Doğrusal denklem sistemleri yalnızca doğrusal cebirde temel bir kavram olmayıp, aynı zamanda matematiğin birçok alt alanında da geniş bir uygulama alanına sahiptir. Ek olarak, iki veya üç bilinmeyenli doğrusal denklemleri çözmek, lise cebiri ve üniversite matematiğinin ayrılmaz bir parçasıdır.

Lineer denklem sistemlerinin incelenmesi ilk kez Babilliler tarafından M.Ö. 1800 yıllarında ortaya atılmıştır. Gerolamo Cardano 1545’ te üçüncü dereceden denklemlerin “Cardano Çözümü” nü gösteren, cebir alanında ilk Latince eseri “Ars Magna” yı sunmuştur. Kitabında dördüncü dereceden denklemlerinde çözümü bulunan Cardano uzun keşifler sonucunda bu denklemlerin çözümünün öğrencisi Lodovico Ferrari’ye ait olduğu ortaya çıkmıştır. Bu kitapta Cardano ve Tartaglia ilk olarak karmaşık sayılar olarak bilinen sayıları kullanmıştır (Aydın 2017). Analizin ilk önemli isimlerinden biri olan Leibnitz ise, 1693 yılında determinantları kullanmıştır. Lineer denklem sistemleri ile ilgili çalışmaların Leibnitz ile hayata geçirildiği söylenebilir. 1750 yıllarında "Introduction to the Analysis of Algebraic Curves" kitabını yazan Cramer günümüzde "Cramer Methodu" olarak bildiğimiz $n \times n$ lineer denklem sisteminin çözümü için bir kural sunmuştur. Fakat bu tanımı kanıtlayamamıştır. Cramer, geometrik bir problemi bir çözmek için çabalarken $(1/2)n^2 + (3/2)n$ sabit noktalarından geçen 2. dereceden bir cebirsel eğriyi bularak, lineer denklem sistemlerinin çalışmasına öncü olmuştur.

Lagrange M.S. 1750 civarında gerçek fonksiyonların optimizasyon problemleri üzerine yaptığı çalışmada matrisleri kullanmıştır.

Antik Çin’de M.Ö.’de doğrusal denklem sisteminin çözümünde farklı yollar kullanılmaktaydı (Shen vd. 1999). Bu çözüm yöntemleri birbirinden tamamen farklı değildi ve bazıları yalnızca aynı sayıda bilinmeyene sahip iki veya üç denklem için kullanılabiliyordu. Ayrıca eski Çinliler, tek ve birden fazla çözüm için sayı denklemleri ile bilinmeyenlerin sayısı arasında bazı korelasyonlar kurmuşlardı. Yazarlara göre eski ders kitaplarında çok sayıda örnek, uygulama problemi ve çözümleri bulunmaktadır.

Tanım 3.0.1 $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R} (n \geq 1)$ ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyenler olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (3.1)$$

ifadesine n bilinmeyenli lineer (doğrusal) bir denklem denir.

Tanım 3.0.2 $x_1, x_2, \dots, x_n (n \geq 2)$ ler bilinmeyenler ve $a_{ij} \in \mathbb{R}$ gerçel skalerler olmak üzere

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

şeklinde bir sisteme n -bilinmeyenli m tane denklemden oluşan lineer denklem sistemi denir. Bu lineer denklem sistem kısaca

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, 1 \leq i \leq m \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilir (Boelkins vd. 2009). Eğer b_i değeri sıfırdan farklı ise sisteme homojen; en az bir b_i değeri sıfırdan farklı ise sisteme homojen olmayan lineer denklem sistemi adı verilir.

Tanım 3.0.3 Bir lineer denklem sistemini sağlayan $x_1, x_2, \dots, x_n$ sayıları bulunmıyorsa bu denklem sistemine tutarsız denklem sistemi denir. Aksi durumda, yani en az birer tane $x_1, x_2, \dots, x_n$ sayıları bulunabiliyorsa bu denklem sistemine tutarlı denklem sistemi denir.

4. HATTAF KESİRLİ TÜREVİ

Bu bölümde ilk olarak tekil olmayan çekirdeğe sahip yeni genelleştirilmiş Hattaf kesirli türev tanımını ve özel hallerini hatırlayacağız (Hattaf 2020).

Tanım 4.0.1 $H^1(a, b)$, aşağıdaki gibi tanımlanan birinci dereceden Sobolev uzayı olsun:

$$H^1(a, b) = \{u \in L^2(a, b) : u' \in L^2(a, b)\}.$$

$\alpha \in [0, 1)$, $\beta, \gamma > 0$ ve $f \in H^1(a, b)$

$\omega(t)$ ağırlık fonksiyonu olan $f(t)$ fonksiyonunun Caputo anlamında α mertebesinin yeni genelleştirilmiş kesirli türevi aşağıdaki gibidir.

$${}^H D_{a,t,\omega}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) = \frac{N(\alpha)}{1-\alpha} \frac{1}{\omega(t)} \int_a^t E_\beta[-\mu_\alpha(t-x)^\gamma] \frac{d}{dx}(\omega f)(x) dx$$

burada $\omega \in C'(a, b)$, $\omega, \omega' > 0$,

$N(\alpha)$ $N(0) = N(1) = 1$ 'e uyan normalleştirme fonksiyonudur.

$\mu_\alpha = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ ve $E_\beta(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\beta k + 1)}$ β parametresinin Mittag-Leffler fonksiyonudur.

Yukarıda verdiğimiz tanımın literatürdeki birçok özel durumu içerdiğine dikkat edelim.

- $\omega(t) = 1$, $\beta = \gamma = 1$, tarafından verilen Caputo-Fabrizio kesirli türevini elde ederiz.

$$D_{a,t,1}^{\alpha,1,1} f(t) = \frac{N(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t \exp[-\mu_\alpha(t-x)] f'(x) dx$$

- $\omega(t) = 1$, $\beta = \gamma = \alpha$, tarafından verilen Atangana-Baleanu kesirli türevini elde ederiz.

$$D_{a,t,1}^{\alpha,\alpha,\alpha} f(t) = \frac{N(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t E_\alpha[-\mu_\alpha(t-x)^\alpha] f'(x) dx$$

- $\beta = \gamma = \alpha$, yakın zamanda tanımlanan ağırlıklı Atangana-Baleanu kesirli türevini elde ederiz ve şu şekilde verilir.

$$D_{a,t,\omega}^{\alpha,\alpha,\alpha} f(t) = \frac{N(\alpha)}{1-\alpha} \frac{1}{\omega(t)} \int_a^t E_\alpha[-\mu_\alpha(t-x)^\alpha] \frac{d}{dx}(\omega f)(x) dx$$

Öte yandan, Caputo anlamında yeni genelleştirilmiş kesirli türevinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu gösterelim:

1

$$D_{a,t,\omega}^{\alpha,\beta,\gamma}(c_1f(t) + c_2g(t)) = c_1D_{a,t,\omega}^{\alpha,\beta,\gamma}f(t) + c_2D_{a,t,\omega}^{\alpha,\beta,\gamma}g(t)$$

$$c_1, c_2, f, g \in H^1(a, b).$$

Bu, yeni genelleştirilmiş kesirli türevin doğrusal bir operatör olduğu anlamına gelir.

2

$$D_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\gamma}(c) = 0, f(t) = c. \quad (4.1)$$

3

$$D_{a,t,\omega}^{0,\beta,\gamma}f(t) = \frac{1}{\omega(t)} \int_a^t E_0(0) \frac{d}{dx}(\omega f)(x) dx = \frac{1}{\omega(t)} (\omega(t)f(t) - \omega(a)f(a))$$

Son özellikten yola çıkılarak, türev sıfıra eşit olduğunda, $f(a)$ sıfır olmadığı sürece orijinal fonksiyonu sağlamadıklarını gözlemliyorlar. Bu sorunu önlemek için yeni bir tanım sunuluyor.

Tanım 4.0.2 $a \in (0, 1), \beta, \gamma > 0$ ve $f \in H^2(a, b)$ olsun.

$f(t)$ fonksiyonunun ağırlık fonksiyonu $\omega(t)$ 'ye göre Riemann-Liouville anlamında yeni genelleştirilmiş kesirli türevi şu şekilde verilir:

$${}^R D_{a,t,\omega}^{\alpha,\beta,\gamma}f(t) = \frac{N(\alpha)}{1-\alpha} \frac{1}{\omega(t)} \frac{d}{dt} \int_a^t E_\beta[-\mu_\alpha(t-x)^\gamma] \omega(x)f(x) dx \quad (4.2)$$

Bu denklem, Riemann-Liouville'in sıfır dereceli yeni genelleştirilmiş kesirli türevinin orijinal fonksiyonu sağladığını göstermektedir.

Tanım 4.0.3 Yeni kesirli türevine karşılık gelen genelleştirilmiş Hattaf kesirli integralini aşağıdaki gibi tanımladığımızda

$${}^H I_{a,t,\omega}^{\alpha,\beta,\gamma}f(t) = \frac{1-\alpha}{N(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t (t-x)^{\beta-1} \omega(x)f(x) dx$$

Tanım 4.0.4 $\gamma = \beta$, yeni kesirli türevlere karşılık gelen genelleştirilmiş kesirli integrali aşağıdaki gibi tanımlarız

$${}^H I_{a,t,\omega}^{\alpha,\beta,\beta} f(t) = \frac{1-\alpha}{N(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{1}{\omega(t)} \int_a^t (t-x)^{\beta-1} \omega(x) f(x) dx.$$

Bu genelleştirilmiş kesirli integral, $\omega(t) = 1$ ve $\gamma = \beta = \alpha$ olduğunda Atangana–Baleanu kesirli integraliyle ve $\gamma = \beta = \alpha$ olduğunda ile tanımlanan ağırlıklı Atangana–Baleanu kesirli integrallerle çıkarır.

Ek olarak, $\alpha = 0$ olduğunda orijinal işlevi ve ayrıca $\alpha = 1$ olduğunda olağan integrali geri kazanırız.

Lemma 4.0.5 Kesirli türev $D_{a,\omega}^{\alpha,\beta}$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Hattaf 2021).

$$D_{a,\omega}^{\alpha,\beta} f(t) = \frac{N(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} (-\mu_\alpha)^{kRL} I_{a,\omega}^{\beta k+1} \left(\frac{(\omega f)'}{\omega} \right) (t).$$

Bu seri, Tanım 1'deki koşulları sağlayan herhangi bir a, α, β, ω ve f için t 'de yerel ve düzgün bir şekilde yakınsar.

Kanıt Mittag-Leffler fonksiyonu $E_\alpha(t)$ bütün bir serinin toplamıdır. Bu seri, tüm karmaşık düzlemde yerel ve düzgün bir şekilde yakınsar. Dolayısıyla, $D_{a,\omega}^{\alpha,\beta}$ kesirli türevini aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz:

$$\begin{aligned} D_{a,\omega}^{\alpha,\beta} f(t) &= \frac{N(\alpha)}{1-\alpha} \frac{1}{\omega(t)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\mu_\alpha)^k}{\Gamma(\beta k+1)} \int_a^t (t-x)^{\beta k} (\omega f)'(x) dx \\ &= \frac{N(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} (-\mu_\alpha)^k \frac{1}{\Gamma(\beta k+1)} \frac{1}{\omega(t)} \int_a^t (t-x)^{\beta k} (\omega f)'(x) dx \\ &= \frac{N(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} (-\mu_\alpha)^{kRL} I_{a,\omega}^{\beta k+1} \left(\frac{(\omega f)'}{\omega} \right) (t). \end{aligned}$$

bu ispatı tamamlar. □

Teorem 4.0.6 $\alpha, \gamma \in [0, 1)$, $\beta, \rho > 0$, ve $f \in H^1(a, b)$ olsun. Sonra

$$1: D_{a,\omega}^{\alpha,\beta}(D_{a,\omega}^{\gamma,\rho} f)(t) = D_{a,\omega}^{\gamma,\rho}(D_{a,\omega}^{\alpha,\beta} f)(t).$$

$$2: I_{a,\omega}^{\alpha,\beta}(I_{a,\omega}^{\gamma,\rho} f)(t) = I_{a,\omega}^{\gamma,\rho}(I_{a,\omega}^{\alpha,\beta} f)(t).$$

Bu, genelleştirilmiş kesirli integrallerin ve türevlerin değişmeli operatörler olduğu anlamına gelir.

Kanıt Önce [1]'i ispathyoruz. Lemma 1'i uygulayarak,

$$\begin{aligned}
D_{a,\omega}^{\alpha,\beta}(D_{a,\omega}^{\gamma,\rho}f)(t) &= \frac{N(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} (-\mu_\alpha)^{kRL} I_{a,\omega}^{\beta k+1} \left(\frac{(\omega D_{a,\omega}^{\gamma,\rho}f)'}{\omega} \right) (t) \\
&= \frac{N(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} (-\mu_\alpha)^{kRL} I_{a,\omega}^{\beta k+1} \left[\frac{N(\gamma)}{1-\gamma} \sum_{n=0}^{+\infty} (-\mu_\gamma)^{nRL} I_{a,\omega}^{\rho n} \left(\frac{(\omega f)'}{\omega} \right) \right] (t) \\
&= \frac{N(\alpha)N(\gamma)}{(1-\alpha)(1-\gamma)} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-\mu_\alpha)^k (-\mu_\gamma)^{nRL} I_{a,\omega}^{\beta k+\rho n+1} \left(\frac{(\omega f)'}{\omega} \right) (t)
\end{aligned}$$

Son ifade α ve γ 'de ve ayrıca β ve ρ 'da simetrik olduğundan [1]'i kolaylıkla çıkarabiliriz.

için;

$$\begin{aligned}
I_{a,\omega}^{\alpha,\beta}(I_{a,\omega}^{\gamma,\rho}f)(t) &= \frac{1-\alpha}{N(\alpha)} (I_{a,\omega}^{\gamma,\rho}f)(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)} RL_{a,\omega}^I{}^\beta (I_{a,\omega}^{\gamma,\rho}f)(t) \\
&= \frac{1-\alpha}{N(\alpha)} \left(\frac{1-\gamma}{N(\gamma)} f(t) + \frac{\gamma}{N(\gamma)} RL_{a,\omega}^I{}^\beta f(t) \right) \\
&\quad + \frac{\alpha}{N(\alpha)} RL_{a,\omega}^I{}^\beta \left(\frac{1-\gamma}{N(\gamma)} f(t) + \frac{\gamma}{N(\gamma)} RL_{a,\omega}^I{}^\beta f(t) \right) \\
&= \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{N(\alpha)N(\gamma)} f(t) + \frac{\gamma(1-\alpha)}{N(\alpha)N(\gamma)} RL_{a,\omega}^I{}^\beta f(t) \\
&\quad + \frac{\alpha(1-\gamma)}{N(\alpha)N(\gamma)} RL_{a,\omega}^I{}^\beta f(t) + \frac{\alpha\gamma}{N(\alpha)N(\gamma)} RL_{a,\omega}^I{}^{\beta+\rho} f(t) \\
&= I_{a,\omega}^{\gamma,\rho}(I_{a,\omega}^{\alpha,\beta}f)(t)
\end{aligned}$$

Bu [2]'yi gösterir. □

Sonuç 4.0.7 Genelleştirilmiş kesirli integral ve genelleştirilmiş kesirli türev aşağıdaki Newton-Leibniz formülünü karşılar:

$$I_{a,1}^{\alpha,\beta}(D_{a,1}^{\alpha,\beta}f)(t) = D_{a,1}^{\alpha,\beta}(I_{a,1}^{\alpha,\beta}f)(t) = f(t) - f(a)$$

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ HATTAF KESİRLİ TÜREVİNİN LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, Hattaf kesirli türevinin kesirli gerçel doğrusal sistemini ele alacağız. Bu tezin temel amacı, Hattaf anlamında kesirli türevin kesirli doğrusal sisteminin analitik çözümlerini elde etmektir.

Sistem şu şekildedir (Wang vd. 2022, Hattaf 2022):

$$D_{a,t,\omega}^{\alpha,\beta,\gamma} x(t) = \lambda x(t)$$

$$D_{a,t,\omega}^{\alpha,\beta,\gamma} y(t) = \mu y(t)$$

Teorem 5.0.1 Yukarıdaki denklem sisteminin başlangıç koşulları şöyle olsun; x_0 ve y_0 , ve $x(0) = x_0$ ve $y(0) = y_0$ bu şekilde olmak üzere denklem sisteminin çözümleri şu şekildedir:

$$x(t) = \frac{t^{\beta-1}}{t^{\beta}-M(\beta-2)} c_1 \text{ ve}$$

$$y(t) = \frac{t^{\beta-1}}{t^{\beta}-N(-2)} c_2$$

Kanıt Buradan $\omega(t) = 1$, $\beta = \gamma$ ve $\beta \geq 0$

$$I_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\beta} \left[D_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\beta} x(t) \right] = \lambda \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} x(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \right]$$

$$I_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\beta} \left[D_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\beta} y(t) \right] = \mu \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} y(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} y(s) ds \right]$$

$$x(t) - x(a) = \lambda \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} x(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \right]$$

$$y(t) - y(a) = \mu \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} y(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} y(s) ds \right]$$

buradan $a = 0$

$$x'(t) = \lambda \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} x'(t) + \frac{\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-2} x(s) ds \right]$$

$$y'(t) = \mu \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} y'(t) + \frac{\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-2} y(s) ds \right]$$

$$x'(t) = \frac{\lambda\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{N(\alpha)}{N(\alpha) - \lambda(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\beta-2} x(s) ds$$

$$y'(t) = \frac{\mu\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{N(\alpha)}{N(\alpha) - \mu(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\beta-2} y(s) ds$$

$x'(t)$ ve $y'(t)$ 'nin laplace dönüşümlerini alıyoruz

$$M = \frac{\lambda\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{N(\alpha)}{N(\alpha) - \lambda(1-\alpha)} \text{ ve } N = \frac{\mu\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{N(\alpha)}{N(\alpha) - \mu(1-\alpha)}$$

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = M\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-s)^{\beta-2} x(s) ds\right\}$$

$$sx(s) - x(0) = M\left(\frac{\beta-2}{s^{\beta-1}} x(s)\right)$$

$$x(s) \left[s - \frac{M(\beta-2)}{s^{\beta-1}}\right] = x(0)$$

$$x(t) = \frac{t^{\beta-1}}{t^\beta - M(\beta-2)} c_1$$

$y(t)$ için aynı sonucu alıyoruz.

İspat tamamlandı. □

$$D_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\beta} x(t) = \lambda x(t)$$

$$D_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\beta} y(t) = x(t) + \lambda y(t)$$

Denklem sistemini inceleyelim:

Teorem 5.0.2 Yukarıdaki sisteminde başlangıç koşulları şöyle olsun; x_0 ve y_0 ,
ve $x(0) = x_0$ ve $y(0) = y_0$ bu şekilde olmak üzere denklem sisteminin çözümleri şu
şekildedir:

$$x(t) = \frac{t^{\beta-1}}{t^\beta - M(\beta-2)} c_1$$

ve

$$y(t) = \frac{1}{tN(\alpha) + \lambda(1-\alpha)} \left[\frac{(1-\alpha)(\beta-2)Mc_1}{t^\beta - M(\beta-2)} + \frac{\alpha(\beta-1)(\beta-2)c_1}{[t^\beta - M(\beta-2)]\Gamma(\beta)} + (N(\alpha) - \lambda(1-\alpha))c_2 \right]$$

Kanıt Buradan $\omega(t) = 1$, $\beta = \gamma$ ve $\beta \geq 0$

$x(t)$ önceki teoremden elde ettik. $y(t)$ 'yi bulalım.

$$I_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\beta} \left[D_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\beta} x(t) \right] = \frac{1-\alpha}{N(\alpha)} x(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \\ + \lambda \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} y(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \right]$$

$$y(t) - y(a) = \frac{1-\alpha}{N(\alpha)} x(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \\ + \lambda \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} y(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \right]$$

her iki tarafın türevini alalım $a = 0$ olsun.

$$y'(t) = \frac{1-\alpha}{N(\alpha)} x'(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} (\beta-1) \int_a^t (t-s)^{\beta-2} x(s) ds \\ + \lambda \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} y'(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} (\beta-1) \int_0^t (t-s)^{\beta-2} x(s) ds \right]$$

laplace dönüşümü alınız

$$\mathcal{L} \{y'(t)\} = \frac{1-\alpha}{N(\alpha)} \mathcal{L} \{x'(t)\} + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} (\beta-1) \mathcal{L} \left\{ \int_0^t (t-s)^{\beta-2} x(s) ds \right\} \\ + \frac{1-\alpha}{N(\alpha)} \mathcal{L} \{x'(t)\} + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} (\beta-1) \mathcal{L} \left\{ \int_0^t (t-s)^{\beta-2} x(s) ds \right\}$$

son olarak

$$y(t) = \frac{1}{tN(\alpha) + \lambda(1-\alpha)} \left[\frac{(1-\alpha)(\beta-2)Mc_1}{t^\beta - M(\beta-2)} + \frac{\alpha(\beta-1)(\beta-2)c_1}{[t^\beta - M(\beta-2)]\Gamma(\beta)} + (N(\alpha) - \lambda(1-\alpha))c_2 \right]$$

ispat tamamlanır. $\square$

Son olarak

$$D_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\beta} x(t) = \eta x(t) + \gamma y(t)$$

$$D_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\beta} y(t) = -\gamma x(t) + \eta y(t)$$

Denklemleri inceleyelim:

Teorem 5.0.3 Denkem sisteminde başlangıç koşulları şöyle olsun; x_0 ve y_0 , ve $x(0) = x_0$ ve $y(0) = y_0$ bu şekilde olmak üzere denklem sisteminin çözümleri şu şekildedir:

$$x(t) = \frac{1}{s} \frac{\left[\frac{\beta-2}{t^{\beta-1}} \right] \left[\frac{\eta\alpha(\beta-1)-\gamma\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \right] \left[\frac{N(\alpha)-(1-\alpha)(\gamma-\eta)}{N(\alpha)} \right]}{\left[\frac{N(\alpha)-\eta(1-\alpha)}{N(\alpha)} \right]^2 + \left[\frac{\gamma(1-\alpha)}{N(\alpha)} \right]^2} + c_1$$

ve

$$y(t) = \frac{1}{s} \frac{\left[\frac{\beta-2}{t^{\beta-1}} \right] \left[\frac{\eta\alpha(\beta-1)-\gamma\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \right] \left[\frac{N(\alpha)-(1-\alpha)(\gamma+\eta)}{N(\alpha)} \right]}{\left[\frac{N(\alpha)-\eta(1-\alpha)}{N(\alpha)} \right]^2 + \left[\frac{\gamma(1-\alpha)}{N(\alpha)} \right]^2} + c_2$$

Kanıt $\omega(t) = 1$, $\beta = \gamma$ ve $\beta \geq 0$ olacak.

$$\begin{aligned} I_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\beta} \left[D_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\beta} x(t) \right] &= \eta \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} x(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \right] \\ &\quad + \gamma \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} y(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} y(s) ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\beta} \left[D_{a,t,1}^{\alpha,\beta,\beta} x(t) \right] &= -\gamma \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} x(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \right] \\ &\quad + \eta \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} y(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} y(s) ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) - x(a) &= \eta \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} x(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \right] \\ &\quad + \gamma \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} y(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} y(s) ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) - y(a) &= -\gamma \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} x(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \right] \\ &\quad + \eta \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} y(t) + \frac{\alpha}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} y(s) ds \right] \end{aligned}$$

her iki tarafın türevini alıyoruz; $a = 0$ olsun

$$\begin{aligned} x'(t) &= \eta \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} x'(t) + \frac{\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-2} x(s) ds \right] \\ &\quad + \gamma \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} y'(t) + \frac{\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-2} y(s) ds \right] \end{aligned}$$

$$y'(t) = -\gamma \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} x'(t) + \frac{\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-2} x(s) ds \right]$$

$$+ \eta \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} y'(t) + \frac{\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-2} y(s) ds \right]$$

laplace dönüşümü alınız

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x'(t)\} &= \eta \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} \mathcal{L}\{x'(t)\} + \frac{\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \mathcal{L}\left\{ \int_0^t (t-s)^{\beta-2} x(s) ds \right\} \right] \\ &+ \gamma \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} \mathcal{L}\{y'(t)\} + \frac{\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \mathcal{L}\left\{ \int_0^t (t-s)^{\beta-2} x(s) ds \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\} &= -\gamma \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} \mathcal{L}\{x'(t)\} + \frac{\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \mathcal{L}\left\{ \int_0^t (t-s)^{\beta-2} x(s) ds \right\} \right] \\ &+ \eta \left[\frac{1-\alpha}{N(\alpha)} \mathcal{L}\{y'(t)\} + \frac{\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \mathcal{L}\left\{ \int_0^t (t-s)^{\beta-2} x(s) ds \right\} \right] \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{s} \frac{\left[\frac{\beta-2}{t^{\beta-1}} \right] \left[\frac{\eta\alpha(\beta-1)-\gamma\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \right] \left[\frac{N(\alpha)-(1-\alpha)(\gamma-\eta)}{N(\alpha)} \right]}{\left[\frac{N(\alpha)-\eta(1-\alpha)}{N(\alpha)} \right]^2 + \left[\frac{\gamma(1-\alpha)}{N(\alpha)} \right]^2} + c_1 \\ y(t) &= \frac{1}{s} \frac{\left[\frac{\beta-2}{t^{\beta-1}} \right] \left[\frac{\eta\alpha(\beta-1)-\gamma\alpha(\beta-1)}{N(\alpha)\Gamma(\beta)} \right] \left[\frac{N(\alpha)-(1-\alpha)(\gamma+\eta)}{N(\alpha)} \right]}{\left[\frac{N(\alpha)-\eta(1-\alpha)}{N(\alpha)} \right]^2 + \left[\frac{\gamma(1-\alpha)}{N(\alpha)} \right]^2} + c_2 \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

□

6. KAYNAKLAR

Miller K S, 1993, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.

Hartman P, 2002, Ordinary differential equations. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Boelkins M R, Goldberg J L, Potter M C, 2009, Differential equations with linear algebra. Oxford University Press.

Wei Y Q, Liu D Y, Boutat D, 2019, Innovative fractional derivative estimation the pseudo-state for a class of fractional order linear systems. Automatica, 99, 157-166.

Losada J, Nieto J J, 2021, Fractional integral associated to fractional derivatives with nonsingular kernels, Prog, Fract. Differ, Appl, 7(3), 137-143.

Wang S, Liu J, Zhang X D, 2022, Properties of solutions for fractional-order linear system with differential equations, AIMS Mathematics, 7(8), 15704-15713.

Podlubny I, 1999, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego-Boston- New York-London-Tokyo-Toronto .

Pskhu A V, 2004, On the Theory of the Continual Integro-Differentiation Operator, Differential Equations, 40(1).

Povstenko Y, 2015, Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engineers (p. 460), Cham: Springer International Publishing.

Samko S G, 1993, Fractional integrals and derivatives, Theory and applications.

Losada J, Nieto J J, 2015, Properties of a new fractional derivative without singular kernel, Progress in Fractional Differentiation Applications, 1(2), 87-92.

Caputo M, Fabrizio M, 2015, A new definition of fractional derivative without singular kernel, Progress in Fractional Differentiation Applications, 1(2), 73-85.

Atangana A, Baleanu D, 2016, New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model, arXiv preprint arXiv:1602.03408.

Al-Refai M, 2020, On weighted Atangana–Baleanu fractional operators, *Advances in Difference Equations*, 2020(1), 3.

Aydin S, 2017, On the history of some linear algebra concepts: from Babylon to pre-technology, *The Online Journal of Science and Technology*-January, 7(1).

Hattaf K, 2020, A new generalized definition of fractional derivative with non-singular kernel, *Computation*, 8(2), 49.

Hattaf K, 2021, On Some Properties of the New Generalized Fractional Derivative with Non-Singular Kernel, *Mathematical Problems in Engineering*, 2021(1), 1580396.