

**HELMHOLTZ DENKLEMİYLE BAĞLANTILI GEÇİŞ
(TRANSMISSION) PROBLEMLERİ**

Ülkü ATEŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MATEMATİK)**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 1997
ANKARA**

Ülkü ATEŞ tarafından hazırlanan **HELMHOLTZ DENKLEMİYLE BAĞLANTILI GEÇİŞ (TRANSMISSION) PROBLEMLERİ** adlı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylıyorum.



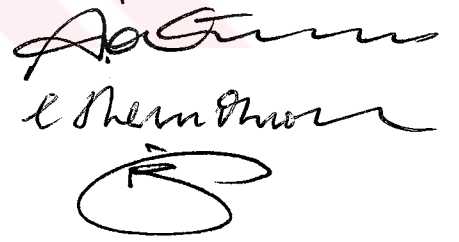
Tez Yöneticisi

Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Abdullah Altın

Üye : Prof. Dr. İ. Ethem Anar



Üye : Doç. Dr. İrfan Baki Yazar

Üye :

Üye :

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

B. Atazoy

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
SEMBOLLER	IV
1. GİRİŞ	1
2. PROBLEMİN ORTAYA KONMASI	2
3. ÇÖZÜMÜN TEKLİĞİ	4
3.1. Teorem	4
3.2. Teorem	14
4. ÇÖZÜMÜN VARLIĞI	19
4.1. Önerme	25
4.1. Teorem	37
4.1. Tanım	38
4.2. Teorem	39
4.2. Tanım	43
4.3. Teorem	43
4.4. Teorem	46
4.1. Sonuç	50
4.2. Sonuç	54
4.3. Sonuç	55
4.5. Teorem	55

4.6. Teorem	56
4.3. Tanım	71
4.7. Teorem	71
4.4. Sonuç.....	80
4.8. Teorem	80
4.9. Teorem	83
5. HOMOGEN OLMAYAN BİR ORTAMDA GEÇİŞ PROBLEMİ.....	84
6. ÇÖZÜMÜN TEKLİĞİ.....	86
6.1. Teorem	86
KAYNAKLAR.....	92
ÖZGEŞMİŞ	95

**HELMHOLTZ DENKLEMİYLE BAĞLANTILI GEÇİŞ
(TRANSMISSION) PROBLEMLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Ülkü ATEŞ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 1997**

ÖZET

Bu tezde,

$$\Delta u_m(x) + k_m^2 u_m(x) = 0, \quad x \in D_m, \quad m = 1, 2$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 u_1(x) - \mu_2 u_2(x) &= f(x) \\ \frac{\partial u_1(x)}{\partial n} - \frac{\partial u_2(x)}{\partial n} &= g(x) \end{aligned} \right\}, \quad x \in S$$

$$R = |x| \rightarrow \infty \text{ için } u_1(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \frac{\partial u_1(x)}{\partial n} - ik_1 u_1(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

geçiş problemi çalışıldı.

İkinci bölümünde yukarıda ifade edilen geçiş problemi tanımlandı.

Üçüncü bölümde geçiş probleminin çözümünün tekliği ispatlandı.

Dördüncü Bölümde ise bu problemin çözümünün varlığı ispatlandı.

Beşinci ve altıncı bölümde homogen olmayan bir ortamda geçiş problemi tanımlandı ve bu problemin çözümünün tekliği ispatlandı.

Bilim Kodu : 403.06.01
Anahtar Kelimeler : Scattering problem, acoustic waves
Sayfa Adedi : 95
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

TRANSMISSION PROBLEMS FOR THE HELMHOLTZ EQUATION

(M. Sc. Thesis)

Ülkü ATEŞ

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

June 1997

ABSTRACT

In this thesis,

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_m(x) + k_m^2 u_m(x) &= 0, \quad x \in D_m, \quad m = 1, 2 \\ \mu_1 u_1(x) - \mu_2 u_2(x) &= f(x) \\ \frac{\partial u_1(x)}{\partial n} - \frac{\partial u_2(x)}{\partial n} &= g(x) \end{aligned} \right\}, \quad x \in S$$

$$u_1(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \frac{\partial u_1(x)}{\partial n} - ik_1 u_1(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{as } R = |x| \rightarrow \infty$$

the transmission problem is studied

In the second section the above transmission problem has been given is defined.

In the third section the uniqueness of the solution of the transmission problem is proved.

In the fourth section the existence of the solution of the problem is proved.

In the fifth and sixth sections a transmission problem in an inhomogeneous medium is defined and uniqueness of the solution of the problem is proved.

Science Code : 403.06.01
Key Words : Scattering problem, acoustic waves
Page Number : 95
Aduiser : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana öneren ve tezin hazırlanmasında bilgilerini, faydalı tavsiyelerini ve zamanını benden esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bu çalışmam esnasında bana zaman ayırıp problemimi daha iyi anlayıp yorumlamama yardımcı olan sayın hocam Dr. Adil MISIR'a teşekkür ederim.

SEMBOLLER

Sembol	Anlam
∂D	D bölgesinin sınırı
$\bar{D}$	D bölgesinin (kumesinin) kapanışı
$\bar{k}$	k kompleks sayısının eşleniği
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Euclid uzayı
$ \cdot $	$\mathbb{R}^n$ deki bir vektörün Euclid normu
$C(D)$	D de tanımlı reel veya kompleks değerli sürekli fonksiyonların normlu uzayı
$C^k(D)$	D de tanımlı k-inci mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli reel veya kompleks değerli fonksiyonların normlu uzayı
$\ \cdot\ $	Maksimum normu
$\exp$	Exponential (üstel)
O, o	Landau sembolleri
Δ	Laplace operatörü
Re	Reel kısım
Im	İmajiner kısım
∇	Gradient
$L^2(\partial\Omega)$	$\partial\Omega$ da karesi integrallenebilir fonksiyonların normlu uzayı

1. GİRİŞ

Helmholtz denklemiyle bağlantılı olarak geçiş problemleri birçok yazar tarafından halen çalışılmaktadır. Bu yazarlardan geçiş problemi üzerine önemli neticeler Kittappa ve Kleinman [7], Kupradze [12], Latz [13] ve Werner [19] tarafından elde edilmiştir. Bu yazarlar genel olarak farklı $D_i \subset \mathbb{R}^3$ bölgelerinde farklı k_i parametrelerine karşılık gelen Helmholtz denklemlerini ele almışlardır. Örneğin beş numaralı referansta varlık ve teklik teoremleri $\frac{k_i}{k_j}$, $i \neq j$ oranlarıyla bağlantılı olarak kurulmuştur. Fakat bununla beraber nümerik olarak çözümlere zorluklar çıkmaktadır. Diğer yandan bir numaralı referansta elde edilen sonuçlar k_i lerin küçük değerleri için geçerlidir.

Bu çalışmada yukarıda bahsedilen referanslarda ortaya çıkan zorluklardan kurtulmak için k_i parametreleri D_i bölgelerinde noktadan bağımsız alındı.

Bu çalışmada birinci bölümde geçiş problemi tanımlandı. İkinci bölümde geçiş probleminin çözümünün tekliği ispatlandı. Dördüncü bölümde geçiş probleminin çözümünün varlığı ispatlandı. Beşinci bölümde homogen olmayan bir ortamda geçiş problemi tanımlandı. Altıncı ve son bölümde homogen olmayan ortamda tanımlanan geçiş probleminin çözümünün tekliği ispatlandı.

2. PROBLEMİN ORTAYA KONMASI

D_1 , $\mathbb{R}^3$ 'de sınırlı olmayan açık bir bölge olsun.

D_2 , $\mathbb{R}^3$ 'de açık ve sınırlı bir bölge olsun öyle ki;

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset, \quad \overline{D_1} \cup D_2 = D_1 \cup \overline{D_2} = \mathbb{R}^3$$

D_1 ve D_2 nin ortak sınır yüzeyi $S: \partial D_1 = \partial D_2$ kapalı, sınırlı bir Lyapunov yüzeyi olsun. $\vec{n}: D_2$ den D_1 'e doğru yönlendirilmiş S 'nin birim normali olsun. Şimdi aşağıdaki problemi ele alalım.

GEÇİŞ (TRANSMISSION PROBLEMİ)

$$\Delta u_1(x) + k_1^2 u_1(x) = 0, \quad x \in D_1 \text{ de} \quad (2.1)$$

$$\Delta u_2(x) + k_2^2 u_2(x) = 0, \quad x \in D_2 \text{ de}$$

$$\mu_1 u_1(x) - \mu_2 u_2(x) = f(x)$$

$$x \in S \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_1(x)}{\partial n} - \frac{\partial u_2(x)}{\partial n} = g(x)$$

yayılma şartı:

$$u_1(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \frac{\partial u_1(x)}{\partial n} - ik_1 u_1(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| = R \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

denklemlerini gerçekleyen

$$u_1 \in C^2(D_1) \cap C^1(\overline{D}_1)$$

$$u_2 \in C^2(D_2) \cap C^1(\overline{D}_2)$$

u_1 ve u_2 fonksiyonlarının aranmasıdır. Bu problemde $f \in C^{1,\alpha}(S)$ $g \in C^{0,\alpha}(S)$ dir.

$C^{0,\alpha}$ ve $C^{1,\alpha}$ sırasıyla α mertebeden düzgün Hölder sürekli ve düzgün Hölder sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonların uzayıdır. k_1, k_2, μ_1, μ_2 sıfırdan farklı olan ve $0 \leq \arg k_1, \arg k_2 < \pi$ yi gerçekleyen kompleks sayılardır.



3. ÇÖZÜMÜN TEKLİĞİ

Kabul edelim ki (2.1)-(2.3) geçiş probleminin farklı iki çözümü $u_1, u_2; u'_1, u'_2$ olsun. $v_1 = u_1 - u'_1$, $v_2 = u_2 - u'_2$ konumu ile (2.1)-(2.3) problemi

$$\Delta v_1(x) + k_1^2 v_1(x) = 0 \quad x \in D_1' \text{ de} \quad (3.1)$$

$$\Delta v_2(x) + k_2^2 v_2(x) = 0 \quad x \in D_2' \text{ de}$$

$$\mu_1 v_1(x) - \mu_2 v_2(x) = 0 \quad x \in S' \text{ de} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v_1(x)}{\partial n} - \frac{\partial v_2(x)}{\partial n} = 0$$

$$v_1 = O\left(\frac{1}{R}\right) \quad \frac{\partial v_1}{\partial n} - ik_1 v_1 = o\left(\frac{1}{R}\right) \quad R \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

homogen geçiş problemine indirgenir. (2.1)-(2.3) probleminin çözümünün tekliği (3.1)-(3.3) probleminin çözümünün sadece $v_1 = v_2 = 0$ olduğunu göstermeye dayanır.

3.1. Teorem:

$k_1, k_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $0 \leq \arg k_1, \arg k_2 < \pi$ olsun. $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve

$$\rho = \frac{\mu_2 \overline{k_2^2}}{\mu_1 k_1^2} \in \mathbb{R}$$

olsun. Burada $\operatorname{Re} k_1, \operatorname{Re} k_2 \geq 0 (< 0)$ ise $\rho \geq 0 (< 0)$ dır. Bu durumda (3.1)-(3.3) homogen probleminin çözümü sadece $v_1 = v_2 = 0$ aşikar çözümdür.

İspat

K_R , R yarıçaplı, birim dış normalı $\bar{n}$ olan bir küre olsun. Kabul edelim ki K_R S yi içine alsın ve $D_{1,R} = \{x \in D_1 : |x| < R\}$ olsun. $D_{1,R}$ ve D_2 üzerinden Green teoremlerini uygulayalım ve (3.1) ve (3.2) yi kullanalım.

$$\begin{aligned}
 \int_{D_{1,R}} (v_1 \Delta \bar{v}_1 + \nabla v_1 \nabla \bar{v}_1) dx &= \int_{\partial D_{1,R}} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds \\
 &= \int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds - \int_S v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds \\
 &= \int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds - \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_S v_2 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial n} ds \\
 &= \int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds - \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_{D_2} (v_2 \Delta \bar{v}_2 + \nabla v_2 \nabla \bar{v}_2) dx \\
 &= \int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds - \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_{D_2} (v_2 \Delta \bar{v}_2 + |\nabla v_2|^2) dx \\
 \int_{D_{1,R}} (v_1 (\bar{k}_1^2 \bar{v}_1) + |\nabla v_1|^2) dx &= \int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds - \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_{D_2} v_2 \Delta \bar{v}_2 dx - \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx \\
 \int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds &= \int_{D_{1,R}} |\nabla v_1|^2 dx - \bar{k}_1^2 \int_{D_{1,R}} |v_1|^2 dx + \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_{D_2} v_2 (-\bar{k}_2^2 \bar{v}_2) dx \\
 &\quad + \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{D_{L,R}} |\nabla v_1|^2 dx - \bar{k}_1^2 \int_{D_{L,R}} |v_1|^2 dx - \frac{\mu_2}{\mu_1} \bar{k}_2^2 \int_{D_2} |v_2|^2 dx \\
&\quad + \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx \\
\mu_1 \int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds &= \mu_1 \int_{D_{L,R}} |\nabla v_1|^2 dx - \bar{k}_1^2 \mu_1 \int_{D_{L,R}} |v_1|^2 dx \\
&\quad - \mu_2 \bar{k}_2^2 \int_{D_2} |v_2|^2 dx + \mu_2 \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx \tag{3.4}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

(3.4) eşitliğini $\mu_1 \bar{k}_1^2$ ile bölüp imajiner kısmını alalım.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\bar{k}_1^2} \int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds &= \frac{1}{\bar{k}_1^2} \int_{D_{L,R}} |\nabla v_1|^2 dx + \frac{\mu_2}{\mu_1 \bar{k}_1^2} \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx - \int_{D_{L,R}} |v_1|^2 dx \\
&\quad - \frac{\mu_2 \bar{k}_2^2}{\mu_1 \bar{k}_1^2} \int_{D_2} |v_2|^2 dx \\
&= \frac{1}{\bar{k}_1^2} \int_{D_{L,R}} |\nabla v_1|^2 dx + \frac{\rho}{\bar{k}_2^2} \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx - \int_{D_{L,R}} |v_1|^2 dx \\
&\quad - \rho \int_{D_2} |v_2|^2 dx
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{\bar{k}_1^2} \int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\bar{k}_1^2} \int_{D_{L,R}} |\nabla v_1|^2 dx \right) + \operatorname{Im} \left(\frac{\rho}{\bar{k}_2^2} \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{Im}\left(\int_{D_{1,R}} |v_1|^2 dx\right) - \rho \operatorname{Im}\left(\int_{D_2} |v_2|^2 dx\right) \\
& \operatorname{Im}\left(\frac{1}{k_1^2} \int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{k_1^2} \int_{D_{1,R}} |\nabla v_1|^2 dx\right) + \rho \operatorname{Im}\left(\frac{1}{k_2^2} \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx\right). \quad (3.5)
\end{aligned}$$

(3.5) eşitliğinin sağ tarafı açıkça görüldüğü gibi reeldir. O nedenle biz yalnızca kompleks k_1, k_2 sayılarıyla ilgileneceğiz. Özellikle $\operatorname{Im} k_1 > 0$ ve $\operatorname{Im} k_1 = 0$ durumlarını inceleyeceğiz.

(a) $\operatorname{Im} k_1 > 0$ olsun. v_1 , yayılma şartını sağladığından (3.5) in sol tarafı $R \rightarrow \infty$ olduğunda sıfıra gider [12]. Böylece (3.5) eşitliği;

$$\frac{\operatorname{Re} k_1 \operatorname{Im} k_1}{|k_1|^4} \int_{D_1} |\nabla v_1|^2 dx + \frac{\rho \operatorname{Re} k_2 \operatorname{Im} k_2}{|k_2|^4} \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx = 0 \quad (3.6)$$

olur.

$\operatorname{Re} k_1 \neq 0$ ve $\rho \geq 0$ olsun. Bu durumda $\operatorname{Re} k_1 \cdot \operatorname{Re} k_2 \geq 0$ olur. Bu eşitsizlikten

$$\operatorname{Re} k_1 > 0 \text{ ise } \operatorname{Re} k_2 \geq 0$$

$$\operatorname{Re} k_1 < 0 \text{ ise } \operatorname{Re} k_2 < 0$$

olur.

$\operatorname{Re} k_1 > 0$ olsun. Bu durumda (3.6) denkleminde $\operatorname{Re} k_1 \cdot \operatorname{Im} k_1 > 0$ ve $\rho \geq 0$ ve $\operatorname{Re} k_2 \cdot \operatorname{Im} k_2 \geq 0$ olduğundan

$$\int_{D_1} |\nabla v_1|^2 dx = 0$$

$\operatorname{Re} k_1 \neq 0$ ve $\rho \geq 0$ olsun. Bu durumda $\operatorname{Re} k_1 \cdot \operatorname{Re} k_2 > 0$ ve buradan $\nabla v_1 = 0$, $v_1 = \text{sabit}$ elde edilir. $v_1 = \text{sabit}$, D_1 'de Helmholtz denklemini gerçeklediğinden

$$D_1 \text{'de } \Delta v_1 + k_1^2 v_1 = 0$$

olur ve buradan D_1 'de $v_1 = 0$ elde edilir. Şimdi $v_2 = 0$ olduğunu gösterelim. D_1 bölgesine Green teoremi uygulandığında

$$\int_{D_1} (v_1 \Delta \bar{v}_1 + \nabla v_1 \nabla \bar{v}_1) dx = \int_{\partial D_1} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds$$

olur. D_1 de $v_1 = 0$ olduğundan

$$\int_{\partial D_1} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds = 0$$

olur. $v_1 \in C^2(D_1) \cap C^1(\bar{D}_1)$ olduğundan ∂D_1 'de $v_1 = 0$ ve dolayısıyla S üzerinde $v_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} v_1 = 0$ elde ederiz. Şimdi D_2 bölgesinde $v_2 = 0$ olduğunu gösterelim. $x \in D_2$ için Green gösterilim teoreminden

$$v_2(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ v_2(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial}{\partial n} v_2(y) \right\} ds(y)$$

yazabiliriz. (3.2) geçiş (transmission) şartından dolayı S üzerinde $v_2 = \frac{\partial v_2}{\partial n} = 0$ olduğundan D_2 de $v_2 = 0$ elde edilir. $\operatorname{Re} k_1 < 0$ ise $\operatorname{Re} k_2 < 0$ olur. Böylece (3.6) denkleminde $\operatorname{Re} k_1 \cdot \operatorname{Im} k_1 < 0$, $\rho > 0$, $\operatorname{Re} k_2 \cdot \operatorname{Im} k_2 \leq 0$ olduğundan (3.6) denklemindeki her terim pozitif yada sıfır olur. Böylece

$$\int_{D_1} |\nabla v_1|^2 dx = 0$$

ve her terim pozitif yada sıfır olur. Böylece D_1 de $|\nabla v_1|^2 = 0$, D_1 de $v_1 = \text{sabit}$ elde edilir. D_1 de $\Delta v_1 + k_1^2 v_1 = 0$ olduğundan D_1 de $v_1 = 0$ olur. Geçiş şartı kullanılarak yukarıda olduğu gibi D_2 de $v_2 = 0$ olduğu gösterilebilir.

Şimdi $\text{Re } k_1 \neq 0$, $\rho < 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\text{Re } k_1$ ile $\text{Re } k_2$ ($\text{Re } k_1 \cdot \text{Re } k_2 < 0$) ters işaretlidir.

$\text{Re } k_1 > 0$ ve $\text{Re } k_2 < 0$ olsun. Bu durumda (3.6) denkleminin her terimi pozitif yada sıfır olur. Böylece

$$\int_{D_1} |\nabla v_1|^2 dx = 0$$

$v_1 = \text{sabit}$ olur. Bir önceki işlemler tekrarlanarak D_1 de $v_1 = 0$ ve D_2 de $v_2 = 0$ elde edilir.

$\text{Re } k_1 = 0$, $\text{Re } k_2 \neq 0$ ise (3.6) denklemi

$$\rho \frac{\text{Re } k_2 \text{Im } k_2}{|k_2|^4} \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx = 0$$

olur. Buradan

$$\int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx = 0$$

veya $|\nabla v_2|^2 = 0$, $v_2 = \text{sabit}$ elde edilir. v_2 , D_2 bölgesinde Helmholtz denklemini sağladığından D_2 de $v_2 = 0$ dır. Şimdi D_1 de $v_1 = 0$ olduğunu gösterelim. Green özdeşliğinden

$$\int_{D_2} \left(v_2 \Delta \bar{v}_2 + |\nabla v_2|^2 \right) = \int_{\partial D_2} v_2 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial n} ds = 0$$

olur. $v_2 \in C^2(D_2) \cap C^1(\bar{D}_2)$ D_2 de $\Delta v_2 + k_2^2 v_2 = 0$ olduğundan S üzerinde

$\frac{\partial v_2}{\partial n} = 0$ olur. Transmission şartından dolayı S üzerinde $\frac{\partial v_1}{\partial n} = 0$ olur. Böylece

Green özdeşliğinden

$$\int_{D_1} \nabla(v_1 \nabla v_1) dx = \int_{D_1} \left(v_1 \Delta v_1 + |\nabla v_1|^2 \right) dx = \int_{\partial D_1} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} ds = 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.7) nin sol yanı $\text{Re} k_1 = 0$ ve $k_1 = i \text{Im} k_1$, $k_1^2 < 0$ olduğundan

$$\int_{D_1} \left(v_1 (-k_1^2 v_1) + |\nabla v_1|^2 \right) dx = 0$$

$$\int_{D_1} \left(-k_1^2 v_1^2 + |\nabla v_1|^2 \right) dx = 0$$

elde ederiz. $-k_1^2 v_1^2 + |\nabla v_1|^2 \geq 0$ olduğundan D_1 de $v_1 = 0$ elde ederiz.

$\text{Re} k_1 = \text{Re} k_2 = 0$ olsun. $\bar{k}_1^2$ ve $\bar{k}_2^2$ negatiftir. $\text{Re} \mu_1 = \text{Re} \mu_2 = 0$ olsun.

(3.4) denkleminin her iki yanının imajiner kısmını hesaplayalım.

$$\mu_1 \int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds = \mu_1 \int_{D_{1,R}} |\nabla v_1|^2 dx + \mu_2 \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx - \mu_1 \bar{k}_1^2 \int_{D_{1,R}} |v_1|^2 dx - \mu_2 \bar{k}_2^2 \int_{D_2} |v_2|^2 dx$$

$$\text{Im} \left(\mu_1 \int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds \right) = \text{Im} \left(\mu_1 \int_{D_{1,R}} |\nabla v_1|^2 dx \right) + \text{Im} \left(\mu_2 \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx \right) - \text{Im} \left(\mu_1 \bar{k}_1^2 \int_{D_{1,R}} |v_1|^2 dx \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{Im}\left(\mu_2 \bar{k}_2^2 \int_{D_2} |v_2|^2 dx\right) \\
& = \operatorname{Im}(\mu_1) \int_{D_{1,R}} |\nabla v_1|^2 dx + \operatorname{Im}(\mu_2) \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx \\
& \quad + \operatorname{Im}(\mu_2)(\operatorname{Im} k_2)^2 \int_{D_2} |v_2|^2 dx + \operatorname{Im}(\mu_1)(\operatorname{Im} k_1)^2 \int_{D_{1,R}} |v_1|^2 dx \\
& = \operatorname{Im}(\mu_1) \left\{ \int_{D_{1,R}} |\nabla v_1|^2 dx + (\operatorname{Im} k_1)^2 \int_{D_{1,R}} |v_1|^2 dx \right\} + \\
& \quad \operatorname{Im}(\mu_2) \left\{ \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx + (\operatorname{Im} k_2)^2 \int_{D_2} |v_2|^2 dx \right\}
\end{aligned}$$

elde ederiz. $R \rightarrow \infty$ için eşitliğin sol tarafı sıfıra gider [2].

$$\begin{aligned}
0 & = \operatorname{Im}(\mu_1) \left\{ \int_{D_1} |\nabla v_1|^2 dx + (\operatorname{Im} k_1)^2 \int_{D_1} |v_1|^2 dx \right\} + \\
& \quad \operatorname{Im}(\mu_2) \left\{ \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx + (\operatorname{Im} k_2)^2 \int_{D_2} |v_2|^2 dx \right\} \\
& \quad \operatorname{Im}(\mu_1) \left\{ \int_{D_1} |\nabla v_1|^2 dx + (\operatorname{Im} k_1)^2 \int_{D_1} |v_1|^2 dx \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\operatorname{Im}(\mu_2) \left\{ \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx + (\operatorname{Im} k_2)^2 \int_{D_2} |v_2|^2 dx \right\} = 0 \tag{3.9}$$

olur. $\operatorname{Im} \mu_1 \neq 0$, $\operatorname{Im} \mu_2 \neq 0$ olduğundan

$$\int_{D_1} |\nabla v_1|^2 dx + (\operatorname{Im} k_1)^2 \int_{D_1} |v_1|^2 dx = 0$$

olur. Böylece,

$$\int_{D_1} |\nabla v_1|^2 dx = (\operatorname{Im} k_1)^2 \int_{D_1} |v_1|^2 dx = 0$$

olduğundan D_1 de $v_1 = 0$ elde edilir. (3.9) denkleminde

$$\int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx + (\operatorname{Im} k_2)^2 \int_{D_2} |v_2|^2 dx = 0$$

olur. Böylece

$$\int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx = (\operatorname{Im} k_2)^2 \int_{D_2} |v_2|^2 dx = 0$$

ve D_2 de $v_2 = 0$ elde edilir. Böylece $v_1 = v_2 = 0$ elde edilir.

(b) $\operatorname{Im} k_1 = 0$ olsun. (3.5) denkleminde

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{k_1^2} \int_{\Gamma_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds \right) &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{k_1^2} \int_{D_{1,R}} |\nabla v_1|^2 dx \right) + \rho \operatorname{Im} \left(\frac{1}{k_2^2} \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx \right) \\ &= \rho \operatorname{Im} \left(\frac{k_2^2}{|k_2|^4} \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx \right) \\ &= 2\rho \frac{\operatorname{Re} k_2 \operatorname{Im} k_2}{|k_2|^4} \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx \end{aligned}$$

elde edilir. $\rho \geq 0$ olduğundan $\operatorname{Re} k_1 \cdot \operatorname{Re} k_2 \geq 0$ dır. Yani $\operatorname{Re} k_1$ ile $\operatorname{Re} k_2$ aynı işaretlidir. $\operatorname{Im} k_1 = 0$ olduğundan $k_1 = \operatorname{Re} k_1 > 0$ dur. $\rho < 0$ ise $\operatorname{Re} k_1 \cdot \operatorname{Re} k_2 < 0$ olur. Böylece $\operatorname{Re} k_1 > 0$ ve $\operatorname{Re} k_2 < 0$ olur.

- $\operatorname{Re} k_1 \geq 0, \operatorname{Re} k_2 \geq 0$ ve $\rho \geq 0$ ise

$$\operatorname{Im} \int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds = 2\rho \frac{\operatorname{Re} k_2 \operatorname{Im} k_2}{|k_2|^4} \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx \geq 0$$

- $\operatorname{Re} k_1 > 0, \operatorname{Re} k_2 < 0$ ve $\rho < 0$ ise

$$\operatorname{Im} \int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds = 2\rho \frac{\operatorname{Re} k_2 \operatorname{Im} k_2}{|k_2|^4} \int_{D_2} |\nabla v_2|^2 dx \geq 0$$

olur. v_1 (3.3) yayılma şartını sağladığından,

$$v_1 \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} + i \bar{k}_1 v_1 \right) = o \left(\frac{1}{R^2} \right)$$

ve $R \rightarrow \infty$ için

$$\begin{aligned} \int_{K_R} \left(v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} + i \bar{k}_1 |v_1|^2 \right) ds &= \int_{K_R} o \left(\frac{1}{R^2} \right) ds \\ &= \int_{K_R} o \left(\frac{1}{R^2} \right) R^2 dw \\ &= o(1) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\operatorname{Im} \left(\int_{K_R} \left(v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} + i \bar{k}_1 |v_1|^2 \right) ds \right) = o(1)$$

veya

$$\operatorname{Im} \left(\int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} \right) + k_1 \int_{K_R} |v_1|^2 ds = o(1) \quad (3.10)$$

olur. (3.10) denkleminin sol yanının her iki terimi negatif değildir. O halde $R \rightarrow \infty$ için

$$\int_{K_R} |v_1|^2 ds = o(1)$$

elde edilir. Aşağıdaki teorem $v_1 = 0$ olduğunu söyler.

3.2. Teorem

$k > 0$ ve $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$ olsun. $\nabla^2 u + k^2 u = 0$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial u}{\partial R} - iku \right) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |u|^2 ds = 0$$

ise $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ için $u(x) = 0$ dır [1].

Bu teorem Werner tarafından elde edilen teoremin özel bir kısmıdır [18].

(3.4) dün çok detaylı tartışmasından açıktır ki teklik, 3.1. teoremindeki k_1, k_2, μ_1, μ_2 değerlerinin en geniş bir aralığı için gösterilebilmiştir. Yine de mevcut aralık, tekliği sağlayabildiğimiz bir bölgeyi gösterdiği zaman amacımıza uygundur. Bu teklik aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi k_1, k_2, μ_1 ve μ_2 nin bütün genel değerlerinde elde edilememektedir.

$\mathbb{R}^3$ de birim kürenin iç kısmına D_2 , dış kısmına D_1 diyelim. (r, θ, φ) küresel polar koordinatlarda $\Delta u + k^2 u = 0$ Helmholtz denklemi $0 \leq \theta \leq \pi$ ve $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0 \quad (3.11)$$

ye dönüşür. (3.11) denkleminin $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ biçiminde değişkenlerine ayrılabilir çözümleri aranırsa $v = \beta(\beta + 1)$, $\beta, \mu \in \mathbb{N}$ ve $\alpha = \left(v + \frac{1}{4}\right)^{1/2}$ olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} R(r) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left[c_1 J_{\beta + \frac{1}{2}}(kr) + c_2 Y_{\beta + \frac{1}{2}}(kr) \right] \\ \Theta(\theta) &= c_3 P_{\beta}^{\mu}(\cos \theta) + c_4 Q_{\beta}^{\mu}(\cos \theta) \\ \Phi(\varphi) &= c_5 \sin \mu \varphi + c_6 \cos \mu \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

elde edilir [3]. (3.12) de $J_{\beta + \frac{1}{2}}$ ve $Y_{\beta + \frac{1}{2}}$ sırasıyla $\beta + \frac{1}{2}$ inci mertebeden birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonlarıdır. P_{β}^{μ} ve Q_{β}^{μ} de associated Legendre fonksiyonlarıdır. Böylece $u(r, \theta, \varphi)$ çözümü

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ c_1 J_{\beta + \frac{1}{2}}(kr) + c_2 Y_{\beta + \frac{1}{2}}(kr) \right\} \left\{ c_3 P_{\beta}^{\mu}(\cos \theta) + c_4 Q_{\beta}^{\mu}(\cos \theta) \right\} \left\{ c_5 \sin \mu \varphi + c_6 \cos \mu \varphi \right\}$$

olur. $0 \leq r < 1$ için ikinci tür Bessel fonksiyonu

$$Y_{\beta + \frac{1}{2}}(kr) = -\frac{1}{\Gamma\left(-\beta + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{2}{kr}\right)^{\beta + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \beta\right)} (kr)^{2 - \left(\beta + \frac{1}{2}\right)} + \dots$$

$r = 0$ da singülerdir. Bu nedenle $c_2 = 0$ seçelim. $0 \leq r < 1$ bölgesinde (3.11) denkleminin çözümleri

$$u_{2,n,i}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) \{c_1 P_n^i(\cos \theta) + c_2 Q_n^i(\cos \theta)\} \{c_3 \sin i\varphi + c_4 \cos i\varphi\}$$

olur.

$$j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr), \quad y_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} Y_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

diyelim [14].

$$Q_n(\mu) = \frac{1}{2} P_n(\mu) \log \frac{\mu+1}{\mu-1} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2n-4s-1}{(2s+1)(n-s)} P_{n-2s-1}(\mu)$$

olduğundan $\mu = 1$ ve $\mu = -1$ de $Q_n(\mu)$ singülerdir. O nedenle $c_2 = 0$ seçelim. Bu durumda $0 \leq r < 1$ bölgesinde

$$u_{2,n,i}(r, \theta, \varphi) = a_{2,n,i} j_n(k_2 r) P_n^i(\cos \theta) \{c_1 \sin i\varphi + c_2 \cos i\varphi\}$$

olur. Yüzey harmoniği;

$$Y_{n\mu}(\theta, \varphi) = P_n^\mu(\cos \theta) \{c_1 \sin \mu\varphi + c_2 \cos \mu\varphi\}$$

olduğundan

$$u_{2,n,i}(r, \theta, \varphi) = a_{2,n,i} j_n(k_2 r) Y_{ni}(\theta, \varphi) \quad 0 \leq r < 1 \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

elde edilir.

$1 \leq r < \infty$ için $h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x)$ [14] olmak üzere

$$u_{1,n,i}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2k_1 r}{\pi r}} h_n^{(1)}(k_1 r) P_n^i(\cos \theta) \{c_1 \sin i\varphi + c_2 \cos i\varphi\}$$

veya

$$u_{1,n,i}(r, \theta, \varphi) = a_{1,n,i} h_n^{(1)}(k_1 r) Y_{ni}(\theta, \varphi) \quad 1 \leq r < \infty$$

elde edilir. $u_{1,n,i}$ ve $u_{2,n,i}$ fonksiyonlarının (3.1)-(3.2) homogen transmission probleminin çözümleri olabilmesi için gerek ve yeter koşul, S üzerinde

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 a_{1,n,i} h_n^{(1)}(k_1 r) Y_{ni}(\theta) - \mu_2 a_{2,n,i} j_n(k_2 r) Y_{ni}(\theta) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} (a_{1,n,i} h_n^{(1)}(k_1 r) Y_{ni}(\theta)) - \frac{\partial}{\partial n} (a_{2,n,i} j_n(k_2 r) Y_{ni}(\theta)) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

denklemlerinin sağlanmasıdır. $r = 1$ ve $Y_{ni}(\theta) \neq 0$ olduğundan (3.13) denklemi S üzerinde

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 a_{1,n,i} h_n^{(1)}(k_1) - \mu_2 a_{2,n,i} j_n(k_2) &= 0 \\ k_1 a_{1,n,i} h_n^{(1)'}(k_1) - k_2 a_{2,n,i} j_n'(k_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

denklemine indirgenir. Bu sistemin $a_{1,n,i}$ ve $a_{2,n,i}$ için aşıkâr olmayan bir çözüme sahip olması için katsayılar determinanı

$$\begin{vmatrix} \mu_1 h_n^{(1)}(k_1) & -\mu_2 j_n(k_2) \\ k_1 h_n^{(1)'}(k_1) & -k_2 j_n'(k_2) \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$-k_2\mu_1 h_n^{(1)}(k_1) \dot{j}_n'(k_2) + k_1\mu_2 h_n^{(1)}(k_1) \dot{j}_n(k_2) = 0$$

ve

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{k_1 h_n^{(1)}(k_1) \dot{j}_n(k_2)}{k_2 h_n^{(1)}(k_1) \dot{j}_n'(k_2)}$$

elde edilir.

Buradan açıkça görülüyor ki her k_1, k_2 için μ_1/μ_2 (kompleks) transmission sabitleri sonsuz sayıda olacağından (3.1)-(3.2) probleminin çözümü tek değildir.

4. ÇÖZÜMÜN VARLIĞI

(2.1)-(2.2) transmission probleminin çözümünün varlığını araştırırken Fredholm alternatifinden faydalanmayı düşünüyoruz.

$$\gamma_1(x, x') = -\frac{1}{2\pi} \frac{\exp(ik_1|x-x'|)}{|x-x'|}, \quad x \neq x'$$

ve

$$\gamma_2(x, x') = -\frac{1}{2\pi} \frac{\exp(ik_2|x-x'|)}{|x-x'|}, \quad x \neq x'$$

yi tanıyalım. γ_1 ve γ_2 Helmholtz denkleminin temel çözümleridir.

$$\left. \begin{aligned} u_1(x) &= \int_S \left\{ \phi(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} + \psi(x') c_1 \gamma_1(x, x') \right\} ds(x') \\ u_2(x) &= \int_S \left\{ \phi(x') \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x')} + \psi(x') c_2 \gamma_2(x, x') \right\} ds(x') \end{aligned} \right\} x \in \mathbb{R}^3 \setminus S \quad (4.1)$$

potansiyellerini tanıyalım. (4.1) de yoğunluk fonksiyonları $\phi \in C^{1,\alpha}(S)$ ve $\psi \in C^{0,\alpha}(S)$ dir. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sabitlerdir.

Single ve double layer potansiyellerinin regülerlik özelliklerinden dolayı [6] (4.1) ile tanımlanan potansiyeller $u_1 \in C^2(D_1) \cap C^1(\overline{D}_1)$ ve $u_2 \in C^2(D_2) \cap C^1(\overline{D}_2)$ dir. Ayrıca u_1, u_2 potansiyelleri

$$\Delta u_1 + k_1^2 u_1 = 0 \quad D_1 \text{de}$$

$$\Delta u_2 + k_2^2 u_2 = 0 \quad D_2 \text{de}$$

denklemlerini ve

$$u = O\left(\frac{1}{R}\right), \frac{\partial u}{\partial n} - iku = o\left(\frac{1}{R}\right), R \rightarrow \infty$$

yayılma şartlarını sağlar. Bunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \Delta u_1 + k_1^2 u_1 &= \Delta \left(\int_S \left\{ \phi(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} + \psi(x') c_1 \gamma_1(x, x') \right\} ds(x') \right) \\ &\quad + k_1^2 \int_S \left\{ \phi(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} + \psi(x') c_1 \gamma_1(x, x') \right\} ds(x') \\ &= \Delta \left(\int_S \left\{ \phi(x') \nabla_{x'} \gamma_1(x, x') n(x') + \psi(x') c_1 \gamma_1(x, x') \right\} ds(x') \right) \\ &\quad + k_1^2 \int_S \left\{ \phi(x') \nabla_{x'} \gamma_1(x, x') n(x') + \psi(x') c_1 \gamma_1(x, x') \right\} ds(x') \\ &= \int_S \left\{ \phi(x') \Delta_x (\nabla_{x'} \gamma_1(x, x') n(x')) + \psi(x') c_1 \Delta_x \gamma_1(x, x') \right\} ds(x') \\ &\quad + \int_S \left\{ \phi(x') k_1^2 \nabla_{x'} \gamma_1(x, x') n(x') + \psi(x') c_1 k_1^2 \gamma_1(x, x') \right\} ds(x') \\ &= \int_S \left\{ \phi(x') \nabla_{x'} (\Delta_x \gamma_1(x, x')) n(x') + \psi(x') c_1 \Delta_x \gamma_1(x, x') \right\} ds(x') \\ &\quad + \int_S \left\{ \phi(x') k_1^2 \nabla_{x'} \gamma_1(x, x') n(x') + \psi(x') c_1 k_1^2 \gamma_1(x, x') \right\} ds(x') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_S \phi(x') \nabla_{x'} (\Delta_x \gamma_1(x, x') + k_1^2 \gamma_1(x, x')) n(x') ds(x') \\
&+ \int_S \psi(x') c_1 (\Delta_x \gamma_1(x, x') + k_1^2 \gamma_1(x, x')) ds(x') \\
&= 0
\end{aligned}$$

Benzer işlemlerde $\Delta u_2 + k_2^2 u_2 = 0$ olduğu gösteriler. Şimdi u_1 ve u_2 fonksiyonlarının (2.3) yayılma şartlarını sağladığını gösterelim:

$$u_1(x) = \int_S \left\{ \phi(x) \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} + \psi(x') c_1 \gamma_1(x, x') \right\} ds(x'), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S$$

nin. $R \rightarrow \infty$ için sınırlı olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} &= \frac{\partial}{\partial n(x')} \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|} = \nabla_{x'} \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|} \cdot n(x') \\
&= -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|^3} \{ik_1|x-x'| - 1\} \{(x_1 - x'_1)i + (x_2 - x'_2)j + (x_3 - x'_3)k\} n(x') \\
&= -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|^3} \{ik_1|x-x'| - 1\} (\overrightarrow{x-x'}) n(x')
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$u_1(x) = \int_S \left\{ \phi(x') \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|^3} \{ik_1|x-x'| - 1\} (\overrightarrow{x-x'}) n(x') + \psi(x') c_1 \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|} \right) \right\} ds(x'), \right.$$

$x \in \mathbb{R}^3 \setminus S$

veya

$$\begin{aligned}
u_1(x) = & -\frac{ik_1}{2\pi} \int_S \phi(x') \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|^3} |x-x'| \left(\overrightarrow{x-x'} \right) n(x') ds(x') \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_S \phi(x') \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|^3} \left(\overrightarrow{x-x'} \right) n(x') ds(x') - \frac{c_1}{2\pi} \int_S \psi(x') \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|^3} ds(x')
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
|u_1(x)| \leq & \left| \frac{ik_1}{2\pi} \int_S \phi(x') \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|} \frac{\left(\overrightarrow{x-x'} \right)}{|x-x'|} n(x') ds(x') \right| \\
& + \left| \frac{1}{2\pi} \int_S \phi(x') \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|^2} \frac{\left(\overrightarrow{x-x'} \right)}{|x-x'|} n(x') ds(x') \right| + \left| \frac{c_1}{2\pi} \int_S \psi(x') \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|} ds(x') \right| \\
= & \frac{|ik_1|}{2\pi} \int_S |\phi(x')| \left| \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|} \right| \left| \frac{\left(\overrightarrow{x-x'} \right)}{|x-x'|} \right| |n(x')| ds(x') \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_S |\phi(x')| \left| \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|^2} \right| \left| \frac{\left(\overrightarrow{x-x'} \right)}{|x-x'|} \right| |n(x')| ds(x') + \frac{c_1}{2\pi} \int_S |\psi(x')| \left| \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|} \right| ds(x') \\
|u_1(x)| \leq & \frac{k_1}{2\pi} \int_S |\phi(x')| \frac{1}{|x-x'|} ds(x') + \frac{1}{2\pi} \int_S |\phi(x')| \frac{1}{|x-x'|^2} ds(x') + \frac{c_1}{2\pi} \int_S |\psi(x')| \frac{1}{|x-x'|} ds(x')
\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlikte $|S|$, S yüzeyinin ölçüsü ve $|\phi(x)| \leq M$, $|\psi(x)| \leq K$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{2\pi} \int_S |\phi(x')| \frac{1}{|x-x'|} ds(x') &\leq \frac{k_1}{2\pi} M \int_S \frac{1}{|x-x'|} ds(x') \\ &\leq \frac{k_1 M}{2\pi} \frac{|S|}{|x-x'|}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_S |\phi(x')| \frac{1}{|x-x'|^2} ds(x') &\leq \frac{1}{2\pi} M \int_S \frac{1}{|x-x'|^2} ds(x') \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \frac{|S|}{|x-x'|^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{c_1}{2\pi} \int_S |\psi(x')| \frac{1}{|x-x'|} ds(x') \leq \frac{c_1 K}{2\pi} \frac{1}{|x-x'|} |S|$$

elde edilir. Böylece

$$|u_1(x)| \leq \frac{k_1 M}{2\pi} \frac{|S|}{|x-x'|} + \frac{M}{2\pi} \frac{|S|}{|x-x'|^2} + \frac{c_1 K}{2\pi} \frac{|S|}{|x-x'|}$$

veya

$$|x-x'| |u_1(x)| \leq \frac{k_1 M |S|}{2\pi} + \frac{M |S|}{2\pi |x-x'|} + \frac{c_1 K |S|}{2\pi}$$

eşitsizliği elde edilir. Yani

$$\begin{aligned} \lim_{|x|=R \rightarrow \infty} |x-x'| |u_1(x)| &\leq \frac{k_1 M |S|}{2\pi} + \frac{c_1 K |S|}{2\pi} \\ &\leq \frac{|S|}{2\pi} (M k_1 + c_1 K) \end{aligned}$$

sınırlıdır.

$|x| = R \rightarrow \infty$ için $\frac{\partial u_1(x)}{\partial n(x)} - ik_1 u_1(x) = o\left(\frac{1}{R}\right)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial n(x)} \left(\int_S \left\{ \phi(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} + c_1 \psi(x') \gamma_1(x, x') \right\} ds(x') \right) \\
& - ik_1 \int_S \left\{ \phi(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} + c_1 \psi(x') \gamma_1(x, x') \right\} ds(x') \\
& = \int_S \left\{ \phi(x') \frac{\partial^2 \gamma_1(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} + c_1 \psi(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x)} \right\} ds(x') \\
& - ik_1 \int_S \left\{ \phi(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} + c_1 \psi(x') \gamma_1(x, x') \right\} ds(x') \\
& = \int_S \left\{ \phi(x') \frac{\partial}{\partial n(x')} \left(\frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - ik_1 \gamma_1(x, x') \right) + c_1 \psi(x') \left(\frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x)} - ik_1 \gamma_1(x, x') \right) \right\} ds(x')
\end{aligned}$$

$$|x| = R \rightarrow \infty \quad \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x)} - ik_1 \gamma_1(x, x') = o\left(\frac{1}{R}\right) \text{ olduğundan dolayı } R \rightarrow \infty$$

için

$$\frac{\partial u_1(x)}{\partial n(x)} - ik_1 u_1(x) = \int_S \left\{ \phi(x') \frac{\partial(0)}{\partial n(x')} + c_1 \psi(x') \cdot 0 \right\} ds(x')$$

olur. Böylece u_1 fonksiyonu (2.3) yayılma şartını gerçeğe geçirir. Aynı işlem u_2 fonksiyonu içinde kolayca yapılabilir. u_2 de (2.3) yayılma şartını gerçeğe geçirir.

Potansiyel teoremin sıçrama (Jump) şartlarını kullanarak S üzerinde (2.2) sınır şartlarını gerçekleyelim.

4.1. Önerme

$x \in S$ ise

$$\begin{aligned} \mu_1 u_1(x) - \mu_2 u_2(x) &= \int_S \phi(x') \left(\mu_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - \mu_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x')} \right) ds(x') \\ &\quad + \int_S \psi(x') (\mu_1 c_1 \gamma_1(x, x') - \mu_2 c_2 \gamma_2(x, x')) ds(x') - (\mu_1 + \mu_2) \phi(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x)}{\partial n} - \frac{\partial u_2(x)}{\partial n} &= \int_S \phi(x') \left(\frac{\partial^2 \gamma_1(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} - \frac{\partial^2 \gamma_2(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} \right) ds(x') \\ &\quad + \int_S \psi(x') \left(c_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x)} - c_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x)} \right) ds(x') + (c_1 + c_2) \psi(x) \end{aligned} \quad (4.3)$$

olur.

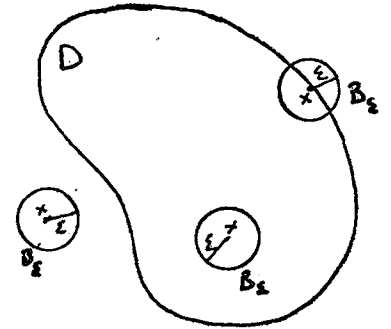
İspat.

$B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı ve x merkezli yuvar olsun.

$$\gamma(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \text{ olsun.}$$

$$P = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial(D \cap B_\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial n(y)} \gamma(x, y) ds(y)$$

yi hesaplayalım.



4.1. Şekil

(i) $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ ise $D \cap B_\varepsilon = \emptyset$ olur ve $P = 0$ elde edilir.

(ii) $x \in D$ ise $\partial(D \cap B_\varepsilon) = \partial B_\varepsilon$ olur. $\partial B_\varepsilon, B_\varepsilon$ nun sınıridir. Kutupsal koordinat kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 P &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial(D \cap B_\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial n(y)} \gamma(x, y) ds(y) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \varepsilon^2 \sin \varphi d\varphi d\theta \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{ik\varepsilon e^{ik\varepsilon} - e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right) \varepsilon^2 \sin \varphi d\varphi d\theta \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (ik\varepsilon - 1) e^{ik\varepsilon} \sin \varphi d\varphi d\theta \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(ik\varepsilon - 1)}{2\pi} e^{ik\varepsilon} \int_0^{2\pi} (-\cos \varphi) \Big|_0^\pi d\theta \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (ik\varepsilon - 1) e^{ik\varepsilon} 2 \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $x \in \partial D$ olsun. ∂D sınırı Lyapunov yüzeyi olduğundan yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ için $\partial(D \cap B_\varepsilon)$ ε yarıçaplı yarı kütenin yüzeyidir.

$$\begin{aligned}
 P &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi d\theta \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

Böylece,

$$P = \begin{cases} -2 & ; \quad x \in D \text{ ise} \\ -1 & ; \quad x \in \partial D \text{ ise} \\ 0 & ; \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D} \text{ ise} \end{cases}$$

olur. $\phi \in C^{1,\alpha}(S)$ olsun. Birinci Green özdeşliği yardımı ile

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus B_\varepsilon} (\phi(y) \nabla^2 \gamma(x, y) + \nabla \phi(y) \nabla \gamma(x, y)) dy &= \int_{\partial D} \phi(y) \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \phi(y) \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) \\ \int_D (\phi(y) \nabla^2 \gamma(x, y) + \nabla \phi(y) \nabla \gamma(x, y)) dy &= \int_{\partial D} \phi(y) \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) + P\phi(x) \end{aligned}$$

veya

$$\int_D (\phi(y) \nabla^2 \gamma(x, y) + \nabla \phi(y) \nabla \gamma(x, y)) dy - P\phi(y) = \int_{\partial D} \phi(y) \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) \quad (4.2)$$

elde edilir. Benzer olarak Green özdeşliği yardımı ile

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus B_\varepsilon} (\phi(y) \nabla^2 \gamma(x, y) - \gamma(x, y) \nabla^2 \phi(y)) dy &= \int_{\partial D} \left(\phi(y) \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial n(y)} - \gamma(x, y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial n(y)} \right) ds(y) \\ &+ \int_{\partial B_\varepsilon} \left(\phi(y) \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial n(y)} - \gamma(x, y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial n(y)} \right) ds(y) \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus B_\varepsilon} (\phi(y) \nabla^2 \gamma(x, y) - \gamma(x, y) \nabla^2 \phi(y)) dy = \int_{\partial D} \left(\phi(y) \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial n(y)} - \gamma(x, y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial n(y)} \right) ds(y).$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \left(\phi(y) \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial n(y)} - \gamma(x, y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial n(y)} \right) ds(y)$$

$$\int_D (\phi(y) \nabla^2 \gamma(x, y) - \gamma(x, y) \nabla^2 \phi(y)) dy = \int_{\partial D} \left(\phi(y) \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial n(y)} - \gamma(x, y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial n(y)} \right) ds(y)$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \phi(y) \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial n(y)} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \gamma(x, y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial n(y)} ds(y)$$

yazarız. Şimdi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \gamma(x, y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial n(y)} ds(y)$$

integralini hesaplayalım. $\bar{y} = \bar{x} + \varepsilon \bar{v}$, $|\bar{v}| = 1$ olmak üzere

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial \phi(\bar{x} + \varepsilon \bar{v})}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = 0$$

elde edilir.

$$\int_D (\phi(y) \nabla^2 \gamma(x, y) - \gamma(x, y) \nabla^2 \phi(y)) dy = \int_{\partial D} \left(\phi(y) \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial n(y)} - \gamma(x, y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial n(y)} \right) ds(y)$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \phi(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \left(\frac{-1}{2\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right) ds(y)$$

veya

$$\begin{aligned}
-P\phi(x) &= \int_{\partial D} \left(\phi(y) \frac{\partial \gamma(x,y)}{\partial n(y)} - \gamma(x,y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial n(y)} \right) ds(y) + \int_D \left(\gamma(x,y) \nabla^2 \phi(y) - \phi(y) \nabla^2 \gamma(x,y) \right) dy \\
-P\phi(x) &= \int_{\partial D} \left(\phi(y) \frac{\partial \gamma(x,y)}{\partial n(y)} - \gamma(x,y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial n(y)} \right) ds(y) + \int_D \left(\gamma(x,y) \nabla^2 \phi(y) + \phi(y) k^2 \gamma(x,y) \right) dy
\end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir.

$$v^+(x_0) = \lim_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \rightarrow x_0 \in \partial D} v(x) \quad , \quad v^-(x_0) = \lim_{x \in D \rightarrow x_0 \in \partial D} v(x)$$

$$v(x) = \int_{\partial D} \phi(y) \frac{\partial \gamma(x,y)}{\partial n(y)} ds(y)$$

tanımlayalım. Böylece (4.2) denklemi

$$\int_D \left(\nabla \phi(y) \nabla \gamma(x,y) - k^2 \phi(y) \gamma(x,y) \right) dy - P\phi(x) = v(x) \tag{4.4}$$

olur.

$x_0 \in \partial D$ ise bu durumda $P = -1$ olur. (4.4) den

$$\int_D \left(\nabla \phi(y) \nabla \gamma(x_0,y) - k^2 \phi(y) \gamma(x_0,y) \right) dy + \phi(x_0) = v(x_0) \tag{4.5}$$

yazarız. (4.4) denkleminde $x \in D \rightarrow x_0 \in \partial D$ limiti hesaplanırsa ($x \in D$ için $P = -2$ olduğundan)

$$\int_D \left(\nabla \phi(y) \nabla \gamma(x_0,y) - k^2 \phi(y) \gamma(x_0,y) \right) dy + 2\phi(x_0) = v^-(x_0) \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) dan (4.5) i çıkartırsak

$$\phi(x_0) = v^-(x_0) - v(x_0), \quad x_0 \in \partial D \quad (4.7)$$

olur. Benzer düşünceyle (4.4) de $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \rightarrow x_0 \in \partial D$ limitini hesaplayalım.
($x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ için $P = 0$ dır).

$$\int_D (\nabla \phi(y) \nabla \gamma(x_0, y) - k^2 \phi(y) \gamma(x_0, y)) dy = v^+(x_0) \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.8) ve (4.5) i çıkartırsak

$$v^+(x_0) - v(x_0) = -\phi(x_0) \quad x_0 \in \partial D \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.3) denkleminde ∂D üzerinde $\frac{\partial \phi(y)}{\partial n(y)} = 0$ seçelim. Bu durumda (4.3)

denklemini

$$-P\phi(x) = v(x) + \int_D (\phi(y) k^2 \gamma(x, y) + \gamma(x, y) \nabla^2 \phi(y)) dy \quad (4.10)$$

olur. $x \in D \rightarrow x_0 \in \partial D$ için

$$-P \frac{\partial \phi(x_0)}{\partial n} = \frac{\partial v^-(x_0)}{\partial n} + \int_D \left(\phi(y) k^2 \frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n(y)} + \frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n(x)} \nabla^2 \phi(y) \right) dy$$

veya

$$0 = \frac{\partial v^-(x_0)}{\partial n} + \int_D \left(\phi(y) k^2 \frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n(y)} + \frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n(x)} \nabla^2 \phi(y) \right) dy \quad (4.11)$$

olur. (4.10) dan $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \rightarrow x_0 \in \partial D$ hesaplarsak

$$0 = \frac{\partial v^+(x_0)}{\partial n} + \int_D \left(\phi(y) k^2 \frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n(y)} + \frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n(y)} \nabla^2 \phi(y) \right) dy \quad (4.12)$$

(4.11) ve (4.12) den $x_0 \in \partial D$ için

$$\frac{\partial v^-(x_0)}{\partial n} = \frac{\partial v^+(x_0)}{\partial n}$$

yazarız. Sonuç olarak

$$v(x) = \int_{\partial D} \phi(y) \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial n(y)} ds(y)$$

double layer potansiyel için sınır üzerinde

$$\left. \begin{aligned} \phi(x_0) &= v^-(x_0) - v(x_0) \\ -\phi(x_0) &= v^+(x_0) - v(x_0) \\ \frac{\partial v^+(x_0)}{\partial n} &= \frac{\partial v^-(x_0)}{\partial n} \end{aligned} \right\} x_0 \in \partial D \quad (4.13)$$

bağıntıları elde edilir.

$\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ olsun. O halde

$$w(x) = \int_{\partial D} \psi(y) \gamma(x, y) ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S$$

ye ψ yoğunluklu single layer potansiyel denir. (4.3) de $\phi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ fonksiyonu sınır üzerinde

$$\left. \begin{aligned} \phi(x_0) &= 0 \\ \frac{\partial \phi(x_0)}{\partial n} &= \psi(x_0) \end{aligned} \right\} \quad x_0 \in \partial D$$

şeklinde seçersek (4.3) denklemi

$$-P\phi(x) = - \int_{\partial D} \gamma(x,y) \psi(y) ds(y) + \int_D (\phi(y) k^2 \gamma(x,y) + \gamma(x,y) \nabla^2 \phi(y)) dy \quad (4.14)$$

olur.

$x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \rightarrow x_0 \in \partial D$ için

$$0 = -w^+(x_0) + \int_D (\phi(y) k^2 \gamma(x_0, y) + \gamma(x_0, y) \nabla^2 \phi(y)) dy \quad (4.15)$$

$x \in D \rightarrow x_0 \in \partial D$ için

$$0 = -w^-(x_0) + \int_D (\phi(y) k^2 \gamma(x_0, y) + \gamma(x_0, y) \nabla^2 \phi(y)) dy \quad (4.16)$$

olur. (4.15)den (4.16) çıkarılırsa

$$w^+(x_0) = w^-(x_0) \quad x_0 \in \partial D \quad (4.17)$$

olur. (4.14) ün iki yanını $\vec{n}$ doğrultusunda türetelim ve $x \in D \rightarrow x_0 \in \partial D$ için

$$2 \frac{\partial \phi(x_0)}{\partial n} = - \frac{\partial w^-(x_0)}{\partial n} + \int_D \left(\frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n} \nabla^2 \phi(y) + \phi(y) k^2 \frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n} \right) dy \quad (4.18)$$

veya

$$2\psi(x_0) = -\frac{\partial w^-(x_0)}{\partial n} + \int_D \left(\frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n} \nabla^2 \phi(y) + \phi(y) k^2 \frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n} \right) dy \quad (4.19)$$

olur. (4.14) ün $\vec{n}$ doğrultusunda türevini alalım ve $x = x_0 \in \partial D$ için

$$\frac{\partial \phi(x_0)}{\partial n} = -\frac{\partial w^-(x_0)}{\partial n} + \int_D \left(\frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n} \nabla^2 \phi(y) + \phi(y) k^2 \frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n} \right) dy$$

veya

$$\psi(x_0) = -\frac{\partial w(x_0)}{\partial n} + \int_D \left(\frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n} \nabla^2 \phi(y) + \phi(y) k^2 \frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n} \right) dy \quad (4.20)$$

olur. (4.20) den (4.19) u çıkartırsak

$$-\psi(x_0) = \frac{\partial w^-(x_0)}{\partial n} - \frac{\partial w(x_0)}{\partial n} \quad (4.21)$$

(4.14) ün iki yanını $\vec{n}$ doğrultusunda tekrar türetirsek ve $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \rightarrow x_0 \in \partial D$ için

$$0 = -\frac{\partial w^+(x_0)}{\partial n} + \int_D \left(\nabla^2 \phi(y) + \phi(y) k^2 \right) \frac{\partial \gamma(x_0, y)}{\partial n} dy \quad (4.22)$$

olur. (4.20) den (4.22) yi çıkartırsak

$$\psi(x_0) = \frac{\partial w^+(x_0)}{\partial n} - \frac{\partial w(x_0)}{\partial n} \quad (4.23)$$

elde edilir. Böylece sınır üzerinde

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w(x_0)}{\partial n} - \frac{\partial w^-(x_0)}{\partial n} &= \psi(x_0) \\ \frac{\partial w(x_0)}{\partial n} - \frac{\partial w^+(x_0)}{\partial n} &= -\psi(x_0) \\ w^+(x_0) &= w^-(x_0) \end{aligned} \right\}, \quad x_0 \in \partial D \text{ için} \quad (4.24)$$

değerleri elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} u_1(x) &= \int_S \left(\phi(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} + \psi(x') c_1 \gamma_1(x, x') \right) ds(x'), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S \\ \text{ve} \\ u_2(x) &= \int_S \left(\phi(x') \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x')} + \psi(x') c_2 \gamma_2(x, x') \right) ds(x'), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

$$\left. \begin{aligned} v_m(x) &= \int_S \phi(x') \frac{\partial \gamma_m(x, x')}{\partial n(x')} ds(x') \quad m = 1, 2, \quad x \notin S \\ w_m(x) &= \int_S \psi(x') \gamma_m(x, x') ds(x') \quad m = 1, 2, \quad x \notin S \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

olsun.

$$\left. \begin{aligned} u_1(x) &= v_1(x) + c_1 w_1(x) \\ u_2(x) &= v_2(x) + c_2 w_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

olur. Double layer potansiyeller için olan sıçrama özelliğinden dolayı

$$\left. \begin{aligned} -\phi(x_0) &= v_m^+(x_0) - v_m(x_0) \\ \phi(x_0) &= v_m^-(x_0) - v_m(x_0) \\ \frac{\partial v_m^-(x_0)}{\partial n} &= \frac{\partial v_m^+(x_0)}{\partial n} \end{aligned} \right\} x_0 \in \partial D \quad (4.28)$$

olur. Single layer potansiyeller için olan sıçrama özelliğinden dolayı

$$\left. \begin{aligned} w_m^+(x_0) &= w_m^-(x_0) \\ \psi(x_0) &= \frac{\partial w_m^+(x_0)}{\partial n} - \frac{\partial w_m(x_0)}{\partial n} \\ -\psi(x_0) &= \frac{\partial w_m^-(x_0)}{\partial n} - \frac{\partial w_m(x_0)}{\partial n} \end{aligned} \right\} x_0 \in \partial D \quad (4.29)$$

olur. Şimdi $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \rightarrow x_0 \in S$ limiti (4.27) de hesaplayalım.

$$u_1(x) = \int_S \phi(x') \frac{\partial \gamma(x, x')}{\partial n(x')} ds(x') + \int_S \psi(x') c_1 \gamma_1(x, x') ds(x') = v_1(x) + c_1 w_1(x)$$

veya

$$u_1^+(x_0) = v_1^+(x_0) + c_1 w_1^+(x_0) = v_1(x_0) - \phi(x_0) + c_1 w_1(x_0)$$

$$u_1(x_0) = \int_S \phi(x') \frac{\partial \gamma(x_0, x')}{\partial n(x')} ds(x') - \phi(x_0) + \int_S \psi(x') c_1 \gamma_1(x_0, x') ds(x')$$

$$\text{olur } x \in D \rightarrow x_0 \in S \text{ için } u_2^-(x_0) = v_2^-(x_0) + c_2 w_2^-(x_0)$$

$$u_2(x_0) = \int_S \phi(x') \frac{\partial \gamma_2(x_0, x')}{\partial n(x')} ds(x') + \phi(x_0) + \int_S \psi(x') c_2 \gamma_2(x_0, x') ds(x')$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n}(x_0) = \int_S \phi(x') \frac{\partial^2 \gamma_1(x_0, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} ds(x') + \int_S \psi(x') c_1 \frac{\partial \gamma_1(x_0, x')}{\partial n(x)} ds(x') + c_1 \psi(x_0)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n}(x_0) = \int_S \phi(x') \frac{\partial^2 \gamma_2(x_0, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} ds(x') + \int_S \psi(x') c_2 \frac{\partial \gamma_2(x_0, x')}{\partial n(x)} ds(x') - c_2 \psi(x_0)$$

$$\begin{aligned} (\mu_1 u_1 - \mu_2 u_2)(x_0) &= \mu_1 \int_S \phi(x') \frac{\partial \gamma_1(x_0, x')}{\partial n(x')} ds(x') - \mu_1 \phi(x_0) + \mu_1 \int_S \psi(x') c_1 \gamma_1(x_0, x') ds(x') \\ &\quad - \mu_2 \int_S \phi(x') \frac{\partial \gamma_2(x_0, x')}{\partial n(x')} ds(x') - \mu_2 \phi(x_0) - \mu_2 \int_S \psi(x') c_2 \gamma_2(x_0, x') ds(x') \\ &= \int_S \phi(x') \left\{ \mu_1 \frac{\partial \gamma_1(x_0, x')}{\partial n(x)} - \mu_2 \frac{\partial \gamma_2(x_0, x')}{\partial n(x)} \right\} ds(x') - (\mu_1 + \mu_2) \phi(x_0) \\ &\quad + \int_S \psi(x') \{ \mu_1 c_1 \gamma_1(x_0, x') - \mu_2 c_2 \gamma_2(x_0, x') \} ds(x') \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} \right)(x_0) &= \int_S \phi(x') \frac{\partial^2 \gamma_1(x_0, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} ds(x') + \int_S \psi(x') c_1 \frac{\partial \gamma_1(x_0, x')}{\partial n(x)} ds(x') + c_1 \psi(x_0) \\ &\quad - \int_S \phi(x') \frac{\partial^2 \gamma_2(x_0, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} ds(x') - \int_S \psi(x') c_2 \frac{\partial \gamma_2(x_0, x')}{\partial n(x)} ds(x') + c_2 \psi(x_0) \\ &= \int_S \phi(x') \left\{ \frac{\partial^2 \gamma_1(x_0, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} - \frac{\partial^2 \gamma_2(x_0, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} \right\} ds(x') + \psi(x_0) \{ c_1 + c_2 \} \\ &\quad + \int_S \psi(x') \left\{ c_1 \frac{\partial \gamma_1(x_0, x')}{\partial n(x)} - c_2 \frac{\partial \gamma_2(x_0, x')}{\partial n(x)} \right\} ds(x') \end{aligned} \quad (4.31)$$

Böylece ispat tamamlandı.

Şimdi $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}: C(S) \rightarrow C(S)$ integral operatörlerini

$$(A_{11}\phi)(x) = \int_S \phi(x') \left\{ \mu_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - \mu_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x')} \right\} ds(x')$$

$$(A_{12}\psi)(x) = \int_S \psi(x') \left\{ \mu_1 c_1 \gamma_1(x, x') - \mu_2 c_2 \gamma_2(x, x') \right\} ds(x')$$

$$(A_{21}\phi)(x) = \int_S \phi(x') \left\{ \frac{\partial^2 \gamma_1(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} - \frac{\partial^2 \gamma_2(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} \right\} ds(x')$$

$$(A_{22}\psi)(x) = \int_S \psi(x') \left\{ c_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x)} - c_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x)} \right\} ds(x')$$

tanıyalım. Böylece yukarıdaki operatörleri kullanarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.1. Teorem:

ϕ ve ψ yoğunluk fonksiyonları,

$$(\mu_1 + \mu_2)\phi - A_{11}\phi - A_{12}\psi = -f \quad (4.32)$$

$$(c_1 + c_2)\psi + A_{21}\phi + A_{22}\psi = g$$

sınır integral denkleminin bir çözümü ise

$$u_m(x) = \int_S \left\{ \phi(x') \frac{\partial \gamma_m(x, x')}{\partial n(x')} + \psi(x') c_m \gamma_m(x, x') \right\} ds(x'), x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, m = 1, 2 \quad (4.1)$$

potansiyelleri

$$\Delta u_m + k_m^2 u_m = 0, D_m \text{ 'de } (m = 1, 2) \quad (2.1)$$

$$\mu_1 u_1 - \mu_2 u_2 = f$$

S'de

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} = g$$

(2.2)

transmission probleminin çözümleridir.

4.1. Tanım:

Ω , m-boyutlu Euclidean uzayında sınırlı, ölçülebilir bir küme olsun. x ve ξ , Ω da herhangi iki nokta olsun. $r = |x - \xi|$ olsun. $A(x, \xi)$ fonksiyonu $\Omega \times \Omega$ da sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun:

$$|A(x, \xi)| \leq C = \text{sabit}$$

$0 \leq \alpha < m$, $\alpha = \text{sabit}$ sabit olmak üzere

$$K(x, \xi) = \frac{A(x, \xi)}{r^\alpha} \quad (4.33)$$

fonksiyonuna bir zayıf singüler çekirdek denir.

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} K(x, \xi) u(\xi) d\xi = \int_{\Omega} \frac{A(x, \xi)}{r^\alpha} u(\xi) d\xi \quad (4.34)$$

K operatörüne zayıf singüler operatör denir [15].

4.2. Teorem:

Zayıf singülerli integral operatör $L_2(\Omega)$ uzayında tanımlıdır ve sınırlıdır.

Bu operatörün normu $\frac{C|S_1|H^{m-\alpha}}{m-\alpha}$ ile sınırlıdır. Burada $C, |A(x, \xi)| \leq C$ eşitsizliği sağlayan bir sabittir. H, Ω kümesinin çapıdır ve

$$|S_1| = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}m}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}m\right)} \quad [15].$$

İspat:

Önce ispatı dört adımda yapacağız.

$$1. \quad \int_{\Omega} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{\alpha}} \quad x \in \overline{\Omega}$$

integralinin sınırlı olduğunu göstereceğiz. Ω, x merkezli H yarıçaplı küre tarafından kapsanır. Böylece

$$\int_{\Omega} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{\alpha}} \leq \int_{|x-\xi| < H} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{\alpha}}$$

elde edilir. Burada $d\xi = r^{m-1} dr dS_1$ dir. Burada dS_1, S_1 birim yarıçaplı kürenin yüzey alan elementidir.

$$\int_{|x-\xi| < H} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{\alpha}} = \int_{S_1} \left\{ \int_0^H r^{m-\alpha-1} dr \right\} dS_1 = \frac{H^{m-\alpha}}{m-\alpha} |S_1|$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{\Omega} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{\alpha}} \leq \frac{|S_1|H^{m-\alpha}}{m-\alpha}, \quad x \in \overline{\Omega}$$

çıkar. Simetriden dolayı

$$\int_{\Omega} \frac{dx}{|x-\xi|^{\alpha}} \leq \frac{|S_1|H^{m-\alpha}}{m-\alpha}, \quad \xi \in \overline{\Omega}$$

elde ederiz.

2. 2 m katlı integral

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{|x-\xi|^{\alpha}} dx d\xi = \int_{\Omega} u^2(\xi) \left\{ \int_{\Omega} \frac{dx}{|x-\xi|^{\alpha}} \right\} d\xi \leq \frac{|S_1|H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \|u\|^2$$

olarak vardır. Burada $\|u\|$, L_2 deki normdur. Fubini teoreminden dolayı hemen her $x \in \Omega$ için integrallenebilir.

$$\int_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{|x-\xi|^{\alpha}} d\xi$$

integrali vardır.

3.

$$|K(x, \xi)u(\xi)| \leq C \frac{1}{r^{\frac{1}{2}\alpha}} \frac{|u(\xi)|}{r^{\frac{1}{2}\alpha}} = C \left| \frac{1}{r^{\frac{1}{2}\alpha}} \right| \left| \frac{u(\xi)}{r^{\frac{1}{2}\alpha}} \right| \leq \frac{C}{2} \left\{ \frac{1}{r^{\alpha}} + \frac{u^2(\xi)}{r^{\alpha}} \right\}$$

1. ve 2. adımlarda elde edilen eşitsizlikler nedeni ile 3. adımdaki eşitsizliğin ilk terimi Ω daki $\forall x$ için Ω da ξ ye göre integrallenebilirdir. İkinci terimde hemen hemen her $x \in \Omega$ için ξ ye göre integrallenebilirdir.

4. Schwartz-Bunyakovski eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
 [(Ku)(x)]^2 &= \left\{ \int_{\Omega} K(x, \xi) u(\xi) d\xi \right\}^2 \leq \left| \int_{\Omega} K(x, \xi) u(\xi) d\xi \right|^2 \\
 &\leq \left\{ \left| \int_{\Omega} K(x, \xi) u(\xi) d\xi \right| \right\}^2 \\
 &\leq \left\{ \int_{\Omega} \frac{C}{|x - \xi|^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{|u(\xi)|}{|x - \xi|^{\frac{\alpha}{2}}} d\xi \right\}^2 \\
 &\leq \int_{\Omega} \frac{C^2}{|x - \xi|^{\alpha}} d\xi \int_{\Omega} \frac{|u(\xi)|^2}{|x - \xi|^{\alpha}} d\xi \\
 &\leq \frac{H^{m-\alpha}}{m-\alpha} |S_1| C^2 \int_{\Omega} \frac{|u(\xi)|^2}{|x - \xi|^{\alpha}} d\xi \\
 &\leq \frac{H^{m-\alpha}}{m-\alpha} |S_1| C^2 \int_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{|x - \xi|^{\alpha}} d\xi
 \end{aligned}$$

elde ederiz. $x \in \Omega$ için

$$\int_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{r^{\alpha}} d\xi$$

fonksiyonu Ω da integrallenebilir olduğundan

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} K(x, \xi) u(\xi) d\xi = \int_{\Omega} \frac{A(x, \xi)}{|x - \xi|^{\alpha}} u(\xi) d\xi$$

integrali Ω da karesi integrallenebilir. Böylece K operatörü $L_2(\Omega)$ uzayı üzerinde tanımlıdır. Son eşitsizliği x 'e göre integrallediğimizde,

$$\begin{aligned}
 \|Ku\|^2 &= \int_{\Omega} [(Ku)(x)]^2 dx \leq \int_{\Omega} \left\{ \frac{C^2 |S_1| H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \int_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{|x-\xi|^\alpha} d\xi \right\} dx \\
 &\leq \frac{C^2 |S_1| H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{|x-\xi|^\alpha} d\xi \right\} dx \\
 &\leq \frac{C^2 |S_1| H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \int_{\Omega} u^2(\xi) \left\{ \int_{\Omega} \frac{dx}{|x-\xi|^\alpha} d\xi \right\} \\
 &\leq \frac{C^2 |S_1| H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \frac{|S_1| H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \|u\|^2 \\
 \|Ku\|^2 &\leq \frac{C^2 |S_1|^2 H^{2(m-\alpha)}}{(m-\alpha)^2} \|u\|^2
 \end{aligned}$$

veya

$$\|Ku\| \leq \frac{C |S_1| H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \|u\|$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \|K\| &= \sup_{\substack{x \in \Omega \\ u \neq 0}} \frac{\|Ku\|}{\|u\|} \leq \sup_{u \neq 0} \frac{C |S_1| H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \\
 &\leq \frac{C |S_1| H^{m-\alpha}}{m-\alpha}
 \end{aligned}$$

olduğundan teoremi ispatlamış oluruz.

4.2. Tanım:

Ω m-boyutlu Euclidyen uzayda ölçülebilir bir küme olsun. Bu küme sınırlı da olabilir, sınırsız da olabilir, x ve ξ Ω nın herhangi iki noktası olsun. Bu noktaların ölçülebilir bir $K(x, \xi)$ fonksiyonu

$$\iint_{\Omega \Omega} K^2(x, \xi) dx d\xi < \infty$$

oluyor ise $K(x, \xi)$ fonksiyonuna Fredholm çekirdeği denir. $K(x, \xi)$ Fredholm çekirdekli integral operatörüne

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} K(x, \xi) u(\xi) d\xi$$

Fredholm operatörü denir [15].

4.3. Teorem:

Zayıf singüler operatör $L_2(\Omega)$ uzayında kompaktır (completely continuons) [15].

İspat:

$K(x, \xi)$, (4.33) ile tanımlanan zayıf singüler çekirdek fonksiyon olsun.

$\varepsilon > 0$ verilen bir sayı olmak üzere $K_\varepsilon(x, \xi)$ ve $K'_\varepsilon(x, \xi)$ fonksiyonları

$$K_\varepsilon(x, \xi) = \begin{cases} K(x, \xi) & , \quad |x - \xi| \geq \varepsilon \\ 0 & , \quad |x - \xi| < \varepsilon \end{cases}$$

$$K'_\varepsilon(x, \xi) = \begin{cases} 0 & , \quad |x - \xi| \geq \varepsilon \\ K(x, \xi) & , \quad |x - \xi| < \varepsilon \end{cases}$$

tanımlansın. Böylece Ω da $K(x, \xi) = K_\varepsilon(x, \xi) + K'_\varepsilon(x, \xi)$ olur. K_ε ve K'_ε integral operatörlerini

$$\begin{aligned} (K_\varepsilon u)(x) &= \int_{\Omega} K_\varepsilon(x, \xi) u(\xi) d(\xi) \\ &= \int_{\Omega \setminus \{\xi; |x - \xi| < \varepsilon\}} K(x, \xi) u(\xi) d(\xi) + \int_{|x - \xi| < \varepsilon} 0 \cdot u(\xi) d(\xi) \\ &= \int_{\Omega \setminus \{\xi; |x - \xi| < \varepsilon\}} K(x, \xi) u(\xi) d(\xi) \\ (K'_\varepsilon u)(x) &= \int_{\Omega} K'_\varepsilon(x, \xi) u(\xi) d(\xi) \\ &= \int_{|x - \xi| < \varepsilon} K(x, \xi) u(\xi) d(\xi) \end{aligned}$$

tanımlıyalım.

$$(K_\varepsilon u)(x) + (K'_\varepsilon u)(x) = \int_{\Omega} K(x, \xi) u(\xi) d(\xi) = (Ku)(x)$$

olduğundan

$$K_\varepsilon + K'_\varepsilon = K$$

olur.

$$|K_\varepsilon(x, \xi)| \leq \begin{cases} \frac{C}{|x - \xi|^\alpha} & , \quad |x - \xi| \geq \varepsilon, \\ 0 & , \quad |x - \xi| < \varepsilon \end{cases}$$

olur ve sonuçta

$$|K_\varepsilon(x, \xi)| \leq \frac{C}{\varepsilon^\alpha}$$

olur. Burada K_ε bir Fredholm operatörüdür ve $L_2(\Omega)$ da kompakttır (completely continuons) [15]. K'_ε operatörünün normu için bir kestirimde bulunalım. Yazımda kısa olsun diye $(K'_\varepsilon u)(x) = v(x)$ olarak alalım.

$$|v(x)| = \left| \int_{\Omega_n(|x-\xi|<\varepsilon)} \frac{A(x, \xi)}{|x - \xi|^\alpha} u(\xi) d\xi \right| \leq C \int_{\Omega_n(|x-\xi|<\varepsilon)} \frac{|u(\xi)|}{|x - \xi|^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{|x - \xi|^{\frac{\alpha}{2}}} d\xi$$

Schwartz-Bunyakouski eşitsizliğinden

$$v^2(x) \leq C^2 \int_{\Omega_n(|x-\xi|<\varepsilon)} \frac{u^2(\xi)}{|x - \xi|^\alpha} d\xi \int_{\Omega_n(|x-\xi|<\varepsilon)} \frac{1}{|x - \xi|^\alpha} d\xi \leq C^2 \int_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{|x - \xi|^\alpha} d\xi \int_{|x-\xi|<\varepsilon} \frac{1}{|x - \xi|^\alpha} d\xi$$

elde edilir. x merkezli küresel koordinatlarda

$$\begin{aligned} \int_{|x-\xi|<\varepsilon} \frac{1}{|x - \xi|^\alpha} d\xi &= \int_{S_1} \left\{ \int_0^\varepsilon |x - \xi|^{m-\alpha-1} dr \right\} ds_1 \\ &= \frac{|S_1| \varepsilon^{m-\alpha}}{m-\alpha} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$v^2(x) \leq \frac{C^2 |S_1| \varepsilon^{m-\alpha}}{m-\alpha} \int_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{|x - \xi|^\alpha} d\xi$$

elde edilir. Son eşitsizliği x 'e göre integrelersek

$$\|K'_\varepsilon u\|^2 = \|v\|^2 \leq \frac{C^2 |S_1|^2 (\varepsilon H)^{2(m-\alpha)}}{(m-\alpha)^2} \|u\|^2$$

olur. Böylece

$$\|K'_\varepsilon\| \leq \frac{C |S_1| (\varepsilon H)^{(m-\alpha)}}{m-\alpha}$$

elde edilir. $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğunda $\|K'_\varepsilon\| \rightarrow 0$ gider. Böylece K operatörü $L_2(\Omega)$ da kompakttır. Burada Ω m -boyutlu öklid uzayında sınırlı ve kapalıdır. $A(x, \xi)$ fonksiyonu Ω da bütün x ve ξ noktalarına göre süreklidir.

4.4. Teorem:

$$K: C(\Omega) \rightarrow C(\Omega), (Ku)(x) = \int_{\Omega} K(x, \xi) u(\xi) d\xi$$

zayıf singülerli integral operatörü $C(\Omega)$ uzayında kompakttır [15].

İspat:

$M \subset C(\Omega)$, bir küme olsun, öyleki;

$$\|u\| = \max_{x \in \Omega} |u(x)| \leq c, \quad c = \text{sabit}$$

olsun. $K(M)$ 'in $C(\Omega)$ da kompakt olduğunu göstermek yeter. Burada K , (4.34) ile tanımlanan zayıf singüler integral operatördür. Arzela teoremine göre [1] $K(M)$ nin düzgün sınırlı ve eşsürekli (equicontinuous) olduğunu göstermeliyiz. $u \in M$ olsun.

$$v(x) = (Ku)(x) = \int_{\Omega} \frac{A(x, \xi)}{|x - \xi|^\alpha} u(\xi) d\xi, \quad x \in \Omega$$

ile tanımlayalım.

$$|A(x - \xi)| \leq C$$

ve

$$\int_{\Omega} \frac{d\xi}{|x - \xi|^\alpha} \leq \frac{|S_1| H^{m-\alpha}}{m - \alpha}, \quad x \in \overline{\Omega}$$

eşitsizliği kullanılarak

$$|v(x)| \leq \left| \int_{\Omega} \frac{A(x, \xi)}{|x - \xi|^\alpha} u(\xi) d\xi \right| \leq \frac{|S_1| H^{m-\alpha}}{m - \alpha} = \text{sabit}$$

elde ederiz. Böylece $K(M)$ in düzgün sınırlıdır. Şimdi $K(M)$ nin eşsürekliliğini gösterelim. $v(x+h) - v(x)$ farkını hesaplayalım.

$$v(x+h) - v(x) = \int_{\Omega} \left[\frac{A(x+h, \xi)}{|x+h - \xi|^\alpha} - \frac{A(x, \xi)}{|x - \xi|^\alpha} \right] u(\xi) d\xi \quad (4.35)$$

olur. x merkezli 2δ yarıçaplı yuvara $\sum_{2\delta}$ diyelim. $\sum_{2\delta} = \{\xi: |x - \xi| < \varepsilon\}$. δ keyfi bir pozitif sayıdır. $\Omega_1 = \Omega \setminus \sum_{2\delta}$ diyelim. Eğer $|h| < \delta$ özel koşulunu koyarsak $x + h$ noktası $\sum_{2\delta}$ yuvarının içinde kalır. $x + h$ noktasının $\sum_{2\delta}$ yuvarının yüzeyine olan uzaklığı δ dan büyük olur.

(4.35) denklemi,

$$\begin{aligned}
 |v(x+h) - v(x)| &= \left| \int_{\Omega} \left[\frac{A(x+h, \xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x, \xi)}{|x-\xi|^\alpha} \right] u(\xi) d\xi \right| \\
 &\leq \left| \int_{\Omega_1} \left[\frac{A(x+h, \xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x, \xi)}{|x-\xi|^\alpha} \right] u(\xi) d\xi \right| \\
 &\quad + \left| \int_{\Sigma_{28}} \left[\frac{A(x+h, \xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x, \xi)}{|x-\xi|^\alpha} \right] u(\xi) d\xi \right| \\
 &\leq \int_{\Omega_1} \left| \frac{A(x+h, \xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x, \xi)}{|x-\xi|^\alpha} \right| |u(\xi)| d\xi \\
 &\quad + \int_{\Sigma_{28}} \left| \frac{A(x+h, \xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x, \xi)}{|x-\xi|^\alpha} \right| |u(\xi)| d\xi \\
 &\leq c \int_{\Omega_1} \left| \frac{A(x+h, \xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x, \xi)}{|x-\xi|^\alpha} \right| d\xi \\
 &\quad + c.C \int_{\Sigma_{28}} \left| \frac{1}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{1}{|x-\xi|^\alpha} \right| d\xi \\
 &\leq c \int_{\Omega_1} \left| \frac{A(x+h, \xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x, \xi)}{|x-\xi|^\alpha} \right| d\xi \\
 &\quad + c.C \left\{ \int_{\Sigma_{28}} \frac{d\xi}{|x+h-\xi|^\alpha} + \int_{\Sigma_{28}} \frac{d\xi}{|x-\xi|^\alpha} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

olur.

$$\int_{\sum_{2\delta}} \frac{d\xi}{|x-\xi|^\alpha} = \int_{|x-\xi| < 2\delta} \frac{d\xi}{|x-\xi|^\alpha} = \frac{|S_1|(2\delta)^{m-\alpha}}{m-\alpha} \quad (4.37)$$

olduğunu biliyoruz. Eğer $\xi \in \sum_{2\delta}$ ise $|x-\xi| \leq 2\delta$ ve $|x+h-\xi| \leq |x-\xi| + |h| < 3\delta$ eşitsizliği vardır. Bunun anlamı x noktası $x+h$ merkezli 3δ yarıçaplı yuvarın içinde kalır. $\sum_{2\delta}$ yuvası $r_1 = |x+h-\xi| \leq 3\delta$ yuvarı içinde kalır.

$$\int_{\sum_{2\delta}} \frac{d\xi}{|x+h-\xi|^\alpha} < \int_{|x+h-\xi| < 3\delta} \frac{d\xi}{|x+h-\xi|^\alpha} = \frac{|S_1|(3\delta)^{m-\alpha}}{m-\alpha} \quad (4.38)$$

elde edilir. (4.37) ve (4.38) i (4.36) da kullanırsak

$$\begin{aligned} |v(x+h) - v(x)| &\leq c.C \left(\frac{2^{m-\alpha} + 3^{m-\alpha}}{m-\alpha} \right) |S_1| \delta^{m-\alpha} \\ &\quad + c. \int_{\Omega_1} \left| \frac{A(x+h, \xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x, \xi)}{|x-\xi|^\alpha} \right| d\xi \end{aligned} \quad (4.39)$$

$\varepsilon > 0$ verildiğinde

$$c.C \left(\frac{2^{m-\alpha} + 3^{m-\alpha}}{m-\alpha} \right) |S_1| \delta^{m-\alpha} < \frac{1}{2} \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde yeteri kadar küçük $\delta > 0$ vardır. Böylece

$$|v(x+h) - v(x)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon + c. \int_{\Omega_1} \left| \frac{A(x+h, \xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x, \xi)}{|x-\xi|^\alpha} \right| d\xi \quad (4.40)$$

elde edilir. Şimdi δ yı sabitleştirelim. Ω_1 bölgesinde $|x - \xi| \geq 2\delta$ dır. Dolayısıyla

$\frac{A(x, \xi)}{|x - \xi|^\alpha}$ fonksiyonu x ve ξ noktalarına göre düzgün süreklidir.

$\varepsilon_1 > 0$ verildiğinde bir h_0 sayısı seçilebilir, öyleki $|h| \leq h_0$ olduğunda

$$\left| \frac{A(x+h, \xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x, \xi)}{|x-\xi|^\alpha} \right| < \frac{\varepsilon}{2c|\Omega|} = \varepsilon_1$$

olur. Böylece (4.40) eşitsizliği

$$\begin{aligned} |v(x+h) - v(x)| &\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{c\varepsilon}{2c|\Omega|} \int_{\Omega_1} d\xi \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon|\Omega_1|}{2|\Omega|} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. h_0 yalnız ε 'a bağlıdır. x 'e veya u 'ya bağlı değildir. Bunun sonucunda $K(M)$ kümesi düzgün süreklidir. Böylece ispat tamamlandı.

4.4. Teoreminin ispatı esnasında $u(x)$ 'in sürekliliğini değil, fakat yalnız sınırlı olduğunu kullandık. Böylece şu sonucu verebiliriz.

4.1. Sonuç

Ω sınırlı ve kapalı bir küme olsun. $A(x, \xi)$ fonksiyonu Ω da sürekli olsun. Bu durumda

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} \frac{A(x, \xi)}{|x - \xi|^{\alpha}} u(\xi) d\xi = v(x)$$

zayıf singüler operatörü her sınırlı $u(x)$ fonksiyonunu sürekli $v(x)$ fonksiyonuna dönüştürür [15].

(4.32) deki integral operatörler zayıf singüler çekirdeklidir. Önce A_{21} operatörünün zayıf singüler çekirdekli olduğunu gösterelim.

$$\gamma_1(x, x') = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ik_1|x-x'|)^j}{j!|x-x'|}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{|x-x'|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik_1)^j |x-x'|^{j-1}}{j!} \right\}$$

$$\gamma_2(x, x') = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{|x-x'|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik_2)^j |x-x'|^{j-1}}{j!} \right\}$$

açılımlarına sahiptir.

Şimdi

$$\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial n(x) \partial n(x')} - \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial n(x) \partial n(x')} = O\left(\frac{1}{|x-x'|}\right)$$

olduğunu gösterelim.

$$\frac{\partial^2(\gamma_1 - \gamma_2)}{\partial n(x) \partial n(x')} = \nabla_x (\nabla_{x'} (\gamma_1 - \gamma_2) n(x')) n(x)$$

$$\begin{aligned} (\gamma_1 - \gamma_2) &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{|x - x'|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik_1)^j |x - x'|^{j-1}}{j!} - \frac{1}{|x - x'|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik_2)^j |x - x'|^{j-1}}{j!} \right\} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik_1)^j - (ik_2)^j}{j!} |x - x'|^{j-1} \right\} \end{aligned}$$

$x' = (y_1, y_2, y_3)$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n(x')} (\gamma_1 - \gamma_2) &= \left(\frac{\partial}{\partial y_1} i + \frac{\partial}{\partial y_2} j + \frac{\partial}{\partial y_3} k \right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik_1)^j - (ik_2)^j}{j!} |x - x'|^{j-1} n(x') \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik_1)^j - (ik_2)^j}{j!} (-1) \left\{ (j-1) |x - x'|^{j-2} \frac{(x_1 - y_1)}{|x - x'|} i + (j-1) |x - x'|^{j-2} \frac{(x_2 - y_2)}{|x - x'|} j \right. \\ &\quad \left. + (j-1) |x - x'|^{j-2} \frac{(x_3 - y_3)}{|x - x'|} k \right\} n(x') \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik_2)^j - (ik_1)^j}{j!} (j-1) |x - x'|^{j-3} (\overrightarrow{x - x'}) n(x') \\ \frac{\partial^2(\gamma_1 - \gamma_2)}{\partial n(x) \partial n(x')} &= \frac{\partial}{\partial n(x)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik_2)^j - (ik_1)^j}{j!} (j-1) |x - x'|^{j-3} (\overrightarrow{x - x'}) n(x') \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik_2)^j - (ik_1)^j}{j!} (j-1) \left\{ \nabla_x |x - x'|^{j-3} (\overrightarrow{x - x'}) + |x - x'|^{j-3} \nabla_x (\overrightarrow{x - x'}) \right\} n(x') n(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik_2)^j - (ik_1)^j}{j!} (j-1) \left\{ \left[(j-3)|x-x'|^{j-4} \frac{(x_1-y_1)}{|x-x'|} i + (j-3)|x-x'|^{j-4} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{(x_2-y_2)}{|x-x'|} j + (j-3)|x-x'|^{j-4} \frac{(x_3-y_3)}{|x-x'|} k \right] \overline{(x-x')} + 3|x-x'|^{j-3} \right\} n(x')n(x) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik_2)^j - (ik_1)^j}{j!} (j-1) \left\{ (j-3)|x-x'|^{j-5} |x-x'|^2 + 3|x-x'|^{j-3} \right\} n(x')n(x) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik_2)^j - (ik_1)^j}{j!} (j-1) \left\{ (j-3)|x-x'|^{j-3} + 3|x-x'|^{j-3} \right\} n(x')n(x) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik_2)^j - (ik_1)^j}{j!} (j-1) |x-x'|^{j-3} \{ (j-3) + 3 \} n(x')n(x) \\
&= \left\{ \frac{(ik_2)^2 - (ik_1)^2}{2!} |x-x'|^{-1} .2 + \frac{(ik_2)^3 - (ik_1)^3}{3!} .2.3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(ik_2)^4 - (ik_1)^4}{4!} .3|x-x'|.4 + \frac{(ik_2)^5 - (ik_1)^5}{5!} .4|x-x'|^2.5 + \dots \right\} n(x').n(x) \\
&= \left\{ \frac{k_1^2 - k_2^2}{|x-x'|} + ik_1^3 - ik_2^3 + \frac{k_2^4 - k_1^4}{2} |x-x'| + \dots \right\} n(x')n(x)
\end{aligned}$$

olur.

$$\left| \frac{\partial^2(\gamma_1 - \gamma_2)}{\partial n(x) \partial n(x')} \right| = \left| \frac{k_1^2 - k_2^2}{|x - x'|} + ik_1^3 - ik_2^3 + \frac{k_2^4 - k_1^4}{2} |x - x'| + \dots \right| |n(x') n(x)|$$

$$\leq \frac{|k_1^2 - k_2^2|}{|x - x'|} + |ik_1^3 - ik_2^3| + \frac{|k_2^4 - k_1^4|}{2} |x - x'| + \dots$$

$$|x - x'| \left| \frac{\partial^2(\gamma_1 - \gamma_2)}{\partial n(x) \partial n(x')} \right| \leq |k_1^2 - k_2^2| + |ik_1^3 - ik_2^3| |x - x'| + \frac{|k_2^4 - k_1^4|}{2} |x - x'|^2 + \dots$$

$|x - x'| \rightarrow 0$ için

$$\frac{\partial^2(\gamma_1 - \gamma_2)}{\partial n(x) \partial n(x')} = O\left(\frac{1}{|x - x'|}\right)$$

elde edilir. Yani $\frac{\partial^2(\gamma_1 - \gamma_2)}{\partial n(x) \partial n(x')}$ zayıf singüler bir çekirdektir. Dolayısıyla A_{21} zayıf singüler integral operatördür. A_{11} , A_{12} ve A_{22} de benzer yolla zayıf singüler integral operatör oldukları gösterilir. A_{mj} , ($m = 1, 2$, $j = 1, 2$) zayıf singüler integral operatörleri (4.2, 4.3, 4.4 Teoremler) den dolayı $C(S)$ uzayında kompaktır. Yani

$$A_{mj}: C(S) \rightarrow C(S)$$

olur. Böylece Riesz-Schauder teorisi uygulanabilir.

4.2. Sonuç

X bir normlu uzay ve $A: X \rightarrow X$ bir kompakt lineer operatör olsun.

$$\phi - A\phi = 0 \quad (I - A)\phi = 0$$

homojen denkleminin çözümü yalnız $\phi = 0$ trivial çözümü ise bu durumda $\forall f \in X$ için

$$\phi - A\phi = f$$

homojen olmayan denklemin bir tek $\phi \in X$ çözümü vardır ve bu çözüm f ye sürekli olarak bağlıdır [1].

4.3. Sonuç

X bir normlu uzay ve $S: X \rightarrow X$ sınırlı bir lineer operatör olsun. S^{-1} mevcut ve sınırlı ise 4.2. sonuç'ta $I-A$ operatörü yerine $S-A$ operatörü konabilir [1].

4.5. Teorem.

X, Y, Z normlu uzaylar ve $A: X \rightarrow Y, B: Y \rightarrow Z$ sınırlı lineer operatörler olsunlar. A ve B operatörlerinden biri kompakt ise $BA: X \rightarrow Z$ operatörü kompaktır [1].

Şimdi $E, A: C(S)XC(S) \rightarrow C(S)XC(S)$ matris operatörlerini

$$E = \begin{bmatrix} (\mu_1 + \mu_2)I & 0 \\ 0 & (C_1 + C_2)I \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

tanımlıyalım. (4.41) de I operatörü $C(S)$ üzerinde tanımlanmış özdeşlik operatörüdür.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -f \\ g \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

matrisleri olmak üzere (4.32) integral denklemleri

$$(E - A)\Phi = F \quad (4.43)$$

yazılır.

Uyarı:

Biz daima E operatörünün tersinir olmasını isteyeceğiz. Böylece $\mu_1 + \mu_2 \neq 0$ ve $c_1 + c_2 \neq 0$ olmalıdır.

4.6. Teorem:

(3.1)-(3.3) homogen transmission problemi sadece aşikar (özdeş sıfır) çözüme sahip ise (2.1)-(2.3) homogen olmayan transmission problemi tek bir çözüme sahiptir.

İspat:

(i) Kabul edelim ki $(E - A)\Phi = 0$ homogen integral denklemi sadece aşikar çözüme sahip olsun. Bu durumda Riesz-Schauder teorisinden (4.43) homogen olmayan integral denkleminin bir tek çözümü vardır. A_{mj} integral operatörleri zayıf singüler çekirdekli olduklarından dolayı

$$A_{mj}: C(S) \rightarrow C^{0,\alpha}(S) \quad , \quad m, j = 1, 2$$

$$A_{mj}: C^{0,\alpha}(S) \rightarrow C^{1,\alpha}(S) \quad , \quad m, j = 1, 2$$

olur. $f \in C^{1,\alpha}(S)$, $g \in C^{0,\alpha}(S)$ olduğundan (4.43) ün çözümleri doğrudan $\phi \in C^{1,\alpha}(S)$ ve $\psi \in C^{0,\alpha}(S)$ olur. 4.1 teoremden dolayı (4.43) homogen olmayan integral denklemini çözümü (2.1)-(2.3) homogen olmayan transmission problemini çözer.

$$(ii) \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix},$$

$$(E - A)\Phi = 0 \tag{4.44}$$

homogen integral denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda ϕ ve ψ yoğunluklu u_1 , u_2 potansiyelleri homogen transmission probleminin çözümleridir. 3.1 Teorem (teklik) den dolayı $u_1 = 0$, D_1 'de $u_2 = 0$, D_2 'de olur. Sıçrama şartlarından

$$\left. \begin{array}{l} u_1^+ - u_1^- = -2\phi \\ u_2^+ - u_2^- = -2\phi \\ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} - \frac{\partial u_1^-}{\partial n} = 2c_1\psi \\ \frac{\partial u_2^+}{\partial n} - \frac{\partial u_2^-}{\partial n} = 2c_2\psi \end{array} \right\} \begin{array}{l} S' \text{ de} \\ S' \text{ de} \end{array} \tag{4.45}$$

elde edilir. Şöyleki;

(4.10) denklemi $x \in D \rightarrow x_0 \in \partial D$ için

$$2\phi(x_0) = v_m^-(x_0) + \int_D (\phi(y)k_m^2\gamma_m(x_0, y) + \gamma_m(x_0, y)\nabla^2\phi(y))dy \quad (4.46)$$

olur. $x_0 \in \partial D$ ve $m = 1, 2$ için

$$\phi(x_0) = 0$$

$$\frac{\partial\phi(x_0)}{\partial n} = c_m\psi(x_0)$$

şartlarını (4.3) denkleminde yerine koyarsak

$$-P\phi(x) = -\int_{\partial D} c_m\gamma_m(x, y)\psi(y)ds(y) + \int_D (\gamma_m(x, y)\nabla^2\phi(y) + \phi(y)k_m^2\gamma_m(x, y))dy \quad (4.47)$$

veya

$$w_m(x) = c_m \int_{\partial D} \gamma_m(x, y)\psi(y)ds(y) \quad , m = 1, 2$$

olmak üzere

$$-P\phi(x) = -w_m(x) + \int_D (\gamma_m(x, y)\nabla^2\phi(y) + \phi(y)k_m^2\gamma_m(x, y))dy \quad (4.48)$$

olur. (4.48) de $x \in D \rightarrow x_0 \in \partial D$ için

$$0 = -w_m^-(x_0) + \int_D (\gamma_m(x_0, y)\nabla^2\phi(y) + \phi(y)k_m^2\gamma_m(x_0, y))dy \quad (4.49)$$

olur. (4.49) dan (4.46) yı çıkartırsak

$$-2\phi(x_0) = -(v_m^-(x_0) + w_m^-(x_0)) = -u_m^-(x_0) \quad x_0 \in \partial D, m = 1, 2 \quad (4.50)$$

elde ederiz. (4.10) denklemi $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \rightarrow x_0 \in \partial D$ için

$$0 = v_m^+(x_0) + \int_D \left(\phi(y) k_m^2 \gamma_m(x_0, y) + \gamma_m(x_0, y) \nabla^2 \phi(y) \right) dy \quad (4.51)$$

olur. (4.48) denklemi $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \rightarrow x_0 \in \partial D$ için

$$0 = -w_m^+(x_0) + \int_D \left(\phi(y) k_m^2 \gamma_m(x_0, y) + \gamma_m(x_0, y) \nabla^2 \phi(y) \right) dy \quad (4.52)$$

olur. (4.51) den (4.52) i çıkartırsak

$$0 = v_m^+(x_0) + w_m^+(x_0) = u_m^+(x_0), \quad x_0 \in \partial D, m = 1, 2 \quad (4.53)$$

olur. (4.53) ile (4.50) toplarsak

$$u_m^+(x_0) - u_m^-(x_0) = -2\phi(x_0), \quad x_0 \in \partial D, m = 1, 2 \quad (4.54)$$

olur. (4.10) denklemini n doğrultusunda türetelim;

$$-P \frac{\partial \phi}{\partial n}(x) = \frac{\partial v_m}{\partial n}(x) + \int_D \left(\frac{\partial \gamma_m(x, y)}{\partial n(x)} \nabla^2 \phi(y) + \phi(y) k_m^2 \frac{\partial \gamma_m(x, y)}{\partial n(x)} \right) dy \quad (4.55)$$

olur. (4.55) denklemi $x \in D \rightarrow x_0 \in \partial D$ için

$$2 \frac{\partial \phi(x_0)}{\partial n} = \frac{\partial v_m^-(x_0)}{\partial n} + \int_D \left(\frac{\partial \gamma_m(x_0, y)}{\partial n(x)} \nabla^2 \phi(y) + \phi(y) k_m^2 \frac{\partial \gamma_m(x_0, y)}{\partial n(x)} \right) dy \quad (4.56)$$

veya

$$0 = \frac{\partial v_m^-(x_0)}{\partial n} + \int_D \left(\frac{\partial \gamma_m(x_0, y)}{\partial n(x)} \nabla^2 \phi(y) + \phi(y) k_m^2 \frac{\partial \gamma_m(x_0, y)}{\partial n(x)} \right) dy \quad (4.57)$$

olur. (4.48) denklemini n doğrultusunda türetirsek

$$-P \frac{\partial \phi}{\partial n}(x) = -\frac{\partial w_m}{\partial n}(x) + \int_D \left(\frac{\partial \gamma_m(x, y)}{\partial n(x)} \nabla^2 \phi(y) + \phi(y) k_m^2 \frac{\partial \gamma_m(x, y)}{\partial n(x)} \right) dy \quad (4.58)$$

olur. (4.58) denklemini $x \in D \rightarrow x_0 \in \partial D$ için

$$2 \frac{\partial \phi(x_0)}{\partial n(x)} = -\frac{\partial w_m^-(x_0)}{\partial n(x)} + \int_D \left(\frac{\partial \gamma_m(x_0, y)}{\partial n(x)} \nabla^2 \phi(y) + \phi(y) k_m^2 \frac{\partial \gamma_m(x_0, y)}{\partial n(x)} \right) dy \quad (4.59)$$

veya

$$2c_m \psi(x_0) = -\frac{\partial w_m^-(x_0)}{\partial n(x)} + \int_D \left(\frac{\partial \gamma_m(x_0, y)}{\partial n(x)} \nabla^2 \phi(y) + \phi(y) k_m^2 \frac{\partial \gamma_m(x_0, y)}{\partial n(x)} \right) dy \quad (4.60)$$

olur. (4.60) dan (4.57) yi çıkartırsak

$$2c_m \psi(x_0) = -\frac{\partial w_m^-(x_0)}{\partial n(x)} - \frac{\partial v_m^-(x_0)}{\partial n(x)} = -\frac{\partial u_m^-(x_0)}{\partial n(x)} \quad x_0 \in \partial D, m = 1, 2 \quad (4.61)$$

olur. (4.55) denklemini $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \rightarrow x_0 \in \partial D$ için

$$0 = \frac{\partial v_m^+(x_0)}{\partial n(x)} + \int_D \left(\frac{\partial \gamma_m(x_0, y)}{\partial n(x)} \nabla^2 \phi(y) + \phi(y) k_m^2 \frac{\partial \gamma_m(x_0, y)}{\partial n(x)} \right) dy \quad (4.62)$$

olur. (4.58) denklemini $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \rightarrow x_0 \in \partial D$ için yazarsak

$$0 = -\frac{\partial w_m^+(x_0)}{\partial n(x)} + \int_D \left(\frac{\partial \gamma_m(x_0, y)}{\partial n(x)} \nabla^2 \phi(y) + \phi(y) k_m^2 \frac{\partial \gamma_m(x_0, y)}{\partial n(x)} \right) dy \quad (4.63)$$

elde edilir. (4.63) ve (4.62) yi çıkartırsak

$$0 = -\frac{\partial v_m^+(x_0)}{\partial n(x)} - \frac{\partial w_m^+(x_0)}{\partial n(x)} = -\frac{\partial u_m^+(x_0)}{\partial n(x)} \quad x_0 \in \partial D, m = 1, 2 \quad (4.64)$$

elde edilir. (4.61) den (4.64) ü çıkartırsak

$$2c_m \psi(x_0) = \frac{\partial u_m^+(x_0)}{\partial n(x)} - \frac{\partial u_m^-(x_0)}{\partial n(x)} \quad x_0 \in \partial D, m = 1, 2 \quad (4.65)$$

olur. Burada + ve - işaretleri sırasıyla D_1 den S ye ve D_2 den S ye yaklaşımlardır ve

$$u_m(x) = v_m(x) + w_m(x) \quad m = 1, 2 \quad (4.66)$$

olur. Sonuçta (4.54) denklemini tekrar yazalım.

$$(i) \quad u_1^+(x_0) - u_1^-(x_0) = -2\phi(x_0)$$

$$(ii) \quad u_2^+(x_0) - u_2^-(x_0) = -2\phi(x_0)$$

$$(iii) \quad u_1^+(x_0) = \lim_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \rightarrow x_0 \in \partial D} u_1(x) = 0, \quad u_2^-(x_0) = \lim_{x \in D \rightarrow x_0 \in \partial D} u_2(x) = 0$$

(i) den (ii) yi çıkartır ve (iii) yi kullanırsak

$$u_1^+(x_0) + u_2^-(x_0) = u_1^-(x_0) + u_2^+(x_0) = 0$$

elde edilir. (4.28) ve (4.29) şartlarını kullanarak ve (4.66) gözönünde bulundurarak

$$\left. \begin{aligned} -\phi(x_0) &= u_m^+(x_0) - u_m(x_0) \\ \phi(x_0) &= u_m^-(x_0) - u_m(x_0) \\ c_m \psi(x_0) &= \frac{\partial u_m(x_0)}{\partial n} - \frac{\partial u_m^-(x_0)}{\partial n} \\ -c_m \psi(x_0) &= \frac{\partial u_m(x_0)}{\partial n} - \frac{\partial u_m^+(x_0)}{\partial n} \end{aligned} \right\} x_0 \in \partial D, m=1,2 \quad (4.67)$$

yazarız. (4.67) yi açık yazarsak

$$(i) \quad \psi(x_0) = \frac{1}{c_1} \frac{\partial u_1(x_0)}{\partial n} - \frac{1}{c_1} \frac{\partial u_1^-(x_0)}{\partial n}$$

$$(ii) \quad -\psi(x_0) = \frac{1}{c_1} \frac{\partial u_1(x_0)}{\partial n} - \frac{1}{c_1} \frac{\partial u_1^+(x_0)}{\partial n}$$

$$(iii) \quad \psi(x_0) = \frac{1}{c_2} \frac{\partial u_2(x_0)}{\partial n} - \frac{1}{c_2} \frac{\partial u_2^-(x_0)}{\partial n}$$

$$(iv) \quad -\psi(x_0) = \frac{1}{c_2} \frac{\partial u_2(x_0)}{\partial n} - \frac{1}{c_2} \frac{\partial u_2^+(x_0)}{\partial n}$$

$$(v) \quad -\phi(x_0) = u_2^+(x_0) - u_2(x_0)$$

$$(vi) \quad \phi(x_0) = u_1^-(x_0) - u_1(x_0)$$

olur. (i) ve (iv) toplanırsa

$$0 = -\frac{1}{c_1} \frac{\partial u_1(x_0)}{\partial n} + \frac{1}{c_2} \frac{\partial u_2(x_0)}{\partial n} - \frac{1}{c_2} \frac{\partial u_1^-(x_0)}{\partial n} - \frac{1}{c_2} \frac{\partial u_2^+(x_0)}{\partial n}$$

$$\frac{1}{c_1} \frac{\partial u_1(x_0)}{\partial n} + \frac{1}{c_2} \frac{\partial u_2(x_0)}{\partial n} = \frac{1}{c_2} \frac{\partial u_1^-(x_0)}{\partial n} + \frac{1}{c_2} \frac{\partial u_2^+(x_0)}{\partial n} = 0 \quad x_0 \in \partial D$$

elde edilir. (v) ve (vi) toplanırsa

$$0 = u_2^+(x_0) + u_1^-(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) \quad x_0 \in \partial D$$

elde edilir.

$$D_1' \text{ de } v_2 = \frac{1}{c_2} u_2, \quad D_2' \text{ de } v_1 = -\frac{1}{c_1} u_1$$

tanımlıyalım. v_1 ve v_2 fonksiyonları

$$\Delta v_m + k_m^2 v_m = 0, \quad D_{m-1}, \quad m = 1, 2$$

$$\left. \begin{aligned} c_2 v_2(x) - c_1 v_1(x) &= 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial n}(x) - \frac{\partial v_1}{\partial n}(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad x \in S$$

$$v_2 = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \frac{\partial v_2}{\partial n} - ik_2 v_2 = o\left(\frac{1}{R}\right), \quad R \rightarrow \infty$$

homogen transmission problemini sağlar. Şöyleki;

$$\Delta v_1 + k_1^2 v_1 = \Delta \left(-\frac{1}{c_1} u_1 \right) + k_1^2 \left(-\frac{1}{c_1} u_1 \right) = -\frac{1}{c_1} (\Delta u_1 + k_1^2 u_1) = 0 \quad D_0 \equiv D_2' \text{ de}$$

$$\Delta v_2 + k_2^2 v_2 = \Delta \left(\frac{1}{c_2} u_2 \right) + k_2^2 \left(\frac{1}{c_2} u_2 \right) = \frac{1}{c_2} (\Delta u_2 + k_2^2 u_2) = 0 \quad D_1' \text{ de}$$

$$c_2 v_2 - c_1 v_1 = c_2 \left(\frac{1}{c_2} u_2 \right) - c_1 \left(-\frac{1}{c_1} u_1 \right) = u_2 + u_1 = 0 \quad \partial D' \text{ de}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial n} - \frac{\partial v_1}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{c_2} u_2 \right) - \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{1}{c_1} u_1 \right) = \frac{1}{c_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} + \frac{1}{c_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} = 0 \quad \partial D' \text{ de}$$

u_2 fonksiyonu (3.3) yayılma şartlarını sağladığından v_2 de sağlar. c_1, c_2 sabitler olmak üzere

$$\eta = \frac{c_1 k_1^2}{c_2 k_2^2} \in \mathbb{R}$$

olarak seçelim. Burada $\text{Re} k_1, \text{Re} k_2 \geq 0$ ise $\eta \geq 0$ dir. $\text{Re} k_1, \text{Re} k_2 < 0$ ise $\eta > 0$ dür. 3.1 teorem (teklik teoremi) den dolayı D_1 de $v_2 = 0$ ve D_2 de $v_1 = 0$ dir. Sıçrama şartlarını kullanarak (4.54) ü tekrar yazarsak

$$u_1^+ - u_1^- = -2\phi$$

$$-\frac{1}{c_1} u_1^+ - \left(-\frac{1}{c_1} \right) u_1^- = \frac{1}{c_1} 2\phi$$

$$c_1 v_1^+ - c_1 v_1^- = 2\phi$$

$$u_2^+ - u_2^- = -2\phi$$

$$-\frac{1}{c_2} u_2^+ - \left(-\frac{1}{c_2} u_2^- \right) = \frac{1}{c_2} 2\phi$$

$$c_2 v_2^+ - c_2 v_2^- = -2\phi$$

olarak buluruz. Aynı şekilde (4.65) i kullanarak

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1^+}{\partial n} - \frac{\partial u_1^-}{\partial n} &= 2c_1 \psi \\ \frac{\partial u_2^+}{\partial n} - \frac{\partial u_2^-}{\partial n} &= 2c_2 \psi \end{aligned} \right\} \partial D' \text{ de}$$

$$-\frac{1}{c_1} \frac{\partial u_1^+}{\partial n} - \left(-\frac{1}{c_1} \right) \frac{\partial u_1^-}{\partial n} = -2\psi$$

$$\frac{\partial v_1^+}{\partial n} - \frac{\partial v_1^-}{\partial n} = -2\psi$$

$$\frac{1}{c_2} \frac{\partial u_2^+}{\partial n} - \frac{1}{c_2} \frac{\partial u_2^-}{\partial n} = 2\psi$$

$$\frac{\partial v_2^+}{\partial n} - \frac{\partial v_2^-}{\partial n} = 2\psi$$

elde edilir. Sıçrama şartlarını kullandığımızda $\phi = \psi = 0$ buluruz. Yani $\Phi = 0$ olur. Böylece ispat tamamlandı.

Eğer homogen transmission probleminin aşikar olmayan çözümleriyle ilgilenmek istiyorsak o zaman A operatörünün adjointi olan B operatörünü tanıtmalıyız.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \Psi = \begin{bmatrix} \chi \\ \eta \end{bmatrix} \quad \text{olmak üzere}$$

$$(\cdot, \cdot): C(S) \times C(S) \times C(S) \times C(S) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(\Phi, \Psi) = \int_S (\phi\chi + \psi\eta)ds = \int_S \Phi^T \Psi ds \quad (4.68)$$

bilineer formunu tanımlıyalım. Bilineer form olduğu kolayca gerçekleştirilebilir. Şöyleki

$\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi, \Psi_1, \Psi_2 \in C(S)$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2, \Psi \rangle &= \int_S (\alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2)^T \Psi ds \\ &= \int_S (\alpha_1 \Phi_1^T + \alpha_2 \Phi_2^T) \Psi ds \\ &= \int_S \alpha_1 \Phi_1^T \Psi ds + \int_S \alpha_2 \Phi_2^T \Psi ds \\ &= \alpha_1 \langle \Phi_1, \Psi \rangle + \alpha_2 \langle \Phi_2, \Psi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \beta_1 \Psi_1 + \beta_2 \Psi_2 \rangle &= \int_S \Phi^T (\beta_1 \Psi_1 + \beta_2 \Psi_2) ds \\ &= \int_S (\Phi^T \beta_1 \Psi_1 + \Phi^T \beta_2 \Psi_2) ds \\ &= \beta_1 \int_S \Phi^T \Psi_1 ds + \beta_2 \int_S \Phi^T \Psi_2 ds \\ &= \beta_1 \langle \Phi, \Psi_1 \rangle + \beta_2 \langle \Phi, \Psi_2 \rangle \end{aligned}$$

olduğu görülür.

E nin (4.68) bilineer formuna göre self adjoint olduğunu gösterelim.

$$(E\Phi, \Psi) = \int_S (E\Phi)^T \Psi ds = \int_S \Phi^T E^T \Psi ds = \int_S \Phi^T E \Psi ds = (\Phi, E\Psi)$$

$E^T = E$ olduğundan E self adjointtir. Şimdi A nın adjointinin B olduğunu gösterelim:

$$(A\Phi, \Psi) = \int_S (A\Phi)^T \Psi ds$$

yi hesaplayalım.

$$A\Phi = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}\phi + A_{12}\psi \\ -A_{21}\phi - A_{22}\psi \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$(A\Phi)^T \Psi = [A_{11}\phi + A_{12}\psi - A_{21}\phi - A_{22}\psi] \begin{bmatrix} \chi \\ \eta \end{bmatrix}$$

$$= [(A_{11}\phi + A_{12}\psi)\chi - (A_{21}\phi + A_{22}\psi)\eta]$$

olur. Böylece

$$(A\Phi, \Psi) = \int_S [((A_{11}\phi)(x) + (A_{12}\psi)(x))\chi(x) - ((A_{21}\phi)(x) + (A_{22}\psi)(x))\eta(x)] ds(x)$$

olur. Şimdi aşağıdaki integralleri hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\int_S (A_{11}\phi)(x)\chi(x)ds(x) &= \int_S \left\{ \int_S \phi(x') \left(\mu_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - \mu_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x')} \right) ds(x') \right\} \chi(x) ds(x) \\
&= \int_S \phi(x') \left\{ \int_S \left(\mu_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - \mu_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x')} \right) \chi(x) ds(x) \right\} ds(x') \\
&= \int_S \phi(x) \left\{ \int_S \left(\mu_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x)} - \mu_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x)} \right) \chi(x') ds(x') \right\} ds(x)
\end{aligned} \tag{4.69}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\int_S (A_{12}\psi)(x)\chi(x)ds(x) &= \int_S \left\{ \int_S \psi(x') (\mu_1 c_1 \gamma_1(x, x') - \mu_2 c_2 \gamma_2(x, x')) ds(x') \right\} \chi(x) ds(x) \\
&= \int_S \psi(x') \left\{ \int_S \chi(x) (\mu_1 c_1 \gamma_1(x, x') - \mu_2 c_2 \gamma_2(x, x')) ds(x) \right\} ds(x') \\
&= \int_S \psi(x) \left\{ \int_S \chi(x') (\mu_1 c_1 \gamma_1(x, x') - \mu_2 c_2 \gamma_2(x, x')) ds(x') \right\} ds(x)
\end{aligned} \tag{4.70}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\int_S (A_{21}\phi)(x)\eta(x)ds(x) &= \int_S \left\{ \int_S \phi(x') \left(\frac{\partial^2 \gamma_1(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} - \frac{\partial^2 \gamma_2(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} \right) ds(x') \right\} \eta(x) ds(x) \\
&= \int_S \phi(x') \left\{ \int_S \eta(x) \left(\frac{\partial^2 \gamma_1(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} - \frac{\partial^2 \gamma_2(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} \right) ds(x) \right\} ds(x')
\end{aligned}$$

$$= \int_s \phi(x) \left\{ \int_s \eta(x') \left(\frac{\partial^2 \gamma_1(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} - \frac{\partial^2 \gamma_2(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} \right) ds(x') \right\} ds(x) \quad (4.71)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_s (A_{22} \psi)(x) \eta(x) ds(x) &= \int_s \left\{ \int_s \psi(x') \left(c_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x)} - c_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x)} \right) ds(x') \right\} \eta(x) ds(x) \\ &= \int_s \psi(x') \left\{ \int_s \eta(x) \left(c_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x)} - c_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x)} \right) ds(x) \right\} ds(x') \\ &= \int_s \psi(x) \left\{ \int_s \eta(x') \left(c_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x)} - c_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x)} \right) ds(x') \right\} ds(x) \end{aligned} \quad (4.72)$$

olur. Şimdi

$$(B_{11} \chi)(x) = \int_s \chi(x') \left(\mu_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x)} - \mu_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x)} \right) ds(x'),$$

$$(B_{12} \eta)(x) = \int_s \eta(x') \left(\frac{\partial^2 \gamma_1(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} - \frac{\partial^2 \gamma_2(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} \right) ds(x'),$$

$$(B_{21} \chi)(x) = \int_s \chi(x') (\mu_1 c_1 \gamma_1(x, x') - \mu_2 c_2 \gamma_2(x, x')) ds(x'),$$

$$(B_{22} \eta)(x) = \int_s \eta(x') \left(c_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - c_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x')} \right) ds(x'),$$

tanımlıyalım. Buna göre (4.69), (4.70), (4.71), (4.72) denklemleri

$$\int_S (A_{11}\phi)(x)\chi(x)ds(x) = \int_S \phi(x)(B_{11}\chi)(x)ds(x)$$

$$\int_S (A_{12}\psi)(x)\chi(x)ds(x) = \int_S \psi(x)(B_{21}\chi)(x)ds(x)$$

$$\int_S (A_{21}\phi)(x)\eta(x)ds(x) = \int_S \phi(x)(B_{12}\eta)(x)ds(x)$$

$$\int_S (A_{22}\psi)(x)\eta(x)ds(x) = \int_S \psi(x)(B_{22}\eta)(x)ds(x)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} (A\Phi, \Psi) &= \int_S \{ \phi(x)(B_{11}\chi)(x) + \psi(x)(B_{21}\chi)(x) - \phi(x)(B_{12}\eta)(x) - \psi(x)(B_{22}\eta)(x) \} ds(x) \\ &= \int_S \{ \phi B_{11}\chi + \psi B_{21}\chi - \phi B_{12}\eta - \psi B_{22}\eta \}(x) ds(x) \\ &= \int_S \{ (\phi B_{11} + \psi B_{21})\chi - (\phi B_{12} + \psi B_{22})\eta \}(x) ds(x) \\ &= \int_S [\phi B_{11} + \psi B_{21} - (\phi B_{12} + \psi B_{22})] \begin{bmatrix} \chi \\ \eta \end{bmatrix} (x) ds(x) \\ &= \int_S [\phi \psi] \begin{bmatrix} B_{11} & -B_{12} \\ B_{21} & -B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \eta \end{bmatrix} (x) ds(x) \\ &= \int_S \Phi^T(x)(B\Psi)(x) ds(x) \\ &= (\Phi, B\Psi) \end{aligned}$$

olduğundan A'nın anjoindi B dir.

(3.1)-(3.2) homogen transmission probleminin bütün çözümlerinin lineer uzayına V diyelim ve

$$W = \left\{ \Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial n} \\ \mu_1 v_1 \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_2}{\partial n} \\ \mu_2 v_2 \end{bmatrix}_S : (v_1, v_2) \in V \right\}$$

olsun.

4.3. Tanım:

E-B nin çözüm uzayı diye (nullspace)

$$N(E-B) = \{ \Psi \in C(S) : (E-B)\Psi = 0 \}$$

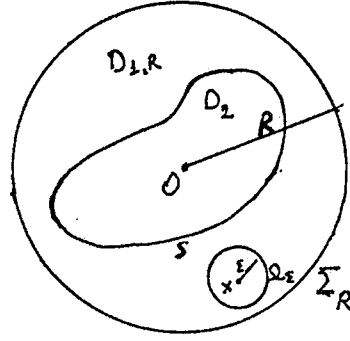
denir [1].

4.7. Teorem:

Eğer $N(E-B)$, E-B operatörünün nullspace (çözüm uzayı) olarak tanımlanır ise $N(E-B) = W$ dır.

İspat:

(i) $(v_1, v_2) \in V$ olsun. Green gösterilim teoremini kullanalım: R yarıçaplı yuvar $\Sigma_R = \{x : |x| < R\}$ olsun; öyleki S yüzeyi tamamiyle Σ_R nin içinde kalsın.



4.2. Şekil

$\partial\Sigma_R = \{x : |x| = R\}$ olur.

$D_{1,R} = \Sigma_R \setminus \overline{D_2}$ olur. $D_{1,R}$

bölgesine Green teoremini uygulayalım. $x \in D_{1,R}$ olsun.

$\Omega_\varepsilon = \{x' : |x - x'| < \varepsilon\}$ olsun.

$$\begin{aligned} \iint_{D_{1,R}} (v_1(x') \Delta \gamma_1(x, x') - \gamma_1(x, x') \Delta v_1(x')) dx' &= \int_{\partial\Sigma_R} \left(v_1(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - \gamma_1(x, x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} \right) ds(x') \\ &+ \int_S \left(v_1(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - \gamma_1(x, x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} \right) ds(x') \\ &+ \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(v_1(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - \gamma_1(x, x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} \right) ds(x') \quad (4.73) \end{aligned}$$

elde edilebilir. (3.3) yayılma şartından dolayı

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial\Sigma_R} \left(v_1(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - \gamma_1(x, x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} \right) ds(x') = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial\Sigma_R} \left\{ v_1(x') \left(\frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - ik_1 \gamma_1(x, x') \right) \right.$$

$$\left. + ik_1 \gamma_1(x, x') v_1(x') - \gamma_1(x, x') \left(\frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} - ik_1 v_1(x') \right) \right.$$

$$\left. - ik_1 \gamma_1(x, x') v_1(x') \right\} ds(x')$$

$$= 0 \quad |x| = R$$

elde edilir. Şimdi

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(v_1(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - \gamma_1(x, x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} \right) ds(x') = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} v_1(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} ds(x') - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma_1(x, x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} ds(x')$$

integralini hesaplayalım.

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v_1(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} ds(x') = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v_1(x') \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{e^{ik_1 \varepsilon}}{\varepsilon} \varepsilon^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v_1(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} ds(x') = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v_1(\varepsilon \vec{n} + x) \left(\frac{ik_1 \varepsilon e^{ik_1 \varepsilon} - e^{ik_1 \varepsilon}}{\varepsilon^2} \right) \varepsilon^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} v_1(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} ds(x') &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (ik_1 \varepsilon e^{ik_1 \varepsilon} - e^{ik_1 \varepsilon}) \frac{4\pi}{2\pi} v_1(\varepsilon \vec{n}^* + x) \\ &= 2v_1(x) \end{aligned}$$

ve

$$-\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma_1(x, x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} ds(x') = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|} \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} ds(x')$$

$$\leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{e^{ik_1|x-x'|}}{|x-x'|} \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} ds(x') \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\varepsilon^{ik_1 \varepsilon}}{\varepsilon} \right| \left\| \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} ds(x') \right\|$$

$v_1 \in C^2(D_1) \cap C^1(\overline{D}_1)$ olduğundan $\left| \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} \right| \leq k$ olacak şekilde bir k vardır.

$$- \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma_1(x, x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} ds(x') \leq 2k\varepsilon$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ için

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma_1(x, x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} ds(x') = 0$$

olur. Böylece

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(v_1(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - \gamma_1(x, x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} \right) ds(x') = 2v_1(x)$$

elde edilir. Böylece (4.73) denklemi

$$0 = \int_s \left(v_1(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - \gamma_1(x, x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} \right) ds(x') + 2v_1(x) \quad x \in D_1$$

veya

$$\int_s \left(\gamma_1(x, x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} - v_1(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} \right) ds(x') = 2v_1(x) \quad (4.74)$$

olur. Şimdi D_2 ye Green teoremini uygulayalım:

$$\int_s \left(\gamma_2(x, x') \frac{\partial v_2(x')}{\partial n(x')} - v_2(x') \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x')} \right) ds(x') = 0 \quad x \in D_1 \quad (4.75)$$

olur. (4.74) $\mu_1 c_1$ ile çarpıp ve (4.75) $\mu_2 c_2$ çarptıktan sonra elde edilen yeni ifadeleri birbirinden çıkartırsak

$$\begin{aligned} & \int_S \left(\frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} \mu_1 c_1 \gamma_1(x, x') - \mu_1 c_1 v_1(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} + \mu_2 c_2 v_2(x') \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x')} - \mu_2 c_2 \gamma_2(x, x') \frac{\partial v_2(x')}{\partial n(x')} \right) ds(x') \\ & = 2\mu_1 c_1 v_1(x) \end{aligned} \quad (4.76)$$

olur. S üzerinde $\frac{\partial v_1}{\partial n} - \frac{\partial v_2}{\partial n} = 0$, $\mu_1 v_1 - \mu_2 v_2 = 0$ transmission şartları kullanılarak (4.76) denklemi,

$$\begin{aligned} & \int_S \left\{ \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} (\mu_1 c_1 \gamma_1(x, x') - \mu_2 c_2 \gamma_2(x, x')) - \mu_1 v_1(x') \left(c_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - c_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x')} \right) \right\} ds(x') \\ & = 2\mu_1 c_1 v_1(x) \quad x \in D_1 \end{aligned} \quad (4.77)$$

elde edilir.

$$\left(B_{21} \frac{\partial v_1}{\partial n} \right)(x) = \int_S \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} \{ \mu_1 c_1 \gamma_1(x, x') - \mu_2 c_2 \gamma_2(x, x') \} ds(x')$$

$$(B_{22} \mu_1 v_1)(x) = \int_S \mu_1 v_1(x') \left\{ c_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - c_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x')} \right\} ds(x')$$

gösterimiyle (4.77) denklemi

$$\left(B_{21} \frac{\partial v_1}{\partial n} \right)(x) - (B_{22} \mu_1 v_1)(x) = 2\mu_1 c_1 v_1(x) \quad x \in D_1 \quad (4.78)$$

olur. Şimdi $x \rightarrow S$ limitini hesaplayalım.

Sıçrama şartlarını kullanırsak

$$\begin{aligned} \left(B_{21} \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_s \right) - (B_{22} \mu_1 v_1|_s) + \mu_1 c_1 v_1|_s - \mu_1 c_2 v_1|_s &= 2\mu_1 c_1 v_1|_s \\ \left(B_{21} \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_s \right) - (B_{22} \mu_1 v_1|_s) &= \mu_1 v_1 (c_1 + c_2) \end{aligned} \quad (4.79)$$

elde edilir. (4.77) de $c_1 = c_2 = 1$ koyarsak

$$\begin{aligned} \int_s \left\{ \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} (\mu_1 \gamma_1(x, x') - \mu_2 \gamma_2(x, x')) - \mu_1 v_1(x') \left(\frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x')} \right) \right\} ds(x') \\ = 2\mu_1 v_1(x) \quad x \in D_1 \end{aligned} \quad (4.80)$$

olur. (4.80) nin $\vec{n}$ yönünde türevini alırsak

$$\begin{aligned} \int_s \left\{ \frac{\partial v_1(x')}{\partial n(x')} \left(\mu_1 \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} - \mu_2 \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x')} \right) - \mu_1 v_1(x') \left(\frac{\partial^2 \gamma_1(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} - \frac{\partial^2 \gamma_2(x, x')}{\partial n(x) \partial n(x')} \right) \right\} ds(x') \\ = 2\mu_1 \frac{\partial v_1(x)}{\partial n(x)} \quad x \in D_1 \end{aligned}$$

veya

$$\left(B_{11} \frac{\partial v_1}{\partial n} \right)(x) - (B_{12} \mu_1 v_1)(x) = 2\mu_1 \frac{\partial v_1(x)}{\partial n(x)} \quad x \in D_1$$

olur. Yine sıçrama şartlarını kullanırsak $x \in D_1 \rightarrow x \in S$ için

$$\left(B_{11} \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_s \right) + \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_s \mu_1 - \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_s \mu_2 - (B_{12} \mu_1 v_1)|_s = 2\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_s$$

veya

$$\left(B_{11} \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_s \right) - (B_{12} \mu_1 v_1|_s) = (\mu_1 + \mu_2) \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_s \quad (4.81)$$

elde edilir. (4.79) ve (4.81) denklemlerinden

$$B_{21} \left(\frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_s \right) - (B_{22} + (c_1 + c_2)) (\mu_1 v_1|_s) = 0$$

$$(B_{11} - (\mu_1 + \mu_2)) \left(\frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_s \right) - B_{12} (\mu_1 v_1|_s) = 0$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} - (\mu_1 + \mu_2) & -B_{12} \\ B_{21} & -(B_{22} + (c_1 + c_2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_s \\ \mu_1 v_1|_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} B_{11} & -B_{12} \\ B_{21} & -B_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_s \\ \mu_1 v_1|_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$(E - B)\Psi = 0$$

elde edilir. Buradan $\Psi \in N(E - B)$ olur. Böylece $W \subset N(E - B)$ olur.

(ii) $(E - A)\Phi = 0$ homogen denkleminin bir çözümü $\Phi = \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}$ olsun. O zaman 4.6

teoreminin ispatında gösterildiği gibi $\phi \in C^{1,\alpha}(S)$ ve $\psi \in C^{0,\alpha}(S)$ olmak üzere

$$u_1(x) = \int_S \left\{ \phi(x') \frac{\partial \gamma_1(x, x')}{\partial n(x')} + \psi(x') c_1 \gamma_1(x, x') \right\} ds(x')$$

$$u_2(x) = \int_S \left\{ \phi(x') \frac{\partial \gamma_2(x, x')}{\partial n(x')} + \psi(x') c_2 \gamma_2(x, x') \right\} ds(x')$$

homogen trnasmission problemini çözer.

$$T: N(E-A) \rightarrow N(E-B)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} \quad T\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial n} \\ \mu_1 u_1 \end{bmatrix}_S$$

dönüşümünü tanımlayalım. Buradan görülüyor ki $T\Phi \in W$ dır. Bundan başka T lineerdir ve T injectivedir. Şöyleki $T\Phi = 0$ olduğundan

$$T\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial n} \\ \mu_1 u_1 \end{bmatrix}_S = 0$$

ve buradan S üzerinde $\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0$ ve $u_1 = 0$ elde edilir. Transmission şartından

dolayı S üzerinde $u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0$ dır. u_1 D_1 de yayılma şartını sağlar ve

$u_1 \in C^2(D_1) \cap C^1(\overline{D_1})$ dir. u_1 Helmholtz denklemini sağlar.

Şimdi D_1 de $u_1 = 0$ olduğunu gösterelim. Green özdeşliğinden

$$\int_{D_{1,R}} \left\{ u_1(x') \Delta \overline{u_1(x')} - \overline{u_1(x')} \Delta u_1(x') \right\} dx' = \int_{\Sigma_R} \left\{ u_1(x') \frac{\partial \overline{u_1(x')}}{\partial n} - \overline{u_1(x')} \frac{\partial u_1(x')}{\partial n} \right\} ds(x')$$

$$- \int_S \left\{ u_1(x') \frac{\partial \overline{u_1(x')}}{\partial n} - \overline{u_1(x')} \frac{\partial u_1(x')}{\partial n} \right\} ds(x')$$

veya

$$\int_{\Sigma_R} \left\{ u_1(x') \frac{\partial \overline{u_1(x')}}{\partial n} - \overline{u_1(x')} \frac{\partial u_1(x')}{\partial n} \right\} ds(x') = \int_s \left\{ u_1(x') \frac{\partial \overline{u_1(x')}}{\partial n} - \overline{u_1(x')} \frac{\partial u_1(x')}{\partial n} \right\} ds(x').$$

$$0 = \int_s \left\{ u_1(x') \frac{\partial \overline{u_1(x')}}{\partial n} - \overline{u_1(x')} \frac{\partial u_1(x')}{\partial n} \right\} ds(x')$$

$$0 = \int_s \operatorname{Im} \left(u_1(x') \frac{\partial \overline{u_1(x')}}{\partial n} \right) ds(x')$$

$$0 = \operatorname{Im} \left(\int_s u_1(x') \frac{\partial \overline{u_1(x')}}{\partial n} ds(x') \right)$$

yazarız. [2] den D_1 de $u_1 = 0$ elde edilir. 4.6. Teoreminin ikinci kısmında kullanılan argümentleri kullanırsak $\phi = \psi = 0$ ve $\Phi = 0$ elde ederiz. Bu ise T nin injective olduğunu söyler. Sonuçta A ve B kompakt olduğu zaman Fredholm alternatifinden [1] $\dim N(E-A) = \dim N(E-B)$ olduğu görülür.

Böylece T örtendir.

$\Psi = \begin{bmatrix} \chi \\ \eta \end{bmatrix} \in N(E-B)$ olsun. T^{-1} i $\Phi = T^{-1}\Psi$ ile tanımlıyalım. Her iki tarafın T

altında görüntüsünü alırsak $T\Phi = \Psi \in W$ ve böylece $N(E-B) \subset W$ dır.

(i) ve (ii) den $N(E-B) = W$ dır. Böylece ispat tamamlandı. Bu teoremden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

4.4. Sonuç:

Homogen transmission probleminin çözüm uzayı, V , sonlu boyutludur.

Çünkü

$$W = \left\{ \Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial n} \\ \mu_1 v_1 \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_2}{\partial n} \\ \mu_2 v_2 \end{bmatrix}_S ; (v_1, v_2) \in V \right\}$$

W nın elemanları v_1, v_2 lardan oluşmakta $\dim W = \dim N(E - B) < \infty$ dır. Buradan W nın sonlu boyutlu olduğu görülüyor. Buradan V nin sonlu boyutlu olduğu görülür.

Klasik Fredholm teorisinin sonuçlarını muhafaza ederek aşağıdaki teoremi kullanabiliriz.

4.8. Teorem:

(2.1)-(2.3) homogen olmayan transmission probleminin bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart homogen problemin bütün v_1, v_2 çözümleri için

$$\int_S \left(f \frac{\partial v_1}{\partial n} - g \mu_1 v_1 \right) ds = 0$$

sağlanmasıdır.

İspat (Gereklilik)

u_1 ve u_2 homogen olmayan transmission probleminin çözümleri olsun. v_1, v_2 de homogen transmission probleminin çözümleri olsun. Green teoreminden

$$\begin{aligned}
\int_s \left(f \frac{\partial v_1}{\partial n} - g \mu_1 v_1 \right) ds &= \int_s \left\{ \left(\mu_1 u_1(x') - \mu_2 u_2(x') \right) \frac{\partial v_1(x')}{\partial n} - \left(\frac{\partial u_1(x')}{\partial n} - \frac{\partial u_2(x')}{\partial n} \right) \mu_1 v_1(x') \right\} ds(x') \\
&= \int_s \left\{ \left(\mu_1 u_1(x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n} - \mu_1 v_1(x') \frac{\partial u_1(x')}{\partial n} \right) \right\} ds(x') \\
&\quad - \int_s \left\{ \left(\mu_2 u_2(x') \frac{\partial v_2(x')}{\partial n} - \mu_1 v_1(x') \frac{\partial u_2(x')}{\partial n} \right) \right\} ds(x') \\
&= \mu_1 \int_s \left(u_1(x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n} - v_1(x') \frac{\partial u_1(x')}{\partial n} \right) ds(x') \\
&\quad - \int_s \left(\mu_2 u_2(x') \frac{\partial v_2(x')}{\partial n} - \mu_2 v_2(x') \frac{\partial u_2(x')}{\partial n} \right) ds(x') \\
&= \mu_1 \int_s \left(u_1(x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n} - v_1(x') \frac{\partial u_1(x')}{\partial n} \right) ds(x') \\
&\quad - \mu_2 \int_s \left(u_2(x') \frac{\partial v_2(x')}{\partial n} - v_2(x') \frac{\partial u_2(x')}{\partial n} \right) ds(x') \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. $D_{1,R}$ üzerinden Green teoremini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\int_{D_{1,R}} (u_1(x') \Delta v_1(x') - v_1(x') \Delta u_1(x')) dx' &= \int_{K_R} \left(u_1(x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n} - v_1(x') \frac{\partial u_1(x')}{\partial n} \right) ds(x') \\
&\quad - \int_s \left(u_1(x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n} - v_1(x') \frac{\partial u_1(x')}{\partial n} \right) ds(x')
\end{aligned}$$

$$\int_S \left(u_1(x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n} - v_1(x') \frac{\partial u_1(x')}{\partial n} \right) ds(x') = \int_{K_R} \left(u_1(x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n} - v_1(x') \frac{\partial u_1(x')}{\partial n} \right) ds(x')$$

$$\int_S \left(u_1(x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n} - v_1(x') \frac{\partial u_1(x')}{\partial n} \right) ds(x') = \int_{K_R} \left\{ u_1(x') \left(\frac{\partial v_1(x')}{\partial n} - ik_1 v_1(x') \right) + ik_1 u_1(x') v_1(x') \right.$$

$$\left. - v_1(x') \left(\frac{\partial u_1(x')}{\partial n} - ik_1 u_1(x') \right) - ik_1 u_1(x') v_1(x') \right\} ds(x')$$

olur. $R \rightarrow \infty$ için

$$\int_S \left(u_1(x') \frac{\partial v_1(x')}{\partial n} - v_1(x') \frac{\partial u_1(x')}{\partial n} \right) ds(x') = 0$$

elde edilir. Şimdi koşulun yeterliliğini gösterelim:

$\Psi \in N(E - B)$ olsun. $(E - B)\Psi = 0$ dır. Teoremden dolayı $(v_1, v_2) \in V$ için

$$\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial n} \\ \mu_1 v_1 \end{bmatrix}_S$$

vardır. $(E - A)\Psi = F$ denkleminde

$$(F, \Psi) = \int_S \begin{bmatrix} -f \\ g \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial n} \\ \mu_1 v_1 \end{bmatrix} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_s [-fg] \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial n} \\ \mu_1 v_1 \end{bmatrix} ds \\
&= \int_s \left(-f \frac{\partial v_1}{\partial n} + g \mu_1 v_1 \right) ds \\
&= - \int_s \left(f \frac{\partial v_1}{\partial n} - g \mu_1 v_1 \right) ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(F, \Psi) = 0$ olduğundan Fredholm teoremi (4.43) in bir çözüme sahip olduğunu gösterir [1]. Şimdiye kadar yapılanları aşağıdaki teoremle özetleyelim.

4.9. Teorem:

(3.1)-(3.3) homogen transmission problemi yalnız sıfır çözümüne sahip ise bu durumda (2.1)-(2.3) homogen olmayan transformission problemi bir tek çözüme sahiptir.

veya

homogen transmission problemi sonlu sayıda lineer bağımsız çözümlere sahip ve homogen olmayan transmission probleminin çözülebilmesi için gerek ve yeter koşul homogen olmayan terimin 4.8. Teorem'in şartlarını sağlamasıdır.

5. HOMOGEN OLMAYAN BİR ORTAMDA GEÇİŞ PROBLEMİ

$D_1, \mathbb{R}^3$ de sınırlı olmayan açık bir bölge olsun.

$D_2, \mathbb{R}^3$ de açık ve sınırlı bir bölge olsun, öyle ki;

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset, \overline{D_1} \cup D_2 = D_1 \cup \overline{D_2} = \mathbb{R}^3$$

D_1 ve D_2 'nin ortak sınır yüzeyi $S: \partial D_1 = \partial D_2$ kapalı, sınırlı bir Lyapunov yüzeyi olsun. $\vec{n}$ D_2 'den D_1 'e doğru yönlendirilmiş S nin birim normali olsun. Şimdi aşağıdaki problemi ele alalım.

GEÇİŞ (TRANSMISSION) PROBLEMİ;

$$\Delta u_1(x) + k_1^2 u_1(x) = 0, \quad x \in D_1 \text{ 'de} \quad (5.1)$$

$$\Delta u_2(x) + k_2^2(x) u_2(x) = 0, \quad x \in D_2 \text{ 'de}$$

$$\mu_1 u_1(x) - \mu_2(x) u_2(x) = f(x)$$

$$\frac{\partial u_1(x)}{\partial n} - \frac{\partial u_2(x)}{\partial n} = g(x), \quad x \in S \quad (5.2)$$

yayılma şartı;

$$u_1(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \frac{\partial u_1(x)}{\partial n} - ik_1 u_1(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| = R \rightarrow \infty \quad (5.3)$$

denklemlerini gerçekleyen

$$u_1 \in C^2(D_1) \cap C^1(\overline{D}_1)$$

$$u_2 \in C^2(D_2) \cap C^1(\overline{D}_2)$$

u_1 ve u_2 fonksiyonlarının aranmasıdır. Bu problemde $f \in C^{1,\alpha}(S)$, $g \in C^{0,\alpha}(S)$ dir.

$k_1, \mu_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $0 \leq \arg k_1 \leq \frac{\pi}{2}$ veya $\pi < \arg k_1 \leq \frac{3\pi}{2}$ yi gerçekleyen kompleks sayılar ve $k_2(x), \mu_2(x) \in C^1(\overline{D}_2)$ ve $0 \leq \arg k_2(x) < 2\pi$ sıfırdan farklı kompleks değerli fonksiyonlardır.

6. ÇÖZÜMÜN TEKLİĞİ

Kabul edelimki (5.1)-(5.3) geçiş probleminin farklı iki çözümü u_1, u_2 ve u'_1, u'_2 olsun. $v_1 = u_1 - u'_1, v_2 = u_2 - u'_2$ konumu ile (5.1)-(5.3) problemi

$$\Delta v_1(x) + k_1^2 v_1(x) = 0, \quad x \in D_1 \text{ 'de} \quad (6.1)$$

$$\Delta v_2(x) + k_2^2(x) v_2(x) = 0, \quad x \in D_2 \text{ 'de}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 v_1(x) - \mu_2(x) v_2(x) &= 0 \\ \frac{\partial v_1(x)}{\partial n} - \frac{\partial v_2(x)}{\partial n} &= 0 \end{aligned}, \quad x \in S \quad (6.2)$$

$$v_1(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \frac{\partial v_1(x)}{\partial n} - ik_1 v_1(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (6.3)$$

homogen geçiş problemine indirgenir (5.1)-(5.3) probleminin çözümünün tekliği (6.1)-(6.3) probleminin çözümünün sadece $v_1 = v_2 = 0$ olduğunu göstermeye dayanır.

6.1. Teorem

$$k_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mu_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k_2(x) \in C^1(\overline{D}_2), \mu_2(x) \in C^1(\overline{D}_2), 0 \leq \arg k_1 \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\pi < \arg k_1 \leq \frac{3\pi}{2},$$

$$\rho(x) = \frac{\mu_2(x) \overline{k_2^2(x)}}{\mu_1 k_1^2} \text{ reel değerli bir fonksiyon}$$

ve

$$\operatorname{Im} \left(\int_{D_2} \frac{\rho(x)}{\mu_2(x) \overline{k_2^2(x)}} \nabla \mu_2(x) v_2(x) \nabla \overline{v_2(x)} dx \right) \geq 0$$

olsun. Burada $\operatorname{Re} k_2(x) \cdot \operatorname{Im} k_2(x) \geq 0 (< 0)$ ise $\rho \geq 0 (< 0)$ dır. Bu durumda (6.1)-(6.3) homogen probleminin çözümü sadece $v_1 = v_2 = 0$ aşıkâr çözümüdür.

İspat

K_R , R yarıçaplı, birim dış normali $\vec{n}$ olan bir küre olsun. Kabul edelim ki K_R S yüzeyini kapsasın ve $D_{1,R} = \{x \in D_1; |x| < R\}$ olsun. $D_{1,R}$ ve D_2 bölgesine Green teoremini uygularsak ve (6.1), (6.2) yi kullanırsak

$$\begin{aligned} \int_{D_{1,R}} \left(v_1(x) \Delta \overline{v_1(x)} + \nabla v_1(x) \nabla \overline{v_1(x)} \right) dx &= \int_{\partial D_{1,R}} v_1(x) \frac{\partial \overline{v_1(x)}}{\partial n(x)} ds(x) \\ &= \int_{K_R} v_1(x) \frac{\partial \overline{v_1(x)}}{\partial n(x)} ds(x) - \int_S v_1(x) \frac{\partial \overline{v_1(x)}}{\partial n(x)} ds(x) \\ &= \int_{K_R} v_1(x) \frac{\partial \overline{v_1(x)}}{\partial n(x)} ds(x) - \int_S \frac{\mu_2(x)}{\mu_1} v_2(x) \frac{\partial \overline{v_2(x)}}{\partial n(x)} ds(x) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\int_{D_{1,R}} \left(v_1(x) \left(-\overline{k_1^2} v_1(x) \right) + |\nabla v_1(x)|^2 \right) dx &= \int_{K_R} v_1(x) \frac{\partial \overline{v_1(x)}}{\partial n(x)} ds(x) - \int_S \frac{\mu_2(x)}{\mu_1} v_2(x) \frac{\partial \overline{v_2(x)}}{\partial n(x)} ds(x) \\
&= \int_{K_R} v_1(x) \frac{\partial \overline{v_1(x)}}{\partial n(x)} ds(x) - \frac{1}{\mu_1} \int_{D_2} \left(\mu_2(x) v_2(x) \Delta \overline{v_2(x)} + \nabla(\mu_2(x) v_2(x)) \nabla \overline{v_2(x)} \right) dx
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
-\overline{k_1^2} \int_{D_{1,R}} |v_1(x)|^2 dx + \int_{D_{1,R}} |\nabla v_1(x)|^2 dx &= \int_{K_R} v_1(x) \frac{\partial \overline{v_1(x)}}{\partial n(x)} ds(x) - \frac{1}{\mu_1} \int_{D_2} \mu_2(x) v_2(x) \left(-\overline{k_2^2} v_2(x) \right) dx \\
&\quad - \frac{1}{\mu_1} \int_{D_2} \left(\nabla \mu_2(x) v_2(x) + \mu_2(x) \nabla v_2(x) \right) \nabla \overline{v_2(x)} dx \\
&= \int_{K_R} v_1(x) \frac{\partial \overline{v_1(x)}}{\partial n(x)} ds(x) + \frac{1}{\mu_1} \int_{D_2} \mu_2(x) \overline{k_2^2} |v_2(x)|^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{\mu_1} \int_{D_2} \nabla \mu_2(x) v_2(x) \nabla \overline{v_2(x)} dx - \frac{1}{\mu_1} \int_{D_2} \mu_2(x) |\nabla v_2(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_{K_R} v_1(x) \frac{\partial \overline{v_1(x)}}{\partial n(x)} ds(x) &= \int_{D_{1,R}} |\nabla v_1(x)|^2 dx - \overline{k_1^2} \int_{D_{1,R}} |v_1(x)|^2 dx - \frac{1}{\mu_1} \int_{D_2} \mu_2(x) \overline{k_2^2} |v_2(x)|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{\mu_1} \int_{D_2} \nabla \mu_2(x) v_2(x) \nabla \overline{v_2(x)} dx + \frac{1}{\mu_1} \int_{D_2} \mu_2(x) |\nabla v_2(x)|^2 dx \quad (6.4)
\end{aligned}$$

elde ederiz. (6.4) eşitliğini $\overline{k_1^2}$ ile bölüp imajiner kısmını alalım:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_1^2} \int_{K_R} v_1(x) \frac{\partial \overline{v_1(x)}}{\partial n(x)} ds(x) &= \frac{1}{k_1^2} \int_{D_{l,R}} |\nabla v_1(x)|^2 dx - \int_{D_{l,R}} |v_1(x)|^2 dx - \int_{D_2} \frac{\mu_2(x) \overline{k_2^2(x)}}{\mu_1 k_1^2} |v_2(x)|^2 dx \\
&+ \frac{1}{k_1^2 \mu_1} \int_{D_2} \nabla \mu_2(x) v_2(x) \nabla \overline{v_2(x)} dx + \int_{D_2} \frac{\mu_2(x)}{\mu_1 k_1^2} |\nabla v_2(x)|^2 dx \\
&= \frac{1}{k_1^2} \int_{D_{l,R}} |\nabla v_1(x)|^2 dx - \int_{D_{l,R}} |v_1(x)|^2 dx - \int_{D_2} \rho(x) |v_2(x)|^2 dx \\
&+ \int_{D_2} \frac{\rho(x)}{k_2^2(x) \mu_2(x)} \nabla \mu_2(x) v_2(x) \nabla \overline{v_2(x)} dx + \int_{D_2} \frac{\rho(x)}{k_2^2(x)} |\nabla v_2(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \left(\frac{1}{k_1^2} \int_{K_R} v_1(x) \frac{\partial \overline{v_1(x)}}{\partial n(x)} ds(x) \right) &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{k_1^2} \int_{D_{l,R}} |\nabla v_1(x)|^2 dx \right) + \operatorname{Im} \left(\int_{D_2} \frac{\rho(x)}{k_2^2(x) \mu_2(x)} \nabla \mu_2(x) v_2(x) \nabla \overline{v_2(x)} dx \right) \\
&+ \operatorname{Im} \left(\int_{D_2} \frac{\rho(x)}{k_2^2(x)} |\nabla v_2(x)|^2 dx \right) \quad (6.5)
\end{aligned}$$

olur.

(6.5) in sol tarafı $R \rightarrow \infty$ sıfıra gider [12]. Sağ taraftaki her bir terim non-negatif olduğundan [1] Rellich lemmasını kullanabiliriz. $\operatorname{Im} k_1 \neq 0$ ve $\operatorname{Im} k_1 = 0$ olma durumlarını inceleyelim:

$\operatorname{Im} k_1 \neq 0$ olsun.

Bu durumda $\operatorname{Im} k_1 > 0$ ve $\operatorname{Re} k_1 > 0$ veya $\operatorname{Im} k_1 < 0$ ve $\operatorname{Re} k_1 < 0$ olur. Buradan

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{k_1^2}\right) > 0$$

dır. (6.5) in sağdaki ilk integrali ele alındığında

$$\int_{D_1} |\nabla v_1(x)|^2 dx = 0$$

dır. Buradan, D_1 de $v_1 = \text{sabit}$ elde edilir. $v_1 = \text{sabit}$ D_1 'de Helmholtz denklemini gerçeklediğinden

$$D_1\text{'de } \Delta v_1 + k_1^2 v_1 = 0$$

olur. Buradan D_1 'de $v_1 = 0$ elde edilir. Şimdi D_2 de $v_2 = 0$ olduğunu gösterelim. D_1 bölgesine Green teoremi uygulandığında,

$$\int_{D_1} \left(v_1(x) \Delta \overline{v_1(x)} + \nabla v_1(x) \nabla \overline{v_1(x)} \right) dx = \int_{\partial D_1} v_1(x) \frac{\partial \overline{v_1(x)}}{\partial n(x)} ds(x)$$

olur. D_1 'de $v_1 = 0$ olduğundan

$$\int_{\partial D_1} v_1(x) \frac{\partial \overline{v_1(x)}}{\partial n(x)} ds(x) = 0$$

olur. $v_1 \in C^2(D_1) \cap C^1(\overline{D_1})$ olduğundan ∂D_1 'de $v_1 = 0$ ve dolayısıyla S üzerinde

$v_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2(x)} v_1 = 0$ elde ederiz. Şimdi D_2 bölgesinde $v_2 = 0$ olduğunu gösterelim.

$x \in D_2$ için Green gösterilim teoreminden,

$$v_2(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ v_2(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial}{\partial n} v_2(y) \right\} ds(y)$$

yazabiliriz. (6.2) geçiş (transmission) şartlarından dolayı S üzerinde $v_2 = \frac{\partial v_2}{\partial n} = 0$ olduğundan D_2 de $v_2 = 0$ elde edilir. O halde $\text{Im } k_1 \neq 0$ için $v_1 = v_2 = 0$ dır.

$\text{Im } k_1 = 0$ olsun.

Bu durumda (6.5) denkleminin sağındaki ilk integral sıfır olur ve sonuçta (6.5) denklemi $R \rightarrow \infty$ için

$$0 = \text{Im} \left(\int_{D_2} \frac{\rho(x)}{k_2^2(x)} |\nabla v_2(x)|^2 dx \right) + \text{Im} \left(\int_{D_2} \frac{\rho(x)}{k_2^2(x)\mu_2(x)} \nabla \mu_2(x) v_2(x) \nabla \overline{v_2(x)} dx \right)$$

olur.

$\text{Im } k_2(x) \neq 0$ olsun.

Bu durumda $\text{Im } k_2(x) > 0$ veya $\text{Im } k_2(x) < 0$ olduğunda $\rho(x) > 0$ olur. Buradan

$$\int_{D_2} |\nabla v_2(x)|^2 dx = 0$$

dır. D_2 de v_2 sabittir ve D_2 de v_2 Helmholtz denklemini sağlar. O halde D_2 de $v_2 = 0$ olur. Böylece (6.5) denklemi 6.1 Teoremin şartlarından dolayı

$$\text{Im} \left(\int_{K_R} v_1 \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial n} ds \right) \geq 0$$

olur. V_1 yayılma şartlarını sağladığından $R \rightarrow \infty$ için

$$v_1 \left(\frac{\partial \overline{v_1}}{\partial n} + i \overline{k_1} \overline{v_1} \right) = o \left(\frac{1}{R^2} \right)$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı K_R üzerinden integrallenirse

$$\begin{aligned}
\int_{K_R} \left(v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} + i \bar{k}_1 |v_1|^2 \right) &= \int_{K_R} o\left(\frac{1}{R^2}\right) ds \\
&= \int_{K_R} o\left(\frac{1}{R^2}\right) R^2 dw \\
&= o(1)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

olur. (6.6) nun her iki tarafın imajiner kısmını alırsak

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \left(\int_{K_R} \left\{ v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} + i \bar{k}_1 |v_1|^2 \right\} ds \right) &= o(1) \\
\operatorname{Im} \int_{K_R} \left(v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} \right) ds + k_1 \int_{K_R} |v_1|^2 ds &= o(1)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

olur. (6.7) nin sol tarafı pozitif olduğundan D_1 de $v_1 = 0$ [1]. $\operatorname{Im} k_1 = 0$ olması halinde D_2 de $v_2 = 0$ olduğu kolayca gösterilebilir. ($\operatorname{Im} k_1 \neq 0$ iken D_2 de $v_2 = 0$ olduğunu gösterdiğimiz yolla)

$\operatorname{Im} k_2(x) = 0$ olsun. (6.5) denklemi

$$\operatorname{Im} \left(\int_{K_R} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} ds \right) = 0$$

olur. D_1 'de $v_1 = 0$ olur [2]. D_2 de $v_2 = 0$ olur. ($\operatorname{Im} k_1 \neq 0$ iken D_2 de $v_2 = 0$ olduğunu gösterdiğimiz yolla).

$\operatorname{Im} k_1 = 0$ iken $v_1 = v_2 = 0$ olur. Böylece ispat tamamlandı.

KAYNAKLAR

1. Colton, D., Kress, R., Integral Equations Methods in Scattering Theory, John Wiley and Sons, New York, 1983.
2. Colton, D., Kress, R., Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
3. Dennemeyer, R., Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems, Mc-Graw-Hill Book Company, New York, 1968.
4. Friedman, A., Foundations of Modern Analysis, Dover Publications, New York, 1982.
5. Günter, N. M., Die Potentialtheorie und ihre Anwendungen auf Grundaufgaben der mathematischen Physik., Teubner, Leipzig, 1957.
6. John, F., Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1982.
7. Kittappa, R., Kleinman, R.E., "Acoustic scattering by penetrable homegeneous objects", J. Math. Phys., vol.16, pp. 421-432, 1975.
8. Kress, R., Lineer Integral Equations, Springer-Verlag, New York, 1989.
9. Kress, R., Roach, G.F., "Transmission problems for the Helmholtz equations", J. Math. Phys., Vol.19, pp. 1433-1437, 1977.
10. Kress, R., Roach, G.F., "On mixed boundary value problems for the Helmholtz equation", Proc.R.soc. Edin., A 77, pp.65-77, 1977
11. Kreyszc, E., Introductroy Functional Analysis With Applications, John Willey and Sons, 1978.
12. Kupradze, W.D., Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und, Integraleichungen, Deutscher verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

13. Latz, N., "Electromagnetic diffraction by imperfectly dielectric wedges", J. Math. Anal. Apply., vol.43, pp.373-387, 1973
14. Lebedev, N.N., Special Functions And Their Applications, Dover Publications, New York, 1972.
15. Mikhlin, S.G., Mathematical Physics, an Advanced Course, North-Holland Publishing company, amsterdam, 1970.
16. Miranda, C., Partial Differential Equations Equations of Elliptic Type, Springer, Berlin, 1970.
17. Ramm, A.G., Scattering by Obstacles, D. Reidel Publishing Company, Boston, 1986.
18. Werner, P., "Zur mathematischen Theorie akustischen Wellen-felder", Arch. Rat. Mech. Anal., vol.6, pp. 231-260, 1960.
19. Werner, P., "Bengungsprobleme der mathematischen Akustik", Arch. Rat. Mech. Anal., vol.12, pp. 115-184, 1963.

ÖZGEÇMİŞ

Bu çalışmayı yapan Ülkü ATEŞ 1971 yılında Çankırı'nın Merkez ilçesinde doğdu. İlkokulu Fevzi Çakmak İlkokulunda, ortaokulu Gülhane İlköğretim okulunda, lise öğrenimini ise Atatürk Kız Teknik ve Meslek Lisesinde tamamladı. Üniversite öğrenimine 1988 yılında girdiği Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde sürdürdü. Aynı fakülteden 1992 yılında mezun oldu. Halen Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisidir.

