



HEMEN HEMEN DEĞME B-METRİK
MANİFOLDLARIN $\mathbb{R}$ İLE ÇARPIMINDAN
ELDE EDİLEN HEMEN HEMEN
KOMPLEKS NORDEN MANİFOLDLAR

Yüksek Lisans Tezi

ELANUR EREN

Eskişehir 2025

HEMEN HEMEN DEĞME B-METRİK MANİFOLDLARIN $\mathbb{R}$ İLE
ÇARPIMINDAN ELDE EDİLEN HEMEN HEMEN KOMPLEKS
NORDEN MANİFOLDLAR

ELANUR EREN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Geometri Tezli Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nülfir ÖZDEMİR

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ocak 2025

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Elanur EREN'in "HEMEN HEMEN DEĞME B-METRİK MANİFOLDLARIN $\mathbb{R}$ İLE ÇARPIMINDAN ELDE EDİLEN HEMEN HEMEN KOMPLEKS NORDEN MANİFOLDLAR" başlıklı tezi 15/01/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR	
Üye	: Prof. Dr. Murat LİMONCU	
Üye	: Doç. Dr. Mehmet SOLGUN	

Prof. Dr. Semra KURAMA
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

DANIşMAN ONAYI

Danışmanlığını yürüttüğüm yüksek lisans öğrencisi Elanur EREN, “Hemen Hemen Değme B-Metrik Manifoldların $\mathbb{R}$ ile Çarpımından Elde Edilen Hemen Hemen Kompleks Norden Manifoldlar” başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımda incelenmiş ve öğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Nülfir ÖZDEMİR

ÖZET

HEMEN HEMEN DEĞME B-METRİK MANİFOLDLARIN $\mathbb{R}$ İLE ÇARPIMINDAN ELDE EDİLEN HEMEN HEMEN KOMPLEKS NORDEN MANİFOLDLAR

ELANUR EREN

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ocak 2025

Danışman: Prof. Dr. Nülfir ÖZDEMİR

Bu çalışmada hemen hemen kontak B-metrik manifoldlar ve hemen hemen kompleks Norden metrik manifoldlar ele alınmıştır. Beş bölümden oluşan tezin ilk bölümünde gerekli temel tanımlar ve teoremler ifade edilmiştir. İkinci bölümde hemen hemen kontak B-metrik manifold tanımı ve özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde ise hemen hemen kontak B-metrik manifoldların temel örnekleri çalışılmıştır. Dördüncü bölümde hemen hemen kompleks Norden metrik manifold tanımı yapıp sınıflamasından bahsedilmiştir. Beşinci ve son bölümde ise bir M hemen hemen kontak B-metrik manifoldu $\mathbb{R}$ ile çarpılmış ve $M \times \mathbb{R}$ üzerinde; $M \times \mathbb{R}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye giden sadece t 'ye bağlı iki fonksiyon kullanılarak; hemen hemen kompleks Norden metrik yapı inşa edilmiştir. Ayrıca, $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki yapının Kaehlerian Norden metrik yapı olması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Son olarak, M manifoldu $\mathcal{F}_5$ sınıfından ve iki fonksiyonun toplamı sabit olduğunda $M \times \mathbb{R}$ 'nin $W_1 \oplus W_2$ sınıfından olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Hemen hemen kontak yapı, Hemen hemen kontak B-metrik manifold, Hemen hemen kompleks Norden metrik manifold.

ABSTRACT

ALMOST COMPLEX NORDEN MANIFOLDS OBTAINED BY MULTIPLYING ALMOST CONTACT B-METRIC MANIFOLDS WITH $\mathbb{R}$

Elanur EREN

Department of Mathematics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, July 2024

Supervisor: Prof.Dr. Nülifer ÖZDEMİR

In this study, almost contact B-metric manifolds and almost complex Norden metric manifolds are discussed. In the first part of this thesis consisting of five parts, necessary basic definitions and theorems are expressed. In the second part, it is given definition and characteristics of almost contact B-metric manifolds. In the third part, the most basic examples of almost contact B-metric manifolds are investigated. In the fourth part, almost complex Norden metric manifold definition was made and its classification was mentioned. In the fifth and last part, an almost contact B-metric manifold M is multiplied by $\mathbb{R}$ and an almost complex Norden metric structure on $M \times \mathbb{R}$ is constructed using two functions from $M \times \mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ which depend on t . Moreover, it is proved that the necessary and sufficient condition for the structure on $M \times \mathbb{R}$ to be a Kaehlerian Norden metric is that $\theta(\xi)$ is a scalar of the class $\mathcal{F}_4$ of the manifold M and the sum of the two functions is constant. Finally, it is shown that $M \times \mathbb{R}$ is of class $W_1 \oplus W_2$ when the manifold M is of class $\mathcal{F}_5$ and the sum of the two functions is constant.

Keywords: Almost contact structure, Almost contact B-metric manifolds,
Almost complex Norden metric manifolds.

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans sürecinin her aşamasında her daim zaman ayırıp bilgi ve desteğini esirgemeyen, tecrübe ve disiplini ile beni yönlendirip tez çalışma sürecimde rehber olan danışman hocam Prof. Dr. Nölifer ÖZDEMİR'e ve eğitim öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Elanur EREN



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Elanur EREN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
DANIŞMAN ONAYI.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER	2
3. HEMEN HEMEN KONTAK B-METRİK MANİFOLDLAR	11
4. HEMEN HEMEN KONTAK B-METRİK MANİFOLD ÖRNEK- LERİ.....	17
5. HEMEN HEMEN KOMPLEKS NORDEN METRİK MANİFOLD- LAR	29
6. HEMEN HEMEN KONTAK B-METRİK MANİFOLDLARDAN ELDE EDİLEN HEMEN HEMEN KOMPLEKS NORDEN MET- RİK MANİFOLDLAR.....	32

KAYNAKÇA.....	47
---------------	----

ÖZGEÇMİŞ



ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. Geçiş Fonksiyonu	3
-----------------------------------	---



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu gerçel vektörler kümesi
M	: $(2n + 1)$ boyutlu diferansiyellenebilir manifold
$T_p M$	: $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi
(M, g)	: Riemann manifoldu
$\mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{R})$	: M üzerindeki sonsuz türevlenebilir fonksiyonların kümesi
∇	: Levi-Civita konneksiyonu
$\nabla_X Y$	: Y vektör alanının X vektör alanına göre kovaryant türevi
$\chi(M)$	: M üzerindeki vektör alanlarının kümesi
T	: Torsiyon tensörü
$S(x)$	: Şekil operatörü

1. GİRİŞ

Manifoldlar üzerindeki özel yapılar diferansiyel geometrinin en temel araştırmalarını oluşturmaktadır. Manifoldlar üzerinde çokça çalışılan yapılara örnekler; hemen hemen kontak yapılar, Hermitian yapılar, G_2 yapılar, spin yapılar, parakontak yapılar, parahermitian yapılar ve kompleks yapılar olarak verilebilir. Hemen hemen kontak metrik yapılar üzerindeki çalışmalar Gray ve Sasaki ile başlamıştır [1, 2]. Sonrasında hemen hemen kontak manifold üzerinde $(n + 1, n)$ tipinde belli koşulları sağlayan g yarı-Riemann metriği tanımlanarak Ganchev, Mihova ve Gribachev tarafından hemen hemen kontak B-metrik manifoldlar inşa edilmiştir [3]. Manifoldlar üzerindeki özel yapıların sınıflandırılması, çalışmalarda önemli yer tutmaktadır. Bu çalışmada yer alan hemen hemen kontak B-metrik manifoldların sınıflandırılması [3] de yer almaktadır. Kompleks ve kontak metrik manifoldlar arasında yakın ilişkiler vardır. Bu tezde yer alan hemen hemen kompleks Norden metrik çalışmaları Gribache-Mekero-Djelepov ve Ganchev-Borisov ile başlamıştır [4, 5]. Kompleks Norden metrik manifoldlarının sınıflandırılması Ganchev-Borisov tarafından yapılmıştır. Hemen hemen kontak manifoldlar ve hemen hemen kompleks manifoldlar arasındaki ilişkiler Solgun tarafından incelenmiştir [6, 7].

Bu çalışmada, M hemen hemen kontak B-metrik manifoldu verildiğinde $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde; $M \times \mathbb{R}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye giden iki fonksiyon kullanılarak; hemen hemen kompleks Norden metrik yapı inşa edilmiştir. Ayrıca, $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki yapının Kaehlerian Norden metrik yapı olması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Ayrıca, M manifoldu $\mathcal{F}_5$ sınıfından ve iki fonksiyonun toplamı sabit olduğunda $M \times \mathbb{R}$ 'nin $W_1 \oplus W_2$ sınıfından olduğu gösterilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak temel kavramlar ve teoremler ifade edilmiştir. İlk olarak manifold, Riemannian manifold ve semi-Riemannian manifold tanımları verilecektir. Daha sonra ise kovaryant türev ve Levi-Civita kovaryant türev kavramları ifade edilecektir.

Manifold tanımında kullanılan temel kavramlar kart, atlas, uyumlu atlas ve maksimal atlastır. Bunların tanımları şu şekildedir:

Tanım 2.1. (n -Boyutlu Kart) M bir topolojik uzay ve $U \subset M$ bir açık küme olsun. $\xi : U \rightarrow \xi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ dönüşümü homeomorfizm ise (U, ξ) ikilisine n -boyutlu bir kart denir.

Keyfi $p \in U$ için $p \mapsto \xi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$ şeklinde ifade edilebilir ve buradaki $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) fonksiyonlarına ξ 'nin koordinat fonksiyonları denir.

Tanım 2.2. (Atlas) M bir topolojik uzay olsun. M uzayının n -boyutlu kartlarının bir $\mathcal{A}$ koleksiyonu

1. Her $p \in M$ noktası için $p \in U$ olacak şekilde $\mathcal{A}$ 'ya ait (U, ξ) vardır.
2. $(U, \varphi), (V, \psi)$ kartları için eğer $U \cap V \neq \emptyset$ ise

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

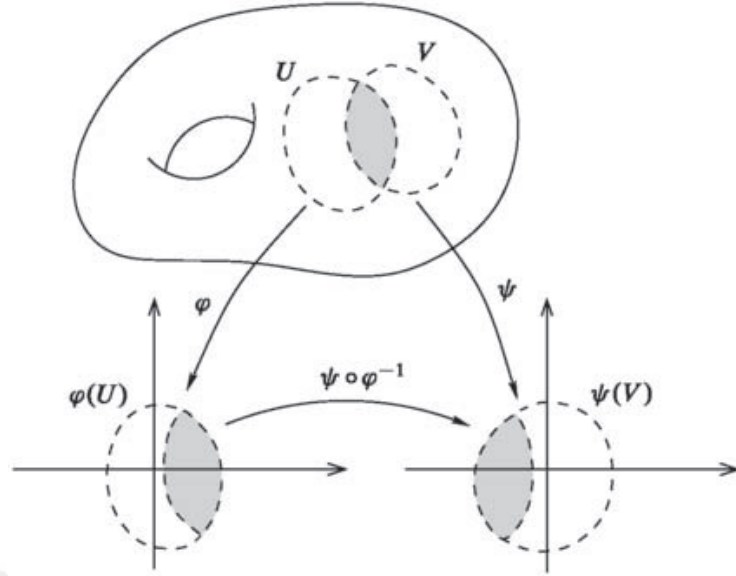
$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

fonksiyonları $\mathbb{C}^\infty$ -sınıfından fonksiyonlardır.

koşullarını sağlıyorsa $\mathcal{A}$ kümesine M uzayı üzerinde bir $\mathbb{C}^\infty$ atlas denir.

Tanım 2.3. (Uyumlu Atlaslar) M uzayının n boyutlu iki $\mathbb{C}^\infty$ atlası $\mathcal{A}$ ve $\tilde{\mathcal{A}}$ olsun. Eğer $\mathcal{A} \cup \tilde{\mathcal{A}}$ kümesi de M uzayının n boyutlu $\mathbb{C}^\infty$ bir atlası ise $\mathcal{A}$ ve $\tilde{\mathcal{A}}$ atlaslarına uyumlu atlaslar denir.

Tanım 2.4. (Maksimal Atlas) Tüm uyumlu atlasların birleşimine maksimal (tam) atlas denir.



Şekil 2.1. Geçiş Fonksiyonu

M uzayı üzerinde keyfi bir $\mathcal{A}$ atlasını içeren tam atlas tektir [8, 9].

Tanım 2.5. (Türevlenebilir Manifold) M , Hausdorff ve ikinci sayılabilir bir topolojik uzay olsun. M uzayı bir n -boyutlu $\mathbb{C}^\infty$ maksimal (tam) $\mathcal{A}$ atlası ile donatılmış ise M topolojik uzayına n -boyutlu türevlenebilir bir $\mathbb{C}^\infty$ manifold denir.

Tanım 2.6. (Tanjant Vektörü) $\mathcal{F}(M) = \{f|f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ } \mathbb{C}^\infty \text{fonksiyon}\}$ kümesi ve $p \in M$ noktası verilsin. Eğer $v_p : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $f, g \in \mathcal{F}(M)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

- $v_p[\alpha f + \beta g] = \alpha v_p[f] + \beta v_p[g]$ (lineer olma)
- $v_p[fg] = v_p[f]g(p) + f(p)v_p[g]$ (Leibniz kuralı)

koşulları sağlanıyorsa v_p fonksiyonuna M manifoldunun p noktasındaki bir tanjant vektörü denir. $p \in M$ noktasındaki tüm tanjant vektörlerinin kümesine M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı denir ve $T_p M$ ile gösterilir.

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v_p) | p \in M, v_p \in T_p M\}$$

kümesi $2n$ -boyutlu bir $\mathbb{C}^\infty$ manifolddur [8–10].

Tanım 2.7. (Vektör Alanı) M , n -boyutlu $\mathbb{C}^\infty$ bir manifold olsun. Her $p \in M$ noktasına bu noktadaki bir tanjant vektörü karşılık getiren

$$V : M \rightarrow TM$$

fonksiyonuna M manifoldu üzerinde bir vektör alanı denir. M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

Keyfi $p \in M$ noktası ve $f \in \mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere bir V vektör alanı

$$\begin{aligned} V : \mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \\ f &\rightarrow V[f](p) := V_p[f] \end{aligned}$$

olarak da ele alınabilir. Ayrıca $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in \mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere; her $p \in M$ için

$$\begin{aligned} V[\alpha f + \beta g](p) &= V(p)[\alpha f + \beta g] \\ &= \alpha V(p)[f] + \beta V(p)[g] \\ &= (\alpha V[f] + \beta V[g])(p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(fg)(p) &= V(p)[fg] \\ &= V(p)[f]g(p) + f(p)V(p)[g] \\ &= (V[f]g + fV[g])(p) \end{aligned}$$

özellikleri sağlanır.

$T_p M^* = \{f|f : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineer}\}$ kümesine p noktasındaki kotanjant uzayı denir. Kümenin elemanlarına ise kovektörler denir.

$$TM^* = \bigcup_{p \in M} T_p M^* = \{(p, \theta_p) | p \in M, \theta_p \in T_p M^*\}$$

kümesi $2n$ boyutlu $\mathbb{C}^\infty$ bir manifolddur.

Tanım 2.8. (1-form) M , n -boyutlu bir $\mathbb{C}^\infty$ manifold olsun. M manifoldunun her

$p \in M$ noktasına bir kovektör karşılık getiren

$$\theta : M \rightarrow TM^*$$

fonksiyonuna bir 1-form denir.

Tanım 2.9. (f fonksiyonunun diferansiyeli) $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{C}^\infty$ bir fonksiyon olsun.

$$\begin{aligned} df : \chi(M) &\rightarrow \mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \\ V &\rightarrow df(V)(p) := V_p[f] \end{aligned}$$

olarak tanımlanan df dönüşümüne f fonksiyonunun diferansiyeli denir.

Tanım 2.10. (Riemann Manifoldu) M , n -boyutlu türevlenebilir $\mathbb{C}^\infty$ bir manifold ve manifold üzerinde diferansiyellenebilen vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olmak üzere;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{R})$$

ile tanımlı g bilineer dönüşümü her X, Y vektör alanı için

- $g(X, Y) = g(Y, X)$ (simetrik olma)
- Her $p \in M$ ve sıfırdan farklı her $v_p \in T_p M$ için $g(v_p, v_p) > 0$ (pozitif tanımlılık)

koşulları sağlanıyorsa g dönüşümüne M manifoldu üzerinde bir Riemannian metrik denir. (M, g) ikilisine ise Riemann manifoldu denir [11].

M manifoldu üzerinde bir g Riemannian metrik her bir $T_p M$ tanjant uzayında bir iç çarpım belirler. Yani bir Riemann manifoldunun her bir noktasındaki tanjant uzayı bir iç çarpım uzayıdır:

$$\langle X_p, Y_p \rangle := (g(X, Y))(p).$$

Teorem 2.11. Her manifold bir Riemannian metrikle donatılabilir [11].

Aşağıda tanımlanan Semi-Riemann manifoldların işaretini tanımlamada aşağıdaki teoremler kullanılacaktır.

Teorem 2.12. V , reel sayılar cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir simetrik bilinear form olsun. Bu durumda V vektör uzayının öyle bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tabanı vardır ki bu tabana göre g 'nin matrisi köşegen bir matris olur [12].

Kanıt. g dönüşümünün sıfır dönüşümü olması durumunda V 'nin herhangi bir tabanına göre g 'nin matrisinin $(0)_{n \times n}$ matrisi olduğu açıktır.

g dönüşümü sıfırdan farklı olsun. Eğer $\dim V = 1$ ise $V = \text{span}\{e\}$ olarak ifade edilebilir. O halde $\alpha, \beta \in V$ olmak üzere $\alpha = k_1 e$ ve $\beta = k_2 e$ olacak şekilde k_1, k_2 reel sayıları vardır. $g(\alpha, \beta) = g(k_1 e, k_2 e) = k_1 k_2 g(e, e)$ olduğundan g 'nin matrisi $(g(e, e))_{1 \times 1}$ 'dir.

g sıfırdan farklı ve $\dim V = n > 1$ olsun. Bu durumda en az bir $\alpha \in V$ için $g(\alpha, \alpha) \neq 0$ dır: Eğer her $\alpha \in V$ için $g(\alpha, \alpha) = 0$ olsaydı $\beta \in V$ iken α yerine $\alpha + \beta$ yazılırsa

$$g(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = 0$$

$$2g(\alpha, \beta) = 0$$

$$g(\alpha, \beta) = 0$$

elde edilir. Bu ise $g \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde en az bir $\alpha \in V$ için $g(\alpha, \alpha) \neq 0$ dır.

$\alpha \in V$ için $g(\alpha, \alpha) \neq 0$ olmak üzere;

$$W = \text{Ger}\{\alpha\}, \quad W^\perp = \{\beta \in V \mid g(\alpha, \beta) = 0\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$V = W \oplus W^\perp$$

olur:

$x \in W \cap W^\perp$ verilsin. $x \in W$ olduğundan $x = c\alpha$, $c \in \mathbb{R}$ formundadır. Öte

yandan $x \in W^\perp$ olduğundan $g(x, \alpha) = 0$ ’dır. Bu durumda

$$g(c\alpha, \alpha) = cg(\alpha, \alpha) = 0$$

ve $g(\alpha, \alpha) \neq 0$ olduğundan $c = 0$ ve $x = c\alpha = 0 \cdot \alpha = 0$ bulunur. Yani kesişim sadece 0 vektöründen oluşur.

Keyfi $\gamma \in V$ için

$$\beta := \gamma - \frac{g(\gamma, \alpha)}{g(\alpha, \alpha)}\alpha$$

olarak tanımlanırsa

$$\gamma = \beta + \frac{g(\gamma, \alpha)}{g(\alpha, \alpha)}\alpha$$

olur ve

$$\begin{aligned} g(\beta, \alpha) &= g\left(\gamma - \frac{g(\gamma, \alpha)}{g(\alpha, \alpha)}\alpha, \alpha\right) \\ &= g(\gamma, \alpha) - \frac{g(\gamma, \alpha)}{g(\alpha, \alpha)}g(\alpha, \alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\beta \in W^\perp$ olur. Diğer yandan $\frac{g(\gamma, \alpha)}{g(\alpha, \alpha)}\alpha \in W$ olduğundan $V = W \oplus W^\perp$ elde edilir. g formu $W^\perp$ ’e kısıtlanırsa

$$g : W^\perp \times W^\perp \rightarrow \mathbb{R}$$

ve $\dim(W^\perp) = n - 1 \geq 1$ olduğundan en az bir $\tilde{\alpha} \in W^\perp$ elemanı vardır öyle ki $g(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}) \neq 0$ ’dır ve yukarıdaki yöntem $W^\perp$ alt uzayına uygulanır. Bu şekilde devam edildiğinde V ’nin öyle bir $\{\alpha = \alpha_1, \tilde{\alpha} = \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ tabanı elde edilir ki g ’nin matrisi bu tabana göre köşegen olur. $\square$

Tanım 2.13. (Semi Riemann Manifoldlar) M bir $\mathbb{C}^\infty$ manifold olsun. M manifoldu üzerindeki

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{R})$$

simetrik bilineer dönüşümü her $p \in M$ noktasında

$$"her Y_p \in T_p M \text{ için } g(X, Y) = 0 \text{ ancak ve ancak } X = 0"$$

koşulunu sağlıyorsa (yani non-dejenere ise), g dönüşümüne bir semi-Riemannian metrik denir. (M, g) ikilisine bir Semi Riemann $\mathbb{C}^\infty$ manifold denir.

Tanım 2.14. (Kovaryant Türev) M bir $\mathbb{C}^\infty$ manifold olsun.

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümü her X_1, X_2, Y_1, Y_2, X, Y vektör alanları ve keyfi $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonları için

- $\nabla_{fX_1+gX_2}Y = f\nabla_{X_1}Y + g\nabla_{X_2}Y$
- $\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_XY_1 + b\nabla_XY_2$
- $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + (Xf)Y$

koşullarını sağlıyorsa ∇ dönüşümüne M üzerinde bir lineer konneksiyon (kovaryant türev) denir.

g , M üzerinde bir Riemannian (ya da Semi-Riemannian) metrik ve ∇ , M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Her X, Y, Z vektör alanı için

$$X[g(Y, Z)] = g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ)$$

eşitliği sağlanıyorsa ∇ kovaryant türevine g metriği ile uyumludur denir.

M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonunun torsiyon tensörü

$$T(X, Y) = \nabla_XY - \nabla_YX - [X, Y]$$

olarak tanımlıdır. Eğer her X, Y vektör alanı için $\mathfrak{T}(X, Y) = 0$ ise yani

$$\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]$$

ise ∇ lineer konneksiyonuna simetriktir denir.

Teorem 2.15. (M, g) bir Riemannian (ya da Semi-Riemannian) manifold olsun. Bu durumda g metriği ile uyumlu ve torsiyonu sıfır olan bir tek ∇ lineer konneksiyonu vardır. Bu konneksiyona Levi-Civita kovaryant türevi denir [11].

Tanım 2.16. $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ bir yönlendirilmiş hiperyüzey ve bu hiperyüzeyin birim normali N olsun. Keyfi $x \in T_p M$ için

$$S(x) = -\nabla_x N$$

şeklinde tanımlanan S dönüşümüne yüzeyin $p \in M$ noktasında şekil operatörü denir [13].

N birim normal olduğundan $\langle N, N \rangle = 1$ 'dir. Bu durumda keyfi $x \in T_p M$ için

$$0 = X[\langle N, N \rangle] = 2g(\nabla_x N, N_p)$$

olduğundan $\nabla_x N \in T_p M$ 'dir. Yani her $p \in M$ için $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ 'ye bir dönüşümdür.

Ayrıca her $v, \omega \in T_p M$ ve her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} S_p(av + b\omega) &= -\nabla_{av+b\omega} N \\ &= -(a\nabla_v N + b\nabla_\omega N) \\ &= aS_p(v) + bS_p(\omega) \end{aligned}$$

olduğundan S_p dönüşümü lineerdir. Şekil operatörünün diğer bir özelliği ise her $p \in M$ ve her $x, y \in T_p M$ için $\langle S_p(x), y \rangle = \langle x, S_p(y) \rangle$ (simetrik) özelliğini sağlayan bir lineer dönüşümün olmasıdır.

Her $x, y \in T_p M$ için $g(x, N) = 0$ olduğundan

$$g(x, S(y)) = -g(x, \nabla_y N) = g(\nabla_y x, N)$$

ve yine $g(y, N) = 0$ olduğundan

$$g(y, S(x)) = -g(y, \nabla_x N) = g(\nabla_x y, N)$$

bulunur. Her $x, y \in T_p M$ için $[x, y] \in T_p M$ olduğundan, bu eşitlikler taraf tarafa

çıkarıldığında

$$\begin{aligned}g(y, S(x)) - g(x, S(y)) &= g(\nabla_x y, N) - g(\nabla_y x, N) \\&= g(\nabla_x y - \nabla_y x, N) \\&= g([x, y], N) \\&= 0\end{aligned}$$

olur. Böylece $g(S(x), y) = g(x, S(y))$ elde edilir.



3. HEMEN HEMEN KONTAK B-METRİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde hemen hemen kontak B-metrik manifoldların tanımı verilerek, hemen hemen kontak B-metrik manifoldların temel bazı özellikleri ifade edilecektir.

Tanım 3.1. $M, (2n + 1)$ boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold ve bu manifold üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olmak üzere; $\varphi : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ endomorfizmi, η 1-formu, ξ vektör alanı, her $X \in \chi(M)$ için

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi, \quad (3.1)$$

koşullarını sağlıyor ise (φ, η, ξ) üçlüsüne M manifoldu üzerinde bir hemen hemen kontak yapı ve M manifolduna hemen hemen kontak manifold denir [3].

Tanımdan

$$\varphi(\xi) = 0, \quad \eta(\varphi(X)) = 0 \quad (3.2)$$

olduğu şu şekilde görülür:

$$\varphi^2(\xi) = -\xi + \eta(\xi)\xi = -\xi + \xi = 0$$

olur. Tekrar φ dönüşümü uygulanırsa

$$0 = \varphi^3(\xi) = \varphi^2(\varphi(\xi)) = -\varphi(\xi) + \eta(\varphi(\xi))\xi$$

eşitliğinden

$$\varphi(\xi) = \eta(\varphi(\xi))\xi \quad (3.3)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$0 = \varphi^2(\xi) = \varphi(\varphi(\xi)) = \varphi(\eta(\varphi(\xi))\xi) = \eta(\varphi(\xi))\varphi(\xi)$$

bulunur. Bu denklemde (3.3) eşitliğinden dolayı $\varphi(\xi)$ yerine $\eta(\varphi(\xi))\xi$ yazılacak olursa

$$0 = \eta(\varphi(\xi))^2\xi$$

elde edilir. $\xi \neq 0$ olduğundan $\eta(\varphi(\xi)) = 0$ ve $\varphi(\xi) = \eta(\varphi(\xi))\xi = 0, \xi = 0$ olur.

Herhangi bir X vektör alanı için $\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$ eşitliğin her iki tarafına tekrar φ dönüşümü uygulandığında

$$\varphi(\varphi^2(X)) = -\varphi(X) + \eta(X)\varphi(\xi) = -\varphi(X)$$

ve

$$\varphi^3(X) = \varphi^2(\varphi(X)) = -\varphi(X) + \eta(\varphi(X))\xi$$

eşitliklerinden

$$\varphi^3(X) = -\varphi(X) + \eta(\varphi(X))\xi = -\varphi(X) \quad (3.4)$$

olur ve buradan

$$\eta(\varphi(X)) = 0 \quad (3.5)$$

elde edilir.

Tanım 3.2. (M, φ, ξ, η) bir hemen hemen kontak manifold olsun. Eğer her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \quad (3.6)$$

koşulunu sağlayan bir g metriği varsa M 'ye hemen hemen kontak B-metrik manifold denir [3].

Hemen hemen kontak B-metrik manifold tanımındaki (3.6) eşitliğinde $Y = \xi$ alındığında

$$g(\varphi(X), \varphi(\xi)) = -g(X, \xi) + \eta(X)\eta(\xi) \quad (3.7)$$

ve

$$g(X, \xi) = \eta(X) \quad (3.8)$$

elde edilir.

(3.6) eşitliğinde X yerine $\varphi(X)$ alındığında

$$g(\varphi(X), Y) = g(X, \varphi(Y)) \quad (3.9)$$

bulunur.

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir almost kontak B-metrik manifold olsun. Bu durumda $(2n + 1)$

boyutlu M manifoldu üzerinde

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n, \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n), \xi\}$$

$$g(\xi, \xi) = 1, \quad g(e_i, e_i) = 1, \quad g(\varphi(e_i), \varphi(e_i)) = -1, \quad 1 \leq i \leq n$$

olacak şekilde lokal bir ortonormal çatı alanı vardır.

ξ vektör alanına dik lokal birim boylu bir vektör alanı e olsun. Eğer $g(e, \varphi(e)) = 0$ ise $\{\xi, e, \varphi(e)\}$ ortonormal bir küme olur. Eğer $g(e, \varphi(e)) \neq 0$ ise; öncelikle $\xi, e, \varphi(e)$ vektör alanlarının lineer bağımsız olduğu gösterilecektir:

$a\xi + be + c\varphi(e) = 0$ ise bu eşitliğin ξ, e ve $\varphi(e)$ vektörleri ile iç çarpımı alırsa

$$a = 0, \quad 0 = b + cg(\varphi(e), e), \quad bg(e, \varphi(e)) - c = 0$$

elde edilir. Buradan

$$b(1 + g(e, \varphi(e))^2) = 0$$

ve $1 + g(e, \varphi(e))^2 > 1$ olduğundan $b = 0$ bulunur ve buradan $c = 0$ da elde edilmiş olur. Lineer bağımsız e ve $\varphi(e)$ vektör alanları kullanılarak $g(\varphi(X), X) = 0$ olacak şekilde X vektör alanı şu şekilde bulunur:

$X = ae + b\varphi(e)$ ve $g(\varphi(e), e) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} g(\varphi(X), X) &= g(\varphi(ae + b\varphi(e)), ae + b\varphi(e)) \\ &= g(a\varphi(e) - be, ae + b\varphi(e)) \\ &= abg(\varphi(e), \varphi(e)) + a^2g(\varphi(e), e) - abg(e, e) - b^2g(e, \varphi(e)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olması için

$$(a^2 - b^2)g(\varphi(e), e) - 2ab = 0$$

bulunur. $g(\varphi(e), e) = m \neq 0$ olsun. Buradan

$$a^2 - \frac{2}{m}ab - b^2 = 0$$

denklemini elde edilir. $\Delta = \frac{4b^2}{m^2} + 4b^2 > 0$ olduğundan öyle a, b sayıları vardır ki bu denklem sağlanır. Yani $g(\varphi(X), X) = 0$ olacak şekilde a, b sayıları bulunmuş olur. Bu durumda $\xi, X, \varphi(X)$ lokal ortanormal bir küme olur. Böylece manifoldun boyutu 3 ise istenen sağlanmış olur.

Eğer manifoldun boyu 3'den büyük ise bir önceki adımdan dolayı $\xi, e_1, \varphi(e_1)$ lokal ortanormal vektör alanlarının kümesi vardır. Bu kümedeki vektör alanlarına dik birim boylu bir vektör alanı e_2 olsun. Eğer $g(e_2, \varphi(e_2)) = 0$ ise $\{\xi, e_1, \varphi(e_1), e_2, \varphi(e_2)\}$ ortonormal bir küme olur. Eğer $g(e_2, \varphi(e_2)) \neq 0$ ise; öncelikle bu vektör alanlarının lineer bağımsız olduğu gösterilecektir: $a_1\xi + a_2e_1 + a_3\varphi(e_1) + a_4e_2 + a_5\varphi(e_2) = 0$ ise bu eşitliğin sırası ile $\xi, e_1, \varphi(e_1)$ vektörleri ile iç çarpımı alınırsa $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ elde edilir. Daha sonra e_2 ve $\varphi(e_2)$ vektörleri ile iç çarpımı alınırsa

$$0 = a_4 + a_5g(\varphi(e_2), e_2) \quad a_4g(e_2, \varphi(e_2)) - a_5 = 0$$

elde edilir. Buradan

$$a_4(1 + g(e_2, \varphi(e_2)))^2 = 0$$

ve $1 + g(e_2, \varphi(e_2))^2 > 1$ olduğundan $a_4 = 0$ bulunur ve buradan $a_5 = 0$ da elde edilmiş olur. Lineer bağımsız e_2 ve $\varphi(e_2)$ vektör alanları kullanılarak $g(\varphi(X), X) = 0$ olacak şekilde X vektör alanı şu şekilde bulunur:

$X = ae_2 + b\varphi(e_2)$ ve $g(\varphi(e_2), e_2) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} g(\varphi(X), X) &= g(\varphi(ae_2 + b\varphi(e_2)), ae_2 + b\varphi(e_2)) \\ &= g(a\varphi(e_2) - be_2, ae_2 + b\varphi(e_2)) \\ &= abg(\varphi(e_2), \varphi(e_2)) + a^2g(\varphi(e_2), e_2) + abg(e_2, e_2) - b^2g(e_2, \varphi(e_2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olması için

$$(a^2 - b^2)g(\varphi(e_2), e_2) - 2ab = 0$$

bulunur. $g(\varphi(e_2), e_2) = m \neq 0$ olsun. Buradan

$$a^2 - \frac{2}{m}ab - b^2 = 0$$

denklemleri elde edilir. $\Delta = \frac{4b^2}{m^2} + 4b^2 > 0$ olduğundan öyle a, b sayıları vardır ki bu denklemler sağlanır. Yani $g(\varphi(X), X) = 0$ olacak şekilde a, b sayıları bulunmuş olur. Böylece, $e_2 = X$ olmak üzere; lokal vektör alanlarının $\{\xi, e_1, \varphi(e_1), e_2, \varphi(e_2)\}$ ortanormal kümesi elde edilir. Eğer boyut 5 ise ispat tamamlanmış olur. Eğer boyut 5'ten büyük ise bu yöntem devam ettirilerek $\{\xi, e, \varphi(e), e_2, \varphi(e_2), \dots, e_n, \varphi(e_n)\}$ ortanormal tabanı elde edilir. Bu durumda g metriğinin işareti $(n+1, n)$ olur.

M hemen hemen kontak B-metrik manifoldun g metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi ∇ olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayın keyfi $x, y, z \in T_p M$ elemanları için

$$\alpha(x, y, z) := g((\nabla_x \varphi)(y), z) \quad (3.10)$$

olarak gösterilsin. α tensörü aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\alpha(x, y, z) = \alpha(x, z, y), \quad (3.11)$$

$$\alpha(x, \varphi y, \varphi z) = \alpha(x, y, z) - \eta(y)\alpha(x, \xi, z) - \eta(z)\alpha(x, y, \xi), \quad (3.12)$$

$$\alpha(x, \xi, \xi) = 0. \quad (3.13)$$

Ayrıca $\{e_1, \dots, e_{2n}, \xi\}$ kümesi $T_p M$ için bir taban olmak üzere φ dönüşümünün kovaryant türevi ile ilgili

$$\theta(x) = g^{ij} \alpha(e_i, e_j, x)$$

$$\theta^*(x) = g^{ij} \alpha(e_i, \varphi(e_j), x)$$

1-formları tanımlıdır. Burada (g^{ij}) , (g_{ij}) matrisinin tersidir.

Hemen hemen kontak B-metrik bir M manifoldu üzerindeki yapı her x, y, z vektör alanı için

$$\alpha(x, y, z) = -\frac{\theta(\xi)}{2n} \{ \eta(y)g(\varphi x, \varphi z) + \eta(z)g(\varphi x, \varphi y) \} \quad (3.14)$$

koşulunu sağlıyorsa M manifoldu $\mathcal{F}_4$ sınıfındandır denir [14]. Eğer

$$-\frac{\theta(\xi)}{2n} = 1$$

ise M manifolduna Sasaki-like kontak kompleks Riemannian manifold, kısaca Sasaki-like accR manifold denir. Bir M manifoldunun Sasaki-like accR olması için gerek ve yeter koşul her $X, Y, Z \in \ker(\eta)$ için

$$\alpha(X, Y, Z) = \alpha(\xi, Y, Z) = \alpha(\xi, \xi, Z) = 0, \quad (3.15)$$

$$\alpha(X, Y, \xi) = -g(X, Y). \quad (3.16)$$

koşullarının sağlanmasıdır. Eğer her x, y, z vektör alanı için $\frac{\theta(\xi)}{2n} = -1$ olmak üzere; (3.14) koşulu sağlanıyor ise (3.15) ve (3.16) koşullarının sağlandığı açıktır. Tersine; keyfi $x, y, z \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} x &= \underbrace{(x - \eta(x)\xi)}_{X_1} + \eta(x)\xi, & y &= \underbrace{(y - \eta(y)\xi)}_{Y_1} + \eta(y)\xi, \\ z &= \underbrace{(z - \eta(z)\xi)}_{Z_1} + \eta(z)\xi \end{aligned}$$

olsun. Burada $X_1 = -\varphi^2(x)$, $Y_1 = -\varphi^2(y)$, $Z_1 = -\varphi^2(z)$ dir. Bunlar kullanıldığında

$$\begin{aligned} \alpha(x, y, z) &= \alpha(X_1 + \eta(x)\xi, Y_1 + \eta(y)\xi, Z_1 + \eta(z)\xi) \\ &= \eta(z)\alpha(X_1, Y_1, \xi) + \eta(y)\alpha(X_1, Z_1, \xi) \\ &= -\eta(z)g(X_1, Y_1) - \eta(y)g(X_1, Z_1) \\ &= -\eta(z)g(\varphi^2(x), \varphi^2(y)) - \eta(y)g(\varphi^2(x), \varphi^2(z)) \\ &= \eta(z)g(\varphi(x), \varphi(y)) + \eta(y)g(\varphi(x), \varphi(z)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Hemen hemen kontak B-metrik bir M manifoldu üzerindeki yapı her x, y, z vektör alanları için

$$\alpha(x, y, z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{ \eta(y)g(\varphi x, z) + \eta(z)g(\varphi x, y) \}$$

koşulunu sağlıyorsa $\mathcal{F}_5$ sınıfından,

$$\begin{aligned} \alpha(x, y, z) &= -\frac{\theta(\xi)}{2n} \{ \eta(y)g(\varphi x, \varphi z) + \eta(z)g(\varphi x, \varphi y) \} \\ &\quad -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{ \eta(y)g(\varphi x, z) + \eta(z)g(\varphi x, y) \} \end{aligned}$$

koşulunu sağlıyorsa $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5$ sınıfındandır denir [3].

4. HEMEN HEMEN KONTAK B-METRİK MANİFOLD ÖRNEKLERİ

Bu bölümde hemen hemen kontak B-metrik manifold örnekleri verilecektir.

Örnek 1.

$$\mathbb{R}^{2n+2} = \{(u_1, u_2, \dots, u_{n+1}, v_1, v_2, \dots, v_{n+1}) \mid u_i, v_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n+1\}$$

kümesi verilsin. $p \in \mathbb{R}^{2n+2}$ noktasındaki $T_p\mathbb{R}^{2n+2}$ tanjant uzayının tabanı

$$T_p\mathbb{R}^{2n+2} = \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial u_{n+1}} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial v_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial v_{n+1}} \Big|_p \right\}$$

olmak üzere; J lineer dönüşümü tabanlar üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$J : T_p\mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow T_p\mathbb{R}^{2n+2}$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial}{\partial v_i}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial u_i}; \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

Keyfi $x = \lambda_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \mu_i \frac{\partial}{\partial v_i} \in T_p\mathbb{R}^{2n+2}$, $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ tanjant vektörü için

$$\begin{aligned} J^2(x) &= J\left(J\left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \mu_i \frac{\partial}{\partial v_i}\right)\right) \\ &= J\left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial v_i} - \mu_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right) = -\left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \mu_i \frac{\partial}{\partial v_i}\right) = -x \end{aligned}$$

özellği sağlanır. $\mathbb{R}^{2n+2}$ uzayı üzerinde g metriği, $\lambda_i, \mu_i, \bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere; herhangi

$$x = \lambda_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \mu_i \frac{\partial}{\partial v_i}, \quad y = \bar{\lambda}_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \bar{\mu}_i \frac{\partial}{\partial v_i}, \quad 1 \leq i \leq n+1$$

tanjant vektörleri için

$$g(x, y) = -\lambda_i \bar{\lambda}_i + \mu_i \bar{\mu}_i$$

olarak tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan g metriği her $x, y \in T_p\mathbb{R}^{2n+2}$ için

$$g(J(x), J(y)) = -g(x, y)$$

eşitliğini sağlar: $x = \lambda_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \mu_i \frac{\partial}{\partial v_i}$ ve $y = \bar{\lambda}_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \bar{\mu}_i \frac{\partial}{\partial v_i}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
g(J(x), J(y)) &= g\left(\frac{\partial}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial v_i}\right) \lambda_i \bar{\lambda}_i - g\left(\frac{\partial}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial u_i}\right) \lambda_i \bar{\mu}_i \\
&\quad - g\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial v_i}\right) \mu_i \bar{\lambda}_i + g\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_i}\right) \mu_i \bar{\mu}_i \\
&= \lambda_i \bar{\lambda}_i - \mu_i \bar{\mu}_i \\
&= -g(x, y)
\end{aligned}$$

Ayrıca

$$g(J(x), y) = -g(J^2(x), J(y)) = g(x, J(y)),$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_x J)(y) &= \nabla_x J(y) - J(\nabla_x y) \\
&= \nabla_{\lambda_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \mu_i \frac{\partial}{\partial v_i}} \left(\bar{\lambda}_i \frac{\partial}{\partial v_i} - \bar{\mu}_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right) - J \left(\nabla_{\lambda_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \mu_i \frac{\partial}{\partial v_i}} \left(\bar{\lambda}_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \bar{\mu}_i \frac{\partial}{\partial v_i} \right) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

özellikleri de sağlanır.

$\mathbb{R}^{2n+2}$ uzayında

$$S = \{z \in \mathbb{R}^{2n+2} | g(z, z) = -1\}$$

yüzeyi ele alınsın.

$$z = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1}, v_1, v_2, \dots, v_{n+1}) \in S$$

olarak alınırsa z noktasında

$$Z = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + u_{n+1} \frac{\partial}{\partial u_{n+1}} + v_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + \dots + v_{n+1} \frac{\partial}{\partial v_{n+1}}$$

vektörü $z = p \in S$ noktasında yüzeyin birim normalidir.

S yüzeyinin keyfi $p = z$ noktasında

$$g(\xi, \xi) = 1, \quad g(\xi, Z) = 0$$

özelliklerini sağlayan ξ vektör alanı, Z ve $J(Z)$ vektör alanlarının bir lineer toplamı olarak şu şekilde bulunur: Eğer $\xi = \lambda Z + \mu J(Z)$ olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} g(\xi, \xi) &= 1 = g(\lambda Z + \mu J(Z), \lambda Z + \mu J(Z)) \\ 1 &= -\lambda^2 + 2\lambda\mu g(Z, J(Z)) + \mu^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

bulunur. Öte yandan

$$g(\xi, Z) = 0 = \lambda g(Z, Z) + \mu g(J(Z), Z)$$

eşitliğinden elde edilen

$$\mu g(J(Z), Z) = \lambda$$

eşitliği (4.1) eşitliğinde yerine yazılacak olursa

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1 \quad (4.2)$$

elde edilir. $g(Z, J(Z)) = \tan t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ olarak alındığında

$$\lambda = \sin t, \quad \mu = \cos t$$

olarak bulunur. O halde;

$$\xi = \sin t Z + \cos t J(Z) \quad (4.3)$$

olur. Ek olarak

$$g(Z, \xi) = \sin t g(Z, Z) + \cos t g(Z, J(Z)) = 0$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} g(J(\xi), Z) &= g(-\cos t Z + \sin t J(Z), Z) \\ &= \cos t + \sin t \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$J(\xi) \notin T_p S$$

elde edilir. Yani $T_p S$ tanjant uzayı $T_p \mathbb{R}^{2n+2}$ uzayının öz alt uzayıdır. $J(\xi)$ tanjant vektörü kullanılarak, $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n+1}\}$ kümesi $T_p S$ tanjant uzayı için bir taban olmak üzere; $T_p \mathbb{R}^{2n+2}$ uzayı için

$$\{J(\xi), e_1, e_2, \dots, e_{2n+1}\}$$

tabanı alınabilir. Keyfi $x \in T_p \mathbb{R}^{2n+2}$ tanjant vektörü için $J(x) \in T_p \mathbb{R}^{2n+2}$ olduğundan

$$J(x) = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_{2n+1} e_{2n+1} + A J(\xi)$$

olacak şekilde k_i ve A reel sayıları vardır. A sayısı x vektörüne bağlı olduğundan $A = \eta(x)$ olarak ifade edilsin. Buradaki $k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_{2n+1} e_{2n+1}$ ifadesine $\varphi(x)$ denilecek olursa bu (φ, ξ, η) üçlüsü hemen hemen kontak B-metrik yapı olma koşullarını sağlar:

1. $x \in T_p S$ iken $\varphi^2(x) = -x + \eta(x)\xi$ eşitliğinin sağlanması:

$$\begin{aligned} -x = J^2(x) &= J(J(x)) = J(\varphi(x) + \eta(x)J(\xi)) \\ &= J(\varphi(x)) - \eta(x)\xi \\ &= \varphi^2(x) + \eta(\varphi(x))J(\xi) - \eta(x)\xi \end{aligned}$$

olur. $\varphi(x)$ vektöründe $J(\xi)$ bileşeni olmadığından $\eta(\varphi(x)) = 0$ dir. Buradan

$$\varphi^2(x) = -x + \eta(x)\xi$$

elde edilir.

2. $x \in T_p S$ iken $g(x, \xi) = \eta(x)$ eşitliği sağlanır:

$$\begin{aligned} g(x, \xi) &= g(x, \sin t Z + \cos t J(Z)) \\ &= \sin t g(x, Z) + \cos t g(x, J(Z)) \\ &= \cos t g(J(x), Z) \\ &= \cos t g(\varphi(x), Z) + \cos t g(J(\xi), Z) \eta(x) \\ &= \eta(x). \end{aligned}$$

3. $g(\varphi(x), \varphi(y)) = -g(x, y) + \eta(x)\eta(y)$ eşitliği sağlanır:

$$\begin{aligned}
g(\varphi(x), \varphi(y)) &= g(J(x), J(y)) - \eta(y)g(J(x), J(\xi)) \\
&\quad - \eta(x)g(J(\xi), J(y)) + \eta(x)\eta(y)g(J(\xi), J(\xi)) \\
&= -g(x, y) + \eta(y)g(x, \xi) + \eta(x)g(\xi, y) - \eta(x)\eta(y) \\
&= -g(x, y) + 2\eta(x)\eta(y) - \eta(x)\eta(y) \\
&= -g(x, y) + \eta(x)\eta(y).
\end{aligned}$$

Bu adımda φ dönüşümünün kovaryant türevinin özellikleri incelenecektir. $\mathbb{R}^{2n+2}$ 'de g metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi $\bar{\nabla}$, S yüzeyinde g metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi ∇ ile gösterilecektir. Gauss-Weingarten formülünden, S yüzeyi üzerindeki keyfi x, y vektör alanları için

$$\bar{\nabla}_x y = \nabla_x y + g(\bar{\nabla}_x Z, y) Z,$$

eşitliği sağlanır. $\bar{\nabla}_x Z = x$ olduğundan

$$\bar{\nabla}_x y = \nabla_x y + g(x, y) Z \quad (4.4)$$

bulunur. Bu adımda (4.4) formülü kullanılarak keyfi $x \in T_p S$ vektörü için

$$\nabla_x \xi$$

hesaplanacaktır. Öncelikle bu hesaplamada kullanılacak olan

$$x[g(Z, J(Z))] = x[\tan t] = 2\eta(x) \cos t + 2 \frac{\sin^2 t}{\cos t} \eta(x), \quad g(J(\xi), \xi) = \tan t$$

eşitlikleri gösterilecektir:

$$\begin{aligned}
g(J(\xi), \xi) &= g(J(\sin t Z + \cos t J(Z)), \sin t Z + \cos t J(Z)) \\
&= g(-\cos t Z + \sin t J(Z), \sin t Z + \cos t J(Z)) \\
&= -\sin t \cos t g(Z, Z) - \cos^2 t g(J(Z), Z) + \sin^2 t g(J(Z), Z) \\
&\quad + \sin t \cos t g(J(Z), J(Z))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sin t \cos t - \cos^2 t \tan t + \sin^2 t \tan t + \sin t \cos t \\
&= \sin t \left(\cos t + \frac{\sin^2 t}{\cos t} \right) \\
&= \sin t \left(\frac{1}{\cos t} \right) \\
&= \tan t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x[\tan t] &= x[g(Z, J(Z))] \\
&= g(\bar{\nabla}_x Z, J(Z)) + g(Z, \bar{\nabla}_x J(Z)) \\
&= g(x, J(Z)) + g(Z, J(x)) \\
&= 2g(x, J(Z)) \\
&= 2g(x, \cos t \xi + \sin t J(\xi)) \\
&= 2 \cos t \eta(x) + 2 \sin t g(x, J(\xi)) \\
&= 2 \cos t \eta(x) + 2 \sin t \eta(x) (\sin t \cos t + \sin^2 t \tan t) \\
&= 2 \cos t \eta(x) + 2 \sin^2 t \eta(x) (\cos t + \sin t \tan t) \\
&= 2 \eta(x) \cos t + 2 \frac{\sin^2 t}{\cos t} \eta(x).
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\nabla_x \xi &= \bar{\nabla}_x \xi - \eta(x) Z \\
&= \bar{\nabla}_x (\sin t Z + \cos t J(Z)) - \eta(x) Z \\
&= x[\sin t] Z + \sin t \bar{\nabla}_x Z + x[\cos t] J(Z) + \cos t \bar{\nabla}_x J(Z) - \eta(x) Z \\
&= x[\sin t] (\sin t \xi - \cos t J(\xi)) + \sin t x + x[\cos t] (\cos t \xi + \sin t J(\xi)) \\
&\quad + \cos t J(x) - \eta(x) Z \\
&= (x[\sin t] \sin t + x[\cos t] \cos t) \xi + (-x[\sin t] \cos t + x[\cos t] \sin t) J(\xi) + \\
&\quad \sin t x + \cos t J(x) - \eta(x) Z \\
&= -\cos^2 t x[\tan t] J(\xi) + x \sin t + \cos t J(x) - \eta(x) Z \\
&= -\cos^2 t \left\{ 2\eta(x) \cos t + 2 \frac{\sin^2 t}{\cos t} \eta(x) \right\} J(\xi) + x \sin t + \cos t (\varphi(x) \\
&\quad + \eta(x) J(\xi)) - \eta(x) Z \\
&= -\sin^2 t \eta(x) Z - \cos t \sin t \eta(x) J(Z) + x \sin t + \cos t \varphi(x) \\
&= \cos t \varphi(x) - \sin t (-x + (\sin t Z + \cos t J(Z)) \eta(x)) \\
&= \cos t \varphi(x) - \sin t (-x + \eta(x) \xi) \\
&= \cos t \varphi(x) - \sin t \varphi^2(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\alpha(x, y, \xi) &= \alpha(x, \xi, y) \\
&= g((\nabla_x \varphi)(\xi), y) \\
&= -g(\nabla_x \xi, \varphi(y)) \\
&= -g(\cos t \varphi(x) - \sin t \varphi^2(x), \varphi(y)) \\
&= -\cos t g(\varphi(x), \varphi(y)) - \sin t g(\varphi(x), y).
\end{aligned}$$

olur.

$\{e_1, e_2, \dots, e_n, \varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n), \xi\}$ kümesi lokal ortanormal bir çatı alanı olmak üzere

$$\theta^*(\xi) = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, \varphi(e_i), \xi) + \sum_{i=1}^n \alpha(\varphi(e_i), e_i, \xi)$$

olarak tanımlanır [3].

$$\alpha(e_i, \varphi(e_i), \xi) = \sin t, \quad \alpha(\varphi(e_i), e_i, \xi) = \sin t$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\theta^*(\xi) &= \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, \varphi(e_i), \xi) + \sum_{i=1}^n \alpha(\varphi(e_i), e_i, \xi) \\
&= \sum_{i=1}^n \sin t + \sum_{i=1}^n (\sin t) \\
&= 2n \sin t
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\sin t = \frac{\theta^*(\xi)}{2n}$$

bulunur. Aynı zamanda $\alpha(e_i, e_i, \xi) = \cos t$ ve $\alpha(\varphi(e_i), \varphi(e_i), \xi) = -\cos t$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
\theta(\xi) &= \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, e_i, \xi) - \sum_{i=1}^n \alpha(\varphi(e_i), \varphi(e_i), \xi) \\
&= \sum_{i=1}^n \cos t - \sum_{i=1}^n (-\cos t) \\
&= 2n \cos t
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\cos t = \frac{\theta(\xi)}{2n}$$

bulunur. Bulunan değerler kullanıldığında

$$\begin{aligned} (\nabla_x \varphi)(y) &= -\frac{\theta(\xi)}{2n} \{ \eta(y) \varphi^2(x) + g(\varphi(x), \varphi(y)) \xi \} \\ &\quad - \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{ \eta(y) \varphi(x) + g(\varphi(x), y) \xi \} \end{aligned} \quad (4.5)$$

olur ve

$$\begin{aligned} \alpha(x, y, z) &= -\frac{\theta(\xi)}{2n} \{ \eta(y) g(\varphi(x), \varphi(z)) + \eta(z) g(\varphi(x), \varphi(y)) \} \\ &\quad - \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{ \eta(y) g(\varphi(x), z) + \eta(z) g(\varphi(x), y) \xi \} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece S yüzeyi $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5$ sınıfından hemen hemen kontak B-metrik bir manifold olur.

Örnek 2.

$$M = \{ z \in \mathbb{R}^{2n+2} : g(z, J(z)) = 0, g(z, z) > 0 \} \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$$

kümesi $\mathbb{R}^{2n+2}$ 'de bir hiperyüzeydir. $g(z, z) > 0$ olduğundan özel olarak $t > 0$ için

$$g(z, z) = (\cosh t)^2 > 0$$

alınsın. $z = (u_1, \dots, u_{n+1}, v_1, \dots, v_{n+1})$ olmak üzere; $z = p$ noktasında $Z = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + u_{n+1} \frac{\partial}{\partial u_{n+1}} + v_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + \dots + v_{n+1} \frac{\partial}{\partial v_{n+1}}$ vektör alanı göz önüne alınsın. Birim normal $N = \frac{1}{\cosh t} J(Z)$ olarak alındığında

$$\begin{aligned} g(N, N) &= g\left(\frac{J(Z)}{\cosh t}, \frac{J(Z)}{\cosh t}\right) \\ &= -\frac{1}{\cosh^2 t} g(Z, Z) \\ &= -1 \end{aligned}$$

olur. M yüzeyi üzerinde temel vektör alanı

$$\xi = -J(N) = -J\left(\frac{1}{\cosh t}J(Z)\right) = -\frac{1}{\cosh t}J^2(Z) = \frac{1}{\cosh t}Z$$

olarak tanımlansın.

Keyfi $x \in T_p M$ tanjant vektörü ve $J(x)$ vektörü göz önüne alınsın. Yüzeyin N birim normal vektör alanı kullanılarak her $p \in M$ için $N_p \in T_p \mathbb{R}^{2n+2}$ vektörünü kullanarak $T_p \mathbb{R}^{2n+2}$ tanjant uzayı için N_p vektörünü içeren bir ortogonal taban oluşturulabilir (N_p tanjant vektörü tabana tamamlanır). Bu durumda $J(x)$ tanjant vektörü

$$J(x) = \varphi(x) + \eta(x)N$$

şeklinde tek türlü ifade edilebilir. Burada η , $T_p M$ üzerinde bir 1-formdur. Bu eşitlik yardımıyla φ tanımlanmış olur. $(\varphi(x), \xi, \eta)$ üçlüsü keyfi $x \in T_p M$ için

$$\varphi^2(x) = -x + \eta(x)\xi$$

$$\eta(\varphi(x)) = 0, \quad \varphi(\xi) = 0, \quad \eta(\xi) = 1$$

koşullarını sağlar:

$$\begin{aligned} -x = J^2(x) &= J(\varphi(x) + \eta(x)N) = \varphi^2(x) + \eta(\varphi(x))N + \eta(x)J(N) \\ &= \varphi^2(x) - \eta(x)\xi + \eta(\varphi(x))N \end{aligned}$$

ve $\eta(\varphi(x)) = 0$ olduğundan

$$\varphi^2(x) = -x + \eta(x)\xi$$

elde edilir. Her $x, y \in T_p M$ için $g(J(x), J(y)) = -g(x, y)$ olduğundan

$$\begin{aligned} -g(x, y) &= g(J(x), J(y)) \\ &= g(\varphi(x) + \eta(x)N, \varphi(y) + \eta(y)N) \\ &= g(\varphi(x), \varphi(y)) + \underbrace{\eta(y)g(\varphi(x), N)}_{=0} + \underbrace{\eta(x)g(N, \varphi(y))}_{=0} + \eta(x)\eta(y)g(N, N) \end{aligned}$$

$$= g(\varphi(x), \varphi(y)) - \eta(x)\eta(y) \quad (4.6)$$

bulunur. (4.6) eşitliğinde y yerine ξ yazıldığında

$$\eta(x) = g(x, \xi)$$

elde edilir.

$\mathbb{R}^{2n+2}$ de g metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi $\bar{\nabla}$, M yüzeyinde g metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi ∇ ile gösterilsin. Gauss-Weingarten formülünden, M yüzeyi üzerindeki keyfi x, y vektör alanları için

$$\bar{\nabla}_x y = \nabla_x y + g(\bar{\nabla}_x N, y) N,$$

eşitliği sağlanır. $\bar{\nabla}_x Z = x$ olduğundan

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_x N &= \bar{\nabla}_x \left(\frac{1}{\cosh t} J(Z) \right) \\ &= x \left[\frac{1}{\cosh t} \right] J(Z) + \frac{1}{\cosh t} \bar{\nabla}_x J(Z) \\ &= -\frac{g(x, Z)}{(\cosh t)^3} J(Z) + \frac{1}{\cosh t} J(\bar{\nabla}_x Z) \\ &= -\frac{g(x, Z)}{(\cosh t)^3} \cosh t N + \frac{1}{\cosh t} J(x) \\ &= -\frac{1}{(\cosh t)^2} g(x, \cosh t \xi) N + \frac{1}{\cosh t} (\varphi(x) + \eta(x) N) \\ &= \frac{1}{\cosh t} \varphi(x) \end{aligned} \quad (4.7)$$

ve buradan

$$\bar{\nabla}_x y = \nabla_x y + \frac{1}{\cosh t} g(\varphi(x), y) N$$

elde edilir. Bu adımda (4.7) formülü kullanılarak keyfi $x \in T_p M$ vektörü için $\bar{\nabla}_x \xi$ vektörü hesaplanacaktır:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_x \xi &= \bar{\nabla}_x (-J(N)) \\ &= -J(\bar{\nabla}_x N) \\ &= -J \left(\frac{1}{\cosh t} \varphi(x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\cosh t} J(\varphi(x)) \\
&= -\frac{1}{\cosh t} \varphi^2(x).
\end{aligned}$$

Keyfi x, y vektörleri için

$$\begin{aligned}
\alpha(x, y, \xi) &= \alpha(x, \xi, y) = g((\bar{\nabla}_x \varphi)(\xi), y) \\
&= -g(\varphi(\bar{\nabla}_x \xi), y) \\
&= -g(\bar{\nabla}_x \xi, \varphi(y)) \\
&= \frac{1}{\cosh t} g(\varphi^2(x), \varphi(y)) \\
&= -\frac{1}{\cosh t} g(\varphi(x), y)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\alpha(e_i, e_i, \xi) = 0, \quad \alpha(e_i, \varphi(e_i), \xi) = \frac{1}{\cosh t}$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikler kullanıldığında

$$\theta(\xi) = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, e_i, \xi) - \sum_{i=1}^n \alpha(\varphi(e_i), \varphi(e_i), \xi) = 0, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
\theta^*(\xi) &= \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, \varphi(e_i), \xi) - \sum_{i=1}^n \alpha(\varphi(e_i), \varphi^2(e_i), \xi) \\
&= n \cdot \frac{1}{\cosh t} - \left(-n \frac{1}{\cosh t} \right) \\
&= \frac{2n}{\cosh t}
\end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen eşitlikler kullanıldığında

$$\begin{aligned}
(\nabla_x \varphi)(y) &= \nabla_x \varphi(y) - \varphi(\nabla_x y) \\
&= \bar{\nabla}_x \varphi(y) - \frac{1}{\cosh t} g(\varphi(x), \varphi(y)) N - \varphi(\bar{\nabla}_x y - \frac{1}{\cosh t} g(\varphi(x), y) N) \\
&= \bar{\nabla}_x \varphi(y) - \frac{1}{\cosh t} g(\varphi(x), \varphi(y)) N - \varphi(\bar{\nabla}_x y) + \frac{1}{\cosh t} g(\varphi(x), y) \underbrace{\varphi(N)}_{J(N)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\nabla}_x((J(y) - \eta(y)N)) - \frac{1}{\cosh t}g(\varphi(x), \varphi(y))N \\
&\quad - J(\bar{\nabla}_x y) + \eta(\bar{\nabla}_x y)N + \frac{1}{\cosh t}g(\varphi(x), y)J(N) \\
&= \bar{\nabla}_x J(y) - \bar{\nabla}_x(\eta(y)N) - \frac{1}{\cosh t}g(\varphi(x), \varphi(y))N \\
&\quad - J(\bar{\nabla}_x y) + \eta(\bar{\nabla}_x y)N + \frac{1}{\cosh t}g(\varphi(x), y)J(N) \\
&= -x[\eta(y)]N - \eta(y)\bar{\nabla}_x N - \frac{1}{\cosh t}g(\varphi(x), \varphi(y))N \\
&\quad + g(\bar{\nabla}_x y, \xi)N + \frac{1}{\cosh t}g(\varphi(x), y)J(N) \\
&= -g(\bar{\nabla}_x \xi, y)N - \eta(y)\frac{1}{\cosh t}\varphi(x) - \frac{1}{\cosh t}g(\varphi(x), \varphi(y))N \\
&\quad + \frac{1}{\cosh t}g(\varphi(x), y)J(N) \\
&= \frac{1}{\cosh t}g(\varphi^2(x), y)N - \eta(y)\frac{1}{\cosh t}\varphi(x) - \frac{1}{\cosh t}g(\varphi(x), \varphi(y))N \\
&\quad - \frac{1}{\cosh t}g(\varphi(x), y)(\xi) \\
&= -\eta(y)\frac{1}{\cosh t}\varphi(x) - \frac{1}{\cosh t}g(\varphi(x), y)\xi \\
&= -\frac{1}{\cosh t}(\eta(y)\varphi(x) + g(\varphi(x), y)\xi) \\
&= -\frac{\theta^*(\xi)}{2n}(\eta(y)\varphi(x) + g(\varphi(x), y)\xi)
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\alpha(x, y, z) = g((\nabla_x \varphi)(y), z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n}(\eta(y)g(\varphi(x), z) + \eta(z)g(\varphi(x), y))$$

elde edilir. Böylece M yüzeyi $\mathcal{F}_5$ sınıfından hemen hemen kontak B-metrik bir manifold olur.

5. HEMEN HEMEN KOMPLEKS NORDEN METRİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde çalışmanın temel teoreminde kullanılacak olan hemen hemen kompleks Norden metrik manifold tanımı verilerek bazı temel özellikler ifade edilecektir.

Tanım 5.1. M , $2n$ boyutlu bir manifold olsun.

$$J : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

bir endomorfizm ve g , M üzerinde bir Semi- Riemannian metrik olsun. Eğer her x, y vektör alanı için;

$$J^2(x) = -x$$

ve

$$g(J(x), J(y)) = -g(x, y)$$

koşulları sağlanıyorsa (M, J, g) üçlüsüne bir hemen hemen kompleks Norden metrik manifold denir.

Semi-Riemannian g metriğinin Levi-Civita kovaryant türevini ∇ olsun. Herhangi bir $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayın keyfi $x, y, z \in T_p M$ elemanları için

$$F(x, y, z) := g((\nabla_x J)(y), z)$$

olarak gösterilsin. F tensörünün

$$F(x, y, z) = F(x, z, y)$$

koşulunu sağladığı şu şekilde görülür:

$$\begin{aligned} g(J(x), y) &= -g(J^2(x), J(y)) \\ &= g(x, J(y)) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= g((\nabla_x J)(y), z) \\ &= g(\nabla_x J(y), z) - g(J(\nabla_x y), z) \end{aligned}$$

$$= g(\nabla_x J(y), z) - g(\nabla_x y, J(z))$$

elde edilir. Öte yandan $x[g(J(y), z)] = x[g(y, J(z))]$ olduğundan

$$g(\nabla_x J(y), z) + g(J(y), \nabla_x z) = g(\nabla_x y, J(z)) + g(y, \nabla_x J(z))$$

eşitliğinden

$$g(\nabla_x J(y), z) = g(\nabla_x y, J(z)) + g(\nabla_x J(z), y) - g(\nabla_x z, J(y)) \quad (5.1)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik yerine yazılacak olursa

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= g(\nabla_x J(z), y) - g(\nabla_x z, J(y)) + g(\nabla_x y, J(z)) - g(\nabla_x y, J(z)) \\ &= g(\nabla_x J(z), y) - g(\nabla_x z, J(y)) \\ &= g(\nabla_x J(z), y) - g(J(\nabla_x z), y) \\ &= g((\nabla_x J)(z), y) \\ &= F(x, z, y) \end{aligned}$$

olur. $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ kümesi M hemen hemen kompleks Norden metrik manifold üzerinde lokal bir çatı alanı olsun. F tensörü kullanılarak, x vektör alanı için Θ 1-formu şu şekilde tanımlanır:

$$\Theta(x) = g^{ij} F(e_i, e_j, x).$$

Burada $(g^{ij}), (g_{ij})$ matrisinin tersidir.

Her x, y, z vektör alanı için

$$F(x, y, z) = 0$$

koşulu sağlanıyorsa (M, J, g) manifolduna "Kaehlerian Norden Metrik Manifold" denir.

(M, J, g) bir hemen hemen kompleks Norden metrik manifold olsun. Her $p \in M$ için

$$W = \{\alpha \in \otimes^3 T_p^* M | F(x, y, z) = F(x, z, y) = F(x, J(y), J(z))\}$$

uzayı göz önüne alınsın. Bu uzay aşağıda tanımlama bağıntıları verilen W_1, W_2 ve W_3 alt uzaylarının direk toplamı olarak yazılır. Herhangi bir hemen hemen kompleks Norden metrik manifoldun ait olduğu sınıf bu tanımlama bağıntılarına göre belirlenir [4]. Bu sınıfların tanımlama bağıntıları şu şekildedir:

1. Kaehlerian Norden metrik manifold:

$$F(x, y, z) = 0.$$

2. W_1 sınıfı (Conformally Kaehlerian Norden metrik manifold):

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2n} \{g(x, y)\varphi(z) + g(x, z)\varphi(y) + g(x, J(y))\varphi(J(z)) + g(x, J(z))\varphi(J(y))\}.$$

3. W_2 sınıfı (Special kompleks Norden metrik manifold):

$$F(x, y, J(z)) + F(y, z, J(x)) + F(z, x, J(y)) = 0, \quad \Theta = 0.$$

4. W_3 sınıfı (Quasi-Kaehlerian Norden metrik manifold):

$$F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y) = 0.$$

5. $W_1 \oplus W_2$ sınıfı (Kompleks Norden metrik manifold):

$$F(x, y, J(z)) + F(y, z, J(x)) = F(z, x, J(y)) = 0, \quad \Theta = 0.$$

6. $W_2 \oplus W_3$ sınıfı (Remi-Kaehlerian Norden metrik manifold):

$$\Theta = 0$$

7. $W_1 \oplus W_3$ sınıfı:

$$F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y) = \frac{1}{n} \{g(x, y)\varphi(z) + g(z, x)\varphi(y) + g(y, z)\varphi(x) + g(y, z)\varphi(x) + g(x, Jy)\varphi(Jz) + g(y, Jz)\varphi(Jx) + g(z, Jx)\varphi(Jy)\}$$

8. $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ sınıfı en geniş sınıftır.

6. HEMEN HEMEN KONTAK B-METRİK MANİFOLDLARDAN ELDE EDİLEN HEMEN HEMEN KOMPLEKS NORDEN METRİK MANİFOLDLAR

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontak B-metrik manifold olsun. σ ve μ sadece t ye bağlı fonksiyonlar olmak üzere; $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde $\tilde{J}$ endomorfizmi

$$\tilde{J} \left(x, a \frac{d}{dt} \right) = \left(\varphi(x) - ae^{-(\sigma+\mu)}\xi, e^{(\sigma+\mu)}\eta(x) \frac{d}{dt} \right) \quad (6.1)$$

olarak tanımlansın. $\tilde{J}^2 = -I$ olduğu aşağıda gösterilmiştir:

$$\begin{aligned} \tilde{J}^2 \left(x, a \frac{d}{dt} \right) &= \tilde{J}(\tilde{J}((x, a \frac{d}{dt}))) \\ &= \tilde{J} \left(\varphi(x) - ae^{-(\sigma+\mu)}\xi, e^{(\sigma+\mu)}\eta(x) \frac{d}{dt} \right) \\ &= \left(\varphi^2(x) - e^{(\mu+\sigma)}\eta(x)e^{-(\mu+\sigma)}\xi, e^{(\mu+\sigma)}\eta(\varphi(x) - ae^{-(\sigma+\mu)}\xi) \frac{d}{dt} \right) \\ &= \left(-x + \eta(x)\xi - \eta(x)\xi, -a \frac{d}{dt} \right) \\ &= \left(-x, -a \frac{d}{dt} \right) \\ &= - \left(x, a \frac{d}{dt} \right). \end{aligned}$$

$M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerindeki metrik ise

$$\tilde{g} \left(\left(x, a \frac{d}{dt} \right), \left(y, b \frac{d}{dt} \right) \right) = e^{2\sigma}g(x, y) + e^{2\sigma} (e^{2\mu} - 1) \eta(x)\eta(y) - ab$$

olarak tanımlandığında $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerindeki $\tilde{J}$ endomorfizmi ve $\tilde{g}$ metriği

$$\begin{aligned} \tilde{g} \left(\tilde{J}(x, a \frac{d}{dt}), \tilde{J}(y, b \frac{d}{dt}) \right) &= \tilde{g} \left((\varphi(x) - ae^{-(\sigma+\mu)}\xi, e^{(\sigma+\mu)}\eta(x) \frac{d}{dt}), \right. \\ &\quad \left. (\varphi(y) - be^{-(\sigma+\mu)}\xi, e^{(\sigma+\mu)}\eta(y) \frac{d}{dt}) \right) \\ &= e^{2\sigma}g(\varphi(x) - ae^{-(\sigma+\mu)}\xi, \varphi(y) - be^{-(\sigma+\mu)}\xi) \\ &\quad + abe^{2\sigma} (e^{2\mu} - 1) e^{-2(\sigma+\mu)} - e^{2\sigma+2\mu}\eta(x)\eta(y) \\ &= e^{2\sigma}g(\varphi(x), \varphi(y)) + abe^{-2\mu} + e^{2\sigma} (e^{2\mu} - 1) abe^{-2\mu-2\sigma} \\ &\quad - e^{2\sigma+2\mu}\eta(x)\eta(y) \\ &= -e^{2\sigma}g(x, y) + e^{2\sigma}\eta(x)\eta(y) + ab - e^{2\sigma+2\mu}\eta(x)\eta(y) \\ &= -\tilde{g} \left((x, a \frac{d}{dt}), (y, b \frac{d}{dt}) \right) \end{aligned}$$

koşulunu sağlar. Böylece $(M \times \mathbb{R}, \tilde{J}, \tilde{g})$ bir hemen hemen kompleks Norden metrik manifold olur.

M manifoldu üzerindeki g metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi ∇ ile, $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerindeki $\tilde{g}$ metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi ise $\tilde{\nabla}$ ile gösterilsin. M manifoldu üzerindeki ξ vektör alanına dik vektör alanları X, Y, Z ile gösterilmek üzere; $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita kovaryant türevinin sıfırdan farklı bileşenleri Koszul formülü kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= e^{2\sigma} g(\nabla_X Y, Z), \\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \xi) &= e^{2\sigma} g(\nabla_X Y, \xi) - e^{2\sigma} (e^{2\mu} - 1) d\eta(X, Y), \\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \frac{d}{dt}) &= -e^{2\sigma} g(X, Y) \frac{d\sigma}{dt}, \\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \xi, Z) &= e^{2\sigma} g(\nabla_X \xi, Z) + e^{2\sigma} (e^{2\mu} - 1) d\eta(X, Z), \\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \frac{d}{dt}, Z) &= e^{2\sigma} g(X, Z) \frac{d\sigma}{dt}, \\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_\xi Y, Z) &= e^{2\sigma} g(\nabla_\xi Y, Z) + e^{2\sigma} (e^{2\mu} - 1) d\eta(Y, Z), \\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_\xi Y, \xi) &= e^{2\sigma+2\mu} g(\nabla_\xi Y, \xi), \\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_\xi \xi, Z) &= e^{2\sigma+2\mu} g(\nabla_\xi \xi, Z), \\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_\xi \xi, \frac{d}{dt}) &= -e^{2\sigma+2\mu} (\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt}), \\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_\xi \frac{d}{dt}, \xi) &= e^{2\sigma+2\mu} (\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt}), \\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}} Y, Z) &= e^{2\sigma} g(Y, Z) \frac{d\sigma}{dt}, \\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}} \xi, \xi) &= e^{2\sigma+2\mu} (\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt}).
\end{aligned}$$

$\tilde{J}$ hemen hemen kompleks yapının $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita kovaryant türevinin sıfırdan farklı bileşenleri ise;

$$\begin{aligned}
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X \tilde{J})(Y), Z) &= e^{2\sigma} g((\nabla_X \varphi)(Y), Z), \\
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X \tilde{J})(Y), \xi) &= e^{2\sigma} \{g(\nabla_X \varphi(Y), \xi) + e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(X, Y) - (e^{2\mu} - 1) d\eta(X, \varphi(Y))\}, \\
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X \tilde{J})(Y), \frac{d}{dt}) &= -e^{2\sigma} \frac{d\sigma}{dt} g(X, \varphi(Y)) + e^{\sigma-\mu} g(\nabla_X Y, \xi) - e^{\sigma-\mu} (e^{2\mu} - 1) d\eta(X, Y), \\
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X \tilde{J})(\xi), Z) &= e^{3\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(X, Z) - e^{2\sigma} g(\nabla_X \xi, \varphi(Z)) - e^{2\sigma} (e^{2\mu} - 1) d\eta(X, \varphi(Z)), \\
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X \tilde{J})(\frac{d}{dt}), Z) &= -e^{\sigma-\mu} g(\nabla_X \xi, Z) - e^{\sigma-\mu} (e^{2\mu} - 1) d\eta(X, Z) - e^{2\sigma} \frac{d\sigma}{dt} g(X, \varphi(Z)), \\
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi \tilde{J})(Y), Z) &= e^{2\sigma} g((\nabla_\xi \varphi)(Y), Z) + e^{2\sigma} (e^{2\mu} - 1) \{d\eta(\varphi(Y), Z) - d\eta(Y, \varphi(Z))\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi \tilde{J})(Y), \xi) &= e^{2(\sigma+\mu)} g(\nabla_\xi \varphi(Y), \xi), \\
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi \tilde{J})(Y), \frac{d}{dt}) &= e^{\sigma+\mu} g(\nabla_\xi Y, \xi), \\
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi \tilde{J})(\xi), Z) &= e^{2(\sigma+\mu)} g(\nabla_\xi \xi, \varphi(Z)), \\
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi \tilde{J})(\xi), \xi) &= 2e^{3(\sigma+\mu)} (\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt}), \\
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi \tilde{J})(\frac{d}{dt}), Z) &= -e^{\sigma+\mu} g(\nabla_\xi \xi, Z), \\
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi \tilde{J})(\frac{d}{dt}), \frac{d}{dt}) &= 2e^{\sigma+\mu} (\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt}), \\
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}} \tilde{J})(\xi), \frac{d}{dt}) &= e^{\sigma+\mu} (\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt}), \\
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}} \tilde{J})(\frac{d}{dt}), \xi) &= -e^{\sigma+\mu} (\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt}).
\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. Bu hesaplar kullanılarak $M \times \mathbb{R}$ 'nin Kaehlerian Norden metrik manifold olmasıyla ilgili aşağıdaki teorem ifade edilmiştir.

Teorem 6.1. $X, Y, Z \in \text{Ker} \eta$ olmak üzere; $\tilde{\nabla} \tilde{J} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\alpha(X, Y, Z) = 0, \quad \alpha(\xi, \xi, Z) = 0, \quad \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt} = 0, \quad (6.2)$$

$$\alpha(X, Y, \xi) = -e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(X, Y) + (e^{2\mu} - 1) d\eta(X, \varphi(Y)), \quad (6.3)$$

$$\alpha(\xi, Y, Z) = (1 - e^{2\mu})(d\eta(\varphi(Y), Z) - d\eta(Y, \varphi(Z))) \quad (6.4)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Burada (6.2), (6.3) ve (6.4) eşitlikleri (6.2) ve aşağıdaki (6.5) eşitliğine denktir.

$$\alpha(\xi, Y, Z) = 0, \quad \alpha(X, Y, \xi) = -e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(X, Y). \quad (6.5)$$

(6.2), (6.3) ve (6.4) eşitlikleri sağlansın. (6.3) eşitliğinde Y yerine $\varphi(Y)$ alındığında ve $\nabla_\xi \xi = 0$ olduğundan

$$(\nabla_X \eta)(Y) = -e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(X, \varphi(Y)) - (e^{2\mu} - 1) d\eta(X, Y)$$

ve bu eşitlikten

$$d\eta(X, Y) = 0$$

elde edilir. Böylece $\alpha(\xi, Y, Z) = 0$ ve $\alpha(X, Y, \xi) = -e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(X, Y)$ elde edilir. Tersine (6.2) ve (6.5) eşitlikleri sağlanıyorsa, $\alpha(\xi, Y, Z) = 0$ ve $\alpha(X, Y, \xi) = -e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(X, Y)$

olduğundan $d\eta(X, \varphi(Y)) = 0$ ve buradan (6.3) ve (6.4) eşitlikleri sağlanır.

Böylece $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunun bir Kaehlerian Norden metrik manifold olması için gerek ve yeter koşul her $X, Y, Z \in \text{Ker}\eta$ için

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (6.6)$$

$$\alpha(\xi, \xi, Z) = 0 \quad (6.7)$$

$$\alpha(X, Y, Z) = 0 \quad (6.8)$$

$$\alpha(\xi, Y, Z) = 0 \quad (6.9)$$

$$\alpha(X, Y, \xi) = -e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(X, Y) \quad (6.10)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Kanıt. Eğer (6.6), (6.7), (6.8), (6.9), (6.10) koşulları sağlanıyorsa $\tilde{\nabla} \tilde{J}$ ' nin yukarıda verilen tüm sıfırdan farklı bileşenleri 0 olur:

(6.6) eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned} \tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi J)(\xi), \xi) &= 2e^{3(\sigma+\mu)} \left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt} \right) = 0, \\ \tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi J)\left(\frac{d}{dt}\right), \frac{d}{dt}) &= 2e^{\sigma+\mu} \left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt} \right) = 0, \\ \tilde{g}((\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}} J)(\xi), \frac{d}{dt}) &= e^{\sigma+\mu} \left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt} \right) = 0, \\ \tilde{g}((\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}} J)\left(\frac{d}{dt}\right), \xi) &= -e^{\sigma+\mu} \left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt} \right) = 0 \end{aligned}$$

olur. $\varphi(Z) \in \text{Ker}(\eta)$ olduğundan (6.7) eşitliğinde Z yerine $\varphi(Z)$ yazılırsa

$$\alpha(\xi, \xi, \varphi(Z)) = 0$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha(\xi, \xi, \varphi(Z)) &= g((\nabla_\xi \varphi)(\xi), \varphi(Z)) \\ &= -g(\varphi(\nabla_\xi \xi), \varphi(Z)) \\ &= g(\nabla_\xi \xi, Z) \\ &= -g(\nabla_\xi Z, \xi) \end{aligned} \quad (6.11)$$

elde edilir. Bu eşitlikten dolayı

$$\tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi J)(Y), \xi) = e^{2(\sigma+\mu)} g(\nabla_\xi \varphi(Y), \xi) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi J)(Y), \frac{d}{dt}) &= e^{\sigma+\mu} g(\nabla_\xi Y, \xi) = 0, \\
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi J)(\xi), Z) &= e^{2(\sigma+\mu)} g(\nabla_\xi \xi, \varphi(Z)) = 0, \\
\tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi J)(\frac{d}{dt}), Z) &= -e^{\sigma+\mu} g(\nabla_\xi \xi, Z) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan (6.10) eşitliğinden

$$g(\nabla_X \xi, Y) = -e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(X, \varphi(Y)) \quad (6.12)$$

olur. Buradan

$$(d\eta)(X, Y) = 0$$

elde edilir. (6.9) eşitliğinden ve $(d\eta)(X, Y) = 0$ olduğundan

$$\tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi J)(Y), Z) = 0$$

olur. Diğer taraftan (6.12) nolu eşitlikten ve $d\eta(X, Y) = 0$ olduğundan

$$\tilde{g}\left((\tilde{\nabla}_X J)(\frac{d}{dt}), Z\right) = 0 \quad (6.13)$$

bulunur. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\left((\tilde{\nabla}_X \tilde{J})(\xi), Z\right) &= 0, \\
\tilde{g}\left((\tilde{\nabla}_X J)(Y), \xi\right) &= 0, \\
\tilde{g}\left((\tilde{\nabla}_X J)(Y), \frac{d}{dt}\right) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (6.8) eşitliğinden

$$\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X \tilde{J})(Y), Z) = e^{2\sigma} g((\nabla_X \varphi)(Y), Z) = 0$$

olur. Böylece (6.6), (6.7), (6.8), (6.9) ve (6.10) eşitlikleri sağlandığında $\tilde{\nabla} \tilde{J}$ nin tüm bileşenleri sıfır olarak elde edilir.

Tersine $\tilde{\nabla} \tilde{J}$ nin tüm bileşenleri sıfır ise

$$0 = \tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi J)(\xi), \xi) = 2e^{3(\sigma+\mu)} \left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt}\right)$$

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi J)(\frac{d}{dt}), \frac{d}{dt}) = 2e^{\sigma+\mu}(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt}) \\
0 &= \tilde{g}((\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}} J)(\xi), \frac{d}{dt}) = e^{\sigma+\mu}(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt}) \\
0 &= \tilde{g}((\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}} J)(\frac{d}{dt}), \xi) = -e^{\sigma+\mu}(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt})
\end{aligned}$$

eşitliklerinden $\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt} = 0$ yani (6.6) eşitliği elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi J)(Y), \xi) = e^{2(\sigma+\mu)}g(\nabla_\xi \varphi(Y), \xi), \\
0 &= \tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi J)(Y), \frac{d}{dt}) = e^{\sigma+\mu}g(\nabla_\xi Y, \xi) = 0, \\
0 &= \tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi J)(\xi), Z) = e^{2(\sigma+\mu)}g(\nabla_\xi \xi, \varphi(Z)) = 0, \\
0 &= \tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi J)(\frac{d}{dt}), Z) = -e^{\sigma+\mu}g(\nabla_\xi \xi, Z) = 0
\end{aligned}$$

eşitliklerinden $\alpha(\xi, \xi, Z) = 0$ yani (6.7) eşitliği elde edilir.

$$0 = \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X J)(\frac{d}{dt}), Z) = -e^{\sigma-\mu}g(\nabla_X \xi, Z) - e^{\sigma-\mu}(e^{2\mu}-1)d\eta(X, Z) - e^{2\sigma}\frac{d\sigma}{dt}g(X, \varphi(Z))$$

eşitliğinden

$$g(\nabla_X \xi, Z) = -(e^{2\mu}-1)d\eta(X, Z) - e^{\sigma+\mu}\frac{d\sigma}{dt}g(X, \varphi(Z))$$

olur. Son eşitlikten

$$g(\nabla_X \xi, Z) - g(\nabla_Z \xi, X) = -(e^{2\mu}-1)(d\eta(X, Z) - d\eta(Z, X))$$

ve

$$2d\eta(X, Z) = g(\nabla_X \xi, Z) - g(\nabla_Z \xi, X) \quad (6.14)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
2d\eta(X, Z) &= -(e^{2\mu}-1)(d\eta(X, Z) - d\eta(Z, X)) \\
2d\eta(X, Z) &= -2(e^{2\mu}-1)d\eta(X, Z)
\end{aligned}$$

ve $d\eta = 0$ olduğu bulunur. Buradan

$$0 = \tilde{g}((\tilde{\nabla}_\xi J)(Y), Z) = e^{2\sigma}g((\nabla_\xi \varphi)(Y), Z) + e^{2\sigma}(e^{2\mu-1})d\eta(\varphi(Y), Z) - d\eta(Y, \varphi(Z))$$

eşitliğinden $\alpha(\xi, Y, Z) = 0$ yani (6.9) eşitliği elde edilir. Diğer taraftan

$$0 = \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X J)(\frac{d}{dt}), Z) = -e^{\sigma-\mu}g(\nabla_X \xi, Z) - e^{\sigma-\mu}(e^{2\mu}-1)d\eta(X, Z) - e^{2\sigma}\frac{d\sigma}{dt}g(X, \varphi(Z))$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} 0 &= e^{-\mu}g(\nabla_X \xi, Z) + e^{\sigma}\frac{d\sigma}{dt}g(X, \varphi(Z)), \\ g(\nabla_X \xi, Z) &= -e^{\sigma+\mu}\frac{d\sigma}{dt}g(X, \varphi(Z)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte Z yerine $\varphi(Z)$ alınırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \xi, \varphi(Z)) &= -e^{\sigma+\mu}\frac{d\sigma}{dt}g(X, \varphi^2(Z)) \\ g(\varphi(\nabla_X \xi), Z) &= -e^{\sigma+\mu}\frac{d\sigma}{dt}g(X, -Z + \eta(Z)\xi) \end{aligned}$$

olur. $\varphi(\xi) = 0$ ve $\eta(Z) = 0$ olduğundan

$$\alpha(X, Z, \xi) = \alpha(X, \xi, Z) = -e^{\sigma+\mu}\frac{d\sigma}{dt}g(X, Z)$$

eşitliği yani (6.10) nolu eşitlik elde edilir. $\square$

Önerme 6.2. M manifoldu üzerindeki yapının (6.7), (6.8), (6.9), (6.10) eşitliklerini sağlaması için gerek ve yeter koşul M manifoldu üzerindeki her x, y, z vektör alanları için

$$\alpha(x, y, z) = e^{\sigma+\mu}\frac{d\sigma}{dt} \{ \eta(y)g(\varphi(x), \varphi(z)) + \eta(z)g(\varphi(x), \varphi(y)) \} \quad (6.15)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Kanıt. M manifoldu üzerindeki herhangi x, y, z vektör alanları için

$$\begin{aligned} x &= x - \eta(x)\xi + \eta(x)\xi = X_1 + \eta(x)\xi, & X_1 &= x - \eta(x)\xi \\ y &= y - \eta(y)\xi + \eta(y)\xi = Y_1 + \eta(y)\xi, & Y_1 &= y - \eta(y)\xi \\ z &= z - \eta(z)\xi + \eta(z)\xi = Z_1 + \eta(z)\xi, & Z_1 &= z - \eta(z)\xi \end{aligned}$$

olsun. Burada $X_1, Y_1, Z_1 \in \text{Ker}\eta$ olur. Buradan (6.7), (6.8), (6.9) ve (6.10) eşitlikleri

göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
\alpha(x, y, z) &= \alpha(X_1 + \eta(x)\xi, Y_1 + \eta(y)\xi, Z_1 + \eta(z)\xi) \\
&= \alpha(X_1, Y_1, Z_1) + \eta(z)\alpha(X_1, Y_1, \xi) + \eta(y)\alpha(X_1, Z_1, \xi) \\
&\quad \eta(x)\alpha(\xi, Y_1, Z_1) + \eta(x)\eta(z)\alpha(\xi, \xi, Y_1) + \eta(x)\eta(y)\alpha(\xi, \xi, Z_1) \\
&= \eta(z)\alpha(X_1, Y_1, \xi) + \eta(y)\alpha(X_1, Z_1, \xi) \\
&= -e^{\sigma+\mu}\frac{d\sigma}{dt}\{\eta(z)g(X_1, Y_1) + \eta(y)g(X_1, Z_1)\} \\
&= e^{\sigma+\mu}\frac{d\sigma}{dt}\{\eta(z)g((\varphi(x), \varphi(y))) + \eta(y)g((\varphi(x), \varphi(z)))\}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

elde edilir.

Tersine (6.15) eşitliği sağlansın. Bu eşitlikte $X, Y, Z \in \text{Ker}\eta$ alındığında $\alpha(X, Y, Z) = 0$ yani (6.8) eşitliği sağlanmış olur.

Yine (6.15) eşitliğinde $x = y = \xi$ ve $Z \in \text{Ker}\eta$ alınırsa $\alpha(\xi, \xi, Z) = 0$ elde edilir.

Diğer yandan $x = \xi$ ve $Y, Z \in \text{Ker}\eta$ alındığında $\alpha(\xi, Y, Z) = 0$ bulunur.

(6.15) eşitliğinde $X, Y \in \text{Ker}\eta$ ve $z = \xi$ olarak alındığında

$$e^{\sigma+\mu}\frac{d\sigma}{dt}g(\varphi(X), \varphi(Y)) = -e^{\sigma+\mu}\frac{d\sigma}{dt}g(X, Y)$$

olduğundan (6.10) nolu eşitlik sağlanmış olur. $\square$

Hemen hemen kontakt B-metrik manifoldların $\mathcal{F}_4$ sınıfının tanımlama bağıntısı $\forall x, y, z \in \chi(M)$ için

$$\alpha(x, y, z) = -\frac{\theta(\xi)}{2n}\{\eta(y)g(\varphi(x), \varphi(z)) + \eta(z)g(\varphi(x), \varphi(y))\}$$

şeklindedir. Bu bağıntı dikkate alındığında, σ ve μ fonksiyonları

$$-\frac{\theta(\xi)}{2n} = e^{\sigma+\mu}\frac{d\sigma}{dt} \tag{6.17}$$

koşulunu sağlayacak şekilde seçildiğinde (6.7), (6.8), (6.9) ve (6.10) eşitliklerinden $\mathcal{F}_4$ sınıfına ait bir manifold elde edilmiş olur. Ancak (6.17) denkleminin $\theta(\xi)$ sabit bir reel sayı olması durumunda çözümü vardır. Sonuç olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 6.3. *M hemen hemen kontakt B-metrik manifold olsun. $M \times \mathbb{R}$ çarpım*

manifoldunun Kaehlerian Norden Metrik manifold olması için gerek ve yeter koşul M manifoldunun $\mathcal{F}_4$ sınıfından, $\theta(\xi)$ 'ın sabit bir reel sayı ve

$$\begin{aligned} e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{\theta(\xi)}{2n}, \\ \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Kanıt. $M \times \mathbb{R}$ Kaehlerian Norden metrik manifold ise Teorem 6.1'den (6.7), (6.8), (6.9) ve (6.10) eşitlikleri sağlanır. $\theta(\xi)$ sabit olmak üzere; Önerme 6.2'den dolayı $e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\theta(\xi)}{2n}$ alındığında M manifoldu $\mathcal{F}_4$ sınıfından olur.

Tersine M manifoldu üzerindeki yapı $\mathcal{F}_4$ sınıfından ve $\theta(\xi)$ sabit ve

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (6.19)$$

ise

$$\sigma(t) + \mu(t) = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (6.20)$$

formundadır. $\theta(\xi)$ sabit ise

$$e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\theta(\xi)}{2n} \quad (6.21)$$

diferansiyel denkleminin çözümü

$$\sigma(t) = -\frac{\theta(\xi)}{2n} e^{-ct} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad (6.22)$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\mu(t) = c + \frac{\theta(\xi)}{2n} e^{-ct} - c_1 \quad (6.23)$$

olarak seçilirse çarpım manifoldumuz Kaehlerian Norden metrik manifold olur.

□

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n, \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n), \xi\}$$

M manifoldu için lokal ortonormal bir çatı alanı olsun. Bu taban kullanılarak $M \times \mathbb{R}$

üzerinde

$$\left\{ (e^{-\sigma}e_1, 0), (e^{-\sigma}e_2, 0), \dots, (e^{-\sigma}e_n, 0), \right. \\ \left. (e^{-\sigma}\varphi(e_1), 0), \dots, (e^{-\sigma}\varphi(e_n), 0), (e^{-\sigma-\mu}\xi, 0), (0, \frac{d}{dt}) \right\}$$

lokal ortonormal tabanı elde edilir. Bu taban kullanılarak keyfi $(x, a\frac{d}{dt})$ vektör alanı için $\Theta(x, a\frac{d}{dt})$ şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \Theta\left(x, a\frac{d}{dt}\right) &= F\left((e^{-\sigma-\mu}\xi, 0), (e^{-\sigma-\mu}\xi, 0), \left(x, a\frac{d}{dt}\right)\right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n F\left((e^{-\sigma}e_i, 0), (e^{-\sigma}e_i, 0), \left(x, a\frac{d}{dt}\right)\right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n F\left((e^{-\sigma}\varphi(e_i), 0), (e^{-\sigma}\varphi(e_i), 0), \left(x, a\frac{d}{dt}\right)\right) \\ &\quad - F\left(\left(0, \frac{d}{dt}\right), \left(0, \frac{d}{dt}\right), \left(x, a\frac{d}{dt}\right)\right) \\ &= e^{-2(\sigma+\mu)} F\left((\xi, 0), (\xi, 0), \left(x, a\frac{d}{dt}\right)\right) \\ &\quad + e^{-2\sigma} \sum_{i=1}^n F\left((e_i, 0), (e_i, 0), \left(x, a\frac{d}{dt}\right)\right) \\ &\quad - e^{-2\sigma} \sum_{i=1}^n F\left((\varphi(e_i), 0), (\varphi(e_i), 0), \left(x, a\frac{d}{dt}\right)\right) \\ &\quad - F\left(\left(0, \frac{d}{dt}\right), \left(0, \frac{d}{dt}\right), \left(x, a\frac{d}{dt}\right)\right) \\ &= \theta(x) - ae^{-(\sigma+\mu)}\theta^*(\xi) + 2ne^{\sigma+\mu}\eta(x)\frac{d\sigma}{dt} + \\ &\quad 3\eta(x)e^{\sigma+\mu}\left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt}\right) + g(\nabla_\xi\xi, \varphi(x)). \end{aligned}$$

Bir M hemen hemen kontakt B-metrik manifoldun F_5 sınıfından olmasının tanımlama bağıntısı

$$\alpha(x, y, z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{\eta(y)g(\varphi(x), z) + \eta(z)g(\varphi(x), y)\} \quad (6.24)$$

şeklinde [3]. Bu adımda M manifoldunun F_5 sınıfından olması durumunda $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunun hangi sınıftan olduğu belirlenecektir.

Teorem 6.4. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak B-metrik manifoldu $\mathcal{F}_5$ sınıfından

ve $\frac{d(\sigma+\mu)}{dt} = 0$ ise $M \times \mathbb{R}$ hemen hemen kompleks Norden metrik manifold $W_1 \oplus W_2$ sınıfındandır.

Kanıt. M manifoldu $\mathcal{F}_5$ sınıfından olduğundan (6.24) eşitliği sağlanır. Bu eşitlikte $y = \xi$ alındığında

$$-g(\varphi(\nabla_x \xi), z) = \alpha(x, \xi, z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} g(\varphi(x), z)$$

eşitliğinden

$$-\varphi(\nabla_x \xi) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \varphi(x)$$

ve

$$\nabla_x \xi = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \varphi^2(x)$$

bulunur. Ayrıca M manifoldu $\mathcal{F}_5$ sınıfından olduğundan

$$\begin{aligned} d\eta(x, y) &= \frac{1}{2} \{g(\nabla_x \xi, y) - g(\nabla_y \xi, x)\} \\ &= -\frac{\theta^*(\xi)}{4n} \{g(\varphi^2(x), y) - g(\varphi^2(y), x)\} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

M manifoldu $\mathcal{F}_5$ sınıfından ve $\frac{d(\sigma + \mu)}{dt} = 0$ alındığında $M \times \mathbb{R}$ manifoldu üzerinde tanımlı J hemen hemen kompleks yapının kovaryant türevinin sıfırdan farklı bileşenleri keyfi $X, Y, Z \in \text{Ker}\eta$ olmak üzere, şu şekilde bulunur :

$$\begin{aligned} \tilde{g}((\nabla_X J)(Y), \xi) &= e^{2\sigma} \left\{ -g(\nabla_X \xi, \varphi(Y)) + e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(X, Y) \right\} \\ &= e^{2\sigma} \left\{ g\left(\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \varphi^2(X), \varphi(Y)\right) + e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(X, Y) \right\} \\ &= -e^{2\sigma} \left\{ \frac{\theta^*(\xi)}{2n} g(X, \varphi(Y)) - e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(X, Y) \right\}, \\ \tilde{g}\left((\nabla_X J)(Y), \frac{d}{dt}\right) &= -e^{2\sigma} \left\{ \frac{d\sigma}{dt} g(X, \varphi(Y)) + e^{-(\sigma+\mu)} \frac{\theta^*(\xi)}{2n} g(X, Y) \right\}, \\ \tilde{g}((\nabla_X J)(\xi), Z) &= e^{2\sigma} \left\{ e^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(X, Z) - \frac{\theta^*(\xi)}{2n} g(X, \varphi(Z)) \right\}, \\ \tilde{g}\left((\nabla_X J)\left(\frac{d}{dt}\right), Z\right) &= -e^{2\sigma} \left\{ e^{-(\sigma+\mu)} \frac{\theta^*(\xi)}{2n} g(X, Z) + \frac{d\sigma}{dt} g(X, \varphi(Z)) \right\}. \end{aligned}$$

M manifoldu $\mathcal{F}_5$ sınıfından ve $\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\mu}{dt} = 0$ olduğundan

$$\Theta\left(x, a\frac{d}{dt}\right) = -ae^{-(\sigma+\mu)}\theta^*(\xi) + 2ne^{\sigma+\mu}\eta(x)\frac{d\sigma}{dt} \quad (6.25)$$

olur.

$M \times \mathbb{R}$ hemen hemen kompleks Norden metrik manifoldunun W_1 sınıfından olma koşulu şu şekildedir:

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = & \frac{1}{2(n+1)} \{ \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{y})\Theta(\tilde{z}) + \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{z})\Theta(\tilde{y}) \\ & + \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{J}(\tilde{y})\Theta(\tilde{J}(\tilde{z})) + \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{J}(\tilde{z}))\Theta(\tilde{J}(\tilde{y})) \}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Burada $\tilde{x} = (x, a\frac{d}{dt})$, $\tilde{y} = (y, b\frac{d}{dt})$, $\tilde{z} = (z, c\frac{d}{dt})$ olarak alınmıştır. (6.26) eşitliğinde $\tilde{x} = (0, \frac{d}{dt})$, $\tilde{y} = \tilde{z} = (\xi, 0)$ olarak alındığında eşitliğin sol tarafı

$$F((0, \frac{d}{dt}), (\xi, 0), (\xi, 0)) = 0$$

ve eşitliğin sağ tarafı (6.25) eşitliğinden

$$\frac{e^{\sigma+\mu}}{n+1}\theta^*(\xi) \quad (6.27)$$

olduğundan (6.26) eşitliği sağlanmaz, yani $M \times \mathbb{R}$ manifoldu W_1 sınıfından değildir.

$\tilde{x} = (x, a\frac{d}{dt})$, $\tilde{y} = (y, b\frac{d}{dt})$ ve $\tilde{z} = (z, c\frac{d}{dt})$ olmak üzere; W_3 sınıfında olma koşulu olan

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + F(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{x}) + F(\tilde{z}, \tilde{x}, \tilde{y}) = 0$$

eşitliğinde $\tilde{x} = (X, 0)$, $\tilde{y} = (Y, 0)$, $X, Y \in \text{Ker}\eta$ ve $\tilde{z} = (\xi, 0)$ olarak alındığında

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + F(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{x}) + F(\tilde{z}, \tilde{x}, \tilde{y}) = 2e^{2\sigma} \left\{ -\frac{\theta^*(\xi)}{2n}g(\varphi(X), Y) + e^{\sigma+\mu}\frac{d\sigma}{dt}g(X, Y) \right\}$$

ve son eşitlikte daha önce $M \times \mathbb{R}$ üzerinde kullandığımız lokal ortanormal taban dikkate alındığında özel olarak $\tilde{x} = (e_i, 0)$ ve $\tilde{y} = (\varphi(e_i), 0)$ alınırsa

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + F(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{x}) + F(\tilde{z}, \tilde{x}, \tilde{y}) = 2e^{2\sigma}\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \neq 0$$

olduğundan $M \times \mathbb{R}$ manifoldu W_3 sınıfına ait değildir.

$\tilde{x} = (x, a \frac{d}{dt})$, $\tilde{y} = (y, b \frac{d}{dt})$ ve $\tilde{z} = (z, c \frac{d}{dt})$ olmak üzere; W_2 sınıfında olma koşulu

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}, J(\tilde{z})) + F(\tilde{y}, \tilde{z}, J(\tilde{x})) + F(\tilde{z}, \tilde{x}, J(\tilde{y})) = 0, \quad \Theta = 0$$

ve

$$\Theta(\xi, 0) = 2ne^{\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} \neq 0$$

olduğundan $M \times \mathbb{R}$ manifoldu W_2 sınıfına ait değildir.

$M \times \mathbb{R}$ manifoldunun $W_1 \oplus W_2$ sınıfından olması için her $\tilde{x} = (x, a \frac{d}{dt})$, $\tilde{y} = (y, b \frac{d}{dt})$ ve $\tilde{z} = (z, c \frac{d}{dt})$ vektör alanları için

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}, J(\tilde{z})) + F(\tilde{y}, \tilde{z}, J(\tilde{x})) + F(\tilde{z}, \tilde{x}, J(\tilde{y})) = 0 \quad (6.28)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu eşitliğin sağlandığı ∇J 'nin sıfırdan farklı bileşenleri üzerinden gösterilecektir: $X, Y, Z \in Ker(\eta)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} F((X, 0), (Y, 0), J((\xi, 0))) &+ F((Y, 0), (\xi, 0), J((X, 0))) \\ &+ \underbrace{F((\xi, 0), (X, 0), J((Y, 0)))}_{=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^{\sigma+\mu} F(X, Y, \frac{d}{dt}) + F(Y, \xi, \varphi(X)) \\ &= e^{\sigma+\mu} \left\{ -e^{2\sigma} \frac{d\sigma}{dt} g(X, \varphi(Y)) + e^{\sigma-\mu} g(X, Y) \right\} \\ &\quad + e^{3\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(Y, \varphi(X)) - e^{2\sigma} g(X, Y) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned}
F((X, 0), (Y, 0), J((0, \frac{d}{dt}))) &+ F((Y, 0), (0, \frac{d}{dt}), J((X, 0))) \\
&+ \underbrace{F((0, \frac{d}{dt}), (X, 0), J((Y, 0)))}_{=0} \\
&= -e^{-(\sigma+\mu)} F(X, Y, \xi) + F(Y, \frac{d}{dt}, \varphi(X)) \\
&= -e^{-(\sigma+\mu)} \left\{ e^{2\sigma} g(X, \varphi(Y)) + e^{3\sigma+\mu} \frac{d\sigma}{dt} g(X, Y) \right\} \\
&\quad + e^{\sigma-\mu} g(Y, \varphi(X)) + e^{2\sigma} \frac{d\sigma}{dt} g(Y, X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. $\nabla J'$ nin diğer bileşenleri için de (6.28) eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla görülür.

Dolayısıyla $M \times \mathbb{R}$ manifoldu $W_1 \oplus W_2$ sınıfındandır. $\square$

KAYNAKÇA

- [1] Gray, J.W. (1959). Some global properties of contact structures, *Ann. Math.*, 699, 2, 421-450.
- [2] Sasaki, S. (1960). On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure, I, *Tohoku Math. J.*, 13 , pp. 459-476.
- [3] Ganchev, G., Mihova, V., Gribachev, K., Almost Contact Manifolds with B-Metric, *Mathematica Balkanica*, Vol. 7 (3-8) (1993).
- [4] Gribache, K.I., Mekerov, D. G. , DJELEPOV, G. D. , On the geometry of almost B-manifolds, *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.*, vol.38, no.5, 563-566, 1985.
- [5] G. T. Ganchev, A. V. Borisov, Note On The Almost Kompleks Manifolds With A Norden Metric, *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.* 39(5), 31-34(1986).
- [6] Solgun, M. on constructing almost kompleks Norden Metric structue, *AIMS mathematics*, vol,7, no.10,1794-17953,2022.
- [7] Solgun, M ve karababa, Y., a natural way to construct an almost kompleks b-metric structure, *Mathematical Methods in the applie sciences*, vol.44, 9,7607-7613, 2021.
- [8] John M. Lee, (2012). *Introduction to Smooth Manifold*. Springer.
- [9] O'Neill, B., (1983). *Semi-Riemannian geometry*. (second edition). New York: Springer.
- [10] Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc. ,Englewood Cliffs, New Jersey.
- [11] John M. Lee, (1997). *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer.
- [12] Kenneth Hoffman, Ray Kunze, (1971). *Linear Algebra*, Prentice Hall.
- [13] O'Neill, B., (2006). *Elementary Differential Geometry*. Academic Press.

- [14] Stefan Ivanov, Hristo Manev, Mancho Manev, Sasaki-like almost contact complex Riemannian manifolds, *Journal of Geometry and Physics* 107(2016) 136-148.



ÖZGEÇMİŞ

ORCID : 0009-0001-4366-5315

Adı-Soyadı : Elanur EREN

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2016-2020, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü,
Lisans