



**HEMEN HEMEN HERMİTİAN METRİK PSEUDO
 f –MANİFOLDLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ VE
WALKER 4 –MANİFOLDLARI ÜZERİNDE BAZI
UYGULAMALARI**

Elif ÇETİNKAYA

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Sibel TURANLI**

**2024
Her hakkı saklıdır.**



**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**HEMEN HEMEN HERMİTİAN METRİK PSEUDO f –MANİFOLDLARININ
BAZI ÖZELLİKLERİ VE WALKER 4 –MANİFOLDLARI ÜZERİNDE BAZI
UYGULAMALARI**

Elif ÇETİNKAYA

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Sibel TURANLI

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2024

Her hakkı saklıdır

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

24 / 07 / 2024

Elif ÇETİNKAYA

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HEMEN HEMEN HERMİTİAN METRİK PSEUDO f –MANİFOLDLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ VE WALKER 4 –MANİFOLDLARI ÜZERİNDE BAZI UYGULAMALARI

Elif ÇETİNKAYA

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sibel TURANLI

Bu tezde ilk olarak $(\mathcal{M}_{2n}, f, g)$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu tanımlanmıştır. $(\mathcal{M}_{2n}, f, g)$ manifoldu üzerinde bazı şartlar dahilinde $\tilde{\nabla}$ birinci tip özel konneksiyonu, $\bar{\nabla}$ ikinci tip özel konneksiyonu, $\hat{\nabla}$, f^2 –metriği koruyan konneksiyonu, $\bar{\bar{\nabla}}$, f^2 – koruyan konneksiyonu ve $\bar{\bar{\nabla}}^0$, f^2 – koruyan konneksiyonu tanımlanmıştır. $\tilde{\nabla}$, $\bar{\nabla}$ ve $\hat{\nabla}$ konneksiyonlarının sırasıyla $\tilde{T}$, $\bar{T}$ ve $\hat{T}$ burulma tensörleri hesaplanmıştır. Son olarak da $(\mathcal{M}_4, g)$ 4 – boyutlu Walker manifoldlarında hemen hemen Hermitian metrik pseudo f – yapısının özellikleri araştırılmış, bu yapının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart elde edilmiştir. $(\mathcal{M}_4, f, g^W)$ üçlüsünün bir Hermitian metrik pseudo f – Kähler Walker manifoldu olması için gerek ve yeter şart elde edilmiştir. Hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –yapıya bağlı $(\mathcal{M}_4, f, g^W)$ Walker 4 –manifoldunun R^W Riemannian eğrilik tensörü, Ric^W Ricci tensörü ve s^W skaler eğriliği hesaplanmıştır.

2024, 76 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hermitian metrik, f –yapı, Konneksiyon, Walker manifoldu.

ABSTRACT

MS. Thesis

SOME PROPERTIES OF ALMOST HERMITIAN METRIC PSEUDO f –MANIFOLDS AND SOME APPLICATIONS ON WALKER 4 –MANIFOLDS

Elif ÇETİNKAYA

Erzurum Technical University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sibel TURANLI

In this thesis, firstly, $(\mathcal{M}_{2n}, f, g)$ almost Hermitian metric pseudo f – manifolds is defined. On $(\mathcal{M}_{2n}, f, g)$, definitions of first type special connection $\tilde{\nabla}$, second type special connection $\bar{\nabla}$, f^2 –metric preserving connection $\hat{\nabla}$, f^2 –preserving connections $\bar{\nabla}$ and $\bar{\nabla}^0$ are given under some conditions. Torsion tensors $\tilde{T}$, $\bar{T}$ and $\hat{T}$ of $\tilde{\nabla}$, $\bar{\nabla}$ and $\hat{\nabla}$ connections are calculated, respectively. Finally, properties of almost Hermitian metric pseudo f –structures are investigated on 4 –dimensional Walker manifolds $(\mathcal{M}_4, g)$ and the necessary and sufficient condition for the integrability of these structures is obtained. The necessary and sufficient condition is obtained for the triple $(\mathcal{M}_4, f, g^W)$ to be a Hermitian metric pseudo f –Kähler Walker manifold. The Riemannian curvature tensor R^W , Ricci tensor Ric^W and scalar curvature s^W of the Walker 4 –manifold $(\mathcal{M}_4, f, g^W)$ based on almost Hermitian metric pseudo f –structure are calculated.

2024, 76 pages

Keywords: Hermitian metric, f –structure, Connection, Walker manifold.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunu araştırmama ilham veren, her adımda bilgilerini esirgemeyen, çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Sibel TURANLI'ya en içten dileklerimle sonsuz teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanma sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Aydın GEZER'e, Sayın Doç. Dr. Çağrı KARAMAN'a, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Olgun DURMAZ'a, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım esnasında gördüğüm destek ve sonsuz güvenden dolayı aileme teşekkür ederim.

Elif ÇETİNKAYA
Temmuz 2024

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	4
3. MATERYAL ve YÖNTEM	6
3.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar	6
3.2. Tensör Alanları.....	9
3.3. Afin (Lineer) Konneksiyon	13
3.4. Afin (Lineer) Konneksiyonlu Uzaylar	17
3.5. Eğrilik ve Burulma Tensörleri	23
3.6. Konneksiyonların Dönüşümü	25
3.7. Burulmasız Uzaylar.....	28
3.8. Riemannian Manifoldu.....	33
3.9. Nijenhuis Tensörü	34
3.10. Skaler Eğrilik	36
3.11. Hemen Hemen Kompleks ve Hemen Hemen Para Kompleks Yapılar	36
3.12. Hermitian Manifoldlar	37
3.13. Codazzilik Şartı.....	37
3.14. f –Manifold.....	38
3.15. Walker Metriği	38
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	39
4.1. Hemen hemen Hermitian Metrik Pseudo f –Manifoldlar.....	39
4.2. Özel Konneksiyonlar.....	44
4.3. Walker 4 –Manifoldları Üzerinde Hemen Hemen Hermitian Metrik Pseudo f –Yapılar.....	62
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	70



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathcal{M}_n$	n boyutlu manifold
$\mathcal{C}^\infty$	Her mertebeden sürekli kısmi türevleri olan fonksiyonların kümesi
L_{Λ_1}	Λ_1 vektör alanına göre Lie türevi
∇_{Λ_1}	Λ_1 vektör alanı yönündeki kovaryant türev
S_{ij}^h	Burulma Tensörü
R_{rsh}^i	Eğrilik Tensörü
Γ_{ij}^r	Cristoffel sembolü
$T_l^k(\mathfrak{B}_n)$	$\mathfrak{B}_n$ vektör uzayında (k, l) tipli tensörlerin kümesi
f	f –yapı
N_f	f 'nin Nijenhuis tensörü
$\mathcal{g}$	Pseudo-Riemann metriği
$\underline{\omega}$	Esas 2 –form
$\nabla^{\mathcal{g}}$	$\mathcal{g}$ metriğinin Levi-Civita konneksiyonu
$\tilde{\nabla}$	Birinci tip özel konneksiyon
$\bar{\nabla}$	İkinci tip özel konneksiyon
$\hat{\nabla}$	f^2 – metriği koruyan konneksiyon
$\bar{\bar{\nabla}}$	f^2 – koruyan konnekisyon
$\bar{\bar{\nabla}}^0$	f^2 – koruyan konnekisyon
$\tilde{T}$	$\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun burulma tensörü
$\bar{T}$	$\bar{\nabla}$ konneksiyonunun burulma tensörü
$\hat{T}$	$\hat{\nabla}$ konneksiyonunun burulma tensörü

g^W	Walker metriği
∇^W	g^W Walker metriğinin Levi-Civita konneksiyonu
Γ^W	∇^W konneksiyonunun katsayıları
R^W	Walker 4 –manifoldunun Riemannian eğrilik tensörü
Ric^W	Walker 4 –manifoldunun Ricci tensörü
s^W	Walker 4 –manifoldunun skaler eğriliği



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Diferensiyelenebilir Atlas.....	8
--	---



1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri , geometrik problemler üzerinde diferansiyel metodlar ve integral hesaplamalarıyla çalışan matematiğin bir alt disiplini.

$\mathcal{M}_{2n}$ manifoldu üzerinde φ hemen hemen kompleks yapısı ve g pseudo Riemannian metriği verilsin. Λ_1 ve Λ_2 vektör alanları olmak üzere $g(\varphi\Lambda_1, \Lambda_2) = -g(\Lambda_1, \varphi\Lambda_2)$ şartını sağlayan g metriğine hemen hemen Hermitian metrik denir. Hermitian metriğe sahip hemen hemen kompleks manifoldda hemen hemen Hermitian manifold ve Hermitian metriğe sahip kompleks manifoldda da Hermitian manifold denir (Kon and Yano 1985). Bu metrikler çeşitli araştırmacılar Gray (1966); Kirichenko (1988); Deshmukh et al. (1992); Cengiz vd (2006); Ghosh and Sharma (2006); Davidov et al. (2008); Özkan ve İşcan (2014); İşcan (2016) tarafından da çalışılmıştır.

Diferansiyel geometride manifoldların geometrik özelliklerinin incelenmesinde kompleks yapılar önemli bir yere sahiptir. f –yapılar $f^3 + f = 0$ şartını sağlayan (1,1) tipli f tensör alanlarının bir genellemesi olup ilk kez 1961 yılında Yano tarafından tanımlanmıştır (Yano 1961). Bu yapılar çeşitli araştırmacılar Ishihara and Yano (1964); Goldberg and Yano (1970); Singh and Srivastava (1974); Yano (1982); Balashchenko (1998) tarafından çalışılmıştır.

Balkan vd (2018) çalışmasında ise hiperbolik f –yapı olarak adlandırılan ve $f^3 - f = 0$ şartını sağlayan pseudo f –yapıların yeni bir sınıfı tanımlanmıştır. Bu tür yapılara Singh and Vohra (1974); Matsumoto (1976); Pujar (2000); Özüsağlam ve Dikici (2016) tarafından da çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasında Zhong et al. (2019) çalışması temel kaynak olarak dikkate alınmıştır. Zhong et al. (2019) çalışmasında ise Bilen vd (2018) çalışması esas alınmıştır. Bilen vd (2018) çalışmasında Kähler-Norden-Codazzi golden yapıya sahip bir pseudo-Riemannian manifoldu dikkate alınmış bu manifoldun eğrilik özellikleri çalışılmıştır. Ayrıca bu manifold üzerinde bazı özel konneksiyonlar tanımlanmış ve bu konneksiyonların çeşitli özellikleri incelenmiştir.

Zhong et al. (2019) çalışmasında ise $G_c, G_c^2 = G_c - \frac{3}{2}I$ kompleks golden şartını sağlayan (1,1) tipli tensör alanı ve $\mathcal{g}$ de Λ_1 ve Λ_2 vektör alanları olmak üzere $\mathcal{g}(G_c\Lambda_1, \Lambda_2) = \mathcal{g}(\Lambda_1, G_c\Lambda_2)$ şartını sağlayan pür pseudo-Riemannian metriği vasıtasıyla manifold üzerinde $(G_c, \mathcal{g})$ hemen hemen kompleks Norden Golden yapısı ele alınmıştır. Twin Norden golden metrik-koruyan konneksiyonlar, G_c –metrik-koruyan konneksiyonlar, G_c –koruyan konneksiyonlar gibi bazı yapıyı koruyan konneksiyonlar çalışılmıştır. Ayrıca G_c –metrik-koruyan konneksiyonlar analiz edilmiş ve her Kähler-Norden-Codazzi golden manifoldunun bir Kähler-Norden golden manifold olduğu gösterilmiştir. Son olarak da G_c –koruyan konneksiyonlar araştırılmış ve bu konneksiyonlarla ilişkili bazı 3 –formlara bakılmıştır.

Sunulan bu tezde ise hemen hemen Hermitian metric pseudo f –manifoldlarının bazı özellikleri ve Walker 4 –manifoldları üzerinde bazı uygulamaları verilmiştir. Bu nedenle tez çalışmasının daha iyi anlaşılabilmesi için ikinci kısımda bazı temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise ilk olarak $f, f^3 - f = 0$ şartını sağlayan bir hemen hemen pseudo f –yapı ve $\mathcal{g}$ de $\mathcal{g}(f\Lambda_1, \Lambda_2) = -\mathcal{g}(\Lambda_1, f\Lambda_2)$ şartını sağlayan pseudo Riemannian metriği olmak üzere $(\mathcal{M}_{2n}, f, \mathcal{g})$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu tanımlanmıştır. Bu manifold üzerinde $\mathcal{g}$ metriğinin bazı özellikleri incelenmiştir. Daha sonra $(\mathcal{M}_{2n}, f, \mathcal{g})$ manifoldu üzerinde bazı şartlar dahilinde $\tilde{\nabla}$ birinci tip özel konneksiyonu, $\bar{\nabla}$ ikinci tip özel konneksiyonu, $\hat{\nabla}, f^2$ –metriği koruyan konneksiyonu, $\bar{\bar{\nabla}}, f^2$ – koruyan konneksiyonu ve $\bar{\bar{\nabla}}^0, f^2$ – koruyan konneksiyonu tanımlanmıştır. $\tilde{\nabla}, \bar{\nabla}$ ve $\hat{\nabla}$ konneksiyonlarının sırasıyla $\tilde{T}, \bar{T}$ ve $\hat{T}$ burulma tensörleri hesaplanmıştır. Son olarak da böyle bir kurgunun varlığını göstermek için Walker 4 – manifoldlarında uygulamalarına bakılmıştır. $(\mathcal{M}_4, \mathcal{g})$ 4 – boyutlu Walker manifoldlarında hemen hemen Hermitian metrik pseudo f – yapısının özellikleri araştırılmış, bu yapının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart elde edilmiştir. $(\mathcal{M}_4, f, \mathcal{g}^W)$ üçlüsünün bir Hermitian metrik pseudo f –Kähler Walker manifoldu olması için gerek ve yeter şart elde edilmiştir. Hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –yapıya bağlı $(\mathcal{M}_4, f, \mathcal{g}^W)$ Walker 4 –manifoldunun R^W Riemannian eğrilik tensörü, Ric^W Ricci

1. GİRİŞ

tensörü ve ς^W skaler eğriliği hesaplanmıştır. Walker 4 –manifoldundaki bu hesaplamalarda kolaylık ve sağlamlık için Maple® programı kullanılmıştır.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

1961 yılında yapılan Yano (1961) çalışmada ilk kez f –yapılar tanımlanmıştır. f –yapılar (1,1) tipli f tensör alanı ile tanımlanan ve $f^3 + f = 0$ şartını sağlayan yapılardır. Bu cebirsel şart yüksek boyutlu yapıları ve onların geometrik özelliklerini anlamak için bir temel teşkil eder.

Burulmalı f –yapıya sahip manifoldların incelenmesi diferensiyel geometride önemli bir alandır ve çeşitli koşullar altında bu manifoldların özelliklerine odaklanır. Singh and Srivastava (1974) çalışmasında farklı tipten manifoldlarda burulma tensörlerinin sınıflandırılması, konformal difeomorfizmleri araştırılmış, geometrik ve fiziksel özellikleri hakkında bilgi verilmiştir.

Bir f –yapısı $Q(f) = f^3 + f$ yapısal polinomu ile gösterilen bir polinom yapı olarak da tanımlanır. Polinom yapıların bu kavramsallaştırılması ilk olarak Goldberg ve Yano tarafından Goldberg and Yano (1970) çalışmasında ortaya atılmıştır. Bu manifoldlarda geometrik yapıların anlaşılmasında önemli bir yere sahip olmuştur.

Diferensiyel geometride polinom yapının integrallenebilmesi için Nijenhuis tensörünün sıfıra eşit olması şartı Vanzura tarafından Vanzura (1976) elde edilmiştir. f –yapısı için Nijenhuis tensörü N_f ile gösterilmiş ve $N_f(\Lambda_1, \Lambda_2) = [f\Lambda_1, f\Lambda_2] - f[f\Lambda_1, \Lambda_2] - f[\Lambda_1, f\Lambda_2] + f^2[\Lambda_1, \Lambda_2]$ şeklinde tanımlanmıştır.

$(\mathcal{M}, f)$ manifoldu üzerindeki φ Riemannian metriği f –yapısına göre $\varphi(f\Lambda_1, \Lambda_2) = -\varphi(\Lambda_1, f\Lambda_2)$ şartını sağlıyor ise bu durumda bu metrik hiperbolik metrik ve $(\mathcal{M}, f, \varphi)$ manifoldu da bir hemen hemen f –Hermitian manifold olarak adlandırılır Opozda (1983). $(\mathcal{M}, f, \varphi)$ hemen hemen f –Hermitian manifoldu üzerinde $\underline{\omega}$ esas 2 –formu $\underline{\omega}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \varphi(f\Lambda_1, \Lambda_2)$ şeklinde tanımlanır. $(\mathcal{M}, f, \varphi)$ hemen hemen f –Hermitian manifoldu $\underline{\omega}$ esas 2 –formun özelliklerine bağlı olarak sınıflandırılabilir. Eğer $\underline{\omega}$ esas 2 –formu kapalı ise yani $d\underline{\omega} = 0$ ise bu durumda $(\mathcal{M}, f, \varphi)$ manifoldu bir hemen hemen f –Kähler manifold olarak adlandırılır. Ayrıca $d\underline{\omega} = 0$ şartı ile birlikte N_f Nijenhuis tensörünün sıfıra eşit olması durumunda $(\mathcal{M}, f, \varphi)$ manifoldu bir f –Kähler

manifold olarak adlandırılır. Opozda (1983) çalışmasında Opozda $d\omega = 0$ ve N_f Nihenhuis tensörünün sıfıra eşit olması şartı ile $\nabla^g f = 0$ şartının denk olduğunu ortaya koymuştur. Burada ∇^g, g metriğinin Levi-Civita konneksiyonudur.

Balkan vd (2018) çalışmasında ise $f^3 - f = 0$ şartını sağlayan ve f –hiperbolik denilen pseudo f –yapıların yeni bir sınıfı tanımlanmıştır. Bu tür yapılara çeşitli araştırmacılar tarafından da Matsumoto (1976); Pujar (2000) çalışılmıştır. Bu yapılar farklı tipten bazı yapıların genelleştirilmesidir. Balkan vd (2018) çalışması bu yapılar için sınıflandırma yapmayı, dağılım kavramını hiperbolik hemen hemen Kenmotsu f –manifoldlara genişletmeyi ve bu manifoldların önemli ve özgün örneklerini elde etmeyi sağlar. Ayrıca bu çalışmada hiperbolik hemen hemen Kenmotsu f –manifoldlarının belirli şartlar altında geçerli karakteristik denklemlere sahip olduğu elde edilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Diferensiyellenebilir Manifolddar

Tanım 3.1.1: $\wp$ kümesinin $\tau = \{U_\sigma\}$, $U_\sigma \subset \wp$ alt kümeler ailesi verilsin.

i. $\emptyset, \wp \in \tau$

ii. $\bigcup_{\sigma} U_\sigma \in \tau$, $\bigcap_{\sigma=1}^N U_\sigma \in \tau$

ise τ ya $\wp$ kümesi üzerinde bir topolji ve $(\wp, \tau)$ ikilisine de topolojik uzay denir.

Tanım 3.1.2: $(\wp, \tau)$ topolojik uzayının birbirinden farklı $\forall x, y$ noktasının açık ve ayrık $\mathcal{U}_x, \mathcal{U}_y \in \tau$ komşulukları mevcut ise $(\wp, \tau)$ topolojik uzayı Hausdorff uzay olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.3: $\wp$ Hausdorff uzay olsun. $\wp$ ın bir $\mathcal{U}$ açık alt kümesinden $\mathbb{R}^n$ ın bir $\mathcal{V}$ bölgesine γ homeomorfizmi tanımlansın.

$$\gamma: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$$

homeomorfizmine $\wp$ da n boyutlu koordinat sistemi veya koordinat dönüşümü, $\mathcal{U}$ ya da γ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi, $(\mathcal{U}, \gamma)$ ikilisine de $\wp$ ın bir n boyutlu haritası denir.

Şayet $h \in \mathcal{U}$ ise

$$\gamma(h) = (h^1, \dots, h^n) \in \mathbb{R}^n$$

olur. $h^1, \dots, h^n$ reel sayıları ise γ haritasında h noktasının koordinatları olarak adlandırılır (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 3.1.4: $\wp$ Hausdorff uzayının n boyutlu γ_α haritalarının $\mathcal{U}_\alpha$ bölgeleri uzayı örterse, yani

$$\wp = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{d}} \mathcal{U}_\alpha$$

ise, $\wp$ 'a topolojik manifold veya kısaca manifold denir. $\text{boy}(\mathbb{R}^n) = n$ olduğundan manifoldun boyutu da n dir. Ayrıca $\mathfrak{d}$ da indisler kümesidir (Salimov ve Mağden 2008).

Bir noktası çıkarılmış çember, bir noktasından delinmiş küre, tor yüzeyi, silindir, Möbiüs şeridi ve Klein şişesi birer topolojik manifold örneğidir.

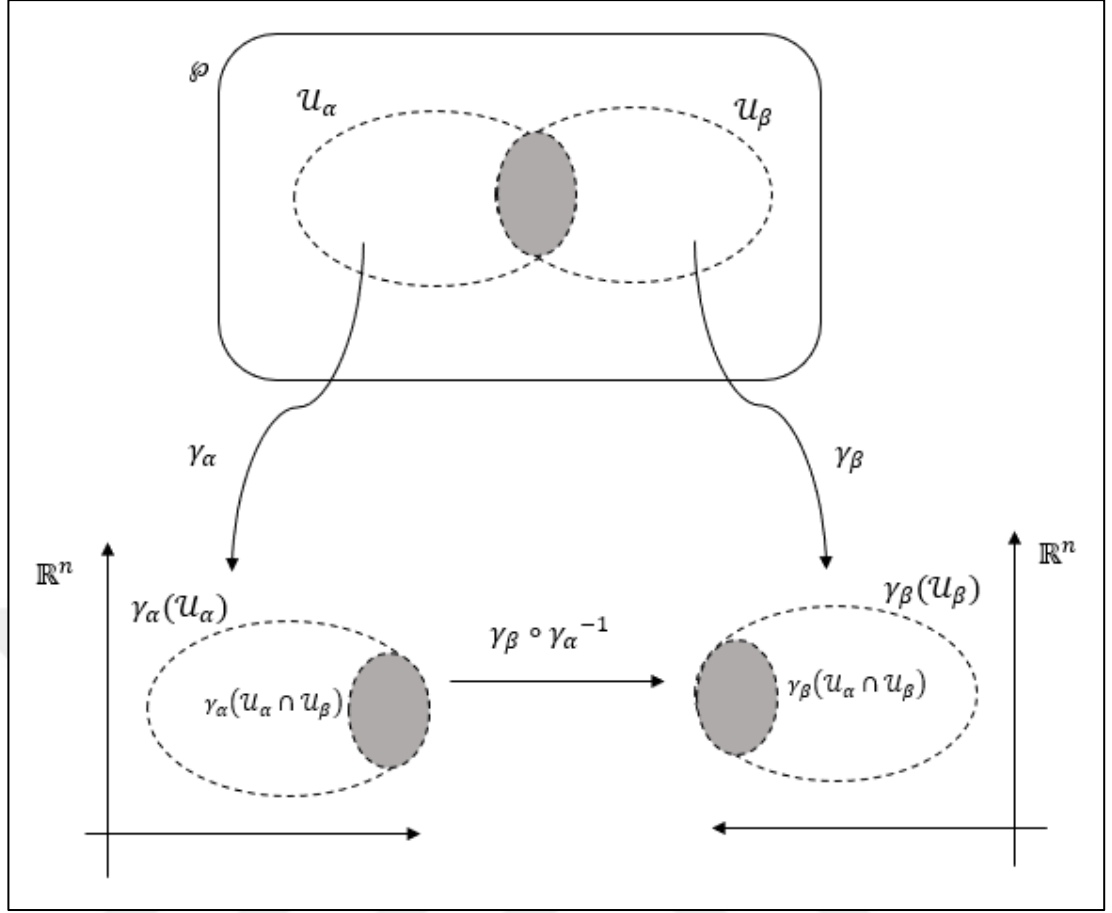
Tanım 3.1.5: $\wp$ Hausdorff uzay ve k da $0 \leq k \leq \infty$ şartını sağlayan bir tam sayı olmak üzere aşağıda verilen iki şartı sağlayan $\{(\mathcal{U}_\alpha, \gamma_\alpha)\}, \alpha \in \mathbb{A}, \mathcal{U}_\alpha \subset \wp\}$ lokal koordinatlar ailesine $\wp$ uzayı üzerinde C^k sınıfından n boyutlu atlas denir. (Salimov ve Mağden 2008).

i. Lokal haritaların $\mathcal{U}_\alpha$ bölgesi $\wp$ uzayını örter. Yani $\wp$, n boyutlu bir topolojik manifolddur.

ii. Herhangi $\alpha, \beta \in \mathfrak{d}$ için $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ ise

$$\gamma_\beta \circ \gamma_\alpha^{-1}: \gamma_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \gamma_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta $(\mathcal{U}_\alpha, \gamma_\alpha)$ ve $(\mathcal{U}_\beta, \gamma_\beta)$ haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.



Şekil 3.1. Diferensiyelenebilir Atlas

Tanım 3.1.6: $\{(U_\alpha, \gamma_\alpha)\}$ ve $\{(U_\beta, \gamma_\beta)\}$, C^k sınıfından iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \gamma_\alpha)$ ve (U_β, γ_β) haritaları C^k uzlaşan ise yani $\{(U_\alpha, \gamma_\alpha)\}$ ve (U_β, γ_β) atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise bu durumda atlaslara denk atlaslar denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 3.1.7: $\mathcal{P}$ Hausdorff uzayında C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k –yapı denir. C^0 –yapıya topolojik yapı, C^k ($1 \leq k \leq \infty$) yapıya da düzgün yapı denir. Bundan sonraki kısımlarda C^∞ sınıfından olan yapılarla çalışılacaktır.

Tanım 3.1.8: $\mathcal{M}$ sayılabilir baza sahip bir Hausdorff uzay olsun. $\mathcal{M}$ de n –boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse $\mathcal{M}$ uzayına n boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyelenebilir yada düzgün manifold denir ve $\mathcal{M}_n$ sembolü ile gösterilir (Salimov ve Mağden 2008).

Çember 1 –boyutlu, küre ise 2 –boyutlu diferensiyellenebilir manifolda birer örnektir.

3.2. Tensör Alanları

Tanım 3.2.1: $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ kümesi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi verilsin. $\mathfrak{B}$ kümesi üzerinde sırasıyla toplama

$$+ : \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

ve

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$$

$$(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x = \lambda x$$

skaler ile çarpma işlemleri tanımlanmış olsun. Eğer

- i. $(\mathfrak{B}, +)$ değişmeli gruptur,
- ii. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathfrak{B}$ için $\lambda x \in \mathfrak{B}$,
- iii. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y \in \mathfrak{B}$ için $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
- iv. $\forall \lambda, \eta \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathfrak{B}$ için $(\lambda + \eta)x = \lambda x + \eta x$,
- v. $\forall \lambda, \eta \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathfrak{B}$ için $\lambda(\eta x) = (\lambda \eta)x$,
- vi. $\forall x \in \mathfrak{B}$ için $1 \cdot x = x$ olacak şekilde $1 \in \mathbb{R}$ vardır,

aksiyomları sağlanıyor ise $\mathfrak{B}$ kümesine $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzaydır denir. Vektör uzayının elemanlarına da vektör denir.

Tanım 3.2.2: $\mathfrak{B}_1$ ve $\mathfrak{B}_2$ aynı $\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı olmak üzere,

$$L : \mathfrak{B}_1 \rightarrow \mathfrak{B}_2$$

dönüşümü $\forall x, y \in \mathfrak{B}$ ve $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\lambda x + \eta y) = \lambda L(x) + \eta L(y)$$

şartını sağlarsa bu dönüşüme bir lineer dönüşüm denir.

$\mathfrak{B}$ vektör uzayının bütün lineer dönüşümlerinin oluşturduğu vektör uzayına ise $\mathfrak{B}$ vektör uzayının dual uzayı denir ve $\mathfrak{B}^d$ ile gösterilir. Elemanlarına da kovektörler denir.

Tanım 3.2.3: $\mathfrak{B}_n$ ve $\mathfrak{B}_n^d$ sırasıyla n boyutlu vektör ve kovektör uzayı olmak üzere $\vec{x}_j \in \mathfrak{B}_n, j = 1, \dots, l$ vektör değişkenleri ve $\xi^i \in \mathfrak{B}_n^d, i = 1, \dots, k$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_l, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^k)$$

reel değerli fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyon tüm değişkenlerine göre lineer ise multilineer fonksiyon olarak adlandırılır.

Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t: \underbrace{\mathfrak{B}_n \times \mathfrak{B}_n \times \dots \times \mathfrak{B}_n}_l \times \overbrace{\mathfrak{B}_n^d \times \mathfrak{B}_n^d \times \dots \times \mathfrak{B}_n^d}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

operatörüne $\mathfrak{B}_n$ uzayında k . dereceden kontravaryant, l . dereceden kovaryant tensördür denir ve $T_l^k(\mathfrak{B}_n)$ şeklinde de gösterilir. $k \geq 0, l \geq 0$ olmak üzere $k + l$ toplamına tensörün valentliği ve (k, l) ikilisine de tensörün tipi denir. Kontravaryant tensörler $(k, 0)$ tipli, kovaryant tensörler ise $(0, l)$ tiplidir.

$(0, 2)$ tipli ve simetrik bütün tensörlerin kümesi $S_2(\mathfrak{B}_n)$ ile gösterilmek üzere, bu küme $T_2^0(\mathfrak{B}_n)$ uzayının bir alt uzayıdır. Keyfi bir $\varphi \in S_2(\mathfrak{B}_n)$ tensörü verilsin.

$$\mathcal{G}(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \quad \forall \vec{y} \in B_n \quad (3.1)$$

şartından $\vec{x} = \vec{0}$ elde ediliyor ise $\mathcal{G}$ tensörüne regüler tensör denir. (3.1) koordinatlarla yazılacak olursa

$$\mathcal{G}_{ij} x^i y^j = 0$$

olur. Bu eşitlik $\forall y^j$ için sağlandığından

$$\mathcal{G}_{ij} x^i = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

homojen lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sisteminin sıfır çözümünün (yani $x^i = 0$ çözüm) olması için

$$\text{Det}(\mathcal{G}_{ij}) \neq 0$$

olmalıdır. Burada $\mathcal{G}_{ij}$ tensörüne karşılık gelen matris $(\mathcal{G}_{ij})$ ile gösterilmiştir.

Regüler $\mathcal{G} \in S_2(\mathfrak{B}_n)$ tensörüne $\mathfrak{B}_n$ uzayında esas tensör denir. Esas tensöre karşılık gelen $(\mathcal{G}_{ij})$ matrisinin tersi $(\tilde{\mathcal{G}}^{ij})$ sembolü ile gösterilir ve

$$\tilde{\mathcal{G}}^{sj} \mathcal{G}_{ij} = \delta_i^s \quad (3.2)$$

yazılır. $\mathfrak{B}_n$ ve $\mathfrak{B}_n^d$ uzayları arasında

$$\xi_i = \mathcal{G}_{is} x^s, \quad (\eta_i = \mathcal{G}_{is} y^s) \quad (3.3)$$

dönüşümüne bakalım. Buradan (3.2) eşitliğine göre

$$x^s = \tilde{\mathcal{G}}^{si} \xi_i, \quad (y^s = \tilde{\mathcal{G}}^{si} \eta_i) \quad (3.4)$$

olur. $\mathcal{g} \in S_2(\mathfrak{B}_n)$ tensörü için invariant bilinear form

$$\omega = \mathcal{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{g}_{ij}x^i y^j$$

yazılır. Burada (3.3) ve (3.4) eşitlikleri dikkate alınır

$$\omega = \mathcal{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{g}_{ij}x^i y^j = x^i \eta_i = \tilde{\mathcal{g}}^{ij} \eta_i \xi_j$$

elde edilir. Yani, $\mathcal{g}_{ij}$ esas tensörü verildiğinde kovektör değişkenlerinin $\omega = \tilde{\mathcal{g}}^{ij} \eta_i \xi_j$ invariant bilinear formu alınır. Burada $\tilde{\mathcal{g}}^{ij}$, (2,0) tipli tensörün koordinatlarıdır. Bu tensör de $\mathcal{g}_{ij}$ esas tensörünün ters tensörü olarak adlandırılır. Ayrıca

$$\tilde{\mathcal{g}}(\eta, \xi) = \tilde{\mathcal{g}}^{ij} \eta_i \xi_j = \eta_i x^i = \mathcal{g}_{is} y^s x^i$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{g}}(\xi, \eta) &= \tilde{\mathcal{g}}^{ij} \xi_j \eta_i = \xi_j y^j = \mathcal{g}_{js} x^s y^j \\ &= \mathcal{g}_{si} x^i y^s = \mathcal{g}_{si} y^s x^i = \tilde{\mathcal{g}}(\eta, \xi) \end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{\mathcal{g}}^{ij}$ ters tensörünün de simetrik olduğu görülür.

Böylece $\mathfrak{B}_n$ de $\mathcal{g}_{ij}$ tensörü verildiği zaman $\mathfrak{B}_n \rightarrow \mathfrak{B}_n^d$ izomorfizmi bulunur. Bundan da vektör ve kovektörler aynılaştırılabilir. Yani,

$$x_s = \mathcal{g}_{si} x^i, \quad x^i = \tilde{\mathcal{g}}^{is} x_s$$

yazılır. Bu işlemlere indisin yükseltilmesi ($x_s \rightarrow x^i$) ve indirilmesi ($x^i \rightarrow x_s$) işlemleri denir.

$\mathcal{g}(\vec{x}, \vec{y})$, (0,2) tipli bir tensör ve $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathfrak{B}_n$ vektörleri olmak üzere, $\mathcal{g}$ tensörünün $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri üzerindeki izi, bu vektörlerin skaler çarpımı olup ve $\vec{x}\vec{y}$ veya $(\vec{x}, \vec{y})$ birisi ile gösterilir. Dolayısıyla

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{g}_{ij} x^i y^j = x_j y^j \quad (3.5)$$

yazılır.

Tanım 3.2.4: $\mathcal{M}_n, C^\infty$ sınıfından bir manifold ve manifoldun her p noktasındaki tanjant uzayı da T_p olsun. Manifoldun her p noktasına tanjant uzayının bir X_p vektörünü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonu vektör alanı olarak adlandırılır (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 3.2.5: $\mathcal{M}_n, C^\infty$ sınıfından bir manifold ve manifoldun her m noktasındaki (k, l) tipli tensör tensör uzayı da $T_l^k(m)$ olsun. Manifoldun her m noktasına tensör uzayının bir $t_l^k(m)$ tensörünü karşılık getiren T fonksiyonu (k, l) tipli tensör alanı olarak adlandırılır (Bishop and Goldberg 1968).

$k = 1, l = 0$ ise vektör alanı yani $(1,0)$ tipli tensör elde edilir. $k = l = 0$ ise manifoldun her m noktasına bir skaler karşılık gelir. Bu nedenle $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyon belirtir.

3.3. Afin (Lineer) Konneksiyon

$\mathcal{M}_n$ diferensiyellenebilir manifold olsun. Manifoldda $\bar{\gamma} : u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon dahil edilmesi demek eğrinin noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluk oluşturma kuralı demektir. $\bar{\gamma}$ eğrisinin keyfi bir noktasındaki v^i vektörünün t parametresine bağlı olarak değişmesi durumunda verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile aynı kalırsa, o halde bu vektör verilen konneksiyona göre $\bar{\gamma}$ eğrisi boyunca paralel kaydırılmıştır denir. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Vektörlerin paralel kaydırılması durumunda lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona lineer veya afin konneksiyon denir.

Vektörün eğri boyunca verilen lineer konneksiyona göre paralel kaydırılması şartına bakalım. $\bar{\gamma}$ eğrisinin başlangıç noktasında $a_h^i, h = 1, \dots, n$ lokal bazı verilsin ve $a_h^i(t)$ 'nin bağımlılığının baz vektörlerinin eğri boyunca paralel kaydırılması kuralını ifade ettiğini kabul edelim. Bir $v^i = \lambda^h a_h^i$ vektörünün verilmiş lineer konneksiyona göre

$\bar{\gamma}$ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^h katsayılarının sabit olmasıdır. Buradan hareketle

$$dv^i = \lambda^h da_h^i \quad (3.6)$$

ve $v^i = \lambda^h a_h^i$ eşitliğinden

$$\lambda^h = a_i^h v^i \quad (3.7)$$

yazılır. Burada a_h^i baz ve a_i^h de kobaz vektörüdür. Buradan $a_h^i a_i^s = \delta_h^s$ yazılır. (3.7) eşitliği (3.6) da kullanılırsa,

$$dv^i + \omega_i^h v^h = 0 \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.8) denkleminde ω_i^h ,

$$\omega_i^h = -a_i^s da_s^h \quad (3.9)$$

şeklindedir. (3.8) şartı verilen lineer konneksiyona göre v^i vektörünün paralel kaydırılması şartıdır. (3.9) biçiminde verilen ω_i^h objeleri ise konneksiyon formlarıdır.

Teorem 3.3.1: i. Konneksiyon formları $a_h^i, h = 1, \dots, n$ bazının seçilişine bağlı değildir.

ii. Eğrisel koordinatların dönüştürülmesi halinde, konneksiyon formları tensör dönüşüm kuralına göre dönüşmez.

Tanım 3.3.2: ω_i kovektörünün $\bar{\gamma}$ eğrisi boyunca paralel kaydırılan herhangi bir v^i vektörü üzerindeki izi eğri boyunca sabit kalırsa bu durumda ω_i kovektörüne $\bar{\gamma}$ eğrisi boyunca verilen lineer konneksiyona göre paralel kaydırılmıştır denir. Buradan hareketle

$$d(v^i \omega_i) = dv^i \omega_i + v^i d\omega_i = 0 \quad (3.10)$$

yazılır. v^i vektörünün paralel kaydırılması şartından

$$dv^i = -\omega_h^i v^h \quad (3.11)$$

yazılır. (3.11) eşitliği (3.10) de kullanılırsa,

$$(d\omega_i - \omega_i^h \omega_h) v^i = 0$$

bulunur. v^i vektörü keyfi olup ω_i kovektörünün $\bar{\gamma}$ eğrisi boyunca verilen lineer konneksiyona göre paralel kaydırılma şartı

$$d\omega_i - \omega_i^h \omega_h = 0 \quad (3.12)$$

şeklindedir. Buradan vektör ve kovektörün $\bar{\gamma}$ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartı kullanılarak, eğrinin çeşitli noktalarına tatbik edilmiş keyfi tipli tensörün paralel kaydırılması şartı da verilebilir. $\bar{\gamma}$ eğrisi boyunca (k, l) tipli keyfi tensörün izi

$$Z = t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} v_1^{j_1} \dots v_l^{j_l} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_k}^k$$

şeklinde olsun. Z fonksiyonunun vektör ve kovektör değişkenlerinin $\bar{\gamma}$ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartları altında diferensiyeli

$$\begin{aligned} dZ &= dt_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} v_1^{j_1} \dots v_l^{j_l} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_k}^k + t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} dv_1^{j_1} \dots v_l^{j_l} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_k}^k \\ &+ \dots + t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} v_1^{j_1} \dots v_l^{j_l} d\omega_{i_1}^1 \dots d\omega_{i_k}^k \\ &= \left(dt_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} - \omega_{j_1}^s t_{s j_2 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} - \dots + \omega_s^{i_1} t_{s j_2 \dots j_l}^{s i_2 \dots i_k} + \omega_s^{i_k} t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots s} \right) v_1^{j_1} \dots v_l^{j_l} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_k}^k \end{aligned} \quad (3.13)$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte

$$\delta t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} = dt_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} - \omega_{j_1}^s t_{s j_2 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} - \dots + \omega_s^{i_1} t_{j_2 \dots j_l}^{s i_2 \dots i_k} + \omega_s^{i_k} t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots s} \quad (3.14)$$

olarak alınır

$$dZ = \delta t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} v_1^{j_1} \dots v_l^{j_l} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_k}^k \quad (3.15)$$

yazılır. $\bar{\gamma}$ eğrisi boyunca verilen lineer konneksiyona göre paralel kaydırılan vektör ve kovektör değişkenlerinin multilineer fonksiyonunun diferensiyeli de değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. Bu durumda dZ multilineer fonksiyonuna belirli tensör karşılık gelir ve bu tensörün tipi de $t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$ tensörünün tipine eşit olur. Koordinatları da (3.14) daki gibidir. $t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$ tensörünün mutlak diferensiyeli de $\delta t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$ tensörüdür.

Mutlak diferensiyelinin tanımından aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

i. Vektörün, kovektörün ve keyfi tipli tensörün paralel kaydırılması şartları sırasıyla

$$\delta v^i = 0, \quad \delta \omega_i = 0, \quad \delta t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} = 0$$

şeklindedir.

ii. Birim tensörün mutlak diferensiyeli sıfırdır ($\delta(\delta_i^j) = 0$).

Tensörlerin mutlak diferensiyelleri için aşağıdaki özellikler mevcuttur:

i. $\delta(t_1 \mp t_2) = \delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir.

ii. $\delta(\lambda t) = (d\lambda)t + \lambda(\delta t)$, λ -skalerdir.

iii. $\delta(A \otimes B) = (\delta A) \otimes B + A(\delta B)$, A ve B keyfi tipli tensörler ve $\otimes$ - de tensör çarpımı göstermektedir.

iv. Tensörlerde simetrikleştirme işlemi, alterleneştirme işlemi ve kontraksiyon işlemi mutlak diferensiyelleme işlemi ile yer değiştirebilir.

3.4. Afin (Lineer) Konneksiyonlu Uzaylar

Tanım 3.4.1: X_n diferensiyellenebilir manifold olmak üzere bu manifold üzerindeki herbir eğri boyunca lineer (afin) konneksiyon verilsin. X_n diferensiyellenebilir manifoldu lineerlik şartını sağlıyor ise bu manifolda n - boyutlu lineer (afin) konneksiyonlu uzay denir.

Bu tanımda geçen lineerlik şartı aşağıdaki gibidir.

X_n manifoldu üzerinde keyfi M noktası ve bu noktanın civarında keyfi vektör alanları verilsin. Keyfi v^i vektör alanının M noktasından geçen keyfi bir eğri için hesaplanmış mutlak diferensiyeli, bu eğri boyunca elementer yer değişme du^i vektörünün lineer fonksiyonudur. Yani

$$\delta v^i = v_h^i du^h \quad (3.16)$$

şeklinde yazılır. Burada v_h^i , v^i vektör alanına ve noktaya bağlı bir fonksiyondur. Ayrıca $dv^i = \partial_h v^i du^h$ olduğundan

$$\delta v^i = dv^i + \omega_h^i v^h = \partial_h v^i du^h + \omega_h^i v^h \quad (3.17)$$

olur. (3.16) ve (3.17) eşitliklerinden

$$\omega_h^i v^h = (v_s^i - \partial_s v^i) du^s \quad (3.18)$$

ifadesi bulunur. $v^h, \partial_s v^i$ ve $v_s^i u^i$ lerin fonksiyonlarıdır. ω_h^i formları v^i vektör alanlarının seçilişine bağlı olmayıp, ω_h^i formları du^h 'nın lineer fonksiyonu olur ve

$$\omega_h^i = \Gamma_{sh}^i du^s \quad (3.19)$$

şeklinde yazılır. Burada Γ_{sh}^i katsayıları lineer uzayın noktasının fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlara lineer konneksiyonun katsayıları denir. Katsayıların verilmesi X_n de lineer konneksiyonu tayin eder.

Γ_{sh}^i lineer konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralının ne şekilde olduğunu gösterelim. (3.19) kullanılarak

$$\omega_{j'}^{i'} = \Gamma_{h'j'}^{i'} du^{h'} = \Gamma_{h'j'}^{i'} A_h^{h'} du^h$$

yazılır. Ayrıca

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = A_j^{j'} (\partial_h A_{j'}^i) du^h \quad (3.20)$$

olup, öte yandan $A_j^{j'} A_{j'}^i = \delta_j^i$ eşitliğinin ∂_h kısmi diferensiyeli alınırsa

$$(\partial_h A_j^{j'}) A_{j'}^i + A_j^{j'} (\partial_h A_{j'}^i) = 0$$

$$A_j^{j'} (\partial_h A_{j'}^i) = -(\partial_h A_j^{j'}) A_{j'}^i$$

elde edilir. Bu son eşitlik (3.20) de kullanılırsa

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = -A_{j'}^i (\partial_h A_j^{j'}) du^h \quad (3.21)$$

olur. (3.21) ve (3.19) kullanılır ve $\omega_j^i = A_j^{j'} A_{j'}^i \omega_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_{j'}^i$ olduğu da dikkate alınırsa lineer konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralının

$$\Gamma_{hj}^i = A_{i'}^i A_j^{j'} A_h^{h'} \Gamma_{h'j'}^{i'} + A_{i'}^i A_{hj}^{j'} \quad (3.22)$$

şeklinde olduğu görülür. Burada $A_{hj}^{j'} = \partial_h A_j^{i'}$ biçimindedir.

(3.19) kullanılırsa lineer konneksiyonlu uzayda verilen keyfi vektör alanının mutlak diferensiyeli

$$\delta v^i = (\partial_h v^i + \Gamma_{hs}^i v^s) du^h \quad (3.23)$$

şeklinde olur. (3.23) ifadesinde du^h vektör ve ifadenin sol tarafı da bir tensör olduğundan parantez içerisindeki ifade bir tensörün koordinatları olur. Bu tensöre de verilen v^i tensörünün kovaryant türevi denir. Bu kovaryant türev

$$\nabla_h v^i = \partial_h v^i + \Gamma_{hs}^i v^s \quad (3.24)$$

şeklindedir ve bu kovaryant türevin sonucu (1,1) tipli bir tensördür.

Benzer olarak ω_j kovektör alanının kovaryant türevi ise

$$\nabla_h \omega_j = \partial_h \omega_j - \Gamma_{hj}^s \omega_s \quad (3.25)$$

şeklindedir ve bu kovaryant türevin sonucu da (0,2) tipli bir tensördür. (3.19) eşitliğinden (k, l) tipli $t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$ tensörünün mutlak diferensiyeli

$$\delta t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} = \left(\partial_h t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} + \sum_{\lambda=1}^k \Gamma_{hs}^{i_\lambda} t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots s \dots i_k} - \sum_{\mu=1}^l \Gamma_{hj_\mu}^s t_{j_1 \dots s \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \right) du^h \quad (3.26)$$

şeklindedir. (3.26) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^h vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen $t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$ tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_h t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} = \partial_h t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} + \sum_{\lambda=1}^k \Gamma_{hs}^{i_\lambda} t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots s \dots i_k} - \sum_{\mu=1}^l \Gamma_{h\mu}^s t_{j_1 \dots s \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \quad (3.27)$$

şeklindedir ve tensörün kovaryant türev tanımından (k, l) tipli tensörünün kovaryant türevinin kovaryantlığı bir artarak $(k, l + 1)$ tipli bir tensör olur.

Kovaryant türevin tanımından hareketle elde edilen bazı özellikler aşağıdaki gibidir:

$$\text{i. } \nabla_h \left(t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \mp t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \right) = \nabla_h t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \mp \nabla_h t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$$

$$\text{ii. } \nabla_h \left(\lambda t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \right) = (\partial_h \lambda) t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \mp \lambda \nabla_h t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}, \quad \lambda \in F \text{ (} F \text{ fonksiyonlar kümesi)}$$

$$\text{iii. } \nabla_h \left(t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \otimes g_{j'_1 \dots j'_l}^{i'_1 \dots i'_k} \right) = \nabla_h t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \otimes g_{j'_1 \dots j'_l}^{i'_1 \dots i'_k} + t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \otimes \nabla_h g_{j'_1 \dots j'_l}^{i'_1 \dots i'_k}$$

iv. Tensörlerde simetrikleştirme, alterleneştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile yer değiştirebilir.

Tanım 3.4.2: $\mathcal{M}_n$ manifoldu üzerinde, $\mathcal{T}_0^1(\mathcal{M}_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \nabla(\Lambda_1, \Lambda_2): \mathcal{T}_0^1(\mathcal{M}_n) \times \mathcal{T}_0^1(\mathcal{M}_n) \rightarrow \mathcal{T}_0^1(\mathcal{M}_n)$$

dönüşümü

$$\text{i. } \nabla_{f\Lambda_1 + g\Lambda_2} \Lambda_3 = f\nabla_{\Lambda_1} \Lambda_3 + g\nabla_{\Lambda_2} \Lambda_3$$

$$\text{ii. } \nabla_{\Lambda_3} (f\Lambda_1 + g\Lambda_2) = (\Lambda_3 f)\Lambda_1 + f\nabla_{\Lambda_3} \Lambda_1 + (\Lambda_3 g)\Lambda_2 + g\nabla_{\Lambda_3} \Lambda_2$$

şartlarını sağlıyorsa ∇ 'ya lineer (afin) konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \mathcal{T}_0^1(\mathcal{M}_n) \rightarrow \mathcal{T}_0^1(\mathcal{M}_n)$$

dönüşümüne de kovaryant diferensiyellenme denir (Bishop and Goldberg 1968).

Kovaryant türevi şu şekilde de tanımlayabiliriz.

Tanım 3.4.3: $\mathcal{T}(\mathcal{M}_n) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \mathcal{T}_l^k(\mathcal{M}_n)$ ve $\mathcal{T}(\mathcal{M}_n)$, $\mathbb{R}$ de bir cebir olmak üzere

$$i. D(at + bs) = aDt + bDs, \quad \forall t, s \in \mathcal{T}_l^k(\mathcal{M}_n), \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

$$ii. D\left(\mathcal{T}_l^k(\mathcal{M}_n)\right) \subset \mathcal{T}_l^k(\mathcal{M}_n),$$

$$iii. D(t \otimes s) = Dt \otimes s + t \otimes Ds,$$

$$iv. D \text{ işlemi tensörlerde kontraksiyon işlemi ile yer değiştirebilir,}$$

şartlarını sağlayan $D: \mathcal{T}(\mathcal{M}_n) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{M}_n)$ dönüşümüne $\mathcal{T}(\mathcal{M}_n)$ cebirinin tensör diferensiyellemesi işlemi denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 3.4.4: $\mathcal{M}_n$, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere; $\mathcal{T}(\mathcal{M}_n)$ cebirinin

$$D = \nabla_{\Lambda_1}: \mathcal{T}(\mathcal{M}_n) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{M}_n)$$

diferensiyelleme işlemi

$$i. \nabla_{f\Lambda_1 + g\Lambda_2} t = f\nabla_{\Lambda_1} t + g\nabla_{\Lambda_2} t,$$

$$ii. \nabla_{\Lambda_1} f = \Lambda_1 f,$$

şartlarını sağlıyorsa ∇_{Λ_1} dönüşümüne Λ_1 vektör alanı yönündeki kovaryant türev adı verilir. Burada $\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{T}_0^1(\mathcal{M}_n)$, $\forall f, g \in \mathcal{T}_0^0(\mathcal{M}_n)$, $\forall t \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_n)$ dir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 3.4.5: : $\mathcal{M}_n, C^\infty$ sınıfından bir manifold olmak üzere; $\mathcal{T}(\mathcal{M}_n)$ cebirinin

$$D = L_{\Lambda_1} : \mathcal{T}(\mathcal{M}_n) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{M}_n)$$

diferensiyelleme işlemi

$$i. L_{\Lambda_1} f = \Lambda_1 f ,$$

$$ii. L_{\Lambda_1} \Lambda_2 = [\Lambda_1, \Lambda_2],$$

şartlarını sağlıyorsa L_{Λ_1} dönüşümüne Λ_1 vektör alanı yönündeki Lie türevi adı verilir. Burada $\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{T}_0^1(\mathcal{M}_n)$, $\forall f \in \mathcal{T}_0^0(\mathcal{M}_n)$ dir.

Lie Türevinin tanımında geçen $[\Lambda_1, \Lambda_2]$, ifadesi de Lie parantezi olup,

$$[\Lambda_1, \Lambda_2] = \Lambda_1 \Lambda_2 - \Lambda_2 \Lambda_1$$

şeklinde tanımlıdır ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$i. [\Lambda_1, \Lambda_2 + \Lambda_3] = [\Lambda_1, \Lambda_2] + [\Lambda_1, \Lambda_3] ,$$

$$ii. [\Lambda_1, f \Lambda_2] = \Lambda_1(f) \Lambda_2 + f [\Lambda_1, \Lambda_2] ,$$

$$iii. [\Lambda_1, \Lambda_2] = -[\Lambda_2, \Lambda_1] ,$$

$$iv. [\Lambda_1, [\Lambda_2, \Lambda_3]] + [\Lambda_2, [\Lambda_3, \Lambda_1]] + [\Lambda_3, [\Lambda_1, \Lambda_2]] = 0 .$$

$\Lambda_2 \in \mathcal{T}_0^1(\mathcal{M}_n)$ vektör alanının, $\omega \in \mathcal{T}_1^0(\mathcal{M}_n)$ kovektör alanının ve $t \in \mathcal{T}_l^k(\mathcal{M}_n)$ keyfi tipli tensör alanının Lie türevi sırasıyla;

$$\begin{aligned} L_{\Lambda_1} \Lambda_2^i &= \Lambda_1^h \partial_h \Lambda_2^i - \Lambda_2^h \partial_h \Lambda_1^i, \\ L_{\Lambda_1} \omega_j &= \Lambda_1^h \partial_h \omega_j + \omega_h \partial_j \Lambda_1^h, \\ L_{\Lambda_1} t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} &= \Lambda_1^h \partial_h t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} + \sum_{\lambda=1}^l (\partial_{j_\lambda} \Lambda_1^h) t_{j_1 \dots h \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} - \sum_{\mu=1}^k (\partial_h \Lambda_1^{i_\mu}) t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots h \dots i_k}, \end{aligned}$$

şeklindedir (Salimov ve Mağden 2008).

3.5. Eğrilik ve Burulma Tensörleri

A_n lineer (afin) konneksiyonlu uzayında diferensiyellenebilir $f = f(u^i, \dots, u^n)$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun $df = \partial_h f u^i$ şeklindeki tam diferensiyeli, koordinatların dönüşümü durumunda sabit kalır ve df fonksiyonu du^i vektörünün bir lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \tag{3.28}$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonksiyonunun gradienti, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanın potansiyel fonksiyonu denir. Herhangi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{3.29}$$

olmasıdır (Yano 1965).

V_i gradient kovektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma_{ji}^h V_h \tag{3.30}$$

biçimindedir. (3.30) ifadesinde j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (3.29) kullanılırsa

$$\nabla_{[j}V_{i]} = S_{ij}^h V_h \quad (3.31)$$

bulunur. Burada

$$S_{ij}^h = \Gamma_{[ij]}^h \quad (3.32)$$

şeklindedir. (3.31) ifadesinin sol tarafındaki kovaryant türev (0,2) tipli bir tensör olduğundan S_{ij}^h ifadesi alttaki indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli bir tensör belirtir. (3.32) ifadesinde verilen S_{ij}^h tensörüne A_n uzayının burulma tensörü denir. A_n manifoldunda keyfi $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{T}_0^1(\mathcal{M}_n)$ vektör alanları için burulma tensörü invaryant formda

$$S(\Lambda_1, \Lambda_2) = \nabla_{\Lambda_1} \Lambda_2 - \nabla_{\Lambda_2} \Lambda_1 - [\Lambda_1, \Lambda_2] \quad (3.33)$$

biçiminde yazılır. (Kobayashi and Nomizu 1963). Burada $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ ifadesi $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{T}_0^1(\mathcal{M}_n)$ vektör alanlarının Lie parentezi olup,

$$[\Lambda_1, \Lambda_2]f = \Lambda_1(\Lambda_2 f) - \Lambda_2(\Lambda_1 f)$$

yazılır.

Keyfi v^i vektörünün kovaryant türevi olan $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma_{sm}^i v^m$ ifadesi (1,1) tensör olup bu tensörün tekrar kovaryant türevi alınır

$$\begin{aligned} \nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma_{rm}^i \nabla_s v^m - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \\ &= \partial_r (\partial_s v^i + \Gamma_{sh}^i v^h) + \Gamma_{rm}^i (\partial_s v^m + \Gamma_{sh}^m v^h) - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \\ &= \partial_{rs}^2 v^i + \partial_r \Gamma_{sh}^i v^h + \Gamma_{sh}^i \partial_r v^h + \Gamma_{rm}^i \partial_s v^m + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sh}^m v^h - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte r, s indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa,

$$2\nabla_{[r}V_{s]}v^i = R_{rsh}^i v^h - 2S_{rs}^h \nabla_h v^i \quad (3.34)$$

elde edilir. (3.34) denkleminde

$$\begin{aligned} R_{rsh}^i &= \partial_r \Gamma_{sh}^i - \partial_s \Gamma_{rh}^i + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sh}^m - \Gamma_{sm}^i \Gamma_{rh}^m \\ &= 2(\partial_{[r} \Gamma_{s]h}^i + \Gamma_{r|m}^i \Gamma_{s]h}^m) \end{aligned} \quad (3.35)$$

şeklindedir. (3.34) denkleminin sağ tarafındaki ikinci terim ve sol tarafındaki terim tensör olup v^i de herhangi bir vektör olduğundan R_{rsh}^i ifadesi (1,3) tipli tensör belirtir. Bu R_{rsh}^i tensörüne A_n uzayının eğrilik tensörü denir.

A_n manifoldunda keyfi $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \in \mathcal{T}_0^1(\mathcal{M}_n)$ vektör alanları için eğrilik tensörü invaryant formda

$$R(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = R(\Lambda_1, \Lambda_2)\Lambda_3 = \nabla_{\Lambda_1} \nabla_{\Lambda_2} \Lambda_3 - \nabla_{\Lambda_2} \nabla_{\Lambda_1} \Lambda_3 - \nabla_{[\Lambda_1, \Lambda_2]} \Lambda_3 \quad (3.36)$$

biçiminde yazılır. (Kobayashi and Nomizu 1963).

3.6. Konneksiyonların Dönüşümü

Keyfi iki lineer konneksiyona sahip uzayların diffeomorfizmi verilmiş olsun. Bu durumda, bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme aynı bir M_n differensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi lineer konneksiyonun verilmesiyle de elde edilebilir. Bu durumda konneksiyonların birinden diğerine geçilmesi paralel kaydırma kuralının dönüştürülmesi veya konneksiyonların dönüştürülmesi şeklinde adlandırılabilir. Bu konneksiyonların katsayıları Γ_{ij}^h ve $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ şeklinde olsun. Bu konneksiyonlara göre herhangi bir v^i vektör alanının kovaryant türevleri

$$\nabla_h v^i = \partial_h v^i + \Gamma_{hm}^i v^m, \quad \bar{\nabla}_h v^i = \partial_h v^i + \bar{\Gamma}_{hm}^i v^m$$

biçiminde olur. Sonuncu eşitlikten

$$\bar{\nabla}_h v^i - \nabla_h v^i = T_{hm}^i v^m \quad (3.37)$$

yazılır. Burada

$$T_{hm}^i = \bar{\Gamma}_{hm}^i - \Gamma_{hm}^i \quad (3.38)$$

biçimindedir. Burada (3.37) eşitliğindeki T_{hm}^i , (1,2) tipli tensör olup, bu tensör afin deformasyon tensörü olarak adlandırılır.

Teorem 3.6.1: ∇ lineer konneksiyonunun katsayıları Γ_{hm}^i ve T_{hm}^i de (1,2) tipli tensör olmak üzere, (3.38) eşitliği ile verilen $\bar{\Gamma}_{hm}^i$ katsayıları da diğer bir lineer konneksiyonun katsayıları olur.

İspat: (3.38) eşitliğinden

$$\Gamma_{ij}^h = \bar{\Gamma}_{ij}^h - T_{ij}^h$$

elde edilir. Γ_{ij}^h için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi durumunda

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h - T_{ij}^h = A_{h'}^h A_i^{i'} A_j^{j'} \left(\bar{\Gamma}_{i'j'}^{h'} - T_{i'j'}^{h'} \right) + A_{h'}^h A_{ij}^{h'} \quad (3.39)$$

olur. Burada T_{ij}^h tensör olduğundan,

$$T_{ij}^h = A_{h'}^h A_i^{i'} A_j^{j'} T_{i'j'}^{h'} \quad (3.40)$$

yazılır. (3.40) eşitliği (3.39) eşitliğinde kullanılırsa

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = A_{h'}^h A_i^{i'} A_j^{j'} \bar{\Gamma}_{i'j'}^{h'} + A_{h'}^h A_{ij}^{h'}$$

elde edilir. Yani $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ ler konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi kuralına göre değiştiği için bir lineer konneksiyondur.

Bu teoremin bazı sonuçları aşağıdaki gibidir.

Sonuç 1. İki lineer konneksiyonun katsayıları $\Gamma_{ij}^1{}^h$ ve $\Gamma_{ij}^2{}^h$ olmak üzere, $\forall \lambda$ skaleri için

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{\Gamma_{ij}^1{}^h + \lambda \Gamma_{ij}^2{}^h}{1 + \lambda} \quad (3.41)$$

değeri de bir lineer konneksiyonun katsayılarıdır.

Özel olarak $\lambda = 1$ alınırsa

$$\dot{\Gamma}_{ij}^h = \frac{\Gamma_{ij}^1{}^h + \Gamma_{ij}^2{}^h}{2} \quad (3.42)$$

şeklinde elde edilen $\dot{\Gamma}_{ij}^h$ konneksiyonu $\Gamma_{ij}^1{}^h$ ve $\Gamma_{ij}^2{}^h$ konneksiyonlarına göre orta konneksiyon olarak adlandırılır.

Sonuç 2. Γ_{ij}^h lineer konneksiyon verilmiş olsun. Bu durumda, $\tilde{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h$ katsayıları da bir lineer konneksiyon tayin eder.

$\tilde{\Gamma}_{ij}^h$ ve Γ_{ij}^h konneksiyonları karşılıklı konneksiyon olarak adlandırılır.

3.7. Burulmasız Uzaylar

Burulmasız lineer konneksiyonlu uzaylarda burulma tensörü sıfıra eşit olup bu uzaylarda konneksiyon katsayıları alt indislerine göre simetriktir, yani

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ji}^h$$

şeklinde. Burulmasız linner konneksiyonlu uzayın herhangi eğrisel koordinat sistemine göre koordinatları $\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n$ olan $O(\tilde{u}^l)$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verilmiş olduğu koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin $\tilde{\Gamma}_{ij}^h$ katsayıları ile verildiğini varsayalım. Kronecker sembolü $\delta_h^{i'}$ olmak üzere

$$u^{i'} = \delta_h^{i'} \left\{ (u^h - \tilde{u}^h) + \frac{1}{2} \tilde{\Gamma}_{kl}^h (u^k - \tilde{u}^k) (u^l - \tilde{u}^l) \right\} \quad (3.43)$$

şeklinde yeni koordinatları tanımlayalım. (3.43) ifadesi u^i den $u^{i'}$ ne diferensiyellenebilir bir dönüşümdür ve $u^{i'}$ koordinatlarının u^i koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'} + \delta_h^{i'} \tilde{\Gamma}_{ik}^h (u^k - \tilde{u}^k), \quad A_{ij}^{i'} = \delta_h^{i'} \tilde{\Gamma}_{ij}^h \quad (3.44)$$

şeklinde yazılır. (3.44) eşitliği O noktasında ve civarında $\det(A_i^{i'}) \neq 0$ şartını sağlar. Yani, (3.43) dönüşümü diferensiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfındadır. (3.44) türev fonksiyonları O noktasında yazılırsa,

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'} , \quad A_{ij}^{i'} = \delta_h^{i'} \tilde{\Gamma}_{ij}^h \quad (3.45)$$

elde edilir. Şimdi de konneksiyon katsayılarının yeni koordinat sistemine göre O noktasındaki değerlerine bakalım. (3.45) ve (3.22) eşitlikleri kullanılarak

$$\check{\Gamma}_{jh}^i = \delta_j^{j'} \delta_h^{h'} \delta_{i'}^i \check{\Gamma}_{j'h'}^{i'} + \delta_{i'}^i \delta_t^{t'} \check{\Gamma}_{hj}^t$$

veya

$$\check{\Gamma}_{j'h'}^{i'} = 0$$

elde edilir.. Böylelikle burulmasız lineer uzayın herbir noktasında öyle koordinat sistemi vardır ki, konneksiyon katsayılarının bu sisteme göre bu noktadaki tüm değerleri sıfırdır. (3.43) ile verilen koordinatlar normal koordinat sistemi olarak adlandırılır.

Burulmasız lineer konneksiyonlu uzaylarda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$1. R_{(rs)h}^i = 0$$

$$2. R_{[rsh]}^i = 0$$

$$3. \nabla_{[t} R_{rs]h}^i = 0 \text{ , (Bianci-Padov eşitliği).}$$

a_{ij} tensörü burulmasız lineer konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler tensör ve $\check{a}^{ij}$ tensörü de bu tensörün tersi olsun. a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_h a_{ij} = a_{hij} \tag{3.46}$$

şeklinde gösterilsin. (3.46) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\partial_i a_{jh} - \Gamma_{ij}^m a_{mh} - \Gamma_{ih}^m a_{jm} = \nabla_i a_{jh} .$$

$$\partial_j a_{hi} - \Gamma_{jh}^m a_{mi} - \Gamma_{ji}^m a_{hm} = \nabla_j a_{hi} .$$

$$\partial_h a_{ij} - \Gamma_{hi}^m a_{mj} - \Gamma_{hj}^m a_{mi} = \nabla_h a_{ij} .$$

İlk iki eşitlik toplanıp, üçüncü eşitlik çıkarılırsa;

$$2\Gamma_{ij}^m a_{mh} = \partial_i a_{jh} + \partial_j a_{ih} - \partial_h a_{ij} - (a_{ijh} + a_{jih} - a_{hij}) \quad (3.47)$$

elde edilir. (3.47) eşitliğinin her iki tarafı $\tilde{a}^{rh}$ tensörü ile çarpılarak

$$\Gamma_{ij}^r = \left\{ \begin{matrix} r \\ ij \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} \tilde{a}^{rh} (a_{ijh} + a_{jih} - a_{hij}) \quad (3.48)$$

bulunur. Burada

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ ij \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \tilde{a}^{rh} (\partial_i a_{jh} + \partial_j a_{ih} - \partial_h a_{ij}) \quad (3.49)$$

biçimindedir. (3.49) ifadesi a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü olarak adlandırılır. Burulmasız lineer konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları, simetrik ve regüler a_{ij} tensörünün kovaryant türevleri ve Christoffel sembolü yardımıyla ifade edilebilir.

Tanım 3.7.1: Burulmasız lineer konneksiyonlu A_n uzayında $e_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} \mp 1 \\ 0 \end{cases}$, $e = e_{1,2,\dots,n}$ n - vektörü olmak üzere lineer bağımsız $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \dots i_n} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \dots v_n^{i_n} \quad (3.50)$$

olsun. Şayet $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerinin paralel taşınması işlemi sonucunda V hacmi korunuyor ise A_n uzayına eş afin uzay denir. (3.50) ifadesinden

$$\delta e_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0 \quad \text{veya} \quad \nabla_h e_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0 \quad (3.51)$$

yazılır. Eş afin uzayın konneksiyonu (3.51) denkleminde hareketle bulunur. (3.51) şartı

$$\partial_h e_{i_1 i_2 \dots i_n} - \Gamma_{hi_1}^s e_{si_2 \dots i_n} - \dots - \Gamma_{hi_n}^s e_{i_1 i_2 \dots s} = 0 \quad (3.52)$$

şeklinde yazılır. n – vektörün antisimetrikliğine göre (3.51) sisteminin bütün denklemleri

$$\partial_h e_{12 \dots n} - \Gamma_{h1}^s e_{s2 \dots n} - \dots - \Gamma_{hn}^s e_{12 \dots s} = 0 \quad (3.53)$$

denkleminde denk olur. $e_{12 \dots n} = e$ olarak yazılırsa bu durumda (3.53) eşitliğinden

$$\Gamma_{hs}^s = \partial_h lne \quad (3.54)$$

elde edilir. (3.54) eşitliğindeki eş afin konneksiyonunun katsayıları ile belirlenen Γ_{hs}^s toplamı gradiyentdir. Bu gradiyentin potansiyel fonksiyonu ise lne olur.

$$R_{ij} = R_{hij}^h = \partial_h \Gamma_{ij}^h - \partial_i \Gamma_{hj}^h + \Gamma_{ht}^h \Gamma_{ij}^t - \Gamma_{hi}^t \Gamma_{tj}^h \quad (3.55)$$

biçiminde tanımlanan tensöre Ricci tensörü denir. Eş afin konneksiyonu

$$R_{ij} = R_{ji} \quad (3.56)$$

şartı ile de karakterize edilir.

Burulmasız lineer konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörünün $R_{[rsh]}^i = 0$ ve $R_{(rs)h}^i = 0$ şartlarını sağladığı dikkate alınırsa

$$R_{rsh}^h = R_{rs} - R_{sr} \quad (3.57)$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.56) ve (3.57) eşitlikleri eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsh}^h = 0$$

şartı ile de karakterize edilebileceğini gösterir.

Tanım 3.7.2: Burulmasız lineer konneksiyonlu uzayın her bir noktasındaki tanjant uzayında verilen $(0,2)$ tipli simetrik g_{ij} tensörü tanjant uzayın paralel kaydırılması durumunda korunuyorsa bu şekildeki uzaylara metrik uzay denir. Burada $(0,2)$ tipli simetrik g_{ij} tensörüne de metrik tensör denir.

Tanım 3.7.3: Metrik uzayın g_{ij} metrik tensörü regüler ise yani $\det(g_{ij}) \neq 0$ ise bu şekildeki uzaya Weyl uzayı denir ve W_n ile gösterilir.

Tanım 3.7.4: Eğer Weyl uzayı eş afin uzay olur ise bu uzaya Riemannian uzayı denir ve V_n ile gösterilir.

Riemannian uzayı burulmasız konneksiyona sahip bir uzaydır ve bu uzayın Riemannian konneksiyonu

$$\nabla_h g_{ij} = 0 \quad (3.58)$$

şartı ile karakterize edilir. V_n Riemannian uzayının konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ij}^h = \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{hr} (\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij}) \quad (3.59)$$

şeklindedir. Yani, V_n uzayının konneksiyon katsayıları g_{ij} tensörünün Christoffel sembolleriyle çakışır. (3.59) katsayılarıyla verilen konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. Öte yandan Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan ama burulması olan konneksiyonlar da vardır. Bu tür konneksiyonlara ise metrik konneksiyon denir.

Riemannian uzayında $R_{jhm}^s g_{si} = R_{ijhm}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

- i. $R_{(ij)hm} = 0$
- ii. $R_{[ijh]m} = 0$
- iii. $\nabla_{[s}R_{ij]hm} = 0$
- iv. $R_{ij(hm)} = 0$
- v. $R_{ijhm} = R_{hmi j}$

3.8. Riemannian Manifoldu

Her bir $x \in \mathcal{M}_n$ noktasında $\forall \Lambda_2 \in T_x(\mathcal{M}_n)$ ve (0,2) tipli simetrik $\mathcal{g}$ tensörü için $\mathcal{g}(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$ eşitliğinden $\Lambda_1 = 0$ oluyorsa $\mathcal{g}$ 'ye $\mathcal{M}_n$ üzerinde Riemannian metriği denir. Lokal koordinatlarda bu şart $\det(\mathcal{g}_{ij}) \neq 0$ şartına denktir. $\mathcal{g}$ 'nin bileşenleri $\mathcal{g}_{ij}$ olmak üzere $\mathcal{g}$ için

$$ds^2 = \mathcal{g}_{ij} du^i du^j \quad (3.60)$$

ifadesi de kullanılır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Eğer $\mathcal{M}_n$ üzerinde Riemannian metriği verilmişse, o zaman $(\mathcal{M}_n, \mathcal{g})$ ikilisine Riemannian manifoldu denir.

Burulmasız $\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} \mathcal{g}^{hr} (\partial_i \mathcal{g}_{rj} + \partial_j \mathcal{g}_{ir} - \partial_r \mathcal{g}_{ij})$ konneksiyonuna ise Riemannian manifoldunun Riemannian veya Levi-Civita konneksiyonu denir.

Eğer $\mathcal{g}(\Lambda_1, \Lambda_1) \geq 0$ ve $\mathcal{g}(\Lambda_1, \Lambda_1) = 0$ şartı yalnız ve yalnız $\Lambda_1 = 0$ olduğunda sağlanıyor ise $\mathcal{g}$ ye pozitif tanımlıdır denir.

Eğer $\mathcal{M}_n$ üzerinde $\mathcal{g}$ Riemannian metriği pozitif tanımlı değilse $\mathcal{g}$ ye pseudo Riemannian metriği denir.

3.9. Nijenhuis Tensörü

Nijenhuis tensörü yapıların integrallenebilme şartlarının incelenmesinde kullanılan bir tensördür. D ve E afinorları verilmiş olsun. $\Lambda_1, \Lambda_2 \in T_0^1(\mathcal{M}_n)$ olmak üzere $N_{DE}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ tensörü

$$\begin{aligned} N_{DE}(\Lambda_1, \Lambda_2) = & [D\Lambda_1, E\Lambda_2] + [E\Lambda_1, D\Lambda_2] + DE[\Lambda_1, \Lambda_2] + ED[\Lambda_1, \Lambda_2] \\ & - D[\Lambda_1, E\Lambda_2] - D[E\Lambda_1, \Lambda_2] - E[\Lambda_1, D\Lambda_2] - E[D\Lambda_1, \Lambda_2] \quad (3.61) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $\varphi_j^i \Lambda_1^j = \varphi^i$ ifadesi bir vektör alanı olduğundan, (3.61) eşitliğinin sağ tarafı vektör alanı olup $N_{DE}(\Lambda_1, \Lambda_2) \in T_2^1(\mathcal{M}_n)$ bir tensör alanıdır. (Yano 1965). Λ_1 ve Λ_2 vektör alanlarına göre lineerdir.

Bir afinor yapı için Nijenhuis tensörü, $D = E = \varphi$ alınırsa

$$\begin{aligned} N_\varphi(\Lambda_1, \Lambda_2) = N(\Lambda_1, \Lambda_2) = & [\varphi\Lambda_1, \varphi\Lambda_2] + [\varphi\Lambda_1, \varphi\Lambda_2] + \varphi^2[\Lambda_1, \Lambda_2] + \varphi^2[\Lambda_1, \Lambda_2] \\ & - \varphi[\Lambda_1, \varphi\Lambda_2] - \varphi[\varphi\Lambda_1, \Lambda_2] - \varphi[\Lambda_1, \varphi\Lambda_2] - \varphi[\varphi\Lambda_1, \Lambda_2] \\ = & 2([\varphi\Lambda_1, \varphi\Lambda_2] + \varphi^2[\Lambda_1, \Lambda_2] - \varphi[\Lambda_1, \varphi\Lambda_2] \\ & - \varphi[\varphi\Lambda_1, \Lambda_2]) \end{aligned}$$

şeklindedir. Parantezin içi $N(\Lambda_1, \Lambda_2)$ olarak alınır.

$$\begin{aligned} N_\varphi(\Lambda_1, \Lambda_2) = N(\Lambda_1, \Lambda_2) \\ = [\varphi\Lambda_1, \varphi\Lambda_2] + \varphi^2[\Lambda_1, \Lambda_2] - \varphi[\Lambda_1, \varphi\Lambda_2] - \varphi[\varphi\Lambda_1, \Lambda_2] \end{aligned} \quad (3.62)$$

Yapılar için $N(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$ olması ise integrallenebilme şartıdır.

Nijenhuis tensörünün lokal koordinatlarda yazılımı aşağıdaki gibidir:

Bunun için Lie parantezinin

$$[f\Lambda_1, g\Lambda_2] = fg[\Lambda_1, \Lambda_2] + f(\Lambda_1 g)\Lambda_2 - g(\Lambda_2 f)\Lambda_1 \quad (3.63)$$

özelliğinden faydalanılır. $\Lambda_1 = \partial_i$, $\Lambda_2 = \partial_j$ eşitlikleri (3.62) ve (3.63) eşitliklerinde yerine yazılır. İlk önce (3.62) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$[f\partial_i, g\partial_j] = fg[\partial_i, \partial_j] + f(\partial_i g)\partial_j - g(\partial_j f)\partial_i$$

eşitliği elde edilir. $[\partial_i, \partial_j] = 0$ olduğundan

$$[f\partial_i, g\partial_j] = f(\partial_i g)\partial_j - g(\partial_j f)\partial_i \quad (3.64)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi de (3.63) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} N_\varphi(\partial_i, \partial_j) &= N_{(\varphi)ij}^h \partial_h = N_{ij}^h \partial_h \\ N_{ij}^h \partial_h &= [\varphi \partial_i, \varphi \partial_j] + \varphi^2 [\partial_i, \partial_j] - \varphi [\partial_i, \varphi \partial_j] - \varphi [\varphi \partial_i, \partial_j] \\ [\partial_i, \partial_j] &= 0 \text{ olduğundan,} \\ &= [\varphi_i^s \partial_s, \varphi_j^t \partial_t] - \varphi [\partial_i, \varphi_j^t \partial_t] - \varphi [\varphi_i^s \partial_s, \partial_j] \end{aligned}$$

olup Lie parantezinin özelliğinden, yani (3.64) eşitliğinden

$$\begin{aligned} N_{ij}^h \partial_h &= \varphi_i^s \varphi_j^t \underbrace{[\partial_s, \partial_t]}_{=0} + \varphi_i^s (\partial_s \varphi_j^t) \partial_t - \varphi_j^t (\partial_t \varphi_i^s) \partial_s \\ &\quad - \varphi \{ \varphi_j^t \underbrace{[\partial_i, \partial_t]}_{=0} + (\partial_i \varphi_j^t) \partial_t - \varphi_j^t \underbrace{(\partial_t \cdot 1)}_{=0} \partial_i \} \\ &\quad - \varphi \{ \varphi_i^s \underbrace{[\partial_s, \partial_j]}_{=0} + \varphi_i^s \underbrace{(\partial_s \cdot 1) \partial_j}_{=0} - (\partial_j \varphi_i^s) \partial_s \} \\ N_{ij}^h \partial_h &= \varphi_i^s \partial_s \varphi_j^t \partial_t - \varphi_j^t \partial_t \varphi_i^s \partial_s - \partial_i \varphi_j^t \varphi_i^h \partial_h + \partial_j \varphi_i^s \varphi_j^h \partial_h \\ &= (\varphi_i^s \partial_s \varphi_j^h - \varphi_j^t \partial_t \varphi_i^h - \partial_i \varphi_j^t \varphi_i^h + \partial_j \varphi_i^s \varphi_j^h) \partial_h \\ N_{ij}^h \partial_h &= (\varphi_i^s \partial_s \varphi_j^h - \varphi_j^t \partial_t \varphi_i^h - \partial_i \varphi_j^t \varphi_i^h + \partial_j \varphi_i^s \varphi_j^h) \partial_h \end{aligned} \quad (3.65)$$

eşitliği elde edilir. Böylelikle Nijenhuis tensörünün lokal koordinatlarla yazılımının (3.65) deki gibi olduğu görülür.

3.10. Skaler Eğrilik

$\mathcal{M}_n$, n -boyutlu C^∞ sınıfından olan Riemannian manifoldu olsun. g_{ij} metriği $(0, 2)$ tipli, simetrik, regüler ve konneksiyon da Levi-Civita konneksiyonu olsun.

Riemannian manifoldunda $R_{ijh}^s = R(\Lambda_1, \Lambda_2)\Lambda_3$ eğrilik tensöründeki s indisine indisin indirilmesi işlemi uygulanırsa,

$$R_{ijht} = g_{st}R_{ijh}^s, \quad R(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4) = g(R(\Lambda_1, \Lambda_2)\Lambda_3, \Lambda_4)$$

biçiminde $(0,4)$ tipli tensör elde edilir.

Ricci tensörü $R_{ij} = R_{sij}^s = g^{ts}R_{tjhs} = g^{ts}R_{itsj}$ şeklinde tanımlanır (Yano, 1965). Ricci tensörüne öyle bir skaler dahil edelim ki, tam kontraksiyon yapalım ve

$$s = g^{ij}R_{ij}$$

olsun. Bu s eğriliğine skaler eğrilik denir.

3.11. Hemen Hemen Kompleks ve Hemen Hemen Para Kompleks Yapılar

Tanım 3.11.1: $\mathcal{M}_{2n}$ diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\mathcal{M}_{2n}$ üzerinde $(1,1)$ tipli φ tensör alanı için $\varphi^2 = -I$ olan tensör alanına hemen hemen kompleks yapı denir. $(\mathcal{M}_{2n}, \varphi)$ ise hemen hemen kompleks manifold olarak adlandırılır.

Eğer $(1,1)$ tipli φ yapısı integrallenebilirse yani $N_\varphi = 0$ ise φ 'ye kompleks yapı denir. $(\mathcal{M}_{2n}, \varphi)$ de kompleks manifold denir.

Tanım 3.11.2: $\mathcal{M}_{2n}$ diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\mathcal{M}_{2n}$ üzerinde $(1,1)$ tipli φ tensör alanı için $\varphi^2 = I$ olan tensör alanına hemen hemen para kompleks yapı denir. $(\mathcal{M}_{2n}, \varphi)$ ise hemen hemen para kompleks manifold olarak adlandırılır.

Eğer (1,1) tipli φ yapısı integrallenebilirse yani $N_\varphi = 0$ ise φ 'ye para kompleks yapı denir. $(\mathcal{M}_{2n}, \varphi)$ de para kompleks manifold denir.

3.12. Hermitian Manifoldlar

Tanım 3.12.1: $\mathcal{M}_{2n}$ diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\mathcal{M}_{2n}$ üzerinde (1,1) tipli φ tensör alanı ve her Λ_1, Λ_2 vektör alanları için

$$g(\varphi\Lambda_1, \Lambda_2) = -g(\Lambda_1, \varphi\Lambda_2)$$

şartını sağlayan g Riemannian metriğine Hermitian metrik denir. Hermitian metriğine sahip manifolda ise Hermitian manifold denir.

Tanım 3.12.2: $\mathcal{M}_{2n}$ diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\mathcal{M}_{2n}$ üzerinde (1,1) tipli φ tensör alanı ve g Hermitian metriği verilmiş olsun. g ve φ vasıtasıyla

$$\underline{\omega}(\Lambda_1, \Lambda_2) = (g \circ \varphi)(\Lambda_1, \Lambda_2) = g(\varphi\Lambda_1, \Lambda_2)$$

şeklinde tanımlanan $\underline{\omega}$ ya esas 2 –form denir.

3.13. Codazzilik Şartı

Tanım 3.13.1: $\mathcal{M}_{2n}$ diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\mathcal{M}_{2n}$ üzerinde (1,1) tipli φ tensör alanı için ∇ lineer konneksiyon ve Λ_1, Λ_2 vektör alanları olmak üzere,

$$(\nabla_{\Lambda_1} \varphi)\Lambda_2 = (\nabla_{\Lambda_2} \varphi)\Lambda_1$$

eşitliğine (1,1) tipli φ tensörünün Codazzilik şartı denir. Bu durumda (∇, f) ye de Codazzi çifti denir (Fei and Zhang 2017).

3.14. f –Manifold

Tanım 3.14.1: $\mathcal{M}$, $(2n + s)$ boyutlu bir manifold ve f de determinantı sıfırdan farklı $(1,1)$ tipli bir tensör olsun. $f^3 - f = 0$ şartını sağlayan f ye pseudo f –yapı ve bu durumda $\mathcal{M}$ ye de f –manifold denir. Eğer $rank f = 2n$ ise yani $s = 0$ ise f ye hemen hemen pseudo kompleks yapı, $rank f = 2n + 1$ ise yani $s = 1$ ise bu durumda da f ye hemen hemen pseudo kontakt yapı denir. $rank f$ daima sabittir (Matsumoto 1976).

3.15. Walker Metriği

$\mathcal{M}_4$ manifoldunda g metriğine göre paralel olan 2 boyutlu bir $\mathfrak{D}$ null dağılımı varsa, 4 – boyutlu $\mathcal{M}_4$ manifoldu üzerindeki g nötral metriğine Walker metriği, $(\mathcal{M}_4, g, \mathfrak{D})$ üçlüsüne de 4 –boyutlu Walker manifold denir. Walker ’in Walker (1950) teoreminden, a, b ve c , (x, y, z, t) koordinatlarının diferensiyellenebilir fonksiyonları olsun. Bu durumda Walker metriği lokal koordinat sistemine göre

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Paralel $\mathfrak{D}$ null 2 manifoldu lokal olarak $\{\partial_x, \partial_y\}$ ile örtülür.

$$\text{Burada } \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y = \frac{\partial}{\partial y} \text{ dir.}$$

4 – boyutlu Walker manifoldları bir çok yazar tarafından çalışılmıştır (Matsushita 2004; Matsushita 2005; Davidov et al. 2007; Davidov et al. 2008; Salimov ve İscan 2010; Salimov vd 2010; Salimov 2011; Salimov ve İscan 2011; Salimov vd 2011; Turanlı 2011; İscan vd 2012; İscan vd 2014; Turanlı 2019).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA**4.1. Hemen hemen Hermitian Metrik Pseudo f –Manifoldlar**

Tanım 4.1.1: $\mathcal{M}_{2n}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve f de $f^3 - f = 0$ şartını sağlayan bir hemen hemen pseudo f –yapı olmak üzere $(\mathcal{M}_{2n}, f)$ çifti bir hemen hemen pseudo f –manifold olsun. Eğer $\mathcal{M}_{2n}$ üzerinde φ pseudo Riemannian metriği

$$\varphi(f\Lambda_1, \Lambda_2) = -\varphi(\Lambda_1, f\Lambda_2) \quad (4.1)$$

şartını sağlıyor ise bu durumda $(\mathcal{M}_{2n}, f, \varphi)$ üçlüsüne hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifold denir. Burada Λ_1, Λ_2 ve Λ_3 vektör alanlarıdır. Eğer hemen hemen pseudo f –yapısı integrallenebilirse yani N_f Nijenhuis tensörü sıfır ise bu durumda $(\mathcal{M}_{2n}, f, \varphi)$ üçlüsüne Hermitian metrik pseudo f –manifold denir.

(4.1) eşitliğinde Λ_1 yerine $f\Lambda_1$ ve Λ_2 yerine de yine Λ_2 yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi(f^2\Lambda_1, \Lambda_2) &= -\varphi(f\Lambda_1, f\Lambda_2) \\ &= \varphi(\Lambda_1, f^2\Lambda_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca $\varphi(f\Lambda_1, f\Lambda_2) = -\varphi(\Lambda_1, f^2\Lambda_2)$ şeklindedir.

Tez çalışmasının bu kısmında ve ilerleyen kısımlarında φ metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ∇^φ ile gösterilecektir.

$(\mathcal{M}_{2n}, f, \varphi)$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifold olmak üzere esas 2 –form $\underline{\omega}$ ile gösterilir ve $\underline{\omega}(\Lambda_1, \Lambda_2) = (\varphi \circ f)(\Lambda_1, \Lambda_2) = \varphi(f\Lambda_1, \Lambda_2)$ şeklinde tanımlanır. Tanımdan hareketle

$$\begin{aligned}\underline{\omega}(\Lambda_1, \Lambda_2) &= \mathcal{G}(f\Lambda_1, \Lambda_2) \\ &= -\mathcal{G}(\Lambda_1, f\Lambda_2) \\ &= -\underline{\omega}(\Lambda_2, \Lambda_1)\end{aligned}$$

ve

$$(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) = \mathcal{G}\left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f)\Lambda_2, \Lambda_3\right)$$

olduğu görülür.

Önerme 4.1.2: $(\mathcal{M}_{2n}, f, \mathcal{G})$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifold ve $\nabla^{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ metriğinin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere aşağıdaki özellikler mevcuttur:

- i. $\mathcal{G}\left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f)\Lambda_2, \Lambda_3\right) = -\mathcal{G}\left(\Lambda_2, (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f)\Lambda_3\right)$
- ii. $\mathcal{G}\left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2)\Lambda_2, \Lambda_3\right) = \mathcal{G}\left(\Lambda_2, (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2)\Lambda_3\right)$
- iii. $\mathcal{G}\left((\nabla_{f^2\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2)\Lambda_2, \Lambda_3\right) = \mathcal{G}\left(\Lambda_2, (\nabla_{f^2\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2)\Lambda_3\right)$

İspat:

- i. (4.1) eşitliğinden $\mathcal{G}(f\Lambda_2, \Lambda_3) = -\mathcal{G}(\Lambda_2, f\Lambda_3)$ olup ifadenin her iki tarafının $\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}}$ kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}})(\mathcal{G}(f\Lambda_2, \Lambda_3)) &= -(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}})(\mathcal{G}(\Lambda_2, f\Lambda_3)) \\ &\Rightarrow (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \mathcal{G})(f\Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{G}(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{G}(f\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3) \\ &= -(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \mathcal{G})(\Lambda_2, f\Lambda_3) - \mathcal{G}(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, f\Lambda_3) - \mathcal{G}(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\Lambda_3) \\ &\Rightarrow \mathcal{G}\left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f)\Lambda_2, \Lambda_3\right) + \mathcal{G}(f\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{G}(f\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3) \\ &= -\mathcal{G}(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, f\Lambda_3) - \mathcal{G}\left(\Lambda_2, (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f)\Lambda_3\right) - \mathcal{G}(\Lambda_2, f\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2, \Lambda_3\right) - \mathcal{G}\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, f \Lambda_3\right) - \mathcal{G}\left(\Lambda_2, f \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3\right) \\
 &= -\mathcal{G}\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, f \Lambda_3\right) - \mathcal{G}\left(\Lambda_2, \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_3\right) - \mathcal{G}\left(\Lambda_2, f \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3\right) \\
 &\Rightarrow \mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2, \Lambda_3\right) = -\mathcal{G}\left(\Lambda_2, \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_3\right)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

- ii. (4.1) eşitliğinden $\mathcal{G}(f^2 \Lambda_2, \Lambda_3) = \mathcal{G}(\Lambda_2, f^2 \Lambda_3)$ olup ifadenin her iki tarafın $\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}}$ kovaryant türevi alınır

$$\begin{aligned}
 &\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}}\right)\left(\mathcal{G}\left(f^2 \Lambda_2, \Lambda_3\right)\right)=\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}}\right)\left(\mathcal{G}\left(\Lambda_2, f^2 \Lambda_3\right)\right) \\
 &\Rightarrow\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \mathcal{G}\right)\left(f^2 \Lambda_2, \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \Lambda_2, \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(f^2 \Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3\right) \\
 &=\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \mathcal{G}\right)\left(\Lambda_2, f^2 \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, f^2 \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \Lambda_3\right) \\
 &\Rightarrow \mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2\right) \Lambda_2, \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(f^2 \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(f^2 \Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3\right) \\
 &=\mathcal{G}\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, f^2 \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(\Lambda_2,\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2\right) \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(\Lambda_2, f^2 \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3\right) \\
 &\Rightarrow \mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2\right) \Lambda_2, \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, f^2 \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(\Lambda_2, f^2 \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3\right) \\
 &=\mathcal{G}\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, f^2 \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(\Lambda_2,\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2\right) \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(\Lambda_2, f^2 \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3\right) \\
 &\Rightarrow \mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2\right) \Lambda_2, \Lambda_3\right)=\mathcal{G}\left(\Lambda_2,\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2\right) \Lambda_3\right)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

- iii. (4.1) eşitliğinden $\mathcal{G}(f^2 \Lambda_2, \Lambda_3) = \mathcal{G}(\Lambda_2, f^2 \Lambda_3)$ olup ifadenin her iki tarafının $\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}}$ kovaryant türevi alınır

$$\begin{aligned}
 &\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}}\right)\left(\mathcal{G}\left(f^2 \Lambda_2, \Lambda_3\right)\right)=\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}}\right)\left(\mathcal{G}\left(\Lambda_2, f^2 \Lambda_3\right)\right) \\
 &\Rightarrow\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} \mathcal{G}\right)\left(f^2 \Lambda_2, \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \Lambda_2, \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(f^2 \Lambda_2, \nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3\right) \\
 &=\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} \mathcal{G}\right)\left(\Lambda_2, f^2 \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, f^2 \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(\Lambda_2, \nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \Lambda_3\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) + \mathcal{G} \left(f^2 \nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, \Lambda_3 \right) + \mathcal{G} \left(f^2 \Lambda_2, \nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3 \right) \\
 &= \mathcal{G} \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, f^2 \Lambda_3 \right) + \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right) + \mathcal{G} \left(\Lambda_2, f^2 \nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3 \right) \\
 &\Rightarrow \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) + \mathcal{G} \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, f^2 \Lambda_3 \right) + \mathcal{G} \left(\Lambda_2, f^2 \nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3 \right) \\
 &= \mathcal{G} \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2, f^2 \Lambda_3 \right) + \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right) + \mathcal{G} \left(\Lambda_2, f^2 \nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3 \right) \\
 &\Rightarrow \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) = \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır.

Γ , $(0, 3)$ tipli tensör alanı olmak üzere;

$$\Gamma(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right)$$

şeklinde tanımlansın. Γ ile hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifold karakterize edilir. Burada Λ_1, Λ_2 ve Λ_3 vektör alanlarıdır.

Önerme 4.1.3: $(\mathcal{M}_{2n}, f, \mathcal{G})$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifold olmak üzere aşağıdaki özellikler mevcuttur:

i. $\Gamma(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = -\Gamma(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2)$

ii. $\Gamma(\Lambda_1, f \Lambda_2, f \Lambda_3) = -\Gamma(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) + \Gamma(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2, \Lambda_3) + \Gamma(\Lambda_1, \Lambda_2, f^2 \Lambda_3).$

İspat:

i. Önerme 4.1.2. i) den

$$\mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2, \Lambda_3\right)=-\mathcal{G}\left(\Lambda_2,\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_3\right)$$

$$\mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2, \Lambda_3\right)=-\mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_3, \Lambda_2\right)$$

dir. Dolayısıyla Γ nın tanımından hareketle

$$\Gamma\left(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\right)=-\Gamma\left(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2\right)$$

bulunur.

$$\text{ii. } \Gamma\left(\Lambda_1, f \Lambda_2, f \Lambda_3\right)=\mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) f \Lambda_2, f \Lambda_3\right)=-\mathcal{G}\left(f\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) f \Lambda_2, \Lambda_3\right) \text{ dir. (I)}$$

$$\text{Burada } \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 f\right) \Lambda_2=\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2\right) f \Lambda_2+f^2\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2$$

$$\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2=\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) f^2 \Lambda_2+f\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) f \Lambda_2+f^2\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2$$

$$\Rightarrow f\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) f \Lambda_2=\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2-\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) f^2 \Lambda_2-f^2\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2$$

şeklinde olup bu ifadeyi (I) de yerine yazarsak;

$$\Gamma\left(\Lambda_1, f \Lambda_2, f \Lambda_3\right)=\mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) f \Lambda_2, f \Lambda_3\right)=-\mathcal{G}\left(f\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) f \Lambda_2, \Lambda_3\right)$$

$$=-\mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2-\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) f^2 \Lambda_2-f^2\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2, \Lambda_3\right)$$

$$=-\mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2, \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) f^2 \Lambda_2, \Lambda_3\right)$$

$$+\mathcal{G}\left(f^2\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2, \Lambda_3\right)$$

$$=-\mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2, \Lambda_3\right)+\mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) f^2 \Lambda_2, \Lambda_3\right)$$

$$+\mathcal{G}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f\right) \Lambda_2, f^2 \Lambda_3\right)$$

$$=-\Gamma\left(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\right)+\Gamma\left(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2, \Lambda_3\right)+\Gamma\left(\Lambda_1, \Lambda_2, f^2 \Lambda_3\right)$$

bulunur.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2. Özel Konneksiyonlar

Tanım 4.2.1: $(\mathcal{M}_{2n}, f, \vartheta)$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu üzerinde $\tilde{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_2 + f\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ şeklinde tanımlanan lineer konneksiyonu $\tilde{\nabla}\underline{\omega} = 0$ ve $\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = -\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2)$ şartlarını sağlıyor ise bu lineer konneksiyona birinci tip özel konneksiyon denir. Burada Λ_1, Λ_2 ve Λ_3 vektör alanları, $\mathcal{S}$ de (1,2) tipli bir tensör alanı olup,

$$\begin{aligned}\vartheta(\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) &= \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) \\ \vartheta(\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), f\Lambda_3) &= \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2, f\Lambda_3) = \mathcal{S}_f(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) \\ \vartheta(\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), f^2\Lambda_3) &= \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2, f^2\Lambda_3) = \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)\end{aligned}$$

şeklindedir.

$\underline{\omega}$ esas 2 –formun $\tilde{\nabla}$ konneksiyonuna göre kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_{\Lambda_1} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) &= \Lambda_1 \underline{\omega}(\Lambda_2, \Lambda_3) - \underline{\omega}(\tilde{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2, \Lambda_3) - \underline{\omega}(\Lambda_2, \tilde{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_3) \\ &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) + \underline{\omega}(\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_2, \Lambda_3) + \underline{\omega}(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_3) \\ &\quad - \underline{\omega}(\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_2 + f\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) - \underline{\omega}(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_3 + f\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3)) \\ &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) + \underline{\omega}(\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_2, \Lambda_3) + \underline{\omega}(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_3) \\ &\quad - \underline{\omega}(\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_2, \Lambda_3) - \underline{\omega}(f\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) \\ &\quad - \underline{\omega}(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_3) - \underline{\omega}(\Lambda_2, f\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3)) \\ &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) - \underline{\omega}(f\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) - \underline{\omega}(\Lambda_2, f\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3)) \\ &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) - \vartheta(f^2\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) - \vartheta(f\Lambda_2, f\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3)) \\ &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) - \vartheta(\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), f^2\Lambda_3) + \vartheta(\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3), f^2\Lambda_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) - S(\Lambda_1, \Lambda_2, f^2 \Lambda_3) + S(\Lambda_1, \Lambda_3, f^2 \Lambda_2) \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) - S_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) + S_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Şart dahilinde $\tilde{\nabla} \underline{\omega} = 0$ ve $S_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = -S_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) &= S_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) - S_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2) \\
 (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) &= 2S_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)
 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
 S_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) &= \frac{1}{2} (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) \\
 S(\Lambda_1, \Lambda_2, f^2 \Lambda_3) &= \frac{1}{2} (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) \\
 \mathcal{G}(S(\Lambda_1, \Lambda_2), f^2 \Lambda_3) &= \frac{1}{2} \mathcal{G}((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2, \Lambda_3) \\
 \mathcal{G}(f^2 S(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) &= \frac{1}{2} \mathcal{G}((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2, \Lambda_3) \\
 f^2 S(\Lambda_1, \Lambda_2) &= \frac{1}{2} (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2
 \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki yanı f ile çarpılırsa

$$f S(\Lambda_1, \Lambda_2) = \frac{f}{2} (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2$$

bulunur. Yani birinci tip özel konneksiyon $\tilde{\nabla} \underline{\omega} = 0$ ve $S_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = -S_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2)$ şartları dahilinde

$$\tilde{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2 + \frac{f}{2} (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi de $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun $\mathcal{g}$ ye göre metrik konneksiyon olup olmadığına bakalım. Bunun için $\mathcal{g}$ metriğinin $\tilde{\nabla}$ konneksiyona göre kovaryant türevi alınır;

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\nabla}_{\Lambda_1} \mathcal{g})(\Lambda_2, \Lambda_3) &= \Lambda_1 \mathcal{g}(\Lambda_2, \Lambda_3) - \mathcal{g}(\tilde{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2, \Lambda_3) - \mathcal{g}(\Lambda_2, \tilde{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_3) \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} \mathcal{g})(\Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{g}(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} \Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{g}(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} \Lambda_3) \\
 &\quad - \mathcal{g}(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} \Lambda_2, \Lambda_3) - \frac{1}{2} \mathcal{g}(f(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f) \Lambda_2, \Lambda_3) \\
 &\quad - \mathcal{g}(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} \Lambda_3) - \frac{1}{2} \mathcal{g}(\Lambda_2, f(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f) \Lambda_3) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\mathcal{g}(f(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f) \Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{g}(\Lambda_2, f(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f) \Lambda_3) \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\mathcal{g}(f(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f) \Lambda_2, \Lambda_3) - \mathcal{g}(f \Lambda_2, (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f) \Lambda_3) \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\mathcal{g}(f(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f) \Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{g}((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f) f \Lambda_2, \Lambda_3) \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\mathcal{g}((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f^2) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f) f \Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{g}((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f) f \Lambda_2, \Lambda_3) \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \mathcal{g}((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f^2) \Lambda_2, \Lambda_3)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $(\tilde{\nabla}_{\Lambda_1} \mathcal{g})(\Lambda_2, \Lambda_3) = -\frac{1}{2} \mathcal{g}((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f^2) \Lambda_2, \Lambda_3) \neq 0$ olup $\tilde{\nabla}$

konneksiyonunun $\mathcal{g}$ ye göre metrik konneksiyon olmadığı görülür.

$\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun burulma tensörü $\tilde{T}$ olup;

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}(\Lambda_1, \Lambda_2) &= \tilde{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 - \tilde{\nabla}_{\Lambda_2} \Lambda_1 - [\Lambda_1, \Lambda_2] \\
 &= \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} \Lambda_2 + \frac{f}{2} (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f) \Lambda_2 - \nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{g}} \Lambda_1 - \frac{f}{2} (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{g}} f) \Lambda_1 - \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} \Lambda_2 + \nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{g}} \Lambda_1 \\
 &= \frac{f}{2} ((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{g}} f) \Lambda_1)
 \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan açıkça görülür ki; $\tilde{T}(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$ olması için gerekli ve yeterli şart $(\nabla^{\mathcal{g}}, f)$ ikilisinin Codazzi çifti olmasıdır.

Bu sonuçlardan hareketle aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.2: $(\mathcal{M}_{2n}, f, \vartheta)$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu üzerinde ϑ pseudo Riemannian metriğine göre metrik konneksiyon olmayan, lineer birinci tip özel konneksiyonu $\tilde{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_2 + \frac{f}{2} (\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} f) \Lambda_2$ şeklinde tanımlansın. Bu konneksiyonun burulmasız olması için gerekli ve yeterli şart (∇^{ϑ}, f) ikilisinin Codazzi çifti olmasıdır.

Tanım 4.2.3: $(\mathcal{M}_{2n}, f, \vartheta)$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu üzerinde $\bar{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_2 + f \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ şeklinde tanımlanan lineer konneksiyonu $\bar{\nabla} \underline{\omega} = 0$ ve $\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = -\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_3, \Lambda_2, \Lambda_1)$ şartlarını sağlıyor ise bu lineer konneksiyona ikinci tip özel konneksiyon denir. Burada Λ_1, Λ_2 ve Λ_3 vektör alanları, $\mathcal{S}$ de (1,2) tipli bir tensör alanıdır.

$\underline{\omega}$ esas 2 –formun $\bar{\nabla}$ konneksiyonuna göre kovaryant türevi alınır;

$$\begin{aligned}
 (\bar{\nabla}_{\Lambda_1} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) &= \Lambda_1 \underline{\omega}(\Lambda_2, \Lambda_3) - \underline{\omega}(\bar{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2, \Lambda_3) - \underline{\omega}(\Lambda_2, \bar{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_3) \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) + \underline{\omega}(\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_2, \Lambda_3) + \underline{\omega}(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_3) \\
 &\quad - \underline{\omega}(\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_2 + f \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) - \underline{\omega}(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_3 + f \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3)) \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) + \underline{\omega}(\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_2, \Lambda_3) + \underline{\omega}(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_3) \\
 &\quad - \underline{\omega}(\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_2, \Lambda_3) - \underline{\omega}(f \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) \\
 &\quad - \underline{\omega}(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \Lambda_3) - \underline{\omega}(\Lambda_2, f \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3)) \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) - \underline{\omega}(f \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) - \underline{\omega}(\Lambda_2, f \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3)) \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) - \vartheta(f^2 \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) - \vartheta(f \Lambda_2, f \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3)) \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) - \vartheta(\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), f^2 \Lambda_3) + \vartheta(\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3), f^2 \Lambda_2) \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) - \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2, f^2 \Lambda_3) + \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3, f^2 \Lambda_2) \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\vartheta} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) - \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Şart dahilinde $\bar{\nabla} \underline{\omega} = 0$ olduğundan

$$(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) - \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2) = 0$$

bulunur. Buradan

$$(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) - \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2) = 0$$

$$(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_3, \Lambda_1) - \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_1) + \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_2, \Lambda_1, \Lambda_3) = 0$$

$$(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_1, \Lambda_2) - \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_3, \Lambda_1, \Lambda_2) + \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_3, \Lambda_2, \Lambda_1) = 0$$

yazılır. Son eşitlikte birinci ve üçüncü denklemin toplamından ikinci denklem çıkarılırsa ve tanımdan hareketle $\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = -\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_3, \Lambda_2, \Lambda_1)$ olduğu da kullanılırsa;

$$\begin{aligned} & (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_3, \Lambda_1) + (\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_1, \Lambda_2) \\ &= -\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2) + \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_1) - \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_2, \Lambda_1, \Lambda_3) \\ & \quad - \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_3, \Lambda_1, \Lambda_2) + \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_3, \Lambda_2, \Lambda_1) \\ & \Rightarrow (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_3, \Lambda_1) + (\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_1, \Lambda_2) - 2\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = 0 \\ & \Rightarrow 2\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) + (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_3, \Lambda_1) \\ & \quad + (\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_1, \Lambda_2) - 2(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_3, \Lambda_1) \end{aligned}$$

olur. Burada

$$d\underline{\omega}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_2, \Lambda_3) + (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_3, \Lambda_1) + (\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$$

yani $d\underline{\omega} = 0$ olup $(\mathcal{M}_{2n}, f, \mathcal{G})$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu, hemen hemen Kähler metrik pseudo f –manifoldu olarak adlandırılır. (Opozda 1983). Buradan

$$\begin{aligned} & \Rightarrow 2\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = -2(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_3, \Lambda_1) \\ & \Rightarrow \mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = -(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} \underline{\omega})(\Lambda_3, \Lambda_1) \\ & \Rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), f^2 \Lambda_3) = -\mathcal{G}((\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_3, \Lambda_1) \\ & \Rightarrow \mathcal{G}(f^2 \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) = \mathcal{G}((\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_1, \Lambda_3) \\ & \Rightarrow f^2 \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2) = (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanını f ile çarpılırsa

$$f\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2) = f(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f)\Lambda_1$$

bulunur. Yani ikinci tip özel konneksiyon $\bar{\nabla}\omega = 0$ ve $\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = -\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_3, \Lambda_2, \Lambda_1)$ şartları dahilinde

$$\bar{\nabla}_{\Lambda_1}\Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}}\Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f)\Lambda_1$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi de $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun $\mathcal{G}$ ye göre metrik konneksiyon olup olmadığına bakalım. Bunun için $\mathcal{G}$ metriğinin $\bar{\nabla}$ konneksiyona göre kovaryant türevi alınır;

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_{\Lambda_1}\mathcal{G})(\Lambda_2, \Lambda_3) &= \Lambda_1\mathcal{G}(\Lambda_2, \Lambda_3) - \mathcal{G}(\bar{\nabla}_{\Lambda_1}\Lambda_2, \Lambda_3) - \mathcal{G}(\Lambda_2, \bar{\nabla}_{\Lambda_1}\Lambda_3) \\ &= (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}}\mathcal{G})(\Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{G}(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}}\Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{G}(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}}\Lambda_3) \\ &\quad - \mathcal{G}(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}}\Lambda_2, \Lambda_3) - \mathcal{G}(f(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f)\Lambda_1, \Lambda_3) - \mathcal{G}(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}}\Lambda_3) \\ &\quad - \mathcal{G}(\Lambda_2, f(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f)\Lambda_1) \\ &= -\mathcal{G}(f(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f)\Lambda_1, \Lambda_3) - \mathcal{G}(\Lambda_2, f(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f)\Lambda_1) \\ &= \mathcal{G}((\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f)\Lambda_1, f\Lambda_3) + \mathcal{G}(f\Lambda_2, (\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f)\Lambda_1) \\ &= -\mathcal{G}(\Lambda_1, (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f)f\Lambda_3) - \mathcal{G}(\Lambda_1, (\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f)f\Lambda_2) \\ &= -\mathcal{G}(\Lambda_1, (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f)f\Lambda_3 + (\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f)f\Lambda_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $(\bar{\nabla}_{\Lambda_1}\mathcal{G})(\Lambda_2, \Lambda_3) = -\mathcal{G}(\Lambda_1, (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f)f\Lambda_3 + (\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f)f\Lambda_2) \neq 0$ olup $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun $\mathcal{G}$ ye göre metrik konneksiyon olmadığı görülür.

$\bar{\nabla}$ konneksiyonunun burulma tensörü $\bar{T}$ olup;

$$\begin{aligned}
 \bar{T}(\Lambda_1, \Lambda_2) &= \bar{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 - \bar{\nabla}_{\Lambda_2} \Lambda_1 - [\Lambda_1, \Lambda_2] \\
 &= \nabla_{\Lambda_1}^g \Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_2}^g f) \Lambda_1 - \nabla_{\Lambda_2}^g \Lambda_1 - f(\nabla_{\Lambda_1}^g f) \Lambda_2 - \nabla_{\Lambda_1}^g \Lambda_2 + \nabla_{\Lambda_2}^g \Lambda_1 \\
 &= f\left((\nabla_{\Lambda_2}^g f) \Lambda_1 - (\nabla_{\Lambda_1}^g f) \Lambda_2\right)
 \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan açıkça görülür ki; $\bar{T}(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$ olması için gerekli ve yeterli şart (∇^g, f) ikilisinin Codazzi çifti olmasıdır.

Bu sonuçlardan hareketle aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.4: $(\mathcal{M}_{2n}, f, g)$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu üzerinde g pseudo Riemannian metriğine göre metrik konneksiyon olmayan, lineer ikinci tip özel konneksiyonu $\bar{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1}^g \Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_2}^g f) \Lambda_1$ şeklinde tanımlansın. Bu konneksiyonun burulmasız olması için gerekli ve yeterli şart (∇^g, f) ikilisinin Codazzi çifti olmasıdır.

Tanım 4.2.5: $(\mathcal{M}_{2n}, f, g)$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu üzerinde $\hat{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1}^g \Lambda_2 + \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ şeklinde tanımlanan lineer konneksiyonu $\hat{\nabla} f^2 = 0$ ve $\hat{\nabla} g = 0$ şartlarını sağlıyor ise bu lineer konneksiyona f^2 –metriği koruyan konneksiyon denir. Burada Λ_1, Λ_2 vektör alanları, $\mathcal{S}$ de (1,2) tipli bir tensör alanıdır.

Sırasıyla $\hat{\nabla} f^2 = 0$ ve $\hat{\nabla} g = 0$ şartlarına bakacak olursak;

$$\begin{aligned}
 (\hat{\nabla}_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 &= \hat{\nabla}_{\Lambda_1} (f^2 \Lambda_2) - f^2 (\hat{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2) \\
 &= \nabla_{\Lambda_1}^g (f^2 \Lambda_2) + \mathcal{S}(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2) - f^2 (\nabla_{\Lambda_1}^g \Lambda_2 + \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2)) \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1}^g f^2) \Lambda_2 + f^2 (\nabla_{\Lambda_1}^g \Lambda_2) + \mathcal{S}(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2) - f^2 (\nabla_{\Lambda_1}^g \Lambda_2) - f^2 \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2) \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1}^g f^2) \Lambda_2 + \mathcal{S}(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2) - f^2 \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 (\hat{\nabla}_{\Lambda_1} g)(\Lambda_2, \Lambda_3) &= \Lambda_1 g(\Lambda_2, \Lambda_3) - g(\hat{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2, \Lambda_3) - g(\Lambda_2, \hat{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_3) \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1}^g g)(\Lambda_2, \Lambda_3) + g(\nabla_{\Lambda_1}^g \Lambda_2, \Lambda_3) + g(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^g \Lambda_3) - g(\nabla_{\Lambda_1}^g \Lambda_2, \Lambda_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\mathcal{G}(\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) - \mathcal{G}(\Lambda_2, \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_3) - \mathcal{G}(\Lambda_2, \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3)) \\
 & = -\mathcal{G}(\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) - \mathcal{G}(\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3), \Lambda_2) \\
 & = -\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) - \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2)
 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Buradan hareketle aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.2.6: $(\mathcal{M}_{2n}, f, \mathcal{G})$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu üzerinde $\widehat{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2 + \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ şeklinde tanımlanan lineer konneksiyonunun f^2 –metriği koruyan konneksiyon olması için gerekli ve yeterli şart $(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_2 + \mathcal{S}(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2) - f^2 \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$ ve $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2) = 0$ olmasıdır. Burada Λ_1, Λ_2 ve Λ_3 vektör alanları, $\mathcal{S}$ de (1,2) tipli bir tensör alanıdır.

İspat: $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$ reel sayılar olsun. (1,2) tipli $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ tensörü de

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2) &= \alpha_1 f^2 (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_2 + \alpha_2 (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_2 + \alpha_3 f^2 (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_1 \\
 &+ \alpha_4 (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_1 + \alpha_5 f^2 (\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_2 + \alpha_6 (\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_2 \\
 &+ \alpha_7 f^2 (\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_1 + \alpha_8 (\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_1
 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

Sırasıyla $\mathcal{S}(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2)$ ve $f^2 \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2) &= \alpha_1 f^2 (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) f^2 \Lambda_2 + \alpha_2 (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) f^2 \Lambda_2 + \alpha_3 f^2 (\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_1 \\
 &+ \alpha_4 (\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_1 + \alpha_5 f^2 (\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) f^2 \Lambda_2 + \alpha_6 (\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) f^2 \Lambda_2 \\
 &+ \alpha_7 f^2 (\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_1 + \alpha_8 (\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_1 \\
 &= \alpha_1 f^2 \left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_2 - f^2 (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\alpha_2 \left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 - f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right) \\
 & +\alpha_3 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 + \alpha_4 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 \\
 & +\alpha_5 f^2 \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 - f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right) \\
 & +\alpha_6 \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 - f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right) \\
 & +\alpha_7 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 + \alpha_8 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

ve

$$\begin{aligned}
 f^2 \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2) & = \alpha_1 f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 + \alpha_2 f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 + \alpha_3 f^2 \left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 \\
 & + \alpha_4 f^2 \left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 + \alpha_5 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 + \alpha_6 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \\
 & + \alpha_7 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 + \alpha_8 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

bulunur.

(4.2) ve (4.3) eşitlikleri $(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_2 + \mathcal{S}(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2) - f^2 \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$ şartında yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
 & \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 + \alpha_1 f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 - \alpha_1 f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 + \alpha_2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \\
 & - \alpha_2 f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 + \alpha_3 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 + \alpha_4 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 \\
 & + \alpha_5 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 - \alpha_5 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 + \alpha_6 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \\
 & - \alpha_6 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 + \alpha_7 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 + \alpha_8 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 \\
 & - \alpha_1 f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 - \alpha_2 f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 - \alpha_3 f^2 \left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 \\
 & - \alpha_4 f^2 \left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 - \alpha_5 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 - \alpha_6 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \\
 & - \alpha_7 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 - \alpha_8 f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 = 0 \\
 \\
 & \Rightarrow (1 + \alpha_2) \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 + (-\alpha_1 - 2 \alpha_2) f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +(\alpha_3 + \alpha_7 - \alpha_7 - \alpha_8) f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 + (\alpha_4 + \alpha_8) \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 \\
 & + (-\alpha_3 - \alpha_4) f^2 \left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1 + (-\alpha_5 - 2 \alpha_6) f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \\
 & + \alpha_6 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 = 0
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4) eşitliğinde katsayılar hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 2, \\
 \alpha_2 &= -1 \\
 \alpha_3 &= -\alpha_4 = \alpha_8 \\
 \alpha_5 &= \alpha_6 = 0 \\
 \alpha_7 &= keyfi
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

şeklinde bulunur.

Ayrıca $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2) = 0$ şartından hareketle de

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{G}((\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2), \Lambda_3) + \mathcal{G}(\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3), \Lambda_2)) = 0 \\
 & \alpha_1 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) + \alpha_2 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) + \alpha_3 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_3 \right) \\
 & + \alpha_4 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_3 \right) + \alpha_5 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) + \alpha_6 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) \\
 & + \alpha_7 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_3 \right) + \alpha_8 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_3 \right) \\
 & + \alpha_1 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3, \Lambda_2 \right) + \alpha_2 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3, \Lambda_2 \right) + \alpha_3 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_2 \right) \\
 & + \alpha_4 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_2 \right) + \alpha_5 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3, \Lambda_2 \right) + \alpha_6 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3, \Lambda_2 \right) \\
 & + \alpha_7 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_2 \right) + \alpha_8 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_2 \right) = 0
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) denkleminin katsayıları sabitlere göre sırasıyla;

α_1 'in

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) + \alpha_1 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3, \Lambda_2 \right) \\
 &= \alpha_1 \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) f^2 \Lambda_3 \right) + \alpha_1 \mathcal{G} \left(\Lambda_2, f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right) \\
 &= \alpha_1 \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) f^2 \Lambda_3 + f^2 \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right) \\
 &= \alpha_1 \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 f^2 \right) \Lambda_3 \right) \\
 &= \alpha_1 \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right),
 \end{aligned}$$

α_2 'nin

$$\begin{aligned}
 & \alpha_2 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) + \alpha_2 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3, \Lambda_2 \right) \\
 &= \alpha_2 \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right) + \alpha_2 \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right) \\
 &= 2 \alpha_2 \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right),
 \end{aligned}$$

α_3 'ün

$$\begin{aligned}
 & \alpha_3 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_3 \right) + \alpha_3 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_2 \right) \\
 &= \alpha_3 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) f^2 \Lambda_3 \right) + \alpha_3 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) f^2 \Lambda_2 \right) \\
 &= \alpha_3 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) f^2 \Lambda_3 + \left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) f^2 \Lambda_2 \right) \\
 &= \alpha_3 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 - f^2 \left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 + \left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 - f^2 \left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right) \\
 &= \alpha_3 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, (I - f^2) \left(\left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 + \left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right) \right),
 \end{aligned}$$

α_4 'ün

$$\begin{aligned}
 & \alpha_4 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_3 \right) + \alpha_4 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_2 \right) \\
 &= \alpha_4 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right) + \alpha_4 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right)
 \end{aligned}$$

$$= \alpha_4 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 + \left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right),$$

α_5 , in

$$\begin{aligned} & \alpha_5 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) + \alpha_5 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3, \Lambda_2 \right) \\ &= \alpha_5 \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) f^2 \Lambda_3 \right) + \alpha_5 \mathcal{G} \left(\Lambda_2, f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right) \\ &= \alpha_5 \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) f^2 \Lambda_3 + f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right) \\ &= \alpha_5 \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 f^2 \right) \Lambda_3 \right) \\ &= \alpha_5 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right), \end{aligned}$$

α_6 , nin

$$\begin{aligned} & \alpha_6 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) + \alpha_6 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3, \Lambda_2 \right) \\ &= \alpha_6 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) + \alpha_6 \mathcal{G} \left(\Lambda_3, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right) \\ &= \alpha_6 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) + \alpha_6 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) \\ &= 2 \alpha_6 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right), \end{aligned}$$

α_7 , nin

$$\begin{aligned} & \alpha_7 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_3 \right) + \alpha_7 \mathcal{G} \left(f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_2 \right) \\ &= \alpha_7 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) f^2 \Lambda_3 \right) + \alpha_7 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) f^2 \Lambda_2 \right) \\ &= \alpha_7 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) f^2 \Lambda_3 + \left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) f^2 \Lambda_2 \right) \\ &= \alpha_7 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 - f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 + \left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 - f^2 \left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right) \\ &= \alpha_7 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, (I - f^2) \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 + \left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right) \right), \end{aligned}$$

α_8 'in

$$\begin{aligned}
 & \alpha_8 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_3 \right) + \alpha_8 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_1, \Lambda_2 \right) \\
 &= \alpha_8 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right) + \alpha_8 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right) \\
 &= \alpha_8 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 + \left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right)
 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bu katsayılardan hareketle (4.6) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right) + 2 \alpha_2 \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right) \\
 &+ \alpha_3 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, (I - f^2) \left(\left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 + \left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right) \right) \\
 &+ \alpha_4 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 + \left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right) + \alpha_5 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) \\
 &+ 2 \alpha_6 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) + \alpha_7 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, (I - f^2) \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 + \left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right) \right) \\
 &+ \alpha_8 \mathcal{G} \left(\Lambda_1, \left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 + \left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2 \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_1 + 2 \alpha_2) \mathcal{G} \left(\Lambda_2, \left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 \right) + (\alpha_5 + 2 \alpha_6) \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_3 \right) \\
 &+ (\alpha_3 + \alpha_4) \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 + \left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_1 \right) \\
 &- \alpha_3 f^2 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 + \left(\nabla_{\Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_1 \right) \\
 &+ (\alpha_7 + \alpha_8) \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 + \left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_1 \right) \\
 &- \alpha_7 f^2 \mathcal{G} \left(\left(\nabla_{f^2 \Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_3 + \left(\nabla_{f^2 \Lambda_3}^{\mathcal{G}} f^2 \right) \Lambda_2, \Lambda_1 \right) = 0
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\alpha_1 + 2 \alpha_2 = 0,$$

$$\alpha_5 + 2 \alpha_6 = 0,$$

$$\alpha_3 + \alpha_4 = 0,$$

$$\alpha_3 = 0,$$

$$\alpha_7 + \alpha_8 = 0,$$

$$\alpha_7 = 0.$$

bulunur. (4.5) ile verilen eşitlikler de dikkate alındığında

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0$$

elde edilir.

Böylelikle Teorem 4.2.6. daki $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ tensörü verilen şartlar dahilinde

$$\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2) = 2f^2(\nabla_{\Lambda_1}^g f^2)\Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_1}^g f^2)\Lambda_2$$

şeklinde olur. Burada katsayıların hesabındaki I birim tensor alanıdır.

Diğer taraftan $\widehat{\nabla}$, f^2 –metriği koruyan konneksiyon da verilen şartlar dahilinde

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 &= \nabla_{\Lambda_1}^g \Lambda_2 + 2f^2(\nabla_{\Lambda_1}^g f^2)\Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_1}^g f^2)\Lambda_2 \\ &= \nabla_{\Lambda_1}^g \Lambda_2 + 2f^2(\nabla_{\Lambda_1}^g f f)\Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_1}^g f f)\Lambda_2 \\ &= \nabla_{\Lambda_1}^g \Lambda_2 + 2f^2\left((\nabla_{\Lambda_1}^g f)f\Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_1}^g f)\Lambda_2\right) \\ &\quad - \left((\nabla_{\Lambda_1}^g f)f\Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_1}^g f)\Lambda_2\right) \\ &= \nabla_{\Lambda_1}^g \Lambda_2 + 2f^2(\nabla_{\Lambda_1}^g f)f\Lambda_2 + 2f(\nabla_{\Lambda_1}^g f)\Lambda_2 \\ &\quad - (\nabla_{\Lambda_1}^g f)f\Lambda_2 - f(\nabla_{\Lambda_1}^g f)\Lambda_2 \end{aligned}$$

olup

$\widehat{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2 + 2f^2 (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) f \Lambda_2 + f (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) f \Lambda_2$
 şeklindedir.

Böylece ispat tamamlanır.

$\widehat{\nabla}$ konneksiyonunun burulma tensörü $\widehat{T}$ olup;

$$\begin{aligned}
 \widehat{T}(\Lambda_1, \Lambda_2) &= \widehat{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 - \widehat{\nabla}_{\Lambda_2} \Lambda_1 - [\Lambda_1, \Lambda_2] \\
 &= \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} \Lambda_2 + 2f^2 (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) f \Lambda_2 + f (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) f \Lambda_2 \\
 &\quad - \nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} \Lambda_1 - 2f^2 (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) f \Lambda_1 - f (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_1 + (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) f \Lambda_1 - [\Lambda_1, \Lambda_2] \\
 &= 2f^2 \left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) f \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) f \Lambda_1 \right) + f \left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_1 \right) \\
 &\quad + (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) f \Lambda_1 - (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) f \Lambda_2 \\
 &= (2f^2 - I) (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) f \Lambda_2 - (2f^2 - I) (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) f \Lambda_1 \\
 &\quad + f \left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_1 \right) \\
 &= (2f^2 - I) \left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) f \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) f \Lambda_1 \right) + f \left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_1 \right) \\
 &= (2f^2 - I) \left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_2 - f (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_1 - f (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_1 \right) \\
 &\quad + f \left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_1 \right) \\
 &= (2f^2 - I) \left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_1 \right) \\
 &\quad + (I - 2f^2) \left(f \left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_1 \right) \right) + f \left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_1 \right) \\
 &= (2f^2 - I) \left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_1 \right) \\
 &\quad + ((I - 2f^2)f + f) \left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f) \Lambda_1 \right) \\
 &= (2f^2 - I) \left((\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{G}} f^2) \Lambda_1 \right)
 \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan açıkça görülür ki; $\widehat{T}(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$ olması için gerekli ve yeterli şart $(\nabla^{\mathcal{G}}, f^2)$ ikilisinin Codazzi çifti olmasıdır. Burada I birim tensor alanıdır.

Bu sonuçlardan hareketle aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.7: $(\mathcal{M}_{2n}, f, \varphi)$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu üzerinde f^2 –metriği koruyan konneksiyon $\widehat{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1}^{\varphi} \Lambda_2 + 2f^2(\nabla_{\Lambda_1}^{\varphi} f) f \Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_1}^{\varphi} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_1}^{\varphi} f) f \Lambda_2$ şeklinde tanımlansın. Bu konneksiyonun burulmasız olması için gerekli ve yeterli şart (∇^{φ}, f^2) ikilisinin Codazzi çifti olmasıdır.

Tanım 4.2.8: $(\mathcal{M}_{2n}, f, \varphi)$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu üzerinde keyfî ∇ konneksiyonuna bağlı bir $\overline{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1} \Lambda_2 + 2f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_1} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2$ şeklinde yeni bir lineer konneksiyon tanımlayalım. Bu konneksiyon $\overline{\nabla} f^2 = 0$ şartını sağlıyor ise bu lineer konneksiyona f^2 – koruyan konneksiyon denir. Burada Λ_1, Λ_2 ve Λ_3 vektör alanlarıdır.

$\overline{\nabla} f^2$ kovaryant türevi hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
 (\overline{\nabla}_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 &= (\overline{\nabla}_{\Lambda_1} f^2 \Lambda_2) - f^2(\overline{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2) \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1} f^2 \Lambda_2) + 2f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f f^2 \Lambda_2 \\
 &\quad + f(\nabla_{\Lambda_1} f) f^2 \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_1} f) f f^2 \Lambda_2 \\
 &\quad - f^2(\nabla_{\Lambda_1} \Lambda_2 + 2f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_1} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2) \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1} f^2 \Lambda_2) + 2f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_1} f) f^2 \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 \\
 &\quad - f^2(\nabla_{\Lambda_1} \Lambda_2) - 2f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 - f(\nabla_{\Lambda_1} f) \Lambda_2 + f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + f^2(\nabla_{\Lambda_1} \Lambda_2) + 2f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_1} f) f^2 \Lambda_2 \\
 &\quad - (\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 - f^2(\nabla_{\Lambda_1} \Lambda_2) - 2f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 \\
 &\quad - f(\nabla_{\Lambda_1} f) \Lambda_2 + f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 \\
 &= (\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_1} f) \Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_1} f) f^2 \Lambda_2 + f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 \\
 &\quad - (\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 - f(\nabla_{\Lambda_1} f) \Lambda_2 \\
 &= f(\nabla_{\Lambda_1} f) f^2 \Lambda_2 + f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 \\
 &= f((\nabla_{\Lambda_1} f) \Lambda_2 - f(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 - f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) \Lambda_2) + f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 \\
 &= f(\nabla_{\Lambda_1} f) \Lambda_2 - f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 - f(\nabla_{\Lambda_1} f) \Lambda_2 + f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Bu hesaplamadan hareketle aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.2.9: $(\mathcal{M}_{2n}, f, g)$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu üzerinde tanımlanan $\bar{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1} \Lambda_2 + 2f^2(\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_1} f) \Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_1} f) f \Lambda_2$ konneksiyonu f^2 –koruyan konneksiyondur.

$(\mathcal{M}_{2n}, f, g)$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu üzerinde $\bar{\nabla}$, f^2 –koruyan konneksiyonuna bağlı yeni bir $\bar{\nabla}^0$ lineer konneksiyonu $\bar{\nabla}^0_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \bar{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 + \hbar(\Lambda_1, \Lambda_2)$ şeklinde tanımlansın. Burada $\hbar, (1,2)$ tipli bir tensör olsun. $\bar{\nabla}_{\Lambda_1} f^2 = 0$ şartı kullanılarak;

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}^0_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 &= (\bar{\nabla}^0_{\Lambda_1} f^2 \Lambda_2) - f^2(\bar{\nabla}^0_{\Lambda_1} \Lambda_2) \\ &= (\bar{\nabla}_{\Lambda_1} f^2 \Lambda_2) + \hbar(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2) - f^2(\bar{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 + \hbar(\Lambda_1, \Lambda_2)) \\ &= (\bar{\nabla}_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + f^2 \bar{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 + \hbar(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2) \\ &\quad - f^2 \bar{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 - f^2 \hbar(\Lambda_1, \Lambda_2) \\ &= \hbar(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2) - f^2 \hbar(\Lambda_1, \Lambda_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan hareketle aşağıdaki önerme yazılır.

Önerme 4.2.10: $(\mathcal{M}_{2n}, f, g)$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu üzerinde $\bar{\nabla}$, f^2 – koruyan konneksiyonuna bağlı olarak tanımlanan $\bar{\nabla}^0$ lineer konneksiyonunun da f^2 – koruyan konneksiyon olması için gerekli ve yeterli şart $\hbar(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2) = f^2 \hbar(\Lambda_1, \Lambda_2)$ olmasıdır.

$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8\}$ reel sayılar olsun. $(1, 2)$ tipli $\hbar(\Lambda_1, \Lambda_2)$ tensörü de

$$\begin{aligned}\hbar(\Lambda_1, \Lambda_2) &= \mathfrak{z}_1 f^2(\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + \mathfrak{z}_2 (\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + \mathfrak{z}_3 f^2(\nabla_{\Lambda_2} f^2) \Lambda_1 \\ &+ \mathfrak{z}_4 (\nabla_{\Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \mathfrak{z}_5 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + \mathfrak{z}_6 (\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 \\ &+ \mathfrak{z}_7 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \mathfrak{z}_8 (\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $\hbar(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2)$ ve $f^2 \hbar(\Lambda_1, \Lambda_2)$ sırasıyla

$$\begin{aligned}\hbar(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2) &= \mathfrak{z}_1 f^2(\nabla_{\Lambda_1} f^2) f^2 \Lambda_2 + \mathfrak{z}_2 (\nabla_{\Lambda_1} f^2) f^2 \Lambda_2 + \mathfrak{z}_3 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 \\ &+ \mathfrak{z}_4 (\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \mathfrak{z}_5 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) f^2 \Lambda_2 + \mathfrak{z}_6 (\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) f^2 \Lambda_2 \\ &+ \mathfrak{z}_7 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \mathfrak{z}_8 (\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 \\ &= \mathfrak{z}_1 f^2 \left((\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 - f^2(\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 \right) \\ &+ \mathfrak{z}_2 \left((\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 - f^2(\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 \right) \\ &+ \mathfrak{z}_3 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \mathfrak{z}_4 (\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 \\ &+ \mathfrak{z}_5 f^2 \left((\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 - f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 \right) \\ &+ \mathfrak{z}_6 \left((\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 - f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 \right) \\ &+ \mathfrak{z}_7 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \mathfrak{z}_8 (\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}f^2 \hbar(\Lambda_1, \Lambda_2) &= \mathfrak{z}_1 f^2(\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + \mathfrak{z}_2 f^2(\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + \mathfrak{z}_3 f^2(\nabla_{\Lambda_2} f^2) \Lambda_1 \\ &+ \mathfrak{z}_4 f^2(\nabla_{\Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \mathfrak{z}_5 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + \mathfrak{z}_6 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 \\ &+ \mathfrak{z}_7 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \mathfrak{z}_8 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1\end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}\hbar(\Lambda_1, f^2 \Lambda_2) &= f^2 \hbar(\Lambda_1, \Lambda_2) \\ &\Rightarrow \mathfrak{z}_1 f^2(\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 - \mathfrak{z}_1 f^2(\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + \mathfrak{z}_2 (\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 - \mathfrak{z}_2 f^2(\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 \\ &+ \mathfrak{z}_3 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \mathfrak{z}_4 (\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 \\ &+ \mathfrak{z}_5 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 - \mathfrak{z}_5 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + \mathfrak{z}_6 (\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 - \mathfrak{z}_6 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 \\ &+ \mathfrak{z}_7 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \mathfrak{z}_8 (\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathfrak{z}_1 f^2(\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + \mathfrak{z}_2 f^2(\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + \mathfrak{z}_3 f^2(\nabla_{\Lambda_2} f^2) \Lambda_1 \\
 &+ \mathfrak{z}_4 f^2(\nabla_{\Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \mathfrak{z}_5 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + \mathfrak{z}_6 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 \\
 &+ \mathfrak{z}_7 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \mathfrak{z}_8 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \mathfrak{z}_2 (\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 - \mathfrak{z}_2 f^2(\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + (\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_7) f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 \\
 &+ (\mathfrak{z}_4 + \mathfrak{z}_8) (\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \mathfrak{z}_6 (\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 - \mathfrak{z}_6 f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 \\
 &= (\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2) f^2(\nabla_{\Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + (\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_4) f^2(\nabla_{\Lambda_2} f^2) \Lambda_1 \\
 &+ (\mathfrak{z}_5 + \mathfrak{z}_6) f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_1} f^2) \Lambda_2 + (\mathfrak{z}_7 + \mathfrak{z}_8) f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 \\
 &\Rightarrow \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_5 = \mathfrak{z}_6 = 0, \quad \mathfrak{z}_3 = -\mathfrak{z}_4 = \mathfrak{z}_8, \quad \mathfrak{z}_7 = \text{keyfi}
 \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathfrak{z}_3 = \dot{\alpha}$ ve $\mathfrak{z}_7 = \dot{\beta}$ olarak alınırsa

$$\hbar(\Lambda_1, \Lambda_2) = \dot{\alpha} f^2(\nabla_{\Lambda_2} f^2) \Lambda_1 - \dot{\alpha} (\nabla_{\Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \dot{\beta} f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \dot{\alpha} (\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1$$

şeklinde olur.

Bu sonuçlardan hareketle aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.11: $(\mathcal{M}_{2n}, f, \varphi)$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f – manifoldu üzerinde $\bar{\nabla}$, f^2 – koruyan konneksiyonuna bağlı yeni bir $\bar{\nabla}^0$ lineer konneksiyonu $\bar{\nabla}^0_{\Lambda_1} \Lambda_2 = \bar{\nabla}_{\Lambda_1} \Lambda_2 + \hbar(\Lambda_1, \Lambda_2)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda (1,2) tipli $\hbar$ tensörü $\hbar(\Lambda_1, \Lambda_2) = \dot{\alpha} f^2(\nabla_{\Lambda_2} f^2) \Lambda_1 - \dot{\alpha} (\nabla_{\Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \dot{\beta} f^2(\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1 + \dot{\alpha} (\nabla_{f^2 \Lambda_2} f^2) \Lambda_1$ şeklindedir.

4.3. Walker 4 – Manifoldları Üzerinde Hemen Hemen Hermitian Metrik Pseudo f – Yapılar

Tanım 4.3.1: $(\mathcal{M}_4, \varphi)$ ikilisi 4 – boyutlu $\mathcal{M}_4$ manifoldu üzerinde bir Walker manifoldu olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan f yapısına $(\mathcal{M}_4, \varphi)$ Walker manifoldu üzerinde hemen hemen Hermitian metrik pseudo f – yapı denir.

i. $f^3 = f$,

ii. $\mathcal{G}(f\Lambda_1, \Lambda_2) = -\mathcal{G}(\Lambda_1, f\Lambda_2)$,

burada Λ_1, Λ_2 vektör alanlarıdır.

f tensörünün $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t\}$ doğal çatısına göre (x, y, z, t) lokal koordinatlarında bileşenleri

$$f = (f_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & a(x, y, z, t) & 0 & 1 - a(x, y, z, t) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 - \frac{1}{a(x, y, z, t)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

şeklindedir. Burada $a(x, y, z, t)$ fonksiyonu (x, y, z, t) koordinatlarına bağlı keyfi düzgün bir fonksiyondur ve bu şekilde tanımlanan f tensörü tanımdaki $f^3 = f$ şartını sağlar.

4 – boyutlu $\mathcal{M}_4$ manifoldu üzerinde f yapısı için $\mathcal{G}(f\Lambda_1, \Lambda_2) = -\mathcal{G}(\Lambda_1, f\Lambda_2)$ şartını sağlayan $\mathcal{G}$ metriğinin de (x, y, z, t) lokal koordinatlarında bileşenleri

$$\mathcal{G}^W = (\mathcal{G}_{ij}^W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(x, y, z, t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a(x, y, z, t)} - 2 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

şeklindedir. Kanonik formdaki bu $\mathcal{G}^W$ metriği Walker metriğinin özelliklerini sağlar.

Dolayısıyla f yapısı ve $\mathcal{G}^W$ metriğinin bu ilişkisinden hareketle bir hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –manifoldu tanımlanabilir. Hatta $(\mathcal{M}_4, f, \mathcal{G}^W)$ üçlüsü aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $\mathcal{M}_4$ Walker manifoldu nötral $\mathcal{G}^W$ metriği ile donatılmıştır.

- f yapısı hemen hemen Hermitian metrik f –yapısı olma şartlarını sağlar.
- f ve ϕ^W nin birbiri ile uyumlu bu özel formları temel geometrik özellikleri korur.

Walker 4 –manifoldlarında hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –yapılarının integrallenebilme şartları önemli yer tutmaktadır. Bu integrallenebilme şartı

$$(N_f)^i_{jk} = f_j^m \partial_m f_k^i - f_k^m \partial_m f_j^i - f_m^i \partial_j f_k^m + f_m^i \partial_k f_j^m = 0 \quad (4.9)$$

şeklindedir.

(4.7) eşitliği ile verilen f yapısının türevleri alınıp (4.9) daki integrallenebilme şartında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (N_f)^z_{ty} &= \frac{-aa_x + a_z}{a^2}, \\ (N_f)^x_{yt} &= \frac{-aa_x + a_z}{a} = -(N_f)^x_{ty}, \\ (N_f)^z_{yt} &= \frac{aa_x - a_z}{a^2}, \\ (N_f)^z_{tx} &= \frac{-a_y - a_t}{a^2} = -(N_f)^z_{xt}, \\ (N_f)^y_{xy} &= -a_x = (N_f)^t_{xy} = (N_f)^y_{tx} = (N_f)^t_{tx} \\ &= -(N_f)^y_{xt} = -(N_f)^t_{xt} = -(N_f)^y_{yx} = -(N_f)^t_{yx}, \\ (N_f)^y_{zy} &= -a_z = (N_f)^t_{zy} = (N_f)^y_{tz} = (N_f)^t_{tz} \\ &= -(N_f)^y_{yz} = -(N_f)^t_{yz} = -(N_f)^y_{zt} = -(N_f)^t_{zt}, \\ (N_f)^x_{xt} &= -a_y - a_t = (N_f)^x_{yx} = (N_f)^y_{ty} = (N_f)^t_{ty} \\ &= -(N_f)^x_{xy} = -(N_f)^y_{yt} = -(N_f)^t_{yt} = -(N_f)^x_{tx} \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

Bu denklemlerden elde edilen integrallenebilme şartı aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 4.3.2: Walker 4 –manifoldlarında hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –yapısının integrallenebilmesi için gerekli ve yeterli şart

$$a(x, y, z, t) = F(p)$$

olmasıdır. Burada $p = t - y$ olup F , p ye bağlı bir fonksiyondur.

(4.8) eşitliği ile verilen $\mathcal{G}^W$ Walker metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ∇^W şeklinde olmak üzere bu konneksiyonun katsayıları da $(\Gamma^W)_{ij}^k$ olsun. $(\Gamma^W)_{ij}^k$ konneksiyon katsayıları

$$\begin{aligned} (\Gamma^W)_{tt}^y &= \frac{(-1+2a)a_y - aa_t}{2a^3}, \\ (\Gamma^W)_{tt}^x &= \frac{-aa_x + a_z}{2a^2}, \\ (\Gamma^W)_{xt}^y &= \frac{-a_x}{2a^2} = (\Gamma^W)_{tx}^y = -(\Gamma^W)_{tt}^z, \\ (\Gamma^W)_{yt}^y &= \frac{-a_y}{2a^2} = (\Gamma^W)_{ty}^y = -(\Gamma^W)_{tt}^t, \\ (\Gamma^W)_{zt}^y &= \frac{-a_z}{2a^2} = (\Gamma^W)_{tz}^y, \\ (\Gamma^W)_{zt}^x &= \frac{a_t}{2} = (\Gamma^W)_{tz}^x, \\ (\Gamma^W)_{zz}^z &= -\frac{a_x}{2} = -(\Gamma^W)_{xz}^x = -(\Gamma^W)_{zx}^x, \\ (\Gamma^W)_{zz}^t &= -\frac{a_y}{2} = -(\Gamma^W)_{yz}^x = -(\Gamma^W)_{zy}^x, \\ (\Gamma^W)_{zz}^x &= \frac{aa_x}{2} + \frac{a_z}{2}, \\ (\Gamma^W)_{zz}^y &= -\frac{(-1+2a)a_y}{2a} - \frac{a_t}{2}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

şeklindedir.

Tanım 4.3.3: Walker 4 –manifoldlarında hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –yapı verilmiş olsun. Böyle bir manifoldda f –yapının kovaryant türevi için

$$(\nabla^W f)_{ij}^k = \nabla^W_i f_j^k = 0 \tag{4.11}$$

şartı verilsin. Eğer (4.11) şartı sağlanıyor ise bu durumda hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –yapı integrallenebilirdir ve $(\mathcal{M}_4, f, g^W)$ manifoldu da Hermitian metrik pseudo f –Kähler Walker manifoldu olarak adlandırılır.

(4.7) eşitliği ile verilen f nin lokal bileşenleri (4.11) denkleminde yerine yazılıp (4.10) da verilen konneksiyon katsayıları da kullanılarak gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
 \nabla^W_t f_t^y &= \frac{(aa_x) - a_z(a - \frac{1}{2})}{a^3} = 0, \\
 \nabla^W_z f_t^z &= \frac{(-a^2 + a)a_x + a_z}{2a^2} = 0, \\
 \nabla^W_t f_x^y &= \frac{(a-1)a_y - aa_t}{2a^3} = 0, \\
 \nabla^W_z f_y^y &= \frac{(a-1)a_y + aa_t}{2a} = 0, \\
 \nabla^W_t f_y^y &= \frac{-aa_x + a_z}{2a^2} = -\nabla^W_t f_t^t = 0, \\
 \nabla^W_t f_t^x &= \frac{-aa_t - a_y}{2a} = 0, \\
 \nabla^W_t f_t^z &= \frac{a_y + a_t}{2a^2} = 0, \\
 \nabla^W_x f_x^y &= -\frac{a_x}{2a^2} = -\nabla^W_x f_t^z = 0, \\
 \nabla^W_y f_x^y &= \frac{-a_y}{2a^2} = \nabla^W_t f_y^z = -\nabla^W_t f_x^t = -\nabla^W_y f_t^z = 0, \\
 \nabla^W_t f_z^z &= \frac{-a_z}{2a^2} = -\nabla^W_t f_x^x = 0, \\
 \nabla^W_t f_z^x &= \frac{a_z}{2a} = 0, \\
 \nabla^W_z f_z^x &= \frac{a(a_y + a_t)}{2} = 0, \\
 \nabla^W_z f_t^y &= -\frac{(a - \frac{1}{2})((a-1)a_y) + aa_t}{a^2} = 0, \\
 \nabla^W_t f_z^y &= -\frac{a_t}{2} = \nabla^W_t f_z^t = 0, \\
 \nabla^W_z f_x^t &= -\frac{a_x}{2} = \nabla^W_x f_z^y = \nabla^W_x f_z^t = \nabla^W_x f_t^x = -\nabla^W_x f_y^x = -\nabla^W_z f_y^z = 0, \\
 \nabla^W_y f_z^y &= -\frac{a_y}{2} = \nabla^W_y f_z^t = \nabla^W_y f_t^x = -\nabla^W_y f_y^x = 0, \\
 \nabla^W_z f_t^x &= -\frac{a_z}{2} = -\nabla^W_z f_y^x = 0, \\
 \nabla^W_z f_z^y &= -\frac{aa_x}{2} - \frac{a_z}{2} = \nabla^W_z f_z^t = 0, \\
 \nabla^W_z f_t^t &= -\frac{a_t}{2} - \frac{(a-1)a_y}{2a} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\nabla^W_t f^x_y = \frac{a_t}{2} + \frac{a_y}{2a} = 0,$$

$$\nabla^W_z f^y_x = -\frac{a_x}{2} - \frac{a_z}{2a^2} = 0,$$

$$\nabla^W_z f^z_z = -\frac{a_y}{2} - \frac{a_t}{2} = -\nabla^W_z f^x_x = 0,$$

bulunur.

Bu hesaplamalardan hareketle aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.3.4: $(\mathcal{M}_4, f, \mathcal{G}^W)$ üçlününün bir Hermitian metrik pseudo f –Kähler Walker manifoldu olması için gerekli ve yeterli şart

$$a(x, y, z, t) = C_1$$

olmasıdır. Burada C_1 keyfi bir sabittir.

Hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –yapıya bağlı $(\mathcal{M}_4, f, \mathcal{G}^W)$ Walker 4 –manifoldunda Riemannian eğrilik tensörü X, Y vektör alanları olmak üzere

$R^W(\Lambda_1, \Lambda_2) = [\nabla^W_{\Lambda_1}, \nabla^W_{\Lambda_2}] - \nabla^W_{[\Lambda_1, \Lambda_2]}$ şeklindedir. $\mathcal{G}^W$ Walker metriğinin eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri de

$$R^W_{xtxt} = \frac{-\frac{aa_{xx}}{2} + (a_x)^2}{a^3} = R^W_{txtx},$$

$$R^W_{xtyt} = \frac{-\frac{aa_{xy}}{2} + a_y a_x}{a^3} = R^W_{ytxx} = R^W_{txty} = R^W_{tytx},$$

$$R^W_{ytyt} = \frac{-\frac{aa_{yy}}{2} + (a_y)^2}{a^3} = R^W_{tyty},$$

$$R^W_{xttx} = \frac{\frac{aa_{xx}}{2} - 2(a_x)^2}{2a^3} = R^W_{txxt},$$

$$R^W_{xtty} = \frac{\frac{aa_{xy}}{2} - 2a_x a_y}{2a^3} = R^W_{ytxx} = R^W_{txyt} = R^W_{tyxt},$$

$$R^W_{xzxt} = \frac{-2(a)^2 a_{tx} - a_x a_y}{4a^2} = -R^W_{zzxt},$$

$$R^W_{yzzt} = \frac{-2(a)^2 a_{ty} - (a_y)^2}{4a^2} = -R^W_{zyzt},$$

$$R^W_{ytty} = \frac{\frac{aa_{yy}}{2} - 2(a_y)^2}{2a^3} = R^W_{tyyt},$$

$$\begin{aligned}
 R_{yztz}^W &= \frac{-2aa_{yz}+a_y(aa_x+4a_z)}{4a^3} = R_{ztyt}^W = R_{tytz}^W = R_{tzyt}^W \\
 &= -R_{yttz}^W = -R_{ztty}^W = -R_{tyzt}^W = -R_{tzyt}^W, \\
 R_{xttz}^W &= \frac{-a(a_x)^2+2aa_{xz}-4a_xa_z}{4a^3} = R_{zttx}^W = R_{txzt}^W = R_{tzzt}^W \\
 &= -R_{xtzt}^W = -R_{ztxt}^W = -R_{txtz}^W = -R_{tztz}^W, \\
 R_{zttz}^W &= \frac{-2a^3a_{tt}+2aa_{zz}+(-1+2a)(a_y)^2-a^2(a_x)^2-4(a_z)^2}{4a^3} = R_{tzzt}^W \\
 &= -R_{ztzt}^W = -R_{tztz}^W, \\
 R_{xzzx}^W &= -\frac{a_{xx}}{2} = R_{zxzx}^W = -R_{xzzx}^W = -R_{zxzx}^W, \\
 R_{xzzz}^W &= -\frac{a_{xy}}{2} = R_{yzzx}^W = R_{zxzy}^W = R_{zyxz}^W = -R_{xzyz}^W = -R_{yzzx}^W = -R_{zxzy}^W = -R_{zyxz}^W, \\
 R_{yzzz}^W &= -\frac{a_{yy}}{2} = R_{zyyz}^W = -R_{yzyz}^W = -R_{zyyz}^W, \\
 R_{zxtz}^W &= -\frac{a_{tx}}{2} - \frac{a_xa_y}{4a^2} = R_{ztzx}^W = R_{tzzx}^W = -R_{xztz}^W = -R_{ztzx}^W = -R_{tzzx}^W, \\
 R_{zytz}^W &= -\frac{a_{ty}}{2} - \frac{(a_y)^2}{4a^2} = R_{ztzy}^W = R_{tzzz}^W = -R_{yztz}^W = -R_{ztzy}^W = -R_{tzzz}^W,
 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bu hesaplamalardan hareketle aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.3.5: Hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –yapıya bağlı $(\mathcal{M}_4, f, \mathcal{G}^W)$ Walker 4 –manifoldunun Riemannian eğrilik tensörünün sıfır olması için gerekli ve yeterli şart

$$a(x, y, z, t) = -\frac{1}{zC_1 + C_2}$$

olmasıdır. Burada C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir.

$(\mathcal{M}_4, f, \mathcal{G}^W)$ Walker 4 –manifoldunda Ricci tensörü ve skaler eğrilik sırasıyla Ric^W ve $\mathfrak{s}^W$ ile gösterilsin. Ricci tensörü $Ric^W = Tr \mathcal{G}^W (\Lambda_3 \rightarrow R^W(\Lambda_1, \Lambda_3) \Lambda_2)$ şeklinde ve skaler eğrilik de $\mathfrak{s}^W = Tr \mathcal{G}^W Ric^W$ şeklinde tanımlı olup burada $Tr \mathcal{G}^W$, $\mathcal{G}^W$ Walker metriğinin izidir. Bu tanımlardan hareketle Ric^W Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri ve $\mathfrak{s}^W$ skaler eğriliği sırasıyla

$$(Ric^W)_{xt} = \frac{-\frac{aa_{xy}}{2} + a_x a_y}{a^3} = (Ric^W)_{tx},$$

$$(Ric^W)_{yt} = \frac{-\frac{aa_{yy}}{2} + (a_y)^2}{a^3} = (Ric^W)_{ty},$$

$$(Ric^W)_{zt} = \frac{a^3 a_{tx} - aa_{yz} + a_y (aa_x + 2a_z)}{2a^3} = (Ric^W)_{tz},$$

$$(Ric^W)_{zz} = \frac{(a - 2a^2)a_{yy} + a^3 a_{xx} - 2a^2 a_{ty} - (a_y)^2}{2a^2},$$

$$(Ric^W)_{tt} = \frac{(2a^2 - a)a_{yy} - a^3 a_{xx} + 2a^2 a_{xz} + a^2 (a_x)^2 - 4aa_x a_z - 4\left(a - \frac{1}{2}\right)(a_y)^2}{2a^4},$$

$$(Ric^W)_{xz} = \frac{a_{xx}}{2} = (Ric^W)_{zx},$$

$$(Ric^W)_{yz} = \frac{a_{xy}}{2} = (Ric^W)_{zy},$$

ve

$$s^W = a_{xx} + \frac{-aa_{yy} + 2(a_y)^2}{a^3}$$

şeklindedir.

Bu hesaplamalardan hareketle aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.3.6: Hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –yapıya bağlı $(\mathcal{M}_4, f, g^W)$ Walker 4 –manifoldunun sıfır sabit eğrilikli uzay olması için gerekli ve yeterli şart $a(x, y, z, t)$ fonksiyonunun

$$a(x, y, z, t) = \frac{C_3 + x + y + z}{2} + \frac{\sqrt{(C_3 + x + y + z)^2 - 4}}{2}$$

olmasıdır. Burada C_3 keyfi bir sabittir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde sunulan bu tez çalışmasında elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak; $\mathcal{M}_{2n}$ diferensiyellenebilir bir manifold, f , $f^3 - f = 0$ şartını sağlayan bir hemen hemen pseudo f -yapı ve $\mathcal{g}$ de $\mathcal{g}(f\Lambda_1, \Lambda_2) = -\mathcal{g}(\Lambda_1, f\Lambda_2)$ şartını sağlayan pseudo Riemannian metriği olmak üzere $(\mathcal{M}_{2n}, f, \mathcal{g})$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f -manifoldu tanımlanmıştır. Bu manifold üzerinde $\mathcal{g}$ metriğinin ve

$\Gamma(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = \mathcal{g}\left(\left(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}} f\right)\Lambda_2, \Lambda_3\right)$ şeklinde tanımlanan $(0, 3)$ tipli Γ tensörünün bazı özellikleri incelenmiştir.

İkinci olarak $(\mathcal{M}_{2n}, f, \mathcal{g})$ hemen hemen Hermitian metrik pseudo f -manifoldu üzerinde bazı özel konneksiyonlar tanımlanmış ve bu konneksiyonların bazı özellikleri araştırılmıştır. Bu konneksiyonlardan ilki $\tilde{\nabla}$ ile gösterilen birinci tip özel konneksiyondur. Bu konneksiyonun $\tilde{\nabla}\omega = 0$ ve $\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = -\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2)$ şartları altında

$$\tilde{\nabla}_{\Lambda_1}\Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}}\Lambda_2 + \frac{f}{2}(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}}f)\Lambda_2$$

şeklinde olduğu ve $\mathcal{g}$ ye göre metrik konneksiyon olmadığı gösterilmiştir. Ayrıca $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun $\tilde{T}$ burulma tensörü hesaplanmış, $\tilde{T}(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$ olması için gerekli ve yeterli şartın $(\nabla^{\mathcal{g}}, f)$ ikilisinin Codazzi çifti olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

Konneksiyonlardan ikincisi $\bar{\nabla}$ ile gösterilen ikinci tip özel konneksiyondur. Bu konneksiyonun $\bar{\nabla}\omega = 0$ ve $\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = -\mathcal{S}_{f^2}(\Lambda_3, \Lambda_2, \Lambda_1)$ şartları altında

$$\bar{\nabla}_{\Lambda_1}\Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{g}}\Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_2}^{\mathcal{g}}f)\Lambda_1$$

şeklinde olduğu ve $\mathcal{G}$ ye göre metrik konneksiyon olmadığı gösterilmiştir. Ayrıca $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun $\bar{T}$ burulma tensörü hesaplanmış, $\bar{T}(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$ olması için gerekli ve yeterli şartın $(\nabla^{\mathcal{G}}, f)$ ikilisinin Codazzi çifti olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

Konneksiyonlardan üçüncüsü $\hat{\nabla}$ ile gösterilen f^2 -metriği koruyan konneksiyondur. Bu konneksiyonun $(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}} f^2)\Lambda_2 + \mathcal{S}(\Lambda_1, f^2\Lambda_2) - f^2\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$ ve $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) + \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2) = 0$ şartları altında

$$\hat{\nabla}_{\Lambda_1}\Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}}\Lambda_2 + 2f^2(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}}f)f\Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}}f)\Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_1}^{\mathcal{G}}f)f\Lambda_2$$

şeklinde olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $\hat{\nabla}$ konneksiyonunun $\hat{T}$ burulma tensörü hesaplanmış, $\hat{T}(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$ olması için gerekli ve yeterli şartın $(\nabla^{\mathcal{G}}, f^2)$ ikilisinin Codazzi çifti olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

Konneksiyonlardan dördüncüsü $\bar{\bar{\nabla}}$ ile gösterilen f^2 - koruyan konneksiyondur. Bu konneksiyonun $\bar{\bar{\nabla}}f^2 = 0$ şartı altında

$$\bar{\bar{\nabla}}_{\Lambda_1}\Lambda_2 = \nabla_{\Lambda_1}\Lambda_2 + 2f^2(\nabla_{\Lambda_1}f)f\Lambda_2 + f(\nabla_{\Lambda_1}f)\Lambda_2 - (\nabla_{\Lambda_1}f)f\Lambda_2$$

şeklinde olduğu gösterilmiştir.

Konneksiyonlardan beşincisi ise $\bar{\bar{\nabla}}^0$ ya bağlı $\bar{\bar{\nabla}}^0$ ile gösterilen f^2 - koruyan konneksiyondur. Bu konneksiyonun f^2 - koruyan konneksiyon olması için gerekli ve yeterli şartın $\bar{h}(\Lambda_1, f^2\Lambda_2) = f^2\bar{h}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ olması gerektiği sonucuna ulaşılmış ve

$$\bar{h}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \dot{\alpha}f^2(\nabla_{\Lambda_2}f^2)\Lambda_1 - \dot{\alpha}(\nabla_{\Lambda_2}f^2)\Lambda_1 + \dot{\beta}f^2(\nabla_{f^2\Lambda_2}f^2)\Lambda_1 + \dot{\alpha}(\nabla_{f^2\Lambda_2}f^2)\Lambda_1$$

şeklinde elde edilmiştir.

Tez çalışmasında son olarak $(\mathcal{M}_4, \mathcal{G})$ Walker manifoldu üzerinde hemen hemen Hermitian metrik pseudo f -yapı tanımlanmıştır. N_f , Nijenhuis tensöründen hareketle

Walker 4 –manifoldlarında hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –yapılarının integrallebilme şartı hesaplanmış ve Walker 4 –manifoldlarında hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –yapısının integrallenebilmesi için gerekli ve yeterli şartın

$$a(x, y, z, t) = F(p)$$

olması gerektiği sonucu elde edilmiştir.

Walker 4 –manifoldlarında hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –yapının ∇^W kovaryant türevinden hareketle hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –yapı integrallenebilme şartları hesaplanmış ve $(\mathcal{M}_4, f, g^W)$ üçlüsünün bir Hermitian metrik pseudo f –Kähler Walker manifoldu olması için gerekli ve yeterli şartın

$$a(x, y, z, t) = C_1$$

olması gerektiği sonucu elde edilmiştir.

Hemen hemen Hermitian metrik pseudo f –yapıya bağlı $(\mathcal{M}_4, f, g^W)$ Walker 4 –manifoldunda g^W Walker metriğinin R^W Riemannian eğrilik tensörü hesaplanmış ve $R^W = 0$ olması için gerek ve yeter şartın

$$a(x, y, z, t) = -\frac{1}{zC_1 + C_2}$$

olması gerektiği sonucu elde edilmiştir.

$(\mathcal{M}_4, f, g^W)$ Walker 4 –manifoldunda g^W Walker metriğinin Ric^W Ricci ve s^W skaler eğrilikleri hesaplanmış ve manifoldun sıfır sabit eğrilikli uzay olması için gerekli ve yeterli şartın $a(x, y, z, t)$ fonksiyonunun

$$a(x, y, z, t) = \frac{C_3 + x + y + z}{2} + \frac{\sqrt{(C_3 + x + y + z)^2 - 4}}{2}$$

şeklinde olması gerektiği sonucu elde edilmiştir.



KAYNAKLAR

- Balashchenko, V. V. 1998. Canonical f -structures of hyperbolic type on regular Φ -spaces. *Uspekhi Mathematics Nauk*, 53(4), 213-214.
- Balkan, Y. S., Uddin, S., Stankovic, M. S., Alkhaldi, A. H. 2018. A new class of f -structures satisfying $f^3 - f = 0$. *Filomat*, 32(17), 5919-5929.
- Bilen, L., Turanli, S., Gezer, A. 2018. On Kähler–Norden–Codazzi golden structures on pseudo-Riemannian manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 15(05), 1850080.
- Bishop, R., L. Goldberg, S. I. 1968. *Tensor analysis on manifolds*. Dover Publications, 35, New York.
- Cengiz, N., Tarakci, Ö., Salimov, A. A. 2006. A note on Kaehlerian manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 30(4), 439-445.
- Davidov, J., Diaz-Ramos, J. C., Garcia-Rio, E., Matsushita, Y., Muskarov, O., Vazquez-Lorenzo, R. 2007. Almost Kähler Walker 4-manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 57(3), 1075-1088.
- Davidov, J., Diaz-Ramos, J. C., Garcia-Rio, E., Matsushita, Y., Muskarov, O., Vazquez-Lorenzo, R. 2008. Hermitian–Walker 4-Manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 58(3), 307-323.
- Deshmukh, S., Ghazal, T., Hashem, H. 1992. Submersions of CR-submanifolds on an almost Hermitian manifold. *Yokohama Mathematical Journal*, 40(1), 45-47.
- Fei, T., Zhang, J. 2017. Interaction of Codazzi couplings with (Para-) Kahler geometry. *Results Mathematics*, 72, 2037-2056.
- Ghosh, A., Sharma, R., 2006. Almost Hermitian manifolds admitting holomorphically planar conformal vector fields. *Journal of Geometry*, 84, 45-54.
- Goldberg, S. I., Yano, K. 1970. On normal globally framed f -manifolds. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 22(3), 362-370.
- Goldberg, S. I., Yano, K. 1970. Polynomial structures on manifolds. In *Kodai Mathematical Seminar Reports* 22 (2), 199-218.
- Gray, A. 1966. Some examples of almost Hermitian manifolds. *Illinois Journal of Mathematics*, 10(2), 353-366.
- Ishihara, S., Yano, K. 1964. On Integrability conditions of a structure f satisfying $f^3 + f = 0$. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 15(1), 217-222.
- Iscan, M., Gezer, A., Salimov, A. A. 2012. Some properties concerning curvature tensors of eight-dimensional Walker manifolds. *Журнал математической физики, анализа, геометрии*, 8(1), 21-37.

- Isçan, M., Sarsılmaz, H., Turanlı, S. 2014. On 4-dimensional almost para complex pure Walker manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 38, 1071-1080.
- Isçan, M. 2016. Almost Hermitian and almost Kähler structures on neutral 4-manifolds. *Differential Geometry-Dynamical Systems*, 18, 32-42.
- Kirichenko, V. F. 1988. Methods of generalized Hermitian geometry in the theory of almost-contact manifolds. *Journal of Soviet Mathematics*, 42, 1885-1919.
- Kobayashi, S., Nomizu, K. 1963. *Foundations of Differential Geometry*. Interscience Publishers.
- Kon, M., Yano, K. 1985. *Structures on manifolds*. Series in pure Mathematics, World Scientific, (3).
- Matsumoto, K. 1976. On a Structure defined by a tensor field f of type $(1, 1)$ satisfying $f^3 - f = 0$. *Bulletin of Yamagata University. Natural science*, 9(1), 33-46.
- Matsushita, Y. 2004. Four-dimensional Walker metrics and symplectic structures. *Journal of Geometry and Physics*, 52(1), 89-99.
- Matsushita, Y. 2005. Walker 4-manifolds with proper almost complex structures. *Journal of Geometry and Physics*, 55(4), 385-398.
- Opozda, B. 1983. The f -sectional curvature of f -Kählerian manifolds. In *Annales Polonici Mathematici*, 2 (43) 141-150.
- Ozkan, M., İşcan, M. 2014. Some properties of para-Kähler-Walker metrics. In *Annales Polonici Mathematici*, 2(112), 115-125.
- Ozusağlam, E., Dikici, E. 2016. Pseudo f -manifolds with complemented frames. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26, 305-314.
- Pujar, S. S. 2000. On a Structure defined by a tensor field of type $(1, 1)$ satisfying $P^3 - P = 0$. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 31(10), 1229-1234.
- Salimov, A. A. 2011. A Note on the Goldberg conjecture of Walker manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 8(05), 925-928.
- Salimov, A. A., Isçan, M. 2011. On Norden-Walker 4-manifolds. *Note di Matematica*, 30(1), 111-128.
- Salimov, A. A., Isçan, M. 2010. Some properties of Norden-Walker metrics. *Mathematical Journal*, 33(2), 283-293.
- Salimov, A. A., Isçan, M., Akbulut, K. 2010. Notes on para-Norden-Walker 4-manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 7(8), 1331-1347.
- Salimov, A. A., Isçan, M., Turanlı, S. 2011. Differential geometry of Walker manifolds. *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*, 153(3), 264-271.

- Salimov, A. A., Mağden, A. 2008. Diferensiyel Geometri. Aktif Yayıncılık, 326, Erzurum.
- Singh, K. D., Srivastava, N. 1974. On some f-Structure manifolds with torsion. *Demonstratio Mathematica*, 7(2), 183-196.
- Singh, K. D., Vohra, R. K. 1974. Integrability conditions of (1, 1) tensor field F satisfying $f^3 - f = 0$. *Demonstratio Mathematica*, 7(1), 85-92.
- Turanlı, S. 2011. Walker Manifoldsı. Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 76, Erzurum.
- Turanlı, S. 2019. On Walker 4-manifolds with pseudo bi-Hermitian structures. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(5), 2299-2307.
- Vanzura, J. 1976. Integrability conditions for polynomial structures. In *Kodai Mathematical Seminar Reports* 27(1-2), 42-50.
- Walker, A. G. 1950. Canonical form for a Riemannian Space with a parallel field of null planes. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1(1), 69-79.
- Yano, K. 1961. On a structure f satisfying $f^3 + f = 0$. Technical Report No. 12, University of Washington, Washington-USA.
- Yano, K. 1965. *Differential geometry on complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, N.Y.
- Yano, K. 1982. On a structure defined by a tensor field f of type (1, 1) satisfying $f^3 + f = 0$. In *North-Holland Mathematics Studies*, 70, 251-261.
- Zhong, S., Zhao, Z., Mu, G. 2019. Structure-preserving connections on almost complex Norden Golden manifolds. *Journal of Geometry*, 110(3), 55.