



**HEMEN HEMEN
PARAKONTAK MANİFOLDLAR**

Yüksek Lisans Tezi

ÜMMÜ KOCABAŞ

Eskişehir, 2022

HEMEN HEMEN PARAKONTAK MANİFOLDLAR

Ümmü KOCABAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Topoloji Tezli Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Şirin AKTAY

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Haziran, 2022

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Ümmü Kocabaş'ın “Hemen Hemen Parakontak Manifoldlar” başlıklı çalışması 23/06/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek “Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği”nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı) :	Doç. Dr. Şirin AKTAY	
Üye :	Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ	
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi Mehmet SOLGUN	

Prof. Dr. Murat TANIŞLI
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

23/06/2022

DANIşMAN ONAYI

Danişmanlığını yürüttüğüm Yüksek Lisans ęrencisi mm KOCABAş, ‘‘Hemen Hemen Parakontak Manifoldlar’’ başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Daniřmanı

Doç. Dr. şirin AKTAY

ÖZET

HEMEN HEMEN PARAKONTAK MANİFOLDLAR

Ümmü KOCABAŞ

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Haziran, 2022

Danışman: Doç. Dr. Şirin AKTAY

Bu tezde hemen hemen parakontak metrik manifoldlar ele alınmıştır. Öncelikle hemen hemen parakontak metrik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Daha sonra ise bu manifoldların sınıflandırılması çalışılmıştır. Bu sınıflandırma için, hemen hemen parakontak metrik bir manifoldun temel iki formunun Levi-Civita kovaryant türevinin ait olduğu uzay 12 altuzayın direkt toplamı olarak yazılmıştır. Böylece hemen hemen parakontak metrik manifoldların 2^{12} sınıfı incelenmiştir. Ayrıca normal, parakontak, para-Sasaki ve kuasi-para-Sasaki manifoldların sınıfları çalışılmıştır. Bunlara ek olarak, 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde η -Einstein yapıların varlığı araştırılmıştır. Bundan başka, 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde hemen hemen parakontak metrik yapı örnekleri verilmiş ve bunların ait oldukları sınıflar belirlenmiştir. Son olarak da 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde kuasi-para-Sasaki yapıların varlığı incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Hemen hemen parakontak manifold, Nilpotent Lie cebri, η -Einstein yapı, Kuasi-para-Sasaki yapı.

ABSTRACT

ALMOST PARACONTACT MANIFOLDS

Ümmü KOCABAŞ

Department of Mathematics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, June, 2022

Supervisor: Assoc. Prof. Şirin AKTAY

In this thesis, almost paracontact manifolds are studied. After giving basic concepts on almost paracontact manifolds, the classification of these manifolds is examined. Almost paracontact metric manifolds were classified according to the Levi-Civita covariant derivatives of their fundamental two-forms. In addition, the classes of normal, paracontact, para-Sasakian and quasi-para-Sasakian manifolds are considered. Furthermore the existence of η -Einstein structures on 5 dimensional nilpotent Lie algebras are studied. Also examples of almost paracontact metric structures on 5 dimensional nilpotent Lie algebras are given and their classes are determined. Finally the existence of quasi-para-Sasakian structures on 5 dimensional nilpotent Lie algebras is analysed.

Keywords: Almost paracontact manifold, Nilpotent Lie algebra, η -Einstein structure, Quasi-para-Sasakian structure.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında bilgisini, tecrübesini ve desteğini benden esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Şirin AKTAY'a en içten dileklerimle teşekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmemde çok büyük emekleri olan aileme sevgilerimi, saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ümmü KOCABAŞ

Haziran 2022

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Ümmü KOCABAŞ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
DANIŞMAN ONAYI.....	iii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER	3
3. HEMEN HEMEN PARAKONTAK METRİK MANİFOLDLAR .	9
4. 5 BOYUTLU NİLPOTENT LİE CEBİRLERİ ÜZERİNDE η - EİNSTEİN YAPILAR	28
5. 5 BOYUTLU NİLPOTENT LİE CEBİRLERİ ÜZERİNDE PA- RAKONTAK YAPI ÖRNEKLERİ.....	30
6. 5 BOYUTLU NİLPOTENT LİE CEBİRLERİ ÜZERİNDE KU- ASİ- PARA-SASAKİ YAPILAR	47
7. SONUÇ.....	61

KAYNAKÇA.....	62
---------------	----

ÖZGEÇMİŞ



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\text{boy}V$	: V vektör uzayının boyutu
$g _W$	: g bilineer formunun W uzayına kısıtlanmış olan form
M	: $2n + 1$ boyutlu türevlenebilir manifold
TM	: M manifoldunun tanjant demeti
$\mathcal{F}(M)$	: M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ (sonsuz kez türevlenebilir) fonksiyonların uzayı
$\chi(M)$	: M manifoldu üzerindeki C^∞ vektör alanlarının modülü
$\chi^*(M)$	: $\chi(M)$ den $\mathcal{F}(M)$ ye $\mathcal{F}(M)$ -lineer 1-formların modülü
g	: Metrik tensör
∇	: M manifoldunun (Levi-Civita) konneksiyonu
φ	: $(1, 1)$ tipinde tensör alanı
η	: 1- form
ξ	: Vektör alanı
(φ, ξ, η)	: M üzerinde hemen hemen parakontak yapı
(φ, ξ, η, g)	: M üzerinde hemen hemen parakontak metrik yapı
Φ	: M manifoldu üzerindeki temel 2-form
$\mathfrak{S}$	: Devirli toplam
$\text{diag}(a, b, c)$	: Köşegen elemanları a, b, c olan köşegen matris

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride çok çalışılan konulardan biri hemen hemen parakontak yapılardır. Bu yapılar özel bir geometrik yapıya sahip tek boyutlu türevlenebilir manifoldlardır. Hemen hemen parakontak yapılar I. Sato tarafından 1976 yılında tanımlanmıştır [23]. Riemann metriğine sahip hemen hemen parakontak manifoldlar ve para-Sasaki manifoldlar I. Sato ve K. Matsumoto tarafından 1979 da çalışılmıştır [24]. Daha sonra para-Sasaki, normal gibi bazı hemen hemen parakontak manifoldların özellikleri araştırılmıştır [1, 2, 10, 12, 14, 15, 22]. Parakontak geometri ile ilgili belli başlı özellikler S. Zamkovoy tarafından 2009 da verilmiştir [27]. Zamkovoy bu çalışmasında parakontak metrik manifoldların D-homotetik deformasyonlarını ve bir çok yapının bu deformasyonlar altındaki değişimlerini irdelemiştir. Ayrıca η -Einstein manifold kavramını vermiş ve η -Einstein bir manifoldun skaler eğriliğinin sabit olduğunu kanıtlamıştır. Bunlara ek olarak hemen hemen parakontak bir metrik manifoldun kanonik parakontak konneksiyonunu tanımlamış ve torsiyonlu parakontak metrik yapıların özelliklerini incelemiştir. Zamkovoy'un [27] çalışmasından sonra hemen hemen parakontak manifoldlar çeşitli özellikleri bakımından pek çok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. [3–9, 20, 25, 26, 28, 29] ve bu çalışmaların kaynakçalarında yer alan makaleler örnek gösterilebilir.

Hemen hemen parakontak metrik manifoldlar temel iki formlarının Levi-Civita kovaryant türevinin sahip olduğu özellikler dikkate alınarak sınıflandırılmıştır [17, 18, 30]. Bunun için manifoldun temel iki-formunun Levi-Civita kovaryant türevinin ait olduğu bir uzay tanımlanmış ve bu uzay manifoldun yapı grubunun temsilleri kullanılarak 12 altuzayın direkt toplamı olarak yazılmıştır. Böylece hemen hemen parakontak metrik manifoldların 2^{12} sınıfı elde edilmiştir.

Bu tezin amacı 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde hemen hemen parakontak metrik yapıları araştırmaktır. Hemen hemen parakontak metrik manifoldları çalışmak için gerekli ön bilgiler verildikten sonra [30] makalesindeki sınıflandırma çalışılmıştır. Normal, parakontak, kuasi-para kontak metrik yapıların hangi sınıfa ait olduğu incelenmiştir. Son üç bölümde bu tezde elde edilen özgün sonuçlar yer almaktadır. Üçüncü bölümde 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde η -Einstein yapıların olmadığı gösterilmiştir. Dördüncü bölümde ise 5 boyutlu nilpotent Lie ce-

birleri üzerinde hemen hemen parakontak yapı örnekleri verilmiş ve bu yapıların [30] çalışmasındaki sınıflandırmaya göre ait oldukları sınıflar belirlenmiştir. Son bölümde ise 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde kuasi-para Sasaki yapıların varlığı araştırılmıştır.



2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde yer alan bilgiler [19] kitabından derlenmiştir. V gerçel bir vektör uzayı ve g de V üzerinde tanımlı simetrik, bilineer bir form olsun. Her $v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ ($g(v, v) < 0$) ise, g formuna pozitif (negatif) tanımlıdır denir. Her $w \in V$ için, $g(v, w) = 0$ iken $v = 0$ oluyorsa, g simetrik bilineer formuna non-dejeneredir denir.

Eğer g pozitif tanımlı ise, non-dejeneredir:

Her $w \in V$ için, $g(w, v) = 0$ olsun. Özel olarak $w = v$ için de $g(v, v) = 0$ olur. g pozitif tanımlı olduğundan, $v = 0$ dır.

Bu durumun tersi doğru değildir.

Örnek 2.1. $\mathbb{R}^2$ üzerinde her $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ için,

$g(v, w) = v_1 w_1 - v_2 w_2$ şeklinde tanımlı $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bilineer formu ele alınsın. g non-dejeneredir:

Her $w \in \mathbb{R}^2$ için $g(v, w) = 0$ olsun. Özel olarak $w = (1, 0)$ seçildiğinde $g(v, w) = v_1 = 0$ ve $w = (0, 1)$ alındığında $g(v, w) = -v_2 = 0$ olduğundan, $v = (0, 0)$ olur. Ancak $v = (0, 1)$ için, $g(v, v) = -1 < 0$ olduğundan, g pozitif tanımlı değildir.

Tanım 2.2. Gerçel bir V vektör uzayı üzerinde tanımlı g simetrik bilineer formu verilsin. V vektör uzayının, $g|_W$ negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g bilineer formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir.

V üzerinde tanımlı non-dejenere simetrik g bilineer formu ve V nin ortonormal bir $\{e_1, \dots, e_n\}$ tabanı verilsin. $\epsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1$ olmak üzere, $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ sıralı n -lisine g formunun işareti (signature) denir. Her $v \in V$ vektörü $v = \sum \epsilon_i g(v, e_i) e_i$ şeklinde tek türlü yazılabilir.

Yardımcı Teorem 2.3. V vektör uzayının her $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal tabanı için, g nin işaretindeki -1 lerin sayısı, g nin indeksine eşittir.

Kanıt. g pozitif (negatif) tanımlı ise, kanıt açıktır.

$0 < m < n$ ve $i = 1, \dots, m$ için, $\epsilon_i = -1$ olduğunu kabul edelim. g formu $S = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ uzayı üzerinde negatif tanımlı olduğundan, $m \leq \nu$ olur (ν g nin negatif tanımlı olduğu mümkün en büyük boyutlu uzayın boyutu olduğundan).

Şimdi ise $\nu \leq m$ olduğu kanıtlanacaktır.

V vektör uzayının $g|_W$ negatif tanımlı olacak şekilde bir W alt uzayı verilsin.

$\pi : W \longrightarrow S$, $\pi(w) = \sum_{i \leq m} g(w, e_i) e_i$ dönüşümü tanımlansın. g bilineer olduğundan, π lineer dönüşümdür. Ayrıca π 1-1 bir dönüşümdür. Bunun için $\text{Çek}\pi = \{0\}$ olduğu gösterilecektir.

$\pi(w) = \sum_{i \leq m} g(w, e_i) e_i = 0$ olsun. Bu durumda $i \leq m$ için, $g(w, e_i) = 0$ olduğundan,

$$w = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(w, e_i) e_i = - \sum_{i \leq m} g(w, e_i) e_i + \sum_{i > m} g(w, e_i) e_i = \sum_{i > m} g(w, e_i) e_i$$

yazılabilir. $w \in W$ olduğundan,

$$g(w, w) = g \left(\sum_{i > m} g(w, e_i) e_i, \sum_{i > m} g(w, e_i) e_i \right) = \sum_{i > m} g^2(w, e_i) \leq 0$$

olur ve böylece $i > m$ için, $g(w, e_i) = 0$ bulunur. $i \leq m$ için de $g(w, e_i) = 0$ olduğundan, $w = 0$ dir. Sonuç olarak $\text{Çek}\pi = \{0\}$ veya buna denk olarak π 1-1 dir. O halde $g|_W$ negatif tanımlı olacak şekilde her W alt uzayı için, $\text{boy}W \leq m$ olduğundan, mümkün en büyük boyutlu W için de $\text{boy}W = \nu \leq m$ olur. $\square$

Tanım 2.4. *Türevlenebilir bir M manifoldu üzerinde tanımlı $(0, 2)$ -tipinde, simetrik, non-dejenere ve sabit indeksli bir tensör alanına metrik tensörü denir.*

Her $p \in M$ için g_p tensörünün indeksi aynı ise g metrik tensörü sabit indekslidir denir.

Tanım 2.5. *Bir metrik tensörle donatılmış türevlenebilir bir M manifolduna semi-Riemann manifoldu (veya pseudo-Riemann manifoldu) denir.*

Pozitif tanımlı bir metrik tensörle donatılmış türevlenebilir bir manifolda ise Riemann manifoldu denir.

Her g metrik tensörü non-dejenere olduğundan, her $p \in M$ için, $[g_{ij}(p)]$ matrisi terslenebilirdir. Bu matrisin tersi $[g^{ij}(p)]$ ile gösterilir. g simetrik olduğundan, $g_{ij} = g_{ji}$ ve $g^{ij} = g^{ji}$ dir.

Bu çalışmada $\mathcal{F}(M)$, M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ (sonsuz kez türevlenebilir) fonksiyonların uzayını, $\chi(M)$ M manifoldu üzerindeki C^∞ vektör alanlarının modülünü, $\chi^*(M)$ ise $\chi(M)$ den $\mathcal{F}(M)$ ye $\mathcal{F}(M)$ -lineer 1-formların modülünü belirtmektedir. Vektör alanları ve gerektiğinde tanjant vektörleri $X, Y, Z, \dots$ şeklinde büyük harflerle gösterilmiştir.

Tanım 2.6. $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahipse bu fonksiyona M üzerinde bir konneksiyon denir.

$$D1) \text{ Her } f \in \mathcal{F}(M) \text{ için, } \nabla_{fX+Z}Y = f\nabla_XY + \nabla_ZY,$$

$$D2) \text{ Her } c \in \mathbb{R} \text{ için, } \nabla_X(cY + Z) = c\nabla_XY + \nabla_XZ,$$

$$D3) \text{ Her } f \in \mathcal{F}(M) \text{ için, } \nabla_XfY = X[f]Y + f\nabla_XY.$$

∇_XY vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanı yönündeki kovaryant türevi denir.

Önerme 2.7. M bir semi-Riemann manifoldu ve $V \in \chi(M)$ olmak üzere, V^* 1-formu her $X \in \chi(M)$ için,

$$V^*(X) = g(V, X) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlansın. $V \longmapsto V^*$ dönüşümü $\chi(M)$ ve $\chi^*(M)$ modülleri arasında $\mathcal{F}(M)$ -lineer bir izomorfizmadır.

Teorem 2.8. (Riemann geometrinin temel teoremi) Her semi-Riemann manifoldu üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip tek türlü belirli bir ∇ konneksiyonu vardır.

$$D4) [X, Y] = \nabla_XY - \nabla_YX,$$

$$D5) X[g(Y, Z)] = g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ).$$

Bu konneksiyona M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu denir ve ∇_XY Levi-Civita kovaryant türevi Kozsul formülü ile karakterize edilir:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_XY, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]). \end{aligned}$$

Kanıt. Kanıtta

$$X[fg] = X[f]g + fX[g], \quad (2.2)$$

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X[g])Y - g(Y[f])X \quad (2.3)$$

eşitlikleri kullanılacaktır.

∇ fonksiyonu $D4$ ve $D5$ özelliklerine sahip bir konneksiyon olsun. Bu durumda $D4$ ve $D5$ özelliklerinden,

$$\begin{aligned}
& Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) \\
& + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \\
= & g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\
& - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\
& - g(X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + g(Y, \nabla_Z X - \nabla_X Z) + g(Z, \nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
= & 2g(\nabla_X Y, Z)
\end{aligned}$$

olduğundan, ∇ konneksiyonu Kozsul formülünü sağlar.

g non-dejenere olduğundan, bu konneksiyon tek türlü belirlidir.

$$\begin{aligned}
F(X, Y, Z) &:= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\
&\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])
\end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. F fonksiyonu Z değişkenine göre $\mathcal{F}(M)$ -lineerdir: (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
F(X, Y, fZ) &= Xg(Y, fZ) + Yg(fZ, X) - fZg(X, Y) \\
&\quad - g(X, [Y, fZ]) + g(Y, [fZ, X]) + g(fZ, [X, Y]) \\
= & X[f]g(Y, Z) + fX[g(Y, Z)] + Y[f]g(Z, X) \\
&\quad + fY[g(Z, X)] - fZ[g(X, Y)] \\
&\quad - g(X, f[Y, Z] + Y[f]Z) + g(Y, f[Z, X] - X[f]Z) + fg(Z, [X, Y]) \\
= & fF(X, Y, Z)
\end{aligned}$$

olduğundan $Z \mapsto F(X, Y, Z)$ dönüşümü 1-formdur. $Z \mapsto F(X, Y, Z)$ 1-formuna karşılık gelen, (2.1) eşitliğini $F(X, Y, Z) = 2g(V, Z) = V^*(Z)$ şeklinde sağlayan, tek türlü belirli V vektör alanı $\nabla_X Y$ ile gösterilsin. Bu durumda $\nabla_X Y$ vektör alanı Kozsul formülünü sağlar. (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{fX} Y, Z) &= fXg(Y, Z) + Yg(Z, fX) - Zg(fX, Y) \\
&\quad - g(fX, [Y, Z]) + g(Y, [Z, fX]) + g(Z, [fX, Y])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= fX[g(Y, Z)] + Y[f]g(Z, X) + fY[g(Z, X)] \\
&\quad - Z[f]g(X, Y) - fZ[g(X, Y)] \\
&\quad - fg(X, [Y, Z]) + g(Y, f[Z, X] + Z[f]X) + g(Z, f[X, Y] - Y[f]X) \\
&= 2g(f\nabla_X Y, Z)
\end{aligned}$$

olur ve g non-dejenere olduğundan, $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ bulunur. ∇ konneksiyonu $D1$ özelliğine sahiptir. Benzer şekilde ∇ konneksiyonu $D2$ özelliğine de sahiptir. $D3$ özelliği için yine (2.2) ve (2.3) kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X fY, Z) &= Xg(fY, Z) + fYg(Z, X) - Zg(X, fY) \\
&\quad - g(X, [fY, Z]) + g(fY, [Z, X]) + g(Z, [X, fY]) \\
&= X[f]g(Y, Z) + fX[g(Y, Z)] + fY[g(Z, X)] \\
&\quad - Z[f]g(X, Y) - fZ[g(X, Y)] \\
&\quad - g(X, f[Y, Z] - Z[f]Y) + fg(Y, [Z, X]) + g(Z, f[X, Y] + X[f]Y) \\
&= 2g(X[f]Y + f\nabla_X Y, Z)
\end{aligned}$$

bulunur ve g non-dejenere olduğundan, $\nabla_X fY = X[f]Y + f\nabla_X Y$ elde edilir.

Kozsul formülünden,

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\
&\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \\
&= -Yg(X, Z) - Xg(Z, Y) + Zg(Y, X) \\
&\quad + g(Y, [X, Z]) - g(X, [Z, Y]) - g(Z, [Y, X]) \\
&= 2g(Z, [X, Y]),
\end{aligned}$$

ve g non-dejenere olduğundan, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ olur. O halde ∇ konneksiyonu $D4$ özelliğine sahiptir. Kozsul formülünden,

$$\begin{aligned}
2\{g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)\} &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\
&\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \\
&= Xg(Z, Y) + Zg(Y, X) - Yg(X, Z) \\
&\quad - g(X, [Z, Y]) + g(Z, [Y, X]) + g(Y, [X, Z]) \\
&= 2X[g(Y, Z)]
\end{aligned}$$

olduğundan, $g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = X[g(Y, Z)]$ bulunur. Böylece ∇ konneksiyonu $D5$ özelliğine de sahiptir. Sonuç olarak Kozsul formülü $D1 - D5$ özelliklerine sahip ∇ konneksiyonunu karakterize eder. $\square$

Tanım 2.9. M bir semi-Riemann manifoldu ve ∇ bu manifoldun Levi-Civita kovaryant türevi olmak üzere, $R : \chi^3(M) \longrightarrow \chi(M)$,

$$R(X, Y)Z = R_{XY}Z := \nabla_{[X, Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$$

şeklinde tanımlı $(1, 3)$ -tipinde R tensör alanına, M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü denir.

$\{E_1, \dots, E_n\}$ lokal ortonormal bir çatı olmak üzere,

$$Ric(X, Y) = \sum_i \epsilon_i g(R_{XE_i}Y, E_i)$$

tensörüne Ricci eğrilik tensörü denir.

3. HEMEN HEMEN PARAKONTAK METRİK MANİFOLDLAR

Bu bölümdeki bilgiler [17, 18, 30] çalışmalarından derlenmiştir.

Tanım 3.1. *Türevlenebilir bir M^{2n+1} manifoldu üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip $(1,1)$ tipinde φ tensör alanı, ξ vektör alanı ve η 1-formu varsa, (φ, ξ, η) sıralı üçlüsüne M üzerinde hemen hemen parakontak bir yapı denir.*

1.

$$\eta(\xi) = 1,$$

$$\varphi^2(X) = X - \eta(X)\xi \quad (3.1)$$

2. φ tensör alanı $\eta^\perp$ alt demetinin her bir lifi üzerinde hemen hemen parakompleks bir yapı indirger.

(M, φ, ξ, η) dörtlüsüne veya kısaca M manifolduna bir hemen hemen parakontak manifold denir. ξ vektör alanına hemen hemen parakontak yapının karakteristik vektör alanı denir.

(φ, ξ, η) üçlüsü M üzerinde hemen hemen parakontak bir yapı ise,

$$\varphi(\xi) = 0 \quad (3.2)$$

ve

$$\eta \circ \varphi = 0 \quad (3.3)$$

olur:

(3.1) eşitliğinden $\xi = \varphi^2(\xi) + \eta(\xi)\xi = \varphi^2(\xi) + \xi$ olduğundan,

$$\varphi^2(\xi) = 0 \quad (3.4)$$

bulunur. O halde $\varphi(\varphi^2(\xi)) = \varphi(0) = 0$ olur. Ayrıca (3.1) eşitliğinden,

$$0 = \varphi(\varphi^2(\xi)) = \varphi^2(\varphi(\xi)) = \varphi(\xi) - \eta(\varphi(\xi))\xi$$

elde edilir. Bu eşitlikte her iki tarafın φ endomorfizmi altında görüntüsü alındığında

$$\varphi^2(\xi) - \eta(\varphi(\xi))\varphi(\xi) = 0$$

olur. (3.4) eşitliğinden,

$$\eta(\varphi(\xi))\varphi(\xi) = 0 \quad (3.5)$$

olur.

(3.1) eşitliğinde $X = \varphi(\xi)$ seçildiğinde

$$0 = \varphi(\varphi^2(\xi)) = \varphi^2(\varphi(\xi)) = \varphi(\xi) - \eta(\varphi(\xi))\xi$$

olduğundan,

$$\varphi(\xi) = \eta(\varphi(\xi))\xi \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) kullanılarak (3.5) denklemini düzenlendiğinde

$$0 = \eta(\varphi(\xi))\varphi(\xi) = \eta(\varphi(\xi))\eta(\varphi(\xi))\xi \quad (3.7)$$

ve sonuç olarak $\eta(\varphi(\xi)) = 0$ bulunur. (3.6) eşitliğinden ise $\varphi(\xi) = 0$ olur.

(3.1) eşitliğinde X yerine $\varphi(X)$ seçildiğinde

$$\varphi^2(\varphi(X)) = \varphi(X) - \eta(\varphi(X))\xi \quad (3.8)$$

ve yine (3.1) eşitliğinden,

$$\varphi^2(\varphi(X)) = \varphi(\varphi^2(X)) = \varphi(X - \eta(X)\xi) = \varphi(X) - \eta(X)\varphi(\xi) \quad (3.9)$$

olur. $\varphi(\xi) = 0$ olduğundan, (3.8) ve (3.9) karşılaştırıldığında her $X \in \chi(M)$ için, $\eta(\varphi(X)) = 0$ bulunur.

Örnek 3.2. [15] $\mathbb{R}$ manifoldunun koordinatı t olmak üzere, $\varphi = 0$, $\xi = \frac{d}{dt}$ ve $\eta = dt$ olarak seçilirse, (φ, ξ, η) üçlüsü $\mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen parakontak yapıdır.

Çalışmanın bundan sonrasında kısalık açısından $\varphi(X)$ gösterimi yerine φX kullanılacaktır. Hemen hemen parakontak (M, φ, ξ, η) manifoldunun

$$g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \quad (3.10)$$

özellğine sahip bir semi-Riemann g metriği varsa, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ sıralı beşlisine veya M ye hemen hemen parakontak metrik manifold denir.

(3.10) eşitliğinde $Y = \xi$ seçildiğinde,

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

olur. Ayrıca

$$g(\varphi X, Y) = -g(\varphi Y, X) \quad (3.11)$$

eşitliği de sağlanır. Bu eşitliği görmek için (3.10) eşitliğinde X yerine φX yazıldığında,

$$g(\varphi^2 X, \varphi Y) = -g(\varphi X, Y) + \eta(\varphi X)\eta(Y)$$

olur. (3.1) ve (3.3) eşitliklerinden (3.11) elde edilir. O halde

$$\Phi(X, Y) = g(\varphi X, Y) \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümü bir 2-formdur. Bu 2-forma hemen hemen parakontak metrik yapının temel 2-formu denir.

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen parakontak metrik manifoldunun

$$g(e_i, e_j) = -g(\varphi e_i, \varphi e_j) = \delta_{ij}, \quad g(e_i, \varphi e_j) = 0$$

özellğine sahip bir $\{e_1, \varphi e_1, \dots, e_n, \varphi e_n, \xi\}$ lokal ortonormal çatısı vardır [27]. Bu tabana φ -taban denir. g metriğinin işareti $(n+1, n)$ ve φ endomorfizmasının rankı $2n$ dir.

A ve B reel girdili $n \times n$ tipinden matrisler, ϵ ise $\epsilon^2 = 1$ ve $\beta = A + \epsilon B$ için, $\bar{\beta}^t = A^t - \epsilon B^t$ özelliklerine sahip bir sayı olmak üzere,

$$\mathbb{U}^\pi(n) = \{\beta = A + \epsilon B \mid \beta^{-1} = \bar{\beta}^t\}$$

şeklinde tanımlı β parakompleks matrislerinin grubuna paraüniter grup denir. $\beta \in \mathbb{U}^\pi(n)$ olmak üzere,

$$\alpha = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindeki $(n+1) \times (n+1)$ tipinden matrislerin grubu $\mathbb{U}^\pi(n) \times \{1\}$ ile gösterilsin. Hemen hemen parakontak bir metrik manifoldun yapı grubu $\mathbb{U}^\pi(n) \times \{1\}$ grubudur.

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen parakontak metrik manifoldu verilsin. $(0, 3)$ tipinde F tensör alanı her $X, Y, Z \in TM$ için,

$$F(X, Y, Z) = g((\nabla_X \varphi)(Y), Z) \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlansın. F formu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$F(X, Y, Z) = -F(X, Z, Y), \quad (3.14)$$

$$F(X, \varphi Y, \varphi Z) = F(X, Y, Z) + \eta(Y)F(X, Z, \xi) - \eta(Z)F(X, Y, \xi). \quad (3.15)$$

(3.14) eşitliğinin kanıtlamak için öncelikle (3.11) kullanılacaktır. (3.11) dan,

$$X[g(\varphi Y, Z)] = -X[g(Y, \varphi Z)] \quad (3.16)$$

olduğundan, (3.16) ifadesi Levi-Civita kovaryant türevinin D5 özelliği kullanılarak yazıldığında,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X(\varphi Y), Z) + g(\varphi Y, \nabla_X Z) &= -g(\nabla_X Y, \varphi Z) - g(Y, \nabla_X(\varphi Z)) \\ &= g(\varphi(\nabla_X Y), Z) - g(Y, \nabla_X(\varphi Z)) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) &= g(\nabla_X(\varphi Y), Z) - g(\varphi(\nabla_X Y), Z) \\ &= -g(\varphi Y, \nabla_X Z) - g(Y, \nabla_X(\varphi Z)) \\ &= g(Y, \varphi(\nabla_X Z)) - g(Y, \nabla_X(\varphi Z)) \\ &= g(Y, -(\nabla_X \varphi)(Z)) \\ &= -F(X, Z, Y) \end{aligned}$$

olur.

(3.15) eşitliğini göstermek için,

$$X[g(\varphi Z, \xi)] = -X[g(Y, \varphi \xi)] = -X[0] = 0$$

olduğundan, kovaryant türevin D5 özelliğinden

$$0 = X[g(\varphi Z, \xi)] = g(\nabla_X(\varphi Z), \xi) + g(\varphi Z, \nabla_X \xi)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} F(X, Z, \xi) &= g((\nabla_X \varphi)(Z), \xi) \\ &= g(\nabla_X(\varphi Z), \xi) - g(\varphi(\nabla_X Z), \xi) \\ &= g(\nabla_X(\varphi Z), \xi) + g(\nabla_X Z, \varphi \xi) \\ &= g(\nabla_X(\varphi Z), \xi) \\ &= -g(\varphi Z, \nabla_X \xi) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F(X, Y, \xi) &= -g(\varphi Y, \nabla_X \xi) \\ &= g(\nabla_X(\varphi Y), \xi) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} F(X, \varphi Y, \varphi Z) &= g((\nabla_X \varphi)(\varphi Y), \varphi Z) \\ &= g(\nabla_X(\varphi^2 Y), \varphi Z) + g(\nabla_X(\varphi Y), \varphi^2 Z) \\ &= g(\nabla_X(Y - \eta(Y)\xi), \varphi Z) + g(\nabla_X(\varphi Y), Z - \eta(Z)\xi) \\ &= g(\nabla_X Y, \varphi Z) - g(X[\eta(Y)]\xi, \varphi Z) - \eta(Y)g(\nabla_X \xi, \varphi Z) \\ &\quad + g(\nabla_X(\varphi Y), Z) - \eta(Z)g(\nabla_X(\varphi Y), \xi) \\ &= -g(\varphi(\nabla_X Y), Z) + g(X[\eta(Y)]\varphi\xi, Z) + \eta(Y)F(X, Z, \xi) \\ &\quad + g(\nabla_X(\varphi Y), Z) - \eta(Z)F(X, Y, \xi) \\ &= F(X, Y, Z) + \eta(Y)F(X, Z, \xi) - \eta(Z)F(X, Y, \xi) \end{aligned}$$

olur.

$\nabla\eta$, $d\eta$, $L_\xi g$ ve $d\Phi$ dönüşümleri F tensörü cinsinden şu şekilde ifade edilebilir:

$$(\nabla_X \eta)Y = g(\nabla_X \xi, Y) = -F(X, \varphi Y, \xi),$$

$$d\eta(X, Y) = \frac{1}{2}((\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X) = \frac{1}{2}(-F(X, \varphi Y, \xi) + F(Y, \varphi X, \xi)), \quad (3.17)$$

$$(L_\xi g)(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y + (\nabla_Y \eta)X = -F(X, \varphi Y, \xi) - F(Y, \varphi X, \xi), \quad (3.18)$$

$$d\Phi(X, Y, Z) = \mathfrak{S}_{X,Y,Z} F(X, Y, Z). \quad (3.19)$$

Burada d bir k -formun dış türevini, $L_\xi g$ ise g metriğinin ξ vektör alanı yönündeki Lie türevini göstermektedir.

F tensörü kullanılarak, $\{e_1, \dots, e_{2n}, \xi\}$ kümesi TM uzayının bir tabanı olmak üzere

$$\theta_F(X) = g^{ij}F(e_i, e_j, X),$$

$$\theta_F^*(X) = g^{ij}F(e_i, \varphi e_j, X), \quad (3.20)$$

$$\omega_F(X) = F(\xi, \xi, X)$$

1-formları tanımlanabilir.

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen parakontak metrik manifolduna

- $\nabla_X \Phi(Y, Z) = 0$ ise parakosimplektik (paracosymplectic),
- $N(X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$ tensörü φ endomorfizmasının Nijenhuis torsiyon tensörü olmak üzere,

$$N(X, Y) - 2d\eta(X, Y)\xi = 0$$

ise normal,

- $\Phi = d\eta$ ise parakontak,
 - Bir $\alpha \neq 0$ sabiti için, $(\nabla_X \varphi)Y = \alpha(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X)$ ise α -para-Sasaki,
 - normal ve parakontak ise, veya buna denk olarak α -para-Sasaki koşulunda $\alpha = 1$ ise para-Sasaki,
 - Bir $\alpha \neq 0$ sabiti için, $(\nabla_X \varphi)Y = -\alpha(g(X, \varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi X)$ ise α -para-Kenmotsu,
 - α -para-Kenmotsu koşulunda $\alpha = -1$ ise para-Kenmotsu,
 - parakontak ise ve ξ Killing ise K-parakontak
- $((L_\xi g)(X, Y) = g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) = 0$ ise, ξ bir Killing vektör alanıdır.),
- normal ve $d\Phi = 0$ ise kuasi-para-Sasaki (quasi-para-Sasakian)

denir.

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen parakontak metrik manifoldunun normal olması için gerek ve yeter koşul

$$\varphi(\nabla_X \varphi)Y - (\nabla_{\varphi X} \varphi)Y + (\nabla_X \eta)(Y)\xi = 0,$$

veya buna denk olan,

$$F(X, Y, \varphi Z) + F(\varphi X, Y, Z) + F(X, \varphi Y, \eta(Z)\xi) = 0 \quad (3.21)$$

koşulunun sağlanmasıdır [26, 30].

M^{2n+1} K-parakontak metrik bir manifold olsun. Bu durumda

$$Ric(\xi, \xi) = -2n \quad (3.22)$$

olur [27].

K-parakontak bir M manifoldunun Ricci tensörü a, b sabitler olmak üzere

$$Ric(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y)$$

şeklindeyse M ye η -Einstein manifold denir [27].

$\mathcal{F}$ uzayı (3.14) ve (3.15) özelliklerine sahip, $(0, 3)$ tipinden tensörlerin uzayı olsun. Bu uzay [18] ve [30] çalışmalarında 12 altuzayın direkt toplamı olarak yazılmıştır. Bunun için öncelikle $\mathcal{F}$ uzayı

$$\mathcal{F} = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$$

şeklinde dört tane $\mathbb{U}^\pi(n) \times \{1\}$ -invariant altuzayın direkt toplamı olarak yazılmıştır. W_i altuzayları ve F tensörünün W_i altuzayına izdüşümleri aşağıdadır:

$$W_1 = \{F \in \mathcal{F} \mid F(X, Y, Z) = F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z)\}, \quad (3.23)$$

$$W_2 = \{F \in \mathcal{F} \mid F(X, Y, Z) = -\eta(Y)F(\varphi^2 X, \varphi^2 Z, \xi) + \eta(Z)F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \xi)\},$$

$$W_3 = \{F \in \mathcal{F} \mid F(X, Y, Z) = \eta(X)F(\xi, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z)\},$$

$$W_4 = \{F \in \mathcal{F} \mid F(X, Y, Z) = \eta(X) \{ \eta(Y)F(\xi, \xi, \varphi^2 Z) - \eta(Z)F(\xi, \xi, \varphi^2 Y) \} \},$$

$$F^{W_1} = F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z), \quad (3.24)$$

$$F^{W_2} = -\eta(Y)F(\varphi^2 X, \varphi^2 Z, \xi) + \eta(Z)F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \xi), \quad (3.25)$$

$$F^{W_3} = \eta(X)F(\xi, \varphi Y, \varphi Z),$$

$$F^{W_4} = \eta(X) \{ \eta(Y)F(\xi, \xi, Z) - \eta(Z)F(\xi, \xi, Y) \}.$$

Daha sonra ise W_1 altuzayı, tanımlanma bağıntıları Teorem 3.3 te verilen $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_3, \mathbb{G}_4$ altuzaylarının direkt toplamı, W_2 altuzayı ise $W_2 = \mathbb{G}_5 \oplus \dots \oplus \mathbb{G}_{10}$ şeklinde altı altuzayın direkt toplamı olarak yazılmıştır. $W_3 = \mathbb{G}_{11}$ ve $W_4 = \mathbb{G}_{12}$ olarak adlandırılarak $\mathcal{F}$ uzayı 12 tane $\mathbb{G}_i$ altuzayının direkt toplamı şeklinde ifade edilmiştir.

Teorem 3.3. $\mathcal{F}$ uzayı $\mathcal{F} = \mathbb{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{G}_{12}$ şeklinde $\mathbb{U}^\pi(n) \times \{1\}$ -invariant $\mathbb{G}_i$ altuzaylarının direkt toplamıdır. $i \neq j$ için, $\mathbb{G}_i \perp \mathbb{G}_j$ dir. Bu altuzayların tanımlanma

bağıntıları şu şekildedir:

$$\mathbb{G}_1 : F(X, Y, Z) = \frac{1}{2(n-1)} \{g(X, \varphi Y)\theta_F(\varphi Z) - g(X, \varphi Z)\theta_F(\varphi Y) - g(\varphi X, \varphi Y)\theta_F(\varphi^2 Z) + g(\varphi X, \varphi Z)\theta_F(\varphi^2 Y)\}, \quad (3.26)$$

$$\mathbb{G}_2 : F(\varphi X, \varphi Y, Z) = -F(X, Y, Z), \quad \theta_F = 0, \quad (3.27)$$

$$\mathbb{G}_3 : F(\xi, Y, Z) = F(X, \xi, Z) = 0, F(X, Y, Z) = -F(Y, X, Z),$$

$$\mathbb{G}_4 : F(\xi, Y, Z) = F(X, \xi, Z) = 0, \quad \mathfrak{S}_{XYZ}F(X, Y, Z) = 0,$$

$$\mathbb{G}_5 : F(X, Y, Z) = \frac{\theta_F(\xi)}{2n} \{g(\varphi X, \varphi Z)\eta(Y) - g(\varphi X, \varphi Y)\eta(Z)\}, \quad (3.28)$$

$$\mathbb{G}_6 : F(X, Y, Z) = -\frac{\theta_F^*(\xi)}{2n} \{g(X, \varphi Z)\eta(Y) - g(X, \varphi Y)\eta(Z)\}, \quad (3.29)$$

$$\mathbb{G}_7 : F(X, Y, Z) = -\eta(Y)F(X, Z, \xi) + \eta(Z)F(X, Y, \xi), \quad (3.30)$$

$$F(X, Y, \xi) = -F(Y, X, \xi) = -F(\varphi X, \varphi Y, \xi), \quad \theta_F^*(\xi) = 0,$$

$$\mathbb{G}_8 : F(X, Y, Z) = -\eta(Y)F(X, Z, \xi) + \eta(Z)F(X, Y, \xi), \quad (3.31)$$

$$F(X, Y, \xi) = F(Y, X, \xi) = -F(\varphi X, \varphi Y, \xi), \quad \theta_F(\xi) = 0,$$

$$\mathbb{G}_9 : F(X, Y, Z) = -\eta(Y)F(X, Z, \xi) + \eta(Z)F(X, Y, \xi),$$

$$F(X, Y, \xi) = -F(Y, X, \xi) = F(\varphi X, \varphi Y, \xi), \quad (3.32)$$

$$\mathbb{G}_{10} : F(X, Y, Z) = -\eta(Y)F(X, Z, \xi) + \eta(Z)F(X, Y, \xi),$$

$$F(X, Y, \xi) = F(Y, X, \xi) = F(\varphi X, \varphi Y, \xi), \quad (3.33)$$

$$\mathbb{G}_{11} : F(X, Y, Z) = \eta(X)F(\xi, \varphi Y, \varphi Z), \quad (3.34)$$

$$\mathbb{G}_{12} : F(X, Y, Z) = \eta(X) \{ \eta(Y)F(\xi, \xi, Z) - \eta(Z)F(\xi, \xi, Y) \}.$$

Her $p \in M$ için, F tensörü $\mathbb{G}_i \oplus \mathbb{G}_j$ altuzayında ise, M hemen hemen parakontak manifoldu $\mathbb{G}_i \oplus \mathbb{G}_j$ sınıfındandır denir. Böylece hemen hemen parakontak metrik manifoldların 2^{12} sınıfı elde edilir. Tüm $\mathbb{G}_i$ altuzaylarının kesişimi olan uzay $\mathbb{G}_0$ ile gösterilir. $\mathbb{G}_0$ sınıfı parakosimplektik yapıların sınıfıdır.

$\mathbb{G}_i$ altuzaylarının boyutları da hesaplanmıştır.

Teorem 3.4. $2n + 1$ boyutlu bir M manifolduna karşılık gelen $\mathcal{F}$ uzayının $\mathbb{G}_i$ altuzaylarının boyutları şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \text{boy } \mathbb{G}_1 &= 2(n-1), \quad \text{boy } \mathbb{G}_2 = (n-1)(n^2-2), \quad \text{boy } \mathbb{G}_3 = \frac{(n-2)(n-1)n}{3}, \\ \text{boy } \mathbb{G}_4 &= \frac{2(n-1)n(n+1)}{3}, \quad \text{boy } \mathbb{G}_5 = 1, \quad \mathbb{G}_6 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{boy } \mathbb{G}_7 &= n^2 - 1, \quad \text{boy } \mathbb{G}_8 = n^2 - 1, \quad \text{boy } \mathbb{G}_9 = n(n - 1), \\ \text{boy } \mathbb{G}_{10} &= n(n + 1), \quad \text{boy } \mathbb{G}_{11} = n(n - 1), \quad \text{boy } \mathbb{G}_{12} = 2n. \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ uzayının bir F tensörünün $\mathbb{G}_i$ altuzayları üzerindeki izdüşümleri de [30] çalışmasında verilmiştir.

$$\begin{aligned} F^1(X, Y, Z) &= \frac{1}{2(n-1)} \{g(X, \varphi Y)\theta_{F^1}(\varphi Z) - g(X, \varphi Z)\theta_{F^1}(\varphi Y) \\ &\quad - g(\varphi X, \varphi Y)\theta_{F^1}(\varphi^2 Z) + g(\varphi X, \varphi Z)\theta_{F^1}(\varphi^2 Y)\}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$F^2(X, Y, Z) = \frac{1}{2} \{F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z) - F(\varphi X, \varphi^2 Y, \varphi Z)\} - F^1(X, Y, Z), \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} F^3(X, Y, Z) &= \frac{1}{6} \{F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z) + F(\varphi X, \varphi^2 Y, \varphi Z) \\ &\quad + F(\varphi^2 Y, \varphi^2 Z, \varphi^2 X) + F(\varphi Y, \varphi^2 Z, \varphi X) \\ &\quad + F(\varphi^2 Z, \varphi^2 X, \varphi^2 Y) + F(\varphi Z, \varphi^2 X, \varphi Y)\}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$F^4(X, Y, Z) = \frac{1}{2} \{F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z) + F(\varphi X, \varphi^2 Y, \varphi Z)\} - F^3(X, Y, Z), \quad (3.38)$$

$$F^5(X, Y, Z) = \frac{\theta_{F^5}(\xi)}{2n} \{\eta(Y)g(\varphi X, \varphi Z) - \eta(Z)g(\varphi X, \varphi Y)\}, \quad (3.39)$$

$$F^6(X, Y, Z) = -\frac{\theta_{F^6}^*(\xi)}{2n} \{\eta(Y)g(X, \varphi Z) - \eta(Z)g(X, \varphi Y)\}, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} F^7(X, Y, Z) &= -\frac{1}{4}\eta(Y) \{F(\varphi^2 X, \varphi^2 Z, \xi) - F(\varphi X, \varphi Z, \xi) \\ &\quad - F(\varphi^2 Z, \varphi^2 X, \xi) + F(\varphi Z, \varphi X, \xi)\} + \frac{1}{4}\eta(Z) \{F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \xi) \\ &\quad - F(\varphi X, \varphi Y, \xi) - F(\varphi^2 Y, \varphi^2 X, \xi) + F(\varphi Y, \varphi X, \xi)\} - F^6(X, Y, Z), \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} F^8(X, Y, Z) &= -\frac{1}{4}\eta(Y) \{F(\varphi^2 X, \varphi^2 Z, \xi) - F(\varphi X, \varphi Z, \xi) \\ &\quad + F(\varphi^2 Z, \varphi^2 X, \xi) - F(\varphi Z, \varphi X, \xi)\} + \frac{1}{4}\eta(Z) \{F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \xi) \\ &\quad - F(\varphi X, \varphi Y, \xi) + F(\varphi^2 Y, \varphi^2 X, \xi) - F(\varphi Y, \varphi X, \xi)\} - F^5(X, Y, Z), \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} F^9(X, Y, Z) &= -\frac{1}{4}\eta(Y) \{F(\varphi^2 X, \varphi^2 Z, \xi) + F(\varphi X, \varphi Z, \xi) \\ &\quad - F(\varphi^2 Z, \varphi^2 X, \xi) - F(\varphi Z, \varphi X, \xi)\} + \frac{1}{4}\eta(Z) \{F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \xi) \\ &\quad + F(\varphi X, \varphi Y, \xi) - F(\varphi^2 Y, \varphi^2 X, \xi) - F(\varphi Y, \varphi X, \xi)\}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} F^{10}(X, Y, Z) &= -\frac{1}{4}\eta(Y) \{F(\varphi^2 X, \varphi^2 Z, \xi) + F(\varphi X, \varphi Z, \xi) \\ &\quad + F(\varphi^2 Z, \varphi^2 X, \xi) + F(\varphi Z, \varphi X, \xi)\} + \frac{1}{4}\eta(Z) \{F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \xi) \\ &\quad + F(\varphi X, \varphi Y, \xi) + F(\varphi^2 Y, \varphi^2 X, \xi) + F(\varphi Y, \varphi X, \xi)\}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$F^{11}(X, Y, Z) = \eta(X)F(\xi, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z), \quad (3.45)$$

$$F^{12}(X, Y, Z) = \eta(X) \{ \eta(Y)F(\xi, \xi, \varphi^2 Z) - \eta(Z)F(\xi, \xi, \varphi^2 Y) \}. \quad (3.46)$$

$\mathbb{G}_i$ sınıflarının tanımlanma bağıntıları ve F^i projeksiyonları kullanılarak normal, parakontak, para-Sasaki, K-parakontak ve kuasi-para-Sasaki manifoldların sınıfı belirlenmiştir [30].

Teorem 3.5. $2n + 1$ boyutlu $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen parakontak metrik manifoldunun normal olması için gerek ve yeter koşul bu manifoldun $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_5, \mathbb{G}_6, \mathbb{G}_7, \mathbb{G}_8$ sınıflarında veya bu sınıfların direkt toplamalarında olmasıdır.

Kanıt. M manifoldu $\mathbb{G}_i, i = 1, 2, 5, 6, 7, 8$ sınıfından olsun. Bu sınıfların tanımlanma bağıntıları kullanılarak (3.21) normallik koşulunun sağlandığı gösterilecektir.

$\mathbb{G}_1$ sınıfı: $M \in \mathbb{G}_1$ ise, F tensörü (3.26) tanımlanma bağıntısını sağlar. Buradan $F(X, Y, \xi) = 0$ olduğu görülebilir. (3.26), (3.10) ve (3.12) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} & F(X, Y, \varphi Z) + F(\varphi X, Y, Z) + F(X, \varphi Y, \eta(Z)\xi) \\ &= F(X, Y, \varphi Z) + F(\varphi X, Y, Z) \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \{ g(X, \varphi Y)\theta_F(\varphi^2 Z) - g(X, \varphi^2 Z)\theta_F(\varphi Y) \\ &\quad - g(\varphi X, \varphi Y)\theta_F(\varphi(\varphi^2 Z)) + g(\varphi X, \varphi^2 Z)\theta_F(\varphi^2 Y) \} \\ &+ \frac{1}{2(n-1)} \{ g(\varphi X, \varphi Y)\theta_F(\varphi Z) - g(\varphi X, \varphi Z)\theta_F(\varphi Y) \\ &\quad - g(\varphi^2 X, \varphi Y)\theta_F(\varphi^2 Z) + g(\varphi^2 X, \varphi Z)\theta_F(\varphi^2 Y) \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. O halde M normaldir.

$\mathbb{G}_2$ sınıfı: M manifoldunun F tensörü (3.27) koşulunu sağlasın. (3.27) eşitliğinden

$$F(\xi, Y, Z) = F(X, \xi, Z) = 0$$

ve (3.14) özelliğinden

$$0 = F(X, \xi, Z) = -F(X, Z, \xi)$$

olduğundan, $F(X, \varphi Y, \eta(Z)\xi) = 0$ dır.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
F(X, Y, \varphi Z) &= -F(X, \varphi Z, Y) \\
&= F(\varphi X, \varphi^2 Z, Y) \\
&= F(\varphi X, Z, Y) \\
&= -F(\varphi X, Y, Z)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$F(X, Y, \varphi Z) + F(\varphi X, Y, Z) + F(X, \varphi Y, \eta(Z)\xi) = 0$$

bulunur.

$\mathbb{G}_5$ sınıfı: M manifoldunun F tensörü (3.28) koşulunu sağladığından,

$$\begin{aligned}
&F(X, Y, \varphi Z) + F(\varphi X, Y, Z) + F(X, \varphi Y, \eta(Z)\xi) \\
&= \frac{\theta_F(\xi)}{2n} \{ \eta(y)g(\varphi X, \varphi^2 Z) + \eta(Y)g(\varphi^2 X, \varphi Z) \\
&\quad - \eta(Z)g(\varphi^2 X, \varphi Y) - \eta(Z)g(\varphi X, \varphi^2 Y) \} \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

$\mathbb{G}_6$ sınıfı: (3.29) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
F(X, Y, \varphi Z) &= -\frac{\theta_F^*(\xi)}{2n} \eta(Y)g(X, \varphi^2 Z), \\
F(\varphi X, Y, Z) &= -\frac{\theta_F^*(\xi)}{2n} \{ \eta(Y)g(\varphi X, \varphi Z) - \eta(Z)g(\varphi X, \varphi Y) \}, \\
F(X, \varphi Y, \eta(Z)\xi) &= -\frac{\theta_F^*(\xi)}{2n} \{ -\eta(Z)g(X, \varphi^2 Y) \}
\end{aligned}$$

bulunur ve (3.21) normallik koşulunun sağlandığı görülür.

$\mathbb{G}_7$ sınıfı: (3.30) eşitliğinden

$$F(X, \varphi Z, \xi) = -F(\varphi X, \varphi^2 Z, \xi) = -F(\varphi X, Z, \xi)$$

ve

$$\begin{aligned}
F(X, Y, \varphi Z) &= -\eta(Y)F(X, \varphi Z, \xi), \\
F(\varphi X, Y, Z) &= -\eta(y)F(\varphi X, Z, \xi) + \eta(Z)F(\varphi X, Y, \xi), \\
F(X, \varphi Y, \eta(Z)\xi) &= \eta(Z)F(X, \varphi Y, \xi)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\mathbb{G}_7$ sınıfı normaldir.

$\mathbb{G}_8$ sınıfı: $\mathbb{G}_7$ sınıfına benzer şekilde bu sınıfın da normal olduğu görülür.

$\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_5, \mathbb{G}_6, \mathbb{G}_7, \mathbb{G}_8$ sınıfları normal olduklarından, direkt toplamaları da normaldir.

Şimdi ise M normal olsun. Bu durumda (3.21) normallik koşulu sağlanır.

$F = F^1 + F^2 + F^5 + F^6 + F^7 + F^8$ olduğu gösterilmelidir.

Normallik koşulunda $X = Y = \xi$ seçildiğinde

$$F(\xi, \xi, Z) = 0 \quad (3.47)$$

bulunur. Yine (3.21) özelliğinde $X = \xi$ alınarak (3.47) eşitliği kullanıldığında

$$F(\xi, Y, Z) = 0 \quad (3.48)$$

elde edilir. Ayrıca (3.21) koşulunda Y yerine φY , Z yerine de ξ yazıldığında

$$F(\varphi X, \varphi Y, \xi) = -F(X, Y, \xi) \quad (3.49)$$

olur. (3.48) eşitliğinden, $F^{11} = F^{12} = 0$ olur. (3.49) koşulundan,

$$F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \xi) = -F(\varphi X, \varphi Y, \xi)$$

olduğundan, $F^9 = F^{10} = 0$ olur.

Normallik koşulunda X yerine $\varphi^2 X$, Y yerine $\varphi^2 Y$, Z yerine φZ alındığında

$$F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z) + F(\varphi^3 X, \varphi^2 Y, \varphi Z) = 0$$

olur.

$$\begin{aligned} F(\varphi^3 X, \varphi^2 Y, \varphi Z) &= F(\varphi^2(\varphi X), \varphi^2 Y, \varphi Z) \\ &= F(\varphi X, \varphi^2 Y, \varphi Z) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z) + F(\varphi X, \varphi^2 Y, \varphi Z) = 0$$

elde edilir. Buradan da $F^3 = F^4 = 0$ bulunur. Sonuç olarak F tensörü $i = 1, 2, 5, 6, 7, 8$ olmak üzere F^i tensörlerinin toplamıdır. $\square$

(3.17) eşitliğinden, her $\mathbb{G}_i$ temel sınıfında η 1-formunun $d\eta$ dış türevi hesaplan-

mıştır [30].

Yardımcı Teorem 3.6. a. $M \in \mathbb{G}_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11$ ise, $d\eta = 0$,

b. $M \in \mathbb{G}_5$ ise, $d\eta = \frac{\theta_F(\xi)}{2n}g(\varphi X, Y)$,

c. $M \in \mathbb{G}_i$, $i = 8, 9$ ise, $d\eta = -F^i(X, \varphi Y, \xi)$,

d. $M \in \mathbb{G}_{12}$ ise, $d\eta = \frac{1}{2}(\eta(X)F(\xi, \xi, \varphi Y) - \eta(Y)F(\xi, \xi, \varphi X))$.

Kanıt. a. $M \in \mathbb{G}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ ise, $M \in W_1$ olduğundan, (3.23) bağıntısından, $F(X, Y, \xi) = 0$ olur. (3.17) kullanılarak $d\eta = 0$ bulunur.

$M \in \mathbb{G}_6$ ise, (3.29) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} d\eta(X, Y) &= \frac{1}{2}\{-F(X, \varphi Y, \xi) + F(Y, \varphi X, \xi)\} \\ &= -\frac{\theta_F^*(\xi)}{2n}\{-g(X, \varphi^2 Y) + g(Y, \varphi^2 X)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

$M \in \mathbb{G}_7$ ise, (3.30) özelliğinden,

$$F(X, \varphi Y, \xi) = -F(\varphi X, \varphi^2 Y, \xi) = -F(\varphi X, Y, \xi) = F(Y, \varphi X, \xi)$$

olduğundan, $d\eta = 0$ bulunur.

$M \in \mathbb{G}_{10}$ ise, (3.33) denkleminde,

$$F(X, \varphi Y, \xi) = F(\varphi X, \varphi^2 Y, \xi) = F(\varphi X, Y, \xi) = F(Y, \varphi X, \xi)$$

olduğundan, $d\eta = 0$ elde edilir.

$M \in \mathbb{G}_{11}$ ise, (3.34) eşitliğinden, $F(X, Y, \xi) = 0$ olduğundan, $d\eta = 0$ olur.

b. $M \in \mathbb{G}_5$ ise, bu sınıfın tanımlanma bağıntısından,

$$\begin{aligned} d\eta(X, Y) &= \frac{1}{2}\{-F(X, \varphi Y, \xi) + F(Y, \varphi X, \xi)\} \\ &= \frac{\theta_F(\xi)}{2n}\{g(\varphi X, \varphi^2 Y) - g(\varphi Y, \varphi^2 X)\} \\ &= \frac{\theta_F(\xi)}{n}g(\varphi X, \varphi^2 Y) \\ &= \frac{\theta_F(\xi)}{n}g(\varphi X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

c. $M \in \mathbb{G}_8$ ise, $F = F^8$ olur. (3.31) bağıntılarından,

$$\begin{aligned} d\eta(X, Y) &= \frac{1}{2}\{-F(X, \varphi Y, \xi) + F(Y, \varphi X, \xi)\} \\ &= -F(X, \varphi Y, \xi) \\ &= -F^8(X, \varphi Y, \xi) \end{aligned}$$

bulunur. $\mathbb{G}_9$ sınıfında da benzer şekilde $d\eta = -F^9(X, \varphi Y, \xi)$ olur.

d. $M \in \mathbb{G}_{12}$ ise, bu sınıfın tanımından

$$\begin{aligned} d\eta(X, Y) &= \frac{1}{2}\{-F(X, \varphi Y, \xi) + F(Y, \varphi X, \xi)\} \\ &= \frac{1}{2}(\eta(X)F(\xi, \xi, \varphi Y) - \eta(Y)F(\xi, \xi, \varphi X)) \end{aligned}$$

bulunur. □

$\bar{\mathbb{G}}_5$ sınıfı $\mathbb{G}_5$ sınıfının $\theta_F(\xi) = 2n$ özelliğine sahip alt sınıfı olsun. Bu durumda Yardımcı Teorem 3.6 dan,

Önerme 3.7. *M manifoldu $\mathbb{G}_5$ sınıfında olsun. M manifoldunun parakontak metrik olması için gerek ve yeter koşul, $\bar{\mathbb{G}}_5$ sınıfında olmasıdır.*

Teorem 3.8. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen parakontak metrik manifoldunun parakontak olması için gerek ve yeter koşul, bu manifoldun $\bar{\mathbb{G}}_5$ sınıfında veya $\bar{\mathbb{G}}_5$ sınıfının $\mathbb{G}_4$ ve $\mathbb{G}_{10}$ sınıflarıyla direkt toplamında olmasıdır.*

Kanıt. $M \in \bar{\mathbb{G}}_5$ ise, Önerme 3.7 den M parakontaktır. $M \in \bar{\mathbb{G}}_5 \oplus \mathbb{G}_4$ ise,

$F = \bar{F}^5 + F^4$ olduğundan, (3.17) eşitliği ve Yardımcı Teorem 3.6 dan,

$d\eta = d\eta_F = d\eta_{\bar{F}^5} + d\eta_{F^4} = g(\varphi X, Y)$ olur, o halde M parakontaktır. Benzer şekilde $M \in \bar{\mathbb{G}}_5 \oplus \mathbb{G}_{10}$ ve $M \in \bar{\mathbb{G}}_5 \oplus \mathbb{G}_4 \oplus \mathbb{G}_{10}$ ise de M parakontaktır.

Tersine M parakontak olsun. Bu durumda $d\eta(X, Y) = \Phi(X, Y) = g(\varphi X, Y)$ ve $d\eta(X, Y) = \frac{1}{2}\{-F(X, \varphi Y, \xi) + F(Y, \varphi X, \xi)\}$ olduğundan,

$$-F(X, \varphi Y, \xi) + F(Y, \varphi X, \xi) = 2g(\varphi X, Y) \quad (3.50)$$

yazılabilir. (3.50) eşitliğinde X yerine ξ , Y yerine φY alındığında,

$$F(\xi, \xi, Y) = 0 \quad (3.51)$$

bulunur. Yine (3.50) eşitliğinde Y yerine φY yazıldığında

$$F(X, Y, \xi) = F(\varphi Y, \varphi X, \xi) - 2g(\varphi X, \varphi Y) \quad (3.52)$$

elde edilir.

$d\eta = \Phi$ olduğundan,

$$d\Phi(X, Y, Z) = 0 = F(X, Y, Z) + F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y) \quad (3.53)$$

olur. Bu eşitlikte Z yerine ξ yazıldığında,

$$d\Phi(X, Y, \xi) = 0 = F(X, Y, \xi) - F(Y, X, \xi) + F(\xi, X, Y) = 0 \quad (3.54)$$

bulunur. (3.54) eşitliğinde (3.52) kullanıldığında,

$$F(\varphi Y, \varphi X, \xi) - F(\varphi X, \varphi Y, \xi) + F(\xi, X, Y) = 0 \quad (3.55)$$

olur. (3.55) eşitliğinde X yerine φX , Y yerine φY yazılıp (3.51) kullanıldığında,

$$F(Y, X, \xi) - F(X, Y, \xi) + F(\xi, \varphi X, \varphi Y) = 0 \quad (3.56)$$

bulunur. F tensörünün (3.15) özelliğinde $X = \xi$, $Y = X$, $Z = Y$ seçilip (3.51) kullanıldığında ise

$$F(\xi, \varphi X, \varphi Y) = F(\xi, X, Y)$$

olur. O halde (3.56) eşitliği

$$F(Y, X, \xi) - F(X, Y, \xi) + F(\xi, X, Y) = 0 \quad (3.57)$$

şeklinde yazılabilir. (3.54) ve (3.57) karşılaştırıldığında, $F(\xi, X, Y) = 0$ bulunur. Ayrıca $F(\xi, X, Y) = 0$ olduğundan, (3.54) eşitliğinden,

$$F(Y, X, \xi) = F(X, Y, \xi) \quad (3.58)$$

elde edilir. $F(\xi, X, Y) = 0$ olduğundan, $F^{11} = F^{12} = 0$ bulunur. Böylece $F = F^{W_1} + F^{W_2}$ olur. O halde

$$d\eta_F = d\eta_{F^{W_1}} + d\eta_{F^{W_2}} \quad (3.59)$$

yazılabilir. Burada $d\eta_{F^{W_1}} = d\eta_{F^1} + \dots + d\eta_{F^4}$ ve $d\eta_{F^{W_2}} = d\eta_{F^5} + \dots + d\eta_{F^{10}}$ şeklindedir.

(3.58) eşitliğinden, $F^9 = 0$ ve $F^6 + F^7 = 0$ olduğundan, $F^6 = F^7 = 0$ olur. O

halde $F^{W_2} = F^5 + F^8 + F^{10}$ dur.

Yardımcı Teorem 3.6 dan, $d\eta_{F^{W_1}} = 0$, $d\eta_{F^5} = \frac{\theta_{F^5}(\xi)}{2n}g(\varphi X, Y)$,

$d\eta_{F^8}(X, Y) = -F^8(X, \varphi Y, \xi)$ ve $d\eta_{F^{10}} = 0$ olur. O halde (3.59) eşitliği

$$d\eta_F = g(\varphi X, Y) = \frac{\theta_{F^5}(\xi)}{2n}g(\varphi X, Y) - F^8(X, \varphi Y, \xi) \quad (3.60)$$

şeklinde yazılabilir. (3.60) eşitliğinden, $F^5 = F^8$ veya $F^8 = 0$ dır. $F^5 \neq F^8$ olduğundan, $F^8 = 0$ dır. O halde $F^{W_2} = F^5 + F^{10}$ olur.

g non-dejenere olduğundan, (3.60) eşitliğinden, $\theta_{F^5}(\xi) = 2n$ ve böylece $F^5 = \bar{F}^5$ bulunur. Burada $\bar{F}^5$, F tensörünün $\bar{\mathbb{G}}_5$ üzerine iz düşümüdür.

Dikkat edilirse M manifoldu yalnız $\mathbb{G}_{10}$ sınıfına ait olamaz. Eğer $M \in \mathbb{G}_{10}$ olsaydı, bu durumda $F = F^{10}$ olduğundan, $d\eta_F = d\eta_{F^{10}} = 0$ olurdu, ancak M parakontak olduğundan $d\eta$ sıfır olamaz. O halde $F^{W_2} = \bar{F}^5$ veya $F^{W_2} = \bar{F}^5 + F^{10}$ olur.

F^5 ve F^8 izdüşümlerinin tanımlarından, $\mathfrak{S}_{XYZ}F^{W_2}(X, Y, Z) = 0$ olduğu görülebilir. Bu durumda $d\Phi = 0 = d\Phi_{F^{W_1}} + d\Phi_{F^{W_2}}$ olduğundan,

$$d\Phi_{F^{W_1}} = \mathfrak{S}_{XYZ}F^{W_1}(X, Y, Z) = 0$$

olur. W_1 uzayının $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_3, \mathbb{G}_4$ altuzaylarının tanımlanma bağıntıları ele alındığında $\mathfrak{S}_{XYZ}F^4(X, Y, Z) = 0$ ve diğer sınıflar için bu devirli toplamın sıfır olmak zorunda olmadığı görülür. O halde $F_{W_1} = F^4$ olur. $d\eta_{F^4} = 0$ olduğundan, M yalnız $\mathbb{G}_4$ sınıfına ait olamaz. Sonuç olarak $F = \bar{F}^5$, $F = \bar{F}^5 + F^4$, $F = \bar{F}^5 + F^{10}$ veya $F = \bar{F}^5 + F^4 + F^{10}$ bulunur. $\square$

Para-Sasaki manifoldlar tanım gereği normal ve parakontak olduklarından, para-Sasaki manifoldların sınıfı Teorem 3.5 ve Teorem 3.8 in sonucu olarak belirlenir.

Sonuç 3.9. *Hemen hemen parakontak metrik bir manifoldun para-Sasaki olması için gerek ve yeter koşul bu manifoldun $\bar{\mathbb{G}}_5$ sınıfından olmasıdır.*

(3.18) eşitliğinden karakteristik vektör alanı Killing olan hemen hemen parakontak manifoldların sınıfları belirlenir.

Önerme 3.10. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen parakontak metrik manifoldunun ξ karakteristik vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul, M manifoldunun*

$\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_3, \mathbb{G}_4, \mathbb{G}_5, \mathbb{G}_8, \mathbb{G}_9, \mathbb{G}_{11}$ sınıflarında veya bu sınıfların direkt toplamalarında olmasıdır.

Kanıt. $M \in \mathbb{G}_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11$ olsun. Bu durumda ξ vektör alanının Killing olduğu gösterilecektir.

$M \in W_1 = \mathbb{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{G}_4$ ise, W_1 sınıfının (3.23) tanımlanma bağıntısından, $F(X, \varphi Y, \xi) = 0$ bulunur. Bu durumda (3.18) eşitliğinden $(L_\xi g)(X, Y) = 0$ olur ve sonuç olarak W_1 sınıfında ξ Killing vektör alanıdır.

$M \in \mathbb{G}_5$ ise, (3.28) bağıntısından,

$$F(X, \varphi Y, \xi) = -\frac{\theta_F(\xi)}{2n}g(\varphi X, Y) = \frac{\theta_F(\xi)}{2n}g(\varphi Y, X) = -F(Y, \varphi X, \xi)$$

olduğundan, $(L_\xi g)(X, Y) = 0$ dir.

$M \in \mathbb{G}_8$ ise, (3.31) tanımından,

$$F(X, \varphi Y, \xi) = -F(\varphi X, \varphi^2 Y, \xi) = -F(\varphi X, Y, \xi) = -F(Y, \varphi X, \xi)$$

bulunur ve $(L_\xi g)(X, Y) = 0$ olur.

$M \in \mathbb{G}_9$ ise, (3.32) eşitliğinden,

$$F(X, \varphi Y, \xi) = F(\varphi X, \varphi^2 Y, \xi) = F(\varphi X, Y, \xi) = -F(Y, \varphi X, \xi)$$

olduğundan, yine $(L_\xi g)(X, Y) = 0$ dir.

$M \in \mathbb{G}_{11}$ ise, (3.34) özelliğinden, $F(X, \varphi Y, \xi) = 0$ ve buradan da

$(L_\xi g)(X, Y) = 0$ olur. M manifoldu bu sınıfların direkt toplamındaysa da ξ Killing vektör alanıdır.

Tersine ξ Killing olsun. Bu durumda

$$F^6 = F^7 = F^{10} = F^{12} = 0$$

olduğu kanıtlanacaktır.

ξ Killing olduğundan, (3.18) eşitliğinden,

$$F(X, \varphi Y, \xi) = -F(Y, \varphi X, \xi) \quad (3.61)$$

olur. (3.61) eşitliğinde X yerine φX yazıldığında, $F(\varphi X, \varphi Y, \xi) = -F(Y, X, \xi)$ bulunur. Buradan $F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \xi) = -F(\varphi Y, \varphi X, \xi)$ olur. (3.40) ve (3.41) tanımlarından, $F^6 + F^7 = 0$ ve buradan da $F^6 = F^7 = 0$ bulunur. Benzer şekilde $F^{10} = 0$

dır.

Son olarak (3.61) eşitliğinden $F(\xi, \varphi^2 Z, \xi) = 0$ olduğundan, $F^{12} = 0$ dır. $\square$

Parakontak manifoldların $\bar{\mathbb{G}}_5$ ve $\bar{\mathbb{G}}_5 \oplus \mathbb{G}_4$ sınıflarında ξ Killing olduğundan, aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 3.11. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen parakontak metrik manifoldunun K -parakontak (parakontak ve ξ Killing) olması için gerek ve yeter koşul M manifoldunun $\bar{\mathbb{G}}_5$ veya $\bar{\mathbb{G}}_5 \oplus \mathbb{G}_4$ sınıfında olmasıdır.*

Normal manifoldların sınıfları Teorem 3.5 te verilmiştir. Bu sınıfların içinde $d\Phi = 0$ olan sınıflar incelendiğinde kuasi-para-Sasaki manifoldların sınıfları belirlenir.

Teorem 3.12. *M hemen hemen parakontak metrik manifoldunun kuasi-para-Sasaki manifoldu olması için gerek ve yeter koşul M nin $\mathbb{G}_5$, $\mathbb{G}_8$ veya $\mathbb{G}_5 \oplus \mathbb{G}_8$ sınıfında olmasıdır.*

Kanıt. M kuasi-para-Sasaki olsun. M normal olduğundan, Teorem 3.5 ten,

$F = F^1 + F^2 + F^5 + F^6 + F^7 + F^8$ olur. Direkt hesapla $d\Phi_{F^5} = d\Phi_{F^8} = 0$ ve diğer izdüşümlerin için $d\Phi_{F^i}$ dış türevinin sıfır olmak zorunda olmadığı görülür. O halde $F = F^5 + F^8$ bulunur.

Tersine M manifoldu $\mathbb{G}_5$, $\mathbb{G}_8$ veya $\mathbb{G}_5 \oplus \mathbb{G}_8$ sınıfında olsun. Bu durumda Teorem 3.5 ten M normaldir.

$M \in \mathbb{G}_5$ ise, (3.28) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} d\Phi(X, Y, Z) &= F(X, Y, Z) + F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y) \\ &= \frac{\theta_F(\xi)}{2n} \{ \eta(Y)g(\varphi X, \varphi Z) - \eta(Z)g(\varphi X, \varphi Y) \\ &\quad + \eta(Z)g(\varphi Y, \varphi X) - \eta(X)g(\varphi Y, \varphi Z) \\ &\quad + \eta(X)g(\varphi Z, \varphi Y) - \eta(Y)g(\varphi Z, \varphi X) \} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$M \in \mathbb{G}_8$ ise, (3.31) bağıntısından,

$$d\Phi(X, Y, Z) = F(X, Y, Z) + F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y)$$

$$\begin{aligned}
&= -\eta(Y)F(X, Z, \xi) + \eta(Z)F(X, Y, \xi) \\
&\quad -\eta(Z)F(Y, X, \xi) + \eta(X)F(Y, Z, \xi) \\
&\quad -\eta(X)F(Z, Y, \xi) + \eta(Y)F(Z, X, \xi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. $M \in \mathbb{G}_5 \oplus \mathbb{G}_8$ ise $d\Phi_F = d\Phi_{F_5} + d\Phi_{F_8} = 0$ dir. Sonuç olarak M kuasi-para-Sasakidir. $\square$



4. 5 BOYUTLU NİLPOTENT LİE CEBİRLERİ ÜZERİNDE η -EİN-STEİN YAPILAR

5-boyutlu nilpotent Lie cebirleri [11] tarafından sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırmaya göre birbirine izomorf olmayan ve Abelyen olmayan altı nilpotent Lie cebri vardır. $\{e_1, \dots, e_5\}$ 5 boyutlu bir vektör uzayının tabanı olmak üzere, sıfırdan farklı bracketler her bir $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \dots, 6$ Lie cebrinde şu şekildedir:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_1 & : [e_1, e_2] = e_5, [e_3, e_4] = e_5 \\ \mathfrak{g}_2 & : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_5 \\ \mathfrak{g}_3 & : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_2, e_3] = e_5 \\ \mathfrak{g}_4 & : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5 \\ \mathfrak{g}_5 & : [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5 \\ \mathfrak{g}_6 & : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_2, e_3] = e_5.\end{aligned}$$

Bu bölümde 5-boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde η -Einstein yapıların varlığı araştırılmıştır. Bu bölüm ve beşinci bölümde elde edilen sonuçlar makale olarak yayınlanmıştır [16].

5-boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde parakontak yapıların varlığı [21] çalışmasında incelenmiştir. Buna göre, yalnız $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ üzerinde parakontak yapılar vardır. O halde η -Einstein manifoldun tanımı gereği $\mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_5$, $\mathfrak{g}_6$ üzerinde parakontak yapı olmadığı için η -Einstein yapı da yoktur. Ayrıca $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, 2, 3$ cebirleri üzerinde bir vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul bu vektör alanının $\langle e_5 \rangle$ uzayında olmasıdır [21].

Önerme 4.1. $\mathfrak{g}_1$ Lie cebri üzerinde η -Einstein yapı yoktur.

Kanıt. Sıfırdan farklı Levi-Civita kovaryant türevleri [21] de Kozsul formülü kullanılarak hesaplanmıştır.

(φ, ξ, η, g) dörtlüsü $\mathfrak{g}_1$ üzerinde bir η -Einstein yapı olsun. ξ Killing olduğundan, $\xi = \xi_5 e_5$ olur.

$$\eta(\xi) = 1 = g(\xi, \xi) = g(\xi_5 e_5, \xi_5 e_5) = \xi_5^2 \epsilon_5 \text{ olduğundan, } \xi_5^2 = 1 \text{ ve } \epsilon_5 = +1 \text{ dir.}$$

$$(3.22) \text{ eşitliğinden, } Ric(\xi, \xi) = \xi_5^2 Ric(e_5, e_5) = Ric(e_5, e_5) = -4 \text{ bulunur. Ayrıca}$$

direkt hesapla $Ric(e_5, e_5)$ hesaplandığında ise,

$$R_{e_5 e_m} e_5 = \nabla_{[e_5, e_m]} e_5 - \nabla_{e_5} (\nabla_{e_m} e_5) + \nabla_{e_m} (\nabla_{e_5} e_5) = -\nabla_{e_5} (\nabla_{e_m} e_5)$$

ve

$$\begin{aligned} R_{e_5 e_1} e_5 &= -\nabla_{e_5} (\nabla_{e_1} e_5) = -\nabla_{e_5} \left(-\frac{1}{2} \epsilon_2 \epsilon_5 e_2\right) = \frac{1}{2} \epsilon_2 \epsilon_5 \left(\frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_5 e_1\right) = \frac{1}{4} \epsilon_1 \epsilon_2 e_1, \\ R_{e_5 e_2} e_5 &= \frac{1}{4} \epsilon_1 \epsilon_2 e_2, \quad R_{e_5 e_3} e_5 = \frac{1}{4} \epsilon_3 \epsilon_4 e_3, \quad R_{e_5 e_4} e_5 = \frac{1}{4} \epsilon_3 \epsilon_4 e_4 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} Ric(e_5, e_5) &= \sum_{m=1}^5 \epsilon_m g(R_{e_5 e_m} e_5, e_m) \\ &= \epsilon_1 g\left(\frac{1}{4} \epsilon_1 \epsilon_2 e_1, e_1\right) + \epsilon_2 g\left(\frac{1}{4} \epsilon_1 \epsilon_2 e_2, e_2\right) + \epsilon_3 g\left(\frac{1}{4} \epsilon_3 \epsilon_4 e_3, e_3\right) + \epsilon_4 g\left(\frac{1}{4} \epsilon_3 \epsilon_4 e_4, e_4\right) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_2 + \frac{1}{2} \epsilon_3 \epsilon_4 \end{aligned}$$

bulunur. $\epsilon_i = \pm 1$ olduğundan, $Ric(e_5, e_5) = \frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_2 + \frac{1}{2} \epsilon_3 \epsilon_4 \neq -4$ tür. O halde $\mathfrak{g}_1$ üzerinde η -Einstein yapı yoktur. $\square$

Benzer şekilde $\mathfrak{g}_2$ ve $\mathfrak{g}_3$ cebirleri üzerinde η -Einstein yapıların olmadığı görülür.

Önerme 4.2. $\mathfrak{g}_2$ Lie cebri üzerinde η -Einstein yapı yoktur.

Önerme 4.3. $\mathfrak{g}_3$ Lie cebri üzerinde η -Einstein yapı yoktur.

Sonuç olarak 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde η -Einstein yapı yoktur.

5. 5 BOYUTLU NİLPOTENT LİE CEBİRLERİ ÜZERİNDE PARAKONTAK YAPI ÖRNEKLERİ

Bu bölümde 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde hemen hemen parakontak yapı örnekleri verilmiş ve [30] makalesindeki sınıflandırmaya göre ait oldukları sınıflar belirlenmiştir. Bunun için F^i izdüşümleri hesaplanmıştır.

$\mathfrak{g}_1$ Lie cebri:

$\mathfrak{g}_1$ Lie cebirinin $\{e_1, e_2, \dots, e_5\}$ tabanı için, sıfırdan farklı bracketler

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_3, e_4] = e_5$$

şeklindedir.

$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = -g(e_5, e_5) = 1$ olacak şekilde semi-Riemann g metriği verilsin. $\xi = e_1$, $\eta = e^1$, $\varphi(e_1) = 0$, $\varphi(e_2) = e_4$, $\varphi(e_3) = e_5$, $\varphi(e_4) = e_2$, $\varphi(e_5) = e_3$ şeklinde tanımlı (φ, ξ, η, g) dördlüsü $\mathfrak{g}_1$ üzerinde hemen hemen parakontak metrik bir yapıdır.

Sıfırdan farklı kovaryant türevler Kozsul formülünden hesaplanır [21]:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_2 &= \frac{1}{2} e_5, & \nabla_{e_1} e_5 &= \frac{1}{2} e_2, \\ \nabla_{e_2} e_1 &= -\frac{1}{2} e_5, & \nabla_{e_2} e_5 &= -\frac{1}{2} e_1, \\ \nabla_{e_3} e_4 &= \frac{1}{2} e_5, & \nabla_{e_3} e_5 &= -\frac{1}{2} e_4, \\ \nabla_{e_4} e_3 &= -\frac{1}{2} e_5, & \nabla_{e_4} e_5 &= -\frac{1}{2} e_3, \\ \nabla_{e_5} e_1 &= \frac{1}{2} e_2, & \nabla_{e_5} e_2 &= -\frac{1}{2} e_1, & \nabla_{e_5} e_3 &= -\frac{1}{2} e_4, & \nabla_{e_5} e_4 &= -\frac{1}{2} e_3. \end{aligned}$$

F^i izdüşümlerini yazmak için öncelikle $F(e_i, e_j, e_k) = g((\nabla_{e_i} \varphi)(e_j), e_k)$ yapı sabitleri (structure constants) belirlenmiştir. Sıfırdan farklı yapı sabitleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} F(e_2, e_1, e_3) &= F(e_1, e_3, e_2) = -F(e_1, e_2, e_3) = -F(e_2, e_3, e_1) = 1/2, \\ F(e_1, e_5, e_4) &= F(e_5, e_1, e_4) = -F(e_1, e_4, e_5) = -F(e_5, e_4, e_1) = 1/2, \\ F(e_3, e_5, e_2) &= F(e_5, e_3, e_2) = -F(e_5, e_2, e_3) = -F(e_3, e_2, e_5) = 1/2, \\ F(e_3, e_3, e_4) &= -F(e_3, e_4, e_3) = 1/2, \\ F(e_5, e_5, e_4) &= -F(e_5, e_4, e_5) = 1/2. \end{aligned}$$

Teorem 3.4 ten, 5 boyutlu bir uzayda $\mathbb{G}_3$ sınıfının boyutu sıfır olduğundan, $F^3 = 0$

olur.

(3.46) eşitliğinden, $F^{12} = 0$ bulunur. $Y = \sum_{i=1}^5 Y_i e_i$ için,

$$\varphi^2(Y) = \varphi(Y_2 e_4 + Y_3 e_5 + Y_4 e_2 + Y_5 e_3) = Y_2 e_2 + Y_3 e_3 + Y_4 e_4 + Y_5 e_5$$

olduğundan, (3.45) ten,

$$\begin{aligned} F^{11}(X, Y, Z) &= \eta(X)F(\xi, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z) \\ &= X_1 F(e_1, Y_2 e_2 + Y_3 e_3 + Y_4 e_4 + Y_5 e_5, Z_2 e_2 + Z_3 e_3 + Z_4 e_4 + Z_5 e_5) \\ &= X_1 \{Y_2 Z_3 F(e_1, e_2, e_3) + Y_3 Z_2 F(e_1, e_3, e_2) \\ &\quad + Y_4 Z_5 F(e_1, e_4, e_5) + Y_5 Z_4 F(e_1, e_5, e_4)\} \\ &= \frac{1}{2} X_1 \{-Y_2 Z_3 + Y_3 Z_2 - Y_4 Z_5 + Y_5 Z_4\} \neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$F(\varphi^2 X, \varphi^2 Z, \xi) = -\frac{1}{2} X_2 Z_3 - \frac{1}{2} X_5 Z_4$$

ve

$$F(\varphi X, \varphi Z, \xi) = -\frac{1}{2} X_4 Z_5 - \frac{1}{2} X_3 Z_2$$

olduğundan, (3.44) ve (3.43) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} F^{10}(X, Y, Z) &= -\frac{1}{4} Y_1 \{X_2 Z_3 F(e_2, e_3, e_1) + X_5 Z_4 F(e_5, e_4, e_1) \\ &\quad + X_4 Z_5 F(e_2, e_3, e_1) + X_3 Z_2 F(e_5, e_4, e_1) \\ &\quad + Z_2 X_3 F(e_2, e_3, e_1) + Z_5 X_4 F(e_5, e_4, e_1) \\ &\quad + Z_4 X_5 F(e_2, e_3, e_1) + Z_3 X_2 F(e_5, e_4, e_1)\} \\ &\quad + \frac{1}{4} Z_1 \{X_2 Y_3 F(e_2, e_3, e_1) + X_5 Y_4 F(e_5, e_4, e_1) \\ &\quad + X_4 Y_5 F(e_2, e_3, e_1) + X_3 Y_2 F(e_5, e_4, e_1) \\ &\quad + Y_2 X_3 F(e_2, e_3, e_1) + Y_5 X_4 F(e_5, e_4, e_1) \\ &\quad + Y_4 X_5 F(e_2, e_3, e_1) + Y_3 X_2 F(e_5, e_4, e_1)\} \\ &= \frac{1}{4} Y_1 \{X_2 Z_3 + X_3 Z_2 + X_4 Z_5 + X_5 Z_4\} \\ &\quad - \frac{1}{4} Z_1 \{X_2 Y_3 + X_5 Y_4 + X_4 Y_5 + X_3 Y_2\} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
F^9(X, Y, Z) &= -\frac{1}{4}Y_1 \{X_2Z_3F(e_2, e_3, e_1) + X_5Z_4F(e_5, e_4, e_1) \\
&\quad + X_4Z_5F(e_2, e_3, e_1) + X_3Z_2F(e_5, e_4, e_1) \\
&\quad - Z_2X_3F(e_2, e_3, e_1) - Z_5X_4F(e_5, e_4, e_1) \\
&\quad - Z_4X_5F(e_2, e_3, e_1) - Z_3X_2F(e_5, e_4, e_1)\} \\
&\quad + \frac{1}{4}Z_1.0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
(F^5 + F^8)(X, Y, Z) &= -\frac{1}{4}Y_1 \left\{ -\frac{1}{2}X_2Z_3 - \frac{1}{2}X_5Z_4 + \frac{1}{2}X_4Z_5 + \frac{1}{2}X_3Z_2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}X_3Z_2 - \frac{1}{2}X_4Z_5 + \frac{1}{2}X_5Z_4 + \frac{1}{2}X_2Z_3 \right\} \\
&\quad + \frac{1}{4}Z_1.0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$F^5 \in \mathbb{G}_5$, $F^8 \in \mathbb{G}_8$ ve $F^5 + F^8 = 0$ olduğundan, $F^5 = F^8 = 0$ dir.

$$F^4(X, Y, Z) = \frac{1}{2}\{F(\varphi^2X, \varphi^2Y, \varphi^2Z) + F(\varphi X, \varphi^2Y, \varphi Z)\} - F^3(X, Y, Z)$$

ve $F^3 = 0$ olduğundan, ayrıca

$$\begin{aligned}
F(\varphi^2X, \varphi^2Y, \varphi^2Z) &= -\frac{1}{2}X_3Y_2Z_5 + \frac{1}{2}X_3Y_3Z_4 - \frac{1}{2}X_3Y_4Z_3 + \frac{1}{2}X_3Y_5Z_2 \\
&\quad - \frac{1}{2}X_5Y_2Z_3 + \frac{1}{2}X_5Y_3Z_2 - \frac{1}{2}X_5Y_4Z_5 + \frac{1}{2}X_5Y_5Z_4
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
F(\varphi X, \varphi^2Y, \varphi Z) &= -\frac{1}{2}X_3Y_2Z_5 + \frac{1}{2}X_3Y_3Z_4 - \frac{1}{2}X_3Y_4Z_3 + \frac{1}{2}X_3Y_5Z_2 \\
&\quad - \frac{1}{2}X_5Y_2Z_3 + \frac{1}{2}X_5Y_3Z_2 - \frac{1}{2}X_5Y_4Z_5 + \frac{1}{2}X_5Y_5Z_4
\end{aligned}$$

eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
F^4(X, Y, Z) &= \frac{1}{2}\{F(\varphi^2X, \varphi^2Y, \varphi^2Z) + F(\varphi X, \varphi^2Y, \varphi Z)\} \\
&= F(\varphi^2X, \varphi^2Y, \varphi^2Z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}X_3Y_2Z_5 + \frac{1}{2}X_3Y_3Z_4 - \frac{1}{2}X_3Y_4Z_3 + \frac{1}{2}X_3Y_5Z_2 \\
&\quad - \frac{1}{2}X_5Y_2Z_3 + \frac{1}{2}X_5Y_3Z_2 - \frac{1}{2}X_5Y_4Z_5 + \frac{1}{2}X_5Y_5Z_4 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
F^{W_1}(X, Y, Z) &= (F^1 + F^2 + F^3 + F^4)(X, Y, Z) \\
&= F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z) \\
&= F^4(X, Y, Z)
\end{aligned}$$

olduğundan, $F^1 = F^2 = 0$ bulunur.

$$\begin{aligned}
F^{W_2}(X, Y, Z) &= (F^5 + F^6 + F^7 + F^8 + F^9 + F^{10})(X, Y, Z) \\
&= F^6 + F^7 + F^{10} \\
&= -\eta(Y)F(\varphi^2 X, \varphi^2 Z, \xi) + \eta(Z)F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \xi) \\
&= \frac{1}{2}X_2Y_1Z_3 + \frac{1}{2}X_5Y_1Z_4 - \frac{1}{2}X_2Y_3Z_1 - \frac{1}{2}X_5Y_4Z_1
\end{aligned}$$

ve $F^{W_2} \neq F^{10}$ olduğundan, $F^6 + F^7 \neq 0$ dir.

$$\begin{aligned}
(F^6 + F^7)(X, Y, Z) &= F^{W_2}(X, Y, Z) - F^{10}(X, Y, Z) \\
&= \frac{1}{4}X_2Y_1Z_3 + \frac{1}{4}X_5Y_1Z_4 - \frac{1}{4}X_4Y_1Z_5 \\
&\quad - \frac{1}{4}X_3Y_1Z_2 - \frac{1}{4}X_2Y_3Z_1 - \frac{1}{4}X_5Y_4Z_1 \\
&\quad + \frac{1}{4}X_4Y_5Z_1 + \frac{1}{4}X_3Y_2Z_1
\end{aligned}$$

olur. $T = F^6 + F^7$ tensörünün yapı sabitleri

$$\begin{aligned}
T(e_2, e_1, e_3) &= -T(e_2, e_3, e_1) = -T(e_3, e_1, e_2) = T(e_3, e_2, e_1) = 1/4, \\
T(e_5, e_1, e_4) &= -T(e_4, e_1, e_5) = -T(e_5, e_4, e_1) = T(e_4, e_5, e_1) = 1/4
\end{aligned}$$

sayılarıdır.

T tensörü (3.30) eşitliklerini sağlar:

$$\begin{aligned}
&-\eta(Y)T(X, Z, \xi) + \eta(Z)T(X, Y, \xi) \\
&= -Y_1T(X_1e_1 + \dots + X_5e_5, Z_1e_1 + \dots + Z_5e_5, e_1) \\
&\quad + Z_1T(X_1e_1 + \dots + X_5e_5, Y_1e_1 + \dots + Y_5e_5, e_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -Y_1\left\{-\frac{1}{4}X_2Z_3 - \frac{1}{4}X_5Z_4 + \frac{1}{4}X_4Z_5 + \frac{1}{4}X_3Z_2\right\} \\
&\quad + Z_1\left\{-\frac{1}{4}X_2Y_3 - \frac{1}{4}X_5Y_4 + \frac{1}{4}X_4Y_5 + \frac{1}{4}X_3Y_2\right\} \\
&= T(X, Y, Z)
\end{aligned}$$

olur.

$$-T(Y, X, \xi) = -T(Y, X, e_1) = \frac{1}{4}Y_2X_3 + \frac{1}{4}Y_5X_4 - \frac{1}{4}Y_4X_5 - \frac{1}{4}Y_3X_2 = T(X, Y, \xi),$$

ve

$$\begin{aligned}
T(\varphi X, \varphi Y, \xi) &= T(X_4e_2 + X_5e_3 + X_2e_4 + X_3e_5, Y_4e_2 + Y_5e_3 + Y_2e_4 + Y_3e_5, e_1) \\
&= -\frac{1}{4}X_4Y_5 - \frac{1}{4}X_3Y_2 + \frac{1}{4}X_2Y_3 + \frac{1}{4}X_5Y_4 = -T(X, Y, \xi),
\end{aligned}$$

bulunur.

TM uzayının $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\} = \{e_2, e_3, e_4, e_5, \xi = e_1\}$ tabanı için,
 $g_{ij} = \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1)$ ve $g^{ij} = \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\theta_T^*(\xi) &= \theta_T^*(e_1) = g^{ij}T(f_i, \varphi f_j, \xi) \\
&= T(f_1, \varphi f_1, e_1) + T(f_2, \varphi f_2, e_1) - T(f_3, \varphi f_3, e_1) - T(f_4, \varphi f_4, e_1) \\
&= T(e_2, \varphi e_2, e_1) + T(e_3, \varphi e_3, e_1) - T(e_4, \varphi e_4, e_1) - T(e_5, \varphi e_5, e_1) \\
&= T(e_2, e_4, e_1) + T(e_3, e_5, e_1) - T(e_4, e_2, e_1) - T(e_5, e_3, e_1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $T = F^6 + F^7$ izdüşümü $\mathbb{G}_7$ sınıfının elemanıdır, o halde $F^6 = 0$ dır.

O halde hemen hemen parakontak yapı $\mathbb{G}_4 \oplus \mathbb{G}_7 \oplus \mathbb{G}_{10} \oplus \mathbb{G}_{11}$ sınıfındadır.

$\mathfrak{g}_1$ Lie cebri üzerinde diğer bir örnek:

$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = g(e_5, e_5) = 1$ olacak şekilde g metriği verilsin. $\xi = e_5$, $\eta = e^5$, $\varphi(e_1) = e_3$, $\varphi(e_2) = e_4$, $\varphi(e_3) = e_1$, $\varphi(e_4) = e_2$, $\varphi(e_5) = 0$ şeklinde tanımlı (φ, ξ, η, g) dördlüsü $\mathfrak{g}_1$ üzerinde hemen hemen parakontak metrik bir yapıdır.

$\xi = e_5$ Killing olduğundan, Önerme 3.10 dan, $F^6 = F^7 = F^{10} = F^{12} = 0$ olur.

Sıfırdan farklı yapı sabitleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
F(e_1, e_4, e_5) &= -F(e_1, e_5, e_4) = 1/2, \\
-F(e_2, e_3, e_5) &= F(e_2, e_5, e_3) = 1/2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-F(e_3, e_5, e_2) &= F(e_3, e_2, e_5) = 1/2, \\
-F(e_4, e_1, e_5) &= F(e_4, e_5, e_1) = 1/2, \\
-F(e_5, e_1, e_4) &= F(e_5, e_4, e_1) = 1, \\
F(e_5, e_2, e_3) &= -F(e_5, e_3, e_2) = 1.
\end{aligned}$$

(3.45) ten,

$$F^{11}(X, Y, Z) = X_5 \{-Y_1 Z_4 + Y_2 Z_3 - Y_3 Z_2 + Y_4 Z_1\} \neq 0$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
F(\varphi^2 X, \varphi^2 Z, \xi) &= \frac{1}{2} \{X_1 Z_4 - X_2 Z_3 + X_3 Z_2 - X_4 Z_1\} \\
&= F(\varphi X, \varphi Z, \xi)
\end{aligned}$$

olduğundan, (3.43) den,

$$\begin{aligned}
F^9(X, Y, Z) &= -\frac{1}{2} Y_5 \{X_1 Z_4 - X_2 Z_3 + X_3 Z_2 - X_4 Z_1\} \\
&\quad + \frac{1}{2} Z_5 \{X_1 Y_4 - X_2 Y_3 + X_3 Y_2 - X_4 Y_1\} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca (3.39) ve (3.42) tanımlarından, $F^5 + F^8 = 0$ olduğundan, $F^5 = F^8 = 0$ dir. Son olarak (3.24) denkleminde $F^{W_1} = 0$ olduğu görülür. Buradan,

$F^1 = F^2 = F^3 = F^4 = 0$ dir. O halde hemen hemen parakontak yapı $\mathbb{G}_9 \oplus \mathbb{G}_{11}$ sınıfındadır.

$\mathfrak{g}_2$ Lie cebri:

$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = -g(e_5, e_5) = 1$ olacak şekilde g metriği verilsin. $\xi = e_1$, $\eta = e^1$, $\varphi(e_1) = 0$, $\varphi(e_2) = e_4$, $\varphi(e_3) = e_5$, $\varphi(e_4) = e_2$, $\varphi(e_5) = e_3$ olarak tanımlı (φ, ξ, η, g) dördlüsü $\mathfrak{g}_2$ üzerinde hemen hemen parakontak metrik bir yapıdır. Sıfırdan farklı yapı sabitleri şunlardır:

$$\begin{aligned}
F(e_1, e_2, e_5) &= -F(e_1, e_5, e_2) = -F(e_2, e_1, e_5) = F(e_2, e_5, e_1) = 1/2, \\
-F(e_1, e_3, e_4) &= F(e_1, e_4, e_3) = F(e_3, e_4, e_1) = -F(e_3, e_1, e_4) = 1/2, \\
-F(e_2, e_2, e_5) &= F(e_2, e_5, e_2) = 1/2, \\
F(e_2, e_3, e_4) &= -F(e_2, e_4, e_3) = F(e_4, e_2, e_3) = -F(e_4, e_3, e_2) = 1/2,
\end{aligned}$$

$$F(e_3, e_1, e_3) = -F(e_3, e_3, e_1) = 1/2,$$

$$F(e_4, e_4, e_5) = -F(e_4, e_5, e_4) = 1/2,$$

$$F(e_5, e_1, e_5) = -F(e_5, e_5, e_1) = 1/2.$$

$\mathbb{G}_3$ uzayının boyutu 0 olduğundan, $F^3 = 0$ dır. Diğer izdüşümler ise şu şekildedir:
 $F^{12} = F^9 = 0,$

$$\begin{aligned} F^{11}(X, Y, Z) &= \frac{1}{2}X_1\{Y_2Z_5 - Y_3Z_4 + Y_4Z_3 - Y_5Z_2\} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F^{10}(X, Y, Z) &= -\frac{1}{4}Y_1\{X_2Z_5 - 2X_3Z_3 + X_3Z_4 - 2X_5Z_5 + X_4Z_3 + X_5Z_2\} \\ &\quad + \frac{1}{4}Z_1\{X_2Y_5 - 2X_3Y_3 + X_3Y_4 - 2X_5Y_5 + X_4Y_3 + X_5Y_2\} \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

bunlara ek olarak $F^5 + F^8 = 0$ olduğundan, $F^5 = F^8 = 0$ dır.

$$F^4(X, Y, Z) = \frac{1}{2}\{F(\varphi^2X, \varphi^2Y, \varphi^2Z) + F(\varphi X, \varphi^2Y, \varphi Z)\} - F^3(X, Y, Z)$$

ve $F^3 = 0$ olduğundan, ayrıca

$$\begin{aligned} F(\varphi^2X, \varphi^2Y, \varphi^2Z) &= \frac{1}{2}\{-X_2Y_2Z_5 + X_2Y_3Z_4 - X_2Y_4Z_3 + X_4Y_2Z_3 \\ &\quad - X_4Y_3Z_2 + X_4Y_4Z_5 - X_4Y_5Z_4 + X_2Y_5Z_2\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F(\varphi X, \varphi^2Y, \varphi Z) &= \frac{1}{2}\{-X_4Y_2Z_3 + X_4Y_3Z_2 - X_4Y_4Z_5 + X_2Y_2Z_5 \\ &\quad - X_2Y_3Z_4 + X_2Y_4Z_3 - X_2Y_5Z_2 + X_4Y_5Z_4\} \end{aligned}$$

eşitliklerinden, $F(\varphi^2X, \varphi^2Y, \varphi^2Z) = -F(\varphi X, \varphi^2Y, \varphi Z)$ ve

$$\begin{aligned} F^4(X, Y, Z) &= \frac{1}{2}\{F(\varphi^2X, \varphi^2Y, \varphi^2Z) + F(\varphi X, \varphi^2Y, \varphi Z)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
(F^1 + F^2)(X, Y, Z) &= F^{W_1}(X, Y, Z) - F^4(X, Y, Z) \\
&= F^{W_1}(X, Y, Z) \\
&= F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z) \\
&= \frac{1}{2} \{-X_2 Y_2 Z_5 + X_2 Y_3 Z_4 - X_2 Y_4 Z_3 + X_4 Y_2 Z_3 \\
&\quad - X_4 Y_3 Z_2 + X_4 Y_4 Z_5 - X_4 Y_5 Z_4 + X_2 Y_5 Z_2\}
\end{aligned}$$

olduğundan, $F^1 + F^2 \neq 0$ bulunur. $T = F^1 + F^2$ olsun.

T tensörünün sıfırdan farklı yapı sabitleri:

$$\begin{aligned}
-T(e_2, e_2, e_5) &= T(e_2, e_3, e_4) = -T(e_2, e_4, e_3) = T(e_2, e_5, e_2) = 1/2, \\
T(e_4, e_2, e_3) &= -T(e_4, e_3, e_2) = T(e_4, e_4, e_5) = -T(e_4, e_5, e_4) = 1/2
\end{aligned}$$

olur.

TM nin $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\} = \{e_2, e_3, e_4, e_5, \xi = e_1\}$ tabanı için,
 $g_{ij} = \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1)$ ve $g^{ij} = \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\theta_T(X) &= g^{ij} T(f_i, f_j, X) \\
&= T(f_1, f_1, X) + T(f_2, f_2, X) - T(f_3, f_3, X) - T(f_4, f_4, X) \\
&= T(e_2, e_2, X) + T(e_3, e_3, X) - T(e_4, e_4, X) - T(e_5, e_5, X) \\
&= X_5 T(e_2, e_2, e_5) - X_5 T(e_4, e_4, e_5) \\
&= -X_5,
\end{aligned}$$

ayrıca

$$\theta_T(\varphi X) = \theta_T(X_4 e_2 + X_5 e_3 + X_2 e_4 + X_3 e_5) = -X_3$$

ve

$$\theta_T(\varphi^2 X) = \theta_T(X_2 e_2 + X_3 e_3 + X_4 e_4 + X_5 e_5) = -X_5$$

olur. Buradan ise

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2(n-1)} \{g(X, \varphi Y) \theta_F(\varphi Z) - g(X, \varphi Z) \theta_F(\varphi Y) \\
&g(\varphi X, \varphi Y) \theta_F(\varphi^2 Z) + g(\varphi X, \varphi Z) \theta_F(\varphi^2 Y)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \{-X_2Y_2Z_5 + X_2Y_3Z_4 - X_2Y_4Z_3 + X_4Y_2Z_3 \\
&\quad - X_4Y_3Z_2 + X_4Y_4Z_5 - X_4Y_5Z_4 + X_2Y_5Z_2\} \\
&= T(X, Y, Z)
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $T = F^1 + F^2$ tensörünün $\mathbb{G}_1$ sınıfının (3.26) tanımlanma bağıntısını sağlar ve $T \in \mathbb{G}_1$ olduğundan, $F^2 = 0$, $F^1 \neq 0$ dir.

(3.25) eşitliğinden ise,

$$\begin{aligned}
F^{W_2}(X, Y, Z) &= \frac{1}{2} \{-X_2Y_1Z_5 + X_3Y_1Z_3 - X_3Y_1Z_4 + X_5Y_1Z_5 \\
&\quad + X_2Y_5Z_1 - X_3Y_3Z_1 + X_3Y_4Z_1 - X_5Y_5Z_1\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(F^6 + F^7)(X, Y, Z) &= F^{W_2}(X, Y, Z) - F^{10}(X, Y, Z) \\
&= -\frac{1}{4}X_2Y_1Z_5 - \frac{1}{4}X_3Y_1Z_4 + \frac{1}{4}X_2Y_5Z_1 \\
&\quad + \frac{1}{4}X_3Y_4Z_1 + \frac{1}{4}X_4Y_1Z_3 + \frac{1}{4}X_5Y_1Z_2 \\
&\quad - \frac{1}{4}X_4Y_3Z_1 - \frac{1}{4}X_5Y_2Z_1
\end{aligned}$$

bulunur.

$T = F^6 + F^7$ tensörünün sıfırdan farklı yapı sabitleri aşağıdadır:

$$\begin{aligned}
-T(e_2, e_1, e_5) &= T(e_2, e_5, e_1) = T(e_5, e_1, e_2) = -T(e_5, e_2, e_1) = 1/4, \\
-T(e_3, e_1, e_4) &= T(e_3, e_4, e_1) = T(e_4, e_1, e_3) = -T(e_4, e_3, e_1) = 1/4.
\end{aligned}$$

T tensörünün ait olduğu sınıf belirlenecektir.

$$\begin{aligned}
&-\eta(Y)T(X, Z, \xi) + \eta(Z)T(X, Y, \xi) \\
&= -Y_1\left\{\frac{1}{4}X_2Z_5 + \frac{1}{4}X_3Z_4 - \frac{1}{4}X_4Z_3 - \frac{1}{4}X_5Z_2\right\} \\
&\quad + Z_1\left\{\frac{1}{4}X_2Y_5 + \frac{1}{4}X_3Y_4 - \frac{1}{4}X_4Y_3 - \frac{1}{4}X_5Y_2\right\} \\
&= T(X, Y, Z)
\end{aligned}$$

ve

$$-T(Y, X, \xi) = -T(Y, X, e_1) = -\frac{1}{4}Y_2X_5 - \frac{1}{4}Y_3X_4 + \frac{1}{4}Y_4X_3 + \frac{1}{4}Y_5X_2 = T(X, Y, \xi),$$

ile

$$\begin{aligned} -T(\varphi X, \varphi y, \xi) &= -T(X_4 e_2 + X_5 e_3 + X_2 e_4 + X_3 e_5, Y_4 e_2 + Y_5 e_3 + Y_2 e_4 + Y_3 e_5, e_1) \\ &= \frac{1}{4} X_3 Y_4 + \frac{1}{4} X_2 Y_5 - \frac{1}{4} X_5 Y_2 - \frac{1}{4} X_4 Y_3 = T(X, Y, \xi), \end{aligned}$$

koşulları sağlanır. Bunlara ek olarak, TM nin $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\} = \{e_2, e_3, e_4, e_5, \xi = e_1\}$ tabanı için, $g_{ij} = \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1)$ ve $g^{ij} = \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \theta_T^*(\xi) &= \theta_T^*(e_1) = g^{ij} T(f_i, \varphi f_j, \xi) \\ &= T(f_1, \varphi f_1, e_1) + T(f_2, \varphi f_2, e_1) - T(f_3, \varphi f_3, e_1) - T(f_4, \varphi f_4, e_1) \\ &= T(e_2, \varphi e_2, e_1) + T(e_3, \varphi e_3, e_1) - T(e_4, \varphi e_4, e_1) - T(e_5, \varphi e_5, e_1) \\ &= T(e_2, e_4, e_1) + T(e_3, e_5, e_1) - T(e_4, e_2, e_1) - T(e_5, e_3, e_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $T = F^6 + F^7$ izdüşümü (3.30) bağıntısını sağladığından, $T \in \mathbb{G}_7$ dir, o halde $F^6 = 0$ dir.

Böylece hemen hemen parakontak yapı $\mathbb{G}_1 \oplus \mathbb{G}_7 \oplus \mathbb{G}_{10} \oplus \mathbb{G}_{11}$ sınıfındadır.

$\mathfrak{g}_2$ Lie cebri üzerinde diğer bir örnek:

$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = g(e_5, e_5) = 1$ olacak şekilde ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_5\}$ tabanı ve g metriği verilsin. $\xi = e_5$, $\eta = e^5$, $\varphi(e_1) = e_3$, $\varphi(e_2) = e_4$, $\varphi(e_3) = e_1$, $\varphi(e_4) = e_2$, $\varphi(e_5) = 0$ şeklinde tanımlı (φ, ξ, η, g) dördlüsü, karakteristik vektör alanı Killing olan $\mathfrak{g}_2$ üzerinde hemen hemen parakontak metrik bir yapıdır. Önerme 3.10 dan, $F^6 = F^7 = F^{10} = F^{12} = 0$ dir.

Sıfırdan farklı yapı sabitleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} F(e_1, e_1, e_2) &= -F(e_1, e_2, e_1) = 1/2, \\ F(e_1, e_1, e_5) &= -F(e_1, e_5, e_1) = 1/2, \\ F(e_1, e_3, e_4) &= -F(e_1, e_4, e_3) = F(e_3, e_1, e_4) = -F(e_3, e_4, e_1) = 1/2, \\ F(e_2, e_2, e_5) &= -F(e_2, e_5, e_2) = 1/2, \\ -F(e_3, e_2, e_3) &= F(e_3, e_3, e_2) = 1/2, \\ F(e_3, e_5, e_3) &= -F(e_3, e_3, e_5) = 1/2, \\ F(e_4, e_5, e_4) &= -F(e_4, e_4, e_5) = 1/2. \end{aligned}$$

Yapı sabitleri dikkate alınarak F^i izdüşüm fonksiyonları hesaplandığında,

$F^{11} = F^9 = 0$ olur.

$F(\varphi^2 X, \varphi^2 Z, \xi) = -F(\varphi X, \varphi Z, \xi)$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned} (F^5 + F^8)(X, Y, Z) &= -\frac{1}{2}Y_5\{X_1Z_1 + X_2Z_2 - X_3Z_3 - X_4Z_4\} \\ &\quad + \frac{1}{2}Z_5\{X_1Y_1 + X_2Y_2 - X_3Y_3 - X_4Y_4\} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $T = F^5 + F^8 \neq 0$ dır.

T tensörünün sıfırdan farklı yapı sabitleri

$$\begin{aligned} T(e_1, e_1, e_5) &= -T(e_1, e_5, e_1) = 1/2, \\ T(e_2, e_2, e_5) &= -T(e_2, e_5, e_2) = 1/2, \\ -T(e_3, e_3, e_5) &= T(e_3, e_5, e_3) = 1/2, \\ -T(e_4, e_4, e_5) &= T(e_4, e_5, e_4) = 1/2 \end{aligned}$$

şeklindedir.

$\{e_1, \dots, e_5 = \xi\}$ ortonormal tabanına göre $g_{ij} = g^{ij} = \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1)$ ve

$$\begin{aligned} \theta_T(\xi) &= g^{ij}T(e_i, e_j, \xi) \\ &= T(e_1, e_1, e_5) + T(e_2, e_2, e_5) - T(e_3, e_3, e_5) - T(e_4, e_4, e_5) \\ &= 2 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} &\frac{\theta_F(\xi)}{2n} \{ \eta(Y)g(\varphi X, \varphi Z) - \eta(Z)g(\varphi X, \varphi Y) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ Y_5g(X_3e_1 + X_4e_2 + X_1e_3 + X_2e_4, Z_3e_1 + Z_4e_2 + Z_1e_3 + Z_2e_4) \\ &\quad - Z_5g(X_3e_1 + X_4e_2 + X_1e_3 + X_2e_4, Y_3e_1 + Y_4e_2 + Y_1e_3 + Y_2e_4) \} \\ &= \frac{1}{2}Y_5\{X_3Z_3 + X_4Z_4 - X_1Z_1 - X_2Z_2\} \\ &\quad - \frac{1}{2}Z_5\{X_3Y_3 + X_4Y_4 - X_1Y_1 - X_2Y_2\} \\ &= T(X, Y, Z) \end{aligned}$$

dir. O halde $T = F^5 + F^8 \in \mathbb{G}_5$ olduğundan, $F^8 = 0$, $F^5 \neq 0$ dir.

$$\begin{aligned} F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z) &= \frac{1}{2} \{ X_1Y_1Z_2 - X_1Y_2Z_1 + X_1Y_3Z_4 - X_1Y_4Z_3 \\ &\quad + X_3Y_1Z_4 - X_3Y_2Z_3 + X_3Y_3Z_2 - X_3Y_4Z_1 \} \end{aligned}$$

$$= F(\varphi X, \varphi^2 Y, \varphi Z)$$

ve

$$\begin{aligned} F^4(X, Y, Z) &= \frac{1}{2}F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z) + F(\varphi X, \varphi^2 Y, \varphi Z) \\ &= F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z) \\ &= F^{W_1} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $F^1 = F^2 = 0$ dir.

Sonuç olarak hemen hemen parakontak yapı $\mathbb{G}_4 \oplus \mathbb{G}_5$ sınıfındadır.

$\mathfrak{g}_3$ Lie cebri:

g metriği $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = -g(e_5, e_5) = 1$ koşulunu sağlasın. $\xi = e_1, \eta = e^1, \varphi(e_1) = 0, \varphi(e_2) = e_4, \varphi(e_3) = e_5, \varphi(e_4) = e_2, \varphi(e_5) = e_3$ şeklinde tanımlı (φ, ξ, η, g) dörtlüsü $\mathfrak{g}_3$ üzerinde hemen hemen parakontak metrik bir yapıdır.

Sıfırdan farklı yapı sabitleri şunlardır:

$$\begin{aligned} F(e_1, e_2, e_3) &= -F(e_1, e_3, e_2) = F(e_3, e_1, e_2) = -F(e_3, e_2, e_1) = 1/2 \\ F(e_1, e_4, e_5) &= -F(e_1, e_5, e_4) = F(e_4, e_1, e_5) = -F(e_4, e_5, e_1) = 1/2, \\ -F(e_2, e_1, e_5) &= F(e_2, e_5, e_1) = F(e_5, e_1, e_2) = -F(e_5, e_2, e_1) = 1/2, \\ F(e_2, e_3, e_4) &= -F(e_2, e_4, e_3) = F(e_4, e_2, e_3) = -F(e_4, e_3, e_2) = 1/2, \\ -F(e_3, e_1, e_4) &= F(e_3, e_4, e_1) = F(e_4, e_1, e_3) = -F(e_4, e_3, e_1) = 1/2, \\ F(e_3, e_2, e_3) &= -F(e_3, e_3, e_2) = 1/2, \\ F(e_3, e_4, e_5) &= -F(e_3, e_5, e_4) = F(e_5, e_4, e_3) = -F(e_5, e_3, e_4) = 1/2, \\ F(e_5, e_2, e_5) &= -F(e_5, e_5, e_2) = 1/2. \end{aligned}$$

$\mathbb{G}_3$ uzayının boyutu 0 olduğundan, $F^3 = 0$ dir. Direkt hesapla $F^{12} = F^9 = 0$ dir.

(3.45) ten

$$\begin{aligned} F^{11}(X, Y, Z) &= \frac{1}{2}X_1\{Y_2Z_3 - Y_3Z_2 + Y_4Z_5 - Y_5Z_4\} \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

(3.44) eşitliğinden

$$\begin{aligned} F^{10}(X, Y, Z) &= \frac{1}{4}Y_1\{X_3Z_2 + X_4Z_5 + X_5Z_4 + X_2Z_3\} \\ &\quad - \frac{1}{4}Z_1\{X_3Y_2 + X_4Y_5 + X_5Y_4 + X_2Y_3\} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. (3.39) ve (3.42) tan,

$$\begin{aligned} (F^5 + F^8)(X, Y, Z) &= -\frac{1}{4}Y_1\{X_2Z_5 + X_3Z_4 - X_4Z_3 - X_5Z_2 \\ &\quad - \frac{1}{2}X_3Z_2 - \frac{1}{2}X_4Z_5 + \frac{1}{2}X_5Z_4 + \frac{1}{2}X_2Z_3\} \\ &\quad + \frac{1}{4}Z_1\left\{X_2Y_5 + X_3Y_4 - X_4Y_3 - X_5Y_2 - \frac{1}{2}X_3Y_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}X_4Y_5 + \frac{1}{2}X_5Y_4 + \frac{1}{2}X_2Y_3\right\} \end{aligned}$$

bulunur. $T = F^5 + F^8 = 0$ olsun. T nin sıfırdan farklı yapı sabitleri

$$\begin{aligned} -T(e_2, e_1, e_5) &= T(e_2, e_5, e_1) = T(e_5, e_1, e_2) = -T(e_5, e_2, e_1) = 1/4, \\ T(e_3, e_1, e_2) &= -T(e_3, e_2, e_1) = -T(e_2, e_1, e_3) = T(e_2, e_3, e_1) = 1/8, \\ -T(e_3, e_1, e_4) &= T(e_4, e_1, e_3) = T(e_3, e_4, e_1) = -T(e_4, e_3, e_1) = 1/4, \\ T(e_4, e_1, e_5) &= -T(e_5, e_1, e_4) = -T(e_4, e_5, e_1) = T(e_5, e_4, e_1) = 1/8 \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \theta_T(\xi) &= g^{ij}T(e_i, e_j, e_1) \\ &= T(e_2, e_2, e_1) + T(e_3, e_3, e_1) - T(e_4, e_4, e_1) - T(e_5, e_5, e_1) = 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $T \notin \mathbb{G}_5$ tir. Ayrıca direkt hesapla $T(X, Y, \xi) = -T(Y, X, \xi)$ olduğundan, $T \notin \mathbb{G}_8$ dir. O halde bu yapı hem $\mathbb{G}_5$, hem $\mathbb{G}_8$ sınıflarından parça içerir. $F^5 \neq 0$ ve $F^8 \neq 0$ dir.

$$S = F^6 + F^7(X, Y, Z) = -\frac{1}{4}Y_1\{-X_4Z_3 + X_3Z_4\} + \frac{1}{4}Z_1\{-X_4Y_3 + X_3Y_4\}$$

tensörünün sıfırdan farklı yapı sabitleri ise

$$S(e_4, e_1, e_3) = -S(e_3, e_1, e_4) = -S(e_4, e_3, e_1) = S(e_3, e_4, e_1) = 1/4$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}\theta_S^*(\xi) &= g^{ij}S(e_i, \varphi e_j, e_1) \\ &= S(e_2, e_4, e_1) + S(e_3, e_5, e_1) - S(e_4, e_2, e_1) - S(e_5, e_3, e_1) = 0\end{aligned}$$

olduğundan $S \notin \mathbb{G}_6$ dir. Ayrıca

$$S(\varphi X, \varphi Y, \xi) = \frac{1}{4}\{-X_2Y_5 + X_5Y_2\} \neq S(X, Y, \xi) = \frac{1}{4}\{-X_4Y_3 + X_3Y_4\}$$

olduğundan $S \notin \mathbb{G}_7$ dir. $F^6 \neq 0$ ve $F^7 \neq 0$ dir.

$$\begin{aligned}F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z) &= \frac{1}{2}\{X_3Y_2Z_3 - X_3Y_3Z_2 + X_3Y_4Z_5 - X_3Y_5Z_4 \\ &\quad + X_5Y_2Z_5 - X_5Y_3Z_4 + X_5Y_4Z_3 - X_5Y_5Z_2\} \\ &= F(\varphi X, \varphi^2 Y, \varphi Z)\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}F^4(X, Y, Z) &= \frac{1}{2}\{F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z) + F(\varphi X, \varphi^2 Y, \varphi Z)\} - F^3(X, Y, Z) \\ &= F(\varphi^2 X, \varphi^2 Y, \varphi^2 Z) = F^{W_1}\end{aligned}$$

olur. O halde $F^1 = F^2 = 0$ bulunur.

Sonuç olarak hemen hemen parakontak yapı $\mathbb{G}_4 \oplus \mathbb{G}_5 \oplus \mathbb{G}_6 \oplus \mathbb{G}_7 \oplus \mathbb{G}_8 \oplus \mathbb{G}_{10} \oplus \mathbb{G}_{11}$ sınıfındadır.

$\mathfrak{g}_3$ Lie cebri üzerinde diğer bir örnek:

$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = g(e_5, e_5) = 1$ olacak şekilde g metriği ve $\xi = e_5$, $\eta = e^5$, $\varphi(e_1) = e_3$, $\varphi(e_2) = e_4$, $\varphi(e_3) = e_1$, $\varphi(e_4) = e_2$, $\varphi(e_5) = 0$ şeklinde tanımlı (φ, ξ, η, g) verilsin. (φ, ξ, η, g) $\mathfrak{g}_3$ üzerinde hemen hemen parakontak metrik bir yapıdır. Önerme 3.10 dan, $F^6 = F^7 = F^{10} = F^{12} = 0$ dir.

Sıfırdan farklı yapı sabitleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}F(e_1, e_1, e_2) &= -F(e_1, e_2, e_1) = 1/2, \\ -F(e_1, e_1, e_4) &= F(e_1, e_4, e_1) = 1/2, \\ F(e_1, e_2, e_3) &= -F(e_1, e_3, e_2) = F(e_3, e_1, e_2) = -F(e_3, e_2, e_1) = 1/2, \\ F(e_1, e_2, e_5) &= -F(e_1, e_5, e_2) = F(e_2, e_1, e_5) = -F(e_2, e_5, e_1) = 1/2, \\ F(e_1, e_3, e_4) &= -F(e_1, e_4, e_3) = F(e_3, e_1, e_4) = -F(e_3, e_4, e_1) = 1/2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(e_3, e_3, e_2) &= -F(e_3, e_2, e_3) = 1/2, \\
F(e_3, e_3, e_4) &= -F(e_3, e_4, e_3) = 1/2, \\
-F(e_3, e_4, e_5) &= F(e_3, e_5, e_4) = F(e_4, e_5, e_3) = -F(e_4, e_3, e_5) = 1/2.
\end{aligned}$$

(3.45) ten, $F^{11} = 0$, (3.43) den $F^9 = 0$, (3.39) ve (3.42) tan ise

$$\begin{aligned}
(F^5 + F^8)(X, Y, Z) &= -Y_5\{X_1Z_2 + X_2Z_1 - X_3Z_4 - X_4Z_3\} \\
&\quad + Z_5\{X_1Y_2 + X_2Y_1 - X_3Y_4 - X_4Y_3\} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

olur. $T = F^5 + F^8 \neq 0$ dir.

T tensörünün sıfırdan farklı yapı sabitleri

$$\begin{aligned}
-T(e_1, e_5, e_2) &= T(e_1, e_2, e_5) = 1, \\
T(e_2, e_1, e_5) &= -T(e_2, e_5, e_1) = 1, \\
T(e_3, e_5, e_4) &= -T(e_3, e_4, e_5) = 1, \\
T(e_4, e_5, e_3) &= -T(e_4, e_3, e_5) = 1
\end{aligned}$$

olur. T tensörünün (3.28) ve (3.31) tanımlanma bağıntılarını sağlamadığı görülür.

O halde T tensörü hem $\mathbb{G}_5$, hem de $\mathbb{G}_8$ sınıfından parça içerir.

$$\begin{aligned}
F^4(X, Y, Z) &= \{X_1Y_1Z_2 - X_1Y_2Z_1 + X_1Y_3Z_4 - X_1Y_4Z_3 \\
&\quad + X_3Y_1Z_4 - X_3Y_2Z_3 + X_3Y_3Z_2 - X_3Y_4Z_1\} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
(F^1 + F^2)(X, Y, Z) &= (F^{W_1} - F^4)(X, Y, Z) \\
&= \frac{1}{2} \{-X_1Y_1Z_2 - X_1Y_1Z_4 + X_1Y_2Z_3 + X_1Y_2Z_1 \\
&\quad - X_1Y_3Z_4 - X_1Y_3Z_2 + X_1Y_4Z_3 + X_1Y_4Z_1 \\
&\quad - X_3Y_1Z_4 + X_3Y_1Z_2 - X_3Y_2Z_1 + X_3Y_2Z_3 \\
&\quad - X_3Y_3Z_2 + X_3Y_3Z_4 + X_3Y_4Z_1 - X_3Y_4Z_3\}
\end{aligned}$$

bulunur. $S = F^1 + F^2 \in \mathbb{G}_1 \oplus \mathbb{G}_2$ dir. Bu tensörün $\mathbb{G}_1$ ve $\mathbb{G}_2$ sınıflarının (3.26) ve (3.27) tanımlanma bağıntılarını sağlamadığı gösterilecektir. Böylece S her iki

sınıftan parça içerir. S tensörünün yapı sabitleri aşağıdadır:

$$\begin{aligned}
-S(e_1, e_1, e_2) &= S(e_1, e_2, e_1) = -S(e_1, e_1, e_4) = S(e_1, e_4, e_1) = 1/2, \\
S(e_1, e_2, e_3) &= -S(e_1, e_3, e_2) = S(e_3, e_1, e_2) = -S(e_3, e_2, e_1) = 1/2, \\
S(e_1, e_4, e_3) &= -S(e_1, e_3, e_4) = -S(e_3, e_1, e_4) = S(e_3, e_4, e_1) = 1/2, \\
S(e_3, e_2, e_3) &= -S(e_3, e_3, e_2) = S(e_3, e_3, e_4) = -S(e_3, e_4, e_3) = 1/2.
\end{aligned}$$

S tensörünün sınıfı belirlenecektir.

$$\begin{aligned}
\theta_S(X) &= g^{ij}S(e_i, e_j, X) \\
&= S(e_1, e_1, X) + S(e_2, e_2, X) - S(e_3, e_3, X) - S(e_4, e_4, X) \\
&= \frac{1}{2} \{-X_2 - X_4 + X_2 + X_4\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan $S \notin \mathbb{G}_1$ dir.

$$\begin{aligned}
S(\varphi X, \varphi Y, Z) &= \frac{1}{2} \{-X_1Y_1Z_2 + X_1Y_1Z_4 - X_1Y_2Z_3 + X_1Y_2Z_1 \\
&\quad - X_1Y_3Z_4 + X_1Y_3Z_2 + X_1Y_4Z_3 - X_1Y_4Z_1 \\
&\quad - X_3Y_1Z_4 - X_3Y_1Z_2 + X_3Y_2Z_1 + X_3Y_2Z_3 \\
&\quad - X_3Y_3Z_2 - X_3Y_3Z_4 + X_3Y_4Z_1 + X_3Y_4Z_3\} \\
&\neq -S(X, Y, Z)
\end{aligned}$$

olduğundan $S \notin \mathbb{G}_2$ dir.

O halde hemen hemen parakontak yapı $\mathbb{G}_1 \oplus \mathbb{G}_2 \oplus \mathbb{G}_4 \oplus \mathbb{G}_8$ sınıfındadır.

$\mathfrak{g}_4$ Lie cebri:

$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = -g(e_5, e_5) = 1$ olacak şekilde g metriği ve $\xi = e_1$, $\eta = e^1$, $\varphi(e_1) = 0$, $\varphi(e_2) = e_4$, $\varphi(e_3) = e_5$, $\varphi(e_4) = e_2$, $\varphi(e_5) = e_3$ verilsin. (φ, ξ, η, g) $\mathfrak{g}_4$ üzerinde hemen hemen parakontak metrik bir yapıdır.

Sıfırdan farklı yapı sabitleri:

$$\begin{aligned}
F(e_1, e_2, e_3) &= -F(e_1, e_3, e_2) = F(e_3, e_1, e_2) = -F(e_3, e_2, e_1) = 1/2, \\
F(e_1, e_4, e_5) &= -F(e_1, e_5, e_4) = F(e_4, e_1, e_5) = -F(e_4, e_5, e_1) = 1/2, \\
-F(e_2, e_1, e_5) &= F(e_2, e_5, e_1) = F(e_5, e_1, e_2) = -F(e_5, e_2, e_1) = 1/2, \\
-F(e_3, e_1, e_4) &= F(e_3, e_4, e_1) = F(e_4, e_1, e_3) = -F(e_4, e_3, e_1) = 1/2
\end{aligned}$$

şeklindedir. $\mathbb{G}_3$ uzayının boyutu 0 olduğundan, $F^3 = 0$ dır. Diğer izdüşümler de (3.35)-(3.46) tanımları kullanılarak hesaplandığında,

$F^1 = F^2 = F^4 = F^9 = F^{12} = 0$ ve $F^5 \neq 0, F^6 \neq 0, F^7 \neq 0, F^8 \neq 0, F^{10} \neq 0, F^{11} \neq 0$ bulunur. O halde hemen hemen parakontak yapı $\mathbb{G}_5 \oplus \mathbb{G}_6 \oplus \mathbb{G}_7 \oplus \mathbb{G}_8 \oplus \mathbb{G}_{10} \oplus \mathbb{G}_{11}$ sınıfındadır.

$\mathfrak{g}_4$ Lie cebri üzerinde diğer bir örnek:

$\mathfrak{g}_4$ üzerinde (φ, ξ, η, g) hemen hemen parakontak metrik yapısı

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = g(e_5, e_5) = 1 \text{ ve}$$

$\xi = e_5, \eta = e^5, \varphi(e_1) = e_3, \varphi(e_2) = e_4, \varphi(e_3) = e_1, \varphi(e_4) = e_2, \varphi(e_5) = 0$ şeklinde tanımlansın. Diğer örneklerle benzer şekilde izdüşümler hesaplandığında bu yapının $\mathbb{G}_2 \oplus \mathbb{G}_4 \oplus \mathbb{G}_8 \oplus \mathbb{G}_9 \oplus \mathbb{G}_{11}$ sınıfında olduğu görülür.

$\mathfrak{g}_5$ Lie cebri:

$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = -g(e_5, e_5) = 1$ olacak şekilde g metriği ve $\xi = e_1, \eta = e^1, \varphi(e_1) = 0, \varphi(e_2) = e_4, \varphi(e_3) = e_5, \varphi(e_4) = e_2, \varphi(e_5) = e_3$ verilsin. (φ, ξ, η, g) dörtlüsü $\mathfrak{g}_5$ üzerinde $\mathbb{G}_{10}$ sınıfından bir hemen hemen parakontak bir yapıdır.

$\mathfrak{g}_5$ Lie cebri üzerinde diğer bir örnek:

$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = g(e_5, e_5) = 1$ ve $\xi = e_5, \eta = e^5, \varphi(e_1) = e_3, \varphi(e_2) = e_4, \varphi(e_3) = e_1, \varphi(e_4) = e_2, \varphi(e_5) = 0$ olarak tanımlanan hemen hemen parakontak (φ, ξ, η, g) yapı ise $\mathbb{G}_4 \oplus \mathbb{G}_5 \oplus \mathbb{G}_8$ sınıfındadır.

$\mathfrak{g}_6$ Lie cebri:

$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = -g(e_5, e_5) = 1$ ve $\xi = e_1, \eta = e^1, \varphi(e_1) = 0, \varphi(e_2) = e_4, \varphi(e_3) = e_5, \varphi(e_4) = e_2, \varphi(e_5) = e_3$ için, (φ, ξ, η, g) dörtlüsü $\mathfrak{g}_6$ üzerinde $\mathbb{G}_4 \oplus \mathbb{G}_7 \oplus \mathbb{G}_{10} \oplus \mathbb{G}_{11}$ sınıfından bir hemen hemen parakontak yapıdır.

$\mathfrak{g}_6$ Lie cebri üzerinde diğer bir örnek:

$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = g(e_5, e_5) = 1$ ve $\xi = e_5, \eta = e^5, \varphi(e_1) = e_3, \varphi(e_2) = e_4, \varphi(e_3) = e_1, \varphi(e_4) = e_2, \varphi(e_5) = 0$ şeklinde tanımlı (φ, ξ, η, g) hemen hemen parakontak metrik yapısı $\mathbb{G}_1 \oplus \mathbb{G}_4 \oplus \mathbb{G}_8 \oplus \mathbb{G}_9 \oplus \mathbb{G}_{11}$ sınıfındadır.

6. 5 BOYUTLU NİLPOTENT LİE CEBİRLERİ ÜZERİNDE KUASI-PARA-SASAKİ YAPILAR

Bu bölümde 5-boyutlu, Abelyen olmayan nilpotent Lie cebirleri üzerinde kuasi-para-Sasaki yapıların varlığı incelenmiştir. Kuasi-para-Sasaki bir manifoldun karakteristik vektör alanı bir Killing vektör alanıdır [30]. Ayrıca kuasi-para-Sasaki bir manifoldun φ endomorfizminin Levi-Civita kovaryant türevi

$$(\nabla_X \varphi)(Y) = -g(\nabla_X \xi, \varphi Y)\xi - \eta(Y)\varphi(\nabla_X \xi) \quad (6.1)$$

ile verilir [13]. (6.1) denkleminin her iki tarafı Z ile iç çarpıldığında F tensörü

$$F(X, Y, Z) = -g(\nabla_X \xi, \varphi Y)\eta(Z) + \eta(Y)g(\nabla_X \xi, \varphi Z) \quad (6.2)$$

olur.

Bu bölümün başlıca sonucu olarak aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 6.1. *5-boyutlu Abelyen olmayan nilpotent Lie cebri üzerinde kuasi-para-Sasaki yapının varlığı için gerek ve yeter koşul, bu Lie cebrinin $\mathfrak{g}_1$ cebrine izomorf olmasıdır. Ayrıca $\mathfrak{g}_1$ Lie cebri üzerindeki kuasi-para-Sasaki bir yapı $\mathbb{G}_5$ veya $\mathbb{G}_8$ sınıfına aittir.*

Teorem 6.1 i kanıtlamak için, aşağıdaki önerme kullanılmıştır.

Önerme 6.2. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ kuasi-para-Sasaki manifoldu olsun, yani $M \in \mathbb{G}_5 \oplus \mathbb{G}_8$ olsun. Eğer $\theta_F(\xi) = 0$ ise, bu durumda M manifoldu $\mathbb{G}_8$ sınıfındandır.*

Kanıt. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ kuasi-para-Sasaki manifoldu olsun. (6.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} -\eta(Y)F(X, Z, \xi) + \eta(Z)F(X, Y, \xi) &= -\eta(Y)\{-g(\nabla_X \xi, \varphi(Z))\} \\ &\quad + \eta(Z)\{-g(\nabla_X \xi, \varphi(Y))\} \\ &= F(X, Y, Z) \end{aligned}$$

olur.

ξ Killing olduğundan, (6.2) eşitliğinden

$$F(\varphi X, \varphi Y, \xi) = -g(\nabla_{\varphi X} \xi, \varphi^2 Y) = -g(\nabla_{\varphi X} \xi, Y) = g(\nabla_Y \xi, \varphi X) = -F(Y, X, \xi),$$

ve $\varphi(\nabla_X \xi) = \nabla_{\varphi X} \xi$ [13] ifadesinden,

$$\begin{aligned} F(X, Y, \xi) &= -g(\nabla_X \xi, \varphi Y) = g(\varphi(\nabla_X \xi), Y) \\ &= g(\nabla_{\varphi X} \xi, Y) = -g(\nabla_Y \xi, \varphi X) = F(Y, X, \xi) \end{aligned}$$

bulunur. $\theta_F(\xi) = 0$ ise, $\mathbb{G}_8$ sınıfının (3.31) tanımlanma bağıntısı sağlanır. $\square$

Teorem 6.1 in kanıtı için her $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \dots, 6$ Lie cebri ayrı ayrı incelenmiştir. g metriği $\mathfrak{g}_i$ uzayının $\{e_1, \dots, e_5\}$ tabanını ortonormal yapan ve $g(e_i, e_i) = \epsilon_i = \pm 1$ özelliğine sahip metrik olsun. (φ, ξ, η, g) dördlüsü $\mathfrak{g}_i$ Lie cebri üzerinde kuasi-para-Sasaki bir yapı olsun. Her Lie cebri için Levi-Civita kovaryant türevleri ve Killing vektör alanlarının gerdiği uzaylar [21] makalesinde bulunmuştur.

$\mathfrak{g}_1$ Lie cebri: ξ Killing olduğundan, $\xi = \xi_5 e_5$ tir [21]. Ayrıca $g(\xi, \xi) = \xi_5^2 \epsilon_5 = 1$ olduğundan $\epsilon_5 = 1$, $\xi_5^2 = 1$ dir. (φ, ξ, η, g) kuasi-para-Sasaki yapısının φ endomorfizmi

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= a_1 e_1 + \dots + a_5 e_5, \quad \varphi(e_2) = b_1 e_1 + \dots + b_5 e_5, \\ \varphi(e_3) &= c_1 e_1 + \dots + c_5 e_5, \quad \varphi(e_4) = d_1 e_1 + \dots + d_5 e_5, \quad \varphi(e_5) = 0 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Φ 2-form olduğundan, $\Phi(e_i, e_i) = g(\varphi(e_i), e_i) = 0$ ve böylece $a_1 = b_2 = c_3 = d_4 = 0$ olur. Buna ek olarak, $g(\varphi(e_i), e_5) = -g(e_i, \varphi(e_5)) = 0$ eşitliğinden $a_5 = b_5 = c_5 = d_5 = 0$ bulunur. $F(e_i, e_j, e_k)$ yapı sabitleri (6.2) ve (3.13) denklemleri kullanılarak hesaplanıp karşılaştırıldığında sıfırdan farklı yapı sabitleri

$$\begin{aligned} F(e_1, e_1, e_5) &= \frac{1}{2} a_2 = -F(e_1, e_5, e_1), \quad F(e_1, e_3, e_5) = \frac{1}{2} c_2 = -F(e_1, e_5, e_3), \\ F(e_1, e_4, e_5) &= \frac{1}{2} d_2 = -F(e_1, e_5, e_4), \quad F(e_2, e_2, e_5) = -\frac{1}{2} b_1 = -F(e_2, e_5, e_2), \\ F(e_2, e_3, e_5) &= -\frac{1}{2} c_1 = -F(e_2, e_5, e_3), \quad F(e_2, e_4, e_5) = -\frac{1}{2} d_1 = -F(e_2, e_5, e_4), \\ F(e_3, e_1, e_5) &= \frac{1}{2} a_4 = -F(e_3, e_5, e_1), \quad F(e_3, e_2, e_5) = \frac{1}{2} b_4 = -F(e_3, e_5, e_2), \\ F(e_3, e_3, e_5) &= \frac{1}{2} c_4 = -F(e_3, e_5, e_3), \quad F(e_4, e_1, e_5) = -\frac{1}{2} a_3 = -F(e_4, e_5, e_1), \\ F(e_4, e_2, e_5) &= -\frac{1}{2} b_3 = -F(e_4, e_5, e_2), \quad F(e_4, e_4, e_5) = -\frac{1}{2} d_3 = -F(e_4, e_5, e_4) \end{aligned}$$

olur. (6.2) eşitliğinden $F(e_5, e_j, e_k) = 0$ olduğu açıktır. Öte yandan $F(e_5, e_j, e_k)$

sayıları (3.13) den hesaplanıp (6.2) ile karşılaştırıldığında

$$a_2 + \epsilon_1 \epsilon_2 b_1 = 0, \quad (6.3)$$

$$a_4 + \epsilon_2 \epsilon_3 b_3 = 0, \quad (6.4)$$

$$\epsilon_1 \epsilon_4 a_4 + b_3 = 0, \quad (6.5)$$

$$-a_3 + \epsilon_2 \epsilon_4 b_4 = 0, \quad (6.6)$$

$$-\epsilon_1 \epsilon_3 a_3 + b_4 = 0, \quad (6.7)$$

ve

$$c_4 + \epsilon_3 \epsilon_4 d_3 = 0, \quad (6.8)$$

$$-c_1 + \epsilon_2 \epsilon_4 d_2 = 0, \quad (6.9)$$

$$-\epsilon_1 \epsilon_3 c_1 + d_2 = 0, \quad (6.10)$$

$$c_2 + \epsilon_1 \epsilon_4 d_1 = 0, \quad (6.11)$$

$$\epsilon_2 \epsilon_3 c_2 + d_1 = 0 \quad (6.12)$$

bulunur.

Ayrıca (3.19) ifadesi taban elemanları için hesaplandığında

$$c_2 = a_4 = a, \quad d_2 = -a_3 = b, \quad c_1 = -b_4 = c, \quad d_1 = b_3 = d \quad (6.13)$$

elde edilir. Bu durumda (3.21) normallik koşulunun da sağlandığı görülebilir.

Şimdi $\mathfrak{g}_1$ üzerindeki kuasi-para-Sasaki bir yapının $\mathbb{G}_5$ veya $\mathbb{G}_8$ sınıfında olduğu gösterilecektir. Böylece $\mathfrak{g}_1$ üzerindeki kuasi-para-Sasaki yapılar için

$$\mathbb{G}_5 \oplus \mathbb{G}_8 = \mathbb{G}_5 \cup \mathbb{G}_8$$

olur. Direkt hesapla,

$$\theta_F(\xi) = g^{ij} F(e_i, e_j, \xi) = \frac{1}{2} \{ \epsilon_1 a_2 - \epsilon_2 b_1 + \epsilon_3 c_4 - \epsilon_4 d_3 \} \quad (6.14)$$

bulunur. (6.4) ve (6.5) karşılaştırıldığında, $a_4 = -\epsilon_2 \epsilon_3 b_3 = -\epsilon_1 \epsilon_4 b_3$, ve buradan da $\epsilon_2 \epsilon_3 = \epsilon_1 \epsilon_4$ olur. Bu eşitliğin her iki tarafı $\epsilon_2 \epsilon_4$ ile çarpıldığında $\epsilon_1 \epsilon_2 = \epsilon_3 \epsilon_4$ olur.

(6.3) ve (6.8) eşitliklerinden, eğer $\epsilon_1 \epsilon_2 = \epsilon_3 \epsilon_4 = 1$ ise, bu durumda $a_2 = -b_1$, $c_4 = -d_3$ ve (6.14) Lee formu

$$\theta_F(\xi) = \frac{1}{2} \{ (\epsilon_1 + \epsilon_2) a_2 + (\epsilon_3 + \epsilon_4) c_4 \} \quad (6.15)$$

şeklindedir.

Eğer $\epsilon_1\epsilon_2 = \epsilon_3\epsilon_4 = -1$ ise, bu durumda $a_2 = b_1$, $c_4 = d_3$ ve (6.14)

$$\theta_F(\xi) = \frac{1}{2}\{(\epsilon_1 - \epsilon_2)a_2 + (\epsilon_3 - \epsilon_4)c_4\} \quad (6.16)$$

şeklindedir. $\epsilon_5 = 1$ olduğu bilinmektedir. Diğer ϵ_i işaretleri için altı durum söz konusudur:

$\epsilon_1\epsilon_2 = \epsilon_3\epsilon_4 = \pm 1$ ve metriğin işareti $(3, 2)$ olduğundan,

1. $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 1, \epsilon_3 = -1, \epsilon_4 = -1$.

Bu durumda $\theta_F(\xi) = a_2 - c_4$. (6.3–6.13) eşitliklerinden,

$a_2 = -b_1, c_2 = a_4 = d_1 = b_3 = a$ ve $-a_3 = d_2 = b_4 = -c_1 = b$ ve buradan da

$$\varphi(e_1) = a_2e_2 - be_3 + ae_4, \quad \varphi(e_2) = -a_2e_1 + ae_3 + be_4,$$

$$\varphi(e_3) = -be_1 + ae_2 + c_4e_4, \quad \varphi(e_4) = ae_1 + be_2 - c_4e_3, \quad \varphi(e_5) = 0$$

olur.

(3.1) eşitliğinden, $\varphi^2(e_1) = e_1$ olduğundan,

$$-a_2^2 + b^2 + a^2 = 1, \quad (6.17)$$

$$a(a_2 - c_4) = 0,$$

$$b(a_2 - c_4) = 0$$

elde edilir. Eğer $a_2 - c_4 = 0$ ise, bu durumda $\theta_F(\xi) = a_2 - c_4 = 0$ dır ve Önerme 6.2 den, kuasi-para-Sasaki bir yapı $\mathbb{G}_8$ sınıfındadır. $a_2 - c_4 \neq 0$ ise, (6.17) ifadelerinden $a = b = 0$ ve $-a_2^2 = 1$ olur, bu bir çelişkidir. Sonuç olarak bu ϵ_i işaretleri için, kuasi-para Sasaki bir yapı $\mathbb{G}_5$ sınıfından olamaz.

2. $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = -1, \epsilon_3 = 1, \epsilon_4 = 1$

Birinci duruma benzer şekilde, kuasi-para Sasaki bir yapı $\mathbb{G}_8$ sınıfının elemanıdır.

3. $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1, \epsilon_3 = 1, \epsilon_4 = -1$

$$\theta_F(\xi) = a_2 + c_4.$$

(6.3–6.13) denklemlerinden $a_2 = b_1$, $c_2 = a_4 = d_1 = b_3 = a$, $-a_3 = d_2 = -b_4 = c_1 = b$ bulunur. O halde φ endomorfizmi

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= a_2e_2 - be_3 + ae_4, & \varphi(e_2) &= a_2e_1 + ae_3 - be_4, \\ \varphi(e_3) &= be_1 + ae_2 + c_4e_4, & \varphi(e_4) &= ae_1 + be_2 + c_4e_3, & \varphi(e_5) &= 0\end{aligned}$$

şeklindedir. $\varphi^2(e_1) = e_1$ ifadesinden

$$a_2^2 - b^2 + a^2 = 1, \quad (6.18)$$

$$a(a_2 + c_4) = 0,$$

$$b(a_2 + c_4) = 0$$

bulunur. $a_2 + c_4 = 0$ ise, Önerme 6.2 den, bu yapı $\mathbb{G}_8$ sınıfındadır. Eğer $a_2 + c_4 \neq 0$ ise, (6.18) eşitliğinden, $a = b = 0$ ve $a_2^2 = 1$ bulunur. $\varphi^2(e_3) = e_3$ olduğundan, $c_4^2 = 1$ olur. $a_2 + c_4 \neq 0$ olduğundan, a_2 ve c_4 sayılarının ikisi de 1 veya -1 e eşittir. (φ, ξ, η, g) ve $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = -1$, $\epsilon_3 = 1$, $\epsilon_4 = -1$, $\epsilon_5 = 1$, $\xi = e_5$, $\eta = e^5$, $\varphi(e_1) = e_2$, $\varphi(e_2) = e_1$, $\varphi(e_3) = e_4$, $\varphi(e_4) = e_3$, $\varphi(e_5) = 0$ koşulunu sağlayan quasi-para Sasaki yapının $\mathbb{G}_5$ sınıfında olduğu görülebilir. Ayrıca $a_2 = c_4 = -1$ iken, (φ, ξ, η, g) ve $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = -1$, $\epsilon_3 = 1$, $\epsilon_4 = -1$, $\epsilon_5 = 1$, $\xi = e_5$, $\eta = e^5$, $\varphi(e_1) = -e_2$, $\varphi(e_2) = -e_1$, $\varphi(e_3) = -e_4$, $\varphi(e_4) = -e_3$, $\varphi(e_5) = 0$ özelliğine sahip yapı $\mathbb{G}_5$ sınıfındadır.

4. $\epsilon_1 = -1$, $\epsilon_2 = 1$, $\epsilon_3 = 1$, $\epsilon_4 = -1$

$\theta_F(\xi) = -a_2 + c_4$. (6.4), (6.3), (6.8), (6.6) eşitliklerinden, $a_2 = b_1$, $c_2 = a_4 = -d_1 = -b_3 = a$, $-a_3 = d_2 = b_4 = -c_1 = b$ ve

$$\varphi(e_1) = a_2e_2 - be_3 + ae_4,$$

$$\varphi(e_2) = a_2e_1 - ae_3 + be_4,$$

$$\varphi(e_3) = -be_1 + ae_2 + c_4e_4,$$

$$\varphi(e_4) = -ae_1 + be_2 + c_4e_3,$$

$$\varphi(e_5) = 0$$

olur. (3.1) eşitliğinden, $\varphi^2(e_1) = e_1$ olduğundan,

$$a_2^2 + b^2 - a^2 = 1, \quad (6.19)$$

$$a(-a_2 + c_4) = 0,$$

$$b(-a_2 + c_4) = 0$$

bulunur. $-a_2 + c_4 = 0$ ise, Önerme 6.2 den, bu yapı $\mathbb{G}_8$ sınıfındadır. $-a_2 + c_4 \neq 0$ ise, (6.19) denkleminde, $a = b = 0$ ve $a_2^2 = 1$ dir. $\varphi^2(e_3) = e_3$ olduğundan, $c_4^2 = 1$ dir. $-a_2 + c_4 \neq 0$ olduğundan, a_2 ve c_4 zıt işaretlidir. (φ, ξ, η, g) ve $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = 1, \epsilon_3 = 1, \epsilon_4 = -1, \epsilon_5 = 1, \xi = e_5, \eta = e^5, \varphi(e_1) = e_2, \varphi(e_2) = e_1, \varphi(e_3) = -e_4, \varphi(e_4) = -e_3, \varphi(e_5) = 0$ özelliğine sahip yapı $\mathbb{G}_5$ sınıfındadır. Ayrıca (φ, ξ, η, g) ve $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = 1, \epsilon_3 = 1, \epsilon_4 = -1, \epsilon_5 = 1, \xi = e_5, \eta = e^5, \varphi(e_1) = -e_2, \varphi(e_2) = -e_1, \varphi(e_3) = e_4, \varphi(e_4) = e_3, \varphi(e_5) = 0$ şeklinde tanımlı yapı da $\mathbb{G}_5$ sınıfındadır.

Benzer şekilde aşağıdaki durumlarda da kuasi-para-Sasaki bir yapı $\mathbb{G}_8$ veya $\mathbb{G}_5$ sınıfındadır.

5. $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1, \epsilon_3 = -1, \epsilon_4 = 1$

$\theta_F(\xi) = a_2 - c_4$. (6.4), (6.3), (6.8), (6.6) eşitliklerinden, $a_2 = b_1, c_2 = a_4 = -d_1 = -b_3 = a, a_3 = -d_2 = -b_4 = c_1 = -b$ ve

$$\varphi(e_1) = a_2 e_2 - b e_3 + a e_4,$$

$$\varphi(e_2) = a_2 e_1 - a e_3 + b e_4,$$

$$\varphi(e_3) = -b e_1 + a e_2 + c_4 e_4,$$

$$\varphi(e_4) = -a e_1 + b e_2 + c_4 e_3,$$

$$\varphi(e_5) = 0$$

olur. $\varphi^2(e_1) = e_1$ eşitliğinden,

$$a_2^2 + b^2 - a^2 = 1, \quad (6.20)$$

$$a(a_2 - c_4) = 0,$$

$$b(a_2 - c_4) = 0$$

olur. $a_2 - c_4 = 0$ ise, Önerme 6.2 den, yapı $\mathbb{G}_8$ in elemanıdır.

$a_2 - c_4 \neq 0$ ise, (6.20) den, $a = b = 0$ ve $a_2^2 = 1$ bulunur. Ayrıca $\varphi^2(e_3) = e_3$ olduğundan $c_4^2 = 1$ olur. $a_2 - c_4 \neq 0$ olduğundan, a_2 ve c_4 zıt işaretlidir.

(φ, ξ, η, g) ve $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1, \epsilon_3 = -1, \epsilon_4 = 1, \epsilon_5 = 1, \xi = e_5, \eta = e^5$, $\varphi(e_1) = e_2, \varphi(e_2) = e_1, \varphi(e_3) = -e_4, \varphi(e_4) = -e_3, \varphi(e_5) = 0$ şeklinde tanımlı yapının $\mathbb{G}_5$ sınıfında olduğu görülebilir. Buna ek olarak (φ, ξ, η, g) ve $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1, \epsilon_3 = -1, \epsilon_4 = 1, \epsilon_5 = 1, \xi = e_5, \eta = e^5, \varphi(e_1) = -e_2, \varphi(e_2) = -e_1, \varphi(e_3) = e_4, \varphi(e_4) = e_3, \varphi(e_5) = 0$ özelliğine sahip yapı da $\mathbb{G}_5$ sınıfının tanımlanma bağıntısını sağlar.

6. $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = 1, \epsilon_3 = -1, \epsilon_4 = 1$

$\theta_F(\xi) = -a_2 - c_4$. (6.4), (6.3), (6.8), (6.6) eşitliklerinden, $a_2 = b_1, c_2 = a_4 = d_1 = b_3 = a, -a_3 = d_2 = -b_4 = c_1 = b$ ve

$$\varphi(e_1) = a_2 e_2 - b e_3 + a e_4,$$

$$\varphi(e_2) = a_2 e_1 + a e_3 - b e_4,$$

$$\varphi(e_3) = b e_1 + a e_2 + c_4 e_4,$$

$$\varphi(e_4) = a e_1 + b e_2 + c_4 e_3,$$

$$\varphi(e_5) = 0$$

olur. $\varphi^2(e_1) = e_1$ olduğundan

$$a_2^2 - b^2 + a^2 = 1, \quad (6.21)$$

$$a(a_2 + c_4) = 0,$$

$$b(a_2 + c_4) = 0$$

bulunur. $a_2 + c_4 = 0$ ise, Önerme 6.2 den, yapı $\mathbb{G}_8$ dedir.

$a_2 + c_4 \neq 0$ ise de, (6.21) eşitliğinden, $a = b = 0$ ve $a_2^2 = 1$ olur. $\varphi^2(e_3) = e_3$ ifadesinden, $c_4^2 = 1$ dir. $a_2 - c_4 \neq 0$ olduğundan, a_2 ve c_4 aynı işaretlidir.

(φ, ξ, η, g) ve $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = 1, \epsilon_3 = -1, \epsilon_4 = 1, \epsilon_5 = 1, \xi = e_5, \eta = e^5$, $\varphi(e_1) = e_2, \varphi(e_2) = e_1, \varphi(e_3) = e_4, \varphi(e_4) = e_3, \varphi(e_5) = 0$ şeklinde tanımlı yapı $\mathbb{G}_5$ tedir.

Buna ek olarak (φ, ξ, η, g) ve $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = 1, \epsilon_3 = -1, \epsilon_4 = 1, \epsilon_5 = 1, \xi = e_5, \eta = e^5, \varphi(e_1) = -e_2, \varphi(e_2) = -e_1, \varphi(e_3) = -e_4, \varphi(e_4) = -e_3, \varphi(e_5) = 0$

özelliğine sahip yapı da $\mathbb{G}_5$ e aittir.

Ayrıca (φ, ξ, η, g) ve $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 1, \epsilon_3 = -1, \epsilon_4 = -1, \epsilon_5 = 1, \xi = e_5, \eta = e^5$, $\varphi(e_1) = e_4, \varphi(e_2) = e_3, \varphi(e_3) = e_2, \varphi(e_4) = e_1, \varphi(e_5) = 0$ olarak tanımlı yapı $\mathbb{G}_8$ sınıfındadır.

Sonuç olarak $\mathfrak{g}_1$ sınıfında $\mathbb{G}_5$ sınıfından ve $\mathbb{G}_8$ sınıfından kuasi-para Sasaki yapılar vardır, fakat her iki sınıftan da parça içeren, $\mathbb{G}_5 \oplus \mathbb{G}_8$ sınıfından yapı yoktur.

$\mathfrak{g}_2$ Lie cebri: ξ Killing vektör alanı olduğundan, $\xi = \xi_5 e_5$ ve $g(\xi, \xi) = \xi_5^2 \epsilon_5 = 1$ eşitliğinden $\epsilon_5 = 1$ dir.

$$\varphi(e_1) = a_1 e_1 + \dots + a_5 e_5,$$

$$\varphi(e_2) = b_1 e_1 + \dots + b_5 e_5,$$

$$\varphi(e_3) = c_1 e_1 + \dots + c_5 e_5,$$

$$\varphi(e_4) = d_1 e_1 + \dots + d_5 e_5,$$

$$\varphi(e_5) = 0$$

yazılabilir. $g(\varphi(e_i), e_i) = 0$ olduğundan, $a_1 = b_2 = c_3 = d_4 = 0$ dir.

$g(\varphi(e_i), e_5) = -g(e_i, \varphi(e_5)) = 0$ ifadesinden de $a_5 = b_5 = c_5 = d_5 = 0$ bulunur.

(6.2) eşitliğinden sıfırdan farklı $F(e_i, e_j, e_k)$ yapı sabitleri şunlardır:

$$F(e_1, e_1, e_5) = \frac{1}{2} a_3 = -F(e_1, e_5, e_1),$$

$$F(e_1, e_2, e_5) = \frac{1}{2} b_3 = -F(e_1, e_5, e_2),$$

$$F(e_1, e_4, e_5) = \frac{1}{2} d_3 = -F(e_1, e_5, e_4),$$

$$F(e_2, e_1, e_5) = \frac{1}{2} a_4 = -F(e_2, e_5, e_1),$$

$$F(e_2, e_2, e_5) = \frac{1}{2} b_4 = -F(e_2, e_5, e_2),$$

$$F(e_2, e_3, e_5) = \frac{1}{2} c_4 = -F(e_2, e_5, e_3),$$

$$F(e_3, e_2, e_5) = -\frac{1}{2} b_1 = -F(e_3, e_5, e_2),$$

$$F(e_3, e_3, e_5) = -\frac{1}{2} c_1 = -F(e_3, e_5, e_3),$$

$$\begin{aligned}
F(e_3, e_4, e_5) &= -\frac{1}{2}d_1 = -F(e_3, e_5, e_4), \\
F(e_4, e_1, e_5) &= -\frac{1}{2}a_2 = -F(e_4, e_5, e_1), \\
F(e_4, e_3, e_5) &= -\frac{1}{2}c_2 = -F(e_4, e_5, e_3), \\
F(e_4, e_4, e_5) &= -\frac{1}{2}d_2 = -F(e_4, e_5, e_4).
\end{aligned}$$

(3.19) eşitliğinden

$$0 = F(e_1, e_2, e_5) + F(e_2, e_5, e_1) + F(e_5, e_1, e_2) = \frac{1}{2}\{b_3 - a_4\},$$

ve böylece $b_3 = a_4$ olur. Benzer şekilde,

$$0 = F(e_1, e_4, e_5) + F(e_4, e_5, e_1) + F(e_5, e_1, e_4) = \frac{1}{2}\{d_3 + a_2\}$$

ifadesinden $d_3 = -a_2$,

$$0 = F(e_2, e_3, e_5) + F(e_3, e_5, e_2) + F(e_5, e_2, e_3) = \frac{1}{2}\{c_4 + b_1\}$$

eşitliğinden $c_4 = -b_1$ ve

$$0 = F(e_3, e_4, e_5) + F(e_4, e_5, e_3) + F(e_5, e_3, e_4) = \frac{1}{2}\{-d_1 + c_2\}$$

olduğundan $c_2 = d_1$ elde edilir.

$b_3 = a_4 = a$, $d_3 = -a_2 = b$, $c_4 = -b_1 = c$, $c_2 = d_1 = d$ olsun. Bu durumda

$$\varphi(e_1) = -be_2 + a_3e_3 + ae_4,$$

$$\varphi(e_2) = -ce_1 + ae_3 + b_4e_4,$$

$$\varphi(e_3) = c_1e_1 + de_2 + ce_4,$$

$$\varphi(e_4) = de_1 + d_2e_2 + be_3,$$

$$\varphi(e_5) = 0$$

yazılabilir.

(3.13) eşitliğinden,

$$0 = F(e_1, e_2, e_4) = -\frac{c}{2}\epsilon_4,$$

yani $c = 0$,

$$0 = F(e_1, e_2, e_1) = -\frac{c_1}{2}\epsilon_1$$

olduğundan $c_1 = 0$ ve benzer şekilde sırasıyla $F(e_1, e_1, e_2) = 0$, $F(e_1, e_1, e_3) = 0$,

$F(e_1, e_3, e_4) = 0$, $F(e_1, e_4, e_3) = 0$, $F(e_2, e_1, e_2) = 0$ eşitliklerinden, $a_3 = 0$, $b = 0$, $b_4 = 0$, $d_2 = 0$, $d = 0$ bulunur. Buradan ise $\varphi(e_4) = 0$ olur, bu bir çelişkidir:

$$0 = g(\varphi(e_4), \varphi(e_4)) = -g(e_4, e_4) + \eta(e_4)\eta(e_4) = -\epsilon_4 \neq 0.$$

O halde $\mathfrak{g}_2$ Lie cebri üzerinde kuasi-para Sasaki yapı yoktur.

$\mathfrak{g}_3$ Lie cebri: ξ Killing olduğundan, $\xi = \xi_5 e_5$ ve $g(\xi, \xi) = \xi_5^2 \epsilon_5 = 1$ den $\epsilon_5 = 1$ olur.

$$\varphi(e_1) = a_1 e_1 + \dots + a_5 e_5,$$

$$\varphi(e_2) = b_1 e_1 + \dots + b_5 e_5,$$

$$\varphi(e_3) = c_1 e_1 + \dots + c_5 e_5,$$

$$\varphi(e_4) = d_1 e_1 + \dots + d_5 e_5,$$

$$\varphi(e_5) = 0.$$

$g(\varphi(e_i), e_i) = 0$ olduğundan, $a_1 = b_2 = c_3 = d_4 = 0$ ve $g(\varphi(e_i), e_5) = -g(e_i, \varphi(e_5)) = 0$ eşitliğinden $a_5 = b_5 = c_5 = d_5 = 0$ olur.

(6.2) eşitliğinden sıfırdan farklı $F(e_i, e_j, e_k)$ yapı sabitleri:

$$F(e_1, e_1, e_5) = \frac{1}{2}a_4 = -F(e_1, e_5, e_1),$$

$$F(e_1, e_2, e_5) = \frac{1}{2}b_4 = -F(e_1, e_5, e_2),$$

$$F(e_1, e_3, e_5) = \frac{1}{2}c_4 = -F(e_1, e_5, e_4),$$

$$F(e_2, e_1, e_5) = \frac{1}{2}a_3 = -F(e_2, e_5, e_1),$$

$$F(e_2, e_2, e_5) = \frac{1}{2}b_3 = -F(e_2, e_5, e_2),$$

$$F(e_2, e_4, e_5) = \frac{1}{2}d_3 = -F(e_2, e_5, e_4),$$

$$F(e_2, e_5, e_2) = -\frac{1}{2}b_3 = -F(e_2, e_2, e_5),$$

$$F(e_3, e_1, e_5) = -\frac{1}{2}a_2 = -F(e_3, e_5, e_1),$$

$$F(e_3, e_3, e_5) = -\frac{1}{2}c_2 = -F(e_3, e_5, e_3),$$

$$F(e_3, e_4, e_5) = -\frac{1}{2}d_2 = -F(e_3, e_5, e_4),$$

$$F(e_4, e_2, e_5) = -\frac{1}{2}b_1 = -F(e_4, e_5, e_2),$$

$$F(e_4, e_3, e_5) = -\frac{1}{2}c_1 = -F(e_4, e_5, e_3),$$

$$F(e_4, e_4, e_5) = -\frac{1}{2}d_1 = -F(e_4, e_5, e_4).$$

(3.19) eşitliğinden

$$0 = F(e_1, e_2, e_5) + F(e_2, e_5, e_1) + F(e_5, e_1, e_2) = \frac{1}{2}\{b_4 - a_3\},$$

ve buradan $b_3 = a_4$ bulunur. Benzer şekilde

$$0 = F(e_1, e_3, e_5) + F(e_3, e_5, e_1) + F(e_5, e_1, e_3) = \frac{1}{2}\{d_3 + a_2\},$$

den $c_4 = -a_2$,

$$0 = F(e_2, e_4, e_5) + F(e_4, e_5, e_2) + F(e_5, e_2, e_4) = \frac{1}{2}\{d_3 + b_1\}$$

olduğundan $d_3 = -b_1$ ve

$$0 = F(e_3, e_4, e_5) + F(e_4, e_5, e_3) + F(e_5, e_3, e_4) = \frac{1}{2}\{-d_2 + c_1\}$$

eşitliğinden $d_2 = c_1$ bulunur.

$b_4 = a_3 = a$, $c_4 = -a_2 = b$, $d_3 = -b_1 = c$, $c_1 = d_2 = d$ olsun, bu durumda

$$\varphi(e_1) = -be_2 + ae_3 + a_4e_4,$$

$$\varphi(e_2) = -ce_1 + b_3e_3 + ae_4,$$

$$\varphi(e_3) = de_1 + c_2e_2 + be_4,$$

$$\varphi(e_4) = d_1e_1 + de_2 + ce_3,$$

$$\varphi(e_5) = 0$$

yazılabilir.

(3.13) eşitliğinden,

$$0 = F(e_1, e_1, e_2) = g((\nabla_{e_1}\varphi)(e_1), e_2)$$

ve buradan da $a = 0$ olur.

$$0 = F(e_1, e_1, e_3)$$

olduğundan $a_4 = 0$, benzer şekilde $F(e_1, e_2, e_1) = 0$, $F(e_2, e_1, e_2) = 0$, $F(e_2, e_1, e_4) = 0$ olduğundan, sırasıyla $d = 0$, $c_2 = 0$, $b = 0$ bulunur. O halde $\varphi(e_1) = 0$ olur, bu

bir gelişkidir:

$$0 = g(\varphi(e_1), \varphi(e_1)) = -g(e_1, e_1) + \eta(e_1)\eta(e_1) = -\epsilon_1 \neq 0.$$

Sonuç olarak $\mathfrak{g}_3$ üzerinde kuasi-para-Sasaki yapı yoktur.

$\mathfrak{g}_4$ Lie cebri: ξ Killing olduğundan, $\xi = \xi_5 e_5$ ve $g(\xi, \xi) = \xi_5^2 \epsilon_5 = 1$ den de $\epsilon_5 = 1$ olur.

$$\varphi(e_1) = a_1 e_1 + \dots + a_5 e_5,$$

$$\varphi(e_2) = b_1 e_1 + \dots + b_5 e_5,$$

$$\varphi(e_3) = c_1 e_1 + \dots + c_5 e_5,$$

$$\varphi(e_4) = d_1 e_1 + \dots + d_5 e_5,$$

$$\varphi(e_5) = 0.$$

$g(\varphi(e_i), e_i) = 0$ olduğundan, $a_1 = b_2 = c_3 = d_4 = 0$ ve $g(\varphi(e_i), e_5) = -g(e_i, \varphi(e_5)) = 0$ den de $a_5 = b_5 = c_5 = d_5 = 0$ olur.

(6.2) eşitliğinden sıfırdan farklı $F(e_i, e_j, e_k)$ sayıları şu şekildedir:

$$F(e_1, e_5, e_1) = -\frac{1}{2}a_4 = -F(e_1, e_1, e_5),$$

$$F(e_1, e_5, e_3) = -\frac{1}{2}c_4 = -F(e_1, e_3, e_5),$$

$$F(e_4, e_5, e_2) = \frac{1}{2}b_1 = -F(e_4, e_2, e_5),$$

$$F(e_4, e_5, e_3) = \frac{1}{2}c_1 = -F(e_4, e_3, e_5),$$

$$F(e_4, e_5, e_4) = \frac{1}{2}d_1 = -F(e_4, e_4, e_5),$$

$$F(e_1, e_2, e_5) = \frac{1}{2}b_4 = -F(e_1, e_5, e_2).$$

(3.19) eşitliğinden

$$0 = F(e_4, e_5, e_2) + F(e_5, e_2, e_4) + F(e_2, e_4, e_5) = \frac{1}{2}b_1,$$

ve böylece $b_1 = 0$,

$$0 = F(e_1, e_2, e_5) + F(e_2, e_5, e_1) + F(e_5, e_1, e_2) = \frac{1}{2}b_4,$$

ve buradan $b_4 = 0$ ve sonuç olarak da $\varphi(e_2) = b_3 e_3$ olur. Ayrıca

$$0 = F(e_1, e_5, e_3) + F(e_5, e_3, e_1) + F(e_3, e_1, e_5) = -\frac{1}{2}c_4,$$

eşitliğinden $c_4 = 0$,

$$0 = F(e_4, e_5, e_3) + F(e_5, e_3, e_4) + F(e_3, e_4, e_5) = \frac{1}{2}c_1,$$

olduğundan $c_1 = 0$ ve $\varphi(e_3) = c_2e_2$ olur.

(3.13) eşitliğinden,

$$0 = F(e_1, e_2, e_4) = g((\nabla_{e_1}\varphi)(e_2), e_4) = \frac{b_3}{2}\epsilon_4,$$

ve buradan da $b_3 = 0$ ve $\varphi(e_2) = 0$. Bu ise (3.2) eşitliğiyle çelişir:

$$0 = g(\varphi(e_2), \varphi(e_2)) \neq -g(e_2, e_2) + \eta(e_2)\eta(e_2) = -\epsilon_2.$$

Sonuç olarak $\mathfrak{g}_4$ üzerinde kuasi-para Sasaki yapı yoktur.

$\mathfrak{g}_5$ Lie cebri: ξ Killing olduğundan, $\xi = \xi_4e_4 + \xi_5e_5$.

$$\varphi(e_1) = a_1e_1 + \dots + a_5e_5,$$

$$\varphi(e_2) = b_1e_1 + \dots + b_5e_5,$$

$$\varphi(e_3) = c_1e_1 + \dots + c_5e_5,$$

$$\varphi(e_4) = d_1e_1 + \dots + d_5e_5,$$

$$\varphi(e_5) = f_1e_1 + \dots + f_5e_5.$$

$g(\varphi(e_i), e_i) = 0$ den $a_1 = b_2 = c_3 = d_4 = f_5 = 0$ ve

$$0 = g(\varphi(e_4), \xi) = \epsilon_5\xi_5d_5 \tag{6.22}$$

olduğundan, ξ_5 için iki durum vardır. $\xi_5 = 0$ ise, bu durumda $\xi = \xi_4e_4$ ve $\varphi(\xi) = 0$ olduğundan, $d_1 = d_2 = d_3 = d_5 = 0$ bulunur. $\xi_5 \neq 0$ ise, $\xi_5d_5 = 0$ denkleminde $d_5 = 0$ olur. Sonuç olarak (6.22) eşitliğinden, $d_5 = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $0 = g(\varphi(e_5), \xi)$ denkleminde $f_4 = 0$ olur. Sıfırdan farklı $F(e_i, e_j, e_k)$ yapı sabitleri (6.2) ve

$$F(e_i, e_j, e_k) = g((\nabla_{e_i}\varphi)(e_j), e_k)$$

eşitliklerinden hesaplanıp karşılaştırıldığında, (3.1) eşitliğinden

$$F(e_2, e_1, e_i) = g(\epsilon_1\epsilon_4\frac{a_4}{2}e_1 + \frac{1}{2}\{d_1e_1 + d_2e_2 + d_3e_3\}, e_i)$$

olur. (6.2) eşitliğinden ise $i = 1, 2, 3$ için, $F(e_2, e_1, e_i) = 0$ olur. Bu eşitlikler karşılaştırıldığında $i = 1, 2, 3$ olmak üzere, $a_4 = \pm d_1$, $d_2 = 0$ ve $d_3 = 0$ bulunur. Ayrıca

(6.2) den $F(e_1, e_1, e_2) = F(e_1, e_1, e_3) = 0$ ve (3.1) den, $F(e_1, e_1, e_2) = -\frac{a_4}{2}\epsilon_4$ ve

$F(e_1, e_1, e_3) = -\frac{a_5}{2}\epsilon_5$ ve böylece $a_4 = a_5 = 0$ elde edilir. Ayrıca $a_4 = \pm d_1 = 0$ dir. O halde $\varphi(e_4) = 0$ dir.

$$g(\varphi(e_4), \varphi(e_4)) = -g(e_4, e_4) + \eta(e_4)\eta(e_4)$$

eşitliğinden $0 = -\epsilon_4 + \xi_4^2$ ve buradan da $\xi_4^2 = \epsilon_4 = 1$ olur. $g(\xi, \xi) = \xi_4^2\epsilon_4 + \xi_5^2\epsilon_5 = 1$ olduğundan, $\xi_5 = 0$ bulunur.

$\xi = \xi_4 e_4$ ve $0 = g(\varphi(e_i), \xi)$ olduğundan, $b_4 = c_4 = 0$ olur.

(6.2) denkleminde $F(e_3, e_1, e_1) = F(e_3, e_1, e_2) = F(e_3, e_1, e_3) = 0$ olur. Bu ifadeler (3.13) ile karşılaştırıldığında, $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ ve buradan $\varphi(e_5) = 0$ çelişmesine varılır:

$$0 = g(\varphi(e_5), \varphi(e_5)) = -g(e_5, e_5) \neq 0.$$

Sonuç olarak $\mathfrak{g}_5$ üzerinde kuasi-para Sasaki yapı yoktur.

$\mathfrak{g}_6$ Lie cebri: ξ Killing olduğundan, $\xi = \xi_4 e_4 + \xi_5 e_5$.

$$\varphi(e_1) = a_1 e_1 + \dots + a_5 e_5,$$

$$\varphi(e_2) = b_1 e_1 + \dots + b_5 e_5,$$

$$\varphi(e_3) = c_1 e_1 + \dots + c_5 e_5,$$

$$\varphi(e_4) = d_1 e_1 + \dots + d_5 e_5,$$

$$\varphi(e_5) = f_1 e_1 + \dots + f_5 e_5.$$

$g(\varphi(e_i), e_i) = 0$ eşitliğinden, $a_1 = b_2 = c_3 = d_4 = f_5 = 0$, $\mathfrak{g}_5$ Lie cebirindeki kanıta benzer şekilde $0 = g(\varphi(e_4), \xi)$ eşitliğinden, $d_5 = 0$ ve $0 = g(\varphi(e_5), \xi)$ eşitliğinden $f_4 = 0$ olur. Sıfırdan farklı $F(e_i, e_j, e_k)$ yapı sabitleri (6.2) ve (3.1) eşitliklerinden hesaplanmıştır.

(6.2) den $F(e_1, e_2, e_1) = 0$ ve (3.13) eşitliği ile karşılaştırıldığında $c_1 = 0$ olur.

Benzer şekilde

$b_4 = a_3 = c_2 = a_5 = d_1 = d_2 = f_1 = f_3 = b_3 = c_5 = a_2 = c_4 = 0$ olur. O halde $\varphi(e_3) = 0$ olur, bu bir gelişkidir:

$$0 = g(\varphi(e_3), \varphi(e_3)) = -g(e_3, e_3) + \eta(e_3)\eta(e_3) \neq 0.$$

Sonuç olarak $\mathfrak{g}_6$ üzerinde kuasi-para Sasaki yapı yoktur.

7. SONUÇ

Bu tezde 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde bazı hemen hemen parakontak metrik yapılar araştırılmıştır. Öncelikle 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde η -Einstein yapıların olmadığı gösterilmiştir. Daha sonra ise 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde hemen-hemen parakontak metrik yapı örnekleri verilmiş ve bu yapıların sınıfları belirlenmiştir. Son olarak 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde kuasi-para-Sasaki yapıların varlığı incelenmiştir. 5 boyutlu nilpotent bir Lie cebri üzerinde kuasi-para-Sasaki yapıların varlığı için gerek ve yeter koşulun Lie cebri $\mathfrak{g}_1$ Lie cebrine izomorf olması olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca $\mathfrak{g}_1$ üzerindeki kuasi-para-Sasaki bir yapının $\mathbb{G}_5$ veya $\mathbb{G}_8$ sınıfında olduğu sonucuna varılmıştır.

KAYNAKÇA

- [1] Adati, T. ve Matsumoto, K. (1977). On conformally recurrent and conformally symmetric P-Sasakian manifolds. *TRU Math.*, 13, 25-32.
- [2] Adati, T. ve Miyazawa, T. (1977). Some properties of P-Sasakian manifolds satisfying certain conditions. *TRU Math.*, 13 (1).
- [3] Aktay, Ş. (2020). On the relation between G_2^* structures and almost paracontact structures. *J. Geom. Symmetry Phys.*, 56, 31-43.
- [4] Bejan, C. L. ve Crasmareanu, M. (2014). Parallel tensors and Ricci solitons in 3-dimensional normal paracontact geometry. *Ann. Glob. Anal. Geom.*, 46, 117-127.
- [5] Calvaruso, G. (2011). Homogeneous paracontact metric three-manifolds. *Ill. J. Math.*, 55 (2), 697-718.
- [6] Calvaruso, G. ve Martin-Molina, V. (2014). Recent advances in paracontact metric geometry. *Int. J. Geom. Methods Mod.*, 11 (9), 1460038.
- [7] Calvaruso, G. ve Perrone, D. (2013). Geometry of H -paracontact metric manifolds. arXiv:1307.7662.
- [8] Calvaruso, G. ve Perrone, A. (2016). Five-dimensional paracontact Lie algebras. *Differ. Geom. App.*, 45, 115-129.
- [9] Cappelletti Montano, B., Küpeli Erken, I. ve Murathan, C. (2012). Nullity conditions in paracontact geometry. *Differ. Geom. App.*, 30 (6), 665-693.
- [10] Dacko, P. (2004). On almost para-cosymplectic manifolds. *Tsukuba J. Math.*, 28 (1), 193-213.
- [11] Dixmier, J. (1958). Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotentes III. *Canad. J. Math.*, (10), 321-348.

- [12] Erdem, S. (2002). On almost (para)contact (hyperbolic) metric manifolds and harmonicity of (φ, φ') -holomorphic maps between them. *Houston Math. J.*, 28 (1), 21-45.
- [13] Erken, I. Küpeli. (2019). Curvature properties of quasi-para-Sasakian manifolds. *Int. Electron. J. Geom.*, 12 (2), 210-217.
- [14] Hasan Shahid, M. (1992). Differential geometry of CR-submanifolds of a normal almost para contact manifold. *I. C. T. P.*, Trieste, Italya.
- [15] Kaneyuki, S. ve Williams, F.L. (1985). Almost paracontact and parahodge structures on manifolds. *Nagoya Math. J.*, 99, 173-187.
- [16] Kocabaş, Ü. ve Aktay, Ş. (2022). Examples of almost para-contact metric structures on 5-dimensions. *Fundam. J. .Math. Appl.*, 5 (2), 89-97.
- [17] Nakova, G. ve Zamkovoy, S. (2012). Almost paracontact manifolds. arXiv:0806.3859v2[math.DG] 20 Mart 2009.
- [18] Nakova, G. ve Zamkovoy, S. (2012). Eleven classes of almost paracontact manifolds with semi-Riemannian metric of $(n + 1, n)$. T. Adachi , H. Hashimoto ve M. Hristov (Editörler), *Recent Progress in Differential Geometry and its Related Fields* içinde (s. 119-136). Singapur: World Scientific Publ.
- [19] O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry*. New York: Academic Press.
- [20] Özdemir, N., Aktay, Ş. ve Solgun, M. (2018). Almost paracontact structures obtained from $G_{2(2)}^*$ structures. *Turk. J. .Math.*, 42 (6), 3025-3033.
- [21] Özdemir, N., Solgun, M. ve Aktay, Ş., (2020). Almost para-contact metric structures on 5-dimensional nilpotent Lie algebras. *Fundam. J. .Math. Appl.*, 3 (2), 175-184.
- [22] Rahman, M. S. (1995). A study of para-Sasakian manifolds. *I. C. T. P.*, Trieste, Italya.
- [23] Sato, I. (1976). On a structure similar to the almost contact structure. *Tensor N.S.*, 30, 219-224.

- [24] Sato, I. ve Matsumoto, K. (1979). On p-Sasakian manifolds satisfying certain conditions. *Tensor N.S.*, 33, 173-178.
- [25] Solgun, M. (2021). Some results on $\mathcal{D}$ -homothetic deformation on almost paracontact metric manifolds. *Fundam. J. .Math. Appl.*, 4(4), 264-270.
- [26] Welyczko, J. (2009). On Legendre curves in 3-dimensional normal almost paracontact metric manifolds. *Result. Math.*, 54, 377-387.
- [27] Zamkovoy, S. (2009). Canonical connections on paracontact manifolds. *Ann. Glob. Anal. Geom.*, 36, 37-60.
- [28] Zamkovoy, S. (2018). On para-Kenmotsu manifolds. *Filomat*, 32 (14), 4971-4980.
- [29] Zamkovoy, S. (2019). On the geometry of trans-para Sasakian manifolds. *Filomat*, 33 (18), 6015-6024.
- [30] Zamkovoy, S. ve Nakova, G. (2018). The decomposition of almost paracontact metric manifolds in eleven classes revisited. *J. Geom.*, 109 (18), 1-23.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Ümmü KOCABAŞ

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2020)

Yayımları ve Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

Kocabaş, Ü. ve Aktay, Ş. (2022). Examples of almost para-contact metric structures on 5-dimensions. *Fundam. J. Math. Appl.*, 5 (2), 89-97.