



**HEMEN HEMEN PARAKONTAK METRİK  
YAPILARDAN ELDE EDİLEN HEMEN HEMEN  
PARAHERMITIAN YAPILARIN KONFORMAL  
DEFORMASYONLARININ İNCELENMESİ**

**Doktora Tezi**

**Murat EFE**

**Eskişehir 2025**

HEMEN HEMEN PARAKONTAK METRİK YAPILARDAN ELDE  
EDİLEN HEMEN HEMEN PARAHERMITIAN YAPILARIN  
KONFORMAL DEFORMASYONLARININ İNCELENMESİ

Murat EFE

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı  
Geometri Bilim Dalı  
Danışman: Prof. Dr. Nülfir ÖZDEMİR

Eskişehir  
Eskişehir Teknik Üniversitesi  
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü  
Haziran 2025

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Murat EFE'nin "HEMEN HEMEN PARAKONTAK YAPILARDAN ELDE EDİLEN HEMEN HEMEN PARAHERMITIAN YAPILARIN KONFORMAL DEFORMASYONLARININ İNCELENMESİ" başlıklı tezi 20/06/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Ana-bilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

| <u>Jüri Üyeleri</u> | <u>Unvanı Adı-Soyadı</u>    | <u>İmza</u> |
|---------------------|-----------------------------|-------------|
| Üye (Tez Danışmanı) | : Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR | .....       |
| Üye                 | : Prof. Dr. Mine TURAN      | .....       |
| Üye                 | : Prof. Dr. Sevil ŞENTÜRK   | .....       |
| Üye                 | : Prof. Dr. Murat LİMONCU   | .....       |
| Üye                 | : Doç. Dr. Mehmet SOLGUN    | .....       |

Prof. Dr. Harun BÖCÜK  
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

20/06/2025

## DANIşMAN ONAYI

Danişmanlığını yürüttüğüm doktora ğrencisi Murat EFE, “HEMEN HEMEN PARAKONTAK YAPILARDAN ELDE EDİLEN HEMEN HEMEN PARAHERMİTİAN YAPILARIN KONFORMAL DEFORMASYONLARININ İNCELENMESİ” başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Danişmanı  
Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

## ÖZET

### HEMEN HEMEN PARAKONTAK METRİK YAPILARDAN ELDE EDİLEN HEMEN HEMEN PARAHERMITIAN YAPILARIN KONFORMAL DEFORMASYONLARININ İNCELENMESİ

Murat EFE

Matematik Anabilim Dalı  
Geometri Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Haziran 2025

Danışman: Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

Bu çalışmada, konformal deformasyonlar kullanılarak hemen hemen parakontak metrik manifoldlardan elde edilen hemen hemen parahermitian manifoldlar ve hemen hemen parahermitian manifoldlardan elde edilen hemen hemen parakontak metrik manifoldlar ele alınmıştır. Herhangi bir hemen hemen parakontak metrik manifold  $\mathbb{R}$  (reel sayılar) ile çarpılmış,  $\sigma : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma(X, t) = t$  olmak üzere;  $M \times \mathbb{R}$  üzerinde  $e^{2\sigma}$  fonksiyonu kullanılarak konformal deformasyonlu hemen hemen parahermitian bir yapı elde edilmiş,  $M$  ve  $M \times \mathbb{R}$  manifoldlarının ait olduğu sınıflar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Daha sonra hemen hemen parahermitian metrik bir  $N$  manifoldu  $\mathbb{R}$  ile çarpılmış ve  $N \times \mathbb{R}$  üzerinde hemen hemen parakontak bir yapı elde edilmiştir. Ayrıca  $\sigma : N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma(X, t) = t$  olmak üzere;  $N \times \mathbb{R}$  üzerinde  $e^{2\sigma}$  fonksiyonu kullanılarak hemen hemen parakontak başka bir yapı elde edilmiştir. Bunlara ek olarak  $N$  manifoldu Einstein (Ricci soliton, Yamabe soliton) ise  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldunun  $\eta$ -Ricci soliton ( $\eta$ -Ricci soliton, kuasi Yamabe soliton) olduğu gösterilmiştir. Son olarak  $N$  ve  $N \times \mathbb{R}$  manifoldlarının ait olduğu sınıflar arasındaki ilişkiler araştırılmış ve elde edilen sonuçlar kullanılarak, hemen hemen parakontak metrik manifoldların ve hemen hemen parahermitian manifoldların çeşitli sınıflarından örnekleri sunulmuştur.

**Anahtar Sözcükler:** Hemen hemen parakontak metrik manifold, Hemen hemen parahermitian manifold, Einstein manifold, Ricci soliton.

## ABSTRACT

### INVESTIGATION OF CONFORMAL DEFORMATIONS OF ALMOST PARAHERMITIAN STRUCTURES OBTAINED FROM ALMOST PARAKONTACT METRIC STRUCTURES

Murat EFE

Department of Mathematics  
Programme in Geometry

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, June 2025

Supervisor: Prof.Dr. Nülifer ÖZDEMİR

In this study, almost parahermitian manifolds obtained from conformal deformations of almost paracontact metric manifolds and almost paracontact metric manifolds obtained from almost parahermitian manifolds are considered. Any almost paracontact metric manifold is multiplied by  $\mathbb{R}$  (real numbers) and an almost parahermitian structure is constructed on  $M \times \mathbb{R}$  using the function  $e^{2\sigma}$ , where  $\sigma : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma(X, t) = t$ . Then the relations between the classes of  $M$  and  $M \times \mathbb{R}$  are studied. In addition, two different almost paracontact metric structures are obtained on  $N \times \mathbb{R}$  from any almost parahermitian metric manifold  $N$  by using two different metrics, one of which depends on  $\sigma : N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma(X, t) = t$ . It is also shown that if the manifold  $N$  is Einstein (Ricci soliton, Yamabe soliton), then the manifold  $N \times \mathbb{R}$  is  $\eta$ -Ricci soliton ( $\eta$ -Ricci soliton, quasi Yamabe soliton). Finally, the relations between the classes of  $N$  and  $N \times \mathbb{R}$  are investigated and using the relations obtained in the study, examples of various classes of almost paracontact metric manifolds and almost parahermitian manifolds are presented.

**Keywords:** Almost paracontact metric manifold, Almost parahermitian manifold, Einstein manifold, Ricci soliton.

## TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emekleri olan ve her türlü desteklerini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Prof Dr. Nülifer ÖZDEMİR'e ve doktora çalışmam boyunca her zaman yanımda olan değerli aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Murat EFE

2025



## ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Murat EFE



## İÇİNDEKİLER

|                                                             | <u>Sayfa</u> |
|-------------------------------------------------------------|--------------|
| BAŞLIK SAYFASI .....                                        | i            |
| JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....                                  | ii           |
| DANIŞMAN ONAYI.....                                         | iii          |
| ÖZET .....                                                  | iv           |
| ABSTRACT.....                                               | v            |
| TEŞEKKÜR.....                                               | vi           |
| ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....            | vii          |
| İÇİNDEKİLER .....                                           | viii         |
| TABLolar DİZİNİ .....                                       | x            |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....                        | xi           |
| 1. GİRİŞ.....                                               | 1            |
| 2. ÖN BİLGİLER .....                                        | 2            |
| 2.1. Hemen Hemen Parakontak Metrik Yapılar .....            | 2            |
| 2.2. Hemen Hemen Parahermitian Metrik Yapılar.....          | 10           |
| 3. HEMEN HEMEN PARAKONTAK YAPILARDAN ELDE EDİ-              |              |
| LEN HEMEN HEMEN PARAHERMITIAN METRİK YAPILAR                | 13           |
| 3.1. Hemen Hemen Parakontak Metrik Manifoldlardan Elde Edi- |              |
| len Hemen Hemen Parahermitian Metrik Manifoldlar .....      | 13           |
| 3.2. Hemen Hemen Parakontak Metrik Manifoldların Konformal  |              |
| Deformasyonlarından Elde Edilen Hemen Hemen Paraher-        |              |
| mitian Metrik Manifoldlar .....                             | 15           |
| 4. HEMEN HEMEN PARAHERMITIAN YAPILARDAN ELDE                |              |
| EDİLEN HEMEN HEMEN PARAKONTAK YAPILAR .....                 | 76           |
| 4.1. Hemen Hemen Parahermitian Metrik Manifoldlardan Elde   |              |
| Edilen Hemen Hemen Parakontak Metrik Manifoldlar .....      | 76           |

|                                                                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.2. Hemen Hemen Parahermitian Manifoldların Konformal Deformasyonlarından Elde edilen Hemen Hemen Parakontak Metrik Manifoldlar ..... | 109 |
| KAYNAKÇA.....                                                                                                                          | 132 |
| ÖZGEÇMİŞ                                                                                                                               |     |



## TABLÖLAR DİZİNİ

### Sayfa

**Tablo 3.1.**  $M$  ve  $M \times \mathbb{R}$  manifoldlarının sınıfları arasındaki ilişkiler ..... 75

**Tablo 4.1.**  $N$  ve  $N \times \mathbb{R}$ 'nin ait olduğu sınıflar arasındaki ilişkiler ..... 109

**Tablo 4.2.**  $N$  ve  $N \times \mathbb{R}$  manifoldlarının sınıfları arasındaki ilişkiler ..... 131



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

|                           |                                                                    |
|---------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$              | : Reel sayılar kümesi                                              |
| $[\cdot, \cdot]$          | : Lie braket                                                       |
| $M$                       | : $(2n+1)$ -boyutlu $C^\infty$ manifold                            |
| $TM$                      | : $M$ manifoldunun tanjant demeti                                  |
| $\chi(M)$                 | : $M$ manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı                |
| $C^\infty(M, \mathbb{R})$ | : $M$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye giden $C^\infty$ fonksiyonların kümesi |
| $\xi$                     | : $M$ üzerindeki vektör alan                                       |
| $g$                       | : $M$ üzerindeki metrik tensör                                     |
| $\varphi$                 | : $M$ üzerinde $(1, 1)$ tipinde anti-simetrik tensör alanı         |
| $\Phi$                    | : $M$ üzerindeki temel 2-form                                      |
| $\nabla$                  | : $M$ üzerindeki $g$ metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi       |
| $d$                       | : $M$ manifoldu üzerindeki dış türev                               |
| $\delta$                  | : $M$ üzerindeki kotürev                                           |
| $\otimes_3^0 M$           | : $M$ üzerindeki $(0, 3)$ tipindeki tensör alanları                |
| $R$                       | : $M$ üzerindeki Riemannian eğriliği                               |
| $Q$                       | : $M$ üzerindeki Ricci eğriliği                                    |
| $s$                       | : $M$ üzerindeki skaler eğrilik                                    |
| $N$                       | : $2n$ -boyutlu $C^\infty$ manifold                                |
| $TN$                      | : $N$ manifoldunun tanjant demeti                                  |
| $h$                       | : $N$ üzerindeki metrik tensör                                     |
| $J$                       | : $N$ üzerindeki parakompleks yapı                                 |
| $\mathcal{V}$             | : $N$ üzerindeki $J$ 'nin 1 özdeğerine karşılık gelen özuzay       |
| $\mathcal{H}$             | : $N$ üzerindeki $J$ 'nin $-1$ özdeğerine karşılık gelen özuzay    |
| $\Theta$                  | : $N$ manifoldu üzerindeki temel Lee form                          |

## 1. GİRİŞ

Üzerinde özel yapılar olan manifoldlar diferansiyel geometrinin temel çalışma alanlarıdır. [1]'de China üzerinde hemen hemen kontak metrik bir  $(\varphi, \eta, \xi, g)$  yapısı bulunan manifoldları incelemiştir. Bu manifoldları  $\varphi$  endomorfizminin kovaryant türevinin sağladığı özelliklere göre sınıflamış ve sınıflara ait örnekler vermiştir. [2]'de ise Zamkovoy hemen hemen parakontak yapıları ele almış ve bir sınıflama vermiştir. Ayrıca [4]'de Gadea çift boyutlu manifoldlardan hemen hemen parahermitian yapıları incelemiş ve parakompleks yapının kovaryant türevine göre bu manifoldları sınıflamıştır.

Bu çalışmada, hemen hemen parakontak metrik ve hemen hemen parahermitian manifoldlar ele alınmış ve hemen hemen parakontak metrik manifoldlarda Zamkovoy'un, hemen hemen parahermitian manifoldlarda ise Gadea'nın sınıflandırması kullanılmıştır. İlk olarak hemen hemen parakontak metrik bir manifold  $\mathbb{R}$  çarpılmış ve  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerinde; sadece  $t$ 'ye bağlı  $\sigma(X, t) = t$  fonksiyonu kullanılarak konformal deformasyonlu hemen hemen parahermitian bir yapı inşaa edilmiştir. Daha sonra ise [2] ve [4]'deki sınıflandırma dikkate alınarak  $M$  ve  $M \times \mathbb{R}$  manifoldlarının sınıfları arasındaki ilişkiler araştırılmış ve elde edilen sonuçlar örneklerle pekiştirilmiştir. Daha sonra ise çift boyutlu bir  $N$  hemen hemen parahermitian manifold  $\mathbb{R}$  ile çarpılmış ve  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerinde 2 farklı yapı inşaa edilmiştir. Oluşturulan yapılardan birisinde  $N \times \mathbb{R}$  manifoldunun sadece  $\mathbb{G}_1 \oplus \mathbb{G}_2 \oplus \mathbb{G}_3 \oplus \mathbb{G}_4$  sınıfına ya da bu sınıfın alt sınıflarına ait olabileceği gösterilmiş ve örneklerle bu ifadeler desteklenmiştir. Diğerinde ise yine sadece  $t$ 'ye bağlı  $\sigma(X, t) = t$  fonksiyonu kullanılarak konformal deformasyonlu  $N \times \mathbb{R}$  manifoldunun sadece  $\mathbb{G}_1 \oplus \mathbb{G}_2 \oplus \mathbb{G}_3 \oplus \mathbb{G}_4 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfına ya da bu sınıfın  $\bar{\mathbb{G}}_6$ 'ı içeren alt sınıflarına ait olabileceği kanıtlanmış ve örneklendirilmiştir. Ayrıca  $N$  manifoldu Einstein (Ricci soliton, Yamabe soliton) ise  $N \times \mathbb{R}$  manifoldunun  $\eta$ -Ricci soliton ( $\eta$ -Ricci soliton, quasi Yamabe soliton) olduğu da gösterilmiştir.

## 2. ÖN BİLGİLER

### 2.1. Hemen Hemen Parakontak Metrik Yapılar

**Tanım 2.1.**  $M$ ,  $(2n + 1)$ -boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold ve bu manifold üzerindeki vektör alanlarının uzayı  $\chi(M)$  olmak üzere; keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\varphi : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$  endomorfizmi,  $\eta$  1-formu ve  $\xi$  vektör alanı

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2(X) = X - \eta(X)\xi$$

koşullarını sağlıyor ise  $(\varphi, \xi, \eta)$  üçlüsüne  $M$  manifoldu üzerinde bir **hemen hemen parakontak yapı** ve  $M$  manifolduna bir **hemen hemen parakontak manifold** denir [2].

Tanımdan

$$\varphi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0$$

olduğu şu şekilde gösterilebilir:

$$\varphi^2(\xi) = \xi - \underbrace{\eta(\xi)}_{=1} \xi = \xi - \xi = 0$$

eşitliğine  $\varphi$  dönüşümü uygulanırsa

$$0 = \varphi^3(\xi) = \varphi^2(\varphi(\xi)) = \varphi(\xi) - \eta(\varphi(\xi)) \xi$$

olur. Buradan

$$\varphi(\xi) = \eta(\varphi(\xi)) \xi$$

elde edilir. Diğer yandan

$$0 = \varphi^2(\xi) = \varphi(\varphi(\xi)) = \varphi(\eta(\varphi(\xi)) \xi) = \eta(\varphi(\xi)) \varphi(\xi) \quad (2.1)$$

olarak bulunur.  $\varphi(\xi) = \eta(\varphi(\xi)) \xi$  eşitliği (2.1) ifadesinde yerine yazıldığında

$$0 = (\eta(\varphi(\xi)))^2 \xi$$

eşitliğinden  $\eta(\varphi(\xi)) = 0$  ve buradan  $\varphi(\xi) = \eta(\varphi(\xi)) \xi = 0 \cdot \xi = 0$  olur.

$M$  manifoldu üzerindeki her  $X \in \chi(M)$  için  $\varphi^2(X) = X - \eta(X)\xi$  eşitliğinin her iki tarafına  $\varphi$  dönüşümü uygulandığında

$$\varphi(\varphi^2(X)) = \varphi(X) - \eta(X) \underbrace{\varphi(\xi)}_{=0} = \varphi(X)$$

ve  $\varphi^2(X) = X - \eta(X)\xi$  eşitliğinde  $X$  yerine  $\varphi(X)$  yazılırsa

$$\varphi^2(\varphi(X)) = \varphi(X) - \eta(\varphi(X))\xi$$

eşitliklerinden

$$\varphi(X) - \eta(\varphi(X))\xi = \varphi(X)$$

elde edilir. Buradan

$$\eta(\varphi(X))\xi = 0$$

olur. Bu durumda  $\eta(\varphi(X)) = 0$  olarak bulunur.

**Tanım 2.2.**  $(M, \varphi, \xi, \eta)$  bir hemen hemen parakontak manifold ve  $g$  bu manifold üzerinde bir metrik olsun. Eğer herhangi  $X, Y$  vektör alanları için

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \quad (2.2)$$

koşulu sağlanıyor ise  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  dörtlüsüne  $M$  manifoldu üzerinde bir **hemen hemen parakontak metrik yapı** ve  $M$  manifolduna bir **hemen hemen parakontak metrik manifold** denir [2].

Keyfi  $X, Y \in \chi(M)$  için hemen hemen parakontak metrik manifold tanımındaki (2.2) eşitliğinde  $Y = \xi$  olarak alındığında

$$0 = g(\varphi(X), \varphi(\xi)) = -g(X, \xi) + \eta(X)\eta(\xi)$$

olur ve buradan

$$g(X, \xi) = \eta(X)$$

elde edilir. Ayrıca (2.2) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} g(\varphi(X), Y) &= -g(\varphi^2(X), \varphi(Y)) + \underbrace{\eta(\varphi(X))}_{=0} \eta(Y) \\ &= -g(\varphi^2(X), \varphi(Y)) \\ &= -g(X - \eta(X)\xi, \varphi(Y)) \\ &= -g(X, \varphi(Y)) + \eta(X)g(\xi, \varphi(Y)) \\ &= -g(X, \varphi(Y)) + \eta(X) \underbrace{\eta(\varphi(Y))}_{=0} \\ &= -g(X, \varphi(Y)) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Böylece hemen hemen parakontak metrik manifold için temel 2-form

$$\Phi(X, Y) := g(\varphi(X), Y)$$

olarak tanımlanır.  $M$  manifoldu üzerindeki keyfi  $X, Y, Z \in \chi(M)$  için  $\varphi$  endomorfizmin kovaryant türevi

$$(\nabla_X \varphi)(Y) = \nabla_X \varphi(Y) - \varphi(\nabla_X Y)$$

ve  $g$  metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi (Koszul formülü)

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X[g(Y, Z)] + Y[g(Z, X)] - Z[g(X, Y)] \\ &\quad + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) \end{aligned} \quad (2.3)$$

şeklindedir [3].

Tanımdaki (2.2) eşitliği dikkate alındığında  $g$  metriğinin işareti  $(n+1, n)$  olur.  $M$  manifoldu üzerindeki  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  dörtlüsü hemen hemen parakontak metrik bir yapı olsun. Kısalık açısından

$$\beta(X, Y, Z) := (\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g((\nabla_X \varphi)(Y), Z)$$

şeklinde ifade edilmiştir.  $g(\varphi(Y), Z) = -g(Y, \varphi(Z))$  ifadesinin her iki tarafı keyfi  $X$  vektör alanı yönünde türevi alındığında  $g((\nabla_X \varphi)(Y), Z) = -g((\nabla_X \varphi)(Z), Y)$  olduğundan

$$\beta(X, Y, Z) = g((\nabla_X \varphi)(Y), Z) = -g((\nabla_X \varphi)(Z), Y) = -\beta(X, Z, Y)$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \beta(X, \varphi(Y), \varphi(Z)) &= g((\nabla_X \varphi)(\varphi(Y)), \varphi(Z)) \\ &= g(\nabla_X \varphi^2(Y), \varphi(Z)) + g(\nabla_X \varphi(Y), \varphi^2(Z)) \\ &= g((\nabla_X \varphi)(Y), Z) - \eta(Y)g((\nabla_X \varphi)(\xi), Z) \\ &\quad - \eta(Z)g((\nabla_X \varphi)(Y), \xi) \\ &= \beta(X, Y, Z) + \eta(Y)\beta(X, Z, \xi) - \eta(Z)\beta(X, Y, \xi) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

$\{e_1, e_2, \dots, e_n, \varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n), \xi\}$ ,  $M$  manifoldunun açık alt kümesi üze-



rinde bir çatı alanı olmak üzere;  $\theta$ ,  $\theta^*$  ve  $w$  1- formları aşağıdaki gibi tanımlıdır [2]:

$$\theta(X) := \sum_{i=1}^n (\beta(e_i, e_i, X) - \beta(\varphi(e_i), \varphi(e_i), X)),$$

$$\theta^*(X) := \sum_{i=1}^n (\beta(e_i, \varphi(e_i), X) - \beta(\varphi(e_i), e_i, X)),$$

$$w(X) = \beta(\xi, \xi, X).$$

$\eta$  1-formun Levi-Civita kovaryant türevi  $\nabla\eta$ ,  $\eta$  1-formun ve  $\Phi$  temel 2-formun dış türevleri  $d\eta$  ve  $d\Phi$  aşağıdaki gibidir [2]:

$$(\nabla_X \eta)(Y) = g(\nabla_X \xi, Y) = -\beta(X, \varphi(Y), \xi),$$

$$2d\eta(X, Y) = (\nabla_X \eta)(Y) - (\nabla_Y \eta)(X) = -\beta(X, \varphi(Y), \xi) + \beta(Y, \varphi(X), \xi),$$

$$3d\Phi(X, Y, Z) = \beta(X, Y, Z) + \beta(Y, Z, X) + \beta(Z, X, Y).$$

$M$  manifoldu üzerindeki hemen hemen parakontak metrik yapı  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  olmak üzere;  $\Phi$  temel 2-formun kovaryant türevinin özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathbb{G} := \{\beta \in \otimes_3^0 M : \beta(X, Y, Z) &= -\beta(X, Z, Y) \\ &= \beta(X, \varphi(Y), \varphi(Z)) - \eta(Y)\beta(X, Z, \xi) \\ &\quad + \eta(Z)\beta(X, Y, \xi)\} \end{aligned}$$

uzayı tanımlanır [2]. Burada  $\otimes_3^0 M$  ile manifold üzerindeki  $(0, 3)$  tipindeki tensör alanları gösterilmektedir. Bu uzay 12 alt uzayın direkt toplamı olarak yazılır:

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{G}_{12}.$$

Böylece herhangi bir hemen hemen parakontak metrik manifold,  $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq 12$  olmak üzere;  $\Phi$  temel 2-formun kovaryant türevinin ait olduğu  $\mathbb{G}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{G}_{i_k}$  alt uzaya göre sınıflandırılmış olur.  $\mathbb{G}_i$  alt uzayların tanımlama bağıntıları

şu şekildedir [2]:

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_1 := \{ \beta \in \mathbb{G} : \beta(X, Y, Z) &= \frac{1}{2(n-1)} \{ g(X, \varphi(Y))\theta(\varphi(Z)) \\ &- g(X, \varphi(Z))\theta(\varphi(Y)) \\ &- g(\varphi(X), \varphi(Y))\theta(\varphi^2(Z)) \\ &+ g(\varphi(X), \varphi(Z))\theta(\varphi^2(Y)) \}\end{aligned}$$

$$\mathbb{G}_2 := \{ \beta \in \mathbb{G} : \beta(X, Y, Z) = -\beta(\varphi(X), \varphi(Y), Z), \quad \theta = 0 \},$$

$$\mathbb{G}_3 := \{ \beta \in \mathbb{G} : \beta(X, Y, Z) = -\beta(Y, X, Z), \quad \beta(\xi, Y, Z) = \beta(X, \xi, Z) = 0 \},$$

$$\mathbb{G}_4 := \{ \beta \in \mathbb{G} : \mathfrak{S}_{XYZ}\beta(X, Y, Z) = \beta(\xi, Y, Z) = \beta(X, \xi, Z) = 0 \},$$

$$\mathbb{G}_5 := \left\{ \beta \in \mathbb{G} : \beta(X, Y, Z) = \frac{\theta(\xi)}{2n} \{ \eta(Y)g(\varphi(X), \varphi(Z)) - \eta(Z)g(\varphi(X), \varphi(Y)) \} \right\},$$

$$\mathbb{G}_6 := \left\{ \beta \in \mathbb{G} : \beta(X, Y, Z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{ \eta(Y)g(X, \varphi(Z)) - \eta(Z)g(X, \varphi(Y)) \} \right\},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_7 := \{ \beta \in \mathbb{G} : \beta(X, Y, Z) &= -\eta(Y)\beta(X, Z, \xi) + \eta(Z)\beta(X, Y, \xi) \\ \beta(X, Y, \xi) &= -\beta(Y, X, \xi) = -\beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi), \quad \theta^*(\xi) = 0 \},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_8 := \{ \beta \in \mathbb{G} : \beta(X, Y, Z) &= -\eta(Y)\beta(X, Z, \xi) + \eta(Z)\beta(X, Y, \xi) \\ \beta(X, Y, \xi) &= \beta(Y, X, \xi) = -\beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi), \quad \theta(\xi) = 0 \},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_9 := \{ \beta \in \mathbb{G} : \beta(X, Y, Z) &= -\eta(Y)\beta(X, Z, \xi) + \eta(Z)\beta(X, Y, \xi) \\ \beta(X, Y, \xi) &= -\beta(Y, X, \xi) = \beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi) \},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_{10} := \{ \beta \in \mathbb{G} : \beta(X, Y, Z) &= -\eta(Y)\beta(X, Z, \xi) + \eta(Z)\beta(X, Y, \xi) \\ \beta(X, Y, \xi) &= \beta(Y, X, \xi) = \beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi) \},\end{aligned}$$

$$\mathbb{G}_{11} := \{ \beta \in \mathbb{G} : \beta(X, Y, Z) = \eta(X)\beta(\xi, \varphi(Y), \varphi(Z)) \},$$

$$\mathbb{G}_{12} := \{ \beta \in \mathbb{G} : \beta(X, Y, Z) = \eta(X) \{ \eta(Y)\beta(\xi, \xi, Z) - \eta(Z)\beta(\xi, \xi, Y) \} \}.$$

Sonraki bölümlerde kullanılacak olan  $\alpha$ -para-Sasakian manifold ile  $\mathbb{G}_5$  sınıfı ve  $\alpha$ -para-Kenmotsu manifold ile  $\mathbb{G}_6$  sınıfı arasındaki ilişkiler aşağıda verilmiştir.

**Tanım 2.3.**  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen parakontak bir manifold olsun. Keyfi  $X, Y$  vektör alanları için

$$(\nabla_X \varphi)(Y) = \alpha (g(X, Y)\xi - \eta(Y)X) \quad (2.4)$$

eşitliğini sağlayan  $\alpha \neq 0$  reel sayısı varsa bu manifolda  **$\alpha$ -para-Sasakian manifold** denir. Özel olarak  $\alpha = 1$  alınırsa bu manifolda **para-Sasakian manifold** denir [2].

Ayrıca  $\alpha = 1$  alınıp (2.4) eşitliğin her iki tarafı keyfi  $Z \in \chi(M)$  ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)(Y), Z) &= g(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, Z) \\ &= -\eta(Y)g(X, Z) + \eta(Z)g(X, Y) \\ &= \eta(Y)g(\varphi(X), \varphi(Z)) - \eta(Z)g(\varphi(X), \varphi(Y)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

olur.  $\mathbb{G}_5$  sınıfında  $\theta(\xi) = 2n$  olarak alındığında  $\mathbb{G}_5$  sınıfının para-sasakian manifoldlardan oluşan bir alt sınıfı elde edilir ve bu sınıf

$$\bar{\mathbb{G}}_5 := \{\beta \in \mathbb{G} : \beta(X, Y, Z) = \eta(Y)g(\varphi(X), \varphi(Z)) - \eta(Z)g(\varphi(X), \varphi(Y))\}$$

olarak gösterilecektir.

**Tanım 2.4.**  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen parakontak metrik bir manifold olsun. Herhangi  $X, Y$  vektör alanları için

$$(\nabla_X \varphi)(Y) = -\alpha (g(X, \varphi(Y))\xi + \eta(Y)\varphi(X)) \quad (2.6)$$

eşitliğini sağlayan  $\alpha \neq 0$  reel sayısı varsa bu manifolda  **$\alpha$ -para-Kenmotsu manifold** denir. Eğer  $\alpha = -1$  ise bu manifolda **para-Kenmotsu manifold**, Eğer  $\alpha = 1$  ise bu manifolda **(-1)-para-Kenmotsu manifold** denir [2].

Özel olarak  $\alpha = -1$  alınırsa ve (2.6) eşitliğin her iki tarafı keyfi  $Z \in \chi(M)$  ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)(Y), Z) &= g(g(X, \varphi(Y))\xi + \eta(Y)\varphi(X), Z) \\ &= \eta(Z)g(X, \varphi(Y)) - \eta(Y)g(X, \varphi(Z)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

olur. Eğer  $\mathbb{G}_6$  sınıfında  $\theta^*(\xi) = 2n$  olarak alındığında  $\mathbb{G}_6$  sınıfının alt sınıfı olan

$$\tilde{\mathbb{G}}_6 := \{\beta \in \mathbb{G} : \beta(X, Y, Z) = \eta(Z)g(X, \varphi(Y)) - \eta(Y)g(X, \varphi(Z))\}$$

para-Kenmotsu manifoldların sınıfı olur. Eğer  $\alpha = 1$  alınıp (2.6) eşitliğin her iki

tarafı keyfi  $Z \in \chi(M)$  ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)(Y), Z) &= -g(g(X, \varphi(Y))\xi + \eta(Y)\varphi(X), Z) \\ &= \eta(Y)g(X, \varphi(Z)) - \eta(Z)g(X, \varphi(Y)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

olur.  $(-1)$ -para-Kenmatsu manifoldlardan oluşan  $(\theta^*(\xi) = -2n)$ ,  $\mathbb{G}_6$  sınıfının alt sınıfı

$$\bar{\mathbb{G}}_6 := \{\beta \in \mathbb{G} : \beta(X, Y, Z) = \eta(Y)g(X, \varphi(Z)) - \eta(Z)g(X, \varphi(Y))\}$$

olarak gösterilsin.

Ayrıca herhangi bir  $\beta(X, Y, Z) = \sum_{i=1}^{12} \beta_i(X, Y, Z) \in \mathbb{G}$  olmak üzere;  $\beta(X, Y, Z)$  tensörünün  $\mathbb{G}_i$  alt uzaylarına izdüşümleri aşağıdaki şekildedir [2]:

$$\begin{aligned} \beta^1(X, Y, Z) &= \frac{1}{2(n-1)} \{g(X, \varphi(Y))\theta(\varphi(Z)) - g(X, \varphi(Z))\theta(\varphi(Y)) \\ &\quad - g(\varphi(X), \varphi(Y))\theta(\varphi^2(Z)) + g(\varphi(X), \varphi(Z))\theta(\varphi^2(Y))\}, \end{aligned}$$

$$\beta^2(X, Y, Z) = \frac{1}{2} \{\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \varphi^2(Z)) - \beta(\varphi(X), \varphi^2(Y), \varphi(Z))\} - \beta^1(X, Y, Z),$$

$$\begin{aligned} \beta^3(X, Y, Z) &= \frac{1}{6} \{\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \varphi^2(Z)) + \beta(\varphi(X), \varphi^2(Y), \varphi(Z)) \\ &\quad + \beta(\varphi^2(Y), \varphi^2(Z), \varphi^2(X)) + \beta(\varphi(Y), \varphi^2(Z), \varphi(X)) \\ &\quad + \beta(\varphi^2(Z), \varphi^2(X), \varphi^2(Y)) + \beta(\varphi(Z), \varphi^2(X), \varphi(Y))\}, \end{aligned}$$

$$\beta^4(X, Y, Z) = \frac{1}{2} \{\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \varphi^2(Z)) + \beta(\varphi(X), \varphi^2(Y), \varphi(Z))\} - \beta^3(X, Y, Z),$$

$$\beta^5(X, Y, Z) = \frac{\theta(\xi)}{2n} \{\eta(Y)g(\varphi(X), \varphi(Z)) - \eta(Z)g(\varphi(X), \varphi(Y))\},$$

$$\beta^6(X, Y, Z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{\eta(Y)g(X, \varphi(Z)) - \eta(Z)g(X, \varphi(Y))\},$$

$$\begin{aligned} \beta^7(X, Y, Z) &= -\frac{1}{4}\eta(Y) \{\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Z), \xi) - \beta(\varphi(X), \varphi(Z), \xi) \\ &\quad - \beta(\varphi^2(Z), \varphi^2(X), \xi) + \beta(\varphi(Z), \varphi(X), \xi)\} \\ &\quad + \frac{1}{4}\eta(Z) \{\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \xi) - \beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi) \\ &\quad - \beta(\varphi^2(Y), \varphi^2(X), \xi) + \beta(\varphi(Y), \varphi(X), \xi)\} - \beta^6(X, Y, Z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta^8(X, Y, Z) = & -\frac{1}{4}\eta(Y) \{ \beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Z), \xi) - \beta(\varphi(X), \varphi(Z), \xi) \\
& + \beta(\varphi^2(Z), \varphi^2(X), \xi) - \beta(\varphi(Z), \varphi(X), \xi) \} \\
& + \frac{1}{4}\eta(Z) \{ \beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \xi) - \beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi) \\
& + \beta(\varphi^2(Y), \varphi^2(X), \xi) - \beta(\varphi(Y), \varphi(X), \xi) \} - \beta^5(X, Y, Z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta^9(X, Y, Z) = & -\frac{1}{4}\eta(Y) \{ \beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Z), \xi) + \beta(\varphi(X), \varphi(Z), \xi) \\
& - \beta(\varphi^2(Z), \varphi^2(X), \xi) - \beta(\varphi(Z), \varphi(X), \xi) \} \\
& + \frac{1}{4}\eta(Z) \{ \beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \xi) + \beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi) \\
& - \beta(\varphi^2(Y), \varphi^2(X), \xi) - \beta(\varphi(Y), \varphi(X), \xi) \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta^{10}(X, Y, Z) = & -\frac{1}{4}\eta(Y) \{ \beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Z), \xi) + \beta(\varphi(X), \varphi(Z), \xi) \\
& + \beta(\varphi^2(Z), \varphi^2(X), \xi) + \beta(\varphi(Z), \varphi(X), \xi) \} \\
& + \frac{1}{4}\eta(Z) \{ \beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \xi) + \beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi) \\
& + \beta(\varphi^2(Y), \varphi^2(X), \xi) + \beta(\varphi(Y), \varphi(X), \xi) \},
\end{aligned}$$

$$\beta^{11}(X, Y, Z) = \eta(X)\beta(\xi, \varphi^2(Y), \varphi^2(Z)),$$

$$\beta^{12}(X, Y, Z) = \eta(X) \{ \eta(Y)\beta(\xi, \xi, \varphi^2(Z)) - \eta(Z)\beta(\xi, \xi, \varphi^2(Y)) \}.$$

Tüm bunlara ek olarak,  $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_3$  ve  $\mathbb{G}_4$  sınıfları  $1 \leq i \leq 4$  olmak üzere;

$$F : \mathbb{G}_i \longrightarrow \mathbb{G}_i,$$

$$F(\beta)(X, Y, Z) := \frac{1}{2} \{ \beta(X, Y, Z) + \beta(\varphi(X), Y, Z) \}$$

lineer dönüşümü kullanılarak invaryant alt sınıflara ayrılır.

$$(FoF)(\beta)(X, Y, Z) = F(\beta)(Y, X, Z)$$

olduğundan  $F$  dönüşümü bir projeksiyondur.  $F$  dönüşümünün çekirdeği  $\mathbb{G}_i^1$ , görüntü kümesi ise  $\mathbb{G}_i^2$  ile gösterilsin. Bu durumda

$$\mathbb{G}_i^1 := \{ \beta \in \mathbb{G} : \beta^i(X, Y, Z) = -\beta^i(\varphi(X), Y, Z) \} \quad (2.9)$$

ve

$$\mathbb{G}_i^2 := \{ \beta \in \mathbb{G} : \beta^i(X, Y, Z) = \beta^i(\varphi(X), Y, Z) \} \quad (2.10)$$

elde edilir. Böylece  $\mathbb{G}_i$  sınıfları  $\mathbb{G}_i = \mathbb{G}_i^1 \oplus \mathbb{G}_i^2$  alt sınıflarına ayrışmış olur.

## 2.2. Hemen Hemen Parahermitian Metrik Yapılar

**Tanım 2.5.**  $N$ ,  $2n$ -boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold ve bu manifold üzerindeki vektör alanları kümesi  $\chi(N)$  olmak üzere  $J : \chi(N) \rightarrow \chi(N)$ ,  $J^2 = I$  olan bir endomorfizm olsun. Herhangi  $X, Y \in \chi(N)$  için  $N$  manifoldu üzerindeki bir  $h$  semi-Riemannian metriği

$$h(J(X), J(Y)) = -h(X, Y)$$

koşulunu sağlıyorsa  $(N, J, h)$  üçlüsüne bir **hemen hemen parahermitian manifold** denir [4].

Ayrıca  $N$  manifoldu üzerindeki keyfi  $X, Y$  vektör alanları için

$$h(J(X), Y) = -h(J(J(X)), J(Y)) = -h(X, J(Y))$$

eşitliği sağlanır. Böylece  $(N, J, h)$  hemen hemen parahermitian manifold üzerinde

$$F(X, Y) = h(J(X), Y)$$

şeklinde tanımlanan 2-forma hemen hemen parahermitian manifoldunun temel 2-formu denir [4].

Çalışmanın bundan sonrasında kısalık açısından  $F$  temel 2-formun kovaryant türevi

$$\alpha(X, Y, Z) := (\nabla_X F)(Y, Z) = h((\nabla_X J)(Y), Z)$$

olarak ifade edilmiştir [4].

$(N, h, J)$  bir hemen hemen parahermitian manifold olsun. Her  $X \in \chi(N)$  için  $J^2(X) = X$  ve  $\dim(N) = 2n$  olduğundan  $J$  dönüşümünün özdeğerleri  $\pm 1$  dir. 1 özdeğerinin özuzayı  $\mathcal{V}$  ve  $-1$  özdeğerinin özuzayı  $\mathcal{H}$  olmak üzere; her  $x \in M$  noktasındaki tanjant uzay  $T_x M = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{H}_x$  şeklinde direkt toplam olarak yazılabilir.  $h$  metriğinin ve  $J$  endomorfizminin matrisleri

$$h = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir ayarlanmış  $\{A_1, \dots, A_n, U_1, \dots, U_n\}$  yerel çatı alanı vardır. Burada  $\{A_1, \dots, A_n\}$  kümesi  $\mathcal{V}$  vertikal uzayının,  $\{U_1, \dots, U_n\}$  kümesi ise  $\mathcal{H}$  horizontal uzayının yerel ayarlanmış çatı alanlarıdır [4].

Ayrıca  $\{A_1, \dots, A_n, U_1, \dots, U_n\}$  kümesi  $(N, J, h)$  hemen hemen parahermitian manifoldunun bir yerel ayarlanmış çatı alanı olmak üzere; keyfi  $X$  vektör alanı için  $F$  temel 2- formun kotürevi aşağıdaki gibidir [4]:

$$\delta F(X) = - \sum_{i=1}^n \{(\nabla_{A_i}) F(U_i, X) + (\nabla_{U_i}) F(A_i, X)\}$$

Hemen hemen parahermitian  $(N, J, h)$  manifoldu üzerindeki  $F$  temel 2-formun kovaryant türevinin özellikler kullanılarak

$$W := \{\alpha \in \otimes^3 T^* \mid \alpha(X, Y, Z) = \alpha(X, J(Y), J(Z)) = -\alpha(X, Z, Y)\}$$

uzayı tanımlanır [4].  $W$  uzayının temel özellikleri ve simetrileri kullanılarak

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W_5 \oplus W_6 \oplus W_7 \oplus W_8$$

8 alt uzayın direk toplamı olarak yazılabilir.  $\{A_1, \dots, A_n, U_1, \dots, U_n\}$  kümesi hemen hemen parahermitian  $(N, J, h)$  manifoldu üzerinde yerel ayarlanmış bir çatı alanı olmak üzere; keyfi  $A, B, C \in \mathcal{V}$ ;  $U, V, W \in \mathcal{H}$  için aşağıdaki özellikler göz önüne alınsın [4]:

•

$$S_{ABC} (\nabla_A F) (B, C) = 0. \quad (1)$$

•

$$\nabla_A A \in \mathcal{V}. \quad (2)$$

•

$$(\nabla_A F) (U, V) = \Theta(U)h(A, V) - \Theta(V)h(A, U). \quad (3)$$

•

$$\sum_{i=1}^n (\nabla_{A_i} F) (U_i, U) = 0. \quad (4)$$

•

$$S_{UVW} (\nabla_U F) (V, W) = 0. \quad (5)$$

•

$$\nabla_U U \in \mathcal{H}. \quad (6)$$

•

$$(\nabla_U F)(A, B) = \Theta(B)h(U, A) - \Theta(A)h(U, B). \quad (7)$$

•

$$\sum_{i=1}^n (\nabla_{U_i} F)(A_i, A) = 0. \quad (8)$$

Burada  $2n$  boyutlu  $(N, h, J)$  hemen hemen parahermitian manifold üzerindeki keyfi  $X$  vektör alanı için  $\Theta$  Lee formu

$$\Theta(X) = -\frac{1}{n-1} \delta F(J(X))$$

olarak tanımlıdır [4].  $1 \leq i \leq 8$  olmak üzere; eğer  $N$  manifoldu **(i)** koşulunu sağlamıyorsa  $N$  manifoldu  $W_i$  sınıfına,  $i \neq j$  olmak üzere;  $1 \leq i, j \leq 8$  için  $N$  manifoldu **(i)**, **(j)** koşullarını sağlamıyorsa  $N$  manifoldu  $W_i \oplus W_j$  sınıfına ait olur. Böylece herhangi bir hemen hemen parahermitian manifold,  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq 8$  olmak üzere; eğer **(i<sub>1</sub>)**,  $\dots$ , **(i<sub>k</sub>)** koşullarını sağlamıyorsa manifold  $W_{i_1} \oplus \dots \oplus W_{i_k}$  sınıfından olur [4].

Eğer  $N$  manifoldunun boyutu 4 ise  $W_1 = W_3 = W_5 = W_7 = \{0\}$ 'dir [4].

**Tanım 2.6.**  $(N, J, h)$  hemen hemen parahermitian bir manifoldu üzerindeki keyfi  $X, Y$  vektör alanları için  $J$  endomorfizmin kovaryant türevi

$$(\nabla_X J)(Y) = 0$$

ise bu manifoldda **para-Kaehlerian manifold** denir [4].



### 3. HEMEN HEMEN PARAKONTAK YAPILARDAN ELDE EDİLEN HEMEN HEMEN PARAHERMITIAN METRİK YAPILAR

#### 3.1. Hemen Hemen Parakontak Metrik Manifoldlardan Elde Edilen Hemen Hemen Parahermitian Metrik Manifoldlar

$M$  hemen hemen parakontak metrik bir manifold olsun.  $M$  üzerindeki  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen parakontak metrik yapı kullanılarak  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerinde hemen hemen parahermitian bir yapı inşa edilebilir.  $X \in \chi(M)$  ve  $a : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$  bir dönüşüm olmak üzere; keyfi  $(X, a \frac{d}{dt})$  vektör alanı için  $J : \chi(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \chi(M \times \mathbb{R})$ 'ye

$$\tilde{J} \left( X, a \frac{d}{dt} \right) = \left( \varphi(X) + a\xi, \eta(X) \frac{d}{dt} \right)$$

olarak tanımlanan  $\tilde{J}$  dönüşümü

$$\tilde{J}^2 \left( X, a \frac{d}{dt} \right) = \left( X, a \frac{d}{dt} \right)$$

koşulunu sağlar [5]. Ayrıca  $M \times \mathbb{R}$  üzerinde keyfi  $(X, a \frac{d}{dt})$ ,  $(Y, b \frac{d}{dt})$  vektör alanları için

$$\tilde{h} \left( (X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}) \right) := g(X, Y) - ab$$

olarak tanımlanan  $\tilde{h}$  metriği

$$\tilde{h} \left( \tilde{J} \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \tilde{J} \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) = -\tilde{h} \left( (X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}) \right)$$

özellikliğini sağladığından  $(M \times \mathbb{R}, \tilde{J}, \tilde{h})$  üçlüsü bir hemen hemen parahermitian manifold olur [5].

$M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki keyfi  $(X, a \frac{d}{dt})$ ,  $(Y, b \frac{d}{dt})$ ,  $(Z, c \frac{d}{dt})$  vektör alanları için  $\tilde{h}$  metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi Koszul formülü kullanılarak hesaplandığında

$$\begin{aligned} 2\tilde{h} \left( \tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} (Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt}) \right) &= (X, a \frac{d}{dt}) \left[ \tilde{h} \left( (Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt}) \right) \right] \\ &+ (Y, b \frac{d}{dt}) \left[ \tilde{h} \left( (X, a \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt}) \right) \right] \\ &- (Z, c \frac{d}{dt}) \left[ \tilde{h} \left( (X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}) \right) \right] \\ &+ \tilde{h} \left( [(X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})], (Z, c \frac{d}{dt}) \right) \\ &+ \tilde{h} \left( [(Z, c \frac{d}{dt}), (X, a \frac{d}{dt})], (Y, b \frac{d}{dt}) \right) \\ &+ \tilde{h} \left( [(Z, c \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})], (X, a \frac{d}{dt}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (X, a \frac{d}{dt}) [g(Y, Z) - bc] \\
&\quad + (Y, b \frac{d}{dt}) [g(X, Z) - ac] \\
&\quad - (Z, c \frac{d}{dt}) [g(X, Y) - ab] \\
&\quad + g([X, Y], Z) - c (X[b] - Y[a] + a \frac{db}{dt} - b \frac{da}{dt}) \\
&\quad + g([Z, X], Y) - b (Z[a] - X[c] + c \frac{da}{dt} - a \frac{dc}{dt}) \\
&\quad + g([Z, Y], X) - a (Z[b] - Y[c] + c \frac{db}{dt} - b \frac{dc}{dt}) \\
&= 2g(\nabla_X Y, Z) - 2cX[b] - 2ac \frac{db}{dt} \\
&= 2(g(\nabla_X Y, Z) - (X[b] + a \frac{db}{dt})c) \\
&= 2\tilde{h}((\nabla_X Y, (X[b] + a \frac{db}{dt}) \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt}))
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) = \left( \nabla_X Y, \left( X[b] + a \frac{db}{dt} \right) \frac{d}{dt} \right) \quad (3.1)$$

olarak bulunur. Ayrıca  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki  $\tilde{J}$  endomorfizmin kovaryant türevi (3.1) eşitliğinden

$$\left( \tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{J} \right) \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) = \left( (\nabla_X \varphi)(Y) + b \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(Y) \frac{d}{dt} \right) \quad (3.2)$$

olur [5].

$(M \times \mathbb{R}, \tilde{J}, \tilde{h})$  hemen hemen parahermitian manifoldu üzerindeki keyfi  $(X, a \frac{d}{dt})$ ,  $(Y, b \frac{d}{dt})$  vektör alanları için  $\tilde{F}$  temel 2-formu,  $M$  hemen hemen parakontak metrik manifoldun üzerindeki yapılar kullanılarak şu şekilde ifade edilebilir [5]:

$$\tilde{F} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) = \Phi(X, Y) + a\eta(Y) - b\eta(X). \quad (3.3)$$

Ayrıca keyfi  $(X, a \frac{d}{dt})$ ,  $(Y, b \frac{d}{dt})$ ,  $(Z, c \frac{d}{dt})$  vektör alanları için  $\tilde{F}$  temel 2-formun kovaryant türevi

$$\begin{aligned}
\left( \tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{F} \right) \left( \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) &= \tilde{h} \left( \left( \tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{J} \right) \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= (\nabla_X \Phi)(Y, Z) \\
&\quad + b(\nabla_X \eta)(Z) - c(\nabla_X \eta)(Y)
\end{aligned} \quad (3.4)$$

ve  $\tilde{F}$  temel 2-formun dış türevi

$$\begin{aligned}
3d\tilde{F} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) &= 3d\Phi(X, Y, Z) \\
&\quad - 2\{cd\eta(X, Y) + ad\eta(Y, Z) + bd\eta(Z, X)\}
\end{aligned} \quad (3.5)$$

şeklindedir [5].

$\{e_1, \dots, e_n, \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n), \xi\}$  kümesi  $M$  manifoldunun bir açık alt kümesi üzerinde bir çatı alanı olsun. Bu çatı alanı kullanıldığında

$$\tilde{A}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_i + \varphi(e_i), 0), \quad \tilde{U}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_i - \varphi(e_i), 0)$$

ve

$$\tilde{A}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi, \frac{d}{dt} \right), \quad \tilde{U}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi, -\frac{d}{dt} \right)$$

olmak üzere;

$$\left\{ \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n, \tilde{A}_{n+1}, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n, \tilde{U}_{n+1} \right\}$$

kümesi  $\tilde{h}$  metriğine göre  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerinde bir yerel ayarlanmış çatı alanı olur. Bu çatı alanına göre keyfi  $(X, a \frac{d}{dt})$  vektör alanı için  $\tilde{F}$  temel 2- formun kotürevi (3.4) eşitliğinden ve  $M$  manifoldu üzerindeki  $\theta, \theta^*$  ve  $w$  1-formları tanımından

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} \tilde{F} \left( X, a \frac{d}{dt} \right) &= - \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ \left( \tilde{\nabla}_{\tilde{A}_i} \tilde{F} \right) \left( \tilde{U}_i, \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) + \left( \tilde{\nabla}_{\tilde{U}_i} \tilde{F} \right) \left( \tilde{A}_i, \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \right\} \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \left( \nabla_{e_i + \varphi(e_i)} \Phi \right) (e_i - \varphi(e_i), X) - a \left( \nabla_{e_i + \varphi(e_i)} \eta \right) (e_i - \varphi(e_i)) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \left( \nabla_{e_i - \varphi(e_i)} \Phi \right) (e_i + \varphi(e_i), X) - a \left( \nabla_{e_i - \varphi(e_i)} \eta \right) (e_i + \varphi(e_i)) \right\} \\ &\quad - (\nabla_{\xi} \Phi)(\xi, X) \\ &= - \sum_{i=1}^n \left\{ \beta(e_i, e_i, X) - \beta(\varphi(e_i), \varphi(e_i), X) \right\} \\ &\quad - a \sum_{i=1}^n \left\{ \beta(e_i, \varphi(e_i), \xi) - \beta(\varphi(e_i), e_i, \xi) \right\} - \beta(\xi, \xi, X) \\ &= -\theta(X) - a\theta^*(\xi) - w(X) \end{aligned} \tag{3.6}$$

olarak elde edilir.

### 3.2. Hemen Hemen Parakontak Metrik Manifoldların Konformal Deformasyonlarından Elde Edilen Hemen Hemen Parahermitian Metrik Manifoldlar

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen parakontak metrik bir manifold olsun.  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki her  $(X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})$  vektör alanları için bir önceki

bölümde tanımlanan

$$\tilde{J}\left(X, a\frac{d}{dt}\right) = \left(\varphi(X) + a\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

endomorfizmi göz önüne alınsın.  $\sigma : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye  $\sigma(X, t) = t$  dönüşümü kullanılarak  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerinde

$$\bar{h}\left(\left(X, a\frac{d}{dt}\right), \left(Y, b\frac{d}{dt}\right)\right) := e^{2\sigma}(g(X, Y) - ab)$$

metriği tanımlansın. Bu metriğe göre

$$\begin{aligned} \bar{h}\left(\tilde{J}\left(X, a\frac{d}{dt}\right), \tilde{J}\left(Y, b\frac{d}{dt}\right)\right) &= \bar{h}\left((\varphi(X) + a\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}), (\varphi(Y) + b\xi, \eta(Y)\frac{d}{dt})\right) \\ &= e^{2\sigma}(g(\varphi(X) + a\xi, \varphi(Y) + b\xi) - \eta(X)\eta(Y)) \\ &= e^{2\sigma}(g(\varphi(X), \varphi(Y)) + ab - \eta(X)\eta(Y)) \\ &= -e^{2\sigma}(g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) + ab - \eta(X)\eta(Y)) \\ &= -\bar{h}\left(\left(X, a\frac{d}{dt}\right), \left(Y, b\frac{d}{dt}\right)\right) \end{aligned}$$

özelliğini sağladığından  $(M \times \mathbb{R}, \tilde{J}, \bar{h})$  üçlüsü bir hemen hemen parahermitian manifold olur.  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki keyfi  $(X, a\frac{d}{dt})$ ,  $(Y, b\frac{d}{dt})$  ve  $(Z, c\frac{d}{dt})$  vektör alanları için Koszul formülü((2.3) eşitliği) kullanılarak  $\bar{h}$  metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi  $\bar{\nabla}$  aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} &2\bar{h}\left(\bar{\nabla}_{(X, a\frac{d}{dt})}\left(Y, b\frac{d}{dt}\right), (Z, c\frac{d}{dt})\right) \\ &= (X, a\frac{d}{dt})\left[\bar{h}\left((Y, b\frac{d}{dt}), (Z, c\frac{d}{dt})\right)\right] + (Y, b\frac{d}{dt})\left[\bar{h}\left((X, a\frac{d}{dt}), (Z, c\frac{d}{dt})\right)\right] \\ &\quad - (Z, c\frac{d}{dt})\left[\bar{h}\left((X, a\frac{d}{dt}), (Y, b\frac{d}{dt})\right)\right] + \bar{h}\left([(X, a\frac{d}{dt}), (Y, b\frac{d}{dt})], (Z, c\frac{d}{dt})\right) \\ &\quad + \bar{h}\left([(Z, c\frac{d}{dt}), (X, a\frac{d}{dt})], (Y, b\frac{d}{dt})\right) + \bar{h}\left([(Z, c\frac{d}{dt}), (Y, b\frac{d}{dt})], (X, a\frac{d}{dt})\right) \\ &= (X, a\frac{d}{dt})[e^{2\sigma}g(Y, Z) - e^{2\sigma}bc] + (Y, b\frac{d}{dt})[e^{2\sigma}g(X, Z) - e^{2\sigma}ac] \\ &\quad - (Z, c\frac{d}{dt})[e^{2\sigma}g(X, Y) - e^{2\sigma}ab] \\ &\quad + e^{2\sigma}(g([X, Y], Z) - c(X[b] - Y[a] + a\frac{db}{dt} - b\frac{da}{dt})) \\ &\quad + e^{2\sigma}(g([Z, X], Y) - b(Z[a] - X[c] + c\frac{da}{dt} - a\frac{dc}{dt})) \\ &\quad + e^{2\sigma}(g([Z, Y], X) - a(Z[b] - Y[c] + c\frac{db}{dt} - b\frac{dc}{dt})) \\ &= 2e^{2\sigma}(g(\nabla_X Y, Z) + g(aY, Z) + g(bY, Z) - cX[b] - abc - cg(X, Y) - ac\frac{db}{dt}) \\ &= 2e^{2\sigma}(g(\nabla_X Y + aY + bX, Z) - (X[b] + ab + g(X, Y) + a\frac{db}{dt})c) \\ &= 2\bar{h}\left((\nabla_X Y + aY + bX, (X[b] + ab + g(X, Y) + a\frac{db}{dt})\frac{d}{dt}), (Z, c\frac{d}{dt})\right). \end{aligned}$$

Buradan

$$\bar{\nabla}_{(X, a\frac{d}{dt})}\left(Y, b\frac{d}{dt}\right) = \left(\nabla_X Y + aY + bX, \left(X[b] + ab + a\frac{db}{dt} + g(X, Y)\frac{d}{dt}\right)\right) \quad (3.7)$$

elde edilir.  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki  $\tilde{J}$  endomorfizmin kovaryant türevi (3.7) eşitliği kullanılarak hesaplandığında

$$\begin{aligned}
\left(\bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{J}\right) \left(Y, b \frac{d}{dt}\right) &= \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{J} \left(Y, b \frac{d}{dt}\right) - \tilde{J} \left(\bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \left(Y, b \frac{d}{dt}\right)\right) \\
&= \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \left(\varphi(Y) + b\xi, \eta(Y) \frac{d}{dt}\right) \\
&\quad - \tilde{J} \left(\nabla_X Y + aY + bX, \left(X[b] + ab + a \frac{db}{dt} + g(X, Y)\right) \frac{d}{dt}\right) \\
&= (\nabla_X (\varphi(Y) + b\xi) + a(\varphi(Y) + b\xi) + \eta(Y)X, \\
&\quad (X[\eta(Y)] + a\eta(Y) + g(X, \varphi(Y))) \frac{d}{dt}) \\
&\quad - \left(\varphi(\nabla_X Y) + \left(X[b] + a \frac{db}{dt}\right) \xi, \eta(\nabla_X Y) \frac{db}{dt}\right) \\
&= ((\nabla_X \varphi)(Y) + b\nabla_X \xi + \eta(Y)X - b\varphi(X) - g(X, Y)\xi, \\
&\quad (\nabla_X \eta)(Y) - g(\varphi(X), Y) \frac{d}{dt}) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca  $(M \times \mathbb{R}, \tilde{J}, \bar{h})$  hemen hemen parahermitian manifoldu üzerinde  $\bar{F}$  temel 2-formu

$$\begin{aligned}
\bar{F} \left((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})\right) &= \bar{h} \left(\tilde{J} \left(X, a \frac{d}{dt}\right), (Y, b \frac{d}{dt})\right) \\
&= \bar{h} \left((\varphi(X) + a\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})\right) \\
&= e^{2\sigma} (g(\varphi(X) + a\xi, Y) - b\eta(X)) \\
&= e^{2\sigma} (g(\varphi(X), Y) + ag(\xi, Y) - b\eta(X)) \\
&= e^{2\sigma} \{\Phi(X, Y) + a\eta(Y) - b\eta(X)\}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Herhangi  $(X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt})$  vektör alanları için  $\bar{F}$  temel 2-formun kovaryant türevi (3.8) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\left(\bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \bar{F}\right) \left(\left(Y, b \frac{d}{dt}\right), \left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right) &= \bar{h} \left(\left(\bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{J}\right) \left(Y, b \frac{d}{dt}\right), \left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right) \\
&= e^{2\sigma} \{(\nabla_X \Phi)(Y, Z) \\
&\quad + b(\nabla_X \eta)(Z) - c(\nabla_X \eta)(Y) \\
&\quad - b\Phi(X, Z) - g(X, Y)\eta(Z) \\
&\quad + c\Phi(X, Y) + g(X, Z)\eta(Y)\} \tag{3.9}
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca  $\bar{F}$  temel 2-formun dış türevi (3.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
3\bar{d}\bar{F} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) &= \left( \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \bar{F} \right) \left( \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&+ \left( \bar{\nabla}_{(Y, b \frac{d}{dt})} \bar{F} \right) \left( \left( Z, c \frac{d}{dt} \right), \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&+ \left( \bar{\nabla}_{(Z, c \frac{d}{dt})} \bar{F} \right) \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= e^{2\sigma} \{ 3d\Phi(X, Y, Z) \\
&+ 2a(\Phi(Y, Z) - d\eta(Y, Z)) \\
&+ 2b(\Phi(Z, X) - d\eta(Z, X)) \\
&+ 2c(\Phi(X, Y) - d\eta(X, Y)) \}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

olarak bulunur.

$\{e_1, \dots, e_n, \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n), \xi\}$  kümesi  $M$  manifoldunun bir açık alt kümesi üzerinde bir çatı alanı olsun.

$$\bar{A}_i = \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{2}} (e_i + \varphi(e_i), 0), \quad \bar{U}_i = \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{2}} (e_i - \varphi(e_i), 0)$$

ve

$$\bar{A}_{n+1} = \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{2}} \left( \xi, \frac{d}{dt} \right), \quad \bar{U}_{n+1} = \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{2}} \left( \xi, -\frac{d}{dt} \right)$$

olmak üzere;

$$\{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \bar{A}_{n+1}, \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_n, \bar{U}_{n+1}\} \tag{3.11}$$

kümesi  $\bar{h}$  metriğine göre  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerinde bir yerel ayarlanmış çatı alanı olur. Bu çatı alanına göre her  $(X, a \frac{d}{dt})$  vektör alanı için (3.9) eşitliğinden ve  $M$  manifoldu üzerindeki  $\theta$ ,  $\theta^*$  ve  $w$  1-formları tanımı kullanılarak  $\bar{F}$  temel 2-formun kotürevi

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\bar{F} \left( X, a \frac{d}{dt} \right) &= - \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F}) \left( \bar{U}_i, \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) + (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F}) \left( \bar{A}_i, \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \right\} \\
&= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ (\nabla_{e_i + \varphi(e_i)} \Phi) (e_i - \varphi(e_i), X) - a (\nabla_{e_i + \varphi(e_i)} \eta) (e_i - \varphi(e_i)) \right. \\
&\quad \left. - g(e_i + \varphi(e_i), e_i - \varphi(e_i)) \eta(X) + a \Phi(e_i + \varphi(e_i), e_i - \varphi(e_i)) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{ (\nabla_{e_i - \varphi(e_i)} \Phi) (e_i + \varphi(e_i), X) - a (\nabla_{e_i - \varphi(e_i)} \eta) (e_i + \varphi(e_i)) \\
&\quad - g(e_i - \varphi(e_i), e_i + \varphi(e_i)) \eta(X) + a \Phi(e_i - \varphi(e_i), e_i + \varphi(e_i)) \} \\
&\quad - (\nabla_\xi \Phi)(\xi, X) \\
&= - \sum_{i=1}^n \{ \beta(e_i, e_i, X) - \beta(\varphi(e_i), \varphi(e_i), X) \} + 2n\eta(X) \\
&\quad - a \sum_{i=1}^n \{ \beta(e_i, \varphi(e_i), \xi) - \beta(\varphi(e_i), e_i, \xi) \} - \beta(\xi, \xi, X) \\
&= -\theta(X) - a\theta^*(\xi) - w(X) + 2n\eta(X)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca aşağıdaki teoremdede para-Sasakian ve para-Kaehlerian manifoldlar arasındaki ilişki ifade edilmiştir.

**Teorem 3.1.**  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen parahermitian manifoldunun para-Kaehlerian olması için gerek ve yeter koşul  $M$  manifoldunun para-Sasakian ( $\bar{\mathbb{G}}_5$  sınıfından) olmasıdır.

*Kanıt.*  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu para-Kaehlerian olsun. Bu durumda  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki herhangi  $(X, a \frac{d}{dt})$ ,  $(Y, b \frac{d}{dt})$  vektör alanları için

$$(\bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{J}) \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) = 0$$

olur. (3.8) eşitliğinde özel olarak  $b = 0$  alındığında

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{J}) \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) &= ((\nabla_X \varphi)(Y) + \eta(Y)X - g(X, Y)\xi, \\
&\quad (\nabla_X \eta)(Y) - g(\varphi(X), Y) \frac{d}{dt}) \\
&= (0, 0)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$(\nabla_X \varphi)(Y) = -\eta(Y)X + g(X, Y)\xi$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla  $M$  manifoldu para-Sasakian( $\bar{\mathbb{G}}_5$  sınıfından) olur.

Tersine  $M$  manifoldu para-Sasakian ise

$$(\nabla_X \varphi)(Y) = -\eta(Y)X + g(X, Y)\xi \tag{3.13}$$

eşitliği sağlanır. (3.13) eşitliğinde  $Y = \xi$  alınırsa

$$(\nabla_X \varphi)(\xi) = -X + g(X, \xi)\xi = -X + \eta(X)\xi = -\varphi^2(X)$$

olur. Buradan  $\varphi(\nabla_X \xi) = \varphi^2(X)$  eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafına  $\varphi$  dönüşümü uygulanırsa

$$\nabla_X \xi = \varphi(X) \quad (3.14)$$

olarak bulunur. (3.13) ve (3.14) eşitliklerinden (3.8) eşitliği

$$\begin{aligned} \left( \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{J} \right) (Y, b \frac{d}{dt}) &= ((\nabla_X \varphi)(Y) + X\eta(Y) - g(X, Y)\xi, \\ &\quad ((\nabla_X \eta)(Y) - g(\varphi(X), Y)) \frac{d}{dt}) \\ &= (0, ((\nabla_X \eta)(Y) - g(\nabla_X \xi, Y)) \frac{d}{dt}) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu para-Kaehlerian olur.  $\square$

Bu adımda hemen hemen parakontak metrik  $M$  manifoldu ile hemen hemen parahermitian metrik  $M \times \mathbb{R}$  manifoldunun sınıfları arasındaki ilişkiler incelenirken kullanılacak olan bazı eşitlikler verilmiştir:

Keyfi  $A = (X, a \frac{d}{dt}) \in \mathcal{V}$  için  $\tilde{J}(A) = A$  olduğundan

$$\tilde{J}(X, a \frac{d}{dt}) = (\varphi(X) + a\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}) = (X, a \frac{d}{dt})$$

eşitliğinden

$$a = \eta(X), \quad \varphi(X) = \varphi^2(X) \quad (3.15)$$

olur.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  ve  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  eşitliğini sağlayan her  $X, Y \in \chi(M)$  için

$$g(\varphi(X), Y) = g(\varphi^2(X), Y) = g(X, \varphi^2(Y)) = g(X, \varphi(Y)) = -g(\varphi(X), Y)$$

olduğundan

$$g(\varphi(X), Y) = \Phi(X, Y) = 0 \quad (3.16)$$

elde edilir. Benzer şekilde herhangi  $U = (X, a \frac{d}{dt}) \in \mathcal{H}$  için  $\tilde{J}(U) = -U$  olduğundan

$$\tilde{J}(X, a \frac{d}{dt}) = (\varphi(X) + a\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}) = -(X, a \frac{d}{dt})$$

eşitliğinden

$$a = -\eta(X), \quad \varphi(X) = -\varphi^2(X) \quad (3.17)$$

olur.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  ve  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  eşitliğini sağlayan her  $X, Y \in \chi(M)$  için

$$g(\varphi(X), Y) = -g(\varphi^2(X), Y) = -g(X, \varphi^2(Y)) = g(X, \varphi(Y)) = -g(\varphi(X), Y)$$



olduğundan

$$g(\varphi(X), Y) = \Phi(X, Y) = 0 \quad (3.18)$$

olarak bulunur.

Keyfi  $A = (X, a\frac{d}{dt}), B = (Y, b\frac{d}{dt}), C = (Z, c\frac{d}{dt}) \in \mathcal{V}$  için (3.10), (3.15) ve (3.16) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} S_{ABC} (\bar{\nabla}_A \bar{F}) (B, C) &= 3\bar{d}\bar{F} \left( \left( X, a\frac{d}{dt} \right), \left( Y, b\frac{d}{dt} \right), \left( Z, c\frac{d}{dt} \right) \right) \\ &= e^{2\sigma} \{ 3d\Phi(X, Y, Z) + 2 \{ a\Phi(Y, Z) + b\Phi(Z, X) + c\Phi(X, Y) \} \\ &\quad - 2 \{ ad\eta(Y, Z) + bd\eta(Z, X) + cd\eta(X, Y) \} \} \\ &= e^{2\sigma} \{ 3d\Phi(X, Y, Z) \\ &\quad - 2 \{ \eta(X)d\eta(Y, Z) + \eta(Y)d\eta(Z, X) + \eta(Z)d\eta(X, Y) \} \\ &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + \beta(Y, Z, X) + \beta(Z, X, Y) \\ &\quad - \eta(X)\beta(Y, \xi, Z) + \eta(X)\beta(Z, \xi, Y) \\ &\quad - \eta(Y)\beta(Z, \xi, X) + \eta(Y)\beta(X, \xi, Z) \\ &\quad - \eta(Z)\beta(X, \xi, Y) + \eta(Z)\beta(Y, \xi, X) \} \end{aligned} \quad (3.19)$$

ve her  $U = (X, a\frac{d}{dt}), V = (Y, b\frac{d}{dt}), W = (Z, c\frac{d}{dt}) \in \mathcal{H}$  için (3.10), (3.17) ve (3.18) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} S_{UVW} (\bar{\nabla}_U \bar{F}) (V, W) &= 3\bar{d}\bar{F} \left( \left( X, a\frac{d}{dt} \right), \left( Y, b\frac{d}{dt} \right), \left( Z, c\frac{d}{dt} \right) \right) \\ &= e^{2\sigma} \{ 3d\Phi(X, Y, Z) + 2 \{ a\Phi(Y, Z) + b\Phi(Z, X) + c\Phi(X, Y) \} \\ &\quad - 2 \{ ad\eta(Y, Z) + bd\eta(Z, X) + cd\eta(X, Y) \} \} \\ &= e^{2\sigma} \{ 3d\Phi(X, Y, Z) \\ &\quad + 2 \{ \eta(X)d\eta(Y, Z) + \eta(Y)d\eta(Z, X) + \eta(Z)d\eta(X, Y) \} \} \\ &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + \beta(Y, Z, X) + \beta(Z, X, Y) \\ &\quad - \eta(X)\beta(Y, \xi, Z) + \eta(X)\beta(Z, \xi, Y) \\ &\quad - \eta(Y)\beta(Z, \xi, X) + \eta(Y)\beta(X, \xi, Z) \\ &\quad - \eta(Z)\beta(X, \xi, Y) + \eta(Z)\beta(Y, \xi, X) \} \end{aligned} \quad (3.20)$$

olur.

Keyfi  $A = (X, a\frac{d}{dt}) \in \mathcal{V}$  için (3.8), (3.15) ve (3.16) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_A \tilde{J})(A) &= \left( \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{J} \right) \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \\
&= ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X)X + a \nabla_X \xi - a \varphi(X) - g(X, X)\xi, \\
&\quad ((\nabla_X \eta)(X) - g(\varphi(X), X)) \frac{d}{dt}) \\
&= ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X)X + \eta(X) \nabla_X \xi - \eta(X) \varphi(X) - g(X, X)\xi, \\
&\quad (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) \\
&= \left( (\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt} \right) \tag{3.21}
\end{aligned}$$

ve herhangi  $U = (X, a \frac{d}{dt}) \in \mathcal{H}$  için (3.8), (3.17) ve (3.18) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_U \tilde{J})(U) &= \left( \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{J} \right) \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \\
&= ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X)X + a \nabla_X \xi - a \varphi(X) - g(X, X)\xi, \\
&\quad ((\nabla_X \eta)(X) - g(\varphi(X), X)) \frac{d}{dt}) \\
&= ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X)X - \eta(X) \nabla_X \xi + \eta(X) \varphi(X) - g(X, X)\xi, \\
&\quad (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) \\
&= \left( (\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt} \right) \tag{3.22}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Keyfi  $A = (X, a \frac{d}{dt}) \in \mathcal{V}$ ;  $U = (Y, b \frac{d}{dt})$ ,  $V = (Z, c \frac{d}{dt}) \in \mathcal{H}$  için ve (3.9), (3.15) ve (3.17) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) &= \left( \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \bar{F} \right) \left( \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= e^{2\sigma} \{ (\nabla_X \Phi)(Y, Z) - \eta(Y) (\nabla_X \eta)(Z) + \eta(Z) (\nabla_X \eta)(Y) \\
&\quad + \eta(Y) (g(\varphi(X), Z) + g(X, Z)) - \eta(Z) (g(\varphi(X), Y) + g(X, Y)) \} \\
&= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) - \eta(Y) \beta(X, \xi, \varphi(Z)) + \eta(Z) \beta(X, \xi, \varphi(Y)) \\
&\quad + 2\eta(Y) g(X, Z) - 2\eta(Z) g(X, Y) \} \\
&= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + \eta(Y) \beta(X, \xi, Z) - \eta(Z) \beta(X, \xi, Y) \\
&\quad + 2\eta(Y) g(X, Z) - 2\eta(Z) g(X, Y) \} \tag{3.23}
\end{aligned}$$

ve her  $U = (X, a \frac{d}{dt}) \in \mathcal{H}$ ;  $A = (Y, b \frac{d}{dt})$ ,  $B = (Z, c \frac{d}{dt}) \in \mathcal{V}$  için (3.9), (3.15) ve (3.17)

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_U \bar{F})(A, B) &= \left( \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \bar{F} \right) \left( \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= e^{2\sigma} \{ (\nabla_X \Phi)(Y, Z) + \eta(Y) (\nabla_X \eta)(Z) - \eta(Z) (\nabla_X \eta)(Y) \\
&\quad + \eta(Y) (-g(\varphi(X), Z) + g(X, Z)) - \eta(Z) (-g(\varphi(X), Y) + g(X, Y)) \} \\
&= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + \eta(Y) \beta(X, \xi, \varphi(Z)) - \eta(Z) \beta(X, \xi, \varphi(Y)) \\
&\quad + 2\eta(Y) g(X, Z) - 2\eta(Z) g(X, Y) \} \\
&= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + \eta(Y) \beta(X, \xi, Z) - \eta(Z) \beta(X, \xi, Y) \\
&\quad + 2\eta(Y) g(X, Z) - 2\eta(Z) g(X, Y) \} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Herhangi  $U = (X, a \frac{d}{dt}) \in \mathcal{H}$  için (3.12) ve (3.17) eşitliğinden  $(2n+2)$ -boyutlu  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki Lee formu

$$\begin{aligned}
\bar{\Theta}(U) &= -\frac{1}{n} \bar{\delta} \bar{F}(\tilde{J}(U)) \\
&= -\frac{1}{n} \bar{\delta} \bar{F}(U) \\
&= -\frac{1}{n} \bar{\delta} \bar{F} \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \\
&= -\frac{1}{n} \{ \theta(X) - \eta(X) \theta^*(\xi) + w(X) - 2n\eta(X) \} \tag{3.25}
\end{aligned}$$

ve keyfi  $A = (X, a \frac{d}{dt}) \in \mathcal{V}$  için (3.12) ve (3.15) eşitliğinden  $(2n+2)$ -boyutlu  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki Lee formu

$$\begin{aligned}
\bar{\Theta}(A) &= -\frac{1}{n} \bar{\delta} \bar{F}(\tilde{J}(A)) \\
&= -\frac{1}{n} \bar{\delta} \bar{F}(A) \\
&= -\frac{1}{n} \bar{\delta} \bar{F} \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \\
&= \frac{1}{n} \{ \theta(X) + \eta(X) \theta^*(\xi) + w(X) - 2n\eta(X) \} \tag{3.26}
\end{aligned}$$

olur.

Ayrıca keyfi  $A = (X, a \frac{d}{dt}) \in \mathcal{V}$  ve  $U = (Y, b \frac{d}{dt}) \in \mathcal{H}$  için (3.15) ve (3.17) eşitliği

kullanılarak

$$\begin{aligned}
\bar{h}(A, U) &= \bar{h} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= e^{2\sigma} (g(X, Y) - ab) \\
&= e^{2\sigma} (g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y))
\end{aligned} \tag{3.27}$$

elde edilir.

Herhangi  $U = (X, a \frac{d}{dt}) \in \mathcal{H}$  için (3.9) ve (3.17) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F}) (\bar{U}_i, U) &= \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F}) (\bar{U}_i, U) + (\bar{\nabla}_{\bar{A}_{n+1}} \bar{F}) (\bar{U}_{n+1}, U) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{ \beta(e_i + \varphi(e_i), e_i - \varphi(e_i), X) \\
&\quad + \eta(X) \beta(e_i + \varphi(e_i), e_i - \varphi(e_i), \xi) \} \\
&\quad - 2n\eta(X) + \beta(\xi, \xi, X) \\
&= \frac{1}{2} \{ \theta(X) - \theta^*(X) + \eta(X)\theta(\xi) - \eta(X)\theta^*(\xi) \} \\
&\quad - 2n\eta(X) + w(X)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

ve keyfi  $A = (X, a \frac{d}{dt}) \in \mathcal{V}$  için için (3.9) ve (3.15) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F}) (\bar{A}_i, A) &= \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F}) (\bar{A}_i, A) + (\bar{\nabla}_{\bar{U}_{n+1}} \bar{F}) (\bar{A}_{n+1}, A) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{ \beta(e_i - \varphi(e_i), e_i + \varphi(e_i), X) \\
&\quad + \eta(X) \beta(e_i - \varphi(e_i), e_i + \varphi(e_i), \xi) \} \\
&\quad - 2n\eta(X) + \beta(\xi, \xi, X) \\
&= \frac{1}{2} \{ \theta(X) + \theta^*(X) + \eta(X)\theta(\xi) + \eta(X)\theta^*(\xi) \} \\
&\quad - 2n\eta(X) + w(X)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

eşitlikleri elde edilir.

Yukarıda elde edililen eşitlikler yardımıyla  $M$  manifoldunun ait olduğu sınıflar ile konformal deformasyonlu  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen parahermitian manifoldunun ait olduğu sınıflar arasındaki ilişkiler aşağıdaki teoremlerle verilmiştir.

**Teorem 3.2.**  $M$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_1$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen parahermitian metrik manifoldu  $W_3 \oplus W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_1$  sınıfından olsun.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$ ,  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliklerini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $g(X, \varphi(Y)) = g(X, \varphi(Z)) = g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(\varphi(X), \varphi(Z)) = 0$  olduğundan  $\mathbb{G}_1$  sınıfının tanımlama bağıntısından  $\beta(X, Y, Z) = 0$  ve  $\xi$ ,  $\mathbb{G}_1$  sınıfında paralel olduğundan  $\beta(X, \xi, Z) = 0$  elde edilir. Böylece (3.19) eşitliği

$$S_{ABC} (\bar{\nabla}_A \bar{F}) (B, C) = 0$$

olur ve **(1)** koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan her  $X \in \chi(M)$  ve keyfi  $Z \in \chi(M)$  için  $\mathbb{G}_1$  sınıfının tanımlama bağıntısından

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)(X), Z) &= \beta(X, X, Z) \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \{g(X, \varphi(X))\theta(\varphi(Z)) - g(X, \varphi(Z))\theta(\varphi(X)) \\ &\quad - g(\varphi(X), \varphi(X))\theta(\varphi^2(Z)) + g(\varphi(X), \varphi(Z))\theta(\varphi^2(X))\} \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \{g(\varphi(X), Z)\theta(\varphi(X)) - g(\varphi^2(X), Z)\theta(\varphi(X))\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$(\nabla_X \varphi)(X) = 0 \tag{3.30}$$

elde edilir. Ayrıca  $\mathbb{G}_1$  sınıfında  $\xi$  paralel  $((\nabla_X \eta)(X) = \nabla_X \xi = 0)$  olduğundan ve (3.30) eşitliğinden (3.21) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \bar{J})(A) = ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = (0, 0)$$

olur ve **(2)** koşulu sağlanır.  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$ ,  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alındığında (3.23) eşitliğinden  $(\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) = 0$ 'dır. Ancak (3.25) ve (3.27) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(U) \bar{h}(A, V) - \bar{\Theta}(V) \bar{h}(A, U) = \frac{2}{n} e^{2\sigma} \theta(Z)$$

olarak bulunur.  $\mathbb{G}_1$  sınıfında  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan her  $Z \in \chi(M)$  için  $\theta(Z) = 0$  olmadığı **Örnek 4.20**'de gösterilmiştir. Bu nedenle  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_1$  sınıfında iken  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki yapı **(3)** koşulunu sağlamaz.  $\mathbb{G}_1$  sınıfında  $\xi$  paralel  $(\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = 0)$  ve  $n$ , 1'den büyük pozitif tam sayı olduğundan (3.28) eşitliğinde  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F})(\bar{U}_i, U) = -2n \neq 0$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda (4) koşulu sağlanmaz.

$\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliklerini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $g(X, \varphi(Y)) = g(X, \varphi(Z)) = g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(\varphi(X), \varphi(Z)) = 0$  olduğundan  $\mathbb{G}_1$  sınıfının tanımlama bağıntısından  $\beta(X, Y, Z)$  bulunur. Ayrıca  $\mathbb{G}_1$  sınıfında  $\beta(X, \xi, Z) = 0$  olduğundan (3.20) eşitliği

$$S_{UVW} (\bar{\nabla}_U \bar{F}) (V, W) = 0$$

olur ve (5) koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X \in \chi(M)$  ve herhangi  $Z \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)(X), Z) &= \beta(X, X, Z) \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \{g(X, \varphi(X))\theta(\varphi(Z)) - g(X, \varphi(Z))\theta(\varphi(X)) \\ &\quad - g(\varphi(X), \varphi(X))\theta(\varphi^2(Z)) + g(\varphi(X), \varphi(Z))\theta(\varphi^2(X))\} \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \{g(\varphi(X), Z)\theta(\varphi(X)) + g(\varphi^2(X), Z)\theta(\varphi(X))\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$(\nabla_X \varphi)(X) = 0 \tag{3.31}$$

elde edilir.  $\mathbb{G}_1$  sınıfında  $(\nabla_X \eta)(X) = \nabla_X \xi = 0$  olduğundan ve (3.31) eşitliğinden (3.22) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \bar{J})(U) = ((\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = (0, 0)$$

olduğundan (6) koşulu sağlanmış olur.  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$ ,  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  olarak alındığında (3.24) eşitliği  $(\bar{\nabla}_U \bar{F})(A, B) = 0$ 'dır. Ancak  $\mathbb{G}_1$  sınıfında  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan her  $Z \in \chi(M)$  için  $\theta(Z) = 0$  olmak zorunda değildir (bakınız **Örnek 4.28**). Bu durumda (3.26), (3.27) eşitliklerinden

$$\bar{\Theta}(B) \bar{h}(U, A) - \bar{\Theta}(A) \bar{h}(U, B) = -\frac{2}{n} e^{2\sigma} \theta(Z)$$

olduğundan  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_1$  sınıfında iken  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki yapı (7) koşulunu sağlamaz.  $\mathbb{G}_1$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = 0$  olduğundan ve (3.29) eşitliğinde  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  olarak alındığında

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F})(\bar{A}_i, A) = -2n \neq 0$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda (8) koşulu sağlanmamış olur.

Sonuç olarak  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_1$  sınıfında olduğunda  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki yapı (3), (4), (7) ve (8) koşullarını sağlamadığından  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $W_3 \oplus W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Sonuç 3.3.** Eğer  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_1^1$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $\beta \in \mathbb{G}_1^1$  sınıfından olduğundan  $\beta^1(X, Y, Z) = -\beta^1(\varphi(X), Y, Z)$  koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_1$  sınıfının tanımlama bağıntısından  $\beta^1(X, Y, Z) = \beta^1(\varphi(X), Y, Z)$  olduğundan  $\beta^1(X, Y, Z) = 0$  olur. Buradan (3.23) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) = 2e^{2\sigma} \{ \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) \} \quad (3.32)$$

elde edilir.  $\mathbb{G}_1^1$  sınıfında  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan her  $Y, Z \in \chi(M)$  için  $\theta(Y) = \theta(Z) = 0$  olduğundan (3.25) ve (3.27) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(U)\bar{h}(A, V) - \bar{\Theta}(V)\bar{h}(A, U) = 2e^{2\sigma} \{ \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) \} \quad (3.33)$$

olur. (3.32) ve (3.33) eşitliklerinden (3) koşulu sağlanır. Buradan  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu  $W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Sonuç 3.4.** Eğer  $M$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_1^2$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu  $W_3 \oplus W_4 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $\beta \in \mathbb{G}_1^2$  sınıfından olduğundan  $\beta^1(X, Y, Z) = \beta^1(\varphi(X), Y, Z)$  koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_1$  sınıfının tanımlama bağıntısı kullanıldığında  $\beta^1(X, Y, Z) = -\beta^1(\varphi(X), Y, Z)$  bulunur. Buradan  $\beta^1(X, Y, Z) = 0$  olur. (3.24) eşitliğinden

$$(\bar{\nabla}_U \bar{F})(A, B) = 2e^{2\sigma} \{ \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) \} \quad (3.34)$$

elde edilir. Ayrıca  $\mathbb{G}_1^2$  sınıfında  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $Y, Z \in \chi(M)$  için  $\theta(Y) = \theta(Z) = 0$  olduğundan (3.26) ve (3.27) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(B)\bar{h}(U, A) - \bar{\Theta}(A)\bar{h}(U, B) = 2e^{2\sigma} \{ \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) \} \quad (3.35)$$

elde edilir. (3.34) ve (3.35) eşitliklerinden (7) koşulu sağlanır ve  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu  $W_3 \oplus W_4 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Teorem 3.5.**  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_2$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen parahermitian metrik manifoldu  $W_3 \oplus W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_2$  sınıfından olsun.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliklerini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için ve  $\mathbb{G}_2$  sınıfında  $\beta(X, \xi, Z) = 0$  olduğundan  $\mathbb{G}_2$  sınıfının tanımlama bağıntısından

$$\begin{aligned}\beta(X, Y, Z) &= -\beta(\varphi(X), \varphi(Y), Z) \\ &= -\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), Z) \\ &= -\beta(X - \eta(X)\xi, Y - \eta(Y)\xi, Z) \\ &= -\beta(X, Y, Z)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\beta(X, Y, Z) = 0 \quad (3.36)$$

elde edilir. (3.36) eşitliğinden ve  $\mathbb{G}_2$  sınıfında  $\xi$  paralel olduğundan (3.19) eşitliği

$$S_{ABC} (\bar{\nabla}_A \bar{F}) (B, C) = 0$$

olur ve **(1)** koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X \in \chi(M)$  ve her  $Z \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned}g((\nabla_X \varphi)(X), Z) &= \beta(X, X, Z) \\ &= -\beta(\varphi(X), \varphi(X), Z) \\ &= -\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(X), Z) \\ &= -\beta(X - \eta(X)\xi, X - \eta(X)\xi, Z) \\ &= -\beta(X, X, Z) \\ &= -g((\nabla_X \varphi)(X), Z)\end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(X) = 0 \quad (3.37)$$

olarak bulunur.  $\mathbb{G}_2$  sınıfında  $(\nabla_X \eta)(X) = \nabla_X \xi = 0$  olduğundan ve (3.37) eşitliğinden (3.21) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \tilde{J})(A) = ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X)\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = (0, 0)$$

olur ve **(2)** koşulu sağlanmış olur.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) =$



$-\varphi^2(Z)$  eşitliklerini sağlayan her  $X, Y, Z$  vektör alanları için (3.23) eşitliğinden

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + \eta(Y)\beta(X, \xi, Z) - \eta(Z)\beta(X, \xi, Y) \\ &\quad + 2\eta(Y)g(X, Z) - 2\eta(Z)g(X, Y) \} \\ &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + 2\eta(Y)g(X, Z) - 2\eta(Z)g(X, Y) \} \end{aligned} \quad (3.38)$$

olur.  $\mathbb{G}_2$  sınıfında  $\xi$  paralel ve keyfi  $X$  vektör alanı için  $\theta(X) = 0$  olduğundan (3.25) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(U) = 2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(V) = 2\eta(Z) \quad (3.39)$$

elde edilir. (3.27) ve (3.39) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(U)\bar{h}(A, V) - \bar{\Theta}(V)\bar{h}(A, U) &= 2e^{2\sigma}\eta(Y)\{g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z)\} \\ &\quad - 2e^{2\sigma}\eta(Z)\{g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\} \\ &= 2e^{2\sigma}\{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

olur. Ayrıca  $\mathbb{G}_2$  sınıfında  $\varphi^2(X) = \varphi(X)$ ,  $\varphi^2(Y) = -\varphi(Y)$  ve  $\varphi^2(Z) = -\varphi(Z)$  eşitliklerini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\beta(X, Y, Z) = 0$  olmak zorunda değildir (bakınız **Örnek 4.18**). Buradan (3.38) ve (3.40) eşitliklerinden **(3)** koşulunun sağlanmadığı görülür.  $\mathbb{G}_2$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = 0$  olduğundan  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alınırsa (3.28) eşitliği

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F})(\bar{U}_i, U) = -2n \neq 0$$

olur ve **(4)** koşulu sağlanmaz.

$\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliklerini sağlayan herhangi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_2$  sınıfında  $\beta(X, \xi, Z) = 0$  olduğundan ve  $\mathbb{G}_2$  sınıfının tanımlama bağıntısından

$$\begin{aligned} \beta(X, Y, Z) &= -\beta(\varphi(X), \varphi(Y), Z) \\ &= -\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), Z) \\ &= -\beta(X - \eta(X)\xi, Y - \eta(Y)\xi, Z) \\ &= -\beta(X, Y, Z) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\beta(X, Y, Z) = 0 \quad (3.41)$$

olur. (3.41) eşitliğinden ve  $\mathbb{G}_2$  sınıfında  $\xi$  paralel olduğundan (3.20) eşitliği

$$S_{UVW} (\bar{\nabla}_U \bar{F}) (V, W) = 0$$

olduğundan (5) koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X \in \chi(M)$  ve her  $Z \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)(X), Z) &= \beta(X, X, Z) \\ &= -\beta(\varphi(X), \varphi(X), Z) \\ &= -\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(X), Z) \\ &= -\beta(X - \eta(X)\xi, X - \eta(X)\xi, Z) \\ &= -\beta(X, X, Z) \\ &= -g((\nabla_X \varphi)(X), Z) \end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(X) = 0 \quad (3.42)$$

sonucu elde edilir.  $\mathbb{G}_2$  sınıfında  $\xi$  paralel olduğundan ve (3.42) eşitliğinden (3.22) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \tilde{J})(U) = ((\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X)\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = (0, 0)$$

olur ve (6) koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X), \varphi(Y) = \varphi^2(Y), \varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan her  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_2$  sınıfında  $\beta(X, Y, Z) = 0$  olmadığı

**Örnek 4.26**'da gösterilmiştir. (3.24) eşitliğinden

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_U \bar{F})(A, V) &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + \eta(Y)\beta(X, \xi, Z) - \eta(Z)\beta(X, \xi, Y) \\ &\quad + 2\eta(Y)g(X, Z) - 2\eta(Z)g(X, Y) \} \\ &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + 2\eta(Y)g(X, Z) - 2\eta(Z)g(X, Y) \} \end{aligned} \quad (3.43)$$

olur.  $\mathbb{G}_2$  sınıfında  $\theta^*(\xi) = 0$  ve keyfi  $X$  vektör alanı için  $\theta(X) = w(X) = 0$  olduğundan (3.26) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(A) = -2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(B) = -2\eta(Z) \quad (3.44)$$

elde edilir. (3.27) ve (3.44) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\bar{\Theta}(B)\bar{h}(U, A) - \bar{\Theta}(A)\bar{h}(U, B) &= -2e^{2\sigma}\eta(Z)\{g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\} \\
&\quad + 2e^{2\sigma}\eta(Y)\{g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z)\} \quad (3.45) \\
&= 2e^{2\sigma}\{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.43) ve (3.45) eşitliklerinden (7) koşulu sağlanmaz.  $\mathbb{G}_2$  sınıfında  $\xi$  paralel olduğundan (3.29) eşitliğinde  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F}) (\bar{A}_i, A) = -2n \neq 0$$

olur ve (8) koşulu sağlanmaz.

Sonuç olarak  $M$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_2$  sınıfında olduğunda  $M \times \mathbb{R}$  üzerindeki yapı (3), (4), (7) ve (8) koşullarını sağlamadığından  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_3 \oplus W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Sonuç 3.6.** Eğer  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_2^1$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $\beta \in \mathbb{G}_2^1$  sınıfından olsun. Bu durumda  $\beta^2(X, Y, Z) = -\beta^2(\varphi(X), Y, Z)$  koşulu sağlanır.  $\varphi^2(X) = \varphi(X)$ ,  $\varphi^2(Y) = -\varphi(Y)$  ve  $\varphi^2(Z) = -\varphi(Z)$  eşitliklerini sağlayan her  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_2$  ve  $\mathbb{G}_2^1$  sınıfının tanımından

$$\begin{aligned}
\beta(X, Y, Z) &= -\beta(\varphi(X), Y, Z) \\
&= \beta(\varphi(X)^2, Y, Z) \\
&= -\beta(X - \eta(X)\xi, Y, Z) \\
&= -\beta(X, Y, Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $\beta(X, Y, Z) = 0$  olur. Dolayısıyla (3.38) ve (3.40) eşitlikleri sağlandığından (3) koşulu sağlanır ve  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Sonuç 3.7.** Eğer  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_2^2$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_3 \oplus W_4 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $\beta \in \mathbb{G}_2^2$  sınıfından olsun. Bu durumda  $\beta^2(X, Y, Z) = \beta^2(\varphi(X), Y, Z)$  koşulu sağlanır.  $\varphi^2(X) = -\varphi(X)$ ,  $\varphi^2(Y) = \varphi(Y)$  ve  $\varphi^2(Z) = \varphi(Z)$  eşitliklerini sağlayan

keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_2$  ve  $\mathbb{G}_2^2$  sınıfının tanımından

$$\begin{aligned}\beta(X, Y, Z) &= \beta(\varphi(X), Y, Z) \\ &= -\beta(\varphi^2(X), Y, Z) \\ &= -\beta(X - \eta(X)\xi, Y, Z) \\ &= -\beta(X, Y, Z)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $\beta(X, Y, Z) = 0$  olur. Dolayısıyla (3.43) ve (3.45) eşitliklerinden **(7)** koşulu sağlanır ve  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_3 \oplus W_4 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Teorem 3.8.**  $M$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_3$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen parahermitian metrik manifoldu  $W_1 \oplus W_4 \oplus W_5 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_3$  sınıfından olsun.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliklerini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_3$  sınıfında  $\beta(X, Y, Z) = 0$  olmak zorunda değildir (bakınız **Örnek 4.14**). Ayrıca  $\mathbb{G}_3$  sınıfında  $\beta(X, \xi, Z) = 0$  olduğundan ve  $\mathbb{G}_3$  sınıfının tanımından (3.19) eşitliği

$$\begin{aligned}S_{ABC}(\bar{\nabla}_A \bar{F})(B, C) &= e^{2\sigma} \{\beta(X, Y, Z) + \beta(Y, Z, X) + \beta(Z, X, Y)\} \\ &= e^{2\sigma} \{\beta(X, Y, Z) - \beta(Y, X, Z) - \beta(X, Z, Y)\} \\ &= 3e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) \\ &\neq 0\end{aligned}$$

bulunur. Buradan **(1)** koşulu sağlanmaz.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X \in \chi(M)$  ve her  $Z \in \chi(M)$  için

$$g((\nabla_X \varphi)(X), Z) = \beta(X, X, Z) = -\beta(X, X, Z) = -g((\nabla_X \varphi)(X), Z)$$

elde edilen eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(X) = 0 \tag{3.46}$$

olur. Ayrıca  $\mathbb{G}_3$  sınıfında  $\xi$  paralel  $((\nabla_X \eta)(X) = \nabla_X \xi = 0)$  olduğundan ve (3.46) eşitliğinden (3.21) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \tilde{J})(A) = ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = (0, 0)$$

olarak bulunur ve **(2)** koşulu sağlanmış olur.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  koşullarını sağlayan herhangi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}$  uzayı

tanımı kullanılarak ve  $\mathbb{G}_3$  sınıfının tanımlama bağıntısından

$$\begin{aligned}
\beta(X, Y, Z) &= -\beta(Y, X, Z) \\
&= -\beta(Y, \varphi(X), \varphi(Z)) - \eta(X)\beta(Y, \xi, Z) + \eta(Z)\beta(Y, \xi, X) \\
&= \beta(Y, \varphi^2(X), \varphi^2(Z)) \\
&= \beta(Y, X - \eta(X)\xi, Y - \eta(Y)\xi) \\
&= \beta(Y, X, Z) \\
&= -\beta(X, Y, Z)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\beta(X, Y, Z) = 0 \quad (3.47)$$

elde edilir. (3.47) eşitliğinden ve  $\mathbb{G}_3$  sınıfında  $\beta(X, \xi, Z) = 0$  olduğundan (3.23) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) = 2e^{2\sigma} \{ \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) \} \quad (3.48)$$

olur.  $\mathbb{G}_3$  sınıfında  $\theta^*(\xi) = 0$  ve keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta(X) = w(X) = 0$  olduğundan (3.25) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(U) = 2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(V) = 2\eta(Z) \quad (3.49)$$

olarak bulunur. (3.27) ve (3.49) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\bar{\Theta}(U)\bar{h}(A, V) - \bar{\Theta}(V)\bar{h}(A, U) &= 2e^{2\sigma}\eta(Y)\{g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z)\} \\
&\quad - 2e^{2\sigma}\eta(Z)\{g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\} \\
&= 2e^{2\sigma}\{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\} \quad (3.50)
\end{aligned}$$

olur ve (3.48) ve (3.50) eşitliklerinden **(3)** koşulu sağlanır.  $\mathbb{G}_3$  sınıfında  $\xi$  paralel olduğundan  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alınırsa (3.28) eşitliği

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F})(\bar{U}_i, U) = -2n \neq 0$$

bulunur. Böylece **(4)** koşulu sağlanmaz.

Keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  için **Örnek 4.22'**den  $\mathbb{G}_3$  sınıfında  $\beta(X, Y, Z) = 0$  olmak zorunda değildir.

Ayrıca  $\mathbb{G}_3$  sınıfında  $\beta(X, \xi, Z) = 0$  olduğundan  $\mathbb{G}_3$  sınıfının tanımından (3.20) eşitliği

$$\begin{aligned} S_{UVW} (\bar{\nabla}_U \bar{F}) (V, W) &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + \beta(Y, Z, X) + \beta(Z, X, Y) \} \\ &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) - \beta(Y, X, Z) - \beta(X, Z, Y) \} \\ &= 3e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla **(5)** koşulu sağlanmaz.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan her  $X \in \chi(M)$  ve keyfi  $Z \in \chi(M)$  için

$$g((\nabla_X \varphi)(X), Z) = \beta(X, X, Z) = -\beta(X, X, Z) = -g((\nabla_X \varphi)(X), Z)$$

elde edilen eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(X) = 0 \quad (3.51)$$

bulunur.  $\mathbb{G}_3$  sınıfında  $\xi$  paralel olduğundan ve (3.51) eşitliklerinden (3.22) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \bar{J})(U) = ((\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = (0, 0)$$

olarak bulunur. Bu durumda **(6)** koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan her  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}$  uzayı tanımı kullanılarak ve  $\mathbb{G}_3$  sınıfının tanımlama bağıntısından

$$\begin{aligned} \beta(X, Y, Z) &= -\beta(Y, X, Z) \\ &= -\beta(Y, \varphi(X), \varphi(Z)) - \eta(X) \beta(Y, \xi, Z) + \eta(Z) \beta(Y, \xi, X) \\ &= \beta(Y, \varphi^2(X), \varphi^2(Z)) \\ &= \beta(Y, X - \eta(X) \xi, Y - \eta(Y) \xi) \\ &= \beta(Y, X, Z) \\ &= -\beta(X, Y, Z) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\beta(X, Y, Z) = 0 \quad (3.52)$$

elde edilir. (3.52) eşitliğinden ve  $\mathbb{G}_3$  sınıfında sınıfında  $\xi$  paralel olduğundan (3.24) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \bar{F})(A, B) = e^{2\sigma} \{ 2\eta(Y)g(X, Z) - 2\eta(Z)g(X, Y) \} \quad (3.53)$$

olur.  $\mathbb{G}_3$  sınıfında  $\theta^*(\xi) = 0$  ve keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta(X) = w(X) = 0$  olduğundan

(3.26) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(A) = -2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(B) = -2\eta(Z) \quad (3.54)$$

elde edilir. (3.27) ve (3.54) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(B)\bar{h}(U, A) - \bar{\Theta}(A)\bar{h}(U, B) &= -2e^{2\sigma}\eta(Z)\{g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\} \\ &\quad + 2e^{2\sigma}\eta(Y)\{g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z)\} \\ &= 2e^{2\sigma}\{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\} \end{aligned} \quad (3.55)$$

olur. Böylece (3.53) ve (3.55) eşitliklerinden **(7)** koşulu sağlanır.  $\mathbb{G}_3$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alınırsa (3.29) eşitliği

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F}) (\bar{A}_i, A) = -2n \neq 0$$

olarak bulunur ve **(8)** koşulu sağlanmaz.

Böylece  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_3$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_1 \oplus W_4 \oplus W_5 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Sonuç 3.9.** Eğer  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_3^1$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_4 \oplus W_5 \oplus W_8$  sınıfındandır.

*Kanıt.*  $\beta \in \mathbb{G}_3^1$  sınıfından olsun. Bu durumda  $\beta^3(X, Y, Z) = -\beta^3(\varphi(X), Y, Z)$  eşitliği sağlanır.  $X, Y$  ve  $Z$  vektör alanları için  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  ise  $\mathbb{G}_3$  ve  $\mathbb{G}_3^1$  sınıfının tanımından

$$\begin{aligned} \beta(X, Y, Z) &= -\beta(\varphi(X), Y, Z) \\ &= -\beta(\varphi^2(X), Y, Z) \\ &= -\beta(X - \eta(X)\xi, Y, Z) \\ &= -\beta(X, Y, Z) \end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten  $\beta(X, Y, Z) = 0$  olur. Buradan

$$S_{ABC} (\bar{\nabla}_A \bar{F}) (B, C) = 3e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) = 0$$

elde edilir. Bu durumda **(1)** koşulu sağlanır ve  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_4 \oplus W_5 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Sonuç 3.10.** Eğer  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_3^2$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen para-hermitian manifoldu  $W_1 \oplus W_4 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $\beta \in \mathbb{G}_3^2$  sınıfından olsun. Bu durumda  $\beta^3(X, Y, Z) = \beta^3(\varphi(X), Y, Z)$  eşitliği sağlanır.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliklerini sağlayan

herhangi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_3$  ve  $\mathbb{G}_3^2$  sınıfının tanımlama bağıntısından

$$\begin{aligned}\beta(X, Y, Z) &= \beta(\varphi(X), Y, Z) \\ &= -\beta(\varphi^2(X), Y, Z) \\ &= -\beta(X - \eta(X)\xi, Y, Z) \\ &= -\beta(X, Y, Z)\end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten  $\beta(X, Y, Z) = 0$  olur. Buradan

$$S_{UVW} (\bar{\nabla}_U \bar{F}) (V, W) = 3e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) = 0$$

olduğundan **(5)** koşulu sağlanır ve  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_1 \oplus W_4 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Teorem 3.11.**  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_4$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu  $W_2 \oplus W_4 \oplus W_6 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_4$  sınıfından olsun.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_4$  sınıfı tanımından (3.19) eşitliği

$$\begin{aligned}S_{ABC} (\bar{\nabla}_A \bar{F}) (B, C) &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + \beta(Y, Z, X) + \beta(Z, X, Y) \} \\ &= e^{2\sigma} \mathfrak{S}_{XYZ} \beta(X, Y, Z) \\ &= 0\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla **(1)** koşulu sağlanır.  $\mathbb{G}_4$  sınıfında  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan her  $X$  vektör alanı için  $(\nabla_X \varphi)(X) = 0$  olmak zorunda değildir (bakınız

**Örnek 4.16**).  $\mathbb{G}_4$  sınıfında  $\xi$  paralel olduğundan (3.21) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \tilde{J})(A) = ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = ((\nabla_X \varphi)(X), 0) \neq (0, 0)$$

elde edilir. Böylece **(2)** koşulu sağlanmaz. Ayrıca  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}$  uzayının tanımlama bağıntısı kullanılarak  $\mathbb{G}_4$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned}\beta(Y, Z, X) &= \beta(Y, \varphi(Z), \varphi(X)) + \eta(Z) \beta(Y, \xi, X) - \eta(X) \beta(Y, \xi, Z) \\ &= -\beta(Y, \varphi^2(Z), \varphi^2(X)) \\ &= -\beta(Y, Z - \eta(Z)\xi, X - \eta(X)\xi) \\ &= -\beta(Y, Z, X)\end{aligned}$$



bulunur. Buradan

$$\beta(Y, Z, X) = 0 \quad (3.56)$$

olur. Benzer şekilde

$$\beta(Z, Y, X) = 0 \quad (3.57)$$

elde edilir.  $\mathbb{G}_4$  sınıfı tanımı kullanılarak (3.56) ve (3.57) eşitliğinden

$$\beta(X, Y, Z) = 0 \quad (3.58)$$

olur.  $\mathbb{G}_4$  sınıfı  $\xi$  paralel olduğundan ve (3.58) eşitliğinden (3.23) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) = 2e^{2\sigma} \{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\} \quad (3.59)$$

olarak bulunur. Ayrıca  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  için eşitliğini sağlayan keyfi  $Y$  vektör alanı için  $\mathbb{G}$  uzayı tanımından  $\beta(\varphi(Y), e_i, \varphi(e_i)) = 0$  olur.  $\mathbb{G}$  uzayı ve  $\mathbb{G}_4$  sınıfı tanımından

$$\beta(e_i, \varphi(e_i), \varphi(Y)) - \beta(\varphi(e_i), e_i, \varphi(Y)) = \beta(\varphi(e_i), \varphi(e_i), Y) - \beta(e_i, e_i, Y) = 0$$

elde edilir. Buradan  $\theta(Y) = 0$  elde edilir.  $\mathbb{G}_4$  sınıfında  $\xi$  paralel ve  $\theta(Y) = 0$  olduğundan (3.25) eşitliği

$$\bar{\Theta}(U) = 2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(V) = 2\eta(Z) \quad (3.60)$$

olur. (3.27) ve (3.60) eşitliklerinden

$$\bar{\Theta}(U)\bar{h}(A, V) - \bar{\Theta}(V)\bar{h}(A, U) = 2e^{2\sigma} \{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\} \quad (3.61)$$

elde edilir. (3.59) ve (3.61) eşitliklerinden **(3)** koşulu sağlanır.  $\mathbb{G}_4$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alınır (3.28) eşitliğinden

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F})(\bar{U}_i, U) = -2n \neq 0$$

olur. Böylece **(4)** koşulu sağlanmamış olur.

$\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan her  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_4$  sınıfı tanımından (3.19) eşitliği

$$\begin{aligned} S_{UVW} (\bar{\nabla}_U \bar{F})(V, W) &= e^{2\sigma} \{\beta(X, Y, Z) + \beta(Y, Z, X) + \beta(Z, X, Y)\} \\ &= e^{2\sigma} \mathfrak{S}_{XYZ} \beta(X, Y, Z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur ve (5) koşulu sağlanır.  $\mathbb{G}_4$  sınıfında  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan her  $X$  vektör alanı için  $(\nabla_X \varphi)(X) = 0$  olmadığı **Örnek 4.24**'de gösterilmiştir.  $\mathbb{G}_4$  sınıfında  $\xi$  paralel olduğundan (3.22) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \tilde{J})(U) = ((\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = ((\nabla_X \varphi)(X), 0) \neq (0, 0)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla (6) koşulu sağlanmaz.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}$  uzayının tanımlama bağıntısı kullanılarak  $\mathbb{G}_4$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned} \beta(Y, Z, X) &= \beta(Y, \varphi(Z), \varphi(X)) + \eta(Z)\beta(Y, \xi, X) - \eta(X)\beta(Y, \xi, Z) \\ &= -\beta(Y, \varphi^2(Z), \varphi^2(X)) \\ &= -\beta(Y, Z - \eta(Z)\xi, X - \eta(X)\xi) \\ &= -\beta(Y, Z, X) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\beta(Y, Z, X) = 0 \quad (3.62)$$

olur ve benzer şekilde

$$\beta(Z, Y, X) = 0 \quad (3.63)$$

elde edilir.  $\mathbb{G}_4$  sınıfı tanımı kullanılarak (3.62) ve (3.63) eşitliğinden

$$\beta(X, Y, Z) = 0 \quad (3.64)$$

olur.  $\mathbb{G}_4$  sınıfı  $\xi$  paralel olduğundan ve (3.64) eşitliğinden (3.24) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \bar{F})(A, B) = 2e^{2\sigma} \{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\} \quad (3.65)$$

olarak bulunur. Ayrıca  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  için eşitliğini sağlayan keyfi  $Y$  vektör alanı için  $\mathbb{G}$  uzayı tanımından  $\beta(\varphi(Y), e_i, \varphi(e_i)) = 0$  olur.  $\mathbb{G}$  uzayı ve  $\mathbb{G}_4$  sınıfı tanımından

$$\beta(e_i, \varphi(e_i), \varphi(Y)) - \beta(\varphi(e_i), e_i, \varphi(Y)) = \beta(e_i, e_i, Y) - \beta(\varphi(e_i), \varphi(e_i), Y) = 0$$

elde edilir. Buradan  $\theta(Y) = 0$  elde edilir.  $\mathbb{G}_4$  sınıfında  $\xi$  paralel ve  $\theta(Y) = 0$  olduğundan (3.25) eşitliği

$$\bar{\Theta}(A) = -2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(B) = -2\eta(Z) \quad (3.66)$$

olur. (3.27) ve (3.66) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\bar{\Theta}(B)\bar{h}(U, A) - \bar{\Theta}(A)\bar{h}(U, B) &= -2e^{2\sigma}\eta(Z)\{g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\} \\
&\quad + 2e^{2\sigma}\eta(Y)\{g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z)\} \\
&= 2e^{2\sigma}\{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\} \quad (3.67)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.65) ve (3.67) eşitliğinden (7) koşulu sağlanır.  $\mathbb{G}_4$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alınırsa (3.29) eşitliği

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F}) (\bar{A}_i, A) = -2n \neq 0$$

olur. Böylece (8) koşulu sağlanmamış olur.

Böylece  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_4$  sınıfından olduğunda  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_2 \oplus W_4 \oplus W_6 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Sonuç 3.12.** Eğer  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_4^1$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_4 \oplus W_6 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $\beta \in \mathbb{G}_4^1$  sınıfından olsun.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan  $X$  vektör alanı için  $\mathbb{G}_4$  ve  $\mathbb{G}_4^1$  sınıfının tanımlama bağıntısından

$$\begin{aligned}
\beta(X, X, Z) &= -\beta(\varphi(X), X, Z) \\
&= -\beta(\varphi^2(X), X, Z) \\
&= -\beta(X - \eta(X)\xi, X, Z) \\
&= -\beta(X, X, Z)
\end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten  $\beta(X, X, Z) = 0$  olur. Buradan (3.21) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \tilde{J})(A) = ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X)\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X)\frac{d}{dt}) = (0, 0)$$

olur ve (2) koşulu sağlanır. Dolayısıyla  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_4 \oplus W_6 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Sonuç 3.13.** Eğer hemen hemen parakontak  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_4^2$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_2 \oplus W_4 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $\beta \in \mathbb{G}_4^2$  sınıfından olsun.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan  $X$  vektör alanı

için  $\mathbb{G}_4$  ve  $\mathbb{G}_4^2$  sınıfının tanımlama bağıntısından

$$\begin{aligned}\beta(X, X, Z) &= \beta(\varphi(X), X, Z) \\ &= -\beta(\varphi^2(X), X, Z) \\ &= -\beta(X - \eta(X)\xi, X, Z) \\ &= -\beta(X, X, Z)\end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten  $\beta(X, X, Z) = 0$  olur. Buradan (3.22) eşitliği

$$\left(\bar{\nabla}_U \tilde{J}\right)(U) = \left((\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X)\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X)\frac{d}{dt}\right) = (0, 0)$$

olur ve (6) koşulu sağlandığından  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_2 \oplus W_4 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Teorem 3.14.**  $M$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_5$  sınıfından ve  $\theta(\xi) \neq 2n$  ise  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_4 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_5$  sınıfından olsun.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliklerini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için

$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(\varphi(X), \varphi(Z)) = 0$  olduğundan ve  $\mathbb{G}_5$  sınıfı tanımından  $\beta(X, Y, Z) = \beta(X, \xi, Z) = 0$  elde edilir ve (3.19) eşitliği

$$S_{ABC}(\bar{\nabla}_A \bar{F})(B, C) = 0$$

olur. Bu durumda (1) koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan her  $X$  vektör alanı için  $g(\varphi(X), \varphi(X)) = 0$  olduğundan ve keyfi  $Z \in \chi(M)$  için  $\mathbb{G}_5$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned}g((\nabla_X \varphi)(X), Z) &= \beta(X, X, Z) \\ &= \frac{\theta(\xi)}{2n} \{\eta(X)g(\varphi(X), \varphi(Z)) - g(\varphi(X), \varphi(X))\} \\ &= -\frac{\theta(\xi)}{2n} \eta(X)g(\varphi^2(X), Z) \\ &= -\frac{\theta(\xi)}{2n} \eta(X)g(\varphi(X), Z)\end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(X) = -\frac{\theta(\xi)}{2n} \eta(X) \varphi(X) \quad (3.68)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X \varphi)(\xi), Z) &= \beta(X, \xi, Z) \\
&= \frac{\theta(\xi)}{2n} g(\varphi(X), \varphi(Z)) \\
&= -\frac{\theta(\xi)}{2n} g(\varphi^2(X), Z) \\
&= -\frac{\theta(\xi)}{2n} g(\varphi(X), Z)
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$(\nabla_X \varphi)(\xi) = -\frac{\theta(\xi)}{2n} \varphi(X) \quad (3.69)$$

elde edilir. (3.69) eşitliğinin her iki tarafına  $\varphi$  uygulanırsa

$$\nabla_X \xi = \frac{\theta(\xi)}{2n} \varphi(X) \quad (3.70)$$

olur.  $\mathbb{G}_5$  sınıfı tanımlama bağıntısından

$$(\nabla_X \eta)(X) = \beta(X, \xi, \varphi(X)) = \frac{\theta(\xi)}{2n} g(\varphi(X), \varphi^2(X)) = 0 \quad (3.71)$$

bulunur. (3.68), (3.70) ve (3.71) eşitliklerinden (3.21) eşitliği

$$\left( \bar{\nabla}_A \tilde{J} \right) (A) = \left( (\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt} \right) = (0, 0)$$

elde edilir. Böylece **(2)** koşulu sağlanmış olur.  $\varphi(X) = \varphi^2(X), \varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_5$  sınıfı tanımından

$$\beta(X, \xi, Z) = \frac{\theta(\xi)}{2n} g(\varphi(X), \varphi(Z)) \quad (3.72)$$

olur. (3.72) eşitliğinden ve  $\mathbb{G}_5$  sınıfı tanımından (3.23) eşitliği

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + \eta(Y) \beta(X, \xi, Z) - \eta(Z) \beta(X, \xi, Y) \\
&\quad + 2\eta(Y) g(X, Z) - 2\eta(Z) g(X, Y) \} \\
&= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) \\
&\quad + \frac{\theta(\xi)}{2n} \{ \eta(Y) g(\varphi(X), \varphi(Z)) - \eta(Z) g(\varphi(X), \varphi(Y)) \} \\
&\quad - \frac{4n}{\theta(\xi)} \beta(X, Y, Z) \} \\
&= e^{2\sigma} \{ 2\beta(X, Y, Z) - \frac{4n}{\theta(\xi)} \beta(X, Y, Z) \} \\
&= 2e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) \{ 1 - \frac{2n}{\theta(\xi)} \}
\end{aligned} \quad (3.73)$$

elde edilir.  $\mathbb{G}_5$  sınıfında keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta^*(X) = w(X) = 0$  ve  $\theta(X) = \eta(X)\theta(\xi)$  olduğundan (3.25) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(U) = -\eta(Y)\frac{\theta(\xi)}{n} + 2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(V) = -\eta(Z)\frac{\theta(\xi)}{n} + 2\eta(Z) \quad (3.74)$$

elde edilir. (3.27) ve (3.74) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & \bar{\Theta}(U)\bar{h}(A, V) - \bar{\Theta}(V)\bar{h}(A, U) \\ &= 2e^{2\sigma} \left( -\eta(Y)\frac{\theta(\xi)}{n} + 2\eta(Y) \right) \{g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z)\} \\ & \quad - 2e^{2\sigma} \left( -\eta(Z)\frac{\theta(\xi)}{n} + 2\eta(Z) \right) \{g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\} \\ &= 2e^{2\sigma}\frac{\theta(\xi)}{n} \{-\eta(Y)g(X, Z) + \eta(Z)g(X, Y)\} \\ & \quad + 2ne^{2\sigma} \{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\} \\ &= 4e^{2\sigma}\beta(X, Y, Z) - 2ne^{2\sigma}\frac{2n}{\theta(\xi)}\beta(X, Y, Z) \\ &= 2e^{2\sigma}\beta(X, Y, Z) \left\{ 1 - \frac{2n}{\theta(\xi)} \right\} \end{aligned} \quad (3.75)$$

bulunur. Dolayısıyla (3.73) ve (3.75) eşitliklerinden **(3)** koşulu sağlanır.  $\mathbb{G}_5$  sınıfında  $\theta(\xi) \neq 2n$ ,  $\theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan (3.28) eşitliğinde  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F}) (\bar{U}_i, U) = \theta(\xi) - 2n \neq 0$$

olur. Böylece **(4)** koşulu sağlanmamış olur.

$\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan her  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(\varphi(X), \varphi(Z)) = 0$  olduğundan ve  $\mathbb{G}_5$  sınıfı tanımından  $\beta(X, Y, Z) = \beta(X, \xi, Z) = 0$  olur ve (3.20) eşitliğinden

$$S_{UVW} (\bar{\nabla}_U \bar{F}) (V, W) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla **(5)** koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X$  vektör alanı için  $g(\varphi(X), \varphi(X)) = 0$  olduğundan ve keyfi  $Z \in \chi(M)$  için  $\mathbb{G}_5$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)(X), Z) &= \beta(X, X, Z) \\ &= \frac{\theta(\xi)}{2n} \{\eta(X)g(\varphi(X), \varphi(Z)) - \eta(Z)g(\varphi(X), \varphi(X))\} \\ &= -\frac{\theta(\xi)}{2n} \eta(X)g(\varphi^2(X), Z) \\ &= \frac{\theta(\xi)}{2n} \eta(X)g(\varphi(X), Z) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$(\nabla_X \varphi)(X) = \frac{\theta(\xi)}{2n} \eta(X) \varphi(X) \quad (3.76)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)(\xi), Z) &= \beta(X, \xi, Z) \\ &= \frac{\theta(\xi)}{2n} g(\varphi(X), \varphi(Z)) \\ &= -\frac{\theta(\xi)}{2n} g(\varphi^2(X), Z) \\ &= \frac{\theta(\xi)}{2n} g(\varphi(X), Z) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$(\nabla_X \varphi)(\xi) = \frac{\theta(\xi)}{2n} \varphi(X) \quad (3.77)$$

bulunur. (3.77) eşitliğinin her iki tarafına  $\varphi$  uygulanırsa

$$\nabla_X \xi = \frac{\theta(\xi)}{2n} \varphi(X) \quad (3.78)$$

olur. Ayrıca  $\mathbb{G}_5$  sınıfı tanımından

$$(\nabla_X \eta)(X) = \beta(X, \xi, \varphi(X)) = \frac{\theta(\xi)}{2n} g(\varphi(X), \varphi^2(X)) = 0 \quad (3.79)$$

bulunur. (3.76), (3.78) ve (3.79) eşitliklerinden (3.22) eşitliği

$$\left( \bar{\nabla}_U \tilde{J} \right) (U) = \left( (\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt} \right) = (0, 0)$$

olduğundan **(6)** koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_5$  sınıfı tanımından

$$\beta(X, \xi, Z) = \frac{\theta(\xi)}{2n} g(\varphi(X), \varphi(Z)) \quad (3.80)$$

olur. (3.80) eşitliğinden ve  $\mathbb{G}_5$  sınıfı tanımından (3.24) eşitliği

$$\begin{aligned} \left( \bar{\nabla}_U \bar{F} \right) (A, B) &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + \eta(Y) \alpha(X, \xi, Z) - \eta(Z) \alpha(X, \xi, Y) \\ &\quad + 2\eta(Y) g(X, Z) - 2\eta(Z) g(X, Y) \} \\ &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) \\ &\quad + \frac{\theta(\xi)}{2n} \{ \eta(Y) g(\varphi(X), \varphi(Z)) - \eta(Z) g(\varphi(X), \varphi(Y)) \} \\ &\quad - \frac{4n}{\theta(\xi)} \beta(X, Y, Z) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{2\sigma} \left\{ 2\beta(X, Y, Z) - \frac{4n}{\theta(\xi)} \beta(X, Y, Z) \right\} \\
&= 2e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) \left\{ 1 - \frac{2n}{\theta(\xi)} \right\}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

bulunur.  $\mathbb{G}_5$  sınıfında keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta^*(X) = w(X) = 0$  ve  $\theta(X) = \eta(X)\theta(\xi)$  olduğundan (3.26) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(A) = \eta(Y) \frac{\theta(\xi)}{n} - 2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(B) = \eta(Z) \frac{\theta(\xi)}{n} - 2\eta(Z) \tag{3.82}$$

elde edilir. (3.27) ve (3.82) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\bar{\Theta}(B)\bar{h}(U, A) - \bar{\Theta}(A)\bar{h}(U, B) \\
&= 2e^{2\sigma} \left( \eta(Z) \frac{\theta(\xi)}{n} - 2\eta(Z) \right) \{g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\} \\
&\quad - 2e^{2\sigma} \left( \eta(Y) \frac{\theta(\xi)}{n} - 2\eta(Y) \right) \{g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z)\} \\
&= 2e^{2\sigma} \frac{\theta(\xi)}{n} \{ \eta(Z)g(X, Y) - \eta(Y)g(X, Z) \} \\
&\quad + 2ne^{2\sigma} \{ -\eta(Z)g(X, Y) + \eta(Y)g(X, Z) \} \\
&= 4e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) - 2ne^{2\sigma} \frac{2n}{\theta(\xi)} \beta(X, Y, Z) \\
&= 2e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) \left\{ 1 - \frac{2n}{\theta(\xi)} \right\}
\end{aligned} \tag{3.83}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.81) ve (3.83) eşitliklerinden **(7)** koşulu sağlanır.  $\mathbb{G}_5$  sınıfında  $\theta(\xi) \neq 2n$ ,  $\theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan ve (3.29) eşitliğinde  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F}) (\bar{A}_i, A) = \theta(\xi) - 2n \neq 0$$

olduğundan **(8)** koşulu sağlanmaz.

Böylece  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_5$  sınıfından olduğunda  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki yapı **(4)** ve **(8)** koşullarını sağlamadığından  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_4 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Teorem 3.15.**  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_6$  sınıfından ve  $\theta^*(\xi) \neq \pm 2n$  ise  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_4 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_6$  sınıfından olsun.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan her  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $g(X, \varphi(Y)) = g(X, \varphi(Z)) = 0$  olduğundan ve  $\mathbb{G}_6$  sınıfı tanımından  $\beta(X, Y, Z) = \beta(X, \xi, Z) = 0$  olduğundan



(3.19) eşitliği

$$S_{ABC} (\bar{\nabla}_A \bar{F}) (B, C) = 0$$

olur ve **(1)** koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $X$  vektör alanı için  $g(X, \varphi(X)) = 0$  olduğundan ve keyfi  $Z \in \chi(M)$  için  $\mathbb{G}_6$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)(X), Z) &= \beta(X, X, Z) \\ &= -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{ \eta(X)g(X, \varphi(Z)) - \eta(Z)g(X, \varphi(X)) \} \\ &= \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \eta(X)g(\varphi(X), Z) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$(\nabla_X \varphi)(X) = \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \eta(X) \varphi(X) \quad (3.84)$$

olur.

$$g((\nabla_X \varphi)(\xi), Z) = \beta(X, \xi, Z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} g(X, \varphi(Z)) = \frac{\theta^*(\xi)}{2n} g(\varphi(X), Z)$$

eşitliğinden

$$(\nabla_X \varphi)(\xi) = \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \varphi(X) \quad (3.85)$$

bulunur. (3.85) eşitliğinin her iki tarafına  $\varphi$  uygulanırsa

$$\nabla_X \xi = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \varphi(X) \quad (3.86)$$

olur. Ayrıca

$$(\nabla_X \eta)(X) = \beta(X, \xi, \varphi(X)) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} g(X, \varphi^2(X)) = 0 \quad (3.87)$$

bulunur. (3.84), (3.86) ve (3.87) eşitliklerinden faydalanılarak (3.21) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \bar{J})(A) = ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = (0, 0)$$

olur. Böylece **(2)** koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_6$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned} \beta(X, Y, Z) &= -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{ \eta(Y)g(X, \varphi(Z)) - \eta(Z)g(X, \varphi(Y)) \} \\ &= \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{ \eta(Y)g(X, \varphi^2(Z)) - \eta(Z)g(X, \varphi^2(Y)) \} \\ &= \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{ \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) \} \end{aligned}$$

olur.  $\mathbb{G}_6$  sınıfında  $\theta^*(\xi) \neq 0$  olduğundan

$$\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) = -\frac{2n}{\theta^*(\xi)}\beta(X, Y, Z) \quad (3.88)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\beta(X, \xi, Z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n}g(X, \varphi(Z)) \quad (3.89)$$

olur. (3.88) ve (3.89) eşitliklerinden ve  $\mathbb{G}_6$  sınıfı tanımından (3.23) eşitliği

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + \eta(Y)\beta(X, \xi, Z) - \eta(Z)\beta(X, \xi, Y) \\ &\quad + 2\eta(Y)g(X, Z) - 2\eta(Z)g(X, Y) \} \\ &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) \\ &\quad - \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{ \eta(Y)g(X, \varphi(Z)) - \eta(Z)g(X, \varphi(Y)) \} \\ &\quad + \frac{4n}{\theta^*(\xi)}\beta(X, Y, Z) \} \\ &= e^{2\sigma} \{ 2\beta(X, Y, Z) + \frac{4n}{\theta^*(\xi)}\beta(X, Y, Z) \} \\ &= 2e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) \{ 1 + \frac{2n}{\theta^*(\xi)} \} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) = 2e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) \{ 1 + \frac{2n}{\theta^*(\xi)} \} \quad (3.90)$$

olur.  $\mathbb{G}_6$  sınıfında keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta(X) = w(X) = 0$  olduğundan (3.25) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(U) = \eta(Y)\frac{\theta^*(\xi)}{n} + 2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(V) = \eta(Z)\frac{\theta^*(\xi)}{n} + 2\eta(Z) \quad (3.91)$$

elde edilir. (3.27), (3.88) ve (3.91) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(U)\bar{h}(A, V) - \bar{\Theta}(V)\bar{h}(A, U) &= e^{2\sigma} \left( \eta(Y)\frac{\theta^*(\xi)}{n} + 2\eta(Y) \right) \{ g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z) \} \\ &\quad - e^{2\sigma} \left( \eta(Z)\frac{\theta^*(\xi)}{n} + 2\eta(Z) \right) \{ g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \} \\ &= e^{2\sigma} \frac{\theta^*(\xi)}{n} \{ \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) \} \\ &\quad + 2e^{2\sigma} \{ \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) \} \\ &= 2e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) + 2e^{2\sigma} \frac{2n}{\theta^*(\xi)} \beta(X, Y, Z) \\ &= 2e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) \left\{ 1 + \frac{2n}{\theta^*(\xi)} \right\} \end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten

$$\bar{\Theta}(U)\bar{h}(A, V) - \bar{\Theta}(V)\bar{h}(A, U) = 2e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) \left\{ 1 + \frac{2n}{\theta^*(\xi)} \right\} \quad (3.92)$$

olur. (3.90) ve (3.92) eşitliklerinden **(3)** koşulu sağlanır.  $\mathbb{G}_6$  sınıfında  $\theta^*(\xi) \neq -2n$

alındığından ve  $\theta(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan (3.28) eşitliğinde  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alınır

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F}) (\bar{U}_i, U) = -\theta^*(\xi) - 2n \neq 0$$

olarak bulunur. Dolayısıyla (4) koşulu sağlanmaz.

$\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $g(X, \varphi(Y)) = g(X, \varphi(Z)) = 0$  olduğundan ve  $\mathbb{G}_6$  sınıfı tanımlama bağıntısından  $\beta(X, Y, Z) = \beta(X, \xi, Z) = 0$  olur ve (3.20) eşitliği

$$S_{UVW} (\bar{\nabla}_U \bar{F}) (V, W) = 0$$

olduğundan (5) koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X$  vektör alanı için  $g(X, \varphi(X)) = 0$  olduğundan ve her  $Z \in \chi(M)$  için  $\mathbb{G}_6$  sınıfı tanımlama bağıntısından

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)(X), Z) &= \beta(X, X, Z) \\ &= -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{ \eta(X)g(X, \varphi(Z)) - \eta(Z)g(X, \varphi(X)) \} \\ &= \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \eta(X)g(\varphi(X), Z) \end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(X) = \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \eta(X) \varphi(X) \quad (3.93)$$

bulunur.

$$g((\nabla_X \varphi)(\xi), Z) = \beta(X, \xi, Z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{ g(X, \varphi(Z)) \} = \frac{\theta^*(\xi)}{2n} g(\varphi(X), Z)$$

eşitliğinden

$$(\nabla_X \varphi)(\xi) = \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \varphi(X) \quad (3.94)$$

olur. (3.94) eşitliğinin her iki tarafına  $\varphi$  uygulanırsa

$$\nabla_X \xi = \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \varphi(X) \quad (3.95)$$

bulunur. Ayrıca

$$(\nabla_X \eta)(X) = \beta(X, \xi, \varphi(X)) = \frac{\theta^*(\xi)}{2n} g(X, \varphi^2(X)) = 0 \quad (3.96)$$

eşitliği elde edilir. (3.93), (3.95) ve (3.96) eşitliklerinden faydalanılarak (3.22) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \tilde{J})(U) = ((\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = (0, 0)$$

olduğundan (6) koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan her  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_6$  sınıfı tanımlama bağıntısından

$$\begin{aligned}\beta(X, Y, Z) &= -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{\eta(Y)g(X, \varphi(Z)) - \eta(Z)g(X, \varphi(Y))\} \\ &= -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{\eta(Y)g(X, \varphi^2(Z)) - \eta(Z)g(X, \varphi^2(Y))\} \\ &= -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\}\end{aligned}$$

olur.  $\mathbb{G}_6$  sınıfında  $\theta^*(\xi) \neq 0$  olduğundan

$$\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) = -\frac{2n}{\theta^*(\xi)}\beta(X, Y, Z) \quad (3.97)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\beta(X, \xi, Z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n}g(X, \varphi(Z)) \quad (3.98)$$

olur. (3.97) ve (3.98) eşitliklerinden ve  $\mathbb{G}_6$  sınıfı tanımından (3.24) eşitliği

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_U \bar{F})(A, B) &= e^{2\sigma} \{\beta(X, Y, Z) + \eta(Y)\alpha(X, \xi, Z) - \eta(Z)\alpha(X, \xi, Y) \\ &\quad + 2\eta(Y)g(X, Z) - 2\eta(Z)g(X, Y)\} \\ &= e^{2\sigma} \{\beta(X, Y, Z) \\ &\quad - \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{\eta(Y)g(X, \varphi(Z)) - \eta(Z)g(X, \varphi(Y))\} \\ &\quad - \frac{4n}{\theta^*(\xi)}\beta(X, Y, Z)\} \\ &= e^{2\sigma} \{2\beta(X, Y, Z) - \frac{4n}{\theta^*(\xi)}\beta(X, Y, Z)\} \\ &= 2e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) \{1 - \frac{2n}{\theta^*(\xi)}\}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(\bar{\nabla}_U \bar{F})(A, B) = 2e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) \{1 - \frac{2n}{\theta^*(\xi)}\} \quad (3.99)$$

olur.  $\mathbb{G}_6$  sınıfında keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta(X) = w(X) = 0$  olduğundan ve (3.26) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(A) = \eta(Y)\frac{\theta^*(\xi)}{n} - 2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(B) = \eta(Z)\frac{\theta^*(\xi)}{n} - 2\eta(Z) \quad (3.100)$$

bulunur. (3.27), (3.97) ve (3.100) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}(B)\bar{h}(U, A) - \bar{\Theta}(A)\bar{h}(U, B) &= e^{2\sigma} \left( \eta(Z)\frac{\theta^*(\xi)}{n} - 2\eta(Z) \right) \{g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\} \\ &\quad - 2e^{2\sigma} \left( \eta(Y)\frac{\theta^*(\xi)}{n} - 2\eta(Y) \right) \{g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{2\sigma \frac{\theta^*(\xi)}{n}} \{ \eta(Z)g(X, Y) - \eta(Y)g(X, Z) \} \\
&\quad - 2e^{2\sigma} \{ \eta(Z)g(X, Y) - \eta(Y)g(X, Z) \} \\
&= 2e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) - 2e^{2\sigma \frac{2n}{\theta^*(\xi)}} \beta(X, Y, Z) \\
&= 2e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) \left\{ 1 - \frac{2n}{\theta^*(\xi)} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten

$$\bar{\Theta}(B)\bar{h}(U, A) - \bar{\Theta}(A)\bar{h}(U, B) = 2e^{2\sigma} \beta(X, Y, Z) \left\{ 1 - \frac{2n}{\theta^*(\xi)} \right\} \quad (3.101)$$

olur. (3.99) ve (3.101) eşitliklerinden (7) koşulu sağlanır.  $\mathbb{G}_6$  sınıfında  $\theta^*(\xi) \neq 2n$  alındığından ve  $\theta(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan ve (3.29) eşitliğinde  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F}) (\bar{A}_i, A) = \theta^*(\xi) - 2n \neq 0$$

olduğundan (8) koşulu sağlanmaz.

Sonuç olarak  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_6$  sınıfından ve  $\theta^*(\xi) \neq \pm 2n$  olduğunda  $M \times \mathbb{R}$  üzerindeki yapı (4) ve (8) koşullarını sağlamadığından  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $W_4 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

Eğer  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_6$  sınıfının alt sınıfları olan  $\bar{\mathbb{G}}_6$  ((-1)-para-Kenmotsu,  $\theta^*(\xi) = -2n$ ) ya da  $\tilde{\mathbb{G}}_6$  (para-Kenmotsu,  $\theta^*(\xi) = 2n$ ) olarak alındığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 3.16.** Eğer  $M$  manifoldu  $\bar{\mathbb{G}}_6$  ((-1)-para-Kenmotsu) sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $M$  manifoldu -1-para-Kenmotsu ise  $\theta^*(\xi) = -2n$  eşitliği ve her  $X \in \chi(M)$  için  $\theta(X) = w(X) = 0$  ve  $\theta^*(X) = -2n\eta(X)$  eşitlikleri sağlanır. (3.28) eşitliğinden

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F}) (\bar{U}_i, U) = -\frac{1}{2} \{ \theta^*(X) + \eta(X)\theta^*(\xi) \} - 2n\eta(X) = 0$$

olduğundan (4) koşulu sağlanır ve  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Sonuç 3.17.** Eğer  $M$  manifoldu  $\tilde{\mathbb{G}}_6$  (para-Kenmotsu) sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_4$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $M$  manifoldu para-Kenmotsu ise  $\theta^*(\xi) = 2n$  eşitliği ve keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta(X) = w(X) = 0$  ve  $\theta^*(X) = 2n\eta(X)$  eşitlikleri sağlanır. (3.29) eşitliğinden

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F}) (\bar{A}_i, A) = \frac{1}{2} \{ \theta^*(X) + \eta(X)\theta^*(\xi) \} - 2n\eta(X) = 0$$

olduğundan (8) koşulu sağlanır. Böylece  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_4$  sınıfından olur.  $\square$

**Teorem 3.18.**  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_7$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen parahermitian metrik manifoldu  $W_3 \oplus W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_7$  sınıfından olsun.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_7$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned}\beta(X, Y, \xi) &= -\beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi) \\ &= -\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \xi) \\ &= -\beta(X - \eta(X)\xi, Y - \eta(Y)\xi, \xi) \\ &= -\beta(X, Y, \xi)\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\beta(X, Y, \xi) = 0 \quad (3.102)$$

olur. (3.102) eşitliğinden ve  $\mathbb{G}_7$  sınıfı tanımından  $\beta(X, Y, Z) = 0$  elde edilir. Dolayısıyla (3.19) eşitliği

$$S_{ABC} (\bar{\nabla}_A \bar{F}) (B, C) = 0$$

olur ve (1) koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan her  $X$  vektör alanı ve keyfi  $Z \in \chi(M)$  için  $\mathbb{G}_7$  sınıfında  $\beta(X, X, \xi) = 0$  olduğundan ve  $\mathbb{G}_7$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned}g((\nabla_X \varphi)(X), Z) &= \beta(X, X, Z) \\ &= -\eta(X)\beta(X, Z, \xi) + \eta(Z)\beta(X, X, \xi) \\ &= \eta(X)\beta(\varphi(X), \varphi(Z), \xi) \\ &= \eta(X)\beta(\varphi^2(X), \varphi(Z), \xi) \\ &= \eta(X)\beta(X - \eta(X)\xi, \varphi(Z), \xi) \\ &= -\eta(X)\beta(X, \xi, \varphi(Z)) \\ &= -\eta(X)g(\nabla_X \xi, Z)\end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(X) = -\eta(X)\nabla_X \xi \quad (3.103)$$

olur. Ayrıca

$$(\nabla_X \eta)(X) = \beta(X, \xi, \varphi(X)) = \beta(X, \xi, \varphi^2(X)) = -\beta(X, X, \xi) = 0 \quad (3.104)$$

elde edilir. (3.103) ve (3.104) eşitliğinden (3.21) eşitliği

$$\left(\bar{\nabla}_A \tilde{J}\right)(A) = ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = (0, 0)$$

bulunur. Bu durumda **(2)** koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $X, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_7$  sınıfında  $\beta(X, \xi, Z) = 0$  olmadığı **Örnek 3.19**'da gösterilmiştir. (3.23) eşitliğinde  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alındığında

$$(\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) = 2e^{2\sigma} \{\beta(X, \xi, Z) + g(\varphi(X), Z)\}$$

bulunur. Ancak (3.25) ve (3.27) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(U) \bar{h}(A, V) - \bar{\Theta}(V) \bar{h}(A, U) = 2e^{2\sigma} g(\varphi(X), Z)$$

olduğundan **(3)** koşulu sağlanmaz.  $\mathbb{G}_7$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan (3.28) eşitliğinde  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F})(\bar{U}_i, U) = -2n \neq 0$$

olur ve **(4)** koşulu sağlanmamış olur.

$\varphi(X) = -\varphi^2(X), \varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_7$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned} \beta(X, Y, \xi) &= -\beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi) \\ &= -\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \xi) \\ &= -\beta(X - \eta(X)\xi, Y - \eta(Y)\xi, \xi) \\ &= -\beta(X, Y, \xi) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\beta(X, Y, \xi) = 0 \tag{3.105}$$

olur. (3.105) eşitliğinden ve  $\mathbb{G}_7$  sınıfı tanımından  $\beta(X, Y, Z) = 0$  olduğundan (3.20) eşitliği

$$S_{UVW} (\bar{\nabla}_U \bar{F})(V, W) = 0$$

olarak bulunur. Dolayısıyla **(5)** koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan her  $X$  vektör alanı keyfi  $Z \in \chi(M)$  için  $\mathbb{G}_7$  sınıfında  $\beta(X, X, \xi) = 0$  olduğundan ve

$\mathbb{G}_7$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X \varphi)(X), Z) &= \beta(X, X, Z) \\
&= -\eta(X)\beta(X, Z, \xi) + \eta(Z)\beta(X, X, \xi) \\
&= \eta(X)\beta(\varphi(X), \varphi(Z), \xi) \\
&= -\eta(X)\beta(\varphi^2(X), \varphi(Z), \xi) \\
&= -\eta(X)\beta(X - \eta(X)\xi, \varphi(Z), \xi) \\
&= \eta(X)\beta(X, \xi, \varphi(Z)) \\
&= \eta(X)g(\nabla_X \xi, Z)
\end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(X) = \eta(X)\nabla_X \xi \quad (3.106)$$

olur. Ayrıca

$$(\nabla_X \eta)(X) = \beta(X, \xi, \varphi(X)) = -\beta(X, \xi, \varphi^2(X)) = \beta(X, X, \xi) = 0 \quad (3.107)$$

elde edilir. (3.106) ve (3.107) eşitliklerinden faydalanılarak (3.22) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \tilde{J})(U) = ((\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X)\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = (0, 0)$$

olduğundan **(6)** koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan  $X, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_7$  sınıfında **Örnek 3.19**'dan  $\beta(X, \xi, Z) = 0$  olmak zorunda değildir. (3.24) eşitliğinde  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alındığında

$$(\bar{\nabla}_U \bar{F})(A, B) = 2e^{2\sigma} \{\beta(X, \xi, Z) - g(\varphi(X), Z)\}$$

bulunur. Ancak (3.26) ve (3.27) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(B)\bar{h}(U, A) - \bar{\Theta}(A)\bar{h}(U, B) = -2e^{2\sigma}g(\varphi(X), Z)$$

olduğundan **(7)** koşulu sağlanmaz.  $\mathbb{G}_7$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan (3.29) eşitliğinde  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F})(\bar{A}_i, A) = -2n \neq 0$$

elde edilir ve **(8)** koşulu sağlanmamış olur.

Böylece  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_7$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  üzerindeki yapı **(3)**, **(4)**, **(7)** ve **(8)** koşullarını sağlamadığından  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_3 \oplus W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$



sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 3.19.**  $G$ , 5-boyutlu bir Lie grubu ve bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}$  olmak üzere;  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  kümesi  $\mathfrak{g}$  Lie cebrinin ortonormal bir çatı alanı ve  $\mathfrak{g}$  Lie cebri üzerinde Lie braketler

$$[e_3, e_5] = e_1, \quad [e_4, e_5] = e_2$$

olsun.

$$\varphi(e_1) = e_2, \quad \varphi(e_2) = e_1, \quad \varphi(e_3) = e_4, \quad \varphi(e_4) = e_3, \quad \varphi(e_5) = 0,$$

$$g(e_1, e_1) = g(e_3, e_3) = g(e_5, e_5) = 1, \quad g(e_2, e_2) = g(e_4, e_4) = -1,$$

olarak alındığında  $(\varphi, \xi, \eta, g)$   $G$  Lie grubu üzerinde hemen hemen parakontak metrik bir manifold olur. Sıfırdan farklı kovaryant türevler

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_3 &= -\frac{1}{2}e_5, & \nabla_{e_1} e_5 &= \frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_2} e_4 &= \frac{1}{2}e_5, & \nabla_{e_2} e_5 &= \frac{1}{2}e_4, \\ \nabla_{e_3} e_1 &= -\frac{1}{2}e_5, & \nabla_{e_3} e_5 &= \frac{1}{2}e_1, & \nabla_{e_4} e_2 &= \frac{1}{2}e_5, & \nabla_{e_4} e_5 &= \frac{1}{2}e_2, \\ \nabla_{e_5} e_1 &= \frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_5} e_2 &= \frac{1}{2}e_4, & \nabla_{e_5} e_3 &= -\frac{1}{2}e_1, & \nabla_{e_5} e_4 &= -\frac{1}{2}e_2 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca  $\beta$ 'nin sıfırdan farklı bileşenleri

$$\beta(e_1, e_4, e_5) = -\beta(e_4, e_1, e_5) = -\frac{1}{2}, \quad \beta(e_2, e_3, e_5) = -\beta(e_3, e_2, e_5) = \frac{1}{2}$$

şeklinde dir. Buradan  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen parakontak metrik yapının  $\mathbb{G}_7$  sınıfından olduğu görülür.

**Teorem 3.18'**den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_3 \oplus W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.

Ayrıca,  $X = e_1 + e_2$  ve  $Z = e_3 - e_4$  olarak alındığında  $\varphi^2(X) = \varphi(X)$ ,  $\varphi^2(Z) = -\varphi(Z)$  ve

$$\beta(X, Z, \xi) = \beta(e_1 + e_2, e_3 - e_4, \xi) = 1$$

elde edilir. Eğer  $X = e_1 - e_2$  ve  $Z = e_3 + e_4$  olarak alındığında  $\varphi^2(X) = -\varphi(X)$ ,  $\varphi^2(Z) = \varphi(Z)$  ve

$$\beta(X, Z, \xi) = \beta(e_1 - e_2, e_3 + e_4, \xi) = -1$$

olur.

**Teorem 3.20.**  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_8$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen parahermitian metrik manifoldu  $W_3 \oplus W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_8$  sınıfından olsun.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_8$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned}\beta(X, Y, \xi) &= -\beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi) \\ &= -\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \xi) \\ &= -\beta(X - \eta(X)\xi, Y - \eta(Y)\xi, \xi) \\ &= -\beta(X, Y, \xi)\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\beta(X, Y, \xi) = 0 \quad (3.108)$$

olur. (3.108) eşitliğinden ve  $\mathbb{G}_8$  sınıfı tanımından  $\beta(X, Y, Z) = 0$  elde edilir. Dolayısıyla (3.19) eşitliği

$$S_{ABC} (\bar{\nabla}_A \bar{F}) (B, C) = 0$$

olarak bulunur ve (1) koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan her  $X$  vektör alanı ve keyfi  $Z \in \chi(M)$  için  $\mathbb{G}_8$  sınıfında  $\beta(X, X, \xi) = 0$ 'dır.  $\mathbb{G}_8$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned}g((\nabla_X \varphi)(X), Z) &= \beta(X, X, Z) \\ &= -\eta(X)\beta(X, Z, \xi) \\ &= \eta(X)\beta(\varphi(X), \varphi(Z), \xi) \\ &= \eta(X)\beta(\varphi^2(X), \varphi(Z), \xi) \\ &= \eta(X)\beta(X - \eta(X)\xi, \varphi(Z), \xi) \\ &= -\eta(X)\beta(X, \xi, \varphi(Z)) \\ &= -\eta(X)g(\nabla_X \xi, Z)\end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(X) = -\eta(X)\nabla_X \xi \quad (3.109)$$

olur. Ayrıca

$$(\nabla_X \eta)(X) = \beta(X, \xi, \varphi(X)) = \beta(X, \xi, \varphi^2(X)) = -\beta(X, X, \xi) = 0 \quad (3.110)$$

elde edilir. (3.109) ve (3.110) eşitliğinden (3.21) eşitliği

$$\left(\bar{\nabla}_A \tilde{J}\right)(A) = ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = (0, 0)$$

olduğundan **(2)** koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan  $X, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_8$  sınıfında  $\beta(X, \xi, Z) = 0$  olmak zorunda değildir (bakınız **Örnek 3.21**). (3.23) eşitliğinde  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alındığında

$$(\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) = 2e^{2\sigma} \{\beta(X, \xi, Z) + g(\varphi(X), Z)\}$$

bulunur. Ancak (3.25) ve (3.27) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(U) \bar{h}(A, V) - \bar{\Theta}(V) \bar{h}(A, U) = 2e^{2\sigma} g(\varphi(X), Z)$$

olduğundan **(3)** koşulu sağlanmaz.  $\mathbb{G}_8$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan (3.28) eşitliğinde  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F})(\bar{U}_i, U) = -2n \neq 0$$

elde edilir ve **(4)** koşulu sağlanmamış olur.

$\varphi(X) = -\varphi^2(X), \varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_8$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned} \beta(X, Y, \xi) &= -\beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi) \\ &= -\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \xi) \\ &= -\beta(X - \eta(X)\xi, Y - \eta(Y)\xi, \xi) \\ &= -\beta(X, Y, \xi) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\beta(X, Y, \xi) = 0 \tag{3.111}$$

olur. (3.111) eşitliğinden ve  $\mathbb{G}_8$  sınıfı tanımından  $\beta(X, Y, Z) = 0$  olarak bulunur ve (3.19) eşitliğinden

$$S_{UVW}(\bar{\nabla}_U \bar{F})(V, W) = 0$$

elde edilir. Bu durumda **(5)** koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan her  $X$  vektör alanı ve keyfi  $Z \in \chi(M)$  için  $\mathbb{G}_8$  sınıfında  $\beta(X, X, \xi) = 0$ 'dır.  $\mathbb{G}_8$  sınıfı

tanımından

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X \varphi)(X), Z) &= \beta(X, X, Z) \\
&= -\eta(X)\beta(X, Z, \xi) \\
&= \eta(X)\beta(\varphi(X), \varphi(Z), \xi) \\
&= -\eta(X)\beta(\varphi^2(X), \varphi(Z), \xi) \\
&= -\eta(X)\beta(X - \eta(X)\xi, \varphi(Z), \xi) \\
&= \eta(X)\beta(X, \xi, \varphi(Z)) \\
&= \eta(X)g(\nabla_X \xi, Z)
\end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(X) = \eta(X)\nabla_X \xi \quad (3.112)$$

olur. Ayrıca

$$(\nabla_X \eta)(X) = \beta(X, \xi, \varphi(X)) = \beta(X, \xi, \varphi^2(X)) = \beta(X, X, \xi) = 0 \quad (3.113)$$

elde edilir. (3.112) ve (3.113) eşitliğinden (3.22) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \tilde{J})(U) = ((\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X)\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = (0, 0)$$

olduğundan **(6)** koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan her  $X, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_8$  sınıfında  $\beta(X, \xi, Z) = 0$  olmak zorunda değildir (**Örnek 3.21**). Buradan (3.24) eşitliğinde  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alındığında

$$(\bar{\nabla}_U \bar{F})(A, B) = 2e^{2\sigma} \{\beta(X, \xi, Z) - g(\varphi(X), Z)\}$$

bulunur. Ancak (3.26) ve (3.27) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(B)\bar{h}(U, A) - \bar{\Theta}(A)\bar{h}(U, B) = -2e^{2\sigma}g(\varphi(X), Z)$$

olduğundan **(7)** koşulu sağlanmaz.  $\mathbb{G}_8$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan (3.29) eşitliğinde  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F})(\bar{A}_i, A) = -2n \neq 0$$

olur. Böylece **(8)** koşulu sağlanmaz.

Sonuç olarak  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_8$  sınıfından olduğunda  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu  $W_3 \oplus W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 3.21.**  $G$ , 5 boyutlu bir Lie grup, bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}$  ve

$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  kümesi  $\mathfrak{g}$  Lie cebirinin ortonormal bir çatı alanı olsun.  $\mathfrak{g}$  Lie cebri üzerinde sıfırdan farklı braketler

$$[e_1, e_2] = e_5, \quad [e_3, e_4] = e_5,$$

olsun.

$$\varphi(e_1) = e_4, \quad \varphi(e_2) = e_3, \quad \varphi(e_3) = e_2, \quad \varphi(e_4) = e_1, \quad \varphi(e_5) = 0,$$

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_5, e_5) = 1,$$

$$g(e_3, e_3) = g(e_4, e_4) = -1, \quad (g(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j)$$

olarak alındığında  $(\mathfrak{g}, \varphi, \xi, \eta, g)$  5-boyutlu hemen hemen parakontak metrik bir manifold olur. Gerekli hesaplamalar yapıldığında bu yapı  $\mathbb{G}_8$  sınıfından olur. Koszul formülü kullanılarak sıfırdan farklı kovaryant türevler

$$\nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_3} e_4 = \frac{1}{2} e_5, \quad \nabla_{e_2} e_1 = \nabla_{e_4} e_3 = -\frac{1}{2} e_5,$$

$$\nabla_{e_1} e_5 = \nabla_{e_3} e_1 = -\frac{1}{2} e_2, \quad \nabla_{e_2} e_5 = \nabla_{e_4} e_2 = \frac{1}{2} e_1,$$

$$\nabla_{e_3} e_5 = \nabla_{e_4} e_3 = \frac{1}{2} e_4, \quad \nabla_{e_4} e_5 = \nabla_{e_3} e_4 = -\frac{1}{2} e_3$$

olur. Ayrıca  $\beta$ 'nin sıfırdan farklı bileşenleri

$$\beta(e_1, e_3, e_5) = \beta(e_3, e_1, e_5) = \frac{1}{2}, \quad \beta(e_2, e_4, e_5) = \beta(e_4, e_2, e_5) = -\frac{1}{2}$$

şeklindedir. Buradan  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen parakontak metrik yapının  $\mathbb{G}_8$  sınıfından olduğu görülür.

**Teorem 3.20'**den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_3 \oplus W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur. Ayrıca  $X = e_1 + e_4$  ve  $Z = e_2 - e_3$  alındığında  $\varphi^2(X) = \varphi(X)$  ve  $\varphi^2(Z) = -\varphi(Z)$  olur. Bu durumda

$$\beta(X, \xi, Z) = \beta(e_1 + e_4, \xi, e_2 - e_3) = 1$$

elde edilir.

Eğer  $X = e_1 - e_4$  ve  $Z = e_2 + e_3$  alındığında  $\varphi^2(X) = -\varphi(X)$  ve  $\varphi^2(Z) = \varphi(Z)$

olur. Bu durumda

$$\beta(X, \xi, Z) = \beta(e_1 - e_4, \xi, e_2 + e_3) = -1$$

elde edilir.

**Teorem 3.22.**  $M$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_9$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4 \oplus W_5 \oplus W_6 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_9$  sınıfından olsun.  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_9$  sınıfında  $\beta(Y, Z, \xi) \neq 0$  olduğundan ve (3.19) eşitliğinde  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alındığında

$$S_{ABC} (\bar{\nabla}_A \bar{F}) (B, C) = 4e^{2\sigma} \beta(Y, Z, \xi)$$

olur ve **(1)** koşulu sağlanmaz.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $X$  vektör alanı için  $\mathbb{G}_9$  sınıfında  $\beta(X, X, \xi) = 0$  ve her  $Z \in \chi(M)$  için  $\mathbb{G}_9$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)(X), Z) &= \beta(X, X, Z) \\ &= -\eta(X) \beta(X, Z, \xi) \\ &= -\eta(X) \beta(\varphi(X), \varphi(Z), \xi) \\ &= -\eta(X) \beta(\varphi^2(X), \varphi(Z), \xi) \\ &= -\eta(X) \beta(X - \eta(X)\xi, \varphi(Z), \xi) \\ &= \eta(X) \beta(X, \xi, \varphi(Z)) \\ &= \eta(X) g(\nabla_X \xi, Z) \end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(X) = \eta(X) \nabla_X \xi \quad (3.114)$$

olur. Ayrıca

$$(\nabla_X \eta)(X) = \beta(X, \xi, \varphi(X)) = \beta(X, \xi, \varphi^2(X)) = -\beta(X, X, \xi) = 0 \quad (3.115)$$

elde edilir. (3.114) ve (3.115) eşitliklerinden faydalanılarak (3.21) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \tilde{J})(A) = ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = (2\eta(X) \nabla_X \xi, 0)$$

bulunur.  $\mathbb{G}_9$  sınıfında  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan  $X$  vektör alanı için  $\nabla_X \xi \neq 0$  olduğundan **(2)** koşulu sağlanmaz.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan her  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_9$  sınıfı tanımından

$$\beta(X, Y, \xi) = \beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi) = -\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \xi) = -\beta(X, Y, \xi)$$

olur. Buradan

$$\beta(X, Y, \xi) = 0 \quad (3.116)$$

elde edilir. (3.116) eşitliğinden ve  $\mathbb{G}_9$  sınıfı tanımından

$$\beta(X, Y, Z) = 0 \quad (3.117)$$

bulunur. (3.116) ve (3.117) eşitliğinden (3.23) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) = 2e^{2\sigma} \{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\} \quad (3.118)$$

olur.  $\mathbb{G}_9$  sınıfında  $\theta^*(\xi) = 0$  ve keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta(X) = w(X) = 0$  olduğundan (3.25) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(U) = 2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(V) = 2\eta(Z) \quad (3.119)$$

elde edilir. (3.27) ve (3.119) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(U)\bar{h}(A, V) - \bar{\Theta}(V)\bar{h}(A, U) &= 2e^{2\sigma}\eta(Y)(g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z)) \\ &\quad - 2e^{2\sigma}\eta(Z)(g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)) \\ &= 2e^{2\sigma}\{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\} \end{aligned} \quad (3.120)$$

bulunur. Dolayısıyla (3.118) ve (3.120) eşitliklerinden **(3)** koşulu sağlanır.  $\mathbb{G}_9$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan ve (3.28) eşitliğinde  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F})(\bar{U}_i, U) = -2n \neq 0$$

olur. Bu durumda **(4)** koşulu sağlanmamış olur.

$\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_9$  sınıfında  $\beta(Y, Z, \xi) \neq 0$  olduğundan ve (3.20) eşitliğinde  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alındığında

$$S_{UVW}(\bar{\nabla}_U \bar{F})(V, W) = 4e^{2\sigma}\beta(Y, Z, \xi)$$

elde edilir. Dolayısıyla **(5)** koşulu sağlanmamış olur.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan her  $X$  vektör alanı için  $\mathbb{G}_9$  sınıfında  $\beta(X, X, \xi) = 0$  ve keyfi  $Z \in \chi(M)$  için

$\mathbb{G}_9$  sınıfı tanımından

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X \varphi)(X), Z) &= \beta(X, X, Z) \\
&= -\eta(X)\beta(X, Z, \xi) + \eta(Z)\beta(X, X, \xi) \\
&= -\eta(X)\beta(X, Z, \xi) \\
&= -\eta(X)\beta(\varphi(X), \varphi(Z), \xi) \\
&= \eta(X)\beta(\varphi^2(X), \varphi(Z), \xi) \\
&= \eta(X)\beta(X - \eta(X)\xi, \varphi(Z), \xi) \\
&= -\eta(X)\beta(X, \xi, \varphi(Z)) \\
&= -\eta(X)g(\nabla_X \xi, Z)
\end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(X) = -\eta(X)\nabla_X \xi \quad (3.121)$$

olur. Ayrıca

$$(\nabla_X \eta)(X) = \beta(X, \xi, \varphi(X)) = -\beta(X, \xi, \varphi^2(X)) = \beta(X, X, \xi) = 0 \quad (3.122)$$

elde edilir. (3.121) ve (3.122) eşitliklerinden (3.22) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \tilde{J})(U) = ((\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X)\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) = (-2\eta(X)\nabla_X \xi, 0)$$

elde edilir.  $\mathbb{G}_9$  sınıfında  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan  $X$  vektör alanı için  $\nabla_X \xi \neq 0$  olduğundan **(6)** koşulu sağlanmaz.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X), \varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_9$  sınıfı tanımlama bağıntısından

$$\beta(X, Y, \xi) = \beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi) = -\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \xi) = -\beta(X, Y, \xi)$$

olur. Buradan

$$\beta(X, Y, \xi) = 0 \quad (3.123)$$

elde edilir. (3.123) eşitliğinden ve  $\mathbb{G}_9$  sınıfı tanımından

$$\beta(X, Y, Z) = 0 \quad (3.124)$$

bulunur. (3.123) ve (3.124) eşitliğinden (3.24) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \bar{F})(A, B) = 2e^{2\sigma} \{ \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) \} \quad (3.125)$$



olur.  $\mathbb{G}_9$  sınıfında  $\theta^*(\xi) = 0$  ve keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta(X) = w(X) = 0$  olduğundan (3.26) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(A) = -2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(B) = -2\eta(Z) \quad (3.126)$$

bulunur. (3.27) ve (3.126) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(B)\bar{h}(U, A) - \bar{\Theta}(A)\bar{h}(U, B) &= -2e^{2\sigma}\eta(Z)(g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)) \\ &\quad + 2e^{2\sigma}\eta(Y)(g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z)) \\ &= 2e^{2\sigma}\{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\} \end{aligned} \quad (3.127)$$

elde edilir. (3.123) ve (3.127) eşitliğinden **(7)** koşulu sağlanır.  $\mathbb{G}_9$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan ve (3.29) eşitliğinde  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F})(\bar{A}_i, A) = -2n \neq 0$$

eşitliği elde edilir. Böylece **(8)** koşulu sağlanmaz.

Sonuç olarak  $\mathbb{G}_9$  sınıfından olan  $M$  manifoldu **(3)** ve **(7)** dışındaki koşulları sağlamadığından  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4 \oplus W_5 \oplus W_6 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Teorem 3.23.**  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen parahermitian metrik manifoldu  $W_2 \oplus W_4 \oplus W_6 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfından olsun.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfı tanımından (3.19) eşitliği

$$\begin{aligned} S_{ABC}(\bar{\nabla}_A \bar{F})(B, C) &= e^{2\sigma}\{\beta(X, Y, Z) + \beta(Y, Z, X) + \beta(Z, X, Y) \\ &\quad - \eta(X)\beta(Y, \xi, Z) + \eta(X)\beta(Z, \xi, Y) \\ &\quad - \eta(Y)\beta(Z, \xi, X) + \eta(Y)\beta(X, \xi, Z) \\ &\quad - \eta(Z)\beta(X, \xi, Y) + \eta(Z)\beta(Y, \xi, X)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{2\sigma} \{ -\eta(Y)\beta(X, Z, \xi) + \eta(Z)\beta(X, Y, \xi) \\
&\quad -\eta(Z)\beta(Y, X, \xi) + \eta(X)\beta(Y, Z, \xi) \\
&\quad -\eta(X)\beta(Z, Y, \xi) + \eta(Y)\beta(Z, X, \xi) \\
&\quad +\eta(X)\beta(Y, Z, \xi) - \eta(X)\beta(Z, Y, \xi) \\
&\quad +\eta(Y)\beta(Z, X, \xi) - \eta(Y)\beta(X, Z, \xi) \\
&\quad +\eta(Z)\beta(X, Y, \xi) - \eta(Z)\beta(Y, X, \xi) \} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan **(1)** koşulu sağlanır.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $X$  vektör alanı için **Örnek 3.25**'den  $(\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X)\nabla_X \xi = \beta(X, \xi, \varphi(X)) = 0$  olmak zorunda değildir. Bu durumda (3.21) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \tilde{J})(A) = ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X)\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) \neq (0, 0)$$

elde edilir. Böylece **(2)** koşulu sağlanmamış olur.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfı tanımından

$$\beta(X, Y, \xi) = \beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi) = -\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \xi) = -\beta(X, Y, \xi)$$

olur. Buradan

$$\beta(X, Y, \xi) = 0 \tag{3.128}$$

elde edilir. (3.128) eşitliğinden ve  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfı tanımından

$$\beta(X, Y, Z) = 0 \tag{3.129}$$

bulunur. (3.128) ve (3.129) eşitliğinden (3.23) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) = 2e^{2\sigma} \{ \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) \} \tag{3.130}$$

olur.  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfında  $\theta^*(\xi) = 0$  ve keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta(X) = w(X) = 0$  olduğundan (3.25) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(U) = 2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(V) = 2\eta(Z) \tag{3.131}$$

bulunur. (3.27) ve (3.131) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\bar{\Theta}(U)\bar{h}(A, V) - \bar{\Theta}(V)\bar{h}(A, U) &= 2e^{2\sigma}\eta(Y)(g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z)) \\
&\quad - 2e^{2\sigma}\eta(Z)(g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)) \\
&= 2e^{2\sigma}\{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\} \quad (3.132)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.130) ve (3.132) eşitliğinden **(3)** koşulu sağlanır.  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan ve (3.28) eşitliğinde  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F}) (\bar{U}_i, U) = -2n \neq 0$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda **(4)** koşulu sağlanmaz.

$\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfı tanımlama bağıntısından (3.20) eşitliği

$$\begin{aligned}
S_{UVW} (\bar{\nabla}_U \bar{F}) (V, W) &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + \beta(Y, Z, X) + \beta(Z, X, Y) \\
&\quad - \eta(X)\beta(Y, \xi, Z) + \eta(X)\beta(Z, \xi, Y) \\
&\quad - \eta(Y)\beta(Z, \xi, X) + \eta(Y)\beta(X, \xi, Z) \\
&\quad - \eta(Z)\beta(X, \xi, Y) + \eta(Z)\beta(Y, \xi, X) \} \\
&= e^{2\sigma} \{ -\eta(Y)\beta(X, Z, \xi) + \eta(Z)\beta(X, Y, \xi) \\
&\quad - \eta(Z)\beta(Y, X, \xi) + \eta(X)\beta(Y, Z, \xi) \\
&\quad - \eta(X)\beta(Z, Y, \xi) + \eta(Y)\beta(Z, X, \xi) \\
&\quad + \eta(X)\beta(Y, Z, \xi, ) - \eta(X)\beta(Z, Y, \xi) \\
&\quad + \eta(Y)\beta(Z, X, \xi) - \eta(Y)\beta(X, Z, \xi) \\
&\quad + \eta(Z)\beta(X, Y, \xi) - \eta(Z)\beta(Y, X, \xi, ) \} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda **(5)** koşulu sağlanmış olur.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan kayfi  $X$  vektör alanı için  $(\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X)\nabla_X \xi = \beta(X, \xi, \varphi(X)) = 0$  olmak zorunda değildir (**Örnek 3.21** bakınız). Bu durumda (3.22) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \tilde{J})(U) = ((\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X)\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X) \frac{d}{dt}) \neq (0, 0)$$

elde edilir. Böylece **(6)** koşulu sağlanmamış olur.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan her  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfı tanı-

mından

$$\beta(X, Y, \xi) = \beta(\varphi(X), \varphi(Y), \xi) = -\beta(\varphi^2(X), \varphi^2(Y), \xi) = -\beta(X, Y, \xi)$$

olur. Buradan

$$\beta(X, Y, \xi) = 0 \quad (3.133)$$

elde edilir. (3.133) eşitliğinden ve  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfı tanımlama bağıntısından

$$\beta(X, Y, Z) = 0 \quad (3.134)$$

bulunur. (3.133) ve (3.134) eşitliğinden (3.24) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \bar{F})(A, B) = 2e^{2\sigma} \{ \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) \} \quad (3.135)$$

olur.  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfında  $\theta^*(\xi) = 0$  ve keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta(X) = w(X) = 0$  olduğundan ve (3.26) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(A) = -2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(B) = -2\eta(Z) \quad (3.136)$$

bulunur. (3.27) ve (3.136) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(B)\bar{h}(U, A) - \bar{\Theta}(A)\bar{h}(U, B) &= -2e^{2\sigma}\eta(Z)(g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)) \\ &\quad + 2e^{2\sigma}\eta(Y)(g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z)) \\ &= 2e^{2\sigma}\{ \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) \} \end{aligned} \quad (3.137)$$

elde edilir. (3.133) ve (3.137) eşitliğinden **(7)** koşulu sağlanır.  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan ve (3.29) eşitliğinde  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F})(\bar{A}_i, A) = -2n$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla **(8)** koşulu sağlanmaz.

Sonuç olarak  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfından olan  $M$  manifoldu **(2)**, **(4)**, **(6)** ve **(8)** koşullarını sağlamadığından  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_2 \oplus W_4 \oplus W_6 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 3.24.**  $G$ , 3 boyutlu bir Lie grup, bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}$  ve  $\{e_1, e_2, e_3\}$  kümesi  $\mathfrak{g}$  Lie cebrinin ortanormal bir çatı alanı olsun.  $\mathfrak{g}$  Lie cebri üzerinde Lie braketler

$$[e_1, e_2] = e_1 + e_2, \quad [e_1, e_3] = -e_1 - e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1 + e_2$$

olsun.

$$\varphi(e_1) = e_2, \quad \varphi(e_2) = e_1, \quad \varphi(e_3) = 0,$$

$$g(e_1, e_1) = -g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = 1,$$

olarak alındığında  $(\mathfrak{g}, \varphi, \xi, \eta, g)$  3-boyutlu hemen hemen parakontak metrik bir manifold olur. Sıfırdan farklı kovaryant türevler

$$\nabla_{e_1} e_1 = e_2 + e_3, \quad \nabla_{e_1} e_2 = e_1 - e_3, \quad \nabla_{e_1} e_3 = -e_1 - e_2,$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = -e_3 - e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -e_1 + e_3, \quad \nabla_{e_2} e_3 = e_1 + e_2$$

olur.  $\beta$ 'nın sıfırdan farklı bileşenleri şu şekildedir:

$$\beta(e_1, e_1, e_3) = \beta(e_2, e_2, e_3) = -1, \quad \beta(e_1, e_2, e_3) = \beta(e_2, e_1, e_3) = 1.$$

Buradan  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  3-boyutlu hemen hemen parakontak metrik yapının  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfından olduğu görülür. Bu örnekte keyfi  $X = ae_1 + be_2 + ce_3$  vektör alanının  $\varphi^2(X) = \varphi(X)$  eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul  $a = b$  olmasıdır.  $X = ae_1 + ae_2 + ce_3$  olarak alındığında

$$(\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X) \nabla_X \xi = 0, \quad \beta(X, \xi, \varphi(X)) = 0$$

olur. Ayrıca keyfi  $X = ae_1 + be_2 + ce_3$  vektör alanının  $\varphi^2(X) = -\varphi(X)$  eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul  $a = -b$  olmasıdır.  $X = ae_1 - ae_2 + ce_3$  olarak alındığında

$$(\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X) \nabla_X \xi = 0, \quad \beta(X, \xi, \varphi(X)) = 0$$

olur. Bu durumda (2) ve (6) koşulları da sağlandığından bu örnekte **Teorem 3.23**'den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_4 \oplus W_8$  sınıfından olur.

**Örnek 3.25.**  $G$ , 5-boyutlu bir Lie grup, bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}$  ve  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  kümesi  $\mathfrak{g}$  Lie cebri'nin ortanormal bir çatı alanı olsun.  $\mathfrak{g}$  Lie cebri üzerinde Lie braketler

$$[e_1, e_5] = -e_2, \quad [e_2, e_5] = e_1, \quad [e_3, e_5] = e_4, \quad [e_4, e_5] = -e_3$$

olsun.

$$\xi = e_5, \quad \varphi(e_1) = e_2, \quad \varphi(e_2) = e_1, \quad \varphi(e_3) = e_4, \quad \varphi(e_4) = e_3,$$

$$g(e_1, e_1) = g(e_3, e_3) = g(e_5, e_5) = 1, \quad g(e_2, e_2) = g(e_4, e_4) = -1$$

olarak alındığında  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  dördlüsü  $\mathfrak{g}$  Lie cebri üzerinde hemen hemen parakontak metrik bir yapı olur. Sıfırdan farklı kovaryant türevler

$$\nabla_{e_1} e_2 = -e_5, \quad \nabla_{e_1} e_5 = -e_2, \quad \nabla_{e_2} e_1 = -e_5, \quad \nabla_{e_2} e_5 = e_1,$$

$$\nabla_{e_3} e_4 = e_5, \quad \nabla_{e_3} e_5 = e_4, \quad \nabla_{e_4} e_3 = e_5, \quad \nabla_{e_4} e_5 = -e_3$$

olur.  $\beta$ 'nın sıfırdan farklı bileşenleri şu şekildedir:

$$\beta(e_1, e_1, e_5) = \beta(e_2, e_2, e_5) = -1, \quad \beta(e_3, e_3, e_5) = \beta(e_4, e_4, e_5) = 1.$$

Buradan  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  5-boyutlu hemen hemen parakontak metrik yapının  $\mathbb{G}_{10}$  sınıfından olduğu görülür.

Ayrıca  $X = e_3 + e_4$  alındığında  $\varphi^2(X) = \varphi(X)$  eşitliği sağlanı ve bu vektör alanı için

$$(\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X) \nabla_X \xi = 2e_5, \quad \beta(X, \xi, \varphi(X)) = -2$$

elde edilir. Eğer  $X = e_1 - e_2$  alınırsa  $\varphi^2(X) = -\varphi(X)$  eşitliği sağlanı ve bu vektör alanı için

$$(\nabla_X \varphi)(X) - \eta(X) \nabla_X \xi = -2e_5, \quad \beta(X, \xi, \varphi(X)) = -2$$

olur. **Teorem 3.23'**den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_2 \oplus W_4 \oplus W_6 \oplus W_8$  sınıfından olur.

**Teorem 3.26.**  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfına ait ise  $M \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W_5 \oplus W_6 \oplus W_7 \oplus W_8$  (en geniş) sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfından olsun.  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $Y, Z$  vektör alanları için  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  olarak alındığında ve  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfında

$\xi$  paralel olduğundan  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfı tanımından (3.19) eşitliği

$$\begin{aligned} S_{ABC} (\bar{\nabla}_A \bar{F}) (B, C) &= e^{2\sigma} \{ \eta(X) \beta(\xi, \varphi(Y), \varphi(Z)) \} \\ &= e^{2\sigma} \beta(\xi, \varphi^2(Y), \varphi^2(Z)) \\ &= e^{2\sigma} \beta(\xi, Y - \eta(Y)\xi, Z - \eta(Z)\xi) \\ &= e^{2\sigma} \beta(\xi, Y, Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca  $\beta(\xi, Y, Z) = 0$  olmak zorunda olmadığından (**Örnek 3.27** bakınız) **(1)** koşulu sağlanmaz.  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan her  $X$  vektör alanı ve keyfi  $Z \in \chi(M)$  için  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfı tanımından

$$g((\nabla_X \varphi)(X), Z) = \beta(X, X, Z) = \eta(X) \beta(\xi, Y, Z) = g(\eta(X)(\nabla_\xi \varphi)(X), Z)$$

elde edilen eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(X) = \eta(X)(\nabla_\xi \varphi)(X) \quad (3.138)$$

olur.  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfında  $\xi$  paralel  $(\nabla_X \xi = (\nabla_X \eta)(X) = 0)$  olduğundan ve (3.138) eşitliğinden (3.21) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \bar{J})(A) = (\eta(X)(\nabla_\xi \varphi)(X), 0)$$

elde edilir. **Örnek 3.27**'den  $(\nabla_\xi \varphi)(X) = 0$  olmak zorunda değildir. Böylece **(2)** koşulu sağlanmamış olur.  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfında  $\xi$  paralel olduğundan ve  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $Y, Z$  vektör alanları için  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  olarak alındığında (3.23) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) = e^{2\sigma} \beta(\xi, Y, Z) \quad (3.139)$$

olur.  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfında  $\theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  ve keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta(X) = 0$  olduğundan (3.25) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(U) = 2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(V) = 2\eta(Z) \quad (3.140)$$

elde edilir. (3.27) ve (3.140) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(U)\bar{h}(A, V) - \bar{\Theta}(V)\bar{h}(A, U) = 0 \quad (3.141)$$

olur. (3.139) ve (3.141) eşitliklerinden sağlanması için  $\beta(\xi, Y, Z) = 0$  olmalıdır. Ancak  $\beta(\xi, Y, Z) = 0$  olmak zorunda değildir (**Örnek 3.27** bakınız). Bu durumda **(3)** koşulu sağlanmaz.  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan (3.28)

eşitliğinde  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F}) (\bar{U}_i, U) = -2n$$

eşitliği elde edilir. Böylece (4) koşulu sağlanmaz.

$\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $Y, Z$  vektör alanları için  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  olarak alındığında ve  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfında  $\xi$  paralel olduğundan  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfı tanımından (3.20) eşitliği

$$\begin{aligned} S_{UVW} (\bar{\nabla}_U \bar{F}) (V, W) &= e^{2\sigma} \{ \eta(X) \beta(\xi, \varphi(Y), \varphi(Z)) \} \\ &= e^{2\sigma} \beta(\xi, \varphi^2(Y), \varphi^2(Z)) \\ &= e^{2\sigma} \beta(\xi, Y - \eta(Y)\xi, Z - \eta(Z)\xi) \\ &= e^{2\sigma} \beta(\xi, Y, Z) \end{aligned}$$

olur. Ancak  $\beta(\xi, Y, Z) = 0$  olmadığı **Örnek 3.27**'de gösterilmiştir. Dolayısıyla (5) koşulu sağlanmamış olur.  $\varphi(X) = -\varphi^2(X)$  eşitliğini sağlayan her  $X$  vektör alanı ve keyfi  $Z \in \chi(M)$  için  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfı tanımından

$$g((\nabla_X \varphi)(X), Z) = \beta(X, X, Z) = \eta(X) \beta(\xi, Y, Z) = g(\eta(X)(\nabla_\xi \varphi)(X), Z)$$

elde edilen eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(X) = \eta(X)(\nabla_\xi \varphi)(X) \quad (3.142)$$

elde edilir.  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfında  $\xi$  paralel olduğundan ve (3.142) eşitliğinden (3.22) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \bar{J})(U) = (\eta(X)(\nabla_\xi \varphi)(X), 0)$$

olarak bulunur. Ayrıca  $(\nabla_\xi \varphi)(X) = 0$  olmak zorunda değildir (**Örnek 3.27** bakınız). Bu durumda (6) koşulu sağlanmaz.  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfında  $\xi$  paralel olduğundan ve  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $Y, Z$  vektör alanları için  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  olarak alındığında (3.24) eşitliği

$$(\bar{\nabla}_U \bar{F})(A, B) = e^{2\sigma} \beta(\xi, Y, Z) \quad (3.143)$$

olur.  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfında  $\theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  ve keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta(X) = 0$  olduğundan (3.25) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(A) = -2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(B) = -2\eta(Z) \quad (3.144)$$



elde edilir. (3.27) ve (3.144) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(B)\bar{h}(U, A) - \bar{\Theta}(A)\bar{h}(U, B) = 0 \quad (3.145)$$

olur. Ancak  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfında  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $Y, Z \in \chi(M)$  için **Örnek 3.27**'den  $\beta(\xi, Y, Z) = 0$  olmak zorunda olmadığından (3.143) ve (3.145) eşitlikleri sağlanmaz. Böylece **(7)** koşulu sağlanmamış olur.  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan ve (3.29) eşitliğinde  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alındığında

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{U}_i} \bar{F})(A_i, A) = -2n$$

olur ve  $n, 1$ 'den büyük pozitif tam sayı olduğundan **(8)** koşulu sağlanmaz.

Sonuç olarak  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfından olan  $M$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu hiçbir koşulu sağlamadığından  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W_5 \oplus W_6 \oplus W_7 \oplus W_8$  (en geniş) sınıfına ait olur.  $\square$

**Örnek 3.27.**  $G$ , 5 boyutlu bir Lie grup, bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}$  ve  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  kümesi  $\mathfrak{g}$  Lie cebrinin left-invariant ortanormal bir çatı alanı olsun.  $\mathfrak{g}$  Lie cebri üzerinde Lie braketler

$$[e_1, e_5] = -e_2, \quad [e_2, e_5] = e_1, \quad [e_3, e_5] = e_4, \quad [e_4, e_5] = -e_3$$

olsun.

$$\xi = e_4, \quad \varphi(e_1) = e_3, \quad \varphi(e_2) = e_4, \quad \varphi(e_3) = e_1, \quad \varphi(e_4) = e_2, \quad \varphi(e_5) = 0,$$

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_5, e_5) = 1, \quad g(e_3, e_3) = g(e_4, e_4) = -1,$$

olarak alındığında  $(\varphi, \xi, \eta, g)$   $G$  Lie grubu üzerinde left-invariant hemen hemen parakontak metrik bir manifold olur. Sıfırdan farklı kovaryant türevler

$$\nabla_{e_5} e_1 = e_2, \quad \nabla_{e_5} e_2 = -e_1, \quad \nabla_{e_5} e_3 = -e_4, \quad \nabla_{e_5} e_4 = e_5$$

olur.  $\beta$ 'nın sıfırdan farklı bileşenleri

$$\beta(e_5, e_1, e_4) = 2, \quad \beta(e_5, e_2, e_3) = -2$$

şeklinde hesaplanır. Buradan  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen parakontak metrik yapının  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfından olduğu görülür.

**Teorem 3.26'**dan  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant hemen hemen parahermitian yapı en geniş sınıftan olur.

Ayrıca  $X = \xi + e_1 + e_3$  olarak alındığında  $\varphi^2(X) = \varphi(X)$  ve

$$\eta(X) (\nabla_{\xi} \varphi) (X) = 2(e_2 - e_4) \neq 0$$

elde edilir.

Eğer  $X = \xi + e_1 - e_3$  olarak alındığında  $\varphi^2(X) = -\varphi(X)$  ve

$$\eta(X) (\nabla_{\xi} \varphi) (X) = -2(e_2 + e_4) \neq 0$$

ve  $Y = e_1 + e_3$  ve  $Z = e_2 + e_4$  olarak alındığında  $\varphi^2(Y) = \varphi(Y)$ ,  $\varphi^2(Z) = \varphi(Z)$  ve

$$\beta(\xi, Y, Z) = 4 \neq 0$$

elde edilir.

Ek olarak  $X = e_1 - e_3$  ve  $Z = e_2 - e_4$  olarak alındığında  $\varphi^2(X) = -\varphi(X)$ ,  $\varphi^2(Z) = -\varphi(Z)$  ve

$$\beta(\xi, Y, Z) = -4 \neq 0$$

olur.

**Teorem 3.28.**  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_{12}$  sınıfından ise  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu  $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W_6 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.

*Kanıt.*  $M$  manifoldu  $\mathbb{G}_{12}$  sınıfından olsun. Bu durumda keyfi  $X, Y, Z \in \chi(M)$  için  $\mathbb{G}_{12}$  sınıfı tanımlama bağıntısından

$$\beta(X, Y, Z) + \beta(Y, Z, X) + \beta(Z, X, Y) = 0 \quad (3.146)$$

ve

$$\beta(X, \xi, Z) = \eta(X) \beta(\xi, \xi, Z) \quad (3.147)$$

eşitlikleri sağlanır. (3.146) ve (3.147) eşitliğinden ve  $\varphi(X) = \varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$

ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan her  $X, Y, Z$  vektör alanları için (3.19) eşitliği

$$\begin{aligned}
S_{ABC} (\bar{\nabla}_A \bar{F}) (B, C) &= e^{2\sigma} \{-\eta(X)\beta(Y, \xi, Z) + \eta(X)\beta(Z, \xi, Y) \\
&\quad -\eta(Y)\beta(Z, \xi, X) + \eta(Y)\beta(X, \xi, Z) \\
&\quad -\eta(Z)\beta(X, \xi, Y) + \eta(Z)\beta(Y, \xi, X)\} \\
&= e^{2\sigma} \{-\eta(X)\eta(Y)\beta(\xi, \xi, Z) + \eta(X)\eta(Z)\beta(\xi, \xi, Y) \\
&\quad -\eta(Y)\eta(Z)\beta(\xi, \xi, X) + \eta(Y)\eta(X)\beta(\xi, \xi, Z) \\
&\quad -\eta(Z)\eta(X)\beta(\xi, \xi, Y) + \eta(Z)\eta(Y)\beta(\xi, \xi, X)\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan (1) koşulu sağlanır. (3.21) eşitliğinde  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alındığında

$$(\bar{\nabla}_A \tilde{J})(A) = ((\nabla_X \varphi)(X) + \eta(X)\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X)\frac{d}{dt}) = (-\varphi(\nabla_\xi \xi) + \nabla_\xi \xi, 0)$$

elde edilir. **Örnek 3.29**'dan  $\varphi(\nabla_\xi \xi) = \nabla_\xi \xi$  olmak zorunda değildir. Bu durumda (2) koşulu sağlanmaz.  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $Y, Z$  vektör alanları için  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  olarak alındığında  $\mathbb{G}_{12}$  sınıfı tanımından (3.23) eşitliği

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_A \bar{F})(U, V) &= e^{2\sigma} \{\beta(X, Y, Z) + \eta(Y)\beta(X, \xi, Z) - \eta(Z)\beta(X, \xi, Y)\} \\
&= e^{2\sigma} \{\beta(\xi, Y, Z) + \eta(Y)\beta(\xi, \xi, Z) - \eta(Z)\beta(\xi, \xi, Y)\} \\
&= 2e^{2\sigma} \beta(\xi, Y, Z)
\end{aligned} \tag{3.148}$$

olur.  $\mathbb{G}_{12}$  sınıfında  $\theta^*(\xi) = 0$  ve keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta(X) = 0$  olduğundan (3.25) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(U) = 2\eta(Y) - \frac{1}{n}\beta(\xi, \xi, Y), \quad \bar{\Theta}(V) = 2\eta(Z) - \frac{1}{n}\beta(\xi, \xi, Z) \tag{3.149}$$

elde edilir. (3.27) ve (3.149) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\bar{\Theta}(U)\bar{h}(A, V) - \bar{\Theta}(V)\bar{h}(A, U) &= 2e^{2\sigma}\eta(Z) \left(2\eta(Y) - \frac{1}{n}\beta(\xi, \xi, Y)\right) \\
&\quad - 2e^{2\sigma}\eta(Y) \left(2\eta(Z) - \frac{1}{n}\beta(\xi, \xi, Z)\right) \\
&= \frac{2}{n}e^{2\sigma} (\eta(Y)\beta(\xi, \xi, Z) - \eta(Z)\beta(\xi, \xi, Y)) \\
&= \frac{2}{n}e^{2\sigma} \beta(\xi, Y, Z)
\end{aligned} \tag{3.150}$$

olur. (3.148) ve (3.150) eşitliklerinin sağlanması için  $n = 1$  ya da  $\beta(\xi, Y, Z) = 0$  olmalıdır. Ancak  $n$ , 1'den büyük pozitif tam sayıdır ve  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$ ,  $\varphi(Y) =$

$-\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $Y, Z \in \chi(M)$  için  $\beta(\xi, Y, Z) = 0$  olmak zorunda değildir (**Örnek 3.29**'a bakınız). Dolayısıyla **(3)** koşulu sağlanmaz.  $\mathbb{G}_{12}$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan ve (3.28) eşitliğinde  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{\bar{A}_i} \bar{F}) (\bar{U}_i, U) = -2n$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla **(4)** koşulu sağlanmamış olur.

$\varphi(X) = -\varphi^2(X)$ ,  $\varphi(Y) = -\varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = -\varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan herhangi  $X, Y, Z$  vektör alanları için (3.146) ve (3.147) eşitliğinden (3.20) eşitliği

$$\begin{aligned} S_{UVW} (\bar{\nabla}_U \bar{F}) (V, W) &= e^{2\sigma} \{ -\eta(X)\beta(Y, \xi, Z) + \eta(X)\beta(Z, \xi, Y) \\ &\quad -\eta(Y)\beta(Z, \xi, X) + \eta(Y)\beta(X, \xi, Z) \\ &\quad -\eta(Z)\beta(X, \xi, Y) + \eta(Z)\beta(Y, \xi, X) \} \\ &= e^{2\sigma} \{ -\eta(X)\eta(Y)\beta(\xi, \xi, Z) + \eta(X)\eta(Z)\beta(\xi, \xi, Y) \\ &\quad -\eta(Y)\eta(Z)\beta(\xi, \xi, X) + \eta(Y)\eta(X)\beta(\xi, \xi, Z) \\ &\quad -\eta(Z)\eta(X)\beta(\xi, \xi, Y) + \eta(Z)\eta(Y)\beta(\xi, \xi, X) \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda **(5)** koşulu sağlanır. (3.22) eşitliğinde  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alındığında

$$(\bar{\nabla}_U \bar{J}) (U) = ((\nabla_X \varphi) (X) - \eta(X) \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta) (X) \frac{d}{dt}) = (-\varphi(\nabla_\xi \xi) - \nabla_\xi \xi, 0)$$

elde edilir.  $\varphi(\nabla_\xi \xi) = -\nabla_\xi \xi$  olmadığı **Örnek 3.29**'da gösterildiğinden **(6)** koşulu sağlanmaz.  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $Y, Z$  vektör alanları için  $U = (\xi, -\frac{d}{dt})$  alınırsa  $\mathbb{G}_{12}$  sınıfının tanımlama bağıntısından (3.24) eşitliği

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_U \bar{F}) (A, B) &= e^{2\sigma} \{ \beta(X, Y, Z) + \eta(Y)\beta(X, \xi, Z) - \eta(Z)\beta(X, \xi, Y) \} \\ &= e^{2\sigma} \{ \beta(\xi, Y, Z) + \eta(Y)\beta(\xi, \xi, Z) - \eta(Z)\beta(\xi, \xi, Y) \} \\ &= 2e^{2\sigma} \beta(\xi, Y, Z) \end{aligned} \tag{3.151}$$

olur.  $\mathbb{G}_{12}$  sınıfında  $\theta^*(\xi) = 0$  ve keyfi  $X \in \chi(M)$  için  $\theta(X) = 0$  olduğundan (3.25) eşitliğinden

$$\bar{\Theta}(A) = \frac{1}{n} \beta(\xi, \xi, Y) - 2\eta(Y), \quad \bar{\Theta}(B) = \frac{1}{n} \beta(\xi, \xi, Z) - 2\eta(Z) \tag{3.152}$$

elde edilir. (3.27) ve (3.152) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\bar{\Theta}(B)\bar{h}(U, A) - \bar{\Theta}(A)\bar{h}(U, B) &= 2e^{2\sigma}\eta(Y) \left( \frac{1}{n}\beta(\xi, \xi, Z) - 2\eta(Z) \right) \\
&\quad - 2e^{2\sigma}\eta(Z) \left( \frac{1}{n}\beta(\xi, \xi, Y) - 2\eta(Y) \right) \\
&= \frac{2}{n}e^{2\sigma} (\eta(Y)\beta(\xi, \xi, Z) - \eta(Z)\beta(\xi, \xi, Y)) \\
&= \frac{2}{n}e^{2\sigma}\beta(\xi, Y, Z) \tag{3.153}
\end{aligned}$$

olur. (3.151) ve (3.153) eşitliklerinin sağlanması için  $n = 1$  ya da  $\beta(\xi, Y, Z) = 0$  olmalıdır. Ancak  $n$ , 1'den büyük pozitif tam sayı ve  $\mathbb{G}_{11}$  sınıfında  $\varphi(Y) = \varphi^2(Y)$  ve  $\varphi(Z) = \varphi^2(Z)$  eşitliğini sağlayan keyfi  $Y, Z \in \chi(M)$  için  $\beta(\xi, Y, Z) = 0$  olmak zorunda değildir (**Örnek 3.29** bakınız). Böylece **(7)** koşulu sağlanmaz.  $\mathbb{G}_{12}$  sınıfında  $\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w(\xi) = 0$  olduğundan ve (3.29) eşitliğinde  $A = (\xi, \frac{d}{dt})$  alındığında

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\bar{\nabla}_{U_i} \bar{F}) (\bar{A}_i, A) = -2n$$

olur ve **(8)** koşulu sağlanmaz.

Sonuç olarak  $\mathbb{G}_{12}$  sınıfından olan  $M$  manifoldu **(1)** ve **(5)** dışındaki koşulları sağlamadığından  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu  $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W_6 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 3.29.**  $G$ , 5 boyutlu bir Lie grup, bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}$  ve  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  kümesi  $\mathfrak{g}$  Lie cebrinin left-invariant ortanormal bir çatı alanı olsun. Lie cebrinin sıfırdan farklı braketi

$$[e_1, e_5] = -e_1$$

olsun.  $\xi = e_1$ ,

$$\varphi(e_2) = e_5, \quad \varphi(e_3) = e_4, \quad \varphi(e_4) = e_3, \quad \varphi(e_5) = e_2$$

ve

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = 1,$$

$$g(e_4, e_4) = g(e_5, e_5) = -1, \quad (g(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j)$$

olarak alındığında  $(\mathfrak{g}, \varphi, \xi, \eta, g)$  5-boyutlu left-invariant hemen hemen parakontak

metrik bir manifold olur.  $g$  metriğine göre sıfırdan farklı kovaryant türevler

$$\nabla_{e_1} e_1 = -e_5, \quad \nabla_{e_1} e_5 = -e_1$$

olarak hesaplanır.  $\beta$ 'nın sıfırdan farklı bileşeni sadece  $\beta(e_1, e_1, e_2) = 1$ 'dir. Buradan  $\mathfrak{g}$  Lie cebri üzerindeki  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen parakontak yapı  $\mathbb{G}_{12}$  sınıfından olur.

Ayrıca

$$\varphi(\nabla_\xi \xi) = \varphi(\nabla_{e_1} e_1) = -e_2, \quad \nabla_\xi \xi = -e_5$$

ve  $Y = e_1 + e_2 - e_5$  ve  $Z = e_1 + e_3 - e_4$  alındığında  $\varphi^2(Y) = -\varphi(Y)$  ve  $\varphi^2(Z) = -\varphi(Z)$  eşitlikleri sağlanır ve bu vektör alanları için

$$\beta(\xi, Y, Z) = \beta(e_1, e_1 + e_2 - e_5, e_1 + e_3 - e_4) = -1$$

olur. Eğer  $Y = e_1 + e_2 + e_5$  ve  $Z = e_1 + e_3 + e_4$  alındığında  $\varphi^2(Y) = \varphi(Y)$  ve  $\varphi^2(Z) = \varphi(Z)$  eşitlikleri sağlanır ve bu vektör alanları için

$$\beta(\xi, Y, Z) = \beta(e_1, e_1 + e_2 + e_5, e_1 + e_3 + e_4) = -1$$

olur.

**Teorem 3.28**'den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W_6 \oplus W_7 \oplus W_8$  sınıfından olur.

Yukarıda verilen 12 tane teoremin sonucu olarak, hemen hemen parakontak metrik  $M$  manifoldu ile hemen hemen parahermitian  $M \times \mathbb{R}$  manifoldunun ait olduğu sınıflar arasındaki ilişkiler aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

**Tablo 3.1.**  $M$  ve  $M \times \mathbb{R}$  manifoldlarının sınıfları arasındaki ilişkiler

| $M$ 'nin ait olduğu sınıf                  |               | $M \times \mathbb{R}$ 'nin ait olduğu sınıf                                        |
|--------------------------------------------|---------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{G}_1$                             | $\Rightarrow$ | $W_3 \oplus W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$                                             |
| $\mathbb{G}_1^1$                           | $\Rightarrow$ | $W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$                                                        |
| $\mathbb{G}_1^2$                           | $\Rightarrow$ | $W_3 \oplus W_4 \oplus W_8$                                                        |
| $\mathbb{G}_2$                             | $\Rightarrow$ | $W_3 \oplus W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$                                             |
| $\mathbb{G}_2^1$                           | $\Rightarrow$ | $W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$                                                        |
| $\mathbb{G}_2^2$                           | $\Rightarrow$ | $W_3 \oplus W_4 \oplus W_8$                                                        |
| $\mathbb{G}_3$                             | $\Rightarrow$ | $W_1 \oplus W_4 \oplus W_5 \oplus W_8$                                             |
| $\mathbb{G}_3^1$                           | $\Rightarrow$ | $W_4 \oplus W_5 \oplus W_8$                                                        |
| $\mathbb{G}_3^2$                           | $\Rightarrow$ | $W_1 \oplus W_4 \oplus W_8$                                                        |
| $\mathbb{G}_4$                             | $\Rightarrow$ | $W_2 \oplus W_4 \oplus W_6 \oplus W_8$                                             |
| $\mathbb{G}_4^1$                           | $\Rightarrow$ | $W_4 \oplus W_6 \oplus W_8$                                                        |
| $\mathbb{G}_4^2$                           | $\Rightarrow$ | $W_2 \oplus W_4 \oplus W_8$                                                        |
| $\mathbb{G}_5(\theta(\xi) \neq 2n)$        | $\Rightarrow$ | $W_4 \oplus W_8$                                                                   |
| $\mathbb{G}_5$                             | $\Rightarrow$ | $\{0\}$                                                                            |
| $\mathbb{G}_6(\theta^*(\xi) \neq \mp 2n)$  | $\Rightarrow$ | $W_4 \oplus W_8$                                                                   |
| $\bar{\mathbb{G}}_6(\theta^*(\xi) = -2n)$  | $\Rightarrow$ | $W_8$                                                                              |
| $\tilde{\mathbb{G}}_6(\theta^*(\xi) = 2n)$ | $\Rightarrow$ | $W_4$                                                                              |
| $\mathbb{G}_7$                             | $\Rightarrow$ | $W_3 \oplus W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$                                             |
| $\mathbb{G}_8$                             | $\Rightarrow$ | $W_3 \oplus W_4 \oplus W_7 \oplus W_8$                                             |
| $\mathbb{G}_9$                             | $\Rightarrow$ | $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4 \oplus W_5 \oplus W_6 \oplus W_8$                       |
| $\mathbb{G}_{10}$                          | $\Rightarrow$ | $W_2 \oplus W_4 \oplus W_6 \oplus W_8$                                             |
| $\mathbb{G}_{11}$                          | $\Rightarrow$ | $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W_5 \oplus W_6 \oplus W_7 \oplus W_8$ |
| $\mathbb{G}_{12}$                          | $\Rightarrow$ | $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W_6 \oplus W_7 \oplus W_8$                       |

#### 4. HEMEN HEMEN PARAHERMITIAN YAPILARDAN ELDE EDİLEN HEMEN HEMEN PARAKONTAK YAPILAR

##### 4.1. Hemen Hemen Parahermitian Metrik Manifoldlardan Elde Edilen Hemen Hemen Parakontak Metrik Manifoldlar

$(N, J, h)$ ,  $2n$ -boyutlu diferensiyellenebilir hemen hemen parahermitian metrik bir manifold olsun.  $N$  manifoldu üzerindeki hemen hemen parahermitian metrik yapı kullanılarak  $(2n + 1)$ -boyutlu  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerinde hemen hemen parakontak metrik bir yapı inşa edilebilir.  $a, b \in C^\infty(N \times \mathbb{R})$  fonksiyonları olmak üzere;  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki herhangi  $(X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})$  vektör alanları için

$$\tilde{\varphi} : \chi(N \times \mathbb{R}) \rightarrow \chi(N \times \mathbb{R}), \quad \tilde{\varphi} \left( X, a \frac{d}{dt} \right) = (J(X), 0),$$

$$\tilde{g} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) := h(X, Y) + ab,$$

$$\tilde{\xi} = \left( 0, \frac{d}{dt} \right)$$

ve

$$\tilde{\eta} \left( X, a \frac{d}{dt} \right) = \tilde{g} \left( \left( 0, \frac{d}{dt} \right), \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) = a$$

olarak alındığında  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  dördlüsü  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerinde hemen hemen parakontak metrik bir yapı olur.  $N \times \mathbb{R}$  üzerindeki yapı

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\varphi}(X, a \frac{d}{dt}), \tilde{\varphi}(Y, b \frac{d}{dt})) &= \tilde{g}((J(X), 0), (J(Y), 0)) \\ &= h(J(X), J(Y)) \\ &= -h(X, Y) \\ &= -h(X, Y) - ab + ab \\ &= -\tilde{g}((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})) + \tilde{\eta}(X, a \frac{d}{dt}) \tilde{\eta}(Y, b \frac{d}{dt}) \end{aligned}$$

ve

$$\tilde{\varphi}(\tilde{\xi}) = \tilde{\varphi} \left( 0, \frac{d}{dt} \right) = (J(0), 0) = (0, 0)$$



koşullarını sağlar. Ayrıca  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldunun öğeleri kullanılarak  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki  $\tilde{\Phi}$  temel 2-formu

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) &= \tilde{g} \left( \tilde{\varphi} \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) \\ &= \tilde{g} \left( (J(X), 0), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) \\ &= h(J(X), Y) \\ &= F(X, Y)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Keyfi  $X, Y, Z \in \chi(N)$  ve  $a, b, c \in C^\infty(N \times \mathbb{R})$  fonksiyonları için  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki  $\tilde{g}$  metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi Koszul formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}& 2\tilde{g} \left( \tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\ &= \left( X, a \frac{d}{dt} \right) [\tilde{g}((Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt}))] + (Y, b \frac{d}{dt}) [\tilde{g}((X, a \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt}))] \\ &\quad - (Z, c \frac{d}{dt}) [\tilde{g}((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}))] + \tilde{g}([ (X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}) ], (Z, c \frac{d}{dt})) \\ &\quad + \tilde{g}([ (Z, c \frac{d}{dt}), (X, a \frac{d}{dt}) ], (Y, b \frac{d}{dt})) + \tilde{g}([ (Z, c \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}) ], (X, a \frac{d}{dt})) \\ &= \left( X, a \frac{d}{dt} \right) [h(Y, Z) + bc] + (Y, b \frac{d}{dt}) [g(X, Z) + ac] - (Z, c \frac{d}{dt}) [h(X, Y) + ab] \\ &\quad + h([X, Y], Z) + c(X[b] - Y[a] + a \frac{db}{dt} - b \frac{da}{dt}) \\ &\quad + h([Z, X], Y) + b(Z[a] - X[c] + c \frac{da}{dt} - a \frac{dc}{dt}) \\ &\quad + h([Z, Y], X) + a(Z[b] - Y[c] + c \frac{db}{dt} - b \frac{dc}{dt}) \\ &= 2(h(\nabla_X Y, Z)) + 2cX[b] + 2ac \frac{db}{dt} \\ &= 2h(\nabla_X Y, Z) + 2c(X[b] + a \frac{db}{dt}) \\ &= 2\tilde{g}((\nabla_X Y, (X[b] + a \frac{db}{dt}) \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt}))\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) = \left( \nabla_X Y, \left( X[b] + a \frac{db}{dt} \right) \frac{d}{dt} \right) \quad (4.1)$$

olarak elde edilir.  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki  $\tilde{\varphi}$  endomorfizmin kovaryant türevi (4.1) eşitliğinden faydalanılarak hesaplandığında

$$\begin{aligned}\left( \tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{\varphi} \right) \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) &= \tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{\varphi} \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) - \tilde{\varphi} \left( \tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) \\ &= \tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} (J(Y), 0) - \tilde{\varphi} \left( \nabla_X Y, \left( X[b] + a \frac{db}{dt} \right) \frac{d}{dt} \right) \\ &= (\nabla_X J(Y), 0) - (J(\nabla_X Y), 0) \\ &= ((\nabla_X J)(Y), 0)\end{aligned} \quad (4.2)$$

olur. (4.2) eşitliğinden  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki  $\tilde{\beta}$  tensör alanı

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) &= \tilde{g} \left( \left( \tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{\varphi} \right) \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= \tilde{g} \left( ((\nabla_X J)(Y), 0), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= h((\nabla_X J)(Y), Z) \\
&= \alpha(X, Y, Z)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olarak bulunur. (4.3) eşitliğinden  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki  $\tilde{\Phi}$  temel 2- formun dış türevi

$$\begin{aligned}
\tilde{d}\tilde{\Phi} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) &= \tilde{\beta} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&\quad + \tilde{\beta} \left( \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right), \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&\quad + \tilde{\beta} \left( \left( Z, c \frac{d}{dt} \right), \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= \alpha(X, Y, Z) + \alpha(Y, Z, X) + \alpha(Z, X, Y) \\
&= dF(X, Y, Z)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir.

$\{A_1, \dots, A_n, U_1, \dots, U_n\}$  kümesi  $N$  manifoldunun bir yerel ayarlanmış çatı alanı olsun. Bu durumda

$$\tilde{e}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_i + U_i, 0), \quad \tilde{\varphi}(\tilde{e}_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_i - U_i, 0), \quad \tilde{\xi} = \left( 0, \frac{d}{dt} \right)$$

olmak üzere;

$$\left\{ \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n, \tilde{\varphi}(\tilde{e}_1), \dots, \tilde{\varphi}(\tilde{e}_n), \tilde{\xi} \right\}$$

kümesi  $\tilde{g}$  metriğine göre  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldunun bir ortonormal çatı alanı olur.  $N$  manifoldu üzerindeki  $F$  temel 2-formun kotürevi kullanılarak  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki keyfi  $(X, a \frac{d}{dt})$  vektör alanı için  $\tilde{\theta}$ ,  $\tilde{\theta}^*$  ve  $\tilde{w}$  formları

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta} \left( X, a \frac{d}{dt} \right) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \tilde{\beta} \left( \tilde{e}_i, \tilde{e}_i, \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) - \tilde{\beta} \left( \tilde{\varphi}(\tilde{e}_i), \tilde{\varphi}(\tilde{e}_i), \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{ \alpha(A_i + U_i, A_i + U_i, X) - \alpha(A_i - U_i, A_i - U_i, X) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \{ \alpha(A_i, U_i, X) + \alpha(A_i, U_i, X) \} \\
&= -\delta F(X),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^* \left( X, a \frac{d}{dt} \right) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \tilde{\beta} \left( \tilde{e}_i, \tilde{\varphi}(\tilde{e}_i), \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) - \tilde{\beta} \left( \tilde{\varphi}(\tilde{e}_i), \tilde{e}_i, \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{ \alpha(A_i + U_i, A_i - U_i, X) - \alpha(A_i - U_i, A_i + U_i, X) \} \\
&= \sum_{i=1}^n \{ -\alpha(A_i, U_i, X) + \alpha(U_i, A_i, X) \} \\
&= \sum_{i=1}^n \{ \alpha(A_i, U_i, J(X)) + \alpha(U_i, A_i, J(X)) \} \\
&= -\delta F(J(X))
\end{aligned} \tag{4.6}$$

ve

$$\tilde{w} \left( X, a \frac{d}{dt} \right) = \tilde{\beta} \left( \tilde{\xi}, \tilde{\xi}, \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) = 0 \tag{4.7}$$

olur.

Çalışmanın bundan sonrasında kullanılacak olan Riemannian, Ricci ve skaler eğriliklerinin tanımı aşağıda verilmiştir.

**Tanım 4.1.**  $(M^n, g)$ , diferansiyellenebilir bir semi-Riemannian manifold ve  $g$  metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi  $\nabla$  olsun. Herhangi  $X, Y, Z$  vektör alanları için  $X$  ve  $Y$  vektör alanlarının Lie-braketi  $[X, Y]$  olmak üzere;  $R : \chi(M)^3 \longrightarrow \chi(M)$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \tag{4.8}$$

olarak tanımlanan dönüşüme  $M$  manifoldunun **Riemannian eğriliği** denir [3].

**Tanım 4.2.**  $(M^n, g)$ , diferansiyellenebilir semi-Riemannian bir manifold olsun.  $\{e_i, \dots, e_n\}$ , ( $i \neq j$  iken  $g(e_i, e_j) = 0$ ,  $i = j$  iken  $g(e_i, e_i) = \varepsilon_i = \pm 1$ ) kümesi  $M$  üzerinde bir ortonormal çatı alanı olsun. Bu durumda **Ricci eğriliği**

$$Q(X, Y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(R(e_i, X)Y, e_i) \tag{4.9}$$

olarak tanımlıdır [3].

**Tanım 4.3.**  $(M^n, g)$ , diferansiyellenebilir semi-Riemannian bir manifold olsun.  $\{e_i, \dots, e_n\}$ ,  $M$  üzerinde bir ortonormal çatı alanı olmak üzere;  $M$  manifoldunun

skaler eğriliği

$$s = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i Q(e_i, e_i) \quad (4.10)$$

olarak tanımlıdır [3].

Keyfi  $(X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt})$  vektör alanları için  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldunun Riemannian eğriliği (4.1) eşitliği kullanılarak hesaplandığında

$$\begin{aligned} \tilde{R} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) &= \tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \left( \tilde{\nabla}_{(Y, b \frac{d}{dt})} \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\ &\quad - \tilde{\nabla}_{(Y, b \frac{d}{dt})} \left( \tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\ &\quad - \tilde{\nabla}_{[(X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})]} \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \\ &= (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, 0) \\ &= (R(X, Y)Z, 0) \end{aligned} \quad (4.11)$$

bulunur. (4.11) eşitliğinden Ricci eğriliği

$$\begin{aligned} \tilde{Q} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) &= \tilde{g} \left( \left( \tilde{R} \left( \tilde{e}_i, \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right), \tilde{e}_i \right) \\ &\quad - \tilde{g} \left( \left( \tilde{R} \left( \tilde{\varphi}(\tilde{e}_i), \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right), \tilde{\varphi}(\tilde{e}_i) \right) \\ &\quad + \tilde{g} \left( \left( \tilde{R} \left( \tilde{\xi}, \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right), \tilde{\xi} \right) \\ &= h(R(e_i, Y)Z, e_i) - h(R(J(e_i), Y)Z, J(e_i)) \\ &= Q(X, Y) \end{aligned} \quad (4.12)$$

olur. Ayrıca  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldunun skaler eğriliği (4.12) eşitliği kullanılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \tilde{Q}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) - \tilde{Q}(\tilde{\varphi}(\tilde{e}_i), \tilde{\varphi}(\tilde{e}_i)) \right\} + \tilde{Q}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{ Q(A_i + U_i, A_i + U_i) - Q(A_i - U_i, A_i - U_i) \} \\ &= \sum_{i=1}^n \{ Q(A_i, U_i) - Q(J(A_i), J(U_i)) \} \\ &= s \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir.

Bundan sonraki adımlarda ifadelerin kısalığı açısından  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu

üzerindeki vektör alanları  $(X, a \frac{d}{dt}) = \tilde{X}$ ,  $(Y, b \frac{d}{dt}) = \tilde{Y}$  ve  $(Z, c \frac{d}{dt}) = \tilde{Z}$  şeklinde ifade edilmiştir.

**Tanım 4.4.**  $(M, g)$  bir Riemannian ya da semi-Riemannian manifoldunun Ricci eğriliği  $Q$  ile gösterilmek üzere

$$Q = \lambda g$$

eşitliğini sağlayan  $\lambda$  skaleri varsa  $(M, g)$  manifolduna  $\lambda$  skaleri ile bir **Einstein manifold** denir [8].

**Tanım 4.5.**  $(M, g)$  bir Riemannian ya da semi-Riemannian manifoldunun Ricci eğriliği  $Q$  ve  $V$  vektör alanı boyunca Lie türevi  $\mathcal{L}_V$  ile gösterilmek üzere

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_V g + Q + \lambda g = 0$$

eşitliğini sağlayan  $V$  vektör alanı ve  $\lambda$  skaleri varsa  $(M, g)$  manifolduna  $V$  vektör alanı ve  $\lambda$  skaleri ile bir **Ricci soliton** denir [9, 10].

**Tanım 4.6.**  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen parakontak metrik manifold olsun.  $M$  manifoldunun Ricci eğriliği  $Q$  ve  $V$  vektör alanı boyunca Lie türevi  $\mathcal{L}_V$  ile gösterilmek üzere

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_V g + Q + \lambda g + \mu(\eta \otimes \eta) = 0$$

eşitliğini sağlayan  $V$  vektör alanı ve  $(\lambda, \mu)$  skalerleri varsa  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen parakontak metrik manifolduna  $V$  vektör alanı ve  $(\lambda, \mu)$  skalerleri ile bir  **$\eta$ -Ricci soliton** denir [9–11].

**Teorem 4.7.**  $N$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $\lambda$  skaleri ile Einsteinir ancak ve ancak  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $(\tilde{\lambda} = -\lambda, \tilde{\mu} = \lambda)$  skalerleri ile  $\eta$ -Ricci solitondur.

*Kanıt.*  $N$  hemen hemen parahermitian manifoldu Einstein olsun. Bu durumda her  $X, Y \in \chi(N)$  için  $Q(X, Y) = \lambda h(X, Y)$  olacak şekilde  $\lambda$  sabiti vardır.  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki vektör alanı  $\tilde{V} = \tilde{\xi} = (0, \frac{d}{dt})$  ve skalerler  $(\tilde{\lambda} = -\lambda, \tilde{\mu} = \lambda)$  olarak alındığında (4.1) ve (4.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\tilde{V}} \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \tilde{Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \tilde{\lambda} \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \tilde{\mu}(\tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta})(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V}, \tilde{Y}) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{V}, \tilde{X}) \right\} + Q(X, Y) - \lambda(h(X, Y) + ab) + \lambda ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{g} \left( \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{\xi}, \tilde{Y} \right) + \tilde{g} \left( \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{\xi}, \tilde{X} \right) \right\} + Q(X, Y) - \lambda h(X, Y) \\
&= Q(X, Y) - \lambda h(X, Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\tilde{V} = \tilde{\xi} = (0, \frac{d}{dt})$  vektör alanı ve  $(\tilde{\lambda} = -\lambda, \tilde{\mu} = \lambda)$  skalerleri ile  $\eta$ -Ricci soliton olur.

Tersine,  $N \times \mathbb{R}$  çarpı manifoldu  $\tilde{V} = \tilde{\xi} = (0, \frac{d}{dt})$  vektör alanı ve  $(\tilde{\lambda} = -\lambda, \tilde{\mu} = \lambda)$  skalerleri ile bir  $\eta$ -Ricci soliton olsun.  $\eta$ -Ricci soliton tanımından ve (4.1), (4.12) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\tilde{V}} \tilde{g} \left( \tilde{X}, \tilde{Y} \right) + \tilde{Q} \left( \tilde{X}, \tilde{Y} \right) + \tilde{\lambda} \tilde{g} \left( \tilde{X}, \tilde{Y} \right) + \tilde{\mu} (\tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta}) \left( \tilde{X}, \tilde{Y} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{g} \left( \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V}, \tilde{Y} \right) + \tilde{g} \left( \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{V}, \tilde{X} \right) \right\} + Q(X, Y) - \lambda (h(X, Y) + ab) + \lambda ab \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{g} \left( \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{\xi}, \tilde{Y} \right) + \tilde{g} \left( \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{\xi}, \tilde{X} \right) \right\} + Q(X, Y) - \lambda h(X, Y) \\
&= Q(X, Y) - \lambda h(X, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $Q(X, Y) = \lambda h(X, Y)$  olur. Dolayısıyla  $N$  manifoldu  $\lambda$  sabiti ile Einsteindir.  $\square$

**Örnek 4.8.**  $G$ , 6 boyutlu Lie grup, bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}$  ve  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  kümesi  $\mathfrak{g}$  Lie cebrinin bir çatı alanı olsun. Lie cebrinin sıfırdan farklı braketleri

$$[e_1, e_4] = e_1 + e_4 \quad [e_2, e_5] = e_2 + e_5, \quad [e_3, e_6] = e_3 + e_6$$

olsun [6].  $G$  Lie grubu üzerindeki left-invariant hemen hemen parahermitian yapı

$$J(e_1) = e_1, \quad J(e_2) = e_2, \quad J(e_3) = e_3, \quad J(e_4) = -e_4, \quad J(e_5) = -e_5, \quad J(e_6) = -e_6$$

ve left-invariant  $h$  metriği aşağıdaki gibi olsun.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Bu durumda  $(J, h)$  bir left-invariant hemen hemen parahermitian yapı olur. Koszul

formülü kullanılarak sıfırdan farklı Levi-Civita kovaryant türevler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1}e_1 &= -e_1, & \nabla_{e_1}e_4 &= e_4, & \nabla_{e_2}e_4 &= -e_2, & \nabla_{e_2}e_5 &= e_5, \\ \nabla_{e_3}e_3 &= -e_3, & \nabla_{e_3}e_6 &= e_6, & \nabla_{e_4}e_1 &= -e_1, & \nabla_{e_4}e_4 &= e_4, \\ \nabla_{e_5}e_2 &= -e_2, & \nabla_{e_5}e_5 &= e_5, & \nabla_{e_6}e_3 &= -e_3, & \nabla_{e_6}e_6 &= e_6.\end{aligned}$$

Gerekli hesaplamalar yapıldığında bu  $G$  Lie grubunun Ricci eğriliği  $Q(x, y) = -2g(x, y)$  ve skaler eğriliği  $-12$  olarak bulunur. **Teorem 4.7'**den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant hemen hemen parakontak metrik yapı  $\tilde{V} = \tilde{\xi} = (0, \frac{d}{dt})$  vektör alanı ve  $(2, -2)$  skaleri ile  $\eta$ -Ricci soliton olur.

**Teorem 4.9.**  $N$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $V$  vektör alanı ve  $\lambda$  skaleri ile Ricci solitondur ancak ve ancak  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\tilde{V} = (V, 0)$  vektör alanı ve  $(\tilde{\lambda} = \lambda, \tilde{\mu} = -\lambda)$  skalerleri ile  $\eta$ -Ricci solitondur. *Kanıt.*  $N$  hemen hemen parahermitian manifoldu Ricci soliton olsun. Bu durumda her  $X, Y \in \chi(N)$  için  $\frac{1}{2}\mathcal{L}_V h(X, Y) + Q(X, Y) + \lambda h(X, Y) = 0$  olacak şekilde  $V$  vektör alanı  $\lambda$  sabiti vardır.  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki vektör alanı  $\tilde{V} = (V, 0)$  ve skalerler  $(\tilde{\lambda} = \lambda, \tilde{\mu} = -\lambda)$  olarak alındığında (4.1) ve (4.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\tilde{V}}\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \tilde{Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \tilde{\lambda}\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \tilde{\mu}(\tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta})(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{V}, \tilde{Y}) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{V}, \tilde{X})\right\} + Q(X, Y) + \lambda(h(X, Y) + ab) - \lambda ab \\ &= \frac{1}{2}\{h(\nabla_X V, Y) + h(\nabla_Y V, X)\} + Q(X, Y) + \lambda h(X, Y) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_V h(X, Y) + Q(X, Y) + \lambda h(X, Y) \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\tilde{V} = (V, 0)$  vektör alanı ve  $(\tilde{\lambda} = \lambda, \tilde{\mu} = -\lambda)$  skalerleri ile  $\eta$ -Ricci soliton olur.

Tersine,  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\tilde{V} = (V, 0)$  vektör alanı ve  $(\tilde{\lambda} = \lambda, \tilde{\mu} = -\lambda)$  skalerleri ile bir  $\eta$ -Ricci soliton olsun.  $\eta$ -Ricci soliton tanımından ve (4.1), (4.12) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\tilde{V}}\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \tilde{Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \tilde{\lambda}\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \tilde{\mu}(\tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta})(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{V}, \tilde{Y}) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{V}, \tilde{X})\right\} + Q(X, Y) + \lambda(h(X, Y) + ab) - \lambda ab \\ &= \frac{1}{2}\{h(\nabla_X V, Y) + h(\nabla_Y V, X)\} + Q(X, Y) + \lambda h(X, Y) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_V h(X, Y) + Q(X, Y) + \lambda h(X, Y)\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikten  $\frac{1}{2}\mathcal{L}_V h(X, Y) + Q(X, Y) + \lambda h(X, Y) = 0$  elde edilir. Dolayısıyla  $N$  manifoldu  $V$  vektör alanı  $\lambda$  sabiti ile Ricci solitondur.  $\square$

**Tanım 4.10.**  $(M, g)$  bir Riemannian ya da semi-Riemannian manifoldunun skaler eğriliği  $s$  ve  $V$  vektör alanı boyunca Lie türevi  $\mathcal{L}_V$  ile gösterilmek üzere

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_V g = (s - \lambda)g$$

eşitliğini sağlayan  $V$  vektör alanı ve  $\lambda$  skaleri varsa  $(M, g)$  manifolduna  $V$  vektör alanı ve  $\lambda$  skaleri ile bir **Yamabe soliton** denir [12].

**Tanım 4.11.**  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen parakontak metrik manifold olsun.  $M$  manifoldunun skaler eğriliği  $s$  ve  $V$  vektör alanı boyunca Lie türevi  $\mathcal{L}_V$  ile gösterilmek üzere

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_V g = (s - \lambda)g + \mu(\eta \otimes \eta)$$

eşitliğini sağlayan  $V$  vektör alanı,  $\lambda$  skaleri ve  $\mu \in C^\infty(M)$  fonksiyonu varsa  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen parakontak metrik manifolduna  $V$  vektör alanı,  $\lambda$  skaleri ve  $\mu \in C^\infty(M)$  fonksiyonu ile bir **quasi Yamabe soliton** denir [13].

**Teorem 4.12.**  $N$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $V$  vektör alanı,  $s$  skaler eğriliği ve  $\lambda$  skaleri ile Yamabe solitondur ancak ve ancak  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\tilde{V} = (V, 0)$  vektör alanı,  $\tilde{s} = s$  skaler eğriliği,  $\tilde{\lambda} = \lambda$  skaleri ve  $\tilde{\mu} = \lambda - s \in C^\infty(M)$  fonksiyonu ile quasi Yamabe solitondur.

*Kanıt.*  $N$  hemen hemen parahermitian manifoldu Yamabe soliton olsun. Bu durumda keyfi  $X, Y \in \chi(N)$  için  $\frac{1}{2}\mathcal{L}_V h(X, Y) = (s - \lambda)h(X, Y)$  olacak şekilde  $V$  vektör alanı,  $s$  skaler eğriliği ve  $\lambda$  sabiti vardır.  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki vektör alanı  $\tilde{V} = (V, 0)$ ,  $C^\infty$  fonksiyonu olarak  $\tilde{\mu} = \lambda - s$ , skaler eğrilik için  $\tilde{s} = s$  ve skaler  $\tilde{\lambda} = \lambda$  olarak alındığında (4.1) ve (4.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\tilde{V}}\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \frac{1}{2}\left\{\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{V}, \tilde{Y}) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{V}, \tilde{X})\right\} \\ &= \frac{1}{2}\{h(\nabla_X V, Y) + h(\nabla_Y V, X)\} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_V h(X, Y) \\ &= (s - \lambda)h(X, Y) \\ &= (\tilde{s} - \tilde{\lambda})h(X, Y) + (-\tilde{\mu} + \tilde{\mu})ab \\ &= (\tilde{s} - \tilde{\lambda})h(X, Y) + (s - \lambda + \tilde{\mu})ab \\ &= (\tilde{s} - \tilde{\lambda})h(X, Y) + (\tilde{s} - \tilde{\lambda} + \tilde{\mu})ab \\ &= (\tilde{s} - \tilde{\lambda})\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \tilde{\mu}(\tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta})(\tilde{X}, \tilde{Y}) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\tilde{V} = (V, 0)$



vektör alanı,  $\tilde{\mu} = (\lambda - s) \in C^\infty(M)$  fonksiyonu,  $\tilde{s} = s$  skaler eğriliği ve  $\tilde{\lambda} = \lambda$  skaleri ile quasi Yamabe soliton olur.

Tersine,  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\tilde{V} = (V, 0)$  vektör alanı,  $\tilde{\lambda} = \lambda$  skaleri ve  $\tilde{\mu} = \lambda - s \in C^\infty(M)$  fonksiyonu ile quasi Yamabe soliton ise

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\tilde{V}} \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) - (\tilde{s} - \tilde{\lambda}) \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) - \tilde{\mu}(\tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta})(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V}, \tilde{Y}) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{V}, \tilde{X}) \right\} - (s - \lambda)(h(X, Y) + ab) - (\lambda - s)ab \\ &= \frac{1}{2} \{h(\nabla_X V, Y) + h(\nabla_Y V, X)\} - (s - \lambda)h(X, Y) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_V h(X, Y) - (s - \lambda)h(X, Y) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan  $\frac{1}{2} \mathcal{L}_V h(X, Y) = (s - \lambda)h(X, Y)$  olur. Dolayısıyla  $N$  manifoldu  $V$  vektör alanı ve  $\lambda$  skaleri ile Yamabe soliton olur.  $\square$

$N$  manifolduna ait özellikler dikkate alındığında  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldunun ait olduğu bazı sınıfların sıfır olduğu aşağıda gösterilmiştir.  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki keyfi  $\tilde{X}$  vektör alanı için  $\tilde{\theta}(\tilde{X}) = -\delta F(X)$  ve  $\tilde{\theta}^*(\tilde{X}) = -\delta J(F(X))$  olduğundan  $\tilde{X} = \tilde{\xi} = (0, \frac{d}{dt})$  olarak alınırsa  $\tilde{\theta}(\tilde{\xi}) = \tilde{\theta}^*(\tilde{\xi}) = 0$  olur. Buradan

$$\tilde{\beta}^5(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$$

bulunur. Herhangi  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \chi(N \times \mathbb{R})$  için (4.3) eşitliğinden  $\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{\xi}) = 0$  olduğundan

$$\tilde{\beta}^7(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^8(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^9(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$$

ve

$$\tilde{\beta}^{10}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^{11}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^{12}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$$

olur. Ayrıca her  $\tilde{X} \in \chi(N \times \mathbb{R})$  için  $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{\xi} = 0$  olduğundan  $\tilde{\xi} = (0, \frac{d}{dt})$  vektör alanı  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu üzerinde paraleldir.  $\tilde{\xi}$  vektör alanı  $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_3$  ve  $\mathbb{G}_4$  sınıflarında da paralel olduğundan  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_1 \oplus \mathbb{G}_2 \oplus \mathbb{G}_3 \oplus \mathbb{G}_4$  sınıfına ya da bu sınıfın alt sınıflarına ait olabilir.  $N$  manifolduna ait özellikler dikkate alındığında  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldunun ait olduğu sınıflar olan  $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_3, \mathbb{G}_4$  sınıflarının izdüşümleri  $\tilde{\beta}^1, \tilde{\beta}^2, \tilde{\beta}^3, \tilde{\beta}^4$  ün eşitlikleri aşağıdaki gibidir.

$N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki keyfi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$  vektör alanları olmak üzere;  $(N, J, h)$  hemen hemen parahermitian manifoldu üzerindeki her  $A, B, C \in \mathcal{V}; U, V, W \in$

$\mathcal{H}$  için  $X = A + U$ ,  $Y = B + V$ ,  $Z = C + W$  olarak alındığında (4.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \frac{1}{2(n-1)} \left\{ \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varphi}(\tilde{Y}))\tilde{\theta}_{\tilde{\beta}}(\tilde{\varphi}(\tilde{Z})) - \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varphi}(\tilde{Z}))\tilde{\theta}_{\tilde{\beta}}(\tilde{\varphi}(\tilde{Y})) \right. \\
&\quad \left. - \tilde{g}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}(\tilde{Y}))\tilde{\theta}_{\tilde{\beta}}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{Z})) + \tilde{g}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}(\tilde{Z}))\tilde{\theta}_{\tilde{\beta}}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{Y})) \right\} \\
&= \frac{1}{2(n-1)} \{h(J(X), Y)\delta F(J(Z)) - h(J(X), Z)\delta F(J(Y)) \\
&\quad - h(X, Y)\delta F(Z) + h(X, Z)\delta F(Y)\} \\
&= \frac{1}{2(n-1)} \{h(A - U, B + V)\delta F(C - W) \\
&\quad - h(A - U, C + W)\delta F(B - V) \\
&\quad - h(A + U, B + V)\delta F(C + W) \\
&\quad + h(A + U, C + W)\delta F(B + V)\} \\
&= \frac{1}{(n-1)} \{-h(A, V)\delta F(W) - h(U, B)\delta F(C) \\
&\quad + h(A, W)\delta F(V) - h(U, C)\delta F(B)\} \\
&= \Theta(V)h(A, W) - \Theta(W)h(A, V) - \Theta(B)h(U, C) + \Theta(C)h(U, B)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Z})) - \tilde{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}(\tilde{Z})) \right\} \\
&\quad - \tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= \frac{1}{2} \{\alpha(X, Y, Z) - \alpha(J(X), Y, J(Z))\} - \tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= \frac{1}{2} \{\alpha(A + U, B + V, C + W) - \alpha(A - U, B + V, C - W)\} \\
&\quad - \tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) + \Theta(W)h(A, V) \\
&\quad - \Theta(V)h(A, W) + \Theta(B)h(U, C) - \Theta(C)h(U, B)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen bu eşitliklerden

$$\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) + \tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \frac{1}{6} \left\{ \tilde{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Z})) + \tilde{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}(\tilde{Z})) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{6} \left\{ \tilde{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Z}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{X})) + \tilde{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Z}), \tilde{\varphi}(\tilde{X})) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{6} \left\{ \tilde{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{Z}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y})) + \tilde{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{Z}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}(\tilde{Y})) \right\} \\
&= \frac{1}{6} \{\alpha(X, Y, Z) + \alpha(J(X), J(Y), Z)\} \\
&\quad + \frac{1}{6} \{\alpha(Y, Z, X) + \alpha(J(Y), J(Z), X)\} \\
&\quad + \frac{1}{6} \{\alpha(Z, X, Y) + \alpha(J(Z), J(X), Y)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \{ \alpha(A+U, B+V, C+W) + \alpha(A-U, B-V, C+W) \} \\
&\quad + \frac{1}{6} \{ \alpha(B+V, C+W, A+U) + \alpha(B-V, C-W, A+U) \} \\
&\quad + \frac{1}{6} \{ \alpha(C+W, A+U, B+V) + \alpha(C-W, A-U, B+V) \} \\
&= \frac{1}{3} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) \} \\
&\quad + \frac{1}{3} \{ \alpha(B, C, A) + \alpha(V, W, U) \} \\
&\quad + \frac{1}{3} \{ \alpha(C, A, B) + \alpha(W, U, V) \} \\
&= \frac{1}{3} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(B, C, A) + \alpha(C, A, B) \} \\
&\quad + \frac{1}{3} \{ \alpha(U, V, W) + \alpha(V, W, U) + \alpha(W, U, V) \} \\
&= S_{ABC} (\nabla_A F) (B, C) + S_{UVW} (\nabla_U F) (V, W)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Z})) + \tilde{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}(\tilde{Z})) \right\} \\
&\quad - \tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= \frac{1}{2} \{ \alpha(X, Y, Z) + \alpha(J(X), J(Y), Z) \} - \tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= \frac{1}{2} \{ \alpha(A+U, B+V, C+W) + \alpha(A-U, B-V, C+W) \} \\
&\quad - \tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) \\
&\quad - \frac{1}{3} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(B, C, A) + \alpha(C, A, B) \} \\
&\quad - \frac{1}{3} \{ \alpha(U, V, W) + \alpha(V, W, U) + \alpha(W, U, V) \} \\
&= \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) \\
&\quad - S_{ABC} (\nabla_A F) (B, C) - S_{UVW} (\nabla_U F) (V, W)
\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) + \tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W)$$

elde edilir. Sağlanan bu eşitlikler aşağıdaki teoremlerin ispatlarında kullanılmıştır.

**Teorem 4.13.**  $(N, J, h)$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $W_1$  sınıfına aittir ancak ve ancak  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_3^2$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_1$  sınıfından olsun. Bu durumda **(1)** koşulu dışındaki tüm koşullar sağlanır. Keyfi  $X \in \chi(N)$  için  $A \in \mathcal{V}$  ve  $U \in \mathcal{H}$  olmak üzere;  $X = A+U$

olarak alınırsa (4) ve (8) koşulundan

$$\begin{aligned}
\delta F(X) &= - \sum_{i=1}^n \{ \alpha(A_i, U_i, X) + \alpha(U_i, A_i, X) \} \\
&= - \sum_{i=1}^n \{ \alpha(A_i, U_i, A+U) + \alpha(U_i, A_i, A+U) \} \\
&= - \sum_{i=1}^n \{ \alpha(A_i, U_i, U) + \alpha(U_i, A_i, A) \} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.  $\tilde{\theta}(\tilde{X}) = -\delta F(X)$  olduğundan  $\tilde{\theta}(\tilde{X}) = 0$  olur. Buradan  $\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$  bulunur. Keyfi  $X \in \chi(N)$  için  $\delta F(X) = 0$  olduğundan  $X = A \in \mathcal{V}$  ve  $X = U \in \mathcal{H}$  için  $\delta F(A) = \delta F(U) = 0$  olur. Lee form tanımından  $\Theta(A) = \Theta(U) = 0$  elde edilir. Bu durumda (3) ve (7) koşullarından

$$\alpha(A, U, V) = \alpha(U, A, B) = 0 \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.14) eşitliğinden

$$\tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) - \underbrace{\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = 0$$

olarak bulunur. Diğer taraftan herhangi  $A, B, C \in \mathcal{V}$  için (2) koşulundan  $\alpha(A + B, A + B, C) = 0$  olduğundan

$$\alpha(A, B, C) = -\alpha(B, A, C) \quad (4.15)$$

ve keyfi  $U, V, W \in \mathcal{H}$  için (6) koşulundan  $\alpha(U + V, U + V, W) = 0$  olduğundan

$$\alpha(U, V, W) = -\alpha(V, U, W) \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.15) ve (4.16) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) \\
&\quad - \frac{1}{3} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(B, C, A) + \alpha(C, A, B) \} \\
&\quad - \frac{1}{3} \{ \alpha(U, V, W) + \alpha(V, W, U) + \alpha(W, U, V) \} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. (4.16) eşitliğinden ve (5) koşulundan

$$\alpha(U, V, W) = 0 \quad (4.17)$$

bulunur. Böylece (4.17) eşitliğinden

$$\tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) - \underbrace{\tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = \alpha(A, B, C)$$

ve

$$\tilde{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, B, C) - \alpha(U, V, W) - \underbrace{\tilde{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = \alpha(A, B, C)$$

olur. Buradan  $\mathbb{G}_3^2$  sınıfının tanımlama bağıntısı olan

$$\tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

sağlanmış olur. Dolayısıyla  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_3^2$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu  $\mathbb{G}_3^2$  sınıfından ise keyfi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \chi(N \times \mathbb{R})$  için

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.18)$$

ve

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.19)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.18) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{6} \{ \alpha(X, Y, Z) + \alpha(J(X), J(Y), Z) \} \\ &+ \frac{1}{6} \{ \alpha(Y, Z, X) + \alpha(J(Y), J(Z), X) \} \\ &+ \frac{1}{6} \{ \alpha(Z, X, Y) + \alpha(J(Z), J(X), Y) \} \end{aligned} \quad (4.20)$$

ve (4.19) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{6} \{ \alpha(J(X), Y, Z) + \alpha(X, Y, J(Z)) \} \\ &+ \frac{1}{6} \{ \alpha(Y, Z, J(X)) + \alpha(J(Y), Z, X) \} \\ &+ \frac{1}{6} \{ \alpha(Z, X, J(Y)) + \alpha(J(Z), X, Y) \} \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir.  $\{A_i, U_i\}$  bir yerel ayarlanmış çatı alanı olmak üzere; (4.20) eşitliğinde keyfi  $A \in \mathcal{V}$  için  $X = Y = A$  alındığında  $\alpha(A, A, Z) = 0$  ve  $X = U_i, Y = A_i, Z = A$  alındığında  $\alpha(U_i, A_i, A) = 0$ , keyfi  $U \in \mathcal{H}$  için  $X = Y = U$  alındığında  $\alpha(U, U, Z) = 0$  ve  $X = A_i, Y = U_i, Z = U$  alındığında  $\alpha(A_i, U_i, U) = 0$  bulunur. Dolayısıyla (2), (4), (6) ve (8) koşulları sağlanır. (4) koşulundan ve Lee form tanımından  $\Theta(U) = 0$  olduğundan keyfi  $A \in \mathcal{V}; U, V \in \mathcal{H}$  için (4.20) eşitliğinden  $\alpha(A, U, V) = 0$  olur ve (3)

koşulu sağlanır. Benzer şekilde (8) koşulundan ve Lee form tanımından  $\Theta(A) = 0$  ve (4.20) eşitliğinde her  $U \in \mathcal{H}$ ;  $A, B \in \mathcal{V}$  için  $\alpha(U, A, B) = 0$  olduğundan (7) koşulu sağlanmış olur. Ayrıca herhangi  $U, V, W \in \mathcal{H}$  için (4.20) eşitliğinden

$$\alpha(U, V, W) = \frac{1}{3} \{ \alpha(U, V, W) + \alpha(V, W, U) + \alpha(W, U, V) \}$$

ve (4.21) eşitliğinden

$$\alpha(U, V, W) = -\frac{1}{3} \{ \alpha(U, V, W) + \alpha(V, W, U) + \alpha(W, U, V) \}$$

elde edilir. Elde edilen bu iki eşitlikten  $\alpha(U, V, W) = 0$  olur. Dolayısıyla (5) koşulu sağlanır ve (1) koşulu dışındaki tüm koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_1$  sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 4.14.**  $G$ , 6-boyutlu bir Lie grup, bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}$  ve  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  kümesi  $\mathfrak{g}$  Lie cebrinin bir çatı alanı olsun.  $\mathfrak{g}$  Lie cebrinin sıfırdan farklı Lie braketleri

$$[e_1, e_2] = 2e_3, \quad [e_1, e_6] = 2e_5, \quad [e_2, e_6] = 2e_4$$

olsun [6].  $G$  Lie grubu üzerinde

$$J(e_1) = e_1, \quad J(e_2) = e_2, \quad J(e_3) = -e_3, \quad J(e_4) = -e_4, \quad J(e_5) = -e_5, \quad J(e_6) = e_6.$$

ve

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere;  $(J, h)$  left-invariant hemen hemen parahermitian bir yapı olur. Koszul formülünden sıfırdan farklı Levi-Civita kovaryant türevler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_2 &= e_3, & \nabla_{e_2} e_1 &= -e_3, & \nabla_{e_1} e_6 &= e_5, \\ \nabla_{e_6} e_1 &= -e_5, & \nabla_{e_2} e_6 &= e_4, & \nabla_{e_6} e_2 &= -e_4. \end{aligned}$$

$A = e_1$ ,  $B = e_2$  ve  $C = e_6$  olarak alındığında

$$\begin{aligned}
S_{ABC}(\nabla_A F)(B, C) &= \alpha(e_1, e_2, e_6) + \alpha(e_2, e_6, e_1) + \alpha(e_6, e_1, e_2) \\
&= 2h(\nabla_{e_1} e_2, e_6) + 2h(\nabla_{e_2} e_6, e_1) + 2h(\nabla_{e_6} e_1, e_2) \\
&= 2h(e_3, e_6) + 2h(e_4, e_1) - 2h(e_5, e_2) \\
&= 6
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece (1) koşulu sağlanmaz. Ancak diğer tüm koşullar sağlanır. Dolayısıyla  $G$  üzerindeki  $(J, h)$  left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_1$  sınıfından olur. **Teorem 4.13**'den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant parakontak yapı  $\mathbb{G}_3^2$  sınıfından olur.

Ayrıca  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant parakontak metrik yapı dikkate alındığında;  $\varphi^2(X) = \varphi(X)$ ,  $\varphi^2(Y) = \varphi(Y)$ ,  $\varphi^2(Z) = \varphi(Z)$  eşitliğini sağlayan  $X = (e_1, 0)$ ,  $Y = (e_2, 0)$  ve  $Z = (e_6, 0)$  için (4.3) eşitliğinden

$$\beta(X, Y, Z) = \beta((e_1, 0), (e_2, 0), (e_6, 0)) = \alpha(e_1, e_2, e_6) = 2$$

olur.

**Teorem 4.15.**  $(N, J, h)$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $W_2$  sınıfına aittir ancak ve ancak  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_4^2$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_2$  sınıfından olsun. Bu durumda (3), (4), (7) ve (8) koşulları **Teorem 4.13**'de de sağlandığından **Teorem 4.13**'ün ispatından

$$\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$$

olur. Herhangi  $A, B, C \in \mathcal{V}$ ;  $U, V, W \in \mathcal{H}$  için (1) ve (5) koşullarından

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \frac{1}{3} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(B, C, A) + \alpha(C, A, B) \} \\
&\quad + \frac{1}{3} \{ \alpha(U, V, W) + \alpha(V, W, U) + \alpha(W, U, V) \} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Keyfi  $U, V, W \in \mathcal{H}$  için (5) ve (6) koşullarından  $\alpha(U, V, W) = 0$  olduğundan

$$\tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) - \underbrace{\tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = \alpha(A, B, C)$$

ve

$$\tilde{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, B, C) - \alpha(U, V, W) - \underbrace{\tilde{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = \alpha(A, B, C)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan  $\mathbb{G}_4^2$  sınıfının tanımlama bağıntısı olan

$$\tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

sağlandığından  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_4^2$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu  $\mathbb{G}_4^2$  sınıfından ise herhangi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \chi(N \times \mathbb{R})$  için

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.22)$$

ve

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.23)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.22) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2} \{ \alpha(X, Y, Z) + \alpha(J(X), J(Y), Z) \} \\ &\quad - \frac{1}{6} \{ \alpha(X, Y, Z) + \alpha(J(X), J(Y), Z) \} \\ &\quad - \frac{1}{6} \{ \alpha(Y, Z, X) + \alpha(J(Y), J(Z), X) \} \\ &\quad - \frac{1}{6} \{ \alpha(Z, X, Y) + \alpha(J(Z), J(X), Y) \} \end{aligned} \quad (4.24)$$

ve (4.23) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2} \{ \alpha(J(X), Y, Z) + \alpha(X, Y, J(Z)) \} \\ &\quad - \frac{1}{6} \{ \alpha(J(X), Y, Z) + \alpha(X, Y, J(Z)) \} \\ &\quad - \frac{1}{6} \{ \alpha(Y, Z, J(X)) + \alpha(J(Y), Z, X) \} \\ &\quad - \frac{1}{6} \{ \alpha(Z, X, J(Y)) + \alpha(J(Z), X, Y) \} \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde edilir. (4.24) eşitliğinde keyfi  $A, B, C \in \mathcal{V}$  için  $\alpha(A, B, C) + \alpha(B, C, A) + \alpha(C, A, B) = 0$  ve her  $U, V, W \in \mathcal{H}$  için  $\alpha(U, V, W) + \alpha(V, W, U) + \alpha(W, U, V) = 0$  olduğundan (1) ve (5) koşulları sağlanır.  $\{A_i, U_i\}$  bir yerel ayarlanmış çatı alanı olmak üzere; (4.24) eşitliğinde her  $U \in \mathcal{H}$  için  $X = A_i, Y = U_i, Z = U$  alındığında  $\alpha(A_i, U_i, U) = 0$  ve her  $A \in \mathcal{V}$  için  $X = U_i, Y = A_i, Z = A$  alındığında



$\alpha(U_i, A_i, A) = 0$  bulunur. Buradan (4) ve (8) koşulları sağlanır. Her  $U \in \mathcal{H}$  için (4) koşulundan ve Lee form tanımından  $\Theta(U) = 0$  ve (4.24) eşitliğinde her  $A \in \mathcal{V}$ ;  $U, V \in \mathcal{H}$  için  $\alpha(A, U, V) = 0$  olduğundan (3) koşulu sağlanır. Benzer şekilde Her  $A \in \mathcal{V}$  için (8) koşulundan ve Lee form tanımından  $\Theta(A) = 0$  ve (4.24) eşitliğinde her  $U \in \mathcal{H}$ ;  $A, B \in \mathcal{V}$  için  $\alpha(U, A, B) = 0$  olduğundan (7) koşulu sağlanmış olur. Ayrıca her  $U \in \mathcal{H}$  için (4.25) eşitliğinden  $\alpha(U, U, Z) = -\alpha(U, U, Z)$  olduğundan  $\alpha(U, U, Z) = 0$  olur ve (6) koşulu sağlanır. (2) koşulu dışındaki tüm koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_2$  sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 4.16.**  $G$ , 4-boyutlu bir Lie grup, bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}_{4.3}$  ve  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  kümesi  $\mathfrak{g}$  Lie cebrinin bir çatı alanı olsun. Lie cebrinin sıfırdan farklı braketleri

$$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2$$

şeklindedir [7].  $G$  Lie grubu üzerinde  $J$  endomorfizmi

$$J(e_1) = -e_1, \quad J(e_2) = -e_2, \quad J(e_3) = e_3, \quad J(e_4) = e_4.$$

ve  $h$  metriği

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak alındığında  $(J, h)$  left-invariant hemen hemen parahermitian bir yapı olur. Koszul formülü kullanılarak sıfırdan farklı Levi-Civita kovaryant türevler aşağıdaki gibidir:

$$\nabla_{e_3} e_3 = -e_1, \quad \nabla_{e_3} e_4 = e_2, \quad \nabla_{e_4} e_1 = -e_1, \quad \nabla_{e_4} e_4 = e_4.$$

$J(A) = A$  koşulunu sağlayan  $A = e_3$  için  $J(\nabla_A A) = J(\nabla_{e_3} e_3) = e_1$  olduğundan  $J(\nabla_{e_3} e_3) \neq \nabla_{e_3} e_3$  olur. Böylece (2) koşulu sağlanmaz. Ancak diğer koşullar sağlanır. Dolayısıyla  $G$  üzerindeki  $(J, h)$  left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_2$  sınıfından olur. **Teorem 4.15'**den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant parakontak yapı  $\mathbb{G}_4^2$  sınıfından olur.

Ayrıca  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant parakontak yapı için  $\varphi^2(X) = \varphi(X)$

eşitliğini sağlayan  $X = (e_3 + e_4, 0)$  için (4.2) eşitliğinden

$$(\nabla_X \varphi)(X) = (\nabla_{e_3+e_4} J)(e_3 + e_4) = -2e_2$$

olur.

**Teorem 4.17.**  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_3$  sınıfına aittir ancak ve ancak  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_2^2$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_3$  sınıfından olsun. **Teorem 4.13**'ün ispatından (4) ve (8) koşulundan  $\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$ , (2) ve (6) koşulundan  $\tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$  elde edilir. **Teorem 4.15**'in ispatından (1) ve (5) koşulundan  $\tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$  olur. Ayrıca keyfi  $A \in \mathcal{V}$  için (8) koşulundan  $\delta F(A) = 0$  olduğundan ve Lee form tanımından  $\Theta(A) = 0$  olur. Dolayısıyla Keyfi  $U \in \mathcal{H}$ ;  $A, B \in \mathcal{V}$  için (7) koşulundan

$$\alpha(U, A, B) = 0 \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.26) eşitliğinden

$$\tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) - \underbrace{\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = \alpha(A, V, W)$$

ve

$$\tilde{\beta}^2(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, V, W) - \alpha(U, B, C) - \underbrace{\tilde{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = \alpha(A, V, W)$$

olduğundan

$$\tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^2(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

olur. Böylece  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_2^2$  sınıfından olmuş olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_2^2$  sınıfından ise  $N \times \mathbb{R}$  üzerindeki keyfi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$  vektör alanları için

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.27)$$

ve

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^2(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.28)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.27) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2} \{ \alpha(X, Y, Z) - \alpha(J(X), J(Y), Z) \} \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(Y)h(X, Z) - \delta F(J(Y))h(J(X), Z) \\ &\quad - \delta F(Z)h(X, Y) + \delta F(J(Z))h(J(X), Y) \} \end{aligned} \quad (4.29)$$

ve (4.28) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2} \{ \alpha(J(X), Y, Z) - \alpha(X, Y, J(Z)) \} \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(Y)h(J(X), Z) - \delta F(J(Y))h(X, Z) \\ &\quad - \delta F(Z)h(J(X), Y) + \delta F(J(Z))h(X, Y) \} \end{aligned} \quad (4.30)$$

elde edilir. (4.29) eşitliğinde keyfi  $A, B, C \in \mathcal{V}$  için  $\alpha(A, B, C) = 0$  ve her  $U, V, W \in \mathcal{H}$  için  $\alpha(U, V, W) = 0$  olduğundan **(1)** ve **(5)** koşulu sağlanır. (4.29) eşitliğinde keyfi  $A \in \mathcal{V}$  için  $\alpha(A, A, Z) = 0$  ve her  $U \in \mathcal{H}$  için  $\alpha(U, U, Z) = 0$  eşitlikleri sağlandığından **(2)** ve **(6)** koşulu sağlanmış olur.  $N$  manifoldu üzerinde  $\{A_i, U_i\}$  bir yerel ayarlanmış çatı alanı olmak üzere; (4.29) eşitliğinde keyfi  $U \in \mathcal{H}$  için

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \alpha(A_i, U_i, U) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{ \alpha(A_i, U_i, U) - \alpha(J(A_i), J(U_i), U) \} \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^n \{ \delta F(U_i)h(A_i, U) - \delta F(J(U_i))h(J(A_i), U) \\ &\quad - \delta F(U)h(A_i, U_i) + \delta F(J(U))h(J(A_i), U_i) \} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha(A_i, U_i, U) \\ &\quad - \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n \{ \delta F(U_i)h(A_i, U) - \delta F(U)h(A_i, U_i) \} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha(A_i, U_i, U) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)} \delta F(U)h(A_i, U_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha(A_i, U_i, U) + \frac{n}{(n-1)} \delta F(U) \end{aligned}$$

olur. Buradan  $\frac{n}{(n-1)} \delta F(U) = 0$  olur.  $n, 1$ 'den büyük pozitif tam sayı olduğundan  $\delta F(U) = 0$  elde edilir. Dolayısıyla  $\sum_{i=1}^n \alpha(A_i, U_i, U) = 0$  olur. Buradan **(4)** koşulu

sağlanır. Benzer şekilde (4.29) eşitliğinde her  $A \in \mathcal{V}$  için

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \alpha(U_i, A_i, A) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{ \alpha(U_i, A_i, A) - \alpha(J(U_i), J(A_i), A) \} \\
&\quad - \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^n \{ \delta F(A_i) h(U_i, A) - \delta F(J(A_i)) h(J(U_i), A) \\
&\quad - \delta F(A) h(U_i, A_i) + \delta F(J(A)) h(J(U_i), A_i) \} \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha(U_i, A_i, A) \\
&\quad - \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n \{ \delta F(A_i) h(U_i, A) - \delta F(A) h(U_i, A_i) \} \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha(U_i, A_i, A) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)} \delta F(A) h(U_i, A_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha(U_i, A_i, A) + \frac{n}{(n-1)} \delta F(A)
\end{aligned}$$

olduğundan  $\frac{n}{(n-1)} \delta F(A) = 0$  elde edilir ve  $\delta F(A) = 0$  olur. Buradan  $\sum_{i=1}^n \alpha(U_i, A_i, A) = 0$  olduğundan (8) koşulu sağlanır. Ayrıca keyfi  $U \in \mathcal{H}$ ;  $A, B \in \mathcal{V}$  için  $\Theta(A) = \Theta(B) = 0$  ve (4.30) eşitliğinden  $\alpha(U, A, B) = 0$  olduğundan (7) koşulu sağlanmış olur. Dolayısıyla (3) koşulu dışındaki tüm koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_3$  sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 4.18.**  $G$ , 6-boyutlu bir Lie grup, bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}$  ve  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  kümesi  $\mathfrak{g}$  Lie cebrinin left-invaryant bir çatı alanı olsun. Sıfırdan farklı Lie braketi

$$[e_4, e_5] = e_6$$

olsun [6].  $G$  Lie grubu üzerinde  $J$  endomorfizmi

$$J(e_1) = e_1, \quad J(e_2) = e_2, \quad J(e_3) = e_3, \quad J(e_4) = -e_4, \quad J(e_5) = -e_5, \quad J(e_6) = -e_6$$

ve  $h$  metriği

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak alındığında  $(J, h)$  ikilisi  $G$  Lie grubu üzerinde left-invariant hemen hemen parahermitian bir yapı olur. Koszul formülünden sıfırdan farklı Levi-Civita kovaryant türevler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_3} e_4 &= -\frac{1}{2}e_2, & \nabla_{e_3} e_5 &= \frac{1}{2}e_1, & \nabla_{e_4} e_3 &= -\frac{1}{2}e_2, \\ \nabla_{e_4} e_5 &= \frac{1}{2}e_6, & \nabla_{e_5} e_3 &= \frac{1}{2}e_1, & \nabla_{e_5} e_4 &= -\frac{1}{2}e_6. \end{aligned}$$

$A = e_3, U = e_4, V = e_5$  olarak alındığında  $\Theta(e_4) = \Theta(e_5) = 0$  ve  $\alpha(e_3, e_4, e_5) = 1$  olarak bulunur. Dolayısıyla bu yapı (3) koşulunu sağlamaz. Ancak diğer tüm koşullar sağlandığından  $G$  üzerindeki  $(J, h)$  left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_3$  sınıfından olur. **Teorem 4.17**'den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant parakontak yapı  $\mathbb{G}_2^2$  sınıfından olur.

$G \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerinde  $X = (e_3, 0), Y = (e_4, 0)$  ve  $Z = (e_5, 0)$  olarak alındığında;

$$\varphi^2(X) = \varphi(X), \quad \varphi^2(Y) = -\varphi(Y), \quad \varphi^2(Z) = -\varphi(Z)$$

koşulları sağlanır. Ayrıca (4.3) eşitliğinden

$$\beta(X, Y, Z) = \beta((e_3, 0), (e_4, 0), (e_5, 0)) = \alpha(e_3, e_4, e_5) = 1$$

olarak hesaplanır.

**Teorem 4.19.**  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_4$  sınıfına aittir ancak ve ancak  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_1^2$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_4$  sınıfından olsun. **Teorem 4.15**'in ispatından (1) ve (5) koşulundan  $\tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$ , **Teorem 4.13**'ün ispatından (2) ve (6) koşulundan  $\tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$  olur. Keyfi  $A \in \mathcal{V}$  için (8) koşulundan

$$\delta F(A) = - \sum_{i=1}^n \{ \alpha(A_i, U_i, A) + \alpha(U_i, A_i, A) \} = - \sum_{i=1}^n \alpha(U_i, A_i, A) = 0$$

olduğundan ve Lee form tanımından  $\Theta(A) = 0$  elde edilir. Böylece (7) koşulundan

$$\alpha(U, A, B) = 0 \quad (4.31)$$

olarak bulunur.  $\Theta(A) = 0$  olduğundan, (4.31) eşitliğinden ve (3) koşulundan

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) \\ &\quad + \Theta(B)h(U, C) - \Theta(C)h(U, B) + \Theta(W)h(A, V) - \Theta(V)h(A, W) \\ &= \alpha(A, V, W) + \Theta(W)h(A, V) - \Theta(V)h(A, W) \\ &= \alpha(A, V, W) + \alpha(A, W, V) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. (4.31) eşitliğinden

$$\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) - \underbrace{\tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = \alpha(A, V, W)$$

ve

$$\tilde{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, V, W) - \alpha(U, B, C) - \underbrace{\tilde{\beta}^2(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = \alpha(A, V, W)$$

olduğundan

$$\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

elde edilir. Bu durumda  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_1^2$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_1^2$  sınıfından ise  $N \times \mathbb{R}$  üzerindeki her  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$  vektör alanları için

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.32)$$

ve

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.33)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.32) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(Y)h(X, Z) - \delta F(J(Y))h(J(X), Z) \\ &\quad - \delta F(Z)h(X, Y) + \delta F(J(Z))h(J(X), Y) \} \end{aligned} \quad (4.34)$$

ve (4.33) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(Y)h(J(X), Z) - \delta F(J(Y))h(X, Z) \\ &\quad - \delta F(Z)h(J(X), Y) + \delta F(J(Z))h(X, Y) \} \end{aligned} \quad (4.35)$$

elde edilir. (4.34) eşitliğinde keyfi  $A, B, C \in \mathcal{V}$  için  $\alpha(A, B, C) = 0$  ve her  $U, V, W \in \mathcal{H}$  için  $\alpha(U, V, W) = 0$ , keyfi  $A \in \mathcal{V}$  için  $\alpha(A, A, Z) = 0$  ve her  $U \in \mathcal{H}$  için  $\alpha(U, U, Z) = 0$  olduğundan (1), (5), (2) ve (6) koşulları sağlanır. (4.34) eşitliğinde keyfi  $A \in \mathcal{V}$ ;  $U, V \in \mathcal{H}$  için  $\alpha(A, U, V) = \Theta(U)h(A, V) - \Theta(V)h(A, U)$  ve herhangi  $U \in \mathcal{H}$ ;  $A, B \in \mathcal{V}$  için  $\alpha(U, A, B) = \Theta(B)h(U, A) - \Theta(A)h(U, B)$  olduğundan (3) ve (7) koşulları sağlanır.  $\{A_i, U_i\}$  bir yerel ayarlanmış çatı alanı olmak üzere; (4.35) eşitliğinde her  $A \in \mathcal{V}$  için

$$\begin{aligned}\alpha(U_i, A_i, A) &= \frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(A_i)h(J(U_i), A) - \delta F(J(A_i))h(U_i, A) \\ &\quad - \delta F(A)h(J(U_i), A_i) + \delta F(J(A))h(U_i, A_i) \} \\ &= -\Theta(A)h(U_i, A_i) - \Theta(A_i)h(U_i, A) \\ &= -\alpha(U_i, A_i, A)\end{aligned}$$

olduğundan  $\alpha(U_i, A_i, A) = 0$  olur. Dolayısıyla (8) koşulu sağlanır. Böylece (4) koşulu hariç diğer tüm koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_4$  sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 4.20.**  $G$ , 4 boyutlu bir Lie grup, bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}_{4.10}$  ve  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  kümesi  $\mathfrak{g}_{4.3}$  Lie cebrinin bir çatı alanı olsun. Bu Lie cebrinin sıfırdan farklı braketleri

$$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2.$$

şeklinde [7].  $G$  Lie grubu üzerindeki bir left-invariant hemen hemen parahermitian yapı

$$J(e_1) = -e_1, \quad J(e_2) = e_2, \quad J(e_3) = e_3, \quad J(e_4) = -e_4.$$

ve left-invariant  $h$  metriği

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda  $(J, h)$  bir left-invariant hemen hemen parahermitian yapı olur.

Koszul formülünden sıfırdan farklı Levi-Civita konneksiyonlar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1}e_2 &= -\frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_1}e_3 &= -\frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_1}e_4 &= \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_4, & \nabla_{e_2}e_1 &= -\frac{1}{2}e_3 \\ \nabla_{e_2}e_4 &= \frac{1}{2}e_2, & \nabla_{e_3}e_1 &= -\frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_3}e_4 &= \frac{1}{2}e_2, \\ \nabla_{e_4}e_1 &= -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_4, & \nabla_{e_4}e_2 &= \frac{1}{2}e_2, & \nabla_{e_4}e_3 &= -\frac{1}{2}e_2.\end{aligned}$$

$A_1 = e_2$ ,  $A_2 = e_3$ ,  $U_1 = e_1$  ve  $U_2 = e_4$  olarak alındığında yukarıdaki metriğe göre  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  kümesi ayarlanmış bir tabandır.  $U = e_4$  için

$$\sum_{i=1}^2 \alpha(A_i, U_i, U) = \alpha(e_2, e_1, e_4) = -2h(\nabla_{e_2}e_1, e_4) = h(e_3, e_4) = 1$$

olur. Böylece (4) koşulu sağlanmaz. Diğer tüm koşullar sağlanır. Dolayısıyla  $G$  üzerindeki  $(J, h)$  left-invaryant hemen hemen parahermitian yapı  $W_4$  sınıfından olur.

**Teorem 4.19'**dan  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invaryant parakontak yapı  $\mathbb{G}_1^2$  sınıfından olur.

$G \times \mathbb{R}$  üzerindeki  $\mathbb{G}_1^2$  sınıfından yapı için  $X = (e_1, 0)$  olarak alındığında  $\varphi^2(X) = -\varphi(X)$  eşitliği sağlanır ve yerel ayarlanmış taban  $A_1 = e_3$ ,  $A_2 = e_2$ ,  $U_1 = e_4$  ve  $U_2 = e_1$  olarak alındığında, (4.5) eşitliğinden

$$\theta(X) = \theta(e_1, 0) = -\delta F(e_1) = -1$$

olur.

**Teorem 4.21.**  $(N, J, h)$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $W_5$  sınıfına aittir ancak ve ancak hemen  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_3^1$  sınıfına aittir. *Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_5$  sınıfından olsun. Bu durumda (2), (3), (4), (6), (7) ve (8) koşulları sağlanır. Bu koşullar **Teorem 4.13'**de de sağlandığından **Teorem 4.13'**ün ispatından

$$\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$$

olur. Ayrıca keyfi  $A, B, C \in \mathcal{V}$  için (1) ve (2) koşullarından  $\alpha(A, B, C) = 0$  olduğundan

$$\tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) - \underbrace{\tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = \alpha(U, V, W)$$

ve

$$\tilde{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, B, C) - \alpha(U, V, W) - \underbrace{\tilde{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = -\alpha(U, V, W)$$



olarak bulunur. Buradan  $\mathbb{G}_3^1$  sınıfının tanımlama bağıntısı olan

$$\tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\tilde{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

sağlanmış olur. Dolayısıyla  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_3^1$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_3^1$  sınıfından ise herhangi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \chi(N \times \mathbb{R})$  için

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.36)$$

ve

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\tilde{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.37)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.36) eşitliğinden **Teorem 4.13**'deki (4.20) eşitliği sağlandığından (2), (3), (4), (6), (7) ve (8) koşulları da sağlanmış olur. (4.37) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= -\frac{1}{6}\{\alpha(J(X), Y, Z) + \alpha(X, Y, J(Z))\} \\ &\quad -\frac{1}{6}\{\alpha(Y, Z, J(X)) + \alpha(J(Y), Z, X)\} \\ &\quad -\frac{1}{6}\{\alpha(Z, X, J(Y)) + \alpha(J(Z), X, Y)\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

elde edilir. Keyfi  $A, B, C \in \mathcal{V}$  için (2) koşulundan  $\alpha(A, B, C) = -\alpha(B, A, C)$  olduğundan ve (4.38) eşitliğinden

$$\alpha(A, B, C) = -\frac{1}{3}\{\alpha(A, B, C) + \alpha(B, C, A) + \alpha(C, A, B)\} = -\alpha(A, B, C)$$

elde edilir. Buradan  $\alpha(A, B, C) = 0$  olur ve (1) koşulu sağlanmış olur. Dolayısıyla (5) dışındaki diğeri koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_5$  sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 4.22.**  $G$ , 6 boyutlu bir Lie grup, bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}$  ve  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  kümesi  $\mathfrak{g}$  Lie cebrinin bir çatı alanı olsun. Lie cebrinin parantezleri de

$$[e_1, e_2] = 2e_3, \quad [e_1, e_6] = 2e_5, \quad [e_2, e_6] = 2e_4.$$

diğer durumlarda

$$[e_i, e_j] = 0$$

olsun [6].  $G$  Lie grubu üzerindeki bir left-invariant hemen hemen parahermitian yapı

$$J(e_1) = -e_1, \quad J(e_2) = -e_2, \quad J(e_3) = e_3, \quad J(e_4) = e_4, \quad J(e_5) = e_5, \quad J(e_6) = -e_6.$$

ve left-invariant  $h$  metriği aşağıdaki gibi olsun.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu durumda  $(J, h)$  bir left-invariant hemen hemen parahermitian yapı olur. Koszul formülünden sıfırdan farklı Levi-Civita konneksiyonlar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_2 &= e_3, & \nabla_{e_2} e_1 &= -e_3, & \nabla_{e_1} e_6 &= e_5, \\ \nabla_{e_6} e_1 &= -e_5, & \nabla_{e_2} e_6 &= e_4, & \nabla_{e_6} e_2 &= -e_4. \end{aligned}$$

$U = e_1$ ,  $V = e_2$  ve  $W = e_6$  olarak alınırsa

$$\begin{aligned} S_{UVW}(\nabla_U F)(V, W) &= \alpha(e_1, e_2, e_6) + \alpha(e_2, e_6, e_1) + \alpha(e_6, e_1, e_2) \\ &= -2h(\nabla_{e_1} e_2, e_6) - 2h(\nabla_{e_2} e_6, e_1) - 2h(\nabla_{e_6} e_1, e_2) \\ &= -2h(e_3, e_6) - 2h(e_4, e_1) + 2h(e_5, e_2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda (5) sağlanmaz. Ayrıca diğer koşullar sağlandığından  $G$  üzerindeki  $(J, h)$  left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_5$  sınıfından olur.

**Teorem 4.21**'den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant parakontak yapı  $\mathbb{G}_3^1$  sınıfından olur.

Ek olarak  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant parakontak metrik yapı dikkate alındığında; (4.3) eşitliğinden  $\beta((e_1, 0), (e_2, 0), (e_6, 0)) = \alpha(e_1, e_2, e_6)$  olduğundan ve  $\varphi^2(X) = -\varphi(X)$ ,  $\varphi^2(Y) = -\varphi(Y)$ ,  $\varphi^2(Z) = -\varphi(Z)$  eşitliğini sağlayan  $X = (e_1, 0)$ ,  $Y = (e_2, 0)$  ve  $Z = (e_6, 0)$  için

$$\beta(X, Y, Z) = \beta((e_1, 0), (e_2, 0), (e_6, 0)) = \beta(e_1, e_2, e_6) = -2$$

olarak hesaplanır.

**Teorem 4.23.**  $(N, J, h)$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $W_6$  sınıfına aittir ancak ve ancak  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  manifoldu  $\mathbb{G}_4^1$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_6$  sınıfından olsun. Bu durumda (1), (3), (4), (5), (7) ve (8) koşulları sağlanır. Bu koşullar **Teorem 4.15**'de de sağlandığından **Teorem**

4.15'in ispatından

$$\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$$

olur. Ayrıca keyfi  $A, B, C \in \mathcal{V}$  için (1) ve (2) koşullarından  $\alpha(A, B, C) = 0$  olduğundan

$$\tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) - \underbrace{\tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = \alpha(U, V, W)$$

ve

$$\tilde{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, B, C) - \alpha(U, V, W) - \underbrace{\tilde{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = -\alpha(U, V, W)$$

olur. Buradan  $\mathbb{G}_4^1$  sınıfının tanımlama bağıntısı olan

$$\tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\tilde{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

sağlanmış olur. Dolayısıyla  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_4^1$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_4^1$  sınıfından ise  $N \times \mathbb{R}$  üzerindeki her  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$  vektör alanları için

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.39)$$

ve

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\tilde{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.40)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.39) eşitliğinden **Teorem 4.15**'deki (4.24) eşitliği sağlanır. Bu durumda (1), (3), (4), (5), (7) ve (8) koşulları da sağlanır. (4.40) eşitliğinden ise

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= -\frac{1}{2}\{\alpha(J(X), Y, Z) + \alpha(X, Y, J(Z))\} \\ &\quad + \frac{1}{6}\{\alpha(J(X), Y, Z) + \alpha(X, Y, J(Z))\} \\ &\quad + \frac{1}{6}\{\alpha(Y, Z, J(X)) + \alpha(J(Y), Z, X)\} \\ &\quad + \frac{1}{6}\{\alpha(Z, X, J(Y)) + \alpha(J(Z), X, Y)\} \end{aligned} \quad (4.41)$$

elde edilir. Ayrıca keyfi  $A \in \mathcal{V}$  için (4.41) eşitliğinden  $\alpha(A, A, Z) = -\alpha(A, A, Z)$  olduğundan  $\alpha(A, A, Z) = 0$  olur. Buradan (2) koşulu sağlanmış olur. Dolayısıyla (6) dışındaki diğer koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_6$  sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 4.24.**  $G$ , 4-boyutlu bir Lie grup, bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}_{4.3}$  ve  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  kümesi  $\mathfrak{g}$  Lie cebrinin bir çatı alanı olsun. Lie cebrinin sıfırdan farklı

braketleri aşağıdaki gibidir [7]:

$$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2.$$

$\mathfrak{g}_{4.3}$  Lie cebri üzerinde

$$J(e_1) = e_1, \quad J(e_2) = e_2, \quad J(e_3) = -e_3, \quad J(e_4) = -e_4.$$

ve

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

olarak alındığında  $(J, h)$  ikilisi  $G$  Lie grubu üzerinde left-invariant hemen hemen parahermitian bir yapı olur. Koszul formülünden sıfırdan farklı Levi-Civita kovaryant türevler aşağıdaki gibidir:

$$\nabla_{e_3} e_3 = -e_1, \quad \nabla_{e_3} e_4 = e_2, \quad \nabla_{e_4} e_1 = -e_1, \quad \nabla_{e_4} e_4 = e_4.$$

$J(U) = -U$  koşulunu sağılayan  $U = e_3$  için  $J(\nabla_U U) = J(\nabla_{e_3} e_3) = -e_1$  olduğundan  $J(\nabla_{e_3} e_3) \neq -\nabla_{e_3} e_3$  olur. Böylece (7) koşulu sağılanmaz. Ancak diğıer koşullar sağılandığından  $G$  üzerindeki  $(J, h)$  left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_6$  sınıfından olur. **Teorem 4.23**'den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant parakontak yapı  $\mathbb{G}_4^1$  sınıfından olur.

Ayrıca  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invariant parakontak yapı için  $\varphi^2(X) = -\varphi(X)$  eşitliğini sağılayan  $X = (e_3 + e_4, 0)$  için (4.2) eşitliğinden

$$(\nabla_X \varphi)(X) = (\nabla_{e_3+e_4} J)(e_3 + e_4) = 2e_2$$

olur.

**Teorem 4.25.**  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_7$  sınıfına aittir ancak ve ancak  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_2^1$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_7$  sınıfından olsun. Bu durumda (1), (2), (4), (5), (6) ve (8) koşulları sağılanır. Bu koşullar **Teorem 4.17**'de de sağılandığından **Teorem 4.17**'nin ispatından

$$\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$$

olur. Keyfi  $U \in \mathcal{H}$  için (4) koşulundan  $\delta F(U) = 0$  olduğundan ve Lee form tanımından  $\Theta(U) = 0$  olur. Dolayısıyla (3) koşulundan

$$\alpha(A, U, V) = 0 \quad (4.42)$$

elde edilir. (4.42) eşitliğinden

$$\tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) - \underbrace{\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = \alpha(U, B, C)$$

ve

$$\tilde{\beta}^2(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, V, W) - \alpha(U, B, C) - \underbrace{\tilde{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = -\alpha(U, B, C)$$

olduğundan

$$\tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\tilde{\beta}^2(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

olur. Böylece  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_2^1$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_2^1$  sınıfından ise herhangi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \chi(N \times \mathbb{R})$  için

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.43)$$

ve

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\tilde{\beta}^2(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.44)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.43) eşitliğinden **Teorem 4.17**'deki (4.29) eşitliği sağlanır. Dolayısıyla (1), (2), (4), (5), (6) ve (8) koşulları da sağlanır. (4.44) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= -\frac{1}{2}\{\alpha(J(X), Y, Z) - \alpha(X, Y, J(Z))\} \\ &\quad + \frac{1}{2(n-1)}\{\delta F(Y)h(J(X), Z) - \delta F(J(Y))h(X, Z) \\ &\quad - \delta F(Z)h(J(X), Y) + \delta F(J(Z))h(X, Y)\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

elde edilir. Ayrıca keyfi  $A \in \mathcal{V}$ ;  $U, V \in \mathcal{H}$  için  $\Theta(U) = \Theta(V) = 0$  ve (4.45) eşitliğinden  $\alpha(A, U, V) = 0$  olduğundan (3) koşulu sağlanır. Dolayısıyla (7) koşulu hariç diğer koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_7$  sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 4.26.**  $G$ , 6 boyutlu bir Lie grup, bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}$  ve  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  kümesi  $\mathfrak{g}$  Lie cebrinin left-invariant bir çatı alanı olsun. Lie

cebrinin sıfırdan farklı braketi sadece

$$[e_1, e_2] = e_3.$$

olsun [6].  $G$  Lie grubu üzerinde

$$J(e_1) = e_1, \quad J(e_2) = e_2, \quad J(e_3) = e_3, \quad J(e_4) = -e_4, \quad J(e_5) = -e_5, \quad J(e_6) = -e_6.$$

ve

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere;  $(J, h)$  bir left-invaryant hemen hemen parahermitian yapı olur. Koszul formülünden sıfırdan farklı Levi-Civita kovaryant türevler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_2 &= \frac{1}{2} e_3, & \nabla_{e_1} e_6 &= -\frac{1}{2} e_5, & \nabla_{e_2} e_1 &= -\frac{1}{2} e_3, \\ \nabla_{e_2} e_6 &= \frac{1}{2} e_4, & \nabla_{e_6} e_1 &= -\frac{1}{2} e_5, & \nabla_{e_6} e_2 &= \frac{1}{2} e_4. \end{aligned}$$

$U = e_6, A = e_1, B = e_2$  olarak alındığında  $\Theta(e_1) = \Theta(e_2) = 0$  ve  $\alpha(e_6, e_1, e_2) = -1$  olduğundan bu yapı (7) koşulunu sağlamaz. Fakat diğer koşullar sağlandığından  $G$  üzerindeki  $(J, h)$  left-invaryant hemen hemen parahermitian yapı  $W_7$  sınıfından olur. **Teorem 4.25**'den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invaryant parakontak yapı  $\mathbb{G}_2^1$  sınıfından olur.

$G \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerinde  $X = (e_6, 0), Y = (e_1, 0)$  ve  $Z = (e_2, 0)$  olarak alındığında

$$\varphi^2(X) = -\varphi(X), \quad \varphi^2(Y) = \varphi(Y), \quad \varphi^2(Z) = \varphi(Z)$$

koşulları sağlanır. Ayrıca (4.3) eşitliğinden

$$\beta(X, Y, Z) = \alpha(e_6, e_1, e_2) = -1$$

olur.

**Teorem 4.27.**  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_8$  sınıfına aittir ancak ve ancak  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  manifoldu  $\mathbb{G}_1^1$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_8$  sınıfından olsun. Bu durumda (1), (2), (5) ve (6) koşulları sağlanır. Bu koşullar **Teorem 4.19**'da da sağlandığından **Teorem 4.19**'un ispatından

$$\tilde{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$$

bulunur. Keyfi  $U \in \mathcal{H}$  için (4) koşulundan  $\delta F(U) = 0$  olduğundan ve Lee form tanımından  $\Theta(U) = 0$  olur. Böylece (3) koşulundan

$$\alpha(A, U, V) = 0 \quad (4.46)$$

olarak bulunur.  $\Theta(U) = 0$  olduğundan, (4.46) eşitliğinden ve (3) koşulundan

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) \\ &\quad + \Theta(B)h(U, C) - \Theta(C)h(U, B) + \Theta(W)h(A, V) - \Theta(V)h(A, W) \\ &= \alpha(A, V, W) + \Theta(B)h(U, C) - \Theta(C)h(U, B) \\ &= \alpha(U, B, C) + \alpha(U, C, B) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.46) eşitliğinden

$$\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) - \underbrace{\tilde{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = \alpha(U, B, C)$$

ve

$$\tilde{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \alpha(A, V, W) - \alpha(U, B, C) - \underbrace{\tilde{\beta}^2(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = -\alpha(U, B, C)$$

olduğundan

$$\tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\tilde{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

olur. Böylece  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_1^1$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_1^1$  sınıfından ise  $N \times \mathbb{R}$  üzerindeki her  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$  vektör alanları için

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.47)$$

ve

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\tilde{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.48)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.47) eşitliğinden **Teorem 4.19**'daki (4.34) eşitliği sağlandığın-

dan (1), (2), (3), (5), (6) ve (7) koşulları da sağlanır. (4.48) eşitliğinden ise

$$\begin{aligned}\alpha(X, Y, Z) &= -\frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(Y)h(J(X), Z) - \delta F(J(Y))h(X, Z) \\ &\quad - \delta F(Z)h(J(X), Y) + \delta F(J(Z))h(X, Y) \} \end{aligned} \quad (4.49)$$

elde edilir. Ayrıca  $\{A_i, U_i\}$  bir yerel ayarlanmış çatı alanı olmak üzere; (4.49) eşitliğinde her  $U \in \mathcal{H}$  için

$$\begin{aligned}\alpha(A_i, U_i, U) &= \frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(U_i)h(J(A_i), U) - \delta F(J(U_i))h(A_i, U) \\ &\quad - \delta F(U)h(J(A_i), U_i) + \delta F(J(U))h(A_i, U_i) \} \\ &= -\Theta(U)h(A_i, U_i) - \Theta(U_i)h(A_i, U) \\ &= -\alpha(A_i, U_i, U)\end{aligned}$$

olduğundan  $\alpha(A_i, U_i, U) = 0$  olur. Dolayısıyla (4) koşulu sağlanır. Böylece (8) dışındaki diğer koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 4.28.**  $G$ , 4 boyutlu bir Lie grup, bu Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g}_{4.10}$  ve  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  kümesi  $\mathfrak{g}_{4.3}$  Lie cebrinin bir çatı alanı olsun. Bu Lie cebrinin sıfırdan farklı braketleri

$$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2.$$

şeklinde dir [7].  $G$  Lie grubu üzerindeki bir left-invariant hemen hemen parahermitian yapı

$$J(e_1) = e_1, \quad J(e_2) = -e_2, \quad J(e_3) = -e_3, \quad J(e_4) = e_4.$$

ve left-invariant  $h$  metriği

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda  $(J, h)$  bir left-invariant hemen hemen parahermitian yapı olur. Koszul formülünden sıfırdan farklı Levi-Civita konneksiyonlar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1}e_2 &= -\frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_1}e_3 &= -\frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_1}e_4 &= \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_4, & \nabla_{e_2}e_1 &= -\frac{1}{2}e_3 \\ \nabla_{e_2}e_4 &= \frac{1}{2}e_2, & \nabla_{e_3}e_1 &= -\frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_3}e_4 &= \frac{1}{2}e_2, \\ \nabla_{e_4}e_1 &= -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_4, & \nabla_{e_4}e_2 &= \frac{1}{2}e_2, & \nabla_{e_4}e_3 &= -\frac{1}{2}e_2.\end{aligned}$$

$A_1 = e_1$ ,  $A_2 = e_4$ ,  $U_1 = e_2$  ve  $U_2 = e_3$  olarak alındığında yukarıdaki metriğe göre



$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  kümesi ayarlanmış bir tabandır.  $A = e_4$  için

$$\sum_{i=1}^2 \alpha(U_i, A_i, A) = \alpha(e_2, e_1, e_4) = 2h(\nabla_{e_2} e_1, e_4) = -h(e_3, e_4) = -1$$

olur. Böylece (8) koşulu sağlanmaz. Diğer tüm koşullar sağlanır. Dolayısıyla  $G$  üzerindeki  $(J, h)$  left-invaryant hemen hemen parahermitian yapı  $W_8$  sınıfından olur. **Teorem 4.27'**den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki left-invaryant parakontak yapı  $\mathbb{G}_1^1$  sınıfından olur.

Ayrıca,  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki  $\mathbb{G}_1^2$  sınıfından yapı için  $X = (e_1, 0)$  olarak alındığında  $\varphi^2(X) = -\varphi(X)$  eşitliği sağlanır ve yerel ayarlanmış taban  $A_1 = e_3, A_2 = e_2, U_1 = e_4$  ve  $U_2 = e_1$  olarak alındığında, (4.5) eşitliğinden

$$\theta(X) = \theta(e_1, 0) = -\delta F(e_1) = 1$$

olur.

Yukarıdaki teoremlerden elde edilen hemen hemen parahermitian  $(N, J, h)$  manifoldunun ait olduğu sınıflar ile hemen hemen parakontak metrik  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  manifoldunun ait olduğu sınıflar arasındaki ilişkiler aşağıdaki tabloda verilmiştir:

**Tablo 4.1.**  $N$  ve  $N \times \mathbb{R}$ 'nin ait olduğu sınıflar arasındaki ilişkiler

| $N$ 'nin ait olduğu sınıf |                   | $N \times \mathbb{R}$ 'nin ait olduğu sınıf |
|---------------------------|-------------------|---------------------------------------------|
| $W_1$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_3^2$                            |
| $W_2$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_4^2$                            |
| $W_3$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_2^2$                            |
| $W_4$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_1^2$                            |
| $W_5$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_3^1$                            |
| $W_6$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_4^1$                            |
| $W_7$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_2^1$                            |
| $W_8$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_1^1$                            |

#### 4.2. Hemen Hemen Parahermitian Manifoldların Konformal Deformasyonlarından Elde edilen Hemen Hemen Parakontak Metrik Manifolddar

$(N, J, h)$ ,  $2n$ -boyutlu diferensiyellenebilir hemen hemen parahermitian metrik bir manifold olsun.  $N$  manifoldu üzerindeki hemen hemen parahermitian metrik yapı kullanılarak  $(2n + 1)$ -boyutlu  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerinde hemen hemen parakontak bir yapı inşa edilebilir.  $a, b \in (N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ve  $\sigma : N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$\sigma(X, t) = t$  olmak üzere;  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki herhangi  $(X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})$  vektör alanları için

$$\tilde{\varphi} : \chi(N \times \mathbb{R}) \rightarrow \chi(N \times \mathbb{R}), \quad \tilde{\varphi} \left( X, a \frac{d}{dt} \right) = (J(X), 0),$$

$$\bar{g} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) := e^{2\sigma} h(X, Y) + ab,$$

$$\tilde{\xi} = \left( 0, \frac{d}{dt} \right)$$

ve

$$\bar{\eta} \left( X, a \frac{d}{dt} \right) = \bar{g} \left( \left( 0, \frac{d}{dt} \right), \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) = a$$

olarak alındığında  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$  dörtlüsü  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerinde hemen hemen parakontak metrik bir yapı olur.  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki yapı

$$\begin{aligned} \bar{g}(\tilde{\varphi}(X, a \frac{d}{dt}), \tilde{\varphi}(Y, b \frac{d}{dt})) &= \bar{g}((J(X), 0), (J(Y), 0)) \\ &= e^{2\sigma} h(J(X), J(Y)) \\ &= -e^{2\sigma} h(X, Y) - ab + ab \\ &= -\bar{g}((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})) + \bar{\eta}(X, a \frac{d}{dt}) \bar{\eta}(Y, b \frac{d}{dt}) \end{aligned}$$

ve

$$\tilde{\varphi}(\tilde{\xi}) = \tilde{\varphi} \left( 0, \frac{d}{dt} \right) = (J(0), 0) = (0, 0)$$

koşullarını sağlar. Ayrıca  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldunun öğeleri kullanılarak  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki  $\bar{\Phi}$  temel 2-formu

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})) &= \bar{g}(\tilde{\varphi}(X, a \frac{d}{dt}), \tilde{\varphi}(Y, b \frac{d}{dt})) \\ &= \bar{g}((J(X), 0), (J(Y), 0)) \\ &= e^{2\sigma} h(J(X), J(Y)) \\ &= e^{2\sigma} F(X, Y) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

$N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki keyfi  $(X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt})$  vektör alanları

için Koszul formülü kullanılarak  $\bar{g}$  metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi

$$\begin{aligned}
& 2\bar{g} \left( \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \left[ \bar{g} \left( \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \right] + \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \left[ \bar{g} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \right] \\
&\quad - \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \left[ \bar{g} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) \right] + \bar{g} \left( \left[ \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right], \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&\quad + \bar{g} \left( \left[ \left( Z, c \frac{d}{dt} \right), \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right], \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) + \bar{g} \left( \left[ \left( Z, c \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right], \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= \left( X, a \frac{d}{dt} \right) [e^{2\sigma} h(Y, Z) + bc] + \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) [e^{2\sigma} g(X, Z) + ac] \\
&\quad - \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) [e^{2\sigma} h(X, Y) + ab] \\
&\quad + e^{2\sigma} h([X, Y], Z) + c \left( X[b] - Y[a] + a \frac{db}{dt} - b \frac{da}{dt} \right) \\
&\quad + e^{2\sigma} h([Z, X], Y) + b \left( Z[a] - X[c] + c \frac{da}{dt} - a \frac{dc}{dt} \right) \\
&\quad + e^{2\sigma} h([Z, Y], X) + a \left( Z[b] - Y[c] + c \frac{db}{dt} - b \frac{dc}{dt} \right) \\
&= 2e^{2\sigma} (h(\nabla_X Y, Z) + h(aY, Z) + h(bY, Z)) + 2cX[b] + 2ac \frac{db}{dt} - 2ce^{2\sigma} h(X, Y) \\
&= 2e^{2\sigma} h(\nabla_X Y + aY + bX, Z) + 2c \left( X[b] + a \frac{db}{dt} - e^{2\sigma} h(X, Y) \right) \\
&= 2\bar{g} \left( (\nabla_X Y + aY + bX, (X[b] + a \frac{db}{dt} - e^{2\sigma} h(X, Y)) \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt}) \right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) = \left( \nabla_X Y + aY + bX, \left( X[b] + a \frac{db}{dt} - e^{2\sigma} h(X, Y) \right) \frac{d}{dt} \right) \quad (4.50)$$

elde edilir. (4.50) eşitliği kullanılarak  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki  $\tilde{\varphi}$  endomorfizmin kovaryant türevi hesaplandığında

$$\begin{aligned}
& \left( \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{\varphi} \right) \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \\
&= \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{\varphi} \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) - \tilde{\varphi} \left( \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} (J(Y), 0) - \tilde{\varphi} \left( \nabla_X Y + aY + bX, \left( X[b] + a \frac{db}{dt} - e^{2\sigma} h(X, Y) \right) \frac{d}{dt} \right) \\
&= \left( \nabla_X J(Y) + aJ(Y), -e^{2\sigma} h(X, J(Y)) \frac{d}{dt} \right) - (J(\nabla_X Y + aY + bX), 0) \\
&= \left( (\nabla_X J)(Y) - bJ(X), e^{2\sigma} h(J(X), Y) \frac{d}{dt} \right) \quad (4.51)
\end{aligned}$$

olur. (4.51) eşitliğinden  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki  $\bar{\beta}$  tensörü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
& \bar{\beta} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= \bar{g} \left( \left( \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \tilde{\varphi} \right) \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= \bar{g} \left( \left( (\nabla_X J)(Y) - bJ(X), e^{2\sigma} h(J(X), Y) \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{2\sigma} \{h((\nabla_X J)(Y) - bJ(X), Z) + ch(J(X), Y)\} \\
&= e^{2\sigma} \{\alpha(X, Y, Z) - bh(J(X), Z) + ch(J(X), Y)\}. \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Ayrıca  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki  $\bar{\Phi}$  temel 2- formun dış türevi (4.52) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&3d\bar{\Phi} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= \bar{\beta} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) + \bar{\beta} \left( \left( Y, b \frac{d}{dt} \right), \left( Z, c \frac{d}{dt} \right), \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&\quad + \bar{\beta} \left( \left( Z, c \frac{d}{dt} \right), \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&= e^{2\sigma} \{\alpha(X, Y, Z) + \alpha(Y, Z, X) + \alpha(Z, X, Y) \\
&\quad + 2ah(J(Y), Z) - 2bh(J(X), Z) + 2ch(J(X), Y)\} \\
&= e^{2\sigma} \{3dF(X, Y, Z) + 2ah(J(Y), Z) - 2bh(J(X), Z) + 2ch(J(X), Y)\} \tag{4.53}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\{A_1, \dots, A_n, U_1, \dots, U_n\}$  kümesi  $N$  manifoldunun yerel ayarlanmış bir çatı alanı olsun. Bu durumda

$$\bar{e}_i = \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{2}} (A_i + U_i, 0), \quad \tilde{\varphi}(\bar{e}_i) = \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{2}} (A_i - U_i, 0), \quad \tilde{\xi} = \left( 0, \frac{d}{dt} \right)$$

olmak üzere;

$$\left\{ \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n, \tilde{\varphi}(\bar{e}_1), \dots, \tilde{\varphi}(\bar{e}_n), \tilde{\xi} \right\}$$

kümesi  $\bar{g}$  metriğine göre  $N \times \mathbb{R}$  manifoldunun bir ortanormal çatı alanı olur.  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki keyfi  $\left( X, a \frac{d}{dt} \right)$  vektör alanı için (4.52) eşitliğinden  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{\theta}^*$  ve  $\bar{w}$  formları

$$\begin{aligned}
\bar{\theta} \left( X, a \frac{d}{dt} \right) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \bar{\beta} \left( \bar{e}_i, \bar{e}_i, \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) - \bar{\beta} \left( \tilde{\varphi}(\bar{e}_i), \tilde{\varphi}(\bar{e}_i), \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{ \alpha(A_i + U_i, A_i + U_i, X) - \alpha(A_i - U_i, A_i - U_i, X) \} \\
&= \sum_{i=1}^n \{ \alpha(A_i, U_i, X) + \alpha(U_i, A_i, X) \} \\
&= -\delta F(X), \tag{4.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}^* \left( X, a \frac{d}{dt} \right) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \bar{\beta} \left( \bar{e}_i, \tilde{\varphi}(\bar{e}_i), \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) - \bar{\beta} \left( \tilde{\varphi}(\bar{e}_i), \bar{e}_i, \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{ \alpha(A_i + U_i, A_i - U_i, X) - \alpha(A_i - U_i, A_i + U_i, X) \} - 2na \\
&= \sum_{i=1}^n \{ -\alpha(A_i, U_i, X) + \alpha(U_i, A_i, X) \} - 2na \\
&= \sum_{i=1}^n \{ \alpha(A_i, U_i, J(X)) + \alpha(U_i, A_i, J(X)) \} - 2na \\
&= -\delta F(J(X)) - 2na
\end{aligned} \tag{4.55}$$

ve

$$\bar{w} \left( X, a \frac{d}{dt} \right) = \bar{\beta} \left( \tilde{\xi}, \tilde{\xi}, \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) = 0 \tag{4.56}$$

olarak bulunur.

Bu bölümde  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifold üzerindeki Riemannian, Ricci ve skaler eğrilikler hesaplanmıştır. Herhangi  $(X, a \frac{d}{dt})$ ,  $(Y, b \frac{d}{dt})$ ,  $(Z, c \frac{d}{dt})$  vektör alanları için  $N \times \mathbb{R}$  manifoldunun Riemannian eğriliği (4.50) eşitliği kullanılarak hesaplandığında

$$\begin{aligned}
\bar{R} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) &= \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \left( \bar{\nabla}_{(Y, b \frac{d}{dt})} \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&\quad - \bar{\nabla}_{(Y, b \frac{d}{dt})} \left( \bar{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \right) \\
&\quad - \bar{\nabla}_{[(X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})]} \left( Z, c \frac{d}{dt} \right) \\
&= (R(X, Y)Z + c(aY - bX) \\
&\quad + e^{2\sigma} (h(X, Z)Y - h(Y, Z)X), \\
&\quad e^{2\sigma} (bh(X, Z) - ah(Y, Z)) \frac{d}{dt}) \tag{4.57}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $N \times \mathbb{R}$  manifoldunun Ricci eğriliği (4.57) eşitliği kullanılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\bar{Q} \left( \left( X, a \frac{d}{dt} \right), \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right) &= \bar{g} \left( \left( \bar{R} \left( \bar{e}_i, \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right), \bar{e}_i \right) \\
&\quad - \bar{g} \left( \left( \bar{R} \left( \tilde{\varphi}(\bar{e}_i), \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right), \tilde{\varphi}(\bar{e}_i) \right) \\
&\quad + \bar{g} \left( \left( \bar{R} \left( \tilde{\xi}, \left( X, a \frac{d}{dt} \right) \right) \left( Y, b \frac{d}{dt} \right) \right), \tilde{\xi} \right) \\
&= Q(X, Y) - 2ne^{2\sigma} h(X, Y) - 2nab
\end{aligned} \tag{4.58}$$

olur.  $N \times \mathbb{R}$  manifoldunun skaler eğriliği (4.58) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\bar{s} &= \sum_{i=1}^n \{ \bar{Q}(\bar{e}_i, \bar{e}_i) - \bar{Q}(\tilde{\varphi}(\bar{e}_i), \tilde{\varphi}(\bar{e}_i)) \} + \bar{Q}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) \\
&= \frac{e^{-2\sigma}}{2} \sum_{i=1}^n \{ Q(A_i + U_i, A_i + U_i) - Q(A_i - U_i, A_i - U_i) \} - 4n^2 - 2n \\
&= e^{-2\sigma} s - 4n^2 - 2n
\end{aligned} \tag{4.59}$$

olarak bulunur. Bu bölümün bundan sonraki kısmında  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki vektör alanları  $(X, a \frac{d}{dt}) = \tilde{X}$ ,  $(Y, b \frac{d}{dt}) = \tilde{Y}$  ve  $(Z, c \frac{d}{dt}) = \tilde{Z}$  olarak ifade edilmiştir.

**Tanım 4.29.**  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen parakontak metrik bir manifold olsun.  $M$  manifoldunun Ricci eğriliği  $Q$  ve  $V$  vektör alanı boyunca Lie türev  $\mathcal{L}_V$  ile gösterilmek üzere;

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_V g + Q + \mu_1 g + \mu_2 (\eta \otimes \eta) = 0$$

eşitliğini sağlayan bir  $V$  vektör alanı ve  $\mu_1, \mu_2 \in C^\infty(M)$  fonksiyonları varsa  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen parakontak metrik manifolduna  $(\mu_1, \mu_2)$  fonksiyonları ve  $V$  vektör alanı ile  **$\eta$ -Ricci almost soliton** denir [9].

**Teorem 4.30.**  $N$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $\lambda$  sabiti ile Einsteinidir ancak ve ancak  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $(2n - e^{-2\sigma} \lambda, e^{-2\sigma} \lambda)$  fonksiyonları ve  $\tilde{\xi}$  vektör alanı ile  $\eta$ -Ricci almost solitondur.

*Kanıt.*  $N$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $\lambda$  sabiti ile Einstein olsun. Keyfi  $X, Y \in \chi(N)$  için  $Q(X, Y) = \lambda h(X, Y)$  eşitliği sağlanır.  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki vektör alanı  $\tilde{V} = \tilde{\xi} = (0, \frac{d}{dt})$  ve  $C^\infty$  fonksiyonları  $(\mu_1 = 2n - e^{-2\sigma} \lambda, \mu_2 = e^{-2\sigma} \lambda)$  olarak alındığında (4.50) ve (4.58) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\tilde{V}} \bar{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \bar{Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \mu_1 \bar{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \mu_2 (\bar{\eta} \otimes \bar{\eta})(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \bar{g}(\bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{\xi}, \tilde{Y}) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{\xi}, \tilde{X}) \right\} + Q(X, Y) - 2ne^{2\sigma} h(X, Y) - 2nab \\
&\quad + (2n - e^{-2\sigma} \lambda)(e^{2\sigma} h(X, Y) + ab) + (e^{-2\sigma} \lambda)ab \\
&= Q(X, Y) - \lambda h(X, Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\tilde{\xi}$  vektör alanı ve  $(2n - e^{-2\sigma} \lambda, e^{-2\sigma} \lambda)$  fonksiyonları ile  $\eta$ -Ricci almost soliton olur.

Tersine,  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\tilde{V} = \tilde{\xi} = (0, \frac{d}{dt})$  vektör alanı ve  $(\mu_1 =$

$2n - e^{-2\sigma}\lambda$ ,  $\mu_2 = e^{-2\sigma}\lambda$ ) fonksiyonları ile  $\eta$ -Ricci almost soliton olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\xi}\bar{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \bar{Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + (2n - e^{-2\sigma}\lambda)\bar{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + e^{-2\sigma}\lambda(\bar{\eta} \otimes \bar{\eta})(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$$

eşitliğini sağlar. (4.50) ve (4.58) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\xi}\bar{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \bar{Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + (2n - e^{-2\sigma}\lambda)\bar{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + e^{-2\sigma}\lambda(\bar{\eta} \otimes \bar{\eta})(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\bar{g}(\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\xi}, \tilde{Y}) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{\xi}, \tilde{X})\right\} + Q(X, Y) - 2ne^{2\sigma}h(X, Y) - 2nab \\ &\quad + (2n - e^{-2\sigma}\lambda)(e^{2\sigma}h(X, Y) + ab) + (e^{-2\sigma}\lambda)ab \\ &= Q(X, Y) - \lambda h(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $Q(X, Y) = \lambda h(X, Y)$  elde edilir. Dolayısıyla  $N$  manifoldu  $\lambda$  sabiti ile Einstein olur.  $\square$

Aşağıdaki teorem ile para-Kaehlerian manifoldların  $(-1)$ -para-Kenmotsu manifoldlar ile bir karakterizasyonu verilmiştir.

**Teorem 4.31.**  $N$  hemen hemen parahermitian manifoldu para-Kaehlerian ancak ve ancak  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $(-1)$ -para-Kenmotsudur.

*Kanıt.*  $N$  manifoldu para-Kaehlerian olsun. Bu durumda  $(\nabla_X J)(Y) = 0$  olur.

(4.52) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \bar{g}((\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\varphi})(\tilde{Y}), \tilde{Z}) \\ &= e^{2\sigma}\{\alpha(X, Y, Z) - bh(J(X), Z) + ch(J(X), Y)\} \\ &= e^{2\sigma}\{h((\nabla_X J)(Y), Z) - bh(J(X), Z) + ch(J(X), Y)\} \\ &= -\bar{\eta}(\tilde{Y})\bar{g}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Z}) + \bar{\eta}(\tilde{Z})\bar{g}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}) \\ &= -\bar{g}(\bar{\eta}(\tilde{Y})\tilde{\varphi}(\tilde{X}) + \bar{g}(\tilde{X}, \tilde{\varphi}(\tilde{Y}))\tilde{\xi}, \tilde{Z}) \end{aligned}$$

elde edilen eşitlikten

$$(\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\varphi})(\tilde{Y}) = -\left(\bar{g}(\tilde{X}, \tilde{\varphi}(\tilde{Y}))\tilde{\xi} + \bar{\eta}(\tilde{Y})\tilde{\varphi}(\tilde{X})\right)$$

olur. Böylece  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki yapı  $-1$ -para-Kenmotsu olur.

Tersine  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu  $-1$ -para-Kenmotsu ise

$$(\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\varphi})(\tilde{Y}) = -\left(\bar{g}(\tilde{X}, \tilde{\varphi}(\tilde{Y}))\tilde{\xi} + \bar{\eta}(\tilde{Y})\tilde{\varphi}(\tilde{X})\right)$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\varphi})(\tilde{Y}) &= -\left(\tilde{\eta}(\tilde{Y})\tilde{\varphi}(\tilde{X}) + \tilde{g}\left(\tilde{X}, \tilde{\varphi}(\tilde{Y})\right)\tilde{\xi}\right) \\
&= -\left(b(J(X), 0) + \tilde{g}\left(\left(X, a\frac{d}{dt}\right), (J(X), 0)\right)\right) \\
&= \left(-bJ(X), e^{2\sigma}h(J(X), Y)\frac{d}{dt}\right)
\end{aligned} \tag{4.60}$$

bulunur. (4.51) ve (4.60) eşitliğinden  $(\nabla_X J)(Y) = 0$  elde edilir. Dolayısıyla  $N$  manifoldu para-Kaehleridir.  $\square$

$N$  manifolduna ait özellikler dikkate alındığında  $N \times \mathbb{R}$  manifoldunun ait olduğu bazı sınıfların  $(\mathbb{G}_5, \mathbb{G}_7, \mathbb{G}_8, \mathbb{G}_9, \mathbb{G}_{10}, \mathbb{G}_{11}, \mathbb{G}_{12})$  sıfır olduğu aşağıda gösterilmiştir. Keyfi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \chi(N \times \mathbb{R})$  için (4.52) eşitliğinden

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{\xi}) = e^{2\sigma}h(J(X), Y) = -e^{2\sigma}h(X, J(Y)) = -\bar{\beta}(\tilde{Y}, \tilde{X}, \tilde{\xi}), \tag{4.61}$$

$$\bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}(\tilde{Y}), \tilde{\xi}) = e^{2\sigma}h(J^2(X), J(Y)) = -e^{2\sigma}h(J(X), Y) = -\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{\xi}) \tag{4.62}$$

ve

$$\bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\xi}) = e^{2\sigma}h(J^3(X), J^2(Y)) = e^{2\sigma}h(J(X), Y) = \bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{\xi}) \tag{4.63}$$

elde edilir. Ayrıca  $\bar{\theta}(\tilde{X}) = -\delta F(X)$  olduğundan  $\bar{\theta}(\tilde{\xi}) = \bar{\theta}(0, \frac{d}{dt}) = 0$  olur. Bu durumda  $\bar{\beta}^5(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$  bulunur. (4.55) eşitliğinden  $\bar{\theta}^*(\tilde{\xi}) = -2n$  olduğundan ve (4.62), (4.63) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}^7(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= -\frac{1}{4}\bar{\eta}(\tilde{Y})\left\{\bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Z}), \tilde{\xi}) - \bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}(\tilde{Z}), \tilde{\xi})\right. \\
&\quad \left.- \bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{Z}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\xi}) + \bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{Z}), \tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\xi})\right\} \\
&\quad + \frac{1}{4}\bar{\eta}(\tilde{Z})\left\{\bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\xi}) - \bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}(\tilde{Y}), \tilde{\xi})\right. \\
&\quad \left.- \bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\xi}) + \bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\xi})\right\} - \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= -\bar{\eta}(\tilde{Y})e^{2\sigma}h(J(X), Z) + \bar{\eta}(\tilde{Z})e^{2\sigma}h(J(X), Y) - \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= -\bar{\eta}(\tilde{Y})\bar{g}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Z}) + \bar{\eta}(\tilde{Z})\bar{g}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}) - \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= \frac{2n}{\bar{\theta}^*(\tilde{\xi})}\bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) + \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= \left(\frac{2n}{\bar{\theta}^*(\tilde{\xi})} + 1\right)\bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= 0
\end{aligned}$$



elde edilir. (4.61), (4.62) ve (4.63) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}^8(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= -\frac{1}{4}\bar{\eta}(\tilde{Y}) \left\{ \bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Z}), \tilde{\xi}) - \bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}(\tilde{Z}), \tilde{\xi}) \right. \\
&\quad \left. + \bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{Z}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\xi}) - \bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{Z}), \tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\xi}) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{4}\bar{\eta}(\tilde{Z}) \left\{ \bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\xi}) - \bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}(\tilde{Y}), \tilde{\xi}) \right. \\
&\quad \left. + \bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\xi}) - \bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\xi}) \right\} - \underbrace{\bar{\beta}^5(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} \\
&= -\frac{1}{2}\bar{\eta}(\tilde{Y}) \left\{ \bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Z}, \tilde{\xi}) + \bar{\beta}(\tilde{Z}, \tilde{X}, \tilde{\xi}) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\bar{\eta}(\tilde{Z}) \left\{ \bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{\xi}) + \bar{\beta}(\tilde{Y}, \tilde{X}, \tilde{\xi}) \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. (4.62) ve (4.63) eşitliğinden

$$\bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\xi}) + \bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}(\tilde{Y}), \tilde{\xi}) = 0$$

bulunur. Böylece  $\bar{\beta}^9(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^{10}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$  olur. (4.52) eşitliğinden  $\bar{\beta}(\tilde{\xi}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$  olduğundan  $\bar{\beta}^{11}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^{12}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$  olarak bulunur.

Ayrıca her  $\tilde{X} \in \chi(N \times \mathbb{R})$  için  $\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\xi} = (X, 0) \neq 0$  olduğundan  $\tilde{\xi}$  vektör alanı  $N \times \mathbb{R}$  uzayında paralel değildir. Fakat  $\tilde{\xi}$  vektör alanı  $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_3$  ve  $\mathbb{G}_4$  sınıflarında paraleldir. Bu yüzden  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu  $\mathbb{G}_1 \oplus \mathbb{G}_2 \oplus \mathbb{G}_3 \oplus \mathbb{G}_4$  sınıfına ya da bu sınıfın alt sınıflarına ait olamaz.  $\tilde{\xi}$  vektör alanı  $\bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfında paralel olmadığından  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu  $\mathbb{G}_1 \oplus \mathbb{G}_2 \oplus \mathbb{G}_3 \oplus \mathbb{G}_4 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfına ya da bu sınıfın  $\bar{\mathbb{G}}_6$ 'yı içeren alt sınıflarına ait olabilir.  $N$  manifolduna ait özellikler dikkate alındığında,  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki  $\bar{\beta}^1, \bar{\beta}^2, \bar{\beta}^3, \bar{\beta}^4$  izdüşümleri aşağıdaki gibidir:

$N \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki keyfi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$  vektör alanları için  $(N, J, h)$  hemen hemen parahermitian manifold üzerinde her  $A, B, C \in \mathcal{V}; U, V, W \in \mathcal{H}$  olmak üzere;  $X = A + U, Y = B + V, Z = C + W$  olarak alındığında (4.52) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \frac{1}{2(n-1)} \left\{ \bar{g}(\tilde{X}, \tilde{\varphi}(\tilde{Y}))\bar{\theta}(\tilde{\varphi}(\tilde{Z})) - \bar{g}(\tilde{X}, \tilde{\varphi}(\tilde{Z}))\bar{\theta}(\tilde{\varphi}(\tilde{Y})) \right. \\
&\quad \left. - \bar{g}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}(\tilde{Y}))\bar{\theta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{Z})) + \bar{g}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}(\tilde{Z}))\bar{\theta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{Y})) \right\} \\
&= \frac{e^{2\sigma}}{2(n-1)} \{ h(J(X), Y)\delta F(J(Z)) - h(J(X), Z)\delta F(J(Y)) \\
&\quad - h(X, Y)\delta F(Z) + h(X, Z)\delta F(Y) \} \\
&= \frac{e^{2\sigma}}{2(n-1)} \{ h(A - U, B + V)\delta F(C - W) - h(A - U, C + W)\delta F(B - V) \\
&\quad - h(A + U, B + V)\delta F(C + W) + h(A + U, C + W)\delta F(B + V) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{2\sigma}}{(n-1)} \{ -h(A, V)\delta F(W) - h(U, B)\delta F(C) \\
&\quad + h(A, W)\delta F(V) - h(U, C)\delta F(B) \} \\
&= e^{2\sigma} \{ \Theta(V)h(A, W) - \Theta(W)h(A, V) - \Theta(B)h(U, C) + \Theta(C)h(U, B) \}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Z})) - \bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}(\tilde{Z})) \right\} - \bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= \frac{e^{2\sigma}}{2} \{ \alpha(X, Y, Z) - \alpha(J(X), Y, J(Z)) \} - \bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= \frac{e^{2\sigma}}{2} \{ \alpha(A + U, B + V, C + W) - \alpha(A - U, B + V, C - W) \} \\
&\quad - \bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= e^{2\sigma} \{ \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) \} \\
&\quad + e^{2\sigma} \{ \Theta(W)h(A, V) - \Theta(V)h(A, W) + \Theta(B)h(U, C) - \Theta(C)h(U, B) \},
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen bu eşitliklerden

$$\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) + \bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) \}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \frac{1}{6} \left\{ \bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Z})) + \bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}(\tilde{Z})) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{6} \left\{ \bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Z}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{X})) + \bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Z}), \tilde{\varphi}(\tilde{X})) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{6} \left\{ \bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{Z}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y})) + \bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{Z}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}(\tilde{Y})) \right\} \\
&= \frac{e^{2\sigma}}{6} \{ \alpha(X, Y, Z) + \alpha(J(X), J(Y), Z) \} \\
&\quad + \frac{e^{2\sigma}}{6} \{ \alpha(Y, Z, X) + \alpha(J(Y), J(Z), X) \} \\
&\quad + \frac{e^{2\sigma}}{6} \{ \alpha(Z, X, Y) + \alpha(J(Z), J(X), Y) \} \\
&= \frac{e^{2\sigma}}{6} \{ \alpha(A + U, B + V, C + W) + \alpha(A - U, B - V, C + W) \} \\
&\quad + \frac{e^{2\sigma}}{6} \{ \alpha(B + V, C + W, A + U) + \alpha(B - V, C - W, A + U) \} \\
&\quad + \frac{e^{2\sigma}}{6} \{ \alpha(C + W, A + U, B + V) + \alpha(C - W, A - U, B + V) \} \\
&= \frac{e^{2\sigma}}{3} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) \} \\
&\quad + \frac{e^{2\sigma}}{3} \{ \alpha(B, C, A) + \alpha(V, W, U) \} \\
&\quad + \frac{e^{2\sigma}}{3} \{ \alpha(C, A, B) + \alpha(W, U, V) \} \\
&= \frac{e^{2\sigma}}{3} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(B, C, A) + \alpha(C, A, B) \} \\
&\quad + \frac{e^{2\sigma}}{3} \{ \alpha(U, V, W) + \alpha(V, W, U) + \alpha(W, U, V) \} \\
&= e^{2\sigma} \{ S_{ABC} (\nabla_A F) (B, C) + S_{UVW} (\nabla_U F) (V, W) \}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{\beta}(\tilde{\varphi}^2(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Z})) + \bar{\beta}(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{\varphi}^2(\tilde{Y}), \tilde{\varphi}(\tilde{Z})) \right\} - \bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= \frac{e^{2\sigma}}{2} \{ \alpha(X, Y, Z) + \alpha(J(X), J(Y), Z) \} - \bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= \frac{e^{2\sigma}}{2} \{ \alpha(A + U, B + V, C + W) + \alpha(A - U, B - V, C + W) \} \\
&\quad - \bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \\
&= e^{2\sigma} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) \} \\
&\quad - \frac{e^{2\sigma}}{3} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(B, C, A) + \alpha(C, A, B) \} \\
&\quad - \frac{e^{2\sigma}}{3} \{ \alpha(U, V, W) + \alpha(V, W, U) + \alpha(W, U, V) \} \\
&= e^{2\sigma} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) \} \\
&\quad - e^{2\sigma} \{ S_{ABC}(\nabla_A F)(B, C) + S_{UVW}(\nabla_U F)(V, W) \}
\end{aligned}$$

eşitliklerden

$$\bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) + \bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) \}$$

olarak bulunur. Sağlanan bu eşitlikler aşağıdaki teoremlerin ispatlarında kullanılmıştır.

**Teorem 4.32.**  $(N, J, h)$  hemen hemen parahermitian metrik manifoldu  $W_1$  sınıfına aittir ancak ve ancak  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_3^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_1$  sınıfından olsun. Keyfi  $X \in \chi(N)$  için  $A \in \mathcal{V}$  ve  $U \in \mathcal{H}$  olmak üzere;  $X = A + U$  olarak alınırsa (4) ve (8) koşulundan

$$\begin{aligned}
\delta F(X) &= - \sum_{i=1}^n \{ \alpha(A_i, U_i, X) + \alpha(U_i, A_i, X) \} \\
&= - \sum_{i=1}^n \{ \alpha(A_i, U_i, A + U) + \alpha(U_i, A_i, A + U) \} \\
&= - \sum_{i=1}^n \{ \alpha(A_i, U_i, U) + \alpha(U_i, A_i, A) \} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur.  $\bar{\theta}(\tilde{X}) = -\delta F(X)$  olduğundan  $\bar{\theta}(\tilde{X}) = 0$ 'dır. Bu durumda  $\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$  elde edilir. Keyfi  $X \in \chi(N)$  için  $\delta F(X) = 0$  olduğundan  $X = A \in \mathcal{V}$  ve  $X = U \in \mathcal{H}$  için  $\delta F(A) = \delta F(U) = 0$  olur ve Lee form tanımından  $\Theta(A) = \Theta(B) = 0$  elde edilir. Böylece (3) ve (7) koşulundan

$$\alpha(A, U, V) = \alpha(U, A, B) = 0 \quad (4.64)$$

bulunur. (4.64) eşitliğinden

$$\bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) \} - \underbrace{\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = 0$$

bulunur. Diğer taraftan keyfi  $A, B, C \in \mathcal{V}$  için (2) koşulundan  $\alpha(A+B, A+B, C) = 0$  olduğundan

$$\alpha(A, B, C) = -\alpha(B, A, C) \quad (4.65)$$

ve herhangi  $U, V, W \in \mathcal{H}$  için (6) koşulundan  $\alpha(U+V, U+V, W) = 0$  olduğundan (6) koşulundan

$$\alpha(U, V, W) = -\alpha(V, U, W) \quad (4.66)$$

elde edilir. (4.65) ve (4.66) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= e^{2\sigma} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) \} \\ &\quad - \frac{e^{2\sigma}}{3} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(B, C, A) + \alpha(C, A, B) \} \\ &\quad - \frac{e^{2\sigma}}{3} \{ \alpha(U, V, W) + \alpha(V, W, U) + \alpha(W, U, V) \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. (4.66) eşitliğinden ve (5) koşulundan

$$\alpha(U, V, W) = 0 \quad (4.67)$$

olarak bulunur. Böylece (4.67) eşitliğinden

$$\bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) \} - \underbrace{\bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = e^{2\sigma} \alpha(A, B, C)$$

ve

$$\bar{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, B, C) - \alpha(U, V, W) \} - \underbrace{\bar{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = e^{2\sigma} \alpha(A, B, C)$$

elde edilir. Buradan

$$\bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

olur. Dolayısıyla  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_3^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_3^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından ise keyfi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in$

$\chi(N \times \mathbb{R})$  için

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.68)$$

ve

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.69)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.68) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) = & \frac{1}{6} \{ \alpha(X, Y, Z) + \alpha(J(X), J(Y), Z) + \alpha(Y, Z, X) \\ & + \alpha(J(Y), J(Z), X) + \alpha(Z, X, Y) + \alpha(J(Z), J(X), Y) \} \end{aligned} \quad (4.70)$$

ve (4.69) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) = & \frac{1}{6} \{ \alpha(J(X), Y, Z) + \alpha(X, Y, J(Z)) + \alpha(Y, Z, J(X)) \\ & + \alpha(J(Y), Z, X) + \alpha(Z, X, J(Y)) + \alpha(J(Z), X, Y) \} \end{aligned} \quad (4.71)$$

elde edilir. (4.70) ve (4.71) eşitlikleri **Teorem 4.13**'ün ispatında da sağlandığından **Teorem 4.13**'ün ispatından (1) koşulu dışındaki tüm koşullar sağlanır ve  $N$  manifoldu  $W_1$  sınıfından olur.  $\square$

Ayrıca **Örnek 4.14**'de verilen  $G$  Lie grubu üzerindeki left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_1$  sınıfından olduğundan **Teorem 4.33** kullanılarak  $G \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu üzerindeki yapı  $\mathbb{G}_3^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

**Teorem 4.33.**  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_2$  sınıfına aittir ancak ve ancak  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_4^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_2$  sınıfından olsun. Bu durumda (3), (4), (7) ve (8) koşulları sağlandığından **Teorem 4.32**'nin ispatından  $\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$  olur. (1) ve (5) koşullarından

$$\bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ S_{ABC} (\nabla_A F) (B, C) + S_{UVW} (\nabla_U F) (V, W) \} = 0$$

elde edilir.  $W_2$  sınıfında (5) ve (6) koşullarından  $\alpha(U, V, W) = 0$  olduğundan

$$\bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) \} - \underbrace{\bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = e^{2\sigma} \alpha(A, B, C)$$

ve

$$\bar{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, B, C) - \alpha(U, V, W) \} - \underbrace{\bar{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = e^{2\sigma} \alpha(A, B, C)$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla

$$\bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

olur. Böylece  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_4^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu  $\mathbb{G}_4^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından ise keyfi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \chi(N \times \mathbb{R})$  için

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.72)$$

ve

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.73)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.72) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2} \{ \alpha(X, Y, Z) + \alpha(J(X), J(Y), Z) \} \\ &\quad - \frac{1}{6} \{ \alpha(X, Y, Z) + \alpha(J(X), J(Y), Z) + \alpha(Y, Z, X) \\ &\quad + \alpha(J(Y), J(Z), X) + \alpha(Z, X, Y) + \alpha(J(Z), J(X), Y) \} \end{aligned} \quad (4.74)$$

ve (4.73) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2} \{ \alpha(J(X), Y, Z) + \alpha(X, Y, J(Z)) \} \\ &\quad - \frac{1}{6} \{ \alpha(J(X), Y, Z) + \alpha(X, Y, J(Z)) + \alpha(Y, Z, J(X)) \\ &\quad + \alpha(J(Y), Z, X) + \alpha(Z, X, J(Y)) + \alpha(J(Z), X, Y) \} \end{aligned} \quad (4.75)$$

elde edilir. (4.74) ve (4.75) eşitlikleri **Teorem 4.15**'in ispatında da sağlandığından **Teorem 4.15**'in ispatından (2) koşulu dışındaki tüm koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_2$  sınıfından olur.  $\square$

Ayrıca **Örnek 4.16**'da verilen  $G$  Lie grubu üzerindeki left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_2$  sınıfından olduğundan, **Teorem 4.33**'den  $N \times \mathbb{R}$  üzerindeki  $(\tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  hemen hemen parakontak yapı  $\mathbb{G}_4^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

**Teorem 4.34.**  $(N, J, h)$  hemen hemen parahermitian metrik manifoldu  $W_3$  sınıfına aittir ancak ve ancak  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_2^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_3$  sınıfından olsun. Bu durumda (2), (4), (6) ve (8) koşulları sağlandığından **Teorem 4.32**'nin ispatından  $\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) =$

0'dır.  $W_3$  sınıfı (1) ve (5) koşulunu sağladığından **Teorem 4.33**'ün ispatından  $\bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$  olur. Ayrıca keyfi  $A \in \mathcal{V}$  için (8) koşulundan  $\delta F(A) = 0$  olduğundan ve Lee form tanımından  $\Theta(A) = 0$  olur. Dolayısıyla (7) koşulundan

$$\alpha(U, A, B) = 0 \quad (4.76)$$

elde edilir. (4.76) eşitliğinden

$$\bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) \} - \underbrace{\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = e^{2\sigma} \alpha(A, V, W)$$

ve

$$\bar{\beta}^2(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, V, W) - \alpha(U, B, C) \} - \underbrace{\bar{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = e^{2\sigma} \alpha(A, V, W)$$

olduğundan

$$\bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^2(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

olur. Böylece  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_2^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_2^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından ise keyfi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \chi(N \times \mathbb{R})$  için

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.77)$$

ve

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^2(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.78)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.77) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2} \{ \alpha(X, Y, Z) - \alpha(J(X), J(Y), Z) \} \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(Y)h(X, Z) - \delta F(J(Y))h(J(X), Z) \\ &\quad - \delta F(Z)h(X, Y) + \delta F(J(Z))h(J(X), Y) \} \end{aligned} \quad (4.79)$$

ve (4.78) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2} \{ \alpha(J(X), Y, Z) - \alpha(X, Y, J(Z)) \} \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(Y)h(J(X), Z) - \delta F(J(Y))h(X, Z) \\ &\quad - \delta F(Z)h(J(X), Y) + \delta F(J(Z))h(X, Y) \} \end{aligned} \quad (4.80)$$

olur. (4.79) ve (4.80) eşitlikleri **Teorem 4.17**'nin ispatında da sağlandığından

**Teorem 4.17**'nin ispatından (3) koşulu dışındaki tüm koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_3$  sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 4.18**'de verilen  $G$  Lie grubu üzerindeki left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_3$  sınıfından olduğundan, **Teorem 4.34**'den  $N \times \mathbb{R}$  üzerindeki  $(\tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  hemen hemen parakontak yapı  $\mathbb{G}_2^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

**Teorem 4.35.**  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_4$  sınıfına aittir ancak ve ancak  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_1^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_4$  sınıfından olsun. Bu durumda (1), (2), (5) ve (6) koşulları sağlandığından **Teorem 4.34**'ün ispatından  $\bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$ 'dır. Keyfi  $A \in \mathcal{V}$  için (8) koşulundan  $\delta F(A) = 0$  olduğundan ve Lee form tanımından  $\Theta(A) = 0$  olur. Böylece (7) koşulundan

$$\alpha(U, A, B) = 0 \quad (4.81)$$

olarak bulunur.  $\Theta(A) = 0$  olduğundan, (4.81) eşitliğinden ve (3) koşulundan

$$\begin{aligned} \bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= e^{2\sigma} \{ \alpha(A, V, W) - \alpha(U, B, C) \} \\ &\quad - e^{2\sigma} \{ -\Theta(B)h(U, C) + \Theta(C)h(U, B) \\ &\quad - \Theta(W)h(A, V) + \Theta(V)h(A, W) \} \\ &= e^{2\sigma} \alpha(A, V, W) + e^{2\sigma} \{ \Theta(W)h(A, V) - \Theta(V)h(A, W) \} \\ &= e^{2\sigma} \alpha(A, V, W) + e^{2\sigma} \alpha(A, W, V) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. (4.81) eşitliğinden

$$\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) \} - \underbrace{\bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = e^{2\sigma} \alpha(A, V, W)$$

ve

$$\bar{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, V, W) - \alpha(U, B, C) \} - \underbrace{\bar{\beta}^2(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = e^{2\sigma} \alpha(A, V, W)$$

olduğundan

$$\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

olur. Böylece  $N \times \mathbb{R}$  manifoldu  $\mathbb{G}_1^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_1^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından ise keyfi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in$



$\chi(N \times \mathbb{R})$  için

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.82)$$

ve

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.83)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.82) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(Y)h(X, Z) - \delta F(J(Y))h(J(X), Z) \\ &\quad - \delta F(Z)h(X, Y) + \delta F(J(Z))h(J(X), Y) \} \end{aligned} \quad (4.84)$$

ve (4.83) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(Y)h(J(X), Z) - \delta F(J(Y))h(X, Z) \\ &\quad - \delta F(Z)h(J(X), Y) + \delta F(J(Z))h(X, Y) \} \end{aligned} \quad (4.85)$$

elde edilir. (4.84) ve (4.85) eşitlikleri **Teorem 4.19**'un ispatında da sağlandığından **Teorem 4.19**'un ispatından (4) koşulu dışındaki tüm koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_4$  sınıfından olur.  $\square$

Örneğin; **Örnek 4.20**'de verilen  $G$  Lie grubu üzerindeki left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_4$  sınıfından olduğundan, **Teorem 4.35**'den  $N \times \mathbb{R}$  üzerindeki  $(\tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  hemen hemen paracontact yapı  $\mathbb{G}_1^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

**Teorem 4.36.**  $(N, J, h)$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $W_5$  sınıfına aittir ancak ve ancak hemen  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_3^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_5$  sınıfından olsun. Bu durumda (2), (3), (4), (6) (7) ve (8) koşulları sağlanır. Bu koşullar **Teorem 4.32**'de de sağlandığından **Teorem 4.32**'nin ispatından

$$\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$$

olur. Ayrıca keyfi  $A, B, C \in \mathcal{V}$  için (1) ve (2) koşulundan

$$\alpha(A, B, C) = 0 \quad (4.86)$$

elde edilir. (4.86) eşitliğinden

$$\bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) \} - \underbrace{\bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = e^{2\sigma} \alpha(U, V, W)$$

ve

$$\bar{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, B, C) - \alpha(U, V, W) \} - \underbrace{\bar{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = -e^{2\sigma} \alpha(U, V, W)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\bar{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

olur. Dolayısıyla  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_3^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_3^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından ise keyfi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \chi(N \times \mathbb{R})$  için

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.87)$$

ve

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\bar{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.88)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.87) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{6} \{ \alpha(X, Y, Z) + \alpha(J(X), J(Y), Z) + \alpha(Y, Z, X) \\ &\quad + \alpha(J(Y), J(Z), X) + \alpha(Z, X, Y) + \alpha(J(Z), J(X), Y) \} \end{aligned} \quad (4.89)$$

ve (4.88) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= -\frac{1}{6} \{ \alpha(J(X), Y, Z) + \alpha(X, Y, J(Z)) + \alpha(Y, Z, J(X)) \\ &\quad + \alpha(J(Y), Z, X) + \alpha(Z, X, J(Y)) + \alpha(J(Z), X, Y) \} \end{aligned} \quad (4.90)$$

elde edilir. (4.89) ve (4.90) eşitlikleri **Teorem 4.21**'in ispatında da sağlandığından **Teorem 4.21**'in ispatından (5) koşulu dışındaki tüm koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_5$  sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 4.22**'de verilen  $G$  Lie grubu üzerindeki left-invaryant hemen hemen parahermitian yapı  $W_5$  sınıfından olduğundan, **Teorem 4.36**'dan  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki hemen hemen parakontak yapı  $\mathbb{G}_3^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

**Teorem 4.37.**  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_6$  sınıfına aittir ancak ve ancak  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_4^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_6$  sınıfından olsun. Bu durumda (1), (3), (4), (5) (7) ve (8) koşulları sağlanır. **Teorem 4.33**'de de bu koşullar sağlandığından **Teorem**

4.33'ün ispatından

$$\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$$

olur. Ayrıca keyfi  $A, B, C \in \mathcal{V}$  için (1) ve (2) koşullarından  $\alpha(A, B, C) = 0$  olduğundan

$$\bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, B, C) + \alpha(U, V, W) \} - \underbrace{\bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = e^{2\sigma} \alpha(U, V, W)$$

ve

$$\bar{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, B, C) - \alpha(U, V, W) \} - \underbrace{\bar{\beta}^3(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = -e^{2\sigma} \alpha(U, V, W)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\bar{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

olur. Dolayısıyla  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_4^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_4^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından ise keyfi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \chi(N \times \mathbb{R})$  için

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.91)$$

ve

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\bar{\beta}^4(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.92)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.91) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2} \{ \alpha(X, Y, Z) + \alpha(J(X), J(Y), Z) \} \\ &\quad - \frac{1}{6} \{ \alpha(X, Y, Z) + \alpha(J(X), J(Y), Z) + \alpha(Y, Z, X) \\ &\quad + \alpha(J(Y), J(Z), X) + \alpha(Z, X, Y) + \alpha(J(Z), J(X), Y) \} \end{aligned} \quad (4.93)$$

ve (4.92) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= -\frac{1}{2} \{ \alpha(J(X), Y, Z) + \alpha(X, Y, J(Z)) \} \\ &\quad + \frac{1}{6} \{ \alpha(J(X), Y, Z) + \alpha(X, Y, J(Z)) + \alpha(Y, Z, J(X)) \\ &\quad + \alpha(J(Y), Z, X) + \alpha(Z, X, J(Y)) + \alpha(J(Z), X, Y) \} \end{aligned} \quad (4.94)$$

elde edilir. (4.93) ve (4.94) eşitlikleri **Teorem 4.23**'ün ispatında da sağlandığından

**Teorem 4.23**'ün ispatından (6) koşulu dışındaki tüm koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_6$  sınıfından olur.  $\square$

Örneğin; **Örnek 4.24**'de verilen  $G$  Lie grubu üzerindeki left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_6$  sınıfından olduğundan, **Teorem 4.37**'den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki hemen hemen parakontak yapı  $\mathbb{G}_4^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

**Teorem 4.38.**  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_7$  sınıfına aittir ancak ve ancak  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \bar{\eta}, \bar{g})$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_2^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_7$  sınıfından olsun. Bu durumda (1), (2), (4), (5) (6) ve (8) koşulları sağlanır. **Teorem 4.34**'de de bu koşullar sağlandığından **Teorem 4.34**'ün ispatından

$$\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$$

olur. Ayrıca keyfi  $U \in \mathcal{H}$  için (4) koşulundan  $\delta F(A) = 0$  olduğundan ve Lee form tanımından  $\Theta(A) = 0$  olur. Dolayısıyla (3) koşulundan

$$\alpha(A, U, V) = 0 \quad (4.95)$$

elde edilir. (4.95) eşitliğinden

$$\bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) \} - \underbrace{\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = e^{2\sigma} \alpha(U, B, C)$$

ve

$$\bar{\beta}^2(\bar{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, V, W) - \alpha(U, B, C) \} - \underbrace{\bar{\beta}^1(\bar{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = -e^{2\sigma} \alpha(U, B, C)$$

olduğundan

$$\bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\bar{\beta}^2(\bar{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

elde edilir. Böylece  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_2^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_2^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından ise keyfi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \chi(N \times \mathbb{R})$  için

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.96)$$

ve

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\bar{\beta}^3(\bar{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.97)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.96) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2} \{ \alpha(X, Y, Z) - \alpha(J(X), J(Y), Z) \} \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(Y)h(X, Z) - \delta F(J(Y))h(J(X), Z) \\ &\quad - \delta F(Z)h(X, Y) + \delta F(J(Z))h(J(X), Y) \}\end{aligned}\quad (4.98)$$

ve (4.97) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\alpha(X, Y, Z) &= -\frac{1}{2} \{ \alpha(J(X), Y, Z) - \alpha(X, Y, J(Z)) \} \\ &\quad + \frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(Y)h(J(X), Z) - \delta F(J(Y))h(X, Z) \\ &\quad - \delta F(Z)h(J(X), Y) + \delta F(J(Z))h(X, Y) \}\end{aligned}\quad (4.99)$$

olur. (4.98) ve (4.99) eşitlikleri **Teorem 4.25**'in ispatında da sağlandığından **Teorem 4.25**'in ispatından (7) koşulu dışındaki tüm koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_7$  sınıfından olur.  $\square$

Örnek olarak; **Örnek 4.26**'da verilen  $G$  Lie grubu üzerindeki left-invariant hemen hemen parahermitian yapı  $W_7$  sınıfından olduğundan, **Teorem 4.38**'den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki hemen hemen parakontak yapı  $\mathbb{G}_2^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

**Teorem 4.39.**  $(N, J, h)$  hemen hemen parahermitian manifoldu  $W_8$  sınıfına aittir ancak ve ancak  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_1^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfına aittir.

*Kanıt.*  $(N, J, h)$  manifoldu  $W_8$  sınıfından olsun. Bu durumda (1), (2), (5) ve (6) koşulları sağlandığından **Teorem 4.34**'ün ispatından

$$\bar{\beta}^3(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^4(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$$

bulunur. Keyfi  $U \in \mathcal{V}$  için (4) koşulundan  $\delta F(U) = 0$  olduğundan ve Lee form tanımından  $\Theta(U) = 0$  olur. Bu durumda (3) koşulundan

$$\alpha(A, U, B) = 0 \quad (4.100)$$

olarak bulunur. (4.100) eşitliğinden ve (7) koşulundan

$$\begin{aligned}\bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= e^{2\sigma} \{ \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) \} \\ &\quad - e^{2\sigma} \{ -\Theta(B)h(U, C) + \Theta(C)h(U, B) \\ &\quad - \Theta(W)h(A, V) + \Theta(V)h(A, W) \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{2\sigma}\alpha(U, B, C) + e^{2\sigma} \{ \Theta(A)h(U, C) - \Theta(C)h(U, B) \} \\
&= e^{2\sigma}\alpha(U, B, C) + e^{2\sigma}\alpha(U, C, B) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, V, W) + \alpha(U, B, C) \} - \underbrace{\bar{\beta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = e^{2\sigma}\alpha(U, B, C)$$

ve

$$\bar{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) = e^{2\sigma} \{ \alpha(A, V, W) - \alpha(U, B, C) \} - \underbrace{\bar{\beta}^2(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})}_{=0} = -e^{2\sigma}\alpha(U, B, C)$$

olduğundan

$$\bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\bar{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z})$$

olur. Böylece  $N \times \mathbb{R}$  hemen hemen parakontak metrik manifoldu  $\mathbb{G}_1^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

Tersine, Eğer  $N \times \mathbb{R}$  çarpım manifoldu  $\mathbb{G}_1^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından ise keyfi  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \chi(N \times \mathbb{R})$  için

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \bar{\beta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.101)$$

ve

$$\bar{\beta}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -\bar{\beta}^1(\tilde{\varphi}(\tilde{X}), \tilde{Y}, \tilde{Z}) \oplus \bar{\beta}^6(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad (4.102)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.101) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\alpha(X, Y, Z) &= \frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(Y)h(X, Z) - \delta F(J(Y))h(J(X), Z) \\
&\quad - \delta F(Z)h(X, Y) + \delta F(J(Z))h(J(X), Y) \}
\end{aligned} \quad (4.103)$$

ve (4.102) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\alpha(X, Y, Z) &= -\frac{1}{2(n-1)} \{ \delta F(Y)h(J(X), Z) - \delta F(J(Y))h(X, Z) \\
&\quad - \delta F(Z)h(J(X), Y) + \delta F(J(Z))h(X, Y) \}
\end{aligned} \quad (4.104)$$

elde edilir. (4.103) ve (4.104) eşitlikleri **Teorem 4.27**'nin ispatında da sağlandığından **Teorem 4.27**'nin ispatından (8) koşulu dışındaki tüm koşullar sağlandığından  $N$  manifoldu  $W_8$  sınıfından olur.  $\square$

**Örnek 4.28**'de verilen  $G$  Lie grubu üzerindeki left-invariant hemen hemen

parahermitian yapı  $W_8$  sınıfından olduğundan, **Teorem 4.39**'den  $G \times \mathbb{R}$  üzerindeki hemen hemen parakontak yapı  $\mathbb{G}_1^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  sınıfından olur.

Yukarıdaki teoremlerin sonuçları  $((N, J, h)$  hemen hemen parahermitian manifoldunun ait olduğu sınıflar ile  $(N \times \mathbb{R}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  hemen hemen parakontak metrik manifoldunun ait olduğu sınıflar arasındaki ilişkiler) aşağıdaki tabloda özetlenmiştir:

**Tablo 4.2.**  $N$  ve  $N \times \mathbb{R}$  manifoldlarının sınıfları arasındaki ilişkiler

| $N$ 'nin ait olduğu sınıf |                   | $N \times \mathbb{R}$ 'nin ait olduğu sınıf |
|---------------------------|-------------------|---------------------------------------------|
| $W_1$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_3^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  |
| $W_2$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_4^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  |
| $W_3$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_2^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  |
| $W_4$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_1^2 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  |
| $W_5$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_3^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  |
| $W_6$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_4^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  |
| $W_7$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_2^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  |
| $W_8$                     | $\Leftrightarrow$ | $\mathbb{G}_1^1 \oplus \bar{\mathbb{G}}_6$  |

## KAYNAKÇA

- [1] Chinea, D. and Gonzales, C. (1990). A Classification of Almost Contact Metric Manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 156 (4), 15-36.
- [2] Zamkovoy, S. and Nakova, G. (2018). The Decomposition of Almost Paracontact Metric Manifolds in Eleven Classes Revisited. *Journal of Geometry*, 109 (18), 1-23.
- [3] O’neill, B. (1983). *Semi- Riemannian Geometry With Application To Relativity. Department Of Mathematics*. California: Academic Press.
- [4] Gadea, P. M. and Masque, J. M. (1991). Classification of Almost Parahermitian Manifolds. *Rendiconti di Matematica*, 7 (11). 377-396.
- [5] Erdoğan, N. (2021). *Hemen Hemen Parakontak Metrik Yapılar ve Hemen Hemen Parahermitian Metrik Yapıların İlişkileri*. Yayımlanmamış Doktora Tezi. Eskişehir: Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [6] Nourmohammadifar, L. and Peyghan, E. (2021). Nearly Par-Kähler Geometry on Lie Groups, *Quaestiones Mathematicae*, 45 (11), 1713-1738.
- [7] Gnaniham R. and Thompson G. (2014). Minimal Matrix Representations of Four-Dimensional Lie Algebras. *The Bulletin of the Malaysian Mathematical Society*, 36(2), 343-349.
- [8] Deshmukh, S., Alodan, H and Al-Sodais, H. (2011). A note on Ricci solitons. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 16(1), 48-55.
- [9] Patra, D. S. and Rovenski, V. (2020). Almost  $\eta$ -Ricci solitons on Kenmotsu. *European Journal of Mathematics*.
- [10] Pandey, S., Singh, A. and Mishra, V., N. (2021).  $\eta$ -Ricci Soliton on Lorentzian Para-Kenmotsu Manifolds. *Facta Universitatis Series Mathematics and Informatics*, 36 (2), 419-434.
- [11] Blaga, A. M. (2015). Eta-Ricci Solitons on Para-Kenmotsu Manifolds. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 20(1), 1-13.
- [12] Deshmukh, S. and Chen, B., Y. (2018). A note Yamabe Solitons. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 23(1), 37-43.
- [13] Chen, B., Y. and Deshmukh S. (2018). Yamabe and Quasi-Yamabe Solitons on Euclidean Submanifolds. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 15(5), 1-9.



## ÖZGEÇMİŞ

ORCID : 0000-0001-8229-9824  
Adı Soyadı : Murat EFE  
Yabancı Dili : İngilizce

### Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2007-2013, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans
- 2016-2018, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Matematik Anabilim Dalı(Yüksek Lisans)
- 2019-2025, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Bölümü, Matematik Anabilim Dalı(Doktora)
- 2018-2019, Yurt Yönetim Personeli, Kredi ve Yurtlar Genel Müdürlüğü, Kütahya Gençlik ve Spor İl Müdürlüğü
- 2019-2023, Matematik Öğretmeni, Milli Eğitim Bakanlığı, Köprüköy Halk Eğitimi Merkezi Müdürlüğü
- 2023-2025, Müdür Yardımcısı, Milli Eğitim Bakanlığı, Köprüköy Halk Eğitimi Merkezi Müdürlüğü

### Yayımları ve/veya Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- Özdemir, N., Efe, M. (2025). Relationship Between Almost Parahermitian and Almost Paracontact Metric Manifold. Filomat, 39(14), 1247-1263.