



T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

HEMEN HEMEN PSEUDO f - MANİFOLDLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erbil DİKİCİ

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM

AKSARAY , 2014

T.C.

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KABUL ve ONAY BELGESİ

112309408 nolu Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Erbil DİKİCİ 'nin "*Hemen Hemen Pseudo f - Manifolddar*" başlıklı lisansüstü tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından Geometri Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAGLAM
(Aksaray Üniversitesi)



Üye : Doç. Dr. Nesip AKTAN
(Düzce Üniversitesi)



Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali AYTEKİN
(Aksaray Üniversitesi)



Tezin Savunulduğu Tarih : 27/ 01/ 2014

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun 04/02/2014 tarih ve 2014/9-7 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Doç. Dr. Selçuk REİS
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HEMEN HEMEN PSEUDO f - MANİFOLDLAR

Erbil DİKİCİ

T.C.

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM

İkinci Danışman : Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Bu tezin amacı; pseudo f -yapı, almost parakontakt, almost product manifold, torsiyon tensörü ve hemen hemen pseudo f -manifold arasındaki ilişkiyi ve bazı eğrilik şartlarını incelemektir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm; kontakt manifoldlarla ilgili yapılmış çalışmaların literatür özetine yer verilmiştir.

İkinci ve üçüncü bölümde; konunun incelenmesinde kullanılacak temel kavramlar, ilgili tanımlar verilmiş, parakontakt manifoldlar ve almost product manifoldların yapılarından bahsedilmiş, bazı temel teorem ve önermeler ispatlanmıştır.

Çalışmanın son bölümünde ise; hemen hemen pseudo f -manifoldların bazı eğrilik şartları verilmiş ve elde edilen teoremler de ispatlanmıştır.

2014, 72 Sayfa

Anahtar Kelimeler : pseudo f -yapı, hemen hemen parakontakt manifold, hemen hemen product manifold, torsiyon tensörü ve hemen hemen pseudo f -manifold

ABSTRACT

Master of Science Thesis

ALMOST PSEUDO f – MANİFOLDS

Erbil DİKİCİ

T.R.

Aksaray University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM

Co-Supervisor : Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

The aim of this thesis is to examine between relationship of pseudo f -structure, almost paracontact, almost product manifold, the torsion of tensor and almost pseudo f -manifolds also some curvature conditions.

This thesis consists of four chapter. In the first chapter, abstract of literature that had done on contact manifold is given.

In the second chapter, the basic concepts used in the thesis, the relevant definitions and theorems are given.

In the third chapter, pseudo f -structure, the torsion of tensor, almost paracontact manifold and the manifold of almost product structures is mentioned and some basic theorems and propositions are proved

Finally in the last chapter, some curvature conditions of almost pseudo f -manifolds is given and obtained theorems are proved.

2014, 72 Pages

Keywords : pseudo f -structure, almost paracontact manifold, almost product manifold, the torsion of tensor and almost pseudo f -manifolds

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmanın her safhasında büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm değerli hocalarım

Sayın;

Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM

ve

Doç. Dr. Nesip AKTAN 'a

teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren, desteklerini esirgemeyen saygıdeğer babam Ahmet DİKİCİ, annem Güler DİKİCİ, sevgili eşim İlona DİKİCİ ve sevgili oğlum Ersen DİKİCİ 'ye teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma, Aksaray Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince desteklenmiştir. Proje Numarası : 2013/96

Bu çalışmanın yapılmasında araştırmalarım destek veren Aksaray Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi 'ne teşekkürlerimi sunarım.

Erbil DİKİCİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR.....	2
2.1. Riemann Manifoldlar ve Alt Manifoldlar.....	2
2.2. Hemen Hemen Kompleks ve Hemen Hemen Kontakt (Değme) Manifoldlar.....	8
2.3. Hemen Hemen f - Manifoldlar	16
2.4. Hemen Hemen f - Manifoldların Torsiyon Tensörü.....	25
3. HEMEN HEMEN PSEUDO f - MANİFOLDLAR.....	53
4. KAYNAKLAR.....	67
5. ÖZGEÇMİŞ.....	70

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, kavramlarıyla birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler	Anlamı
$\Re$	Reel sayılar cismi
g	M manifoldu üzerindeki metrik
$\chi(M)$	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı
$T_p M$	$p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
TM	M manifoldunun tanjant demeti
f	pseudo f -yapı
ξ_α	karakteristik vektör alanları
η_α	1-formlar
$\mathcal{R}$	M manifoldu üzerindeki Riemann eğrilik tensörü
N_f	f nin Nijenhuis tensörü
∇	M manifoldu üzerindeki konneksiyon
$[,]$	Lie bracket (parantez) operatörü
L	Lie türevi
$\otimes$	Tensörel çarpım

1. GİRİŞ

Almost kontakt yapıların ve bu yapıların bir genelleştirilmesi olan f -yapılar 1963 yılında Yano tarafından ortaya atılmış ve günümüze kadar bu alanda birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları Nakagawa (1966), Ishahara (1966), Kobayashi ve Tsuchiya (1972), Mihai (1983) ve Kobayashi (1990) dir. Goldberg ve Yano, çatılandırılan metrik manifoldlar üzerindeki f -yapı yardımı ile bir kompleks yapı tanımlayıp bu yapıların normallik koşullarını inceleyerek bu alanda yapılacak olan çalışmalara ışık tutmuşlardır. 1970 yılında Goldberg ve Yano tarafından global çatılandırılan metrik manifoldlar tanımlanmıştır.

1970 yılında Blair, $F(X, Y) = g(X, f(Y))$ olarak temel 2-formu tanımlayarak çatılandırılan metrik manifoldların normallik şartına ilaveten bazı yeni koşulları ekleyerek, almost Hermit durumunda Kaehler yapıların ve almost kontakt durumunda Sasakian yapıların bir genelleştirilmiş olan S-manifoldları tanıtmıştır.

1970 yılında Blair, normal çatılandırılan metrik manifold üzerinde $dF = 0$ (yani temel 2-form kapalı) ise K-manifoldun tanımını yapmıştır.

Eğer $F = d\eta_\alpha$ ise K-manifoldun bir S-manifold olduğunu, eğer $d\eta_\alpha = 0$ olduğunda K-manifoldun bir C-manifold olduğunu göstermiştir.

1970 yılında Goldberg ve Yano, global çatılandırılan metrik f -manifoldun temel 2-formu $F = d\eta_\alpha$ olduğunda almost S-manifoldu tanımlamıştır. 1990 lı yıllarda İspanyol matematikçiler Cabrerizo, Fernandez, L.M. ve Fernandez, M. S-manifoldlara ait ciddi çalışmalar yapmışlardır. Bunlardan bazıları Cabrerizo Fernandez, L.M. ve Fernandez, M. (1991,1992, 1993, 1996) dır. 1990 lı yıllarda yapılan çalışmaların yanısıra günümüze kadar S-manifoldlar ile ilgili Kobayashi (1990), Lotta ve Pastore (2004), Dileo ve Lotta (2005), Terlizzi (2006) yazarlarda çeşitli çalışmalar yapmıştır.

K. Matsumoto tarafından $f^3 - f = 0$ şartını sağlayan (1,1)-tipinde f tensör alanı ile tanımlanan pseudo f -yapı tanıtılmış ve pseudo f -yapının integrallenebilirlik şartı incelenmiştir. Öte yandan I. Sato tarafından rankı $n - 1$ olan pseudo f -yapının (f, ξ, η) almost parakontakt yapısına sahip olduğu çalışılmıştır. Ayrıca Yong Bai Baik tarafından f -yapı, almost product ve almost parakontakt yapıya genelleştirilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde çalışmamız için gerekli olan manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

2.1. Riemann Manifoldları ve Alt Manifoldlar

Bu kısımda, Riemann manifoldların ve alt manifoldların temel kavramları tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.1. M , n -boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

simetrik, 2-lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M üzerinde bir *Riemann metrik tensörü* ve (M, g) ikilisiyle verilen manifoldda bir *Riemann manifoldu* denir (O'Neill 1983). M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M üzerinde bu noktalar birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa, M ye *bağlantılı manifold* adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(i) \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$(ii) \quad \nabla_{(f(X)+g(Y))Z} = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$(iii) \quad \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde bir *afin konneksiyon* ve ∇_X e de X e göre *kovaryant türev operatörü* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3. (M, g) , n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. O halde ∇ dönüşümü $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(i) \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özelliği)}$$

$$(ii) Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \text{ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özelliği)}$$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde *sıfır torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu* veya M nin *Levi-Civita konneksiyonu* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.4. U bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[,] : U \times U \rightarrow U \\ (X, Y) \rightarrow [X, Y]$$

dönüşümünde

$$(i) \text{ 2-lineer (Bilineer)}$$

$$(ii) \forall X, Y \in U \text{ için } [X, Y] = -[Y, X] \text{ (Anti-simetrik)}$$

$$(iii) \forall X, Y, Z \in U \text{ için,}$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \text{ (Jacobi özdeşliği)}$$

şartlarını sağlıyorsa $[,]$ dönüşümüne, U üstünde bir *Lie operatörü* (*Lie parantez (bracket) operatörü*) denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Teorem 2.1.1. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$[,] : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) \rightarrow [X, Y]$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanırsa, $[,]$ operatörü $\chi(M)$ üzerinde bir Lie operatörüdür (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.5. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $X \in \chi(M)$ için L_X , keyfi (s, r) tipinde tensör alanını yine (s, r) -tipinde bir tensör alanına götüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir operatör olup X vektör alanına göre *Lie türev operatörü* olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

$$(i) L_X(f) = X(f), \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(ii) L_X Y = [X, Y], \quad \forall Y \in \chi(M)$$

$$(iii) L_X g(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y), \quad \forall Y, Z \in \chi(M)$$

Tanım 2.1.6. (M, g) bir Riemann manifoldu ve L_X , X vektör alanına göre Lie türev operatörü olsun. Her X vektör alanı için,

$$L_X g = 0$$

ise X vektör alanına bir *Killing vektör alanı* denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.7. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde verilen her bir diferensiyel s -forma bir diferensiyel $(s + 1)$ -form karşılık getirilen diferensiyel operatörü *dış türev operatörü* olarak adlandırılır ve d ile gösterilir. Özel olarak 1-form w simgesi ile birlikte dw ve 2-form Ω simgesi ile birlikte $d\Omega$ şeklinde gösterilirse d operatörü,

$$dw(X, Y) = \frac{1}{2} \{X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X, Y])\} \quad (2.1)$$

ve

$$d\Omega(X, Y, Z) = \frac{1}{3} \{X(\Omega(Y, Z)) - Y(\Omega(X, Z)) - Z(\Omega(X, Y)) \quad (2.2)$$

$$- \Omega([X, Y], Z) + \Omega([X, Z], Y) - \Omega([Y, Z], X)\}$$

olarak tanımlanır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.2. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için Riemann konneksiyonu,

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \quad (2.3)$$

$$- g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])$$

dir.

Tanım 2.1.8. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\mathcal{R} : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow \mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.4)$$

ile tanımlanan (1,3)-tipli tensör alanı $\mathcal{R}$ ye M nin *Riemann eğrilik tensörü* denir (Spivak 1979).

Teorem 2.1.3. M bir Riemann manifoldu ve $\mathcal{R}$, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$(i) \quad \mathcal{R}(X, Y)Z = -\mathcal{R}(Y, X)Z$$

$$(ii) \quad g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W) = -g(\mathcal{R}(Y, X)Z, W)$$

$$(iii) \quad \mathcal{R}(X, Y)Z + \mathcal{R}(Y, Z)X + \mathcal{R}(Z, X)Y = 0$$

$$(iv) \quad g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W) = g(\mathcal{R}(Z, W)X, Y)$$

özelliklerini sağlar (O'Neill 1983).

Önerme 2.1.1. (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ da M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu ve f , (1,1) - tipli bir tensör alanı olsun. O zaman,

$$(\nabla_X f)Y = \nabla_X (fY) - f(\nabla_X Y)$$

dır (O'Neill 1983).

Önerme 2.1.2. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. F simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X F)Y, Z) = g(Y, (\nabla_X F)Z)$$

eşitliği geçerlidir (O'Neill 1983).

Önerme 2.1.3. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$g((\nabla_X G)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_X G)Z)$$

dir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.9. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\mathcal{R}$, (M, g) nin bir Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\mathcal{R}(X, Y)Z + \mathcal{R}(Z, X)Y + \mathcal{R}(Y, Z)X = 0$$

bağıntısı *I. Bianchi özdeşliği* olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.10. (M, g) bir Riemann manifoldu, M nin Riemann eğrilik tensörü $\mathcal{R}$ ve ∇ Levi-Civita konneksiyon olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X \mathcal{R})(Y, Z) + (\nabla_Y \mathcal{R})(Z, X) + (\nabla_Z \mathcal{R})(X, Y) = 0$$

bağıntısı *II. Bianchi özdeşliği* olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.11. (M, g) bir Riemann manifoldu, M nin Riemann eğrilik tensörü $\mathcal{R}$ ve $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, $\chi(M)$ nin bir bazı olsun. Böylece,

$$Q : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$X \rightarrow Q(X) = - \sum_{i=1}^n \mathcal{R}(E_i, X)E_i$$

şeklinde tanımlı Q operatörüne M nin *Ricci operatörü* denir. Ayrıca Q yardımı ile M nin Ricci eğrilik tensörü Ric ,

$$Ric : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathfrak{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow Ric(X, Y) = g(Q(X), Y)$$

biçiminde tanımlanır (Chen 1973).

Tanım 2.1.12. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$S : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \Re$$

$$(X, Y) \rightarrow S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(\mathcal{R}(e_i, X)Y, e_i)$$

şeklinde tanımlı (0,2) - tipindeki S tensör alanına M üzerinde *Ricci eğrilik tensörü* denir. Ayrıca, (0,2) - tipli Q Ricci operatörü,

$$S(X, Y) = g(QX, Y)$$

eşitliği ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.13. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i)$$

değerine M nin *skalar eğriliği* denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.14. $\bar{M}$ ve M birer diferensiyellenebilir manifold ve

$$\Psi : \bar{M} \rightarrow M$$

bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer

$$\text{rank} \Psi = \text{boy} \bar{M}$$

ise Ψ dönüşümüne bir *immersiyon (daldırma)* denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.1.15. $\bar{M}$ ve M birer C^∞ manifold ve $\bar{M} \subset M$ olsun. Eğer,

$$J : \bar{M} \rightarrow M$$

doğal injeksiyonu bir immersiyon ise $\bar{M}$ ye M nin bir *alt manifoldu* denir (Brickell ve Clark 1970).

Tanım 2.1.16. M bir C^∞ manifold ve $\bar{M}$, M nin bir alt manifoldu olsun. Herhangi bir $p \in \bar{M}$ noktası için,

$$TM = \{V \in T_p M : g(X_p, V) = 0, \quad \forall X_p \in T_p \bar{M}\}$$

cümlesi tanımlansın. $p \in \bar{M}$ noktasında $\forall X_p \in T_p \bar{M}$ için,

$$g(X_p, V) = 0$$

koşulunu sağlayan V vektörüne M nin *teğet vektörü*, V nin birim vektörü olması halinde de $\bar{M}$ nin *birim teğet normal vektörü* denir. $\bar{M}$ nin her noktasındaki tüm normal vektörlerini içeren $T\bar{M}$ uzayına da $\bar{M}$ nin *tanjant demeti* adı verilir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.4. (M, g) bir sabit $\mathcal{K}$ eğriliğine sahip olan bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, M üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanlar için,

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \mathcal{K}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

dır (Yano ve Kon 1984).

2.2. Hemen Hemen Kompleks ve Hemen Hemen Kontakt (Değme) Manifoldlar

Bu kısımda, hemen hemen kompleks ve hemen hemen kontakt (değme) manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M bir diferensiyellenebilir reel manifold olsun. M nin her p noktasındaki $T_p M$ tanjant uzayı üzerinde tanımlı bir,

$$J : T_p M \rightarrow T_p M$$

lineer dönüşümü,

$$J^2 = -I$$

koşulunu sağlıyor ise J ye M üzerinde *hemen hemen (almost) kompleks yapı*, M manifolduna da *almost kompleks manifold* denir. Her almost kompleks manifold daima çift boyutludur (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.2. M bir almost kompleks manifold ve M üzerinde almost kompleks yapı f olsun. g , M üzerinde bir Riemann metriği olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$g(f(X), f(Y)) = g(X, Y) \quad (2.5)$$

özellikleri sağlanıyor ise g ye M üzerinde *Hermityan metrik* denir. M manifolduna da *almost Hermityan manifold* denir. Hermityan metrik ile verilen kompleks manifolda ise *Hermityan manifold* denir (Blair 2002, Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.3. (M, J, g) $2n$ -boyutlu bir almost Hermityan manifold olsun. Her X, Y vektör alanları için,

$$F(X, Y) = g(X, JY)$$

eşitliği ile tanımlanan F 2-formuna almost Hermityan yapısının *temel 2-formu* denir. Eğer $dF = 0$ ise (J, g) yapısına *almost Kahler yapı* denir. Bu yapı ile elde edilen manifolda ise *almost Kahler manifoldu* denir. Bir Kahler yapı ile verilen kompleks manifolda *Kahler manifoldu* denir. Bir Hermityan manifoldunun bir Kahler manifold olması için gerek ve yeter şart,

$$\nabla_J = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Blair 2002).

Tanım 2.2.4. M , $(2n+1)$ -boyutlu bir manifold, f, ξ, η da M üzerinde, sırasıyla, $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı, bir vektör alan ve 1-form olsunlar. Eğer f, ξ, η için, M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere

$$\eta(\xi) = 1$$

ve

$$f^2 X = -X + \eta(X)\xi \quad (2.6)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o halde, (f, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir *hemen hemen kontakt yapı* ve bu yapı ile birlikte M ye bir *hemen hemen kontakt (değme) manifold* denir. Her almost kontakt (değme) manifold daima tek boyutludur (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.5. $(2n + 1)$ -boyutlu M manifoldu ve (f, ξ, η) almost kontakt yapısı ile verilsin. M üzerinde bir g Riemann metriği,

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (2.7)$$

ve

$$g(f(X), f(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.8)$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine M üzerinde *hemen hemen kontakt metrik*, (f, ξ, η, g) yapısına *hemen hemen kontakt metrik yapı* ve (f, ξ, η, g) yapısı ile M ye de *hemen hemen kontakt metrik manifold* denir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.2.1. M , (f, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda,

$$g(f(X), Y) = -g(X, f(Y)) \quad (2.9)$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.2.1. M bir almost kontakt metrik manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$g(f(X), f(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.10)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır (Blair 1976).

Tanım 2.2.6. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir manifold, η da M üzerinde bir 1-form olsun. Eğer,

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0 \quad (2.11)$$

koşulunu sağlıyor ise M bir *kontakt yapıya sahiptir* denir. M manifolduna da *kontakt manifold* denir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.2.2. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir manifold, η da M üzerinde bir 1-form olsun. Eğer,

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

koşulunu sağlıyor ise M bir *kontakt yapıya sahiptir*.

İspat 2.2.2.

(i) η , M nin bir 1-formu ve

(ii) $(d\eta)^n$ de n . dereceden dış çarpımı göstermek üzere,

$$(d\eta)^n = \underbrace{(d\eta)\wedge(d\eta)\wedge(d\eta)\wedge\ldots\wedge(d\eta)}_{n-tane}$$

V^* , V vektör uzayına dual olmak üzere eğer dış çarpım, ΛV^* Grassman cebirinin bir θ kuadratik formu için,

$$\theta^r \neq 0 \text{ ve } \theta^{r+1} = 0$$

şartlarını sağlıyorsa θ nın $2r$ ranklı olduğu görülür. Buna eşdeğer olarak,

$$rank\theta = boyV - boyV_0$$

dır. Burada,

$$V_0 = \{X : X \in V, \theta(X, V) = 0\}$$

dır. Yani,

$$V_0 = \{X \in V : (\forall Y) (Y \in V \Rightarrow \theta(X, Y) = 0)\}$$

dır. Buna ilaveten bir M kontakt manifoldu üzerinde,

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

denklemini gereğince $\Lambda T_M^*(P)$ Grassman cebirindeki $d\eta$ kuadratik formunun rankı $2n$ dir. Bu durumda,

$$V_0 = \{X : X \in T_M(P), d\eta(X, T_M(P)) = 0\}$$

altuzayı 1-boyutlu bir altuzaydır ve V_0 üzerinde $\eta \neq 0$ dir. $\xi_P \in V_0$ elemanı $\eta(\xi_P) = 1$ olacak şekilde V_0 ın bir elemanı olsun. O zaman ξ bir vektör alanıdır ve M üzerinde η ile tanımlı, η ya karşılık gelen vektör alanı adını alır ve $\eta(\xi) = 1$ olduğundan asla sıfır olamaz (Sağlamer 1995).

Tanım 2.2.7. M bir almost kontakt metrik manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$F(X, Y) = g(X, f(Y)) = d\eta(X, Y) \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlı F dönüşümüne (f, ξ, η, g) almost kontakt metrik yapısının *II. temel formu* denir. Burada η kontakt formu ile $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ koşulu $\eta \wedge (F)^n \neq 0$ şeklinde de gösterilir.

Tanım 2.2.8. $(2n + 1)$ -boyutlu bir almost kontakt metrik manifold M olsun. Eğer;

$$d\eta(X, Y) = g(X, f(Y)) = F(X, Y)$$

oluyorsa (f, ξ, η, g) dörtlüsüne *almost kontakt metrik yapı* ve (M, f, ξ, η, g) beşlisine *almost kontakt metrik manifold* denir.

Sonuç 2.2.2. Her almost kontakt metrik manifold aynı zamanda kontakt manifolddur.

Teorem 2.2.3. M bir almost kontakt metrik manifold olsun. ∇ , M üzerinde bir konneksiyon olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$d\eta(X, Y) = g(X, f(Y)) = \frac{1}{2} \{g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X)\}$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.2.4. $(2n + 1)$ -boyutlu bir almost kontakt metrik manifold M olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$d\eta(X, \xi) = 0$$

ve

$$d\eta(f(X), Y) + d\eta(X, f(Y)) = 0$$

olur (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.9. (M, ξ, η, g) , $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer η kapalı yani $d\eta=0$ ve $dF = 2d\eta \wedge F$ ise (M, ξ, η, g) ye bir *hemen hemen Kenmotsu manifold* denir (Kenmotsu 1972).

Teorem 2.2.5. (M, ξ, η, g) , $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. M nin bir hemen hemen Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter şart,

$$(\nabla_X f)Y = -g(f(X) + h(X), Y)\xi - \eta(Y)(f(X) + h(X))$$

olmasıdır (Kenmotsu 1972).

Teorem 2.2.6. (M, ξ, η, g) , $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu manifold olsun. O halde,

$$\nabla_X \xi = -f^2(X) - f(h(X))$$

dır (Kenmotsu 1972).

Tanım 2.2.10. $(2n+1)$ -boyutlu bir almost kontakt manifold M ve M üzerinde almost kontakt yapı (f, ξ, η) olsun. Reel doğru $\mathfrak{R}$ ile gösterilirse $M \times \mathfrak{R}$ manifoldu $(2n+2)$ -boyutlu bir çarpım manifoldu olur. Burada X , $M \times \mathfrak{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı, t , $\mathfrak{R}$ nin bir koordinatı ve φ de $M \times \mathfrak{R}$ üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir bir fonksiyon, J , $M \times \mathfrak{R}$ üzerinde bir almost kompleks yapıyı veren $M \times \mathfrak{R}$ nin tanjant uzayındaki bir J lineer dönüşümü;

$$J : \chi(M \times \mathfrak{R}) \rightarrow \chi(M \times \mathfrak{R})$$

$$\left(X, \varphi \left(\frac{d}{dt} \right) \right) \rightarrow J \left(X, \varphi \left(\frac{d}{dt} \right) \right) = J \left(X, \varphi \left(\frac{d}{dt} \right) \right) = \left(f(X) - \varphi \xi, \eta(X) \left(\frac{d}{dt} \right) \right) \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.2.11. M bir diferensiyellenebilir manifold ve f , M üzerinde bir $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_f(X, Y) = f^2[X, Y] + [f(X), f(Y)] - f[f(X), Y] - f[X, f(Y)] \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanan $(1,2)$ -tipindeki tensör alanına f nin *Nijenhuis tensör alanı* denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.12. Bir almost kompleks metrik manifold M , M üzerindeki almost kompleks yapı f olsun. f nin Nijenhuis tensör alanı N_f olmak üzere $N_f = 0$ ise f dönüşümüne *integrallenebilirdir* denir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.2.7. f nin Nijenhuis tensör alanı N_f olmak üzere $N_f = 0$ ise f dönüşümü integrallenebilir.

İspat 2.2.7. Konneksiyon özelliklerinden,

$$(i) [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad (\text{sıfır torsiyon özelliği})$$

$$(ii) \nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) \quad \text{ve} \quad \nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X(Y)$$

(2.14) eşitliğinde kullanılırsa,

$$N_f(X, Y) = f^2[X, Y] + [f(X), f(Y)] - f[f(X), Y] - f[X, f(Y)]$$

(2.6) eşitliğinde $f^2 = -I$ olduğundan,

$$N_f(X, Y) = -[X, Y] + [fX, fY] - f[fX, Y] - f[X, fY]$$

olup, (1) numaralı bağıntı kullanılırsa,

$$N_f(X, Y) = -\nabla_X Y + \nabla_Y X + \nabla_{fX} fY - \nabla_{fY} fX - f\nabla_{fX} Y + f\nabla_Y fX - f\nabla_X fY + f\nabla_{fY} X$$

elde edilir, (2) numaralı bağıntı kullanılırsa,

$$N_f(X, Y) = -\nabla_X Y + \nabla_Y X + f^2 \nabla_X Y - f^2 \nabla_Y X - f^2 \nabla_X Y + f^2 \nabla_Y X - f^2 \nabla_X Y + f^2 \nabla_Y X$$

olur. $f^2 = -I$ kullanılırsa,

$$N_f(X, Y) = -\nabla_X Y + \nabla_Y X - \nabla_X Y + \nabla_Y X + \nabla_X Y - \nabla_Y X + \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

$$N_f(X, Y) = 0$$

elde edilir.

Tanım 2.2.13. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu almost kontakt manifold M ve (f, ξ, η) de M üzerinde almost kontakt yapı olsun. Reel doğru $\mathfrak{R}$ olmak üzere $M \times \mathfrak{R}$ çarpım manifoldu göz önüne alalım. O halde eğer $M \times \mathfrak{R}$ üzerinde,

$$J\left(X, \varphi \frac{d}{dt}\right) = \left(f(X) - \varphi \xi, \eta(X) \frac{d}{dt}\right) \quad (2.15)$$

ile verilen almost kompleks yapısı integrallenebilir ise (f, ξ, η) almost kontakt yapısı *normaldir* denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.14. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu almost kontakt manifold M olsun. $M \times \mathfrak{R}$ çarpım manifoldu üzerinde,

$$[,] : \chi(M \times \mathfrak{R}) \times \chi(M \times \mathfrak{R}) \rightarrow \chi(M \times \mathfrak{R})$$

$$\left(\left(X, \varphi \frac{d}{dt} \right), \left(Y, g \frac{d}{dt} \right) \right) \rightarrow \left[\left(X, \varphi \frac{d}{dt} \right), \left(Y, g \frac{d}{dt} \right) \right] = \left([X, Y], (X(g) - Y(\varphi)) \frac{d}{dt} \right)$$

şeklinde tanımlanan operatör,

- (i) Anti-simetrik,
- (ii) Jacobi özdeşliğini

sağlıyorsa bu operatöre *Lie operatörü* denir (Blair 2002).

Tanım 2.2.15. $(2n + 1)$ -boyutlu bir almost kontakt manifold M olsun.

$$N_J((X, 0), (Y, 0))$$

ve

$$N_J\left((X, 0), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right)$$

değerleri hesaplamaları ile sırasıyla,

$$N^1(X, Y) = N_f(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi$$

$$N^2(X, Y) = (L_{f(X)}\eta)Y - (L_{f(Y)}\eta)X$$

$$N^3(X) = [\xi, f(X)] - f[X, \xi]$$

ve

$$N^4(X) = \xi\eta(X) - \eta[X, \xi]$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerle N^1, N^2, N^3 ve N^4 tensörleri tanımlanır.

Teorem 2.2.8. $(2n + 1)$ -boyutlu bir almost kontakt manifold M olsun. Bu yapının normal olabilmesi için gerek ve yeter şart N^1, N^2, N^3 ve N^4 tensörlerinin sıfır olmasıdır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.2.9. $(2n + 1)$ -boyutlu bir almost kontakt manifold M olsun. Şayet $N^1 = 0$ ise $N^2 = N^3 = N^4 = 0$ dır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.16. $(2n + 1)$ -boyutlu bir almost kontakt metrik manifold M olsun. Eğer M nin kontakt yapısı normal ise M bir *Sasaki yapıya* ya da *normal kontakt metrik yapıya sahiptir* denir. Sasaki yapıya sahip M manifolduna ise *Sasakian manifold* denir ve (M, f, ξ, g) ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

2.3. Hemen Hemen f -Manifoldlar

Tanım 2.3.1. $(2n + s)$ -boyutlu bir C^∞ manifold M olsun. M nin tanjant demeti TM olmak üzere,

$$f^3 - f = 0 \quad \text{ve} \quad \text{rank} f = 2n \quad (2.16)$$

koşulunu sağlayan $(1,1)$ -tipindeki diferensiyellenebilir, f tensör alanına *pseudo f -yapı* ve üzerinde bir f -yapı tanımlı M manifolduna da *pseudo f -manifold* denir.

$$(i) \quad k = f^2 \quad (ii) \quad t = -f^2 + 1 \quad (2.17)$$

ile tanımlanan iki bütünleyen izdüşüm operatörlerine karşılık sırasıyla D ve $D^\perp$ bütünleyen dağılımlar vardır. Burada $\text{boy}(D) = 2n$ ve $\text{boy}(D^\perp) = s$ dir.

Yardımcı Teorem 2.3.1. $(2n + s)$ -boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold M olsun. f , M üzerinde bir f -yapı, k ve t (2.17) eşitliği ile tanımlı bütünleyen izdüşüm fonksiyonları olmak üzere,

$$(i) \quad fk = kf = f \quad (ii) \quad ft = tf = 0 \quad (iii) \quad f^2k = k \quad (iv) \quad f^2t = 0 \quad (2.18)$$

dır (Ishihara ve Yano 1964).

(2.18) eşitliğindeki koşulu sağlayan k ve t izdüşüm fonksiyonları yardımı ile M nin tanjant demeti TM , biri $2n$ diğeri s boyutlu olan iki dağılımın direkt toplamı olarak yazılır. Yani,

$$TM = D \oplus D^\perp, \quad D \cap D^\perp = \{0\} \quad (2.19)$$

dır.

Tanım 2.3.2. $(2n + s)$ -boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold M olsun. Eğer M üzerinde, s -tane ξ_α vektör alanları ve s -tane η_α 1-formları olmak üzere,

$$f^2 = I - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha \otimes \xi_\alpha \quad , \quad \eta_\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.20)$$

olacak şekilde $(1,1)$ -tipinden bir f tensör alanı var ise M ye bir *almost parakontakt manifold* denir ve $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 2.3.2. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$, bir almost parakontakt manifold olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (i) \quad f(\xi_\alpha) &= 0 & (ii) \quad \eta_\alpha(f(m)) &= 0 \text{ yani } (\eta_\alpha \circ f = 0) \\ (iii) \quad \eta_\alpha(\xi_\alpha) &= 1 & (iv) \quad rank f &= 2n \end{aligned} \quad (2.21)$$

dir.

İspat 2.3.2.

(i) (2.20) eşitliğinde,

$$f^2 = I - \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta \otimes \xi_\beta$$

her iki tarafın ξ_α altında görüntüsü alınırsa,

$$f^2(\xi_\alpha) = (\xi_\alpha) - \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta(\xi_\alpha) \xi_\beta$$

olur. (2.21) eşitliğinden,

$$f^2(\xi_\alpha) = \xi_\alpha - \delta_{\alpha\beta} \xi_\alpha$$

elde edilir. Buradan,

$$f^2(\xi_\alpha) = 0$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} f^3 - f &= 0 \Rightarrow f = f^3 \Rightarrow f(\xi_\alpha) = f^3(\xi_\alpha) \\ &\Rightarrow f(\xi_\alpha) = f(f^2(\xi_\alpha)) \end{aligned}$$

$f^2(\xi_\alpha) = 0$ olduğundan değer yerine yazılırsa,

$$f(\xi_\alpha) = f(0)$$

ve

$$f(\xi_\alpha) = 0$$

elde edilir.

(ii) $\forall m \in \chi(M)$ için (2.16) , (2.20) ve (2.21) eşitlikleri kullanılırsa,

$$f^3(m) = f(f^2(m)) = f\left(m - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(m) \xi_\alpha\right) = f(m) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(m) f(\xi_\alpha)$$

$f(\xi_\alpha) = 0$ olduğundan,

$$f^3(m) = f(m)$$

bulunur. Diğer taraftan (2.20) eşitliğinden,

$$f^2(f(m)) = f(m) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(f(m)) \xi_\alpha$$

$f^3(m) = f(m)$ olduğu yerine yazılırsa,

$$f^3(m) = f^3(m) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(f(m)) \xi_\alpha$$

$$\sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(f(m)) \xi_\alpha = 0 \Rightarrow \eta_\alpha(f(m)) = 0 \quad \text{yani} \quad (\eta_\alpha \circ f = 0)$$

elde edilir.

(iii) $\eta_\alpha(X) = g(X, \xi_\alpha)$ eşitliğinde $X = \xi_\alpha$ alınırsa,

$$\eta_\alpha(\xi_\alpha) = g(\xi_\alpha, \xi_\alpha) = 1$$

ise

$$\eta_\alpha(\xi_\alpha) = 1$$

olur.

(iv) f lineer bir dönüşüm olduğundan,

$$\text{rank}(f) + \text{boy}(\text{çek}f) = \text{boy}(\chi(M))$$

dir. $m \in \text{çek}f$ olmak üzere,

$$f(m) = 0$$

dır. Buradan,

$$f^2(m) = f(f(m)) = f(0) = 0$$

olur. Ayrıca,

$$f^2(m) = m - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(m) \xi_{\alpha}$$

$$0 = m - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(m) \xi_{\alpha}$$

$$m = \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(m) \xi_{\alpha}$$

olur. Burada her iki tarafın f altında görüntüsü alınır,

$$f(m) = \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(m) f(\xi_{\alpha})$$

olup, $f(\xi_{\alpha}) = 0$ olduğundan,

$$f(m) = 0$$

dır. O halde her bir α için $\xi_{\alpha} \in \text{çek}f$, $1 \leq \alpha \leq s$ için ξ_{α} lineer bağımsız olup, $\text{çek}f = S_p\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$ dir. Buradan $\text{boy}(\text{çek}f) = s$ dir. Bu durumda,

$$\text{rank}(f) = \text{boy}(\chi(M)) - \text{boy}(\text{çek}f) = 2n$$

olur.

Yardımcı Teorem 2.3.3. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$, bir almost parakontakt manifold olsun. M üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(i) \quad g(fX, fY) = g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \eta_\alpha(Y) \quad (2.22)$$

$$(ii) \quad \eta_\alpha(X) = g(X, \xi_\alpha) \quad (2.23)$$

koşullarını sağlayan bir g Riemann metriği vardır (Yano ve Kon 1984).

İspat 2.3.3.

$$(i) \quad h(X, Y) = h(f^2X, f^2Y) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \eta_\alpha(Y)$$

$$g(X, Y) = \frac{1}{2} (h(X, Y) + h(fX, fY) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \eta_\alpha(Y))$$

Her iki tarafın f altında görüntüsü alınırsa,

$$g(fX, fY) = \frac{1}{2} (h(fX, fY) + h(f^2X, f^2Y) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(fX) \eta_\alpha(fY))$$

$$g(fX, fY) = \frac{1}{2} (h(fX, fY) + h(X, Y) - 2 \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \eta_\alpha(Y) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \eta_\alpha(Y))$$

$$g(fX, fY) = \frac{1}{2} (2g(X, Y) - 2 \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \eta_\alpha(Y))$$

$$g(fX, fY) = g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \eta_\alpha(Y)$$

elde edilir.

$$(ii) \quad g(fX, fY) = g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \eta_\alpha(Y)$$

$$f(\xi_\alpha) = 0 \quad , \quad \eta_\alpha(fX) = 0 \quad , \quad \eta_\alpha(\xi_\alpha) = 1$$

olmak üzere, yukarıdaki eşitlikte $Y = \xi_\alpha$ alırsak,

$$g(fX, f\xi_\alpha) = g(X, \xi_\alpha) - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(\xi_\alpha)$$

$$g(X, \xi_\alpha) = \eta_\alpha(X)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.3.4. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$, bir almost parakontakt manifoldu üzerinde g Riemann metriği,

$$g(fX, Y) - g(X, fY) = 0 \quad (2.24)$$

koşulunu sağlar. Yani, f simetriktir.

İspat 2.3.4. (2.22) eşitliğinden,

$$g(X, Y) = g(fX, fY) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)$$

elde edilir. Her iki tarafta X in f altında görüntüsü alınır,

$$g(fX, Y) = g(f^2X, fY) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(fX)\eta_\alpha(Y)$$

olur.

$$f^2(X) = X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X)\xi_\alpha$$

olduğu yerine yazılırsa,

$$g(fX, Y) = g\left(X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X)\xi_\alpha, fY\right)$$

elde edilir.

Sonuç 2.3.1. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$, bir almost parakontakt manifold olsun. (2.22) ve (2.23) eşitliklerini sağlayan keyfi bir Riemann metriği her zaman bulunabilir (Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.3.3. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$, bir almost parakontakt manifold olsun. (2.22) ve (2.23) eşitliklerini sağlayan bir g Riemann metriğiyle birlikte $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ ye bir *almost parakontakt metrik manifold* denir.

Tanım 2.3.4. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir almost parakontakt metrik manifold olsun. M üzerinde F , temel 2-formu $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$F(X, Y) = g(fX, Y) \quad (2.25)$$

ile tanımlıdır (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.3.1. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $F(X, Y)$ temel 2-formu simetriktir.

$$F(X, Y) = F(Y, X)$$

İspat 2.3.1.

$$F(X, Y) = g(fX, Y)$$

eşitliğinde g metriğine f uygulanırsa,

$$F(X, Y) = g(f^2X, fY)$$

olur. $f^2 = I$ olduğundan,

$$F(X, Y) = g(X, fY)$$

$$= g(fY, X)$$

$$= F(Y, X)$$

elde edilir.

Tanım 2.3.5. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir almost parakontakt metrik manifold ve F , temel 2-form olsun. Eğer M normal, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ vektör alanları birer Killing vektör alanı ve F , 2-formu kapalı (yani $dF = 0$) ise M , *normal almost parakontakt metrik manifold* olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 2.3.5. $\forall m \in \chi(M)$ ve $\forall \alpha \{1, 2, \dots, s\}$ için,

$$F(X, \xi_\alpha) = 0 \quad (2.26)$$

dır.

İspat 2.3.5. (2.26) eşitliğinde $Y = \xi_\alpha$ alınır, (Teorem 2.3.1.) de temel 2-formun simetrik oluşu ve (2.21) eşitliği kullanılırsa,

$$F(X, Y) = g(fX, Y) = g(X, fY)$$

$$F(X, \xi_\alpha) = g(X, f\xi_\alpha) = 0$$

bulunur.

Tanım 2.3.6. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir almost parakontakt manifold olsun. f nin Nijenhuis tensör alanı N_f olmak üzere,

$$S_f = N_f - 2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta_\alpha \otimes \xi_\alpha \quad (2.27)$$

ile belirtilen (1,2)-tipindeki S_f tensör alanına *torsiyon tensör alanı* denir. Burada N_f , Nijenhuis tensör alanı $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_f(X, Y) = f^2[X, Y] + [fX, fY] - f[fX, Y] - f[X, fY] \quad (2.28)$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Teorem 2.3.2.

$$S_f = N_f - 2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta_\alpha \otimes \xi_\alpha$$

eşitliğinde $S_f = 0$ ise $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$ almost parakontakt manifoldu normaldir.

İspat 2.3.2. Dış türev operatörü,

$$d\eta_\alpha(X, Y) = \frac{1}{2} \{X(\eta_\alpha(Y)) - Y(\eta_\alpha(X)) - \eta_\alpha([X, Y])\}$$

olmak üzere,

$$d\eta_\alpha(X, Y) = 0$$

ise

$$d\eta_\alpha(X, Y) = -\frac{1}{2} \eta_\alpha([X, Y]) = 0$$

olur.

$$[f, f](X, Y) - 2d\eta_\alpha(X, Y)\xi_\alpha = 0$$

eşitliğinde $Y = \xi_\alpha$ alınır,

$$[f, f](X, \xi_\alpha) - 2d\eta_\alpha(X, \xi_\alpha)\xi_\alpha = 0$$

elde edilir. Burada (2.28) ve (2.1) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & f^2[X, \xi_\alpha] + [fX, f\xi_\alpha] - f[fX, \xi_\alpha] - f[X, f\xi_\alpha] \\ & - 2\left\{\frac{1}{2}[X(\eta_\alpha(\xi_\alpha)) - \xi_\alpha(\eta_\alpha(X)) - \eta_\alpha([X, \xi_\alpha])]\right\}\xi_\alpha = 0 \end{aligned}$$

olur. $f^2 = I$ olduğundan,

$$\begin{aligned} & [X, \xi_\alpha] + [fX, f\xi_\alpha] - f[fX, \xi_\alpha] - f[X, f\xi_\alpha] \\ & - X(\eta_\alpha(\xi_\alpha))\xi_\alpha + \xi_\alpha(\eta_\alpha(X))\xi_\alpha + \eta_\alpha([X, \xi_\alpha])\xi_\alpha = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (Tanım 2.1.3) deki özellikler kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \nabla_X \xi_\alpha - \nabla_{\xi_\alpha} X + \nabla_{fX} f\xi_\alpha - \nabla_{f\xi_\alpha} fX - f\nabla_{fX} \xi_\alpha \\ & + f\nabla_{\xi_\alpha} fX - f\nabla_X f\xi_\alpha + f\nabla_{f\xi_\alpha} X + \eta_\alpha([X, \xi_\alpha])\xi_\alpha = 0 \end{aligned}$$

bulunur. (Tanım 2.1.2) deki özellikler kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \nabla_X \xi_\alpha - \nabla_{\xi_\alpha} X + f^2 \nabla_X \xi_\alpha - f^2 \nabla_{\xi_\alpha} X - f^2 \nabla_X \xi_\alpha \\ & + f^2 \nabla_{\xi_\alpha} X - f^2 \nabla_X \xi_\alpha + f^2 \nabla_{\xi_\alpha} X + \eta_\alpha([X, \xi_\alpha])\xi_\alpha = 0 \end{aligned}$$

olur. $f^2 = I$ olduğundan,

$$\begin{aligned} & \nabla_X \xi_\alpha - \nabla_{\xi_\alpha} X + \nabla_X \xi_\alpha - \nabla_{\xi_\alpha} X - \nabla_X \xi_\alpha \\ & + \nabla_{\xi_\alpha} X - \nabla_X \xi_\alpha + \nabla_{\xi_\alpha} X + \eta_\alpha([X, \xi_\alpha])\xi_\alpha = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.3.7. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir almost parakontakt metrik manifold olsun. $\forall \alpha, 1 \leq \alpha \leq s$ için ξ_α nın duali η_α olmak üzere,

$$\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_s \wedge (F)^n \neq 0$$

olduğunda almost parakontakt metrik manifolduna *yönlendirilebilirdir* denir.

2.4. Hemen Hemen f -Manifoldların Torsiyon Tensörü

$(2n + s)$ -boyutlu bir almost parakontakt metrik manifoldu $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ olsun. $M \times \mathfrak{R}^s$ $(2n + 2s)$ -boyutlu bir çarpım manifoldudur. $\mathfrak{R}^s$ üzerindeki vektör alanları,

$$\chi(\mathfrak{R}^s) = \left\{ \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} : f_\alpha \in C^\infty(\mathfrak{R}^s, \mathfrak{R}), \quad 1 \leq \alpha \leq s \right\}$$

şeklindedir. $\left(X, \varphi_1 \frac{d}{dt_1}, \dots, \varphi_s \frac{d}{dt_s}\right)$ lar $M \times \mathfrak{R}^s$ deki vektör alanlarıdır. Burada X , M^{2n+s} de bir vektör alanı, $(t_1, t_2, \dots, t_s)$ ile $\mathfrak{R}^s$ de koordinat düzlemini, φ_α lar $\mathfrak{R}^s$ üzerindeki C^∞ fonksiyonlarıdır. Ayrıca $\mathfrak{R}^s$ üzerinde almost product yapı J yi,

$$J : \chi(M \times \mathfrak{R}^s) \rightarrow \chi(M \times \mathfrak{R}^s)$$

$$\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha}\right) \rightarrow J \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha}\right) = \left(-f(X) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \xi_\alpha, \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \frac{d}{dt_\alpha}\right) \quad (2.29)$$

olarak tanımlanır.

Yardımcı Teorem 2.4.1. J dönüşümü,

(i) lineerdir.

(ii) $J^2 = I$

dır.

İspat 2.4.1.

(i) $\forall \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha}\right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha}\right) \in \chi(M \times \mathfrak{R}^s)$ ve $\lambda, w \in \mathfrak{R}$ için,

$$J \left(\lambda \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha}\right) + w \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha}\right) \right) = J \left((\lambda X + wY), \sum_{\alpha=1}^s (\lambda \varphi_\alpha + w g_\alpha) \frac{d}{dt_\alpha} \right)$$

olur. (2.29) eşitliğinden,

$$J\left(\lambda\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) + w\left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right)\right) =$$

$$-f(\lambda X + wY) + \sum_{\alpha=1}^s (\lambda \varphi_{\alpha} + w g_{\alpha}) \xi_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha} (\lambda X + wY) \frac{d}{dt_{\alpha}}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse,

$$J\left(\lambda\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) + w\left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right)\right) =$$

$$-\lambda f(X) - w f(Y) + \lambda \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \xi_{\alpha} + w \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \xi_{\alpha}, \left(\lambda \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) + w \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(Y)\right) \frac{d}{dt_{\alpha}}$$

olur. Eşitliğin sağ tarafı λ ve w parantezlerine alınır,

$$J\left(\lambda\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) + w\left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right)\right) =$$

$$\lambda\left(-f(X) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \xi_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) + w\left(-f(Y) + \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \xi_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(Y) \frac{d}{dt_{\alpha}}\right)$$

bulunur. Buradan,

$$J\left(\lambda\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) + w\left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right)\right) =$$

$$\lambda J\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) + w J\left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right)$$

olur.

(ii) $\forall \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) \in \chi(M \times \mathfrak{R}^s)$ için (2.29) eşitliğinde her iki tarafa J uygulanırsa,

$$J^2\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) = J\left(-f(X) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \xi_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \frac{d}{dt_{\alpha}}\right)$$

olur. Eşitliğin sağ tarafına (2.29) eşitliği uygulanırsa,

$$J^2\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) =$$

$$\left[-f\left(-f(X) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \xi_{\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}\left(-f(X) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \xi_{\alpha}\right) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right] =$$

$$\left[f^2(X) - \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} f(\xi_{\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}\left(-f(X) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \xi_{\alpha}\right) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right]$$

elde edilir. $f(\xi_{\alpha}) = 0$ ve $\varphi_{\alpha} = \eta_{\alpha}(X)$ olduğundan,

$$J^2\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) = \left[f^2(X) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}\left(-f(X) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}\right) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right]$$

bulunur. Burada (2.20) eşitliği kullanılırsa,

$$J^2\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) = \left[X, \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}\left(-f(-f(X)) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(-f(X)) \xi_{\alpha}\right) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right]$$

olur. $f(\xi_{\alpha}) = 0$ olduğundan,

$$J^2\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) = \left[X, \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(f^2(X)) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right]$$

elde edilir. $f^2(X) = X$ olduğu yerine yazılırsa,

$$J^2\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) = \left[X, \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right]$$

olur.

$$J^2\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) = \left[X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}} \right]$$

elde edilir. Buradan $J^2 = I$ bulunur. O halde J , $(M \times \mathfrak{R}^s)$ üzerinde bir product yapıdır.

Yardımcı Teorem 2.4.2. $(2n + s)$ -boyutlu bir almost parakontakt metrik manifold $(M, f, \xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, g)$ olsun. Bu durumda $(M \times \mathfrak{R}^s, J)$ bir almost product manifolddur.

Tanım 2.4.1. $(2n + s)$ -boyutlu bir almost parakontakt manifold $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ ve $(M \times \mathfrak{R}^s, J)$ bir almost product manifold olsun. Almost product yapı J nin Nijenhuis tensörü (2.28) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \forall \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \in \chi(M \times \mathfrak{R}^s) \text{ için,} \\ N_J \left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) = \\ J^2 \left[\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right] + \left[J \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), J \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right] \\ - J \left[J \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right] - J \left[\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), J \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right] \end{aligned}$$

dır.

Tanım 2.4.2. $(M \times \mathfrak{R}^s, J)$ bir almost product manifold olsun. $(M \times \mathfrak{R}^s)$ üzerinde,

$$[,] : \chi(M \times \mathfrak{R}^s) \times \chi(M \times \mathfrak{R}^s) \rightarrow \chi(M \times \mathfrak{R}^s)$$

$$\left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) \rightarrow \left[\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right]$$

olmak üzere,

$$\left[\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right] = \left([X, Y], \sum_{\alpha=1}^s (X(g_\alpha) - Y(\varphi_\alpha)) \frac{d}{dt_\alpha} \right) \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanan operatöre *bracket (parantez) operatörü* denir (Sağbaş, 2010).

Yardımcı Teorem 2.4.3. (Tanım 2.4.2.) ile verilen $[,]$ operatörü,

- (i) Simetriktir.
- (ii) Jacobi özdeşliğini sağlar.

İspat 2.4.3.

(i) $\forall \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) \in \chi(M \times \mathfrak{R}^s)$ için (Tanım 2.2.14.) den,

$$\begin{aligned} \left[\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right)\right] &= \left([X, Y], \sum_{\alpha=1}^s (X(g_{\alpha}) - Y(\varphi_{\alpha})) \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) \\ &= \left([Y, X], \sum_{\alpha=1}^s (Y(\varphi_{\alpha}) - X(g_{\alpha})) \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) \\ &= \left(\left(Y, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right), \left(X, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $[,]$ operatörü simetrik olur.

(ii) $\forall A, B, C \in \chi(M \times \mathfrak{R}^s)$ için,

$$A = \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right), B = \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) \text{ ve } C = \left(Z, \sum_{\alpha=1}^s h_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right)$$

olmak üzere (Tanım 2.2.14.) den,

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] &= \left[\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right), \left[\left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right), \left(Z, \sum_{\alpha=1}^s h_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right)\right]\right] \\ &= \left([X, [Y, Z]], \sum_{\alpha=1}^s (XY(g_{\alpha}) - XZ(h_{\alpha}) - [X, Z](\varphi_{\alpha})) \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) \\ [B, [C, A]] &= \left[\left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right), \left[\left(Z, \sum_{\alpha=1}^s h_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right), \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}}\right)\right]\right] \\ &= \left([Y, [Z, X]], \sum_{\alpha=1}^s (YZ(h_{\alpha}) - YX(\varphi_{\alpha}) - [Z, X](g_{\alpha})) \frac{d}{dt_{\alpha}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[C, [A, B]] &= \left[\left(Z, \sum_{\alpha=1}^s h_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}} \right), \left[\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}} \right) \right] \right] \\
&= \left([Z, [X, Y]], \sum_{\alpha=1}^s (ZX(\varphi_{\alpha}) - ZY(g_{\alpha}) - [X, Y](h_{\alpha})) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada,

$$[X, Y] = X(Y) - Y(X)$$

eşitliği göz önüne alınır ve Jacobi özdeşliği

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$$

şeklinde gösterilirse,

$$\begin{aligned}
&\{ [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]], \sum_{\alpha=1}^s ([X, Y](h_{\alpha}) - [X, Y](h_{\alpha})) \\
&+ [Y, Z](\varphi_{\alpha}) - [Y, Z](\varphi_{\alpha}) + [Z, X](g_{\alpha}) - [Z, X](g_{\alpha}) \frac{d}{dt_{\alpha}} \} = 0
\end{aligned}$$

olduğundan Jacobi özdeşliğini sağlar.

Yardımcı Teorem 2.4.4. $(M \times \mathfrak{R}^s, J)$ bir almost product manifold ve J almost product yapının Nijenhuis torsiyon tensörü N_J olmak üzere,

$$(i) \quad N_J = ((X, 0), (Y, 0)) = \left\{ N^1(X, Y), N^2(X, Y) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right\}$$

ve

$$(ii) \quad N_J = \left((X, 0), \left(0, \frac{d}{dt_{\alpha}} \right) \right) = \{ N^3(X), N^4(X) \}$$

dir.

İspat 2.4.4.

(i) (2.28) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} N_J((X, 0), (Y, 0)) &= J^2[(X, 0), (Y, 0)] + [J(X, 0), J(Y, 0)] \\ &\quad - J[J(X, 0), (Y, 0)] - J[(X, 0), J(Y, 0)] \end{aligned}$$

bulunur. (2.29) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} N_J((X, 0), (Y, 0)) &= \\ &[(X, 0), (Y, 0)] + \left[\left(-f(X), \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right), \left(-f(Y), \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(Y) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right) \right] \\ &- J \left[\left(-f(X), \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right), (Y, 0) \right] - J \left[(X, 0), \left(-f(Y), \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(Y) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} N_J((X, 0), (Y, 0)) &= \\ &([X, Y], 0) + \left([-f(X), -f(Y)], \sum_{\alpha=1}^s (f(Y)\eta_{\alpha}(X) - f(X)\eta_{\alpha}(Y)) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right) \\ &- J \left([-f(X), Y], - \sum_{\alpha=1}^s (Y\eta_{\alpha}(X)) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right) - J \left([X, -f(Y)], \sum_{\alpha=1}^s (X\eta_{\alpha}(Y)) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right) \end{aligned}$$

olur. (2.29) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} N_J((X, 0), (Y, 0)) &= \\ &([X, Y], 0) + \left([f(X), f(Y)], \sum_{\alpha=1}^s (f(Y)\eta_{\alpha}(X) - f(X)\eta_{\alpha}(Y)) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right) \\ &- \left(-f[-f(X), Y] - \sum_{\alpha=1}^s (Y\eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha}), \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}([-f(X), Y]) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right) \\ &- \left(-f[X, -f(Y)] + \sum_{\alpha=1}^s (X\eta_{\alpha}(Y)\xi_{\alpha}), \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}([X, -f(Y)]) \frac{d}{dt_{\alpha}} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafında parantezler düzenlenirse buradan,

$$N_f((X, 0), (Y, 0)) =$$

$$\{([X, Y] + [f(X), f(Y)] - f[f(X), Y] - f[X, f(Y)] + \sum_{\alpha=1}^s (Y\eta_\alpha(X) - X\eta_\alpha(Y))\xi_\alpha),$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^s (f(Y)\eta_\alpha(X) - f(X)\eta_\alpha(Y) + \eta_\alpha([f(X), Y]) + \eta_\alpha([X, f(Y)]))\frac{d}{dt_\alpha}\right)\}$$

elde edilir. Burada ilk kısma N^1 denilirse,

$$N^1 = \left([X, Y] + [f(X), f(Y)] - f[f(X), Y] - f[X, f(Y)] + \sum_{\alpha=1}^s (Y\eta_\alpha(X) - X\eta_\alpha(Y))\xi_\alpha\right)$$

olur. Bu eşitliğin sağına $\sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha([X, Y])\xi_\alpha$ eklenip çıkarılırsa,

$$N^1 = [X, Y] - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha([X, Y])\xi_\alpha + [f(X), f(Y)] - f[f(X), Y] - f[X, f(Y)]$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^s (Y\eta_\alpha(X) - X\eta_\alpha(Y) + \eta_\alpha([X, Y]))\xi_\alpha$$

$$= f^2[X, Y]\xi_\alpha + [f(X), f(Y)] - f[f(X), Y] - f[X, f(Y)]$$

$$- \sum_{\alpha=1}^s (X\eta_\alpha(Y) - Y\eta_\alpha(X) - \eta_\alpha([X, Y]))\xi_\alpha$$

elde edilir. Ayrıca,

$$2d\eta_\alpha(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^s (X\eta_\alpha(Y) - Y\eta_\alpha(X) - \eta_\alpha([X, Y]))\xi_\alpha \quad (2.31)$$

olmak üzere (2.28) ve (2.31) eşitliklerinden,

$$N^1(X, Y) = N_f(X, Y) - 2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta_\alpha(X, Y)\xi_\alpha \quad (2.32)$$

elde edilir. İkinci kısmı,

$$N^2 = \left\{\sum_{\alpha=1}^s (f(Y)\eta_\alpha(X) - f(X)\eta_\alpha(Y) + \eta_\alpha([f(X), Y]) + \eta_\alpha([X, f(Y)]))\frac{d}{dt_\alpha}\right\}$$

olsun. Lie türev özelliklerinden,

$$(L_{f(Y)}\eta_\alpha)(X) = \{f(Y)\eta_\alpha(X) - \eta_\alpha([f(Y), X])\}$$

$$(L_{f(X)}\eta_\alpha)(Y) = \{f(X)\eta_\alpha(Y) - \eta_\alpha([f(X), Y])\}$$

dir. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} & (L_{f(Y)}\eta_\alpha)(X) - (L_{f(X)}\eta_\alpha)(Y) = \\ & \{f(Y)\eta_\alpha(X) - f(X)\eta_\alpha(Y) + \eta_\alpha([f(X), Y]) + \eta_\alpha([f(Y), X])\} \end{aligned}$$

olup,

$$N^2(X, Y) = (L_{f(Y)}\eta_\alpha)(X) - (L_{f(X)}\eta_\alpha)(Y) \quad (2.33)$$

elde edilir.

(ii) (2.28) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} N_J \left((X, 0), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) &= J^2 \left[(X, 0), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right] + \left[J(X, 0), J \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right] \\ &\quad - J \left[J(X, 0), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right] - J \left[(X, 0), J \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right] \end{aligned}$$

bulunur. (2.29) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} N_J \left((X, 0), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) &= \left[(X, 0), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right] + \left[\left(-f(X), \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \frac{d}{dt_\alpha} \right), (\xi_\alpha, 0) \right] \\ &\quad - J \left[\left(-f(X), \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right] - J[(X, 0), (\xi_\alpha, 0)] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
N_J \left((X, 0), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) &= \left([X, 0], \left((X) \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) + \left([-f(X), \xi_\alpha], \left(-\sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \xi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) \\
&\quad - \left(-f[-f(X), 0] - \sum_{\alpha=1}^s f(X) \xi_\alpha, \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha([-f(X), 0]) \frac{d}{dt_\alpha} \right) \\
&\quad - \left(-f[X, \xi_\alpha], \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha([X, \xi_\alpha]) \frac{d}{dt_\alpha} \right)
\end{aligned}$$

olur. (2.29) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
N_J \left((X, 0), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) &= \\
&\quad - \left([f(X), \xi_\alpha], \left(\sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \xi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) + \left(f[X, \xi_\alpha], \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha([X, \xi_\alpha]) \frac{d}{dt_\alpha} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafında parantezler düzenlenirse buradan,

$$\begin{aligned}
N_J \left((X, 0), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) &= \\
&\quad \left\{ (-[f(X), \xi_\alpha] + f[X, \xi_\alpha]), \left(\sum_{\alpha=1}^s (-\eta_\alpha(X) \xi_\alpha + \eta_\alpha([X, \xi_\alpha])) \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin ilk kısmına N^3 , ikinci kısmına N^4 denilirse,

$$N^3(X) = [\xi_\alpha, f(X)] - f[\xi_\alpha, X] \quad (2.34)$$

$$N^4(X) = \sum_{\alpha=1}^s (-\eta_\alpha(X) \xi_\alpha + \eta_\alpha([X, \xi_\alpha])) \frac{d}{dt_\alpha} \quad (2.35)$$

olur. Ayrıca,

$$(L_{\xi_\alpha} f)(X) = [\xi_\alpha, f(X)] - f[\xi_\alpha, X]$$

$$(L_{\xi_\alpha} \eta_\alpha)(X) = \sum_{\alpha=1}^s (-\eta_\alpha(X) \xi_\alpha + \eta_\alpha([X, \xi_\alpha])) \frac{d}{dt_\alpha}$$

$$N^3(X) = (L_{\xi_\alpha} f)(X)$$

ve

$$N^4(X) = (L_{\xi_\alpha} \eta_\alpha)(X)$$

elde edilir.

Tanım 2.4.3. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir almost parakontakt metrik manifold ve f nin Nijenhuis tensör alanı N_f olsun. $(M \times \mathfrak{R}^s, J)$ almost product manifoldun Nijenhuis tensör alanı $N_J = 0$ ise $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ *normaldir* denir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.4.1. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir almost parakontakt metrik manifold olsun. Bu yapının normal olabilmesi için gerek ve yeter koşul N^1 , N^2 , N^3 ve N^4 tensörlerinin sıfır olmasıdır (Sağbaş, 2010).

İspat 2.4.1.

$\forall X, Y \in \chi(M \times \mathfrak{R}^s)$ ve $\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha}\right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha}\right) \in \chi(M \times \mathfrak{R}^s)$ için,

$$\begin{aligned} N_J \left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) = \\ N_J \left((X, 0) + \left(0, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), (Y, 0) + \left(0, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) \end{aligned}$$

eşitliğinde J nin lineerliği, N_J nin bilineer ve anti-simetrik oluşu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} N_J \left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) = \\ N_J((X, 0), (Y, 0)) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha N_J \left((X, 0), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) \\ - \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha N_J \left((Y, 0), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha g_\alpha N_J \left(\left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$N_J \left(\left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) = 0$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} N_J \left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) &= N_J((X, 0), (Y, 0)) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha N_J \left((X, 0), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) - \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha N_J \left((Y, 0), \left(0, \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.32) , (2.33) , (2.34) ve (2.35) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} N_J \left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) &= ((N^1(X, Y), N^2(X, Y))) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha ((N^3(X), N^4(X))) - \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha ((N^3(Y), N^4(Y))) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} N_J \left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha \frac{d}{dt_\alpha} \right) \right) &= (N^1(X, Y) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha N^3(X) - \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha N^3(Y), \\ &N^2(X, Y) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha N^4(X) - \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha N^4(Y)) \end{aligned}$$

$$N_J = 0$$

ise

$$N^1(X, Y) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha N^3(X) - \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha N^3(Y) = 0 \quad (2.36)$$

ve

$$N^2(X, Y) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha N^4(X) - \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha N^4(Y) = 0 \quad (2.37)$$

elde edilir. (2.28) eşitliğinden N_f nin ve (2.31) eşitliğinden $d\eta_\alpha$ nın anti-simetrik olduğu görülür. Böylece (2.32) eşitliğinden N_f de anti-simetrik olur. (2.36) eşitliği $\forall X, Y \in \chi(M)$ için sağlanır. (2.36) eşitliğinde $X = Y$ alınırsa,

$$N^1(X, X) = \sum_{\alpha=1}^s (g_\alpha - \varphi_\alpha) N^3(X) \quad (g_\alpha \neq \varphi_\alpha) \quad (2.38)$$

elde edilir. N^1 anti-simetrik olduğundan,

$$N^1(X, X) = 0$$

olur. Dolayısıyla,

$$\sum_{\alpha=1}^s (g_\alpha - \varphi_\alpha) N^3(X) = 0$$

olup $(g_\alpha \neq \varphi_\alpha)$ olduğundan,

$$N^3(X) = 0$$

olur. N^2 nin anti-simetrik olduğu (2.33) eşitliğinden görülür. Aynı şekilde (2.37) eşitliği $\forall X, Y \in \chi(M)$ için sağlanır. (2.37) eşitliğinde $X = Y$ alınırsa,

$$N^2(X, X) = \sum_{\alpha=1}^s (g_\alpha - \varphi_\alpha) N^4(X) \quad (g_\alpha \neq \varphi_\alpha) \quad (2.39)$$

elde edilir. N^2 anti-simetrik olduğundan,

$$N^2(X, X) = 0$$

olur. Dolayısıyla,

$$\sum_{\alpha=1}^s (g_\alpha - \varphi_\alpha) N^4(X) = 0$$

olup $(g_\alpha \neq \varphi_\alpha)$ olduğundan,

$$N^4(X) = 0$$

olur.

$$N^3(X) = 0 \quad \text{ve} \quad N^4(X) = 0$$

eşitlikleri $\forall X, Y \in \chi(M)$ için doğru olduğundan (2.36) ve (2.37) eşitlikleri kullanılırsa,

$$N^1(X, Y) = 0 \quad \text{ve} \quad N^2(X, Y) = 0$$

elde edilir.

Burada kabulümüz olan $(g_\alpha \neq \varphi_\alpha)$ yerine $(g_\alpha = \varphi_\alpha)$ kabul edilir ve (2.36) eşitliğinde $Y = -X$ alınırsa ve

$$N^1(X, X) = 0$$

olduğu kullanılırsa,

$$-N^1(X, X) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha N^3(X) + \sum_{\alpha=1}^s g_\alpha N^3(X) = 0 \Rightarrow 2 \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha N^3(X) = 0$$

olup $\varphi_\alpha \neq 0$ olduğundan,

$$N^3(X) = 0$$

elde edilir. Aynı işlemler (2.37) eşitliğinde yapılırsa,

$$N^4(X) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$N^1(X, Y) = 0 \quad \text{ve} \quad N^2(X, Y) = 0$$

olduğu görülür.

($\Leftarrow$) : Tersine kabul edelim ki

$$N^1(X, Y) = N^2(X, Y) = N^3(X) = N^4(X) = 0$$

olsun.

$$\begin{aligned}
& N_J \left(\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}} \right) \right) = \\
& \left(N^1(X, Y) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} N^3(X) - \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} N^3(Y), N^2(X, Y) + \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} N^4(X) - \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} N^4(Y) \right) \\
& = (0, 0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu $\forall \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \varphi_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}} \right), \left(Y, \sum_{\alpha=1}^s g_{\alpha} \frac{d}{dt_{\alpha}} \right) \in \chi(M \times \mathfrak{R}^s)$ için sağlandığından,

$$N_J = 0$$

dır. Dolayısıyla $(2n + s)$ -boyutlu $(M, f, \xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, g)$ almost parakontakt metrik manifoldu normaldir.

Teorem 2.4.2. $(M, f, \xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, g)$ bir almost parakontakt metrik manifold olsun. Eğer $N^1 = 0$ ise $N^2 = N^3 = N^4 = 0$ dır (Sağbaş, 2010).

İspat 2.4.2.

$$N^1 = 0$$

ise

$$N^1 \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right) = 0$$

dır. (2.21) , (2.28) , (2.31) ve (2.32) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
N^1 \left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right) &= \left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right] + \left[f(X), \sum_{\alpha=1}^s f(\xi_{\alpha}) \right] - f \left[f(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right] - f \left[X, \sum_{\alpha=1}^s f(\xi_{\alpha}) \right] \\
&\quad - \sum_{\alpha=1}^s \left(X \left(\eta_{\alpha} \left(\sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right) \right) - \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} (\eta_{\alpha}(X)) - \eta_{\alpha} \left(\left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right] \right) \right) \xi_{\alpha} \quad (2.40)
\end{aligned}$$

olup,

$$\left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right] - f \left[f(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} \right] + \sum_{\alpha=1}^s \left(\sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} (\eta_{\alpha}(X)) \right) \xi_{\alpha} = 0 \quad (2.41)$$

dır. (2.28) eşitliğinde $Y = \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha$ alınırsa,

$$N_f\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right) = f^2\left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right] + \left[f(X), \sum_{\alpha=1}^s f(\xi_\alpha)\right] - f\left[f(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right] - f\left[X, \sum_{\alpha=1}^s f(\xi_\alpha)\right]$$

elde edilir. Burada (2.41) ve (2.28) eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$N_f\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right) = f^2\left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right] - f\left[f(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right] - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha\left(\left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right]\right) \xi_\alpha$$

olur. $f^2 = I$ olduğundan,

$$N_f\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right) = \left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right] - f\left[f(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right] - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha\left(\left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right]\right) \xi_\alpha$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta_\alpha\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right) \xi_\alpha = \\ & = 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \left(X \left(\eta_\alpha\left(\sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right) \right) - \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha (\eta_\alpha(X)) - \eta_\alpha\left(\left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right]\right) \right) \xi_\alpha \end{aligned}$$

eşitliğinde (2.21) ve (2.29) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta_\alpha\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right) \xi_\alpha = \\ & = \sum_{\alpha=1}^s \left(X \left(\eta_\alpha\left(\sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right) \right) - \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha (\eta_\alpha(f(X))) - \eta_\alpha\left(\left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right]\right) \right) \xi_\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. (2.21) eşitliği yerine yazılırsa,

$$2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta_\alpha\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right) \xi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s \left(X \left(\eta_\alpha\left(\sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right) \right) - \eta_\alpha\left(\left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha\right]\right) \right) \xi_\alpha$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
N^1\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}\right) &= N_f\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}\right) - 2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta_{\alpha}\left(X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}\right) \xi_{\alpha} \\
&= \sum_{\alpha=1}^s \{[X, \xi_{\alpha}] + f[\xi_{\alpha}, f(X)] - X(\eta_{\alpha}(\xi_{\alpha}))\xi_{\alpha}\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafın η_{α} altında görüntüsü alınır,

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^s \{\eta_{\alpha}[X, \xi_{\alpha}] + \eta_{\alpha}(f[\xi_{\alpha}, f(X)]) - \eta_{\alpha}(X(\eta_{\alpha}(\xi_{\alpha}))\xi_{\alpha})\} &= 0 \\
\eta_{\alpha}[X, \xi_{\alpha}] - \eta_{\alpha}(X(\eta_{\alpha}(\xi_{\alpha}))\xi_{\alpha}) &= 0 \\
(L_{\xi_{\alpha}}\eta_{\alpha})(X) &= N^4(X) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.40) eşitliğinde X yerine $f(X)$ alınır,

$$\begin{aligned}
N^1\left(f(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}\right) &= \left[f(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}\right] + \left[f(f(X)), \sum_{\alpha=1}^s f(\xi_{\alpha})\right] \\
&\quad - f\left[f(f(X)), \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}\right] - f\left[f(X), \sum_{\alpha=1}^s f(\xi_{\alpha})\right]
\end{aligned}$$

olur. $f(\xi_{\alpha}) = 0$ olduğu yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
N^1\left(f(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}\right) &= - \sum_{\alpha=1}^s (f(X)) \left(\eta_{\alpha}\left(\sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}\right)\right) - \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha} (\eta_{\alpha}(f(X))) \\
&\quad - \eta_{\alpha}\left(\left[f(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}\right]\right) \xi_{\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (2.20) ve (2.28) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
N^1\left(f(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}\right) &= \left[f(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}\right] - f\left[X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}\right] \\
&= \left[f(X), \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}\right] - f\left[X, \sum_{\alpha=1}^s \xi_{\alpha}\right] \\
&= (L_{\xi_{\alpha}}f)(X)
\end{aligned}$$

olur ve

$$(L_{\xi_\alpha} f)(X) = N^3(X) = 0$$

elde edilir. $N^1 = 0$ dan,

$$N^1(f(X), Y) = 0$$

dır. Böylece,

$$\begin{aligned} N^1(f(X), Y) &= f^2[f(X), Y] + [f^2(X), f(Y)] - f[f^2(X), Y] - f[f(X), f(Y)] \\ &= \sum_{\alpha=1}^s (f(X)\eta_\alpha(Y)\xi_\alpha - Y\eta_\alpha(f(X))\xi_\alpha - \eta_\alpha([f(X), Y])\xi_\alpha) \\ &= [f(X), Y] + [X, f(Y)] - f[X, Y] - f[f(X), f(Y)] \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^s f(X)\eta_\alpha(Y)\xi_\alpha - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X)([\xi_\alpha, f(Y)]) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X)f[\xi_\alpha, Y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada her iki tarafın η_α altında görüntüsü alınırsa,

$$\eta_\alpha([f(X), Y]) + \eta_\alpha([X, f(Y)]) - f(X)\eta_\alpha(Y) + f(X)\eta_\alpha(Y) = 0$$

veya

$$-\eta_\alpha([Y, f(X)]) - \eta_\alpha([f(Y), X]) - f(X)\eta_\alpha(Y) + f(X)\eta_\alpha(Y) = 0$$

$$(L_{f(Y)}\eta_\alpha)(X) - (L_{f(X)}\eta_\alpha)(Y) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$N^2(X, Y) = 0$$

dır.

Teorem 2.4.3. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir almost parakontakt metrik manifold olsun. ∇ , M nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X f)Y, Z) &= 3dF(X, f(Y), f(Z)) + 3dF(X, Y, Z) + g(N^1(Y, Z), f(X)) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^s \{N^2(Y, Z)\eta_\alpha(X) + 2d\eta_\alpha(f(Y), X)\eta_\alpha(Z) - 2d\eta_\alpha(f(Z), X)\eta_\alpha(Y)\} \end{aligned} \quad (2.42)$$

dir.

İspat 2.4.3. (2.2) , (2.3) , (Tanım 2.2.8.) , (2.22) , (2.24) , (Teorem 2.3.1.) eşitlikleri ve

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X f)Y, Z) &= 2g(\nabla_X f(Y), Z) - 2g((f(\nabla_X Y), Z) \\ &= 2g(\nabla_X f(Y), Z) + 2g((\nabla_X Y), f(Z)) \end{aligned} \quad (2.43)$$

eşitliği yardımıyla, Kozsul formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X f)Y, Z) &= Xg(f(Y), Z) + f(Y)g(X, Z) - Zg(X, f(Y)) \\ &\quad + g([X, f(Y)], Z) + g([Z, X], f(Y)) - g([f(Y), Z], X) \\ &= Xg(Y, f(Z)) + Yg(X, f(Z)) - f(Z)g(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], f(Z)) + g([f(Z), X], Y) - g([Y, f(Z)], X) \\ &= XF(Y, Z) + f(Y) \left(F(X, f(Y)) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \eta_\alpha(Z) \right) \\ &\quad - ZF(X, Y) + F([X, f(Y)], f(Z)) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha([X, f(Y)]) \eta_\alpha(Z) + F([Z, X], Y) - g(f[f(Y), Z], f(X)) \\ &= - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \eta_\alpha([f(Y), Z]) + XF(f(Y), f(Z)) + YF(X, Z) \\ &\quad - f(Z) \left(F(X, f(Y)) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \eta_\alpha(Y) \right) \\ &\quad + F([X, Y], Z) + F([f(Z), X], f(Y)) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha([f(Z), X]) \eta_\alpha(Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X f)Y, Z) &= -g(f[Y, f(Z)], f(X)) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha([Y, f(Z)])\eta_\alpha(X) \\
&\quad -F([Y, Z], X) + g([Y, Z], f(X)) \\
&\quad -F([f(Y), f(Z)], X) + g([f(Y), f(Z)], f(X)) - g(2d\eta_\alpha(Y, Z)\xi_\alpha, f(X)) \\
&= [XF(f(Y), f(Z)) + f(Y)F(f(Z), X) - f(Z)F(X, f(Y)) \\
&\quad + F([X, f(Y)], f(Z)) + F([f(Z), X], f(Y)) - F([f(Y), f(Z)], X)] \\
&\quad -\{-XF(Y, Z) - YF(Z, X) + ZF(X, Y) \\
&\quad -F([X, Y], Z) - F([Z, X], Y) + F([Y, Z], X)\} \\
&= g([Y, Z] + [f(Y), f(Z)] - f[f(Y), Z] - f[Y, f(Z)] \\
&\quad -2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta_\alpha(Y, Z) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha([Y, Z])\xi_\alpha, f(X))
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X f)Y, Z) &= 3dF(X, f(Y), f(Z)) + 3dF(X, Y, Z) + g(N^1(Y, Z), f(X)) \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^s \{N^2(Y, Z)\eta_\alpha(X) + 2d\eta_\alpha(f(Y), X)\eta_\alpha(Z) - 2d\eta_\alpha(f(Z), X)\eta_\alpha(Y)\}
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur.

Tanım 2.4.4. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir almost parakontakt metrik manifold olsun. Eğer $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için,

$$d\eta_\alpha = F$$

ise M ye *normal almost parakontakt metrik manifold* denir.

Yardımcı Teorem 2.4.5. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir normal almost parakontakt metrik manifold ve $X \in \chi(D)$ olsun. O halde, $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için $[X, \xi_\alpha] \in \chi(D)$ dir.

İspat 2.4.5. $\forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, s\}$ ve $X \in \chi(D)$ için,

$$\begin{aligned}\eta_\beta([X, \xi_\alpha]) &= -2d\eta_\beta(X, \xi_\alpha) + X(\eta_\beta(\xi_\alpha)) - \xi_\alpha(\eta_\beta(X)) \\ &= -2F(X, \xi_\alpha) + X(\delta_{\alpha\beta}) - \xi_\alpha(\eta_\beta(X)) \\ &= 0\end{aligned}$$

dır. O halde, $[X, \xi_\alpha] \in \Gamma(D)$ dir.

Yardımcı Teorem 2.4.6. Normal almost parakontakt metrik manifoldlarda $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

- (i) N^2 ve N^4 tensör alanları sıfırdır.
- (ii) $N^3 = 0 \Leftrightarrow \xi_\alpha$ lar Killing vektör alanıdır.

İspat 2.4.6.

- (i) N^2 nin tanımından,

$$\begin{aligned}N^2(X, Y) &= 2d\eta_\alpha(f(Y), X) - 2d\eta_\alpha(f(X), Y) \\ &= 2F(f(Y), X) - 2F(f(X), Y)\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}N^2(X, Y) &= 2g(f(Y), f(X)) - 2g(f(X), f(Y)) \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için,

$$L_{\xi_\alpha}\eta_\alpha = (d \circ i\xi_\alpha + i\xi_\alpha \circ d)(\eta_\beta)$$

olur. Burada,

$$L_{\xi_\alpha}\eta_\alpha = di\xi_\alpha\eta_{\{\beta\}} + i\xi_\alpha d\eta_\beta \quad (2.44)$$

Bu nedenle $N^4 = 0$ olur.

$$(ii) \quad L_{\xi_\alpha} F = L_{\xi_\alpha} d\eta_\beta = d \circ i\xi_\alpha \circ d\eta_\beta + i\xi_\alpha \circ d^2\eta_\beta = 0$$

Buradan, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= (L_{\xi_\alpha} F)(X, Y) \\ &= \xi_\alpha(g(X, f(Y))) - g([\xi_\alpha, Y], f(X)) - g(X, f[\xi_\alpha, Y]) \\ &= (L_{\xi_\alpha} g)(X, f(Y)) + g(L_{\xi_\alpha} f(Y), X) \\ &= (L_{\xi_\alpha} g)(X, f(Y)) + g(N^3(Y), X) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan ispat açıktır.

Sonuç 2.4.1. Normal almost parakontakt metrik manifoldlarda $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\eta_\alpha([f(X), Y]) = \eta_\alpha([f(Y), X])$$

dir.

İspat 2.4.1. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N^2 = 0$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} 0 &= N^2(X, Y) = (L_{f(Y)}\eta_\alpha)(X) - (L_{f(X)}\eta_\alpha)(Y) \\ &= f(Y)\eta_\alpha(X) - \eta_\alpha([f(Y), X]) - f(X)\eta_\alpha(Y) + \eta_\alpha([f(X), Y]) \\ &= -\eta_\alpha([f(Y), X]) + \eta_\alpha([f(X), Y]) \end{aligned}$$

olur.

Önerme 2.4.1. Normal almost parakontakt metrik manifoldlarda $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(i) \quad 2g((\nabla_X f)Y, Z) = g(N^1(Y, Z), f(X)) + 2g(f(X), f(Y))\eta_\alpha(Z) - 2g(f(X), f(Z))\eta_\alpha(Y)$$

$$(ii) \quad \nabla_{\xi_\alpha} f = 0$$

$$(iii) \quad \nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta = 0$$

dir.

İspat 2.4.1.

(i) (2.42) eşitliğinden ve (Yardımcı teorem 2.4.6.) dan ispat kolayca gösterilebilir.

(ii) (i) de $X = \xi_\alpha$ yazılırsa,

$$2g\left((\nabla_{\xi_\alpha} f)Y, Z\right) = g(N^1(Y, Z), f(\xi_\alpha)) + 2g(f(\xi_\alpha), f(Y))\eta_\alpha(Z) - 2g(f(\xi_\alpha), f(Z))\eta_\alpha(Y)$$

elde edilir. Buradan $f(\xi_\alpha) = 0$ olduğu yerine yazılırsa,

$$\nabla_{\xi_\alpha} f = 0$$

olur.

(iii) (ii) de $Y = \xi_\alpha$ yazılırsa,

$$0 = (\nabla_{\xi_\alpha} f)\xi_\beta = \nabla_{\xi_\alpha} f(\xi_\beta) - f(\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta) = -f(\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta)$$

bulunur. Buradan, $\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta \in D^\perp$ böylece $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için,

$$\eta_\alpha([\xi_\alpha, \xi_\beta]) = -2d\eta_\gamma(\xi_\alpha, \xi_\beta) = -2F(\xi_\alpha, \xi_\beta) = 0$$

$$[\xi_\alpha, \xi_\beta] = 0$$

olur. Ancak,

$$g(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \text{sabit}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta, \xi_\gamma) &= \xi_\alpha(g(\xi_\beta, \xi_\gamma)) + \xi_\beta(g(\xi_\gamma, \xi_\alpha)) - \xi_\gamma(g(\xi_\alpha, \xi_\beta)) \\ &\quad - g([\xi_\beta, \xi_\gamma], \xi_\alpha) + g([\xi_\gamma, \xi_\alpha], \xi_\beta) + g([\xi_\alpha, \xi_\beta], \xi_\gamma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta \in D$ olacağından,

$$\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta = 0$$

dır.

Tanım 2.4.5. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir normal almost parakontakt metrik manifold olsun. $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için, h_α tensör alanı

$$h_\alpha : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$X \rightarrow h_\alpha(X) = \frac{1}{2} L_{\xi_\alpha} f(X) = \frac{1}{2} N^3(X)$$

ile tanımlıdır.

Yardımcı Teorem 2.4.7. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir normal almost parakontakt metrik manifold olsun. M de $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(i) \quad f(N(X, Y) + N(f(X), Y)) = 2\eta_\alpha(Y)h_\alpha(Y)$$

$$(ii) \quad g(N(f(X), Y), \xi_\alpha) = 0$$

şartları sağlanır.

Önerme 2.4.2. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir normal almost parakontakt metrik manifold olsun. $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için h_α tensör alanı olmak üzere,

$$\nabla_X \xi_\alpha = f(X) + f(h_\alpha(X))$$

dir.

İspat 2.4.2. (Yardımcı teorem 2.4.7.) de $X = \xi_\alpha$ alınırsa, $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} g(N(\xi_\alpha, Y), f(Z)) &= -g(f(N(\xi_\alpha, Z)), Y) \\ &= -2 \sum_{\gamma=1}^s \eta_\alpha(\xi_\alpha) g(h_\gamma(Z), Y) \\ &= -2g(h_\alpha(Z), Y) \end{aligned}$$

dir. (Önerme 2.4.1.) den,

$$\begin{aligned} g(N^1(\xi_\alpha, Z), f(Y)) &= 2g((\nabla_Y f)\xi_\alpha, Z) - 2g(f(\xi_\alpha), f(Y))\eta_\alpha(Z) + 2g(f(Z), f(Y))\eta_\alpha(\xi_\alpha) \\ &= -2g(f(\nabla_Y \xi_\alpha), Z) + 2g(Z, Y) - 2g \sum_{\gamma=1}^s \eta_\gamma(Z)\eta_\gamma(Y) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
g((\nabla_Y f)\xi_\alpha, Z) &= g(h_\alpha(Z), Y) + g(Z, Y) - \sum_{\gamma=1}^s \eta_\gamma(Z)\eta_\gamma(Y) \\
&= g(h_\alpha(Y), Z) + g(Y, Z) - \sum_{\gamma=1}^s \eta_\gamma(Y)\eta_\gamma(Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$f(\nabla_Y \xi_\alpha) = h_\alpha(Y) + Y - \sum_{\gamma=1}^s \eta_\gamma(Y) \xi_\gamma$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının f altında görüntüsü alınırsa,

$$f^2(\nabla_Y \xi_\alpha) = f(h_\alpha(Y)) + f(Y) - \sum_{\gamma=1}^s \eta_\gamma(Y)f(\xi_\gamma)$$

bulunur. $f(\xi_\alpha) = 0$ ve $f^2 = I$ olduğundan,

$$\nabla_Y \xi_\alpha = f(h_\alpha(Y)) + f(Y)$$

elde edilir. Burada,

$$\sum_{\beta=1}^s \eta_\beta(\nabla_Y \xi_\alpha) \xi_\beta = 0$$

dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
2\eta_\beta(\nabla_Y \xi_\alpha) &= 2g(\nabla_Y \xi_\alpha, \xi_\beta) \\
&= Y(g(\xi_\alpha, \xi_\beta)) + \xi_\alpha(g(\xi_\beta, Y)) - \xi_\beta(g(Y, \xi_\alpha)) \\
&\quad - g(Y, [\xi_\alpha, \xi_\beta]) - g(\xi_\alpha, [Y, \xi_\beta]) + g(\xi_\beta, [Y, \xi_\alpha]) \\
&= \xi_\alpha(\eta_\beta(Y)) - \xi_\beta(\eta_\alpha(Y)) - \eta_\alpha([Y, \xi_\beta]) + \eta_\beta([Y, \xi_\alpha]) \\
&= d\eta_\beta(\xi_\alpha, Y) + d\eta_\alpha(Y, \xi_\beta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.4.3. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir normal almost parakontakt metrik manifold olsun. M üzerinde $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için h_α tensör alanı aşağıda belirtilen şartları sağlar.

(i) h_α anti-simetrik tensör alanıdır.

(ii) $h_\alpha(\xi_\beta) = 0$

(iii) h_α, f ile değişimlidir.

İspat 2.4.3.

(i) (Önerme 2.4.1.) den,

$$\nabla_{\xi_\alpha} f = 0$$

dır. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} g((L_{\xi_\alpha} f)X, Y) &= g([f(X), \xi_\alpha] - f[X, \xi_\alpha], Y) \\ &= g(\nabla_{f(X)} \xi_\alpha - \nabla_{\xi_\alpha} f(X) - f(\nabla_X \xi_\alpha) + f(\nabla_{\xi_\alpha} X), Y) \\ &= g(\nabla_{f(X)} \xi_\alpha - (\nabla_{\xi_\alpha} f)(X) - f(\nabla_X \xi_\alpha), Y) \\ &= g(\nabla_{f(X)} \xi_\alpha - f(\nabla_X \xi_\alpha), Y) \end{aligned}$$

Burada $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için $X = \xi_\beta$ ya da $Y = \xi_\beta$ alınırsa sonuç özdeş sıfır olacaktır.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için, sonuç yardımı ile

$$\begin{aligned} g((L_{\xi_\alpha} f)X, Y) &= g((\nabla_{f(X)} \xi_\alpha, Y) - g((\nabla_X \xi_\alpha), f(Y))) \\ &= \xi_\alpha(g(f(X), Y)) - g(\xi_\alpha, \nabla_{f(X)} Y) - \xi_\alpha(g(X, f(Y))) + g(\xi_\alpha, \nabla_X f(Y)) \\ &= -\eta_\alpha(\nabla_{f(X)} Y) + \eta_\alpha(\nabla_X f(Y)) \\ &= -\eta_\alpha(\nabla_Y f(X)) - \eta_\alpha([f(X), Y]) + \eta_\alpha(\nabla_{f(Y)} X) + \eta_\alpha([X, f(Y)]) \\ &= -g((L_{\xi_\alpha} f)Y, X) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan h_α , anti-simetrik operatördür.

$$(ii) \quad h_\alpha(\xi_\beta) = \frac{1}{2} L_{\xi_\alpha} f(\xi_\beta) = \frac{1}{2} (f(L_{\xi_\alpha} \xi_\beta) - L_{\xi_\alpha} f(\xi_\beta)) = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad 2g(X, f(Y)) &= 2F(X, Y) \\
&= 2d\eta_\alpha(X, Y) \\
&= g(\nabla_X \xi_\alpha, Y) - g(\nabla_Y \xi_\alpha, X) \\
&= g(f(X) + f(h_\alpha(X)), Y) - g(f(Y) + f(h_\alpha(Y)), X) \\
&= g(f(X), Y) + g(f(h_\alpha(X)), Y) - g(f(Y), X) - g(f(h_\alpha(Y)), X)
\end{aligned}$$

dir. O halde,

$$g(f(h_\alpha(X)), Y) - g(h_\alpha(f(X)), Y) = 0$$

dir. $\forall Y \in \chi(M)$ için sağlandığından ve g non-dejenere olduğundan,

$$f(h_\alpha(X)) - h_\alpha(f(X)) = 0$$

$$f \circ h_\alpha - h_\alpha \circ f = 0$$

dir.

Önerme 2.4.4. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir normal almost parakontakt metrik manifold olsun. M de $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X f)Y + (\nabla_{f(X)} f)f(Y) = 2g(f(X), f(Y))\xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(Y)f^2(X) - \sum_{\gamma=1}^s \eta_\gamma(Y)h_\gamma(X)$$

dir.

İspat 2.4.4. $\forall \alpha, \gamma \in \{1, \dots, s\}$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X f)Y, Z) + g((\nabla_{f(X)} f)f(Y), Z) &= (g(Z, -\eta_\gamma(Y)h_\gamma(X)) + 2g(X, Y)\xi_\alpha \\
&\quad - 2\eta_\gamma(X)\eta_\gamma(Y)\xi_\alpha + \eta_\alpha(Y)X - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)\xi_\alpha)
\end{aligned}$$

dir. O halde,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X f)Y + (\nabla_{f(X)} f)f(Y) &= \\
&= -\sum_{\gamma=1}^s \eta_\gamma(Y)h_\gamma(X) + 2g(f(X), f(Y))\xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(Y)(X - \eta_\alpha(X)\xi_\alpha)
\end{aligned}$$

$f^2(X) = X - \eta_\alpha(X)\xi_\alpha$ olduğu yerine yazılırsa,

$$(\nabla_X f)Y + (\nabla_{f(X)} f)f(Y) = 2g(f(X), f(Y))\xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(Y)f^2(X) - \sum_{\gamma=1}^s \eta_\gamma(Y)h_\gamma(X)$$

dir.

Sonuç 2.4.2. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(i) \quad (\nabla_X f)Y + (\nabla_{f(X)} f)f(Y) = 2 \sum_{\alpha=1}^s g(X, Y)\xi_\alpha$$

$$(ii) \quad (\nabla_X f)f(Y) = -(\nabla_{f(X)} f)Y$$

(iii) Eğer $s = 1$ alınırsa,

$$(\nabla_X f)Y + (\nabla_{f(X)} f)f(Y) = 2 \cdot g(X, Y)\xi - \eta(Y)(-X + h(X) + \eta(X)\xi)$$

dir.

İspat 2.4.2.

(i) (Önerme 2.4.2.) den kolayca görülür.

(ii) (i) de $Y = f(X)$ alınırsa,

$$(\nabla_X f)(f(X)) + (\nabla_{f(X)} f)(f^2(X)) = 2 \sum_{\alpha=1}^s g(X, f(X))\xi_\alpha = 0$$

Burada,

$$f^2(X) = X$$

olduğundan,

$$(\nabla_X f)(f(X)) = -(\nabla_{f(X)} f)(X)$$

olur.

(iii) $s = 1$ alınırsa (Önerme 2.4.4.) den kolayca görülür.

3. HEMEN HEMEN PSEUDO f -MANİFOLDLAR

Bu kısımda öncelikle hemen hemen pseudo f -yapı tanıtılarak, hemen hemen parakontakt manifoldlar ve hemen hemen pseudo f -manifoldlar arasındaki ilişki incelenmiş ve ayrıca bazı eğrilik şartları araştırılmıştır.

Tanım 3.1.1. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir almost parakontakt metrik manifold ve F bir temel 2-form olsun. Eğer M normal, $\xi_1, \dots, \xi_s$ vektör alanları birer Killing vektör alanı ve F , 2-formu kapalıysa yani,

$$dF = 0$$

ise M ye *normal almost parakontakt metrik manifold* denir.

Tanım 3.1.2. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir normal almost parakontakt metrik manifold olsun.

$\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için ξ_α nın duali η_α olmak üzere,

$$\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_s \wedge (d\eta_\alpha)^n \neq 0$$

olduğundan normal almost parakontakt metrik manifolduna *yönlendirilebilirdir* denir.

Tanım 3.1.3. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir normal almost parakontakt metrik manifold olsun. Eğer,

$$F(X, Y) = d\eta_\alpha(X, Y)$$

oluyorsa $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ ye *pseudo f -manifold* denir.

Yardımcı Teorem 3.1.1. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir pseudo f -manifold olsun. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ üzerinde ∇ "Levi-Civita konneksiyonu", f " f -yapı", ξ_α " $1 \leq \alpha \leq s$, vektör alanları" olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X \xi_\alpha = f(X) \tag{3.1}$$

dir.

İspat 3.1.1. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}
0 &= (L_{\xi_\alpha} g)(X, Y) = \xi_\alpha g(X, Y) - g([\xi_\alpha, X], Y) - g(X, [\xi_\alpha, Y]) \\
&= g(\nabla_{\xi_\alpha} X, Y) + g(X, \nabla_{\xi_\alpha} Y) - g(\nabla_{\xi_\alpha} X, Y) \\
&\quad + g(\nabla_X \xi_\alpha, Y) - g(X, \nabla_{\xi_\alpha} Y) + g(X, \nabla_Y \xi_\alpha) \\
&= g(\nabla_X \xi_\alpha, Y) + g(X, \nabla_Y \xi_\alpha)
\end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$g(\nabla_X \xi_\alpha, Y) = -g(X, \nabla_Y \xi_\alpha) \quad (3.2)$$

olduğundan g anti-simetriktir. 2-temel formun ve pseudo f -manifoldun tanımından,

$$F(X, Y) = d\eta_\alpha(X, Y) = g(f(X), Y) = g(X, f(Y))$$

dir. (2.1) eşitliğinden,

$$2d\eta_\alpha(X, Y) = X\eta_\alpha(Y) - Y\eta_\alpha(X) - \eta_\alpha([X, Y])$$

olup, $g(X, \xi_\alpha) = \eta_\alpha(X)$ olduğu yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
2d\eta_\alpha(X, Y) &= Xg(Y, \xi_\alpha) - Yg(X, \xi_\alpha) - g([X, Y], \xi_\alpha) \\
&= g(\nabla_X Y, \xi_\alpha) + g(Y, \nabla_X \xi_\alpha) - g(\nabla_Y X, \xi_\alpha) \\
&\quad - g(X, \nabla_Y \xi_\alpha) - g(\nabla_X Y, \xi_\alpha) + g(\nabla_Y X, \xi_\alpha) \\
&= g(Y, \nabla_X \xi_\alpha) - g(X, \nabla_Y \xi_\alpha)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$2d\eta_\alpha(X, Y) = g(Y, \nabla_X \xi_\alpha) - g(X, \nabla_Y \xi_\alpha) \quad (3.3)$$

(3.2) ve (3.3) eşitliklerinden,

$$2d\eta_\alpha(X, Y) = 2g(\nabla_X \xi_\alpha, Y) \Rightarrow d\eta_\alpha(X, Y) = g(\nabla_X \xi_\alpha, Y) = g(f(X), Y)$$

dir. $\forall Y \in \chi(M)$ için g non-dejenere olduğundan,

$$\nabla_X \xi_\alpha = f(X)$$

olur.

Önerme 3.1.1. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir pseudo f -manifold olsun. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ üzerinde ∇ "Levi-Civita konneksiyonu", f " f -yapı", ξ_α " $1 \leq \alpha \leq s$, vektör alanları" ve ξ_α ların 1-formları η_α olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X f)Y = \sum_{\alpha=1}^s \left(g(f(X), f(Y))\xi_\alpha - \eta_\alpha(Y)f^2(X) \right) \quad (3.4)$$

dir.

İspat 3.1.1. (Teorem 2.4.3.) de $dF = 0$ ve $N^1 = N^2 = 0$ olduğu yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} g((\nabla_X f)Y, Z) &= \sum_{\alpha=1}^s \{d\eta_\alpha(f(Y), X)\eta_\alpha(Z) - d\eta_\alpha(f(Z), X)\eta_\alpha(Y)\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \{F(f(Y), X)\eta_\alpha(Z) - F(f(Z), X)\eta_\alpha(Y)\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \{g(f(Y), f(X))\eta_\alpha(Z) - g(f(Z), f(X))\eta_\alpha(Y)\} \end{aligned}$$

veya

$$g((\nabla_X f)Y, Z) = \sum_{\alpha=1}^s \{g(g(f(X), f(Y))\xi_\alpha - f^2(X)\eta_\alpha(Y), Z)\}$$

bulunur. $\forall Z \in \chi(M)$ için g non-dejenere olduğundan,

$$(\nabla_X f)Y = \sum_{\alpha=1}^s \left(g(f(X), f(Y))\xi_\alpha - \eta_\alpha(Y)f^2(X) \right)$$

dir.

Teorem 3.1.1. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir pseudo f -manifold olsun. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ üzerinde f " f -yapı", ξ_α " $1 \leq \alpha \leq s$, vektör alanları", ξ_α ların 1-formları η_α ve F "2-temel form" olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X f)Y, Z) &= g\left(\left([f, f] - 2 \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha \otimes d\eta_\alpha\right)(Y, Z), f(X)\right) \\
&\quad + 2 \sum_{\alpha=1}^s \{F(f(Y), X)\eta_\alpha(Z) - F(f(Z), X)\eta_\alpha(Y)\} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

dir.

İspat 3.1.1. (Önerme 2.4.1.) den ispat kolayca görülür.

Önerme 3.1.2. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir pseudo f -manifold olsun. L, M üzerinde Lie türevi olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(L_{f(X)}\eta_\alpha)(Y) = (L_{f(Y)}\eta_\alpha)(X) \quad (3.6)$$

dir.

İspat 3.1.2. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}
(L_{f(X)}\eta_\alpha)(Y) &= f(X)\eta_\alpha(Y) - \eta_\alpha([f(X), Y]) \\
&= f(X)g(Y, \xi_\alpha) - g([f(X), Y], \xi_\alpha) \\
&= g(\nabla_{f(X)}Y, \xi_\alpha) + g(Y, \nabla_{f(X)}\xi_\alpha) - g(\nabla_{f(X)}Y, \xi_\alpha) + g(\nabla_Y f(X), \xi_\alpha) \\
&= g(Y, \nabla_{f(X)}\xi_\alpha) + g(\nabla_Y f(X), \xi_\alpha) \quad (3.7)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
2d\eta_\alpha(f(X), Y) &= f(X)\eta_\alpha(Y) - Y\eta_\alpha(f(X)) - g([f(X), Y], \xi_\alpha) \\
&= g(\nabla_{f(X)}Y, \xi_\alpha) + g(Y, \nabla_{f(X)}\xi_\alpha) - g(\nabla_Y f(X), \xi_\alpha) \\
&\quad - g(f(X), \nabla_Y \xi_\alpha) - g(\nabla_{f(X)}Y, \xi_\alpha) + g(\nabla_Y f(X), \xi_\alpha) \\
&= g(Y, \nabla_{f(X)}\xi_\alpha) - g(f(X), \nabla_Y \xi_\alpha)
\end{aligned}$$

veya

$$2d\eta_\alpha(f(X), Y) = g(Y, \nabla_{f(X)}\xi_\alpha) + g(\nabla_Y f(X), \xi_\alpha) \quad (3.8)$$

olur. (3.7) ve (3.8) eşitliklerinden,

$$(L_{f(X)}\eta_\alpha)(Y) = 2d\eta_\alpha(f(X), Y) = 2F(f(X), Y)$$

veya

$$(L_{f(Y)}\eta_\alpha)(X) = 2d\eta_\alpha(f(Y), X) = 2F(f(Y), X)$$

olduğu görülür. Buradan,

$$(L_{f(X)}\eta_\alpha)(Y) = (L_{f(Y)}\eta_\alpha)(X)$$

dir.

Önerme 3.1.3. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir pseudo f -manifold olsun. $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için h_α tensör alanı aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

(i) h_α , anti-simetrik tensör alanıdır.

(ii) $h_\alpha(\xi_\beta) = 0$, $\beta \in \{1, \dots, s\}$

İspat 3.1.3. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$h_\alpha : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$X \rightarrow h_\alpha(X) = \frac{1}{2}(L_{\xi_\alpha}f)(X) = \frac{1}{2}(fL_{\xi_\alpha}(X) - L_{\xi_\alpha}f(X))$$

dir.

$$(i) \quad \star \quad h_\alpha(X) = \frac{1}{2}(fL_{\xi_\alpha}(X) - L_{\xi_\alpha}f(X))$$

(Tanım 2.1.3) deki sıfır torsiyon özelliği ve (2.34) eşitliği kullanılırsa,

$$h_\alpha(X) = \frac{1}{2}(f\nabla_{\xi_\alpha}(X) - f\nabla_X\xi_\alpha - \nabla_{\xi_\alpha}f(X) + \nabla_{f(X)}\xi_\alpha)$$

olur. (2.16) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} h_\alpha(X) &= \frac{1}{2}(f\nabla_{\xi_\alpha}(X) - f^2(X) - \nabla_{\xi_\alpha}f(X) + f^2(X)) \\ &= \frac{1}{2}(f\nabla_{\xi_\alpha}(X) - \nabla_{\xi_\alpha}f(X)) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$(h_\alpha(X), Y) = \frac{1}{2} g(f\nabla_{\xi_\alpha}(X) - \nabla_{\xi_\alpha}f(X), Y)$$

veya

$$(h_\alpha(X), Y) = \frac{1}{2} \{g(f\nabla_{\xi_\alpha}(X), Y) - g(\nabla_{\xi_\alpha}f(X), Y)\}$$

olur. Burada $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için $X = \xi_\beta$ ya da $Y = \xi_\beta$ alınırsa özdeş sıfır olacaktır.

$$\begin{aligned} \eta_\alpha([f(X), Y]) + \eta_\alpha([X, f(Y)]) &= g(\nabla_{f(X)}Y, \xi_\alpha) - g(\nabla_Yf(X), \xi_\alpha) \\ &\quad + g(\nabla_Xf(Y), \xi_\alpha) - g(\nabla_{f(Y)}X, \xi_\alpha) \\ &= g(\nabla_{f(X)}\xi_\alpha, Y) - g(\nabla_Y\xi_\alpha, f(X)) \\ &\quad + g(\nabla_X\xi_\alpha, f(Y)) - g(\nabla_{f(Y)}\xi_\alpha, X) \\ &= g(f^2(X), Y) - g(f(Y), f(X)) \\ &\quad + g(f(X), f(Y)) - g(f^2(Y), X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

⊙ da X ve Y , ξ_α ya dik ise,

$$(L_{f(X)}\eta_\alpha)(Y) = (L_{f(Y)}\eta_\alpha)(X) \quad (3.9)$$

dir.

$$\begin{aligned} g(h_\alpha(X), Y) &= \frac{1}{2} g((L_{\xi_\alpha}f)X, Y) \\ &= \frac{1}{2} \{g(f\nabla_{\xi_\alpha}X, Y) - g(\nabla_{\xi_\alpha}f(X), Y)\} \\ &= \frac{1}{2} \{\eta_\alpha(\nabla_Xf(Y) + \nabla_{f(X)}Y)\} \\ &= \frac{1}{2} \{-\eta_\alpha(\nabla_{f(Y)}X) - \eta_\alpha(\nabla_Yf(X))\} \\ &= -\frac{1}{2} g((L_{\xi_\alpha}f)Y, X) \\ &= -g(h_\alpha(Y), X) \end{aligned}$$

olup h_α anti-simetriktir.

$$\begin{aligned}
(ii) \quad h_\alpha \xi_\beta &= \frac{1}{2} (L_{\xi_\alpha} f) \xi_\beta \\
&= \frac{1}{2} (f L_{\xi_\alpha} \xi_\beta - L_{\xi_\alpha} f(\xi_\beta)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır.

Önerme 3.1.4. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir pseudo f -manifold olsun. O halde, $\forall X \in \chi(M)$ ve $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için,

$$(i) \quad \nabla_X \xi_\alpha - \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta (\nabla_X \xi_\alpha) \xi_\beta = f(X) + f(h_\alpha(X)) \quad (3.10)$$

$$(ii) \quad h_\alpha(X) = \frac{1}{2} \{ \nabla_{f(X)} \xi_\alpha - f \nabla_X \xi_\alpha \} \quad (3.11)$$

dır.

İspat 3.1.4.

(i) (Önerme 2.4.2.) den $\forall X, Z \in \chi(M)$ ve $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için,

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X f) \xi_\alpha, Z) &= -g(f(L_{\xi_\alpha} f)Z, f(X)) - 2g(f(X), f(Z)) \\
&= -g((L_{\xi_\alpha} f(Z)), X) - 2g(X, Z) + 2 \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta(X) \eta_\beta(Z)
\end{aligned}$$

dir. h_α anti-simetrik olduğundan,

$$2g((\nabla_X f) \xi_\alpha, Z) = g((L_{\xi_\alpha} f)X, Z) + 2g(X, Z) - 2 \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta(X) g(\xi_\beta, Z)$$

olur. $\forall Z \in \chi(M)$ için g non-dejenere olduğundan,

$$2(f \nabla_X \xi_\alpha - \nabla_X f(\xi_\alpha)) = (L_{\xi_\alpha} f)X + 2X - 2 \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta(X) \xi_\beta$$

elde edilir. $f(\xi_\alpha) = 0$ olduğu yerine yazılırsa,

$$2f(\nabla_X \xi_\alpha) = 2h_\alpha(X) + 2f^2(X)$$

$$f(\nabla_X \xi_\alpha) = h_\alpha(X) + f^2(X)$$

bulunur. Her iki tarafa f uygulanırsa,

$$f^2(\nabla_X \xi_\alpha) = f(h_\alpha(X)) + f^3(X)$$

$$\nabla_X \xi_\alpha - \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta(\nabla_X \xi_\alpha) \xi_\beta = f(h_\alpha(X)) + f(X)$$

dir. Gerçekten de;

$$g(f(L_{\xi_\alpha} f)Z, f(X)) = g((L_{\xi_\alpha} f)Z, X) - \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta((L_{\xi_\alpha} f)Z) \eta_\beta(X)$$

eşitliğinde (Tanım 2.1.3) deki sıfır torsiyon özelliği ve (2.34) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g(f(L_{\xi_\alpha} f)Z, f(X)) &= g((L_{\xi_\alpha} f)Z, X) - \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta(X) (\eta_\beta(fL_{\xi_\alpha} Z) - \eta_\beta(L_{\xi_\alpha} f(Z))) \\ &= g((L_{\xi_\alpha} f)Z, X) - \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta(X) (\eta_\beta(f\nabla_{\xi_\alpha} Z) \\ &\quad - \eta_\beta(f\nabla_Z \xi_\alpha) - \eta_\beta(\nabla_{\xi_\alpha} f(Z)) + \eta_\beta(\nabla_{f(Z)} \xi_\alpha)) \\ &= g((L_{\xi_\alpha} f)Z, X) - \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta(X) (\eta_\beta(f\nabla_{\xi_\alpha} Z) \\ &\quad - \eta_\beta(f^2(Z)) - \eta_\beta(\nabla_{\xi_\alpha} f(Z)) + \eta_\beta(f^2(Z))) \end{aligned}$$

olur. $\nabla_{\xi_\alpha} Z = f(Z)$ eşitliği kullanılırsa,

$$g(f(L_{\xi_\alpha} f)Z, f(X)) = g((L_{\xi_\alpha} f)Z, X) - \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta(X) \left(-\eta_\beta(\nabla_{\xi_\alpha} f(Z)) + \eta_\beta(f\nabla_{\xi_\alpha} Z) \right)$$

bulunur. (2.7) eşitliğinden,

$$g(f(L_{\xi_\alpha} f)Z, f(X)) = g((L_{\xi_\alpha} f)Z, X) - \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta(X) \left(g(\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta, f(Z)) - g(f\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta, Z) \right)$$

olur. $\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta = 0$ olduğundan,

$$g(f(L_{\xi_\alpha} f)Z, f(X)) = g((L_{\xi_\alpha} f)(Z), X)$$

dir.

$$\begin{aligned}
(ii) \quad \frac{1}{2}(L_{\xi_\alpha}f)(X) &= \frac{1}{2}(f(L_{\xi_\alpha}X) - L_{\xi_\alpha}f(X)) \\
&= \frac{1}{2}(f\nabla_{\xi_\alpha}X - f\nabla_X\xi_\alpha - \nabla_{\xi_\alpha}f(X) + \nabla_{f(X)}\xi_\alpha) \\
&= \frac{1}{2}(f\nabla_{\xi_\alpha}X - f^2(X) - \nabla_{\xi_\alpha}f(X) + f^2(X)) \\
&= \frac{1}{2}(f\nabla_{\xi_\alpha}X - \nabla_{\xi_\alpha}f(X)) \\
&= \frac{1}{2}(\nabla_{f(X)}\xi_\alpha - f\nabla_X\xi_\alpha)
\end{aligned}$$

dır.

Teorem 3.1.2. $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ bir pseudo f -manifold olsun. Bu durumda $\forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$ için ξ_α vektör alanı bir Killing vektör alanı olmak üzere,

$$h_\alpha = 0$$

dır.

İspat 3.1.2.

$$L_{\xi_\alpha}F = di\xi_\alpha F + i\xi_\alpha dF = 0$$

olduğunu biliyoruz. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}
(L_{\xi_\alpha}F)(X, Y) &= \xi_\alpha F(X, Y) - F(L_{\xi_\alpha}X, Y) - F(X, L_{\xi_\alpha}Y) \\
&= \xi_\alpha F(X, Y) - d\eta_\alpha(L_{\xi_\alpha}X, Y) - d\eta_\alpha(X, L_{\xi_\alpha}Y) \\
&= \xi_\alpha F(X, Y) - g(L_{\xi_\alpha}X, f(Y)) - g(X, f(L_{\xi_\alpha}Y)) \\
&= \xi_\alpha F(X, Y) - g(L_{\xi_\alpha}f(Y), X) - g(X, L_{\xi_\alpha}f(Y)) + g(X, (L_{\xi_\alpha}f)Y) \\
&= \xi_\alpha F(X, Y) + g(X, (L_{\xi_\alpha}f)Y)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

($\Rightarrow$): ξ_α bir Killing vektör alanı olsun. Yani,

$$L_{\xi_\alpha}g = 0$$

olduğundan,

$$g(X, (L_{\xi_\alpha}f)Y) = (L_{\xi_\alpha}F)(X, Y) = 0 \tag{3.13}$$

dır. $\forall X \in \chi(M)$ için g non-dejenere olduğundan,

$$L_{\xi_\alpha} f = \frac{1}{2} h_\alpha = 0 \Rightarrow h_\alpha = 0$$

bulunur.

($\Leftarrow$): Tersine,

$$h_\alpha = 0$$

ise $\forall \beta \in \{1, \dots, s\}$ için (3.13) eşitliğinden,

$$(L_{\xi_\alpha} g)(X, f(Y)) = (L_{\xi_\alpha} F)(X, Y) = 0$$

olur.

$$(L_{\xi_\alpha} g)(X, f^2(Y)) = (L_{\xi_\alpha} g)\left(X, Y - \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta(Y) \xi_\beta\right) = 0$$

$$0 = (L_{\xi_\alpha} g)(X, Y) - \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta(Y) (L_{\xi_\alpha} \eta_\beta)(X)$$

$$(L_{\xi_\alpha} g)(X, Y) = \sum_{\beta=1}^s \eta_\beta(Y) (L_{\xi_\alpha} \eta_\beta)(X)$$

$$= 0$$

dır. Gerçekten de,

$$\begin{aligned} (L_{\xi_\alpha} \eta_\beta) &= (d \circ i_{\xi_\alpha} + i_{\xi_\alpha} \circ d)(\eta_\beta) \\ &= d(i_{\xi_\alpha} \eta_\beta) + i_{\xi_\alpha}(d\eta_\beta) \\ &= d(\eta_\beta(\xi_\alpha)) + 2d\eta_\beta(\xi_\alpha, Y) \\ &= 2(g(\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta, Y) + g(\xi_\beta, \nabla_{\xi_\alpha} Y)) \\ &= -2g(Y, \nabla_{\xi_\beta} \xi_\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$L_{\xi_\alpha} g = 0$$

olduğundan ξ_α bir Killing vektör alanıdır.

Önerme 3.1.5. M^{2n+s} bir normal pseudo f -metrik manifold olsun. O halde M üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, s\}$ için,

$$(i) \quad \mathcal{R}(X, \xi_\alpha)Y = \nabla_X \nabla_Y \xi_\alpha - \nabla_{\nabla_X Y} \xi_\alpha \quad (3.14)$$

$$(ii) \quad \mathcal{R}(\xi_\alpha, X, \xi_\beta, Y) = -g(\nabla_X \xi_\beta, \nabla_Y \xi_\alpha) \quad (3.15)$$

$$(iii) \quad \mathcal{K}(\xi_\alpha, X) = \|\nabla_X \xi_\alpha\|^2 \quad (3.16)$$

$$(iv) \quad \mathcal{R}(\xi_\alpha, f(X), \xi_\beta, f(Y)) = \mathcal{R}(\xi_\alpha, X, \xi_\beta, Y) \quad (3.17)$$

dir.

İspat 3.1.5.

(i) ξ_α bir Killing vektör alanı olduğundan,

$$L_{\xi_\alpha} \nabla_X Y - \nabla_X L_{\xi_\alpha} Y = \nabla_{L_{\xi_\alpha} X} Y$$

$$[\xi_\alpha, \nabla_X Y] - \nabla_X [\xi_\alpha, Y] = \nabla_{[\xi_\alpha, X]} Y$$

$$\nabla_{\xi_\alpha} \nabla_X Y - \nabla_{\nabla_X Y} \xi_\alpha - \nabla_X \nabla_{\xi_\alpha} Y + \nabla_X \nabla_Y \xi_\alpha = \nabla_{[\xi_\alpha, X]} Y$$

$$[\xi_\alpha, X]Y - \nabla_{[\xi_\alpha, X]} Y = -\nabla_X \nabla_Y \xi_\alpha + \nabla_{\nabla_X Y} \xi_\alpha$$

dır. (Teorem 2.1.3) ve (Tanım 2.1.9) dan,

$$\mathcal{R}(X, \xi_\alpha)Y = \nabla_X \nabla_Y \xi_\alpha - \nabla_{\nabla_X Y} \xi_\alpha$$

olur.

(ii) (Teorem 2.1.3) ve (i) den,

$$\mathcal{R}(\xi_\alpha, X, \xi_\beta, Y) = g(\mathcal{R}(\xi_\alpha, X)\xi_\beta, Y)$$

$$= g(\mathcal{R}(\xi_\beta, Y)\xi_\alpha, X)$$

$$= -g(\mathcal{R}(\xi_\beta, Y)X, \xi_\alpha)$$

veya

$$\mathcal{R}(\xi_\alpha, X, \xi_\beta, Y) = g(\mathcal{R}(Y, \xi_\beta)X, \xi_\alpha)$$

$$= -g(\nabla_{\nabla_X Y} \xi_\beta, \xi_\alpha) + g(\nabla_Y \nabla_X \xi_\beta, \xi_\alpha)$$

$$= g(\nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta, \nabla_Y X) + g(\nabla_Y \nabla_X \xi_\beta, \xi_\alpha)$$

dır. ξ_α Killing vektör alanı olduğundan,

$$\mathcal{R}(\xi_\alpha, X, \xi_\beta, Y) = g(\nabla_Y \nabla_X \xi_\beta, \xi_\alpha) = -g(\nabla_Y \xi_\alpha, \nabla_X \xi_\beta) = -g(\nabla_X \xi_\beta, \nabla_Y \xi_\alpha)$$

dır.

(iii) (i) den,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\xi_\alpha, X) &= \mathcal{R}(\xi_\alpha, X, X, \xi_\alpha) \\ &= g(\mathcal{R}(\xi_\alpha, X)X, \xi_\alpha) \\ &= -g(\mathcal{R}(\xi_\alpha, X)\xi_\alpha, X) \\ &= -g(\xi_\alpha, X, \xi_\alpha, X) \\ &= g(\nabla_X \xi_\alpha, \nabla_X \xi_\alpha) \\ &= \|\nabla_X \xi_\alpha\|^2 \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad \mathcal{R}(\xi_\alpha, f(X), \xi_\beta, f(Y)) &= g(\mathcal{R}(\xi_\alpha, f(X))\xi_\beta, f(Y)) \\ &= g(\mathcal{R}(\xi_\alpha, X)\xi_\beta, Y) - \sum_{\gamma=1}^s \eta_\gamma(\mathcal{R}(\xi_\alpha, X)\xi_\beta)\eta_\gamma(Y) \\ &= g(\mathcal{R}(\xi_\alpha, X)\xi_\beta, Y) \\ &= \mathcal{R}(\xi_\alpha, X, \xi_\beta, Y) \end{aligned}$$

dir. Gerçekten de,

$$\begin{aligned} \eta_Y(\mathcal{R}(\xi_\alpha, X)\xi_\beta) &= \eta_Y(\nabla_{\xi_\alpha} \nabla_X \xi_\beta - \nabla_{\nabla_{\xi_\alpha} X} \xi_\beta) \\ &= g(\nabla_{\xi_\alpha} \nabla_X \xi_\beta, \xi_Y) - g(\nabla_{\nabla_{\xi_\alpha} X} \xi_\beta, \xi_Y) \\ &= -g(\nabla_{\xi_\alpha} \xi_Y, \nabla_X \xi_\beta) + g(\nabla_{\xi_Y} \xi_\beta, \nabla_{\xi_\alpha} X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Önerme 3.1.6. (M^{2n+s}, g) bir normal pseudo f -metrik manifold olsun. (M^{2n+s}, g) bir pseudo f -manifold ise,

$$\mathcal{R}(X, Y)\xi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s \{\eta_\alpha(Y)f^2(X) - \eta_\alpha(X)f^2(Y)\} \quad (3.18)$$

dir.

İspat 3.1.6. (3.1) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X, Y)\xi_\alpha &= \nabla_X \nabla_Y \xi_\alpha - \nabla_Y \nabla_X \xi_\alpha - \nabla_{[X, Y]}\xi_\alpha \\ &= \nabla_X f(Y) - \nabla_Y f(X) - f([X, Y]) \\ &= (\nabla_X f)Y + f(\nabla_X Y) - (\nabla_Y f)X - f(\nabla_Y X) - f(\nabla_X Y) + f(\nabla_Y X) \\ &= (\nabla_X f)Y - (\nabla_Y f)X \end{aligned}$$

dir. (Önerme 3.1.1) den,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X, Y)\xi_\alpha &= \sum_{\alpha=1}^s \{g(f(X), f(Y))\xi_\alpha + \eta_\alpha(Y)f^2(X) - g(f(Y), f(X))\xi_\alpha - \eta_\alpha(X)f^2(Y)\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \{\eta_\alpha(Y)f^2(X) - \eta_\alpha(X)f^2(Y)\} \end{aligned}$$

dir.

Sonuç 3.1.1. (M^{2n+s}, g) bir normal pseudo f -metrik manifold olsun. (M^{2n+s}, g) bir pseudo f -manifold ise,

$$\mathcal{R}(X, \xi_\alpha)Y = (\nabla_X f)Y \quad (3.19)$$

dir.

İspat 3.1.1.

$$g(\mathcal{R}(X, Y)\xi_\alpha, Z) = g(\mathcal{R}(\xi_\alpha, Z)X, Y)$$

eşitliğinde, (3.18) kullanılırsa,

$$g(\eta_\alpha(Y)f^2(X) - \eta_\alpha(X)f^2(Y), Z) = g(\mathcal{R}(\xi_\alpha, Z)X, Y)$$

olur. Buradan,

$$\eta_\alpha(Y)g(f^2(X), Z) - \eta_\alpha(X)g(f^2(Y), Z) = g(\mathcal{R}(\xi_\alpha, Z)X, Y)$$

elde edilir. (2.23) eşitliği yerine yazılırsa,

$$g(Y, \xi_\alpha)g(f^2(X), Z) - g(X, \xi_\alpha)g(f^2(Y), Z) = g(\mathcal{R}(\xi_\alpha, Z)X, Y)$$

bulunur. Burada,

$$g(g(f^2(X), Z)\xi_\alpha - g(X, \xi_\alpha)f^2(Z), Y) = g(\mathcal{R}(\xi_\alpha, Z)X, Y)$$

olur. g non-dejenere olduğundan,

$$g(f^2(X), Z)\xi_\alpha - g(X, \xi_\alpha)f^2(Z) = \mathcal{R}(\xi_\alpha, Z)X$$

elde edilir.

4. KAYNAKLAR

1. Aktan N., 2006. S-Manifoldların Geometrisi Üzerine, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 32-40.
2. Bejancu A. ve Duggal K.L., 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Application, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 211-223.
3. Blair D.E., 1970. Geometry of Manifolds With Structural Group $U(n) \times \theta(s)$, J.Differentiable Geometry, 155-167.
4. Blair D.E., Terlizzi L.D. ve Konderak J.J., 2006. A Darboux Theorem Generalized Contact Manifolds, Note di Matematica, 147-152.
5. Blair D.E., 2001. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Math., 31-115.
6. Brickell F. ve Clark R.S., 1970. Differentiable Manifolds, Van Nostrand, London, 5-19.
7. Brunetti L. ve Pastore A.M., 2008. Curvature of a Class of Indefinite Globally Framed f -manifolds, Bull. Math. Soc. Sci. Math.Roumanie Tome, 183-204.
8. Chen B.Y., 1973. Geometry of Submanifolds, Marcel Dekker New York, 154-163
9. Cabrerizo J.L., Fernandez L.M. ve Fernandez M., 1990. The Curvature Tensor Fields on f -manifolds with Complemented Frames, An. Şt. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Matematica, 151-162.
10. H.Nakagawa, 1966 . On framed f -strucutre induced on submanifolds in space, almost Hermitian or Kaehlerian, Kôdai Math. Sem. Rep.,
11. Duggal K.L., Ianus S. ve Pastore A.M., 2001. Maps Interchanging f -structures and Their Harmonicity, Acta Appli, Maths., 91-115.

12. Goldberg S.I. ve Yano K., 1970. On Normal Globally Framed f -manifolds, Tohoku Math. Jour., 362-370.
13. Hacısalihoğlu H.H., 1983. Diferensiyel Geometri I-II, İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 75-97.
14. Ishihara S., 1966. Normal Structure f -satisfying $f^3 + f = 0$, Kodai Math. Sem. Rep., 36-47.
15. Ishihara S. ve Yano K., 1964. On Integrability Conditions of a Structure f -satisfying $f^3 + f = 0$, Quart. J. Math., Oxford (2), 217-222.
16. Kobayashi M. ve Tsuchiya S., 1972. Invariant Submanifolds in an f -manifold With Complemented Frames, Kodai Math. Sem. Rep., 430-450.
17. Mihai I., 1983. CR-Submanifolds of a framed f -manifold, Stud. Cerc. Math., 127-136.
18. Kobayashi M., 1990. Semi-Invariant Submanifolds in an f -manifold with complemented frames, Tensor, 155-178.
19. S.I.Goldberg ve K.Yano, 1970. On normal globally framed f -manifolds, Tôhoku Math. Journal, 362-370.
20. O'Neill B., 1983. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, Academic Pres, New York London, 215-257.
21. Terlizzi L.D. ve Pastore A.M., 2002. Some results on K-manifolds, Balkan Journal of Geometry ant Its Applications, 43-62.
22. Terlizzi L.D., 2006. On The Curvature of a Generalization of Contact Metric Manifolds, Acta Math, Hungary, 225-239.
23. Yano K. ve Kon M., 1984. Structure on Manifolds, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 252-286.
24. Erdem S., 2007. Constancy of Maps into f -manifolds and pseudo f -manifolds, Anadolu Üniversitesi, Beitrage zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry), 1-9.

25. I. Sato, 1976. On a structure similar to the almost contact structure, Tensor.
New Series, vol.30., 219-224.
26. K. Matsumoto, 1976. On a structure defined by a tensor field f of type (1,1)
satisfying $f^3 - f = 0$, Bull. Yamagata Univ., 33-47.
27. D.E. Blair, 1971. Almost contact manifolds with Killing structure tensors,
Pacific Journal of Math., 285-292.
28. D.E. Blair ve K. Yano, 1971. Affine almost contact manifolds and f -manifolds
with affine Killing structure tensors, Kôdai Math. Sem. Rep., 473-479.
29. K. Kenmotsu, 1972. A class of almost contact Riemannian manifolds, Tôhoku
Mathematical Journal 24., 93-103.

5. ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : DİKİCİ Erbil
Uyruğu : T. C.
Doğum tarihi ve yeri : 14.11.1982 / AKSARAY
Medeni hali : Evli

İletişim Bilgileri

Telefon : (0505) 476 57 46
E-posta : erbilona@gmail.com

Eğitim Bilgileri

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek Lisans	Aksaray Üniversitesi	2014
Lisans	Azerbaycan Devlet Pedagoji Üniversitesi	2005
Lise	Aksaray Kamber Demir Lisesi	1999

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2005-	Aksaray Final Dergisi Dershanesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

Rusça, İngilizce

Projeler

1. Özüsağlam E. ve Dikici E., 2013. Hemen Hemen Pseudo f -Manifoldlar, BAP Projesi, Aksaray Üniversitesi, AKSARAY.

Bilimsel Bildiriler

1. Özüsağlam E. ve Dikici E., 2013. The Curvature Tensor Field on Pseudo f -Manifolds with Complemented Frames, XI. Geometri Sempozyumu, Ordu Üniversitesi, ORDU, 66 pp.
2. Özüsağlam E., Dikici E., Atalay A. ve Poşpoş P., 2012. Matematik Eğitiminde Alternatif Bir Yazılım : MAXİMA, XI. Matematik Sempozyumu, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, SAMSUN.

