

EYLÜL 2021

Yüksek Lisans Tezi-Matematik

NECMETTİN KOÇYİĞİT

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLARIN
SAYISAL ÇOĞALTMASININ TİPİNİN GÖRECELİ İDEALLER
YARDIMIYLA BELİRLENMESİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

NECMETTİN KOÇYİĞİT
EYLÜL 2021

**HEMEN HEMEN SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLARIN
SAYISAL ÇOĞALTMASININ TİPİNİN GÖRECELİ İDEALLER
YARDIMIYLA BELİRLENMESİ**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Belgin ÖZER

Necmettin KOÇYİĞİT

Eylül 2021



©2021[Necmettin KOÇYİĞİT]

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Necmettin KOÇYİĞİT

ABSTRACT

THE DETERMINATION OF THE TYPE OF DUPLICATION OF ALMOST SYMMETRIC NUMERICAL SEMIGROUP WITH THE HELP OF RELATIVE IDEALS

KOÇYİĞİT, Necmettin

MSc. in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Belgin ÖZER

September 2021

51 pages

In this study, the numerical semigroup S and the relative ideals of this group are defined and the properties of numerical semigroup is examined. The purpose of the thesis is to determine the type of the duplication of numerical semigroup, $S_{\infty^b E}$, such that S is almost numerical semigroup $b \in S$ any odd integer and E is the relative ideal of S .

Words: Numerical Semigroup, Almost-Symmetry, Apéry Set, Ideals, Numerical Duplication

ÖZET

HEMEN HEMEN SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLARIN SAYISAL ÇOĞALTMASININ TİPİNİN GÖRECELİ İDEALLER YARDIMIYLA BELİRLENMESİ

KOÇYİĞİT, Necmettin
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Doç. Dr. Belgin ÖZER
Eylül 2021
51 sayfa

Bu çalışmada bir S sayısal yarıgrubu ile bu grubun göreceli idealleri tanımlanmış ve sayısal yarıgrup özellikleri incelenmiştir. Tezin amacı S hemen hemen simetrik bir sayısal yarıgrup, $b \in S$ herhangi bir tek tamsayı ve E ; S nin göreceli ideali olmak üzere yeni bir sayısal yarıgrup olan $S \circ^b E$ sayısal çoğaltmasının tipini göreceli idealler yardımıyla belirlemektir.

Anahtar Kelimeler: Sayısal Yarıgrup, Sözde Simetriklik, Apery Kümeleri, İdealler,

Hemen Hemen Simetriklik, Sayısal Çoğaltma.

‘AKGÜN UĞUZ ’ UN ANISINA ‘

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam sayın Doç. Dr.Belgin ÖZER'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Matematiğe olan bakış açımı değiştiren ve zamansız gidişiyle hayatımda derin bir üzüntü bırakan çok sevgili dostum matematik öğretmeni Akgün UĞUZ hocama sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen eşim Zeliha Durak KOÇYİĞİT ve masa başında beni yalnız bırakmayan canım oğlum Miran Deniz'e sonsuz teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ABSTRACT.....	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SEMBOLLER LİSTESİ.....	x
BÖLÜM I: GİRİŞ.....	1
BÖLÜM II: TEMEL KAVRAMLAR.....	3
BÖLÜM III: APERY KÜMELERİ.....	10
BÖLÜM IV: SAYISAL YARIGRUP ÇEŞİTLERİ.....	15
BÖLÜM V: İDEALLER.....	22
BÖLÜM VI: SAYISAL YARIGRUPLARIN SAYISAL ÇOĞALTMASI.....	35
BÖLÜM VII: SONUÇ.....	48
KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ (CV).....	51

SEMBOLLER LİSTESİ

S	Sayısal yarıgrup
S^*	S nin sıfırdan farklı elemanlar kümesi
$m(S)$	S nin katlılığı
$e(S)$	S nin gömme boyutu
$g(S)$	S nin cinsi
$G(S)$	S nin boşluklar kümesi
$t(S)$	S nin tipi
$F(S)$	S nin Frobenyus sayısı
$PF(S)$	S nin sözde frobenyus sayıları kümesi
$\langle A \rangle$	A ile üretilen küme
$\leq_s$	S nin kısmı sıralama bağıntısı
$Ap(S, n)$	n sayısına göre Apery kümesi
$\mathbb{N}$	Negatif olmayan tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$K(S)$	Kanonik ideal
$E - F$	E nin F deki dualı
$E + F$	İki idealin toplamı
$\rightarrow$	İşaretin önündeki sayıdan sonraki sayılar kümenin elemanıdır
$C(S)$	S nin kondüktörü
$S_{\infty^b} E$	S nin E idealine göre sayısal çoğaltması
$L(S)$	S nin kutup noktaları

BÖLÜM I

GİRİŞ

Hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar Barucci ve Fröberg tarafından 1997 de çalışılmıştır. Goto, Matsuoka ve Phuong bir sayısal yarıgrubun çoğaltmasını verdi. Rosales, Garcia-Sanchez bir sayısal yarıgrubun yarısını hesapladı. 2012 de Strazzanti bir sayısal yarıgrubun çoğaltmasının tipini göreceli idealler yaklaşımıyla hesapladı. S bir sayısal yarıgrup ve $E \subseteq S$ olacak şekilde bir E ideali ile başlayarak $S^{\infty^b E}$ ($b \in S$ tek tamsayı) ile gösterilen yeni bir sayısal yarıgrup elde edilir.

$S = \{x \in \mathbb{N} : 2x \in S^{\infty^b E}\}$ ya da kısaca $S = \frac{S^{\infty^b E}}{2}$ dir. Bu yeni sayısal yarıgruba S nin E ve b ye göre sayısal çoğaltması denir. Tezin amacı, hemen hemen simetrik bir sayısal yarıgrubun sayısal çoğaltmasını göreceli idealler kullanarak karakterize etmek ve aynı zamanda bu sayısal çoğaltmanın tipini göreceli idealler kullanarak bulmaktır.

İkinci bölümde sayısal yarıgrupların temel özellikleri ile birlikte Frobenyus,sözde frobenyus,boşluklar kümesi,bir sayısal yarıgrubun tipi ve cinsi gibi kavramlardan ve bunlarla ilgili önermelerden bahsedilmektedir.

Üçüncü bölümde ise Apery Kümeleri, sayısal yarıgruplarda sıralama ve sıralama yardımıyla bir sayısal yarıgrupta maksimal elemanların nasıl bulunacağı gösterilmiştir. Ayrıca bir sayısal yarıgrubun tipinin maksimal elemanlar yardımıyla nasıl bulunabileceği gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde sayısal yarıgrup kavramında önemli bir rolü olan simetriklik, sözde simetriklik ve hemen hemen simetriklik kavramlarından ve bunlarla ilgili çok kullanılan terorem ve önermelerden bahsedilmektedir.

Beşinci bölümde, sayısal yarıgrupta ideallerden bahsedilmiş, idealler yardımıyla simetriklik, sözde simetriklik, hemen hemen simetriklik kavramları incelenmiş ve kanonik idealden bahsedilmiştir. Ayrıca burada idealler yardımıyla yeni idealler elde etme ve bir sayısal yarıgrubun tipinin belirlenmesi ile ilgili teorem ve önermeler verilmiştir.

Son bölümde sayısal çoğaltma kavramı verilmiş, sayısal çoğaltmanın bir yarıgrup olduğu gösterilmiştir. Sayısal çoğaltmanın frobenyus sayısı, tipi ve boşluklarının nasıl bulunacağı gösterilmiştir. Hemen hemen simetrik bir sayısal çoğaltmanın tipinin göreceli idealler yardımıyla nasıl bulunacağı teorem ve lemmalarla gösterilmiştir.



BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm tezin iyi anlaşılması için gerekli temel tanım ve teoremleri içermektedir.

Tanım 2.1. $S \neq \emptyset$ ve $'*$ ' , S üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. $(S, *)$ yapısı S üzerinde birleşme özelliğine sahip ise yani

$\forall a, b, c \in S$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ oluyorsa $(S, *)$ ikilisi bir yarıgruptur.

Tanım 2.2. Birim elemana sahip bir yarıgruba monoid denir.

$\forall a \in S$ için $a * e = e * a = a$ oluyorsa " e " ye S nin birim elemanı denir.

Örnek 2.3. $\mathbb{Z} - \{0\}$ kümesi çarpma işlemine göre bir yarıgruptur. 1 elemanı çarpmaya göre birim eleman olduğundan $\mathbb{Z} - \{0\}$ kümesi çarpma işlemine göre bir monoiddir.

Örnek 2.4. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi toplama işlemine göre bir yarıgruptur.

Tanım 2.5. $(S, *)$ bir monoid ve $Y \subset S$ olsun.

i) $e \in Y$

ii) $\forall a, b \in Y$ için $a * b \in Y$

ise Y ye S nin alt monoidi denir.

Tanım 2.6. S bir yarıgrup ve $A \subset S$ olsun. A yı kapsayan S nin en küçük alt yarıgrubuna A nın ürettiği yarıgrup denir. Bu durumda A kümesine de S nin üreteçler kümesi denir ve $S = \langle A \rangle$ şeklinde gösterilir. Özel olarak $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ olacak şekilde $A = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset S$ alınırsa $S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ yazılı

$S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ olacak şekilde S nin $A = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ üreteç kümesinden daha küçük bir küme yoksa o zaman $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ kümesine S nin minimal üreteç sistemi denir. [2]

Örnek 2.7. $S = \langle 5, 9, 13, 18, 39 \rangle = \langle 5, 9, 13, 39 \rangle = \langle 5, 9, 13 \rangle$

Dolayısıyla S yarıgrubu; buna benzer birçok üreteç kümesiyle üretilebilir. Fakat bu kümeler arasında minimal olanı $A = \{5, 9, 13\}$ kümesidir. Dolayısıyla bu kümeye S yarıgrubunun minimal üreteç kümesi denir. S nin elde edilebildiği ve A kümesinin özalt kümesi olan başka bir üreteç küme yoktur. Yani; S nin minimal üreteç kümesi tektir.

Tanım 2.8. $\mathbb{N}$ negatif olmayan tamsayılar kümesi olmak üzere $S \subset \mathbb{N}$ verilsin. Eğer S toplama işlemine göre kapalı, $0 \in S$ ve $\mathbb{N} \setminus S$ sonlu oluyorsa S ye bir sayısal yarıgrup denir.

S bir sayısal yarıgrup olmak üzere $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ olacak şekilde $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ için

$$S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n s_i x_i : x_i \in \mathbb{N} \right\} \text{ olarak yazılır ve}$$

" $(s_1, s_2, \dots, s_n) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus S$ sonludur" önermesi doğrudur. [1]

Örnek 2.9. $S = \langle 5, 6, 13 \rangle = \{5x_1 + 6x_2 + 13x_3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}\}$
 $= \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15, \rightarrow\}$

şeklinde yazılır.

Burada " $\rightarrow$ " sembolü 15 ten sonraki bütün tamsayıların S kümesinde olduğu anlamındadır.

Örnek 2.10. $S = \langle 3, 5 \rangle = \{3x_1 + 5x_2 : x_1, x_2 \in \mathbb{N}\} = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, \rightarrow\}$

açıkça gösterecek olursak

i) $0 \in S$

ii) $\forall s_1, s_2 \in S$ için $s_1 = 3x_1 + 5x_2$ ve $s_2 = 3y_1 + 5y_2$

olacak şekilde $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ vardır ve $s_1 + s_2 = 3(x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2) \in S$ dir.

iii) $\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 4, 7\}$ koşullarını sağladığı için S bir sayısal yarıgruptur.

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ ve $A = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ kümesi için; $S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n s_i x_i : x_i \in \mathbb{N} \right\}$

nin bir sayısal yarıgrup olması için gerek yeter şart $obeb(s_1, s_2, \dots, s_n) = 1$ olmasıdır.

[3]

Örnek 2.11. $S = \langle 4, 7, 9 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 9, 11, \rightarrow\}$

Burada $obeb(4, 7, 9) = 1$ ve $\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$ olduğundan S sayısal yarıgruptur.

Örnek 2.12. $S = \langle 3, 5, 7 \rangle = \{0, 3, 5, \rightarrow\}$ olup

$\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 4\}$ sonludur $\Leftrightarrow obeb(3, 5, 7) = 1$ dir.

Örnek 2.13. $S = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, \dots\}$

kümesi bir sayısal yarıgruptur. $0 \in S$ ve S toplama işlemine göre kapalı ve

$\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17\}$ kümesi sonludur.

Tanım 2.14. S sayısal yarıgrubu $S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ şeklinde verilsin o zaman

i) $m(S) = s_1$ sayısına S nin katlılığı

ii) $e(S) = n$ sayısına S nin gömme boyutu denir. [4]

Tanım 2.15. S bir sayısal yarıgrup olsun. S ye ait olmayan en büyük tamsayıya S nin Frobenyus sayısı denir ve $F(S)$ ile gösterilir. [5]

$F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ veya

$F(S) = \max \{x \in \mathbb{Z} : x \notin S\}$ olarak gösterilir.

Tanım 2.16. Pozitif tamsayılardan, S sayısal yarıgrubuna ait olmayan elemanlara S nin boşlukları denir, $G(S)$ ile gösterilir ve boşluklar kümesinin eleman sayısına S nin cinsi denir ve $g(S) = |G(S)|$ ile gösterilir. [4]

Örnek 2.17.

$$S = \langle 8, 13, 15, 19 \rangle = \{0, 8, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, \rightarrow\}$$

$$G(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 17, 18, 20, 22, 25, 33\} \text{ boşlukların kümesi}$$

$$F(S) = 33 \quad S \text{ de olmayan en büyük tamsayı}$$

$$m(S) = 8 \quad \text{katlılık}$$

$$e(S) = 4 \quad \text{gömme boyutu}$$

$$g(S) = 18 \quad \text{boşlukların eleman sayısı}$$

Örnek 2.18. $S = \langle 5, 9, 13 \rangle = \{0, 5, 9, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için

$$G(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 16, 17, 21\}$$

$$m(S) = 5, e(S), F(S) = 21, g(S) = 12$$

Örnek 2.19. $S = \langle 3, 4, 8 \rangle = \{0, 3, 4, 6, \rightarrow\}$

$$G(S) = \mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 5\}$$

$$g(S) = 3$$

$$F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S) = 5$$

Tanım 2.20. S ye ait olmayan tamsayılardan S nin sıfırdan farklı her elemanı ile toplamı S kümesine ait olanlarına Pseudo (Sözde) Frobenyus sayısı denir. Bu şartı sağlayan sayıların kümesine Sözde frobenyus sayılar kümesi denir ve $PF(S)$ ile gösterilir.

$$PF(S) = \{x \in \mathbb{N} \setminus S : x + s \in S, \forall s \in S - \{0\}\} \text{ ile gösterilebilir.}$$

$PF(S)$ nin eleman sayısına S nin tipi denir.

$$|PF(S)| = t(S) \text{ ile gösterilir. [6]}$$

Örnek 2.21.

$$S = \langle 5, 13, 21 \rangle = \{0, 5, 10, 13, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38, \rightarrow\}$$

$$* \quad e(S) = 3$$

$$* \quad m(S) = 5$$

$$* \quad G(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 22, 24, 27, 29, 32, 37\}$$

- * $F(S) = 37$
- * $g(S) = 20$
- * $PF(S) = \{29, 37\}, |PF(S)| = 2$

Örnek 2.22. $S = \langle 5, 9, 21 \rangle = \{0, 5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 23 \rightarrow\}$ Sayısal yarıgrubunu alalım. Buradan,

$\langle 5, 9, 21, 27 \rangle = \langle 5, 9, 10, 21 \rangle = \langle 5, 9, 21 \rangle$ olduğundan minimal üreteç sistemi $\langle 5, 9, 21 \rangle$ olur.

$$e(S) = 3$$

$$m(S) = 5$$

$$G(S) = \mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 22\}$$

$$g(S) = 13$$

$$F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S) = \{22\}$$

$$PF(S) = \{16, 22\}$$

$$t(S) = 2$$

$$F(S) = \max(PF(S)) = 22$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.23. S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, Frobenyus sayısı ile farkı S ye ait olmayan S nin dışındaki tamsayılara S nin kutup noktaları denir ve bu elemanların oluşturduğu küme $L(S)$ ile gösterilir.

Yani; $L(S) = \{z \in \mathbb{Z} : z \notin S, F(S) - z \notin S\}$ dir.

Bu tanımı kullanarak $z \in G(S)$ olduğu görülür. [7]

Sonuç 2.24. S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, $z \in L(S)$ ise $z \in \mathbb{Z}^+$ ve $L(S) \subseteq G(S) = \mathbb{N} \setminus S$ olur.

İspat. $z \in L(S)$ olsun $z \in \mathbb{Z}^-$ ise $z \notin S$ fakat $F(S) - z \in S$ olduğu açıktır. Bu sebeple, $z \in \mathbb{Z}^+$ olmalıdır. Ayrıca, $z \notin S$ olduğundan $L(S) \subseteq G(S) = \mathbb{N} \setminus S$ dir.

Sonuç 2.25. Bir sayısal yarıgrupta boşluklar kümesinin toplamı Frobenyus sayısını veren herhangi iki elemanı kutup noktası olur. Eğer Frobenyus sayısı çift ise, Frobenyus sayısının yarısı olan sayı kutup noktasıdır.

İspat.

$$z_1, z_2 \in G(S) \text{ ve } z_1 + z_2 = F(S) \text{ olsun.}$$

$$z_1 = F(S) - z_2 \notin S$$

$$z_1 \notin S \text{ ve } F(S) - z_2 \notin S \Rightarrow \{z_1, z_2\} \in L(S) \text{ olur.}$$

Eğer S sayısal yarıgrubunun Frobenyus sayısı çift ise; $\frac{F(S)}{2} \notin S$ olduğundan ve

aynı zamanda $F(S) - \frac{F(S)}{2} \notin S$ olduğundan $\frac{F(S)}{2} \in L(S) \subset G(S)$ bulunur.

Sonuç 2.26. Bir S sayısal yarıgrubu için

- 1) $F(S) \in PF(S)$
- 2) $PF(S)$ nin ikinci en büyük elemanı $L(S)$ nin en büyük elemanıdır. [8]

Örnek 2.27. $S = \langle 3, 10 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, \rightarrow\}$

- * S nin minimal üreteç kümesi: $\{3, 10\}$, $e(S) = 2$
- * $m(S) = 3$
- * $F(S) = 17$
- * $G(S) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 14, 17\}$
- * $g(S) = 9$
- * $PF(S) = \{17\}$, $t(S) = 1$ ve $L(S) = \emptyset$

Örnek 2.28. $S = \langle 4, 9, 14 \rangle = \{0, 4, 8, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, \rightarrow\}$

- * S nin minimal üreteç kümesi: $\{4, 9, 14\}$, $e(S) = 3$
- * $m(S) = 4$
- * $F(S) = 19$

- * $G(S) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15, 19\}$, $g(S) = 10$
- * $L(S) = \emptyset$
- * $PF(S) = \{19\}$ ve $t(S) = 1$

Örnek 2.29. $S = \langle 8, 11, 12, 15 \rangle = \{0, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, \rightarrow\}$

- S nin minimal üreteç kümesi: $\{8, 11, 12, 15\}$, $e(S) = 4$
- $m(S) = 8$
- $F(S) = 29$
- $G(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 25, 29\}$
- $g(S) = 16$
- $L(S) = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \notin S, F(S) - z \notin S\} = \{4, 25\}$
- $PF(S) = \{4, 25, 29\}$
- $type(S) = 3$ dür.

Örnek 2.30. $S = \langle 3, 5, 11 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, \rightarrow\}$

- S nin minimal üreteç kümesi : $\{3, 5, 11\}$
- $m(S) = 3$
- $F(S) = 7$
- $G(S) = \{1, 2, 4, 7\}$
- $g(S) = 4$
- $L(S) = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \notin S, F(S) - z \notin S\} = \emptyset$
- $PF(S) = \{7\}$
- $t(S) = 1$

BÖLÜM III

APERY KÜMELERİ

Tanım 3.1. $n \in S \setminus \{0\}$ olsun, S sayısal yarıgrubunun n ye göre Apery Kümesi $Ap(S, n)$ ile gösterilir ve $Ap(S, n) = \{s \in S : s - n \notin S\}$ olarak tanımlanır.

Örnek 3.2. $S = \langle 5, 7, 9 \rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu alalım.

$n = 5 \in S \setminus \{0\}$ olsun.

$$Ap(S, 5) = \{s \in S : s - 5 \notin S\} = \{0, 7, 9, 16, 18\}, \quad |Ap(S, 5)| = 5$$

$$Ap(S, 5) = \{0 = w(0), w(1), w(2), w(3), w(4)\}$$

$$w(1) \equiv 1 \pmod{5} \rightarrow w(1) = 16$$

$$w(2) \equiv 2 \pmod{5} \rightarrow w(2) = 7$$

$$w(3) \equiv 3 \pmod{5} \rightarrow w(3) = 18$$

$$w(4) \equiv 4 \pmod{5} \rightarrow w(4) = 9$$

Buradan,

$$Ap(S, 5) = \{0, 7, 9, 16, 18\}$$

elde edilir.

Örnek 3.3. $S = \langle 3, 7 \rangle = \{0, 3, 6, 7, 9, 10, 12, 13, \rightarrow\}$

$n = 3 \in S \setminus \{0\}$ olsun.

$$Ap(S, 3) = \{0, 7, 14\} \quad |Ap(S, 3)| = 3$$

Yardımcı Teorem 3.4. S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S \setminus \{0\}$, $\forall i \in 1, 2, 3, \dots, n$ için

$w(i) \equiv i \pmod{n}$ olacak şekilde S nin en küçük elemanı olsun. Bu durumda

$Ap(S, n) = \{0 = w(0), w(1), \dots, w(n-1)\}$ olur. Daha açık bir şekilde $\text{mod } n$ ye göre $0, 1, 2, \dots, n-1$ e denk olan S de ki en küçük elemanlar Apéry kümesini oluşturur. [8]

Örnek 3.5. $S = \langle 5, 7, 9 \rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, \rightarrow\}$

$$Ap(S, 5) = \{0, 7, 9, 16, 18\}$$

$$w(1) \equiv 1(\text{mod } 5) \Rightarrow S \text{ de mod } 5 \text{ e göre } 1 \text{ olan: } 16$$

$$w(2) \equiv 2(\text{mod } 5) \Rightarrow S \text{ de mod } 5 \text{ e göre } 2 \text{ olan: } 7$$

$$w(3) \equiv 3(\text{mod } 5) \Rightarrow S \text{ de mod } 5 \text{ e göre } 3 \text{ olan: } 18$$

$$w(4) \equiv 4(\text{mod } 5) \Rightarrow S \text{ de mod } 5 \text{ e göre } 4 \text{ olan: } 9$$

$$w(0) = 0$$

Örnek 3.6. $S = \langle 5, 6, 8 \rangle = \{0, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için

$$Ap(S, 8) = \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 17\} \text{ olur.}$$

$$w(0) = 0$$

$$w(1) \equiv 1(\text{mod } 8) \Rightarrow w(1) = 17$$

$$w(2) \equiv 2(\text{mod } 8) \Rightarrow w(2) = 10$$

$$w(3) \equiv 3(\text{mod } 8) \Rightarrow w(3) = 11$$

$$w(4) \equiv 4(\text{mod } 8) \Rightarrow w(4) = 12$$

$$w(5) \equiv 5(\text{mod } 8) \Rightarrow w(5) = 5$$

$$w(6) \equiv 6(\text{mod } 8) \Rightarrow w(6) = 6$$

$$w(7) \equiv 7(\text{mod } 8) \Rightarrow w(7) = 15$$

Tanım 3.7. S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, S üzerindeki $\leq_s$ bağıntısını

$x \leq_s y \Leftrightarrow y - x \in S$ olarak tanımlayalım. Bu bağıntı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Ayrıca $S \setminus \{0\}$ kümesinin $\leq_s$ kısmi sıralama bağıntısına göre minimal elemanları

i, S nin minimal üreteç kümesinin elemanlarıdır. [2]

Tanım 3.8. $PF(S) = \{x \in \mathbb{N} \setminus S : x + s \in S, \forall s \in S \setminus \{0\}\}$ kümesine S nin Pseudo

(sözde) Frobenyus sayıları denir. $PF(S)$ nin eleman sayısına S nin tipi denir.

$|PF(S)| = t(S)$ ile gösterilir.

$PF(S) = \{w - n : w \in \max_{\leq_S} Ap(S, n)\}$ Sözde frobenyus sayıları, Apery kümesi yardımıyla bulunur. [1]

Örnek 3.9. $S = \langle 5, 9, 21 \rangle = \{0, 5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 23 \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu alalım.

$\langle 5, 9, 21, 27 \rangle = \langle 5, 9, 10, 21 \rangle = \langle 5, 9, 21 \rangle$ olduğundan minimal üreteç sistemi $= \langle 5, 9, 21 \rangle$ dir.

$$G(S) = \mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 22\}$$

$$g(S) = 13$$

$$F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S) = \{22\}$$

$$PF(S) = \{16, 22\}$$

$$F(S) = \max(PF(S)) = 22$$

$$Ap(S, 5) = \{0, 21, 27, 18, 9\} \Rightarrow \text{maksimaller} : \{27, 21\}$$

$$PF(S) = \{w - n : w \in \max_{\leq_S} Ap(S, n)\} = \{22, 16\}$$

$$27 - 5 = 22$$

$$21 - 5 = 16$$

Sonuç 3.10. $|Ap(S, n)| = n$ dir.

Sonuç 3.11. $F(S) = \max Ap(S, n) - n$ dir.

Örnek 3.12. $S = \langle 3, 7, 11 \rangle = \{0, 3, 6, 7, 9 \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için $\leq_S$ bağıntısını inceleyerek minimal elemanları tespit edelim.

$$3 \leq_s 6, 3 \not\leq_s 7, 3 \leq_s 9, 3 \not\leq_s 11 \quad (11-3=8 \notin S)$$

↓

$$6-3=3 \in S, 7-3=4 \notin S, \dots$$

Bu karşılaştırmaların sonuçları bir araya getirildiğinde aşağıdaki gibi bir sonuç elde edilir.

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 15 & 19 & 23 \\
 \uparrow \nearrow & \uparrow \nearrow & \uparrow \\
 12 & 16 & 20 \\
 \uparrow \nearrow & \uparrow \nearrow & \uparrow \\
 9 & 13 & 17 \\
 \uparrow \nearrow & \uparrow \nearrow & \uparrow \\
 6 & 10 & 14 \\
 \uparrow \nearrow & \uparrow \nearrow & \uparrow \\
 3 & 7 & 11
 \end{array}$$

Dolayısıyla sayısal yarıgruplar için tanımlı $\leq_s$ bağıntısına göre

$S = \langle 3, 7, 11 \rangle = \{0, 3, 6, 7, 9 \rightarrow\}$ sayısal grubunun minimal elemanları kümesi $\{3, 7, 11\}$ dir. Bu küme aynı zamanda S nin minimal üreteç kümesidir.

Not: $Ap(S, n)$ kümesinin $\leq_s$ sıralama bağıntısına göre maksimal elemanlar kümesi $\max_{\leq_s} (Ap(S, n))$ ile gösterilecektir.

Önerme 3.13. S bir sayısal yarıgrup ve $n \neq 0 \in S$ olsun. Bu durumda

$$PF(S) = \{w - n \in \mathbb{Z} : w \in \max_{\leq_s} Ap(S, n)\} \text{ dir. [10]}$$

Sonuç 3.14. S nin tipi $Ap(S, n)$ maksimallerinin kardinalitesidir. Yani

$$t(S) = |\max_{\leq_s} Ap(S, n)| \text{ dir.}$$

Örnek 3.15.

$$S = \langle 5, 13, 21 \rangle = \{0, 5, 10, 13, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38 \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubu için $F(S) = 37$ ve $PF(S) = \{29, 37\}$ olduğu açıktır. Önermeyi iki taraflı sağlatacak olursak

$$n = 5 \text{ için } Ap(S, 5) = \{0, 13, 21, 34, 42\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 29 + 5 = 34 \\ 37 + 5 = 42 \end{array} \right\} \Rightarrow \{34, 42\} \text{ maksimaller olur.}$$

Şimdi 34 ve 42 nin $Ap(S, 5)$ de maksimaller olduğunu gösterelim.

$$0 \leq_s 13, 0 \leq_s 21, 0 \leq_s 34, 0 \leq_s 42$$

$$13 \not\leq_s 21, 13 \leq_s 34, 13 \not\leq_s 42, (42 - 13 = 29 \notin Ap(S, 5))$$

$$21 \leq_s 34, 21 \leq_s 42, 34 \not\leq_s 42, 42 \leq_s 42$$

Bu karşılatırmaların sonuçları ile aşağıdaki sıralamalar elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} 34 & & 42 \\ \uparrow \swarrow & & \nearrow \\ 13 & & 21 \\ \uparrow \nearrow & & \\ 0 & & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq_s 13 \\ 13 \leq_s 34 \\ 21 \leq_s 34 \\ 21 \leq_s 42 \end{array} \right.$$

34 ve 42 nin maksimaller olduğu görülür, dolayısıyla

$$PF(S) = \{42 - 5, 34 - 5\} = \{37, 29\}, t(S) = 2 \text{ olur.}$$

Örnek 2.17. deki

$$S = \langle 8, 13, 15, 19 \rangle = \{0, 8, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, \rightarrow\} \text{ için}$$

$$S \text{ nin minimalleri : } \{8, 13, 15, 19\}$$

$$Ap(S, 8) = \{0, 41, 26, 19, 28, 13, 30, 15\}$$

$$Ap(S, 8) \text{ nin maksimalleri : } \{19, 30, 41\}$$

$$PF(S) = \{19 - 8, 30 - 8, 41 - 8\} = \{11, 22, 33\}$$

$$t(S) = 3 \text{ tür}$$

BÖLÜM IV

SİMETRİKLİK, SÖZDE SİMETRİKLİK, HEMEN HEMEN SİMETRİKLİK

Tanım 4.1. Tüm $z \in \mathbb{Z}$ için; $(z \in S \Leftrightarrow F(S) - z \notin S)$ veya $(z \notin S \Leftrightarrow F(S) - z \in S)$ şartını sağlayan S sayısal yarıgrubuna simetrik sayısal yarıgruplar denir. Bir sayısal yarıgrubun simetrik olması için aşağıdakiler birbirine denktir. [11]

1) $L(S) = \emptyset$

2) $F(S) + 1 = 2g(s)$

3) $t(S) = 1$

İspat 1. $(\Rightarrow)$: S simetrik ise $z \notin S \Leftrightarrow F(S) - z \in S$ veya $z \in S \Leftrightarrow F(S) - z \notin S$ şartlarından herhangi biri sağlanır. $L(S) = \{z \in \mathbb{Z} : z \notin S, F(S) - z \notin S\} \neq \emptyset$ olsun. Öyleyse; $z \notin S$ için $F(S) - z \notin S$ şartı sağlanır. Bu durum S nin simetrik sayısal yarıgrup olmasıyla çelişir. Yani $L(S) = \emptyset$ dir.

$(\Leftarrow)$: $L(S) = \emptyset$ olduğundan $\forall z \in \mathbb{Z} \setminus S \Leftrightarrow F(S) - z \in S$, $z \notin S$ sayıları için simetriklik şartı sağlanır. $z \in S$ olduğunda ise $F(S) - z \in S$ olsun. Öyleyse

$$\underbrace{(F(S) - z)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{z}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{F(S)}_{\notin S} \text{ olur ki bu da simetrik sayısal yarıgrup tanımıyla çelişir.}$$

İspat 2. $(\Rightarrow)$: S sayısal yarıgrubu simetrik olsun. $F(S)$ nin çift sayı olduğunu kabul edelim.

$\frac{F(S)}{2} \in S$ ise S sayısal yarıgrubu simetrik olduğundan $F(S) - \frac{F(S)}{2} = \frac{F(S)}{2} \notin S$ çelişkisi elde edilir. Aksi durumda $\frac{F(S)}{2} \notin S$ olduğunda ise S simetrik sayısal yarıgrup olduğundan $F(S) - \frac{F(S)}{2} = \frac{F(S)}{2} \in S$ çelişkisi elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $F(S)$ tek sayı ve $g(S) = \frac{F(S)+1}{2}$ olsun. Öyleyse; $\{0, 1, \dots, F(S)\}$ kümesinin

ayrışımını düşündüğümüzde, hepsinin S ile ortak bir elemanı vardır. Yani;

$z \in S \Leftrightarrow F(S) - z \notin S$ dir. Eğer $z < 0$ ise tanımdan, $z \notin S$ ve $F(S) - z \in S$ olur.

$z > F(S) \Rightarrow z \in S$ dir. ($F(S)$ den büyük bütün tamsayılar S nin elemanıdır.)

ve $F(S) - z < 0$ olduğundan $F(S) - z \notin S$ şartı sağlanır. Böylece sayısal yarıgrubun simetrik olduğu sonucuna varılır.

İspat 3. $F(S) \in PF(S)$ olduğunu biliyoruz. $PF(S)$ nin $F(S)$ elemanından başka elemanı olmadığını göstermemiz gerekir. Başka bir eleman daha varsa, o da $PF(S)$ kümesinin ikinci en büyük elemanıdır. $PF(S)$ kümesinin ikinci en büyük elemanı $L(S)$ kümesinin en büyük elemanı olacağından $L(S) \neq \emptyset$ olur ki; bu da S sayısal yarıgrubunun simetrik olmasıyla çelişir.

Tersine; $PF(S) = \{F(S)\}$ ise $PF(S)$ kümesinin ikinci en büyük elemanı $L(S)$ kümesinin en büyük elemanı olacağından $L(S) = \emptyset$ olur ve buradan da S sayısal yarıgrubunun simetrik olduğu sonucuna varılır.

Örnek 4.2. $S = \langle 3, 11, 17 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için $G(S) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 16, 19\}$ olarak bulunur.

$\forall z \in G(S) (z \notin S)$ için $F(S) - z \in S$ şartı sağlanır. $G(S)$ kümesi dışında S ye ait olmayan elemanlar negatif tamsayılara ait elemanlar olduğundan $F(S) - z \in S$ şartı sağlanır. Bu nedenle S sayısal yarıgrubu bir simetrik sayısal yarıgruptur.

Örnek 4.3. $S = \langle 3, 10 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, \rightarrow\}$

$$F(S) = 17$$

$$G(S) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 14, 17\}, g(S) = 9$$

$$L(S) = \emptyset$$

$$PF(S) = 17$$

$$t(S) = 1$$

S sayısal yarıgrubu simetrik.

Örnek 4.4.

$$S = \langle 5, 13, 21 \rangle = \{0, 5, 10, 13, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38, \rightarrow\}$$

$$S \text{ nin minimal üreteç kümesi : } \{5, 13, 21\}, e(S) = 3$$

$$m(S) = 5$$

$$F(S) = 37$$

$$G(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 22, 24, 27, 29, 32, 37\}, g(S) = 20$$

$$L(S) = \{8, 29\}, PF(S) = \{29, 37\} \text{ ve } t(S) = 2 \text{ dir. } S \text{ sayısal yarıgrubunun tipi 2 ve}$$

$L(S) \neq \emptyset$ olduğundan simetrik değildir.

Örnek 4.5. $S = \langle 5, 6, 7 \rangle = \{0, 5, 6, 7, 10, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için; $F(S) = 9, g(S) = 4$

ve $m(S) = 5$. Fakat, $8 \notin S$ için, $F(S) - 8 = 9 - 8 = 1 \notin S$ olduğundan S simetrik sayısal yarıgrup değildir. Kutup noktaları kümesini oluşturarak S sayısal yarıgrubunun simetriklik durumunu incelersek; $L(S) = \{1, 8\}$ elemanlarından oluşur.

$L(S) \neq \emptyset$ olduğundan S simetrik değildir.

Tanım 4.6. S sayısal yarıgrup ve $F(S)$ çift olmak üzere

$\forall x \notin S$ için $F(S) - x \in S$ veya $\forall x \in S$ için $F(S) - x \notin S$ şartını sağlayan sayısal yarıgruplara pseudo (sözde) simetrik sayısal yarıgruplar denir. [6]

Şu açıktır ki simetrik ve sözde simetrik sayısal yarıgruplar arasında geçiş yoktur. Çünkü simetrik sayısal yarıgrupların frobenyus sayısı tek sayı iken sözde-simetrik sayısal yarıgrupların frobenyus sayısı çift sayıdır.

Önerme 4.7. S , sözde simetrik sayısal yarıgrup ise $t(S) = 2$ dir. [7]

Örnek 4.8. $S = \langle 5, 8, 19 \rangle = \{0, 5, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu

$$\text{ için; } G(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 17, 22\} \quad F(S) = 22 \text{ ve } \frac{F(S)}{2} = 11 \notin S \text{ şartları}$$

sağlanmaktadır. Bu sayısal yarıgrubun sözde simetrik sayısal yarıgrup olabilmesi için

$$\forall x \notin S \text{ tam sayısı için } F(S) - x \in S \text{ şartını sağladığını gösterelim.}$$

$$22 - 22 = 0 \in S, 22 - 17 = 5 \in S, 22 - 14 = 8 \in S, 22 - 12 = 10 \in S, 22 - 9 = 13 \in S$$

$$22 - 7 = 15, 22 - 6 = 16, 22 - 4 = 18, 22 - 3 = 19, 22 - 2 = 20, 22 - 1 = 21 \in S$$

Dolayısıyla $x \neq \frac{F(S)}{2} = 11$ dışındaki tüm sayılar için $F(S) - x \in S$ şartı sağlandığından bu sayısal yarıgrup aynı zamanda bir sözde simetrik sayısal yarıgruptur. Ayrıca, $PF(S) = \{11, 22\}$ olduğundan bu sayısal yarıgrup için $t(S) = 2$ dir.

Not 4.9. Tipi 2 olan sayısal yarıgruplar sözde simetrik sayısal yarıgrup olmayabilir.

Örnek 4.10. $S = \langle 7, 9, 11 \rangle = \{0, 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 25, 27, \rightarrow\}$

Sayısal yarıgrubu için;

$PF(S) = \{24, 26\}$ ve $type(S) = 2$ olmasına rağmen, S Sözde simetrik sayısal yarıgrup değildir. Çünkü; $2 \notin S$ olmasına rağmen, $F(S) - 2 = 26 - 2 = 24 \in S$ olması gerekirdi. Fakat $24 \notin S$. Dolayısıyla; $type(S) = 2$ olan her sayısal yarıgrup sözde simetrik sayısal yarıgrup olmayabilir.

Örnek 4.11.

$$S = \langle 5, 13, 21 \rangle = \{0, 5, 10, 13, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38, \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubu $PF(S) = \{29, 37\}$ olduğundan tipi 2 olan bir sayısal yarıgruptur.

Ancak, $F(S) = 37$ tek olduğundan, S sayısal yarıgrubu sözde simetrik bir sayısal yarıgrup değildir.

Sonuç 4.12. Sayısal yarıgrubunun sözde simetrik olabilmesi için gerek ve yeter şart $|L(S)| = 1$ olmasıdır.

Tanım 4.13. S bir sayısal yarıgrup olmak üzere $PF(S) = L(S) \cup \{F(S)\}$ şartını sağlayan sayısal yarıgruplara hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar denir.

$$\forall s \in S \setminus \{0\} \text{ için } s \in S \Leftrightarrow F(S) - s \notin S \cup PF(S)$$

Örnek 4.14. $S = \langle 7, 12, 13 \rangle = \{0, 7, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 31, \rightarrow\}$

sayısal yarıgrubu için

$$F(S) = 30, PF(S) = \{29, 30\}, L(S) = \{1, 8, 15, 22, 29\} \text{ ve } PF(S) = L(S) \cup \{F(S)\}$$

şartı sağlanmadığından S hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup değildir.

Örnek 4.15. $S = \langle 8, 11, 12, 15 \rangle = \{0, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, \rightarrow\}$

sayısal yarıgrubu için, $F(S) = 29, PF(S) = \{4, 25, 29\}$

$L(S) = \{4, 25\}$ ve $PF(S) = L(S) \cup \{F(S)\}$ şartı sağlandığından S hemen hemen simetrik bir sayısal yarıgruptur.

Önerme 4.16. S simetrik bir sayısal yarıgrup ise hemen hemen simetriktir.

İspat. S simetrik sayısal yarıgrup ise önceki teoremlerden dolayı $L(S) = \emptyset$ olduğunu biliyoruz. Bu sebeple; $PF(S) = \{F(S)\}$ olduğunu göstermeliyiz.

Yani; S simetrik sayısal yarıgrubunun Frobenyus sayısından başka Sözde frobenyus sayısı olmadığını göstermeliyiz. Kabul edelim ki; $F(S) \neq x \in PF(S)$ olsun. $x \in G(S)$ ve S simetrik sayısal yarıgrup olduğundan $F(S) - x \in S$ olmalıdır. $x \in PF(S)$ ise S nin sıfırdan farklı her elamanıyla toplamı S sayısal yarıgrubunun elemanı olmalıdır. Öyleyse; S nin sıfırdan farklı elemanı olarak $F(S) - x$ elemanını seçelim.

$$x + (F(S) - x) = x + F(S) - x = F(S) \in S$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla S simetrik sayısal yarıgrubunun Frobenyus sayısından başka sözde frobenyus sayısı olmadığından, hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olma şartı gösterilmiş olur.

Örnek 4.17.

$S = \langle 6, 14, 17 \rangle = \{0, 6, 12, 14, 17, 18, 20, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 40, \rightarrow\}$
sayısal yarıgrubu için

$$G(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 25, 27, 33, 39\},$$

$$PF(S) = \{39\},$$

S simetrik sayısal yarıgrup $L(S) = \emptyset$ ve $F(S) = \{39\}$ olduğundan

$PF(S) = L(S) \cup \{F(S)\}$ şartı sağlanır.

Yani, S hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

Önerme 4.18. S sözde simetrik sayısal yarıgrup ise aynı zamanda hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

İspat. S sözde simetrik sayısal yarıgrup ise $F(S)$ çift sayı ve

$PF(S) = \left\{ \frac{F(S)}{2}, F(S) \right\}$ olduğunu önceki tanım ve teoremlerden biliyoruz.

Dolayısıyla; $L(S) = \left\{ \frac{F(S)}{2} \right\}$ olduğundan; $PF(S) = L(S) \cup \{F(S)\}$ şartı

sağladığından S sayısal yarıgrubu aynı zamanda hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

Örnek 4.19. $S = \langle 3, 7, 11 \rangle = \{0, 3, 6, 7, 9, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için

$G(S) = \{1, 2, 4, 5, 8\}$, $PF(S) = \{4, 8\}$, $F(S) = 8$ dir.

S sözde simetrik sayısal yarıgrup olduğundan $x \in G(S)$ için $F(S) - x \notin S$ şartı

sadece $x = 4$ için sağlandığından dolayı $L(S) = \{4\}$ tür.

Yani $PF(S) = L(S) \cup \{F(S)\}$ şartı sağlanır.

Yani S hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

Örnek 4.20.

$S = \langle 8, 10, 17 \rangle = \{0, 8, 10, 16, 17, 18, 20, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, \rightarrow\}$

sayısal yarıgrubu için, $F(S) = 39$ olup $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $39 - x \in S$ olur. Yani, S

simetrik sayısal yarıgruptur.

Ancak $S = \langle 5, 6, 13 \rangle = \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunda

$F(S) = 14$ olup $x = 5$ için $14 - 5 = 9 \notin S$ çıkar, yani S simetrik olmaz.

Örnek 4.21. $S = \langle 5, 6, 13 \rangle = \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunun

Frobenyus sayısı $F(S)=14$ tür. Bununla birlikte $x=7 \in \mathbb{Z} \setminus S$ olmak üzere,
 $14-7=7 \in S$ ve $x=14/2=7$ olduğundan S Sözde simetrik bir sayısal yarıgruptur.

Örnek 4.22.

$S = \langle 7, 8, 33 \rangle = \{0, 7, 8, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 29, 30, 31, 32, 33, 35, \rightarrow\}$
sayısal yarıgrubunda $F(S) = 34$

ve $L(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : (34-x) \notin S\} = \{25, 17, 9\} \neq \emptyset$ olduğundan

S sayısal yarıgrubu simetrik değildir. Ancak $S = \langle 4, 6, 9 \rangle = \{0, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \rightarrow\}$

sayısal yarıgrubunda $F(S) = 11$ ve S nin kutup noktalarının kümesi,

$L(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : (11-x) \notin S\} = \emptyset$ olup S simetriktir.

BÖLÜM V

İDEALLER

Tanım 5.1. S bir sayısal yarıgrup ve $E, \mathbb{Z}$ nin bir alt kümesi olsun. $E + S \subseteq E$ ve bazı $s \in S$ için $E + s \subseteq S$ oluyorsa E ye S nin relative (göreceli) ideali denir. [13]
 S nin aşıkâr ideallerinden birisi de maksimal ideal olan $M(S) = S \setminus \{0\}$ dir. S nin özel bir göreceli ideali olan kanonik ideal $K(S)$ dir.

$$K(S) = \{x \in \mathbb{N} : F(S) - x \notin S\} = \{F(S) - x : x \in (\mathbb{Z} \setminus S)\} \quad [13]$$

daha da genelleştirecek olursak, kanonik ideale $z + K(S)$ formundaki bütün göreceli idealler diyebiliriz.

Örnek 5.2. $S = \langle 4, 7, 13 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, \rightarrow\}$ için $F(S) = 10$

$$\mathbb{Z} \setminus S = \{10, 9, 6, 5, 3, 2, 1, -1, -2, \dots\}$$

$$\begin{aligned} K(S) &= \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus S\} = \{x : F(S) - x \notin S\} \\ &= \{0, 1, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \rightarrow\} \end{aligned}$$

Tanım 5.3. E ve F, S nin iki göreceli ideali olmak üzere

$$E + F = \{e + f : e \in E, f \in F\}$$

$$E - F = \{x \in \mathbb{Z} : x + F \subseteq E\} \text{ dir.}$$

Tanım 5.4. Yalnız bir eleman tarafından üretilen ideale temel ideal denir.

Eğer $z \in \mathbb{Z}$ ise $z + S = \{z + s : s \in S\}$ ideali z elemanı ile üretilen temel göreceli idealdir.

Tanım 5.5. Bir idealin $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ile üretilmesi

$$E = (e_1, e_2, \dots, e_n) = (e_1 + S) \cup (e_2 + S) \cup \dots \cup (e_n + S) \text{ anlamına gelir}$$

Örnek 5.6. $S = \langle 8, 10, 11, 13 \rangle = \{0, 8, 10, 11, 13, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, \rightarrow\}$

sayısal yarıgrubu için $E = (2, 4)$ ve $I = (1, 5)$ ideallerini oluşturalım.

$$E = (2 + S) \cup (4 + S)$$

$$2 + S = \{2, 10, 12, 13, 15, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, \rightarrow\}$$

$$4 + S = \{4, 12, 14, 15, 17, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, \rightarrow\}$$

$$E = (2 + S) \cup (4 + S) = \{2, 4, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, \rightarrow\}$$

$$F(E) = 19$$

$$m(E) = 2$$

$$I = (1, 5) = (1 + S) \cup (5 + S)$$

$$1 + S = \{1, 9, 11, 12, 14, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, \rightarrow\}$$

$$5 + S = \{5, 13, 15, 16, 18, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, \rightarrow\}$$

$$I = (1, 5) = (1 + S) \cup (5 + S) = \{1, 5, 9, 11, \rightarrow\}$$

$$F(I) = 10$$

$$m(I) = 1$$

Örnek 5.7. S bir sayısal yarıgrup olsun. $G(E) = S \setminus E = \{x \in S : x \notin E\}$ kümesi E nin boşlukları olarak adlandırılır.

Not: E, S nin bir ideali ise $G(E) = S \setminus E = \{x \in S : x \notin E\}$

$m(E) = \min\{e \in E : e \neq 0\}$, E nin en küçük elemanı olarak tanımlanır.

Lemma 5.8.

1) $K(S); x \in PF(S)$ iken $F(S) - x$ elemanları tarafından ideal oluşturularak elde edilir. [13]

Örnek 5.9. $S = \langle 4, 7, 13 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, \rightarrow\}$ için $F(S) = 10$

$$PF(S) = \{9, 10\}$$

$$K(S) = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus S\}$$

Burada $\{10-9, 10-10\} = \{0, 1\}$ elemanları ile $K(S)$ elde edilir.

$$K(S) = (0, 1) = (0 + S) \cup (1 + S) = \{0, 1, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \rightarrow\}$$

2) Herhangi bir E göreceli ideali için $K(S) - E = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus E\}$ dir.

3) $E \subseteq F \Leftrightarrow K(S) - F \subseteq K(S) - E$ ve $E = F$ ise $K(S) - E = K(S) - F$ dir.

4) $E \subseteq F \Rightarrow |F \setminus E| = |(K(S) - E) \setminus (K(S) - F)|$ dir.

$$5) K(S) - (K(S) - E) = E$$

$$6) K(S) - K(S) = S$$

İspat 2. $x \in E \Rightarrow F(S) - x \notin K(S) - E$ veya $x \notin E \Rightarrow F(S) - x \in K(S) - E$

olduğunu gösterelim.

$x \in E$ olsun. Eğer $F(S) - x \in K(S) - E$ ise o zaman $F(S) - x + E \subseteq K(S)$ dir.

$$[K(S) - E = \{x \in \mathbb{Z} : x + E \subseteq K(S)\}]$$

Özel olarak $F(S) - x + x = F(S) \in K(S)$ olur ki bu durum çelişkidir. Demek ki

$x \in E$ iken $F(S) - x \in K(S) - E$ dir. O halde ispat tamamlanır.

İspat 3. $E \subseteq F \Leftrightarrow K(S) - F \subseteq K(S) - E$ ve $E = F \Leftrightarrow K(S) - F = K(S) - E$ dir.

$(\Rightarrow) E \subseteq F \Rightarrow \mathbb{Z} \setminus F \subseteq \mathbb{Z} \setminus E$ dir. Bu durumda $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus F$ için $x \in \mathbb{Z} \setminus E$ olur.

Dolayısıyla $F(S) - x \in K(S) - F$ için $F(S) - x \in K(S) - E$ olur.

$$K(S) - F = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus F\} \subseteq K(S) - E = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus E\} \text{ olur.}$$

$(\Leftarrow) K(S) - F \subseteq K(S) - E$ ise $(y \in K(S) - F \Rightarrow y \in K(S) - E)$ dir.

$$\forall y = F(S) - x \in K(S) - F \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \setminus F \text{ dir.}$$

Aynı zamanda $\forall y = F(S) - x \in K(S) - E$ dir. Dolayısıyla $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus E$ olur ki bu

durumda $\mathbb{Z} \setminus F \subseteq \mathbb{Z} \setminus E$ olur. $E \subseteq F$ dir.

İspat 4. $E \subseteq F$ ise o zaman $K(S) - F \subseteq K(S) - E$ olduğundan

$$|F \setminus E| = |(K(S) - E) \setminus (K(S) - F)| \text{ elde edilir.}$$

$z \in \mathbb{Z}$ olsun. (2) den dolayı $z \in (F \setminus E)$ ancak ve ancak

$F(S) - \mathbb{Z} \in (K(S) - E) \setminus (K(S) - F)$ olur, bu nedenle bu iki küme arasında birebir eşleme vardır ve bu iki küme aynı kardinaliteye sahiptir.

Dolayısıyla $|F \setminus E| = |(K(S) - E) \setminus (K(S) - F)|$ dir. Bu durumda $E = F$ ise birebir eşlemeden dolayı $K(S) - F = K(S) - E$ olur.

İspat 5. [13]

İspat 6. $K(S) - K(S) = S$ dir. Dahası $K(S)$; S nin göreceli ideali olarak $PF(S)$ nin elemanları tarafından üretilir ve bu üreticiler tam olarak $F(S) - x$ formundadır.

$y \in K(S) - K(S) = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus K(S)\}$ ise $y = F(S) - x$ formundadır. Bu durumda $x \in \mathbb{Z} \setminus K(S)$ olur. Ayrıca $K(S) = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus S\}$ dir. $x \in \mathbb{Z} \setminus K(S)$ ise $x \notin K(S)$ dolayısıyla $x \in S$ olur. Çünkü $K(S)$ nin elemanları $\mathbb{Z} \setminus S$ den oluşur. $x \notin K(S)$ ile $x \in S$ elde edilir.

Önerme 5.10. Bir S sayısal yarıgrubu için aşağıdakiler mevcuttur.

- 1) S simetrik ise $F(S)$ tektir, tipi 1 dir.
- 2) S Sözde simetrik ise $F(S)$ çifttir, tipi 2 dir.
- 3) S simetrik ise hemen hemen simetriktir.
- 4) S simetriktir $\Leftrightarrow S = K(S)$ dir.
- 5) S simetriktir $\Leftrightarrow F(S) + 1 = 2g(S)$ dir.
- 6) $2g(S) = F(S) + t(S)$ şartı sağlanır ise S hemen hemen simetriktir. Bu durum $M(S) + K(S) = M(S)$ ile eş değerdir. [12]

Örnek 5.11. $S = \langle 3, 8 \rangle = \{0, 3, 6, 8, 9, 11, 12, 14, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu alalım.

$$G(S) = \{1, 2, 4, 5, 7, 10, 13\}$$

$F(S) = 13$ Frobenyus sayısı tek ve her $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $F(S) - x \in S$ olduğundan S sayısal yarıgrubu simetriktir.

Örnek 5.12. $S = \langle 7, 8, 12 \rangle = \{0, 7, 8, 12, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26 \rightarrow\}$

sayısal yarıgrubunu alalım.

$$G(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 17, 18, 25\}$$

$$g(S) = 13$$

$$F(S) = 25$$

$$S \text{ simetriktir} \Leftrightarrow g(S) = \frac{25+1}{2} = 13$$

Lemma 5.13. S sayısal yarıgrubu $\forall s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için

$s \in S \Leftrightarrow F(S) - s \notin S \cup PF(S) \dots (1.1)$ şartını sağlarsa hemen hemen simetriktir.

İspat. $s \in S$ ve $F(S) - s \in S \cup PF(S)$ ise o zaman $F(S) = s + (F(S) - s) \in S$ olacaktır.

Yani bu bir çelişkidir. Sonuç olarak; (1.1) $\forall s \notin S$ için $F(S) - s \in S \cup PF(S)$ ye denktir. Açıkça bazı $s \notin S$ için $F(S) - s \notin S$ olacak şekildeki elemanlar kümesi $L(S)$ dir ve (1.1); $L(S) \subseteq PF(S)$ ye denktir. Yani S hemen hemen simetriktir.

E, S nin göreceli bir ideali olsun.

$$m(E) = \min E$$

$$F(E) = \max(\mathbb{Z} \setminus E)$$

$$g(E) = |(\mathbb{Z} \setminus E) \cap (e(E), e(E)+1, e(E)+2, \dots, f(E))|$$

Bazen $F(S) = F(E)$ yi elde etmek için E göreceli idealini değiştirmek gerekir. Bu nedenle $E = E + F(S) - F(E)$ tanımlayalım.

Lemma 5.14. E, S nin göreceli ideali olsun. O zaman

$$1) F(\tilde{E}) = F(S)$$

$$2) \tilde{E} \subseteq K(S)$$

3) $F(S) + 1 - g(S) \leq g(\tilde{E}) + e(\tilde{E})$ eşitlik ancak ve ancak $\tilde{E} = K(S)$ kanonik ideal ise sağlanır.

İspat. İlk özellik zaten açıktır, ikincisi ise $K(S)$ nin göreceli ideal tanımından kolayca sağlanır. $x \in \tilde{E} \setminus K(S)$ ise o zaman $F(S) - x \in S$ olur ve sonuç olarak $(F(S) - x) + x = F(S) = F(\tilde{E}) \in \tilde{E}$ çelişkisi ortaya çıkar.

Son iddia için ilk önce $g(\tilde{E}) + e(\tilde{E})$ tamsayısının $\mathbb{N} \setminus (\tilde{E})$ deki eleman sayısı olduğunu not edelim. Öte yandan $F(S) + 1 - g(S)$ ise S de ki $F(S) + 1$ den küçük olan elemanların sayısıdır. $s \in S$ ifadesi $F(S) - S \notin K(S) \supseteq \tilde{E}$ olduğunu ifade ettiği için hipotez $K(S)$ nin tanımı sayesinde sağlanır.

Lemma 5.15. $K(S) - (M(S) - M(S))$ göreceli idealinin Frobenyus sayısı $F(S)$ ye eşittir. Dahası $K(S) + M(S) \subseteq K(S) - (M(S) - M(S)) \subseteq K(S)$ dir.

İspat. $E = K(S) - (M(S) - M(S))$ olsun.

Lemma 5.8. de 2 ye göre E nin frobenyus sayısı $F(S) - e(E)$ ye eşittir. Ama $0 \in M(S) - M(S) = S \cup PF(S) \subseteq \mathbb{N}$ olduğu için $F(S) = F(E)$ olur dahası $S \subseteq M(S) - M(S)$ olduğu için $K(S) - (M(S) - M(S)) \subseteq K(S) - S = K(S)$ ifadesine ulaşırız.

Son olarak $y \in K(S)$ olsun, $S \in M(S)$ ve

$\mathbb{Z} \in M(S) - M(S) = S \cup PF(S)$, $y + (s + z) \in K(S) + M(S) \subseteq K(S)$ dir.

Tanım 5.16. $C(S) = \{F(S) + 1 + x : x \in \mathbb{N}\}$ kümesine S nin kondüktörü denir.

$M(S) = S \setminus \{0\}$ ve $M(S) - M(S) = \{z \in \mathbb{Z} : z + s \in M(S), \forall s \in M(S)\}$ olsun. Şu da açıktır ki $M(S) - M(S) = S - M(S)$ kümesi S ve $F(S)$ nin ikisini de içeren bir yarıgruptur. Yani $M(S) - M(S) = S \cup PF(S)$ dir.

$(M(S) - M(S)) \setminus S$ nin elemanlarını S nin sözde frobenyus sayıları denir ve $PF(S) = (M(S) - M(S)) \setminus S$ dir ve bu kümenin eleman sayısına S nin tipi denir ve $t(S)$ ile gösterilir. $t(S) = |M(S) - M(S) \setminus S|$ dir.

Önerme 5.17.

1) $L(S) \cup F(S) \supseteq (M(S) - M(S)) \setminus S = PF(S)$ dir.

2) Simetrik yarıgruplar için $M(S) - M(S) = S \cup PF(S)$ ye ait olmayan bütün negatif olmayan tamsayılar bir tipinde ki sayısal yarıgrubunun boşlukları olarak gösterilir. Bu özellik $L(S) \cup \{F(S)\} = (M(S) - M(S) \setminus S) = PF(S)$ olarak da belirlenebilir.

Bu bahsedilen son özellik yeni bir yarıgrup sınıfını tanımlamak için kullanılabilir.

3) Eğer $L(S) \cup \{F(S)\} = (M(S) - M(S)) \setminus S = PF(S)$ ise S hemen hemen simetriktir.

$S, M(S) = S \setminus \{0\}, C(S)$ ve $M(S) - M(S) = S \cup PF(S)$; S nin aşık ar idealleridir.

$M(S)$ ye S nin maksimal ideali denir.

Göreceli ideallerden tekrar göreceli ideal elde etmek için bazı işlemler yapılabilir.

E ve F ; S nin göreceli idealleri olsun.

$$E + F = \{t + u : t \in E, u \in F\}$$

$$E - F = \{z \in \mathbb{Z} : z + u \in E, \forall u \in F\}$$
 kümelerinin ikisinde S nin göreceli idealleridir.

$$nE = \underbrace{E + E + \dots + E}_{n \text{ defa}} \text{ demektir. } nE \neq nE$$

Bir E göreceli idealine her zaman bir x tamsayısı eklenerek değiştirilebilir.

$$x + E = \{x + e : e \in E\}$$
 açıktır ki bu ilişki $E \sim E' = x + E$ (bazı $x \in \mathbb{Z}$) için bir denklik

bağıntısıdır. Herhangi bir denklik sınıfında $F(\tilde{E}) = F(S)$ olacak şekilde bir $\tilde{E}$

temsilcisi vardır. $\tilde{E}$ herhangi bir E idealinden şu şekilde elde edilir.

$$\tilde{E} = E + F(S) - F(E)$$

Bütün E idealleri için $(C(S) \subseteq \tilde{E} \subseteq \mathbb{N})$ dir. İkinci içleme $m(\tilde{E}) + C(S) \subseteq \tilde{E}$

eşitliğini sağlar ve bu da belirtir ki $F(S) = F(\tilde{E}) \subseteq m(\tilde{E}) + F(S) \Rightarrow 0 \subseteq m(\tilde{E})$ dir.

S nin göreceli ideallerinin ayrı bir sınıfı vardır. Her K' göreceli ideali S de ki her

E göreceli ideali için $K' - (K' - E) = E$ eşitliğini sağlarsa K' göreceli idealine

kanonik ideal denir.

Özel olarak $K(S) = \{x \in \mathbb{Z} : F(S) - x \notin S\} = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus S\}$ bir kanonik idealdir. Bu ideale standart kanonik ideal denir. Ayrıca, herhangi bir K' kanonik ideali için $K' \sim K(S)$ olacak şekilde $K(S)$ vardır. $F(K(S)) = F(S)$ dir.

$S \subseteq K(S) \subseteq \mathbb{N}$ dir.

S simetriktir. $\Leftrightarrow K(S) = S$ dir.

S hemen hemen simetriktir $\Leftrightarrow K(S) + M(S) \subseteq M(S)$

Örnek 5.18. $S = \langle 4, 7, 13 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için

$$F(S) = 10$$

$$\mathbb{Z} \setminus S = \{10, 9, 6, 5, 3, 2, 1, -1, -2, \dots\}$$

$$K(S) = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus S\} = \{0, 1, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \rightarrow\}$$

$K(S) \neq S$ olduğundan S simetrik değildir

Örnek 5.19. $S = \langle 6, 8, 11 \rangle = \{0, 6, 8, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 22, \rightarrow\}$

sayısal yarıgrubunun simetrik olup olmadığını kanonik idealle belirleyelim.

$K(S) = S$ ise S simetriktir.

$$F(S) = 21$$

$$G(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 21\}$$

$$\mathbb{Z} \setminus S = \{21, 15, 13, 10, 9, 7, 5, 4, 3, 2, 1, -1, -2, \dots\}$$

$$K(S) = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus S\} = \{0, 6, 8, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 22, \rightarrow\}$$

$K(S) = S$ olduğundan S simetriktir.

Burada ayrıca $L(S) = \{x \notin S : F(S) - x \notin S\} = \emptyset$ olduğuda görülmüş olur.

Not 5.20. S simetrik ise $L(S) = \emptyset$ $PF(S) = 21$ $t(S) = 1$

Not 5.21. S simetriktir. $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus S$ ise $F(S) - x \in S$ dir. Bundan dolayı $K(S) = S$ olursa $K(S)$ simetriktir.

Örnek 5.22. $S = \langle 5, 8, 19 \rangle = \{0, 5, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, \rightarrow\}$

sayısal yarıgrubunun hemen hemen simetrik olduğunu kanonik ideal yardımıyla belirleyelim.

$F(S) = 22$, $\mathbb{Z} \setminus S = \{22, 17, 14, 12, 11, 9, 7, 6, 4, 3, 2, 1, -1, -2, \dots, -\infty\}$ öncelikle hemen hemen simetrik olup olmadığını belirleyelim.

$L(S) = \{x \notin S : F(S) - x \notin S\} = \{11\}$ ve $PF(S) = \{11, 22\}$ dir.

Şu durumda $PF(S) = L(S) \cup \{F(S)\}$ olduğundan S hemen hemen simetriktir.

Şimdi bunu kanonik idealleri kullanarak gösterelim.

$K(S) + M(S) \subseteq M(S)$ ise S hemen hemen simetriktir

$M(S) = S \setminus \{0\} = \{5, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, \rightarrow\}$

$K(S) = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus S\} = \{0, 5, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, \rightarrow\}$

$K(S) + M(S) = \{5, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, \rightarrow\} = M(S)$

$K(S) + M(S) \subseteq M(S)$ olduğundan S hemen hemen simetriktir.

Örnek 5.23. $S = \langle 7, 12, 13 \rangle = \{0, 7, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 31, \rightarrow\}$ hemen hemen simetrik olup olmadığını kanonik idealle gösterelim.

$F(S) = 30$, $PF(S) = \{29, 30\}$,

$L(S) = \{1, 8, 15, 22, 39\}$

$G(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 22, 23, 29, 30\}$

$\mathbb{Z} \setminus S = \{30, 29, 23, 22, 18, 17, 16, 15, 11, 10, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1, -1, -2, \dots, -\infty\}$

Şimdi $K(S) + M(S) \subseteq M(S)$ midir sorusunu cevaplayalım.

$M(S) = S \setminus \{0\} = \{7, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 31, \rightarrow\}$

$K(S) = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus S\}$

$= \{0, 1, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, \rightarrow\}$

$K(S) + M(S) = \{7, 8, 12, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 22, \dots\}$, $8 \in K(S) + M(S)$ fakat

$8 \notin M(S)$ olduğundan $K(S) + M(S) \not\subseteq M(S)$ dir. Dolayısıyla S hemen hemen

simetrik değildir. Ayrıca $PF(S) = L(S) \cup F(S)$ şartı sağlanmadığından dolayı S nin hemen hemen simetrik olmadığı görülebilir.

Örnek 5.24. $S = \langle 4, 7, 13 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, \rightarrow\}$ kanonik idealini $PF(S)$ nin elemanlarıyla oluşturalım.

$$F(S) = 10, \quad PF(S) = \{9, 10\}$$

$K(S) = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus S\}$ dir. $K(S)$ nin üreticileri $F(S) - x$ formunda olur ki burada $\{10 - 9, 10 - 10\} = \{0, 1\}$ elemanları ile $K(S)$ üretelim.

$$K(S) = (0, 1) = (0 + S) \cup (1 + S) \text{ olur}$$

$$0 + S = S = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, \rightarrow\}$$

$$1 + S = \{1, 5, 8, 9, 12, 13, \rightarrow\}$$

$$(0 + S) \cup (1 + S) = \{0, 1, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \rightarrow\}, \quad F(K(S)) = 10 = F(S)$$

Ayrıca $K(S) - K(S) = S$ olduğunu gösterelim.

$$K(S) - K(S) = \{x \in \mathbb{Z} : x + K(S) \subseteq K(S)\} = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus (K(S))\}$$

$$\mathbb{Z} \setminus K(S) = \{10, 6, 3, 2, -1, -2, \dots, -\infty\}, \quad F(S) = 10$$

$$K(S) - K(S) = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, \rightarrow\} = S \text{ olur.}$$

$$S \subseteq K(S) \Rightarrow M(S) \subseteq K(S) \text{ dir.}$$

$$(E \subseteq F) \Rightarrow |(K(S) - E) \setminus (K(S) - F)| = |F \setminus E|$$

Şimdi $|K(S) \setminus M(S)| = |(K(S) - M(S)) \setminus (K(S) - K(S))|$ ispatlayalım.

$$K(S) - M(S) = \{x \in \mathbb{Z} : x + M(S) \subseteq K(S)\} = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus M(S)\}, \quad F(S) = 10$$

$$M(S) = S \setminus \{0\} = \{4, 7, 8, 11, 12, \rightarrow\},$$

$$\mathbb{Z} \setminus M(S) = \{10, 9, 6, 5, 3, 2, 1, 0, -1, -2, \dots, -\infty\}$$

$$K(S) - M(S) = \{0, 1, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, \rightarrow\}$$

$$K(S) - K(S) = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, \rightarrow\}$$

$$(K(S) - M(S)) \setminus (K(S) - K(S)) = \{1, 5, 9, 10\}$$

$$|K(S) \setminus M(S)| = |\{1, 5, 9, 10\}| = 4$$

Önerme 5.25. S hemen hemen simetriktir. $\Leftrightarrow K(S) + M(S) \subseteq M(S)$

Burada özellikle göz önünde bulundurulması gereken kısım

$$\begin{aligned} K(S) - (M(S) - M(S)) &= \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus (M(S) - M(S))\} \\ &= \{x : F(S) - x \notin M(S) - M(S)\} \end{aligned}$$

$S \subseteq M(S) - M(S) = S \cup PF(S) \subseteq \mathbb{N}$ olduğundan dolayı

$$C(S) = K(S) - N \subseteq K(S) - (M(S) - M(S)) \subseteq K(S) - S = K(S)$$

($E \subseteq F \Rightarrow K(S) - F \subseteq K(S) - E$ kullanıldı)

$$C(S) = K(S) - \mathbb{N} = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \mathbb{Z}^-\} \text{ } x \text{ ler negatif tamsayıların elemanları}$$

olur. $y \in \mathbb{Z}^-$ ise $C(S) = \{F(S) + y : y \in \mathbb{Z}^-\}$ olur (kondüktör tanımına uyar).

Ayrıca dikkat edilmelidir ki $K(S) + M(S) \subseteq K(S) - (M(S) - M(S))$

eğer $x = y + s$ ($y \in K(S)$ ve $s \in M(S)$) ve $z \in M(S) - M(S) = S \cup PF(S)$ olmak

üzere $x + z = y + (s + z) \in K(S) + M(S) \subseteq K(S)$ elde edilir.

Lemma 5.26. $E; S$ nin bir göreceli ideali olsun; $\tilde{E} = E + F(S) - F(E)$ olursa $C(S) \subseteq \tilde{E} \subseteq K(S)$ olur.

İspat. İlk kapsama açık bir şekilde bellidir. İkinci içerme göreceli ideal ve kanonik ideal $K(S)$ tanımından gelmektedir. Eğer $x \in \tilde{E} \setminus K(S)$ ise

$x \notin K(S)$ ve $F(S) - x \in S$ olur. Bu şunu belirtir $(F(S) - x) + x = F(S) = F(\tilde{E}) \in \tilde{E}$.

Bu bir çelişkidir.

Örnek 5.27. $S = \{0, 5 \rightarrow\}$ ve $E = \{5, 8, 10 \rightarrow\}$ olsun. Aşağıdakilerin sağlandığını gösterelim.

1) $F(\tilde{E}) = F(S)$

2) $\tilde{E} \subseteq K(S)$

3) $F(S) + 1 - g(S) \leq g(\tilde{E}) + m(\tilde{E})$

Çözüm 1. $\tilde{E} = E + F(S) - F(E)$ dir.

$$F(S) = 4 \quad F(E) = 9$$

$$\tilde{E} = E + 4 - 9 = E - 5 = \{0, 3, 5, \rightarrow\}$$

$F(\tilde{E}) = 4 = F(S)$ olur. Aradaki fark kadar E nin en büyük elemanını küçültmüş olduk. Dolayısıyla $F(S) = F(\tilde{E})$ olur.

Çözüm 2. $K(S) = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus S\} = \{0, 1, 2, 3, 5, \rightarrow\}$

$$\mathbb{Z} \setminus S = \{4, 3, 2, 1, -1, -2, \dots\}$$

$$\tilde{E} \subseteq K(S) \text{ elde edilir.}$$

Çözüm 3. $F(S) + 1 - g(S) \leq m(\tilde{E}) + g(\tilde{E})$

$$G(S) = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow g(S) = 4$$

$$\tilde{E} = \{0, 3, 5, \rightarrow\}$$

$$G(\tilde{E}) = (\mathbb{Z} \setminus \tilde{E}) \cap \{m(\tilde{E}), m(\tilde{E}) + 1, \dots, F(\tilde{E})\}$$

$$= \{4, 2, 1, -1, -2, \dots\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 4\} \Rightarrow g(\tilde{E}) = 3, m(\tilde{E}) = 0$$

$$F(S) + 1 - g(S) \leq m(\tilde{E}) + g(\tilde{E})$$

$$4 + 1 - 4 \leq 0 + 3 \Rightarrow 1 \leq 3 \text{ sağlanmış olur.}$$

Örnek 5.28. $S = \langle 4, 7, 9 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 9, 11, \rightarrow\}$

$E = \{10, 14, \rightarrow\}$ olsun. Aşağıdakilerin sağlandığını gösterelim.

1) $F(\tilde{E}) = F(S)$

2) $\tilde{E} \subseteq K(S)$

3) $F(S) + 1 - g(S) \leq m(\tilde{E}) + g(\tilde{E})$ [15]

$$\mathbb{Z} \setminus S = \{10, 6, 5, 3, 2, 1, -1, -2, \dots\}$$

$$G(S) = \{10, 6, 5, 3, 2, 1\}, \quad F(S) = 10, \quad F(E) = 13, \quad g(S) = 6$$

Çözüm 1.

$$\tilde{E} = E + F(S) - F(E) = E + 10 - 13 = E - 3 = \{7, 11, \rightarrow\}$$

$$F(\tilde{E}) = 10 = F(S)$$

Çözüm 2.

$$K(S) = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus S\} = \{0, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \rightarrow\}$$

$$\tilde{E} \subseteq K(S)$$

Çözüm 3. $F(S) + 1 - g(S) \leq g(\tilde{E}) + m(\tilde{E})$

$$G(\tilde{E}) = \{8, 9, 10\} \Rightarrow g(\tilde{E}) = 3, \quad m(\tilde{E}) = 7$$

$$10 + 1 - 6 \leq 3 + 7$$

$$5 \leq 10$$

BÖLÜM VI

SAYISAL YARIGRUPLARIN SAYISAL ÇOĞALTMASI

S bir sayısal yarıgrup M, C, K sırasıyla S nin maksimal ideali, kondüktörü ve standart kanonik ideali olsun.

$$F = F(S)$$

$$g = g(S)$$

$E \subseteq S$; S nin bir ideali olsun.

$$\begin{aligned} e &= F(E) - F \text{ ve } \tilde{E} = E - e \\ &= E + F(S) - F(E) \end{aligned}$$

Dolayısıyla $F(\tilde{E}) = F(K) = F$ dir.

$$2.S = \{2S : s \in S\}$$

$$2.E = \{2t : t \in E\}$$

$$2.S \neq 2S = S + S$$

$$2.E \neq 2E = E + E$$

$b \in S$ tek tamsayı olsun. S nin sayısal çoğaltması

$$S^{\infty b} E = 2.S \cup (2.E + b) \text{ dir.}$$

$S^{\infty b} E$ bir sayısal yarıgruptur.

$$1) 0 = 2.0 \in S^{\infty b} E$$

2) $F(E) \geq F(S)$ olduğu için $2F(E) + b$ den büyük tüm sayılar sayısal çoğaltmada yer alır. Dolayısıyla $\mathbb{N} \setminus (S^{\infty b} E)$ sonlu olur.

3) Son olarak $b \in S$ ve E nin S nin bir ideali olma koşulları altında sayısal çoğaltma kapalı olur.

Sayısal çoğaltma E ; S nin göreceli ideali, $b \in S$ tek tamsayı ve

$b + E + E = 2E + b \subseteq S$ olan durumlarda elde edilir. (b yeterince büyük olmalı.)

Önerme 6.1. $S^\infty E$ aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- 1) $F(S^\infty E) = 2F(E) + b$
- 2) $g(S^\infty E) = g + g(E) + m(E) + \frac{b-1}{2}$
- 3) $S^\infty E$ simetriktir $\Leftrightarrow E; S$ nin kanonik idealidir.

İspat 1. $2F(S)$ en büyük çift boşluktur, $2F(E) + b$ ise en büyük tek boşluktur.

Hangisi daha büyükse sayısal çoğaltmanın frobenyus sayısı olur. Burada $E; S$ nin alt ideali olduğundan $E \subseteq S$ ve $S + E \subseteq E$ dir.

Dolayısıyla $F(E) \geq F(S)$ olur. Bu durumda $2F(E) + b \geq 2F(S)$ olur ve $F(S^\infty E) = 2F(E) + b$ dir.

İspat 2.

- 1) $S^\infty E$ nin çift boşlukları S nin boşlukları ile birebir olarak eşlenir, tek boşluklarda $2.E + b$ den dolayı oluşur.

$S^\infty E = 2.S \cup \underbrace{(2.E + b)}_{\text{tekler}}$ çift boşluk sayısı = $g(S)$ dir.

- 2) $2m(E) + b$ den küçük hiçbir tek tamsayı çoğaltmada yer almaz. Bunların sayısı

$\{1, 3, 5, 7, \dots, 2m(E) + b - 2\}$ nin eleman sayısı kadardır.

$$\frac{2m(E) + b - 2 - 1}{2} + 1 = m(E) + \frac{b-1}{2} \text{ olur.}$$

- 3) Son boşluklar $2m(E) + b \leq x \leq 2F(E) + b$ olan yani E nin boşlukları ile birebir eşlenen sayılardır. İspat tamamlanmış olur.

İspat 3. $S^\infty E$ ancak ve ancak $E; S$ nin kanonik ideali ise simetriktir.

Sayısal çoğaltma sayısal yarıgrup olduğundan simetrik olma şartını sağlar.

$$S \text{ simetriktir} \Leftrightarrow F(S) + 1 = 2g(S) \dots (1)$$

$$E; S \text{ nin kanonik ideali ise } F(S) + 1 - g(S) = m(E) + g(E) \dots (2)$$

S simetrik ise $F(S)$ tektir. Dolayısıyla $F(S^\infty E) = 2F(E) + b$ dir.

(1) den dolayı $F(S^{\infty}E)+1=2g(S^{\infty}E)$ olur.

$$2F(E)+b+1=2\left(g(S)+g(E)+m(E)+\frac{b-1}{2}\right)$$

$$2F(E)+b+1=2g(S)+2g(E)+2m(E)+b-1$$

$$F(E)+1-g(S)=g(E)+m(E) \text{ olur.}$$

(2) den dolayı E kanonik ideal olur.

Sonuç 6.2. Her sayısal yarıgrup, başka bir simetrik sayısal yarıgrupun yarısıdır.

Önerme 6.3. S bir sayısal yarıgrup, $M;S$ nin maximal ideali $E \subseteq S$, S nin bir ideali olsun ve $b \in S$ tek tamsayı olsun.

$$S^{\infty}E \text{ nin tipi } t(S^{\infty}E) = |((M-M) \cap (E-E)) \setminus S| + |(E-M) \setminus E| \text{ dir.}$$

Özel olarak $t(S^{\infty}E), b$ ye bağlı değildir.

İspat. $T = S^{\infty}E$ olsun. $x=2h$ çift tamsayı ve $x \notin T$ ise yani $h \notin S$ ise (çift boşluklar S den gelir.) $x \in M(T) - M(T) = T \cup (PF(T)) \Leftrightarrow 2h+2s \in M(T)$ dir.

($\forall s \in M(S)$ ve $2h+2t+b \in M(T), \forall t \in E$ için). Bu iki koşul $h \in M(S) - M(S)$ ve $h \in E(S) - E(S)$ ye sırasıyla denktir. Bunun için ilk toplamı elde etmiş oluruz.

Şimdi $x=2h+b$ tek bir sayı olsun ve $x \notin T$ olsun. Yani $h \notin E$ tek boşluktur. Tek boşluklar E den gelir. Bu durumda $x \in M(T) - M(T) \Leftrightarrow 2h+b+2s \in M(T)$

($PF(T)$ tanımından $x \notin T$ ve $t \in T$ için $x+t \in T$)

$\forall s \in M(S)$ ve $2h+b+2t+b \in M(T) (\forall t \in E)$. Bu durumda ikinci koşul sırasıyla $h \in E - M(S)$ ve $h \in M(S) - (b+E)$ ye denktir. $E \subseteq M$ olduğunu düşünelim. $b \in M$ olduğu için $h \in E - M \Rightarrow h+b+E \subseteq E+E$ olduğunu belirtir ama $E \subseteq M$ olduğu için $E+E \subseteq M$ dir. Böylelikle $h \in M - (b+E)$ olur.

Böylece $E - M \subseteq M - (b+E)$ ye ulaşmış oluruz. Bu da bize ikinci toplamı verir.

Geriye $0 \in E$ durumunu ispatlamak kalır.

$E=S$ olduğunda ilk durum $h \in S - M = M - M$ haline gelir.

Böylece $h+b+s \subseteq M+S=M$ ve tekrardan $S-M \subseteq M-(b+S)$ elde edilmiş olur.

Bu da bize teoremi ispatlamış olur.

Örnek 6.4. $S = \{0, 5, \rightarrow\}$ ve $E = \{5, 8, 10, \rightarrow\}$ olsun. $b = 5$ olsun.

$$F(E) = 9$$

$$F(S) = 4$$

$$G(S) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$G(E) = \{6, 7, 9\}$$

$$S^{\infty b} E = 2.S \cup (2.E + b)$$

$$2.S = \{0, 10, 12, 14, \dots\}$$

$$2.E = \{10, 16, 20, 22, 24, \dots\}$$

$$2.E + b = \{15, 21, 25, 27, 29, 31, \dots\}$$

$$S^{\infty b} E = \{0, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, \rightarrow\}$$

$$G(S^{\infty b} E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 19, 23\}$$

$$g(S^{\infty b} E) = 14$$

$$F(S^{\infty b} E) = 23$$

$$1) F(S^{\infty b} E) = 2F(E) + b = 2 \cdot 9 + 5 = 23$$

$$2) g(S^{\infty b} E) = g + g(E) + m(E) + \frac{b-1}{2}$$

$$14 = 4 + 3 + 5 + \frac{5-1}{2} \text{ sağlanır.}$$

$$3) t(S^{\infty b} E) = |((M-M) \cap (E-E)) \setminus S| + |(E-M) \setminus E|$$

$$M-M = M \cup PF(S) = \{x \in \mathbb{Z} : x+M \subseteq M\} = \{0, 1, 2, 3, \rightarrow\} = \mathbb{N}$$

$$E-E = E \cup PF(E) = \{x \in \mathbb{Z} : x+E \subseteq E\} = \{0, 3, 5, \rightarrow\}$$

$$\mathbb{N} \cap \{0, 3, 5, \rightarrow\} = \{0, 3, 5, \rightarrow\},$$

İlk toplam için

$$[(M-M) \cap (E-E)] \setminus S = \{0, 3, 5, \rightarrow\} \setminus \{0, 5, \rightarrow\} = \{3\} \text{ dolayısıyla ilk toplam 1 olur.}$$

Şimdi ikinci toplamı bulalım.

$$E-M = \{x \in \mathbb{Z} : x+M \subseteq E\} = \{5, 6, \rightarrow\} = \{5, \rightarrow\}$$

$$(E - M) \setminus E = \{6, 7, 9\}$$

İkinci toplamda $|(E - M) \setminus E| = 3$ olur.

$$\text{Şu durumda } t(S^{\infty^b} E) = 1 + 3 = 4$$

Örnek 6.5. $S = \langle 2, 5 \rangle = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, \rightarrow\}$ olsun. $b = 5$ olsun.

$E = \{5, 7, 9, \rightarrow\}$, seçelim $E \subseteq S$ ve $E + S \subseteq E$ dir. Yani ideal olma koşullarını sağladığına dikkat ediyoruz.

$$1) F(S^{\infty^b} E)$$

$$2) g(S^{\infty^b} E)$$

$$3) t(S^{\infty^b} E) \text{ bulalım.}$$

$$S^{\infty^b} E = 2.S \cup (2.E + b)$$

$$2.S = \{0, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots\}$$

$$2.E = \{10, 14, 18, 20, 22, \dots\}$$

$$2.E + b = \{15, 19, 23, 25, 27, \dots\}$$

$$S^{\infty^b} E = \{0, 4, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, \rightarrow\}, \quad F(S^{\infty^b} E) = 21$$

$$1) F(S^{\infty^b} E) = 2.F(E) + b = 2.8 + 5 = 21$$

$$F(S) = 3$$

$$F(E) = 8$$

$$2) g(S^{\infty^b} E) = g(S) + g(E) + m(E) + \frac{b-1}{2} = 2 + 2 + 5 + 2 = 11$$

$$G(S) = \{1, 3\},$$

$$G(E) = \{6, 8\}$$

$$G(S^{\infty^b} E) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 17, 21\}$$

$$|G(S^{\infty^b} E)| = 11$$

$$3) t(S^{\infty^b} E) = |[(M - M) \cap (E - E)] \setminus S| + |(E - M) \setminus E|$$

$$M = M(S) = S \setminus \{0\} = \{2, 4, 5, 6, 7, \rightarrow\}$$

$$M(S) - M(S) = \{x \in \mathbb{Z} : x + M(S) \subseteq M(S)\} = \{0, 2, 3, 4, \rightarrow\} = \{0, 2, \rightarrow\}$$

$$E - E = \{x \in \mathbb{Z} : x + E \subseteq E\} = \{0, 2, 4, \rightarrow\}$$

$$(M(S) - M(S)) \cap (E - E) = \{0, 2, 4, \rightarrow\}$$

$$((M - M) \cap (E - E)) \setminus S = \{0, 2, 4, \rightarrow\} \setminus \{0, 2, 4, \rightarrow\} = \emptyset$$

İlk toplam

$$|[(M - M) \cap (E - E)] \setminus S| = |\emptyset| = 0 \text{ dir.}$$

Şimdi ikinci toplama bakalım.

$$E - M = \{x \in \mathbb{Z} : x + M(S) \subseteq E\} = \{5, 7, \rightarrow\}$$

$$(E - M) \setminus E = \{5, 7, \rightarrow\} \setminus \{5, 7, 9, \rightarrow\} = \{8\}$$

$$|(E - M) \setminus E| = 1$$

$$t(S^{\infty^b} E) = 1 ,$$

$$F(S^{\infty^b} E) = 21$$

Frobenyus sayısı tek ve tipi 1 olduğundan sayısal çoğaltma aynı zamanda simetrik.

Örnek 6.6. $S = \langle 3, 7, 11 \rangle = \{0, 3, 6, 7, 9, \rightarrow\}$

$$M(S) = S \setminus \{0\} = \{3, 6, 7, 9, \rightarrow\}$$

$$G(S) = \{1, 2, 4, 5, 8\}$$

$$g(S) = 5$$

$$F(S) = 8$$

$$1 + S = \{1, 4, 7, 8, 10, \rightarrow\}$$

$$2 + S = \{2, 5, 8, 9, 11, \rightarrow\}$$

$$E = (1 + S) \cup (2 + S) = \{1, 2, 4, 5, 7, \rightarrow\}$$

$$m(E) = 1$$

$$G(E) = \{3, 6\}$$

$$g(E) = 2$$

$$F(E) = 6$$

$$2E = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, 18, \rightarrow\}$$

$$b = 9 \in S \text{ olsun}$$

$$2E+b=\{11,13,17,19,23,25,27,\rightarrow\}$$

$$2S=\{0,6,12,14,18,20,22,\rightarrow\}$$

$$S^{\infty b}E=2S\cup(2E+b)=\{0,6,11,12,13,14,17,18,19,20,22,23,24,\rightarrow\}$$

$$G(S^{\infty b}E)=\{1,2,3,4,5,7,8,9,10,15,16,21\}$$

$$PF(S^{\infty b}E)=\{19,21\}$$

$$t(S^{\infty b}E)=2$$

$$g(S^{\infty b}E)=12$$

$$F(S^{\infty b}E)=21$$

$$1) F(S^{\infty b}E)=2F(E)+b=2.6+9=21$$

$$2) g(S^{\infty b}E)=g+g(E)+m(E)+\frac{b-1}{2}$$

$$12=5+2+1+\frac{9-1}{2}$$

$$3) t(S^{\infty b}E)=\left|\left[(M-M)\cap(E-E)\right]\setminus S\right|+\left|(E-M)\setminus E\right|$$

$$M=M(S)=S\setminus\{0\}=\{3,6,7,9,\rightarrow\}$$

$$M(S)-M(S)=\{x\in\mathbb{Z}:x+M(S)\subseteq M(S)\}=\{0,3,4,6,\rightarrow\}$$

$$E-E=\{x\in\mathbb{Z}:x+E\subseteq E\}=\{0,3,6,\rightarrow\}$$

$$(M(S)-M(S))\cap(E-E)=\{0,3,6,\rightarrow\}$$

$$((M-M)\cap(E-E))\setminus S=\{0,3,6,\rightarrow\}\setminus\{0,3,6,7,9,\rightarrow\}=\emptyset$$

İlk toplam

$$\left|\left[(M-M)\cap(E-E)\right]\setminus S\right|=|\emptyset|=0 \text{ dir.}$$

Şimdi ikinci toplama bakalım

$$E-M=\{x\in\mathbb{Z}:x+M(S)\subseteq E\}=\{-2,1,2,4,5,\rightarrow\}$$

$$E-M=\{x\in\mathbb{Z}:x+M(S)\subseteq E\}=\{-2,1,2,4,5,\rightarrow\}$$

$$\left|(E-M)\setminus E\right|=2$$

İkinci toplamda

$$\left|(E-M)\setminus E\right|=2 \text{ olur.}$$

Şu durumda $t(S^{\infty} E) = 0 + 2 = 2$ olur ve özellikler sağlanmış olur, burada b nin yeterince büyük seçilmesi gerektiğine dikkat edilmedir.

Lemma 6.7. $E; S$ sayısal yarıgrubunun bir ideali olsun. $e = F(E) - F(S)$ olacak şekilde $\tilde{E} = E - e = E + F(S) - F(E)$ olsun.

$K - (M - M) \subseteq \tilde{E}$ olduğunu varsayalım. O halde $x \notin E$ için $F(E) - x \in M - M$ dir.

İspat. $x \notin E$ olduğu için $x - e \notin \tilde{E} \supseteq K - (M - M)$ dir. Bundan dolayı $x - e + y \notin K$, olacak şekilde bir $y \in M - M$ vardır, başka bir deyişle ,

$F + e - x - y = F(E) - x - y \in S$ olur. $E \subseteq S$ olduğundan $\{s \notin S \Rightarrow F(S) - s \in S\}$

dir. S nin göreceli ideali olan $y \in M - M$ olduğu için

$F(E) - x = (F(E) - x - y) + y \in S + (M - M) = M - M$ dir.

$K(S) = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus S\}$

$F(S) - x \in K(S) \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \setminus S$

$F(S) - x \notin K(S) \Rightarrow x \in S$ dir.

$x - e + y \notin K \Rightarrow F(S) - x + e - y = F(E) - x - y \in S$ olur.

$y \in M - M$ ve $F(E) - x - y \in S$ olduğundan $\underbrace{F(E) - x - y}_{\in S} + \underbrace{y}_{\in Y} \in \underbrace{(S + (M - M))}_{M - M}$ ve

$F(E) - x \in M - M$ olur.

Örnek 6.8. $S = \{0, 5, \rightarrow\}$ olsun ve $E = \{5, 8, 10, \rightarrow\}$ olsun. $\tilde{E} = E + F(S) - F(E)$ olsun. $K - (M - M) \subseteq \tilde{E}$ olduğunu gösterelim ve $\forall x \notin E$ için $F(E) - x \in M - M$ olduğunu görmeye çalışalım.

$$F(S) = 4$$

$$F(E) = 9$$

$$\tilde{E} = E + F(S) - F(E) = E + 4 - 9 = E - 5 = \{0, 3, 5, \rightarrow\}$$

$$M - M = \{x \in \mathbb{Z} : x + M \subseteq M\} = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$$

$$K(S) = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus S\} = \{0, 1, 2, 3, 5, \rightarrow\}$$

$$\mathbb{Z} \setminus S = \{4, 3, 2, 1, -1, -2, \dots\}$$

$$K(S) - (M - M) = \{x : x + (M - M) \subseteq K\} = \{5, \rightarrow\}$$

$$K(S) - (M - M) \subseteq \tilde{E} \Rightarrow \{5, \rightarrow\} \subseteq \{0, 3, 5 \rightarrow\}$$

$$\text{Şimdi } x \notin E \text{ lerin kümesi} = \{9, 7, 6, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, \dots\}$$

$$F(E) - x \text{ lerin kümesi} = \{0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, \rightarrow\} = \{0, 2, 3, 5, 6, \rightarrow\} \subseteq \mathbb{N} \text{ dir.}$$

Dolayısıyla istenilenler sağlanmış olur.

Lemma 6.9. E bir S sayısal yarıgrubunun ideali olsun. $(\tilde{E} = E - e \text{ olsun})$
 $K - (M - M) \subseteq \tilde{E}$ olsun ve $K - \tilde{E}$ bir sayısal yarıgrup olsun. O halde herhangi
 $x \notin E$ için $F(E) - x \in E - E$ dir.

İspat. Bir önceki lemmanın ispatında olduğu gibi $y \in M - M$ ve $F(E) - x - y \in S$
 dir. Eğer $F(E) - x - y \in M$ ise o zaman $F(E) - x \in M$ olur.

Böylece $F(E) - x + t \in E$ sağlanır. ($\forall t \in E$ için, $E; S$ nin ideali olduğundan) Geriye
 kalan durumda $F(E) - x - y = 0$ durumunu göstermektedir. $F(E) = F + e$ olduğu
 için, $F - y = x - e \notin \tilde{E}$ böylece lemma 5.8. uygulanarak $y \in K - \tilde{E}$ sonucuna varırız.
 Bütün $t \in E$ için ve $y + t \in E$ dir. Başka bir deyişle $y + t - e \in \tilde{E}$, şu çelişkinin
 olduğunu varsayalım.

$y + t - e \notin \tilde{E}$ tekrardan lemma 5.8 e göre $F - (y + t + e) \in K - \tilde{E}$ olduğunu elde
 ederiz. Aynı zamanda $y \in K - \tilde{E}$ dir. Bu da bir yarıgruptur. Böylelikle
 $F - t + e = [F - (y + t - e)] + y \in K - \tilde{E}$ olur ve $t - e \in \tilde{E}$ dir böylece $F \in K$
 sonucuna varılır.

Teorem 6.10. $E; S$ sayısal yarıgrubunun ideali olsun.

$S^{\infty} E$ hemen hemen simetriktr $\Leftrightarrow K - (M - M) \subseteq \tilde{E} \subseteq K$ ve $K - \tilde{E}$ bir sayısal
 yarıgruptur.

İspat . $T = S^{\infty b} E$ olsun, $M(T)$ onun maksimal ideali ve $K(T)$ standart kanonik ideali olsun. T nin hemen hemen simetrik olduğunu varsayalım. O zaman $K(T) + M(T) \subseteq M(T)$ dir. Lemma 5.24. ten dolayı biliyoruz ki $\tilde{E} \subseteq K$ dir. Şimdi de $y \in K - (M - M)$ eşitliğini ele alalım. ($y \notin \tilde{E}$, başka bir deyişle $y + e \notin E$). $F - y = F(E) - (y + e)$ olduğunu biliyoruz, böylece $K(T)$ nin tanımını hatırlayarak ve $2(y + e) + b$ nin tek sayı olduğunu bilerek ($y + e \notin E$);

$2(F - y) = 2F(E) + b - (2(y + e) + b) \in K(T)$ olduğu sonucuna ulaşırız. T hemen hemen simetrik olduğu için $\forall s \in M$ için $2(F - y) + 2s \in M(T)$ olur, yani $\forall s \in M$ için $F - y + s \in M$ olur, başka bir deyişle $F - y \in M - M$ ama $y \in K - (M - M)$ dir. Böylece, $F \in K$ olur, o zaman $K - (M - M) \subseteq E$ olduğu anlaşılmış olur. Geriye $K - \tilde{E}$ nin bir sayısal yarıgrup olduğunu göstermek kalıyor. $\tilde{E} \subseteq K$ olduğu için şu açıktır ki $0 \in K - \tilde{E}$ dir. $K - \tilde{E} = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus \tilde{E}\}$. $K - (M - M) \subseteq \tilde{E} \subseteq K$ olmasına ve duallik özelliklerini dikkate alarak:

$\mathbb{Z} \setminus K \subseteq \mathbb{Z} \setminus \tilde{E} \subseteq \mathbb{Z} \setminus (K - (M - M))$ kanonik ideal tanımından,

$K(S) - K(S) \subseteq K - \tilde{E} \subseteq K - (K - (M - M))$ ve $S \subseteq K - \tilde{E} \subseteq M - M$ olur.

Buradan $|\mathbb{N} \setminus (K - \tilde{E})| < \infty$ yani $\mathbb{N} \setminus (K - \tilde{E})$ nin sonlu olduğunu anlarız. Son olarak kapalılık gösterilmeli. y ve z , $K - \tilde{E}$ nin iki elemanı olsun. Varsayalım ki $y + z \notin K - \tilde{E}$ olsun. Lemma 5.8. e göre $F - (y + z) \in \tilde{E}$ olur, buna denk bir gösterimle $F(E) - (y + z) \in E$ olur. $2F(E) - 2(y + z) + b \in M(T)$ sonucuna varırız. Dahası $y \in K - \tilde{E}$ olduğu için tekrar lemma 5.8. i uygulayarak $F - y \notin \tilde{E}$ sonucuna ulaşırız, yani $F(E) - y \notin E$; böylece $2F(E) + b - [2(F(E) - y) + b] = 2y \in K(T)$; benzer şekilde $2z \in K(T)$ olur. Şimdi $K(T) + M(T) \subseteq M(T)$ olduğu için $F(T) = 2F(E) + b = 2y + [2z + (2F(E) - 2(y + z) + b)]$ çelişkisini elde ederiz. O zaman anlaşılır ki $y + z \in K - \tilde{E}$ dir ve bu bir sayısal yarıgruptur. Tersine varsayalım ki $K - (M - M) \subseteq \tilde{E} \subseteq K$ ve $K - \tilde{E}$ bir sayısal yarıgrup olsun, kanıtlamamız

gereken şey $K(T) + M(T) \subseteq M(T)$ olduğudur. T ve $K(T)$ elemanlarının tanımlarını kullanarak 4 adet farklı durumu göz önünde bulundurmalıyız.

1) $s \in M$, a çift ve $\frac{a}{2} \notin S$ iken, $2s \in M(T)$ ve $2F(E) + b - a \in K(T)$ sağlanır;

2) $s \in M$, a tek ve $\frac{(a-b)}{2} \notin E$ iken, $2s \in M(T)$ ve $2F(E) + b - a \in K(T)$ sağlanır,

3) $t \in E$, a çift, $\frac{a}{2} \notin S$ iken $2t + b \in M(T)$ ve $2F(E) + b - a \in K(T)$ sağlanır,

4) $t \in E$, a tek, $\frac{(a-b)}{2} \notin E$ iken $2t + b \in M(T)$ ve $2F + b - a \in K(T)$ sağlanır,

Bu özellikler lemma 6.7. ve lemma 6.10. yardımıyla elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 6.11 . $S = \{0, 4, 8, \rightarrow\}$ olsun.

$$F(S) = 7$$

$$K(S) = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus S\} = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, \rightarrow\}$$

$$M - M = \{x \in \mathbb{Z} : x + M(S) \subseteq M(S)\} = \{0, 4, \rightarrow\}$$

$$\begin{aligned} K - (M - M) &= \{x \in \mathbb{Z} : x + (M - M) \subseteq K\} = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus (M - M)\} \\ &= \{4, 5, 6, 8, \rightarrow\} \text{ dır.} \end{aligned}$$

$K - (M - M)$ ve K arasındaki bütün mümkün göreceli ideal $\tilde{E}$ lere karşılık gelen

$K - \tilde{E}$ göreceli idealleri aşağıda listelenmiştir.

$$\tilde{E}_1 = K - (M - M) = \{4, 5, 6, 8, \rightarrow\} \quad K - \tilde{E}_1 = \{0, 4, \rightarrow\}$$

$$\tilde{E}_2 = \{2, 4, 5, 6, 8, \rightarrow\} \quad K - \tilde{E}_2 = \{0, 4, 6, \rightarrow\}$$

$$\tilde{E}_3 = \{1, 4, 5, 6, 8, \rightarrow\} \quad K - \tilde{E}_3 = \{0, 4, 5, 7, 8, \rightarrow\}$$

$$\tilde{E}_4 = \{0, 4, 5, 6, 8, \rightarrow\} \quad K - \tilde{E}_4 = \{0, 4, 5, 6, 8, \rightarrow\}$$

$$\tilde{E}_5 = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, \rightarrow\} \quad K - \tilde{E}_5 = \{0, 4, 7, 8, \rightarrow\}$$

$$\tilde{E}_6 = \{0, 2, 4, 5, 6, 8, \rightarrow\} \quad K - \tilde{E}_6 = \{0, 4, 6, 8, \rightarrow\}$$

$$\tilde{E}_7 = \{0, 1, 4, 5, 6, 8, \rightarrow\} \quad K - \tilde{E}_7 = \{0, 4, 5, 8, \rightarrow\}$$

$$\tilde{E}_8 = K = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, \rightarrow\} \quad K - \tilde{E}_8 = S = \{0, 4, 8, \rightarrow\}$$

$$K - K = S$$

$\tilde{E}_i$ ler oluştururken $K - (M - M)$ ye K da olup $K - (M - M)$ de olmayan elemanlar ekleniyor. $K - (M - M) \subseteq \tilde{E} \subseteq K$ olacak şekilde $\tilde{E}_i$ alt kümelerini buluyoruz $\{0,1,2\}$ nin alt küme sayısı: $2^3 = 8$ tane $\tilde{E}_i$ oluşur. $i = 1, \dots, 8$ için $K - \tilde{E}_i$ ler birer yarıgruptur. Böylece $S \infty^b E$ ($E \subseteq S$, S nin ideali iken) hemen hemen simetrik.

$S \infty^b E$ hemen hemen simetrik $\Leftrightarrow E \sim \tilde{E}_i$ (bazı $i = 1, \dots, 8$) yani $E = x + \tilde{E}_i$ olacak şekilde $x \in \mathbb{N}$ vardır.

Örnek 6.12. Bir önceki örnekte $K - (M - M)$ ve K arasındaki $\tilde{E}$ idealleri için $K - \tilde{E}$ bir sayısal yarıgruptur dedik ama genelde böyle değildir.

$S = \{0, 5, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım

$$K = \{0, 1, 2, 3, 5, \rightarrow\}$$

$$F(S) = 4$$

$$K - (M - M) = \{5, \rightarrow\}$$

$$E = \{5, 8, 10, \rightarrow\}$$

$K - (M - M) \subseteq \tilde{E} \subseteq K$ olacak şekilde $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesinin elemanları ile $2^4 = 16$ tane $\tilde{E}$ oluşturulabilir. Bunlardan biri $\tilde{E} = \{0, 3, 5, \rightarrow\}$ tir.

$K - \tilde{E} = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} \setminus \tilde{E}\} = \{0, 2, 3, 5, \rightarrow\}$ bir sayısal yarıgrup değildir. Çünkü $2 \in K - \tilde{E}$, $2 + 2 \in K - \tilde{E}$ olduğundan kapalı değildir. Teorem 6.9 dan dolayı $S \infty^b E = \{0, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, \rightarrow\}$ ifadesi hemen hemen simetrik değildir. Aslında $4 \in K(S \infty^b E)$ ve $15 \in M(S \infty^b E)$ ama $4 + 15 = 19 \notin M(S \infty^b E)$ dir. (Burada kullanılan şu $K - M = \{x : x + M \subseteq M\}$, $4 + M \not\subseteq M$ olur.) $K - (M - M)$ ve K arasındaki herhangi bir $\tilde{E}$ ideali için $K - \tilde{E}$ yarıgruplarını Apery kümesini kullanarak $0 \neq n \in S$ elemanına göre karakterize etmek mümkündür.

$$Ap(S, n) = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}, \left(w_i = \min \{s \in S : s \equiv i \pmod{n}\} \right).$$

Apery kümesinde kısmi sıralama bağıntısı $\leq_S$; $Ap(s, n) = \{w_i \leq_S w_S : w_J - w_i \in S\}$,
Apery kümesindeki maksimal elemanlar $PF(S)$ nin elemanlarını verir.
 $PF(S) = \{w - n : w \in \max_{\leq_S} Ap(S, n)\}$ [7]

Önerme 6.13. S bir sayısal yarıgrup ve x tek tamsayı ve $1 \leq x \leq 2t(S)+1$ olsun. O halde her $b \in S$ tek tamsayısı için $S^{\infty b}E$ hemen hemen simetrik ve $t(S^{\infty b}E) = x$ olacak şekilde sonsuz çoklukta $E \subseteq S$ idealleri vardır. Özel olarak S , x tipinde sonsuz çoklukta hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupların yarısıdır.

İspat: $x = 2n+1, 1 \leq n \leq t(S)$ olsun. I ; S ye $(M - M) \setminus S$ nin en büyük elemanını ekleyerek elde edilen göreceli ideal olsun. $\tilde{E} = K - I$ alalım. I nın bir sayısal yarıgrup olduğunu kontrol edebiliriz. $E \subseteq S$ olacak şekilde bazı $z \in \mathbb{N}$ için $E = \tilde{E} + z$ idealini göz önüne alırsak $S^{\infty b}E$ hemen hemen simetrik olur. O halde

$$\begin{aligned} t(S^{\infty b}E) &= 2|(K - \tilde{E}) \setminus S| + 1 \\ &= 2|I \setminus S| + 1 \\ &= 2n+1 \end{aligned}$$

Cümleinin son kısmı açıktır.böylece ispat tamamlanmış olur

BÖLÜM VII

SONUÇ

Bu çalışmada sayısal bir yarıgrup ve göreceli idealler yardımıyla sayısal çoğaltma kavramı karakterize edilmiştir. Sayısal yarıgrup ile sayısal çoğaltmanın özellikleri arasında geçişler gösterilmiş ve sayısal çoğaltmanın tipi ile ilgili formüller elde edilmiştir. Ayrıca 1 ve $2t(S)+1$ arasındaki herhangi bir x tek tamsayısı için tipi x olan sonsuz çoklukta hemen hemen simetrik çoğaltmalar elde edilmiştir. $b \in S$ tek tamsayı ve $E; S$ nin göreceli ideali iken $S^\infty{}^b E$ sayısal çoğaltmasının tipinin b den bağımsız olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Rosales, J.C., Garcia-Sanchez(2000), P.A., *Núméricas Semigroups*, Springer, New York.
- [2] Madero-Craven, M., Herzinger, K., (2005). “Apery Sets of Numerical Semigroups”, *Communications in Algebra*, **33**, 3831-3838.
- [3] Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A., (2009). *Numerical Semigroups*, Vol 20, Springer Developments in Mathematics, New York.
- [4] Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A. ve Garcia-Garcia J.I., (2004). “Fundamental Gaps in Numerical Semigroups with Respect to Their Multiplicity”, *Acta Mathematica Sinica*, **20(4)**, 629-646.
- [5] Rosales, J.C. ve Branco, M.B., (2011). “The Frobenius Problem for Numerical Semigroups”, *Journal of Number Theory*, **131**, 2310-2319.
- [6] Rosales, J.C., (2009). “Atoms of The Set of Numerical Semigroups with Fixed Frobenius Number”, *Linear Algebra and its Applications*, **430**, 41-51.
- [7] T. Cortadellas Benitez, R. Jafari, S. Zarzuela Armengou (2013), *On the Apery sets of monomial curves*, *Semigroup Forum* **86 (2)**, 289-320.
- [8] Madero-Craven, M.G., (2003). *Apery Sets of Numerical Semigroups*, Yüksek Lisans Tezi, The Faculty of Graduate School of The University of Maryland, USA.
- [9] Selmer, E. (1977), *On a linear Diophantine Problem of Frobenius*, *Journal Für Die und Angewandte Mathematik*, 293-294, 1-17
- [10] Froberg, R., Gottlieb, C., Haggkvist, R. (1987), *On numerical semigroups*, *Semigroup Forum* **35**, 63-83.
- [11] Rosales, J. C. (1996)., *On symmetric numerical semigroups* , *Journal of Algebra* **182 ,(2)** , 422-434
- [12] Nari, H., (2013). *Symmetries on almost symmetric numerical semigroups*, *Semigroup Forum*, **86,(1)**, 140-154.
- [13] Barucci, V. (2009). *On Propinquity of Numerical Semigroups and One-Dimensional Local Cohen-Macaulay Rings*, in *Commutative Algebra and its Applications*, Walter de Gruyter, Berlin, 49-60.

- [14] J. Jager(1977), *Langenberechnung und kanonische ideale in eindimensionalen ringen*, *Archiv der Mathematik* **29**, 504-512.
- [15] J.C. Rosales, M.B. Branco(2002), *Numerical semigroups that can be expressed as an intersection of symmetric numerical semigroups*, *Journal of Pure and Applied Algebra* **171**, 2-3, 303-314.
- [16] V. Barucci, R. Fröberg(1997), *One-dimensional almost Gorenstein rings*, *J. Algebra* **188** , 418-442.
- [17] M. D'Anna, F. Strazzanti, *New algebraic properties of quadratic quotients of the Rees algebra*, work in progress.
- [18] M. D'Anna, F. Strazzanti(2013), *The numerical duplication of a numerical semigroup*, *Semigroup Forum* **87, (1)**, 149-160.
- [19] A.M. Robles-P_erez, J.C. Rosales, P. Vasco(2009), *The doubles of a numerical semigroup*, *Journal of Pure and Applied Algebra* **213,(3)**, 387-396.
- [20] E. Sbarra(2004), *Ideals with maximal local cohomology modules*, *Rendiconti Del Seminario Matematico della Universita di Padova* **111**, 265-275.
- [21] F. Strazzanti(2015), *One half of almost symmetric numerical semigroups*, *Semigroup Forum* **91**, 463-47

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Necmettin KOÇYİĞİT

ÖĞRENİM DURUMU

Derece Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Gaziantep Üniversitesi	2021
Lisans Matematik Bölümü	İstanbul Üniversitesi	2010
Lise	Gaziantep Lisesi (YDA)	2005

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2016	Yavuz Sultan Selim MTAL	Matematik Öğr.
2013	Ömer Özmimar Anadolu İHL	Matematik Öğr.