

EYLÜL 2021

Yüksek Lisans Tezi-Matematik

HÜSEYİN TURAN

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN SİMETRİK SAYISAL
YARIGRUPLARIN TİPİNİN
RF-MATRİSLERİYLE BELİRLENMESİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

HÜSEYİN TURAN
EYLÜL 2021

**HEMEN HEMEN SİMETRİK SAYISAL
YARIGRUPLARIN TİPİNİN
RF-MATRİSLERİYLE BELİRLENMESİ**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Belgin ÖZER

Hüseyin TURAN

Eylül 2021



©2021[Hüseyin TURAN]

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literature bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Hüseyin TURAN

ABSTRACT

THE DETERMINATION OF THE TYPE OF ALMOST NUMERICAL SEMIGROUP WITH RF -MATRICES

TURAN, Hüseyin

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Belgin ÖZER

September 2021

46 pages

In this study the type of numerical semigroup is given by wing almost symmetric numerical semigroup and generator sets. The contribution in the construct of RF - matrix by using the row factorization matrices will be seen. It is shown that the type of almost numerical semigroups is at most 3 with RF -matrices. Basic idea, replacement of zeros and number of zeros in RF -matrices.

Key Words: Numerical Semigroup, Frobenius, Pseudo-Frobenius, RF -Matrix, Almost Numerical Semigroup.

ÖZET

HEMEN HEMEN SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLARIN TİPİNİN *RF*-MATRİSLERİYLE BELİRLENMESİ

TURAN, Hüseyin
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Doç. Dr. Belgin ÖZER

Eylül 2021

46 sayfa

Bu çalışmada hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupları ve doğuray kümelerini kullanarak yarı grubun tipi verilmiştir. Satır çarpanlara ayırma matrislerini kullanarak *RF*- matrisinin oluşumundaki katkıları görülecektir. Bu çalışmanın amacı, 4 doğuraylı hemen hemen simetrik sayısal yarı grubun tipinin en çok 3 olması gerektiğini *RF*-matrisleri yardımıyla gösterilmektedir. Temel fikir ise *RF*-matrislerinde ki sıfırların yer değiştirmesi ve sıfırların sayısına dayanmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Sayısal Yarı grup, Frobenius, Sözd-Frobenius, *RF*-Matris, Hemen Hemen Simetrik Sayısal Yarı grup.



"Canum aileme"

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak, benden; desteğini, sabrını, zamanını ve bilgisini esirgemeyen değerli danışman hocam; Doç. Dr. Belgin ÖZER’e teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca manevi desteklerinden dolayı aileme ve özellikle bugünlere gelmemi sağlayan annem(Serpil TURAN) ve babam(Abdullah TURAN) teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Hayatıma dahil olduğu andan itibaren sevgi ve desteğini her zaman hissettiğim sevgili eşim ve çocuğum; Aylin TURAN ve Eymen TURAN’a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ABSTRACT	vi
ÖZET.....	vii
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SEMBOLLER LİSTESİ	x
BÖLÜM I:GİRİŞ.....	1
BÖLÜM II: TEMEL TANIMLAR	3
BÖLÜM III: HEMEN HEMEN SİMETRİK YARIGRUPLAR.....	12
BÖLÜM IV: RF - MATRİSLERİ.....	18
BÖLÜM V:SAYISAL YARIGRUBUN TİPİNİ BELİRLEME.....	32
BÖLÜM VI: SONUÇLAR.....	43
KAYNAKLAR.....	44
ÖZGEÇMİŞ.....	46

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\emptyset$	Boş küme
K	Sayısal yarıgrup kümesi
$\mathbb{N}/K$	Boşluk kümesi
e	Birim eleman
σ	A üzerinde bir ikili işlem
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir.
$G(K)$	K nın boşluk kümesi
$L(K)$	K nın kutup noktaların kümesi
$m(K)$	K nın katlılığı
$e(K)$	K nın gömme boyutu
$F(K)$	Frobenius sayılar kümesi
$PF(K)$	Sözde-Frobenious sayılar kümesi
$T(K)$	K sayısal yarıgrup tipi
RF	Aref(Satırca indergenmiş) matris
$\vee$	Frobenius çoklu kümesi
Γ	Sözde- Frobenius çoklu kümesi
$\rightarrow$	İşaretin önündeki sayıdan sonraki sayılar kümenin elemanıdır
$\leq_K$	K nin kısmı sıralama bağıntısı

BÖLÜM I

GİRİŞ

Son yıllarda giderek daha fazla önem kazanmış olan sayısal yarıgruplar, özellikle cebirsel bilgisayar ve geometri gibi alanlarda kendine uygulama alanı bulmuş bir konudur. En genel anlamıyla sayısal yarıgrup; negatif olmayan ve sıfırı da kapsayan tamsayıların, tümleyeni sonlu olan toplamsal kapalı bir alt kümesidir. Sayısal yarıgruplar, değişmeli monoidler sınıfında olduğu için sayısal monoidler olarak da tanımlanmaktadırlar.

Sayısal yarıgruplar, 19. Yüzyılda ilk olarak James Josep Sylvester ve Ferdinand Frobenius tarafından Frobenius sayılar kümesi olarak ele alınmıştır. Frobenius problemi, “ a ve b negatif olmayan tamsayılar, p ve q sayıları 1 den büyük, aralarında asal sayılar olmak üzere; $ap + bq$ lineer kombinasyonu olarak ifade edilemeyen en büyük $F(K)$ sayısı nedir?” sorusu şeklinde bilinmektedir. Bu problemin çözümü, p ve q gibi iki adet sayı için $F(K) = pq - p - q$ olarak belirlidir. Sylvester, bu şekildeki iki sayı için $[0, F(K)]$ aralığındaki sayılardan p ve q sayılarının lineer kombinasyonu olarak yazılamayan ve yazılabilen sayıların eşit miktarda ve tam olarak $\frac{F(K)+1}{2}$ adet olduğu şeklindeki teoremin ispatını, 1884 yılında yapmıştır.

Diyafont denklemleri, sayısal yarıgrupların oluşumunun temelinde yer almaktadır. Diyafont denklemi, “ $ax + by = c$ ” biçimindeki denklem sistemleri şeklinde adlandırılmaktadır. Diyafont denklemleri ile sayısal yarıgruplar arasındaki temel fark, sayısal yarıgruplar denkleminin negatif olmayan çözümlerinin dikkate alınmasıdır. Bu bağlamda, bu denklemden yola çıkarak genellemeye varılacak olursa, $n_1, \dots, n_f$ aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere, herhangi bir sayısal yarıgrupun elemanlarını, $\partial_1 n_1 + \partial_2 n_2 \dots + \partial_f n_f$ ($n_i \geq 0$ $i = 1, 2, \dots, f$) denkleminin negatif olmayan çözümleriyle oluşturulan doğal sayıların kümesi belirtmektedir. Buradan hareketle,

bu sayıların lineer kombinasyonu olarak yazılamayan doğal sayıların $[0, F(K)]$ aralığında olduğu ve yazılabilen sayıların ise sonsuz tane olduğu tespit edilmiştir. Bu konu hakkında araştırılan bir diğer soru ise bir sayısal yarıgrupun minimal üreteç kümesini belirleme ve bunların ne olacağı sorusudur. Sayısal yarıgruplar üzerine yapılan çeşitli çalışmalar, bu konuda yeni tanımların ortaya çıkmasını sağlamıştır. Sayısal yarıgruplarda oluşan temel boşluklardan yola çıkarak sonradan tanımlanmış olan özellikle Frobenius Sayısı, Sözde- Frobenius ve Hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup küme çeşitlerinde, sayısal yarıgruba yeni bir eleman eklendiğinde ya da sayısal yarıgruptan bir eleman çıkarıldığında elde edilen yeni kümelerde, sayısal yarıgrup şartlarını sağlama koşullarının nelere bağlı olduğu gibi konular, geniş bir uygulama alanı bulmuştur.

Sayısal yarıgruplar üzerine yapılan çalışmalar burada söz edilenlerle sınırlı kalmamaktadır. Birçok alanda bu konuyla ilgili çalışmalar halâ devam etmektedir. Bu çalışmada ise sayısal yarıgrupların RF – matrisinin oluşmasındaki durumları ortaya koyulmuştur. RF – matrisleri, Alessio Moscariello tarafından ilk olarak 2016 yılında çalışılmıştır. T. Numata hemen hemen simetrik sayısal yarıgrubu çalışmıştır. J. C Rosales ve P. A. Garcia Sanchez ise 3 doğuraylı sayısal yarıgrupların tipinin en çok 2 olması gerektiğini ispatlamışlardır [11],[13],[10].

Tezin ikinci bölümünde ihtiyaç duyulan temel kavram ve tanımlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümünde sayısal hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplarla ilgili bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümünde RF – matrisleriyle ilgili bilgiler verilmiştir. Beşinci bölümde RF – matrisleri yardımıyla sayısal yarıgrup tipini bulma ilgili elde edilen teorem ve önermeler verilmiştir. Tezin altıncı bölümünde ise elde edilen sonuçlardan bahsedilmiş ve birtakım önerilere yer verilmiştir.

BÖLÜM II

TEMEL TANIMLAR

Tanım 2.1.

$A \neq \emptyset$ bir küme ve σ , A üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer σ 'nın A üzerinde birleşme özelliği varsa yani, $\forall x, y, z \in A$ için

$$x\sigma(y\sigma z) = (x\sigma y)\sigma z$$

oluyorsa (A, σ) ikilisine yarıgrup denir.

Tanım 2.2.

(A, σ) ikilisi bir yarıgrup olmak üzere, σ 'nın A üzerinde etkisiz eleman özelliği varsa yani,

$$x\sigma e = e\sigma x = x$$

olacak biçimde bir $e \in A$ varsa bu durumda (A, σ) yarıgrubuna monoid denir.

Örnek 2.3.

$\mathbb{Z} - \{0\}$ kümesi çarpma işlemine göre bir yarıgruptur. 1 elemanı çarpmaya göre birim eleman olduğundan $\mathbb{Z} - \{0\}$ kümesi çarpma işlemine göre bir monoiddir.

Örnek 2.4.

$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi toplama işlemine göre bir yarıgruptur.

Tanım 2.5.

$\mathbb{N}$ negatif olmayan tam sayılar kümesi ve $K \subseteq \mathbb{N}$ verilsin. K kümesi $\mathbb{N}$ kümesindeki toplama işlemine göre kapalı $0 \in K$ ve $\mathbb{N}/K$ kümesi sonlu ise K ye bir sayısal yarıgrup denir.

İkinci bir tanım olarak eğer $n_1, \dots, n_f$ pozitif tamsayı ve $\text{obeb}(n_1, \dots, n_f) = 1$ ise

$$\langle n_1, \dots, n_f \rangle = \{ \partial_1 n_1 + \dots + \partial_f n_f \mid \partial_1, \dots, \partial_f \in \mathbb{N} \}$$

kümesi bir sayısal yarıgruptur ve her sayısal yarıgrup bu formda yazılabilir [13].

Örnek 2.6. $K = \langle 5, 6, 13 \rangle = \{ 5k_1 + 6k_2 + 13k_3; k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N} \}$

$$= \{0,5,6,10,11,12,13,15, \rightarrow\}$$

şeklinde yazılır. Burada " $\rightarrow$ " 15 ten sonraki bütün tamsayıların K kümesinde olduğu anlamındadır.

Tanım 2.7.

K bir sayısal yarıgrup ve $A \subseteq K$ olsun. Eğer $A = \langle K \rangle$ sayısal yarıgrubu, A kümesinin hiçbir öz alt kümesi tarafından oluşturulamıyorsa A kümesine, K sayısal yarı grubunun minimal üreteç sistemi denir.

Örnek 2.8.

$$K = \langle 3, 5 \rangle = \{3x_1 + 5x_2 : x_1, x_2 \in \mathbb{N}\} = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, \rightarrow\}$$

$$i) 0 \in K$$

$$ii) \forall x, y \in K \text{ için } x = 3x_1 + 5x_2 \text{ ve } y = 3y_1 + 5y_2$$

olacak şekilde ,

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N} \text{ vardır ve } x + y = 3(x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2) \in K \text{ dir.}$$

iii) $\mathbb{N} \setminus K = \{1, 2, 4, 7\}$ koşullarını sağladığı için K bir sayısal yarıgruptur. O halde,

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{N} \text{ ve } A = \{n_1, \dots, n_f\} \text{ kümesi için } K = \langle n_1, \dots, n_f \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^f n_i x_i : x_i \in \mathbb{N} \right\} \text{ nin}$$

bir yarıgrup olması için gerek yeter koşul $obeb(n_1, \dots, n_f) = 1$ olmasıdır[3].

Örnek 2.9.

$$K = \langle 4, 7, 9 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 9, 11, \rightarrow\} \text{ buradan } obeb(4, 7, 9) = 1 \text{ ve } \mathbb{N} \setminus K = \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$$

olduğundan K sayısal yarıgruptur.

Örnek 2.10.

$$K = \langle 3, 5, 7 \rangle = \{0, 3, 5, \rightarrow\} \text{ olup } \mathbb{N} \setminus K = \{1, 2, 4\} \text{ sonludur } \Leftrightarrow (3, 5, 7) = 1 \text{ dir.}$$

Tanım 2.11.

K sayısal yarı grubunun minimal üreteç kümesi $\{n_0 < n_1 < \dots < n_p\}$ olsun ve n_0 sayısına K nın katlılığı; $p + 1$ sayısına ise K nin gömme boyutu denir. Sırasıyla $m(K)$ ve $e(K)$ ile gösterilir.

Tanım 2.12.

$K = \langle n_1, \dots, n_f \rangle$ sayısal yarı grubunda olmayan en büyük tamsayıyı bulma problemine eşdeğerdir.

$$F(K) = \max(\mathbb{Z}/K)$$

sayısı K 'nın Frobenius sayısı olarak bilinir ve $F(K)$ olarak gösterir. $\mathbb{N}/K$ kümesine, K 'nın boşlukları ve bu kümenin eleman sayısına K 'nın cinsi denir. Sırasıyla $G(K)$ ve $g(K)$ ile gösterilir[2].

Teorem 2.13.

$h_1, h_2 \in \mathbb{Z}$ ve $\text{obeb}\{h_1, h_2\} = 1$ koşulu altında $F(K) = \langle h_1, h_2 \rangle$ olsun.

Bu durumda;

$$(i) \quad F(K) = h_1 h_2 - h_1 - h_2$$

$$(ii) \quad g(K) = \frac{F(K)+1}{2} = \frac{(h_1-1)(h_2-1)}{2}$$

şeklinde ifade edilir[1].

Örnek 2.14.

$K = \langle 4,5 \rangle = \{0,4,5,8,9,10,12,13, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunda

$h_1 = 4$ ve $h_2 = 5$ olduğundan

$$(i) \quad F(K) = 4.5 - 4 - 5 = 11$$

$$(ii) \quad g(K) = \frac{11+1}{2} = 6$$

Dolayısıyla Teorem 2.13. gömme boyutu 2 olan sayısal yarıgrupların Frobenius sayılarını ve cinsini bulmada kolaylık sağlamaktadır.

Tanım 2.15.

K bir sayısal yarıgrup ve $F(K)$, K 'nin Frobenius sayısı olmak üzere; $h \in \mathbb{Z} \setminus K$ için $F(K) - h \notin K$ koşulunu sağlayan elemanların oluşturduğu kümeye K 'nin kutup noktaları denir. $L(K)$ ile gösterilir. Dolayısıyla,

$$L(K) = \{h \in \mathbb{Z} \mid h \notin K, F(K) - h \notin K\}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.16.

$K = \langle 8,13,15,19 \rangle = \{0,8,13,15,16,19,21,23,24,26,27,28,29,30,31,32,34, \rightarrow\}$

$G(K) = \{1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,14,17,18,20,22,25,33\}$ boşlukların kümesi

$F(K) = 33$ K de olmayan en büyük tamsayı

$m(K) = 8$ Katlılık
 $e(K) = 4$ Gömme boyutu
 $g(K) = 18$ Boşlukların eleman sayısı

bulunmuş olur.

Örnek 2.17.

$K = \langle 5, 9, 13 \rangle = \{0, 5, 9, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için

$G(K) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 16, 17, 21\}$

$F(K) = 21$ K de olmayan en büyük tamsayı

$m(K) = 5$ Katlılık

$e(K) = 3$ Gömme boyutu

$g(K) = 12$ Boşlukların eleman sayısı

bulunmuş olur.

Tanım 2.18.

K bir sayısal yarıgrup ve $x \notin K$ olsun. Her $k \in K/\{0\}$ için $x+k \in K$ oluyorsa x ' e K ' nın Sözde-Frobenius sayısı denir ve K ' nin tüm Sözde-Frobenius sayılarının kümesi $PF(K)$ ile gösterilir. $PF(K)$ kümesinin eleman sayısına K ' nın tipi denir ve $T(K)$ ile gösterir [9].

Örnek 2.19.

$K = \langle 5, 13, 21 \rangle = \{0, 5, 10, 13, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38, \rightarrow\}$

$G(K) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 22, 24, 27, 29, 32, 37\}$

$F(K) = 37$

$e(K) = 3$

$m(K) = 5$

$g(K) = 20$

$PF(K) = \{29, 37\}$

$T(K) = |PF(K)| = 2$

Örnek 2.20.

$K = \langle 8, 11, 12, 15 \rangle = \{0, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, \rightarrow\}$ olsun.

O zaman,

$\mathbb{Z}/K = \{\dots, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 25, 29\}$

$$F(K) = 29$$

$$K/\{0\} = \{0, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, \rightarrow\}$$

olup x negatif ve tamsayıları için $x+k \notin K$ çıkar. Dolayısıyla $x+k \in K$ koşulunu sağlayan x elemanları 4,25,29 olur. Böylece $PF(K) = \{4, 25, 29\}$ kümesini baz alınarak K sayısal yarıgrup $T(K) = 3$ olup tipi de 3 tür.

Örnek 2.21.

$$K = \langle 3, 10 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, \rightarrow\}$$

K nin minimal üreteç kümesi: $\{3, 10\}$

$$e(K) = 2$$

$$m(K) = 3$$

$$F(K) = 17$$

$$G(K) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 14, 17\}$$

$$g(K) = 9$$

$$PF(K) = \{17\} \text{ ve } T(K) = 1$$

Örnek 2.22.

$$K = \langle 9, 11, 15, 17 \rangle = \{0, 9, 11, 15, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 28, \rightarrow\}$$

kümesi incelenirse:

- K 'nin kutup noktalarını bulalım:

$$G(K) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 19, 21, 23, 25\}$$

$$F(K) = 25$$

$$L(K) = \{h \in \mathbb{Z} \mid h \notin K, F(K) - h \notin K\}$$

$$25 - 2 \notin K \Rightarrow 2 \in L(K)$$

$$25 - 4 \notin K \Rightarrow 4 \in L(K)$$

$$25 - 6 \notin K \Rightarrow 6 \in L(K)$$

$$25 - 12 \notin K \Rightarrow 12 \in L(K)$$

$$25 - 13 \notin K \Rightarrow 13 \in L(K)$$

$$25 - 19 \notin K \Rightarrow 19 \in L(K)$$

$$25 - 21 \notin K \Rightarrow 21 \in L(K)$$

$$25 - 23 \notin K \Rightarrow 23 \in L(K)$$

Negatif tamsayılardan seçilecek herhangi bir sayının Frobenius sayısı ile farkının sayısal yarıgrubun elemanı olacağı aşikardır. Dolayısıyla $L(K)$ kümesine ait olamaz. O hâlde,

$$L(K) = \{2, 4, 6, 12, 13, 19, 21, 23\}$$

şeklinde bulunur.

- K 'nin Sözde- Frobenius kümesini bulalım:

$$PF(K) = \{h \in \mathbb{Z} \mid h \notin K, \forall k \in K - \{0\}, h + k \in K\}$$

tanımı kullanılırsa

$$PF(K) = \{13, 19, 21, 23, 25\}$$

kümesi elde edilir,

$$T(K) = |PF(K)| = 5$$

şeklinde bulunur.

Örnek 2.23.

$$K = \langle 4, 9, 14 \rangle = \{0, 4, 8, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, \rightarrow\}$$

K nin minimal üreteç kümesi: $\{4, 9, 14\}$

$$e(K) = 3$$

$$m(K) = 4$$

$$F(K) = 19$$

$$G(K) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15, 19\}$$

$$g(K) = 10$$

$$L(K) = \emptyset$$

$$PF(K) = \{19\}$$

$$T(K) = 1$$

Tanım 2.24.

$h \in \mathbb{Z}$ ve K sayısal yarıgrup olsun.

$$h \in K \Leftrightarrow F(K) - h \notin K$$

ve

$$h \notin K \Leftrightarrow F(K) - h \in K$$

koşulunu sağlayan K sayısal yarıgrubuna simetrik sayısal yarıgrup denir.

Örnek 2.25.

$$K = \langle 4, 5 \rangle = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, \rightarrow\}$$

kümesini inceleyelim:

K sayısal yarıgrubu için $G(K) = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$ ve $F(K) = 11$ olarak bulunur.

- $\forall h \in K$ için $F(K) - h \notin K$ koşulunu inceleyelim:

$$h = 0 \in K \Rightarrow 11 - 0 \notin K$$

$$h = 4 \in K \Rightarrow 11 - 4 \notin K$$

$$h = 5 \in K \Rightarrow 11 - 5 \notin K$$

$$h = 8 \in K \Rightarrow 11 - 8 \notin K$$

$$h = 9 \in K \Rightarrow 11 - 9 \notin K$$

$$h = 10 \in K \Rightarrow 11 - 10 \notin K$$

$h > 10$ için daima negatif geleceğinden verilen koşul sağlanır.

- $\forall h \in G(K)$ için $F(K) - h \in K$ koşulunu inceleyelim:

$$h = 1 \in G(K) \Rightarrow 11 - 1 \in K$$

$$h = 2 \in G(K) \Rightarrow 11 - 2 \in K$$

$$h = 3 \in G(K) \Rightarrow 11 - 3 \in K$$

$$h = 6 \in G(K) \Rightarrow 11 - 6 \in K$$

$$h = 7 \in G(K) \Rightarrow 11 - 7 \in K$$

$$h = 11 \in G(K) \Rightarrow 11 - 11 \in K$$

$G(K)$ 'nin her elemanı için verilen koşul sağlandı.

Son olarak negatif tamsayıların her elemanı ile Froubenius sayısının farkının K sayısal yarıgrubun elemanı olacağı aşikârdır.

Dolayısıyla K kümesi simetrik sayısal yarıgruptur.

Tanım 2.26.

$\forall x \in \mathbb{Z}/K$ için, $F(K) - x \notin K$ olacak şekilde ise $\{x, F(K) - x\} \subseteq PF(K)$ K ya hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup deriz[10]. Başka bir tanım ise kısaca

$PF(K) = L(K) \cup \{F(K)\}$ şartını sağlamasıdır.

Örnek 2.27.

$$K = \langle 7, 12, 13 \rangle = \{0, 7, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 31, \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubu için,

$$F(K) = 30$$

$$PF(K) = \{29, 30\}$$

$$L(K) = \{1, 8, 15, 22, 29\}$$

$$PF(K) = L(K) \cup \{F(K)\}$$

şartı sağlanmadığından K hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup değildir.

Örnek 2.28.

$$K = \langle 8, 11, 12, 15 \rangle = \{0, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, \rightarrow\}$$
 sayısal

yarıgrubu için,

$$F(K) = 29$$

$$PF(K) = \{4, 25, 29\}$$

$$PF(K) = L(K) \cup \{F(K)\}$$

$$PF(K) = \{4, 25, 29\}$$

$$L(K) = \{4, 25\}$$

$$PF(K) = L(K) \cup \{F(K)\}$$

şartı sağlandığından K hemen hemen simetrik bir sayısal yarıgruptur.

Tanım 2.29.

$K = \langle n_1, n_2, \dots, n_f \rangle$ bir sayısal yarıgrup olsun ve $g \in PF(K)$ olsun. Eğer $\forall i = 1, 2, \dots, f$ ve $a_{ij} \in \mathbb{N}$ için $a_{ii} = -1$ ise ve $\forall i = 1, 2, \dots, f$ için

$$g = \sum_{j=1}^f a_{ij} n_j$$

ise $A = (a_{ij}) \in M_f(\mathbb{Z})$ bir RF – matris (satırca- indirgenmiş matris) denir. Böylelikle temel tanım, teorem, önermeler ve örnekleri görmüş oluyoruz.



BÖLÜM III

HEMEN HEMEN SİMETRİK YARIGRUP

Önerme 3.1.

Tüm $z \in \mathbb{Z}$ için; $(z \in K \Leftrightarrow F(K) - z \notin K)$ veya $(z \notin K \Leftrightarrow F(K) - z \in K)$ şartını sağlayan K sayısal yarıgrubuna simetrik sayısal yarıgruplar denir. Bir sayısal yarıgrubun simetrik olması için aşağıdakiler birbirine denktir[11].

$$1) L(K) = \emptyset$$

$$2) F(K) + 1 = 2g(K)$$

$$3) T(K) = 1$$

İspat 1

$(\Rightarrow)$: K simetrik ise $z \notin K \Leftrightarrow F(K) - z \in K$ veya $z \in K \Leftrightarrow F(K) - z \notin K$

şartlarından herhangi biri sağlanır. $L(K) = \{z \in \mathbb{Z} : z \notin K, F(K) - z \notin K\} \neq \emptyset$ olsun.

Öyleyse; $z \notin K$ için $F(K) - z \notin K$ şartı sağlanır. Bu durum K nin simetrik sayısal yarıgrup olmasıyla çelişir. Yani $L(K) = \emptyset$ dir.

$(\Leftarrow)$: $L(K) = \emptyset$ olduğundan $\forall z \in \mathbb{Z} \setminus K \Leftrightarrow F(K) - z \in K, z \notin K$ sayılarından oluşan elemanlar simetriklik şartı sağlanır. $z \in K$ olduğunda ise $F(K) - z \in K$ olsun. Öyleyse

$$\underbrace{(F(K) - z)}_{\in \mathbb{Z}} + z = F(K) \quad \text{olur ki bu da simetrik sayısal yarıgrup tanımıyla çelişir.}$$

İspat 2

$(\Rightarrow)$: K sayısal yarıgrubu simetrik olsun. $F(K)$ nin çift sayı olduğunu kabul edelim.

Eğer $\frac{F(K)}{2} \in K$ ise K sayısal yarıgrubu simetrik olduğundan şunlar söylenir,

$$F(K) - \frac{F(K)}{2} = \frac{F(K)}{2} \notin K \quad \text{çelişkisi elde edilir. Aksi durumda } \frac{F(K)}{2} \notin K \quad \text{olduğunda}$$

ise K simetrik sayısal yarıgrup olduğundan $F(K) - \frac{F(K)}{2} = \frac{F(K)}{2} \in K$ çelişkisi elde edilir.

$(\Leftarrow) : F(K)$ tek sayı ve $g(K) = \frac{F(K)+1}{2}$ olsun. Öyleyse; $\{0,1,...,F(K)\}$ kümesinin

ayrışımını düşündüğümüzde, hepsinin K ile ortak bir elemanı vardır.

Yani; $z \in K \Leftrightarrow F(K) - k \notin K$ dir. Eğer $z < 0$ ise tanımdan, $z \notin K$ ve $F(K) - z \in K$

olur. $z > F(K) \Rightarrow z \in K$ dir. ($F(K)$ den büyük bütün tamsayılar K nin elemanıdır.)

ve $F(K) - z < 0$ olduğundan $F(K) - z \notin K$ şartı sağlanır. Böylece sayısal yarıgrubun simetrik olduğu sonucuna varılır.

İspat 3

$F(K) \in PF(K)$ olduğunu biliyoruz. $PF(K)$ nin $F(K)$ elemanından başka elemanı olmadığını göstermemiz gerekir. Başka bir eleman daha varsa, o da $PF(K)$ kümesinin ikinci en büyük elemanıdır. $PF(K)$ kümesinin ikinci en büyük elemanı $L(K)$ kümesinin en büyük elemanı olacağından $L(K) \neq \emptyset$ olur ki; bu da K sayısal yarıgrubunun simetrik olmasıyla çelişir.

Tersine; $PF(K) = \{F(K)\}$ ise $PF(K)$ kümesinin ikinci en büyük elemanı $L(K)$ kümesinin en büyük elemanı olacağından $L(K) = \emptyset$ olur ve buradan da K sayısal yarıgrubunun simetrik olduğu sonucuna varılır.

Örnek 3.2

$K = \langle 3,11,17 \rangle = \{0,3,6,9,11,12,14,15,17,18,20, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için,

$G(K) = \{1,2,4,5,7,8,10,13,16,19\}$ olarak bulunur.

$\forall z \in G(K)$ ($z \notin K$) için $F(K) - z \in K$ şartı sağlanır. $G(K)$ kümesi dışında K ye ait olmayan elemanlar negatif tamsayılara ait elemanlar olduğundan $F(K) - z \in K$ şartı sağlanır. Bu nedenle K sayısal yarıgrubu bir simetrik sayısal yarıgruptur.

Örnek 3.3

$K = \langle 3,10 \rangle = \{0,3,6,9,10,12,13,15,16,18, \rightarrow\}$

$F(K) = 17$

$G(K) = \{1,2,4,5,7,8,11,14,17\}$

$g(K)=9$

$L(K) = \emptyset$

$PF(K) = 17$

$T(K) = 1$

K sayısal yarıgrubu simetriktir.

Örnek 3.4

$$K = \langle 5, 13, 21 \rangle = \{0, 5, 10, 13, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38, \rightarrow\}$$

K nin minimal üreteç kümesi : $\{5, 13, 21\}$

$$e(K) = 3$$

$$m(K) = 5$$

$$F(K) = 37$$

$$G(K) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 22, 24, 27, 29, 32, 37\}$$

$$g(K) = 20$$

$$L(K) = \{8, 29\}$$

$$PF(K) = \{29, 37\}$$

$$T(K) = 2 \text{ dir}$$

K sayısal yarıgrubu, tipi 2 ve $L(K) \neq \emptyset$ olduğundan simetrik değildir.

Örnek 3.5.

$K = \langle 5, 6, 7 \rangle = \{0, 5, 6, 7, 10, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için incelenirse $F(K) = 9$,

$g(K) = 4$ ve $m(K) = 5$. Fakat $8 \notin K$ için $F(K) - 8 = 9 - 8 = 1 \notin K$ olduğundan K

simetrik sayısal yarıgrup değildir. Kutup noktaları kümesini oluşturarak K sayısal

yarıgrubunun simetriklik durumu incelenirse; $L(K) = \{1, 8\}$ elemanlarından oluşur

$L(K) \neq \emptyset$ olduğundan K simetrik değildir.

Tanım 3.6.

K sayısal yarıgrup ve $F(K)$ çift olmak üzere $\forall x \notin K$ için $F(K) - x \in K$ veya $\forall x \in K$ için $F(K) - x \notin K$ şartını sağlayan sayısal yarıgruplara sözde-simetrik sayısal yarıgruplar denir([6]).

Not: Simetrik ve sözde simetrik sayısal yarıgruplar arasında geçiş yoktur. Çünkü simetrik sayısal yarıgrupların Frobenius sayısı tek sayı iken sözde-simetrik sayısal yarıgrupların Frobenius sayısı çift sayıdır.

Önerme 3.7.

K , Sözde-Simetrik sayısal yarıgrup ise

$$T(K) = 2 \text{ dir}[7].$$

Örnek 3.8.

$K = \langle 5, 8, 19 \rangle = \{0, 5, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için;

$$G(K) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 17, 22\} \quad F(K) = 22 \text{ ve } \frac{F(K)}{2} = 11 \notin K \text{ şartları}$$

sağlanmaktadır. Bu sayısal yarıgrubunun Sözde-Simetrik sayısal yarıgrup olabilmesi için $\forall x \notin K$ tam sayısı için $F(K) - x \in K$ şartını sağladığını gösterelim.

$$22 - 22 = 0 \in K$$

$$22 - 17 = 5 \in K$$

$$22 - 14 = 8 \in K$$

$$22 - 12 = 10 \in K$$

$$22 - 9 = 13 \in K$$

$$22 - 7 = 15, 22 - 6 = 16, 22 - 4 = 18, 22 - 3 = 19, 22 - 2 = 20, 22 - 1 = 21 \in K$$

Dolayısıyla $x \neq \frac{F(K)}{2} = 11$ dışındaki tüm sayılar için $F(K) - x \in K$ şartı

sağlandığından bu sayısal yarıgrup aynı zamanda bir Sözde-Simetrik sayısal yarıgruptur.

Ayrıca, $PF(K) = \{11, 22\}$ olduğundan bu sayısal yarıgrup için $T(K) = 2$ dir.

Not 3.9.

Tipi 2 olan sayısal yarıgruplar Sözde-Simetrik sayısal yarıgrup olmayabilir.

Örnek 3.10.

$$K = \langle 5, 13, 21 \rangle = \{0, 5, 10, 13, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38, \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubu $PF(K) = \{29, 37\}$ olduğundan tipi 2 olan bir sayısal yarıgruptur.

Ancak, $F(K) = 37$ olduğundan, K sayısal yarıgrubu Sözde-Simetrik bir sayısal yarıgrup değildir.

Sonuç 3.11.

Sayısal yarıgrubunun sözde simetrik olabilmesi için gerek ve yeter koşul $|L(K)| = 1$ olmasıdır.

Şimdi ise temel tanımları yeniden hatırlayalım.

Tanım 3.12.

$\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ tam sayılar ve negatif olmayan tam sayıları gösterebiliriz. $obeb(n_1, n_2, \dots, n_f) = 1$ olacak şekilde $f \geq 2$ ve $n_1, n_2, \dots, n_f \in \mathbb{N}$ verilsin. $\{n_1, n_2, \dots, n_f\}$ kümesi tarafından

doğurulan sayısal yarıgrup, $\mathbb{N}/K$ sonlu olacak şekilde $(\mathbb{N}, +)$ nin bir altmonoid olan $K = \langle n_1, n_2, \dots, n_f \rangle = \{a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_f n_f \mid a_i \in \mathbb{N}\}$ kümesidir.

$K = \langle n_1, n_2, \dots, n_f \rangle$ gösterimi ile $\{n_1, n_2, \dots, n_f\}$ kümesinin K için minimal doğuray sistemi olduğunu varsayalım, f' e K nin gömme boyutu diyelim ve $e(K)$ ile göstereceğiz. $F(K)$ ise K nin Frobenius sayısı gösterelim. Yani, $F(K) = \max(\mathbb{Z} / K)$ $PF(K)$ ise K nin Sözde- Frobenius sayılarının kümesidir [11].

$$PF(K) = \{x \notin K \mid x + k \in K \quad \forall k \in K / \{0\}\}$$

$$= \{x \notin K \mid x + n_i \in K \quad \forall i = 1, 2, \dots, f\}$$

kümesinin kardinalitesi K nin tipi olarak adlandırılır ve $T(K)$ ile gösterilir.

Eğer $y - x \in K$ ise, $\leq_k$ bağıntısı $x \leq_k y$ ile tanımlanır. $(\mathbb{Z}, \leq_k)$ nin kısmi sıralı kümedir. K nin Sözde-Frobenius sayıları $(\mathbb{Z}/K, \leq_k)$ posetinin maksimal elemanlarıdır. K sayısal yarıgrup için $\forall x \in \mathbb{Z}/K$ için, $F(K) - x \notin K$ ise $\{x, F(K) - x\} \subseteq PF(K)$ olacak şekilde K ya hemen hemen simetrik yarıgrup denir [3].

Önerme 3.13. K simetrik bir sayısal yarıgrup ise hemen hemen simetriktir [12].

İspat

K simetrik sayısal yarıgrup ise önceki önermelerden dolayı $L(K) = \emptyset$ olduğunu biliyoruz. Bu sebepten dolayı $PF(K) = \{F(K)\}$ olduğunu göstermeliyiz. Yani, K simetrik sayısal yarı grubunun Frobenius sayısından başka Sözde-Frobenius sayısı olmadığını göstermeliyiz, kabul edelim ki; $F(K) \neq x \in PF(K)$ olsun. $x \in G(K)$ ve K simetrik sayısal yarıgrup olduğundan $F(K) - x \in K$ olmalıdır. $x \in PF(K)$ ise K nin sıfırdan farklı her elemanı ile toplamı K sayısal yarı grubunun elemanı olmalıdır. Öyleyse K nin sıfırdan farklı elemanı olarak $F(K) - x$ elemanını seçelim.

$$x + (F(K) - x) = x + F(K) - x = F(K) \in K$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla K simetrik sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısından başka Sözde-Frobenius sayısı olmadığından hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olma şartı gösterilmiş olur.

Örnek 3.14

$$K = \langle 6, 14, 17 \rangle = \{0, 6, 12, 14, 17, 18, 20, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 40, \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubu için,

$$G(K) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 25, 27, 33, 39\}$$

$$PF(K) = \{39\} \text{ } K \text{ simetrik sayısal yarıgrup olduğundan } L(K) = \emptyset \text{ ve } F(K) = \{39\}$$

olur. $PF(K) = L(K) \cup \{F(K)\}$ şartı sağlanır. Yani, K hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

Önerme 3.15

K Sözde-Simetrik sayısal yarıgrup ise aynı zamanda hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur[12].

İspat

$$K \text{ Sözde-Simetrik sayısal yarıgrup ise } F(K) \text{ çift sayı ve } PF(K) = \left\{ \frac{F(K)}{2}, F(K) \right\}$$

$$\text{olduğunu önceki tanım ve teoremlerden biliyoruz ki dolayısıyla; } L(K) = \left\{ \frac{F(K)}{2} \right\}$$

olduğundan; $PF(K) = L(K) \cup \{F(K)\}$ şartı sağlandığından K sayısal yarıgrubu aynı zamanda hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

Örnek 3.16

$$K = \langle 3, 7, 11 \rangle = \{0, 3, 6, 7, 9, \rightarrow\} \text{ sayısal yarıgrubu,}$$

$$G(K) = \{1, 2, 4, 5, 8\},$$

$$F(K) = 8$$

$$PF(K) = \{4, 8\} \text{ dir.}$$

K Sözde-Simetrik sayısal yarıgrup olduğundan,

$x \in G(K)$ için $F(K) - x \notin K$ şartı sadece $x = 4$ için sağlandığından dolayı,

$$L(K) = \{4\} \text{ tür.}$$

Yani,

$$PF(K) = L(K) \cup \{F(K)\} \text{ şartı sağlanır.}$$

Yani,
 K , hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.



BÖLÜM IV

RF-MATRİSLERİ

Bu bölümde Diyafont denklemleri yardımı ile RF – matris oluşturacağız. RF – matrisleri oluşmasının en kolayı Söзде- Frobenius kümesi bilinen sayısal yarıgrupun elemanlarından birisi alınıp, temel sayma işlemi kullanarak başta matrisin asal köşegen elemanlarının satırlarına (-1) sayısı verilir sonra diğer satır elemanları ise temel sayma işlemleriyle doğal sayı değerler verilerek bulunur.

Söзде- Frobenius sayılarla ilgili yeni bazı nesnelerle göreceğiz buda bize RF -matrisi bulmada kolay sağlayacaktır. $\forall i = 1, 2, \dots, f$ için $g \in PF(K)$ ise $g + n_i \in K$ elemanları

için dolasıyla, $g + n_i = \sum_{j=1}^f a_{ij} n_j$ olacak şekilde $a_{i1}, \dots, a_{if} \in \mathbb{N}$ vardır. Bununla beraber,

$a_{ii} > 0 \Rightarrow g \in K$ olacak şekilde şunlar oluşur, $g = \sum_{j=1}^f a_{ij} n_j$ ve $a_{ii} = -1$ ifadeleri için

$a_{i1}, \dots, a_{if} \in \mathbb{N}$ vardır. Özellikleri gömme boyutu 4 olan hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar için aydınlatıcı bir bilgidir.

Tanım 4.1.

$K = \langle n_1, n_2, \dots, n_f \rangle$ bir sayısal yarıgrup olsun ve $g \in PF(K)$ olsun. Eğer, $\forall i = 1, 2, \dots, f$ ve $a_{ij} \in \mathbb{N}$ için $a_{ii} = -1$ ise ve $\forall i = 1, 2, \dots, f$ için

$$g = \sum_{j=1}^f a_{ij} n_j$$

ise $A = (a_{ij}) \in M_f(\mathbb{Z})$ bir RF – matris(satırca- indirgenmiş matris) denir. Eğer, K hemen hemen simetrik ve $g \in PF(K) \setminus \{F(K)\}$ ise, hem g hem de $F(K) - g$ için RF -matris vardır. Bununla beraber, genelde bu matris tek değildir. Şimdi bu kuralları

aşağıdaki örneklerde görelim.

Örnek 4.2.

$K = \langle 6, 7, 9, 10 \rangle = \{0, 6, 7, 9, 10, 12 \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım.

$$e(K) = 4$$

$$G(K) = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 11\}$$

$$F(K) = 11$$

$$L(K) = \{3, 8\}$$

$$PF(K) = \{3, 8, 11\}$$

$$T(K) = 3$$

$$m(K) = 6$$

$$PF(K) = l(K) \cup \{F(K)\} = \{3, 8\} \cup \{11\} = \{3, 8, 11\}$$

olduğundan K hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

Üreteçler için $n_1 = 6, n_2 = 7, n_3 = 9, n_4 = 10$ olacak şekilde yazılabilir. $f \in$

$PF(K)$ olacağından $8 \in PF(K)$ için, $\alpha_{ii} = -1$ ve $\sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} n_j = 8$

$$\alpha_{11} n_1 + \alpha_{12} n_2 + \alpha_{13} n_3 + \alpha_{14} n_4 = 8$$

$$\alpha_{21} n_1 + \alpha_{22} n_2 + \alpha_{23} n_3 + \alpha_{24} n_4 = 8$$

$$\alpha_{31} n_1 + \alpha_{32} n_2 + \alpha_{33} n_3 + \alpha_{34} n_4 = 8$$

$$\alpha_{41} n_1 + \alpha_{42} n_2 + \alpha_{43} n_3 + \alpha_{44} n_4 = 8$$

$$-6 + 7\alpha_{12} + 9\alpha_{13} + 10\alpha_{14} = 8$$

$$6\alpha_{21} - 7 + 9\alpha_{23} + 10\alpha_{24} = 8$$

$$6\alpha_{31} + 7\alpha_{32} - 9 + 10\alpha_{34} = 8$$

$$6\alpha_{41} + 7\alpha_{42} + 9\alpha_{43} - 10 = 8$$

$$-6 + 7\alpha_{12} + 9\alpha_{13} + 10\alpha_{14} = 8$$

$$(-1)6 + (2)7 + (0)9 + (0)10 = 8$$

$$6\alpha_{21} - 7 + 9\alpha_{23} + 10\alpha_{24} = 8$$

$$(1)6\alpha_{21} + (-1)7 + (1)9 + (0)10 = 8$$

$$6\alpha_{31} + 7\alpha_{32} - 9 + 10\alpha_{34} = 8$$

$$(0)6 + (1)7 + (-1)9 + (1)10 = 8$$

$$6\alpha_{41} + 7\alpha_{42} + 9\alpha_{43} - 10 = 8$$

$$(3)6 + (0)7 + (0)9 + (-1)10 = 8$$

$$-6 + 7\alpha_{12} + 9\alpha_{13} + 10\alpha_{14} = 8$$

$$(-1)6 + (2)7 + (0)9 + (0)10 = 8$$

$$6\alpha_{21} - 7 + 9\alpha_{23} + 10\alpha_{24} = 8$$

$$(1)6\alpha_{21} + (-1)7 + (1)9 + (0)10 = 8$$

$$6\alpha_{31} + 7\alpha_{32} - 9 + 10\alpha_{34} = 8$$

$$(0)6 + (1)7 + (-1)9 + (1)10 = 8$$

$$6\alpha_{41} + 7\alpha_{42} + 9\alpha_{43} - 10 = 8$$

$$(0)6 + (0)7 + (2)9 + (-1)10 = 8$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

RF -matrisleri elde edilir. Örnekte, B_2 ve B_1 in dördüncü satırda farklılık gösterdiğini gözlemleyelim ve bu satırlar $(3,0,0,-1)$, $(0,0,2,-1)$ $8+10$ nun 3.6 ve 2.9 çarpanlara

ayrılmasından elde edilir. Dolayısıyla $f \in PF(K)$ için tek türlü RF -matris yazımı olma zorunluluğu yoktur.

$3 \in PF(K)$ için, $\alpha_{ii} = -1$ ve $\sum_{j=1}^4 a_{ij}n_j = 3$ eşitliğini yazalım:

$$\alpha_{11}n_1 + \alpha_{12}n_2 + \alpha_{13}n_3 + \alpha_{14}n_4 = 3$$

$$\alpha_{21}n_1 + \alpha_{22}n_2 + \alpha_{23}n_3 + \alpha_{24}n_4 = 3$$

$$\alpha_{31}n_1 + \alpha_{32}n_2 + \alpha_{33}n_3 + \alpha_{34}n_4 = 3$$

$$\alpha_{41}n_1 + \alpha_{42}n_2 + \alpha_{43}n_3 + \alpha_{44}n_4 = 3$$

$$-6 + 7\alpha_{12} + 9\alpha_{13} + 10\alpha_{14} = 3$$

$$6\alpha_{21} - 7 + 9\alpha_{23} + 10\alpha_{24} = 3$$

$$6\alpha_{31} + 7\alpha_{32} - 9 + 10\alpha_{34} = 3$$

$$6\alpha_{41} + 7\alpha_{42} + 9\alpha_{43} - 10 = 3$$

$$-6 + 7\alpha_{12} + 9\alpha_{13} + 10\alpha_{14} = 3$$

$$(-1)6 + (0)7 + (1)9 + (0)10 = 3$$

$$6\alpha_{21} - 7 + 9\alpha_{23} + 10\alpha_{24} = 3$$

$$(0)6\alpha_{21} + (-1)7 + (0)9 + (1)10 = 3$$

$$6\alpha_{31} + 7\alpha_{32} - 9 + 10\alpha_{34} = 3$$

$$(2)6 + (0)7 + (-1)9 + (0)10 = 3$$

$$6\alpha_{41} + 7\alpha_{42} + 9\alpha_{43} - 10 = 3$$

$$(1)6 + (1)7 + (0)9 + (-1)10 = 3$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

RF -matrisi elde edilir.

Örnek 4.3.

$K = \langle 8, 11, 12, 15 \rangle = \{0, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30 \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım.

$$e(K) = 4$$

$$G(K) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 25, 29\}$$

$$F(K) = 29$$

$$L(K) = \{4, 25\}$$

$$PF(K) = \{4, 25, 29\}$$

$$T(K) = 3$$

$$m(K) = 8$$

$$PF(K) = H(K) \cup \{F(K)\} = \{4, 25\} \cup \{29\} = \{4, 25, 29\}$$

olduğundan K hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

Üreteçler için $n_1 = 8, n_2 = 11, n_3 = 12, n_4 = 15$ olacak şekilde yazılabilir. $f \in$

$PF(K)$ olacağından $4 \in PF(K)$ için, $\alpha_{ii} = -1$ ve $\sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} n_j = 4$ eşitliğini yazalım:

$$\alpha_{11} n_1 + \alpha_{12} n_2 + \alpha_{13} n_3 + \alpha_{14} n_4 = 4$$

$$\alpha_{21} n_1 + \alpha_{22} n_2 + \alpha_{23} n_3 + \alpha_{24} n_4 = 4$$

$$\alpha_{31} n_1 + \alpha_{32} n_2 + \alpha_{33} n_3 + \alpha_{34} n_4 = 4$$

$$\alpha_{41} n_1 + \alpha_{42} n_2 + \alpha_{43} n_3 + \alpha_{44} n_4 = 4$$

$$-8 + 11\alpha_{12} + 12\alpha_{13} + 15\alpha_{14} = 4$$

$$8\alpha_{21} - 11 + 12\alpha_{23} + 15\alpha_{24} = 4$$

$$8\alpha_{31} + 11\alpha_{32} - 12 + 15\alpha_{34} = 4$$

$$8\alpha_{41} + 11\alpha_{42} + 12\alpha_{43} - 15 = 4$$

$$-8 + 11\alpha_{12} + 12\alpha_{13} + 15\alpha_{14} = 4$$

$$(-1)8 + (0)11 + (1)12 + (0)15 = 4$$

$$8\alpha_{21} - 11 + 12\alpha_{23} + 15\alpha_{24} = 4$$

$$(0)8\alpha_{21} + (-1)11 + (0)12 + (1)15 = 4$$

$$8\alpha_{31} + 11\alpha_{32} - 12 + 15\alpha_{34} = 4$$

$$(2)8 + (0)11 + (-1)12 + (0)15 = 4$$

$$8\alpha_{41} + 11\alpha_{42} + 12\alpha_{43} - 15 = 4$$

$$(1)8 + (1)11 + (0)12 + (-1)15 = 4$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$25 \in PF(K)$ için, $\alpha_{ii} = -1$ ve $\sum_{j=1}^4 a_{ij}n_j = 25$ eşitliğini yazalım:

$$\alpha_{11}n_1 + \alpha_{12}n_2 + \alpha_{13}n_3 + \alpha_{14}n_4 = 25$$

$$\alpha_{21}n_1 + \alpha_{22}n_2 + \alpha_{23}n_3 + \alpha_{24}n_4 = 25$$

$$\alpha_{31}n_1 + \alpha_{32}n_2 + \alpha_{33}n_3 + \alpha_{34}n_4 = 25$$

$$\alpha_{41}n_1 + \alpha_{42}n_2 + \alpha_{43}n_3 + \alpha_{44}n_4 = 25$$

$$-8 + 11\alpha_{12} + 12\alpha_{13} + 15\alpha_{14} = 25$$

$$8\alpha_{21} - 11 + 12\alpha_{23} + 15\alpha_{24} = 25$$

$$8\alpha_{31} + 11\alpha_{32} - 12 + 15\alpha_{34} = 25$$

$$8\alpha_{41} + 11\alpha_{42} + 12\alpha_{43} - 15 = 25$$

$$-8 + 11\alpha_{12} + 12\alpha_{13} + 15\alpha_{14} = 25$$

$$(-1)8 + (3)11 + (0)12 + (0)15 = 25$$

$$8\alpha_{21} - 11 + 12\alpha_{23} + 15\alpha_{24} = 25$$

$$(0)8\alpha_{21} + (-1)11 + (3)12 + (0)15 = 25$$

$$(3)8\alpha_{21} + (-1)11 + (1)12 + (0)15 = 25$$

$$8\alpha_{31} + 11\alpha_{32} - 12 + 15\alpha_{34} = 25$$

$$(0)8 + (2)11 + (-1)12 + (1)15 = 25$$

$$8\alpha_{41} + 11\alpha_{42} + 12\alpha_{43} - 15 = 25$$

$$(2)8 + (0)11 + (2)12 + (-1)15 = 25$$

$$(5)8 + (0)11 + (0)12 + (-1)15 = 25$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir.

$29 \in PF(K)$ için, $\alpha_{ii} = -1$ ve $\sum_{j=1}^4 a_{ij} n_j = 29$ eşitliğini yazalım:

$$\alpha_{11}n_1 + \alpha_{12}n_2 + \alpha_{13}n_3 + \alpha_{14}n_4 = 29$$

$$\alpha_{21}n_1 + \alpha_{22}n_2 + \alpha_{23}n_3 + \alpha_{24}n_4 = 29$$

$$\alpha_{31}n_1 + \alpha_{32}n_2 + \alpha_{33}n_3 + \alpha_{34}n_4 = 29$$

$$\alpha_{41}n_1 + \alpha_{42}n_2 + \alpha_{43}n_3 + \alpha_{44}n_4 = 29$$

$$-8 + 11\alpha_{12} + 12\alpha_{13} + 15\alpha_{14} = 29$$

$$8\alpha_{21} - 11 + 12\alpha_{23} + 15\alpha_{24} = 29$$

$$8\alpha_{31} + 11\alpha_{32} - 12 + 15\alpha_{34} = 29$$

$$8\alpha_{41} + 11\alpha_{42} + 12\alpha_{43} - 15 = 29$$

$$-8 + 11\alpha_{12} + 12\alpha_{13} + 15\alpha_{14} = 29$$

$$(-1)8 + (2)11 + (0)12 + (1)15 = 29$$

$$8\alpha_{21} - 11 + 12\alpha_{23} + 15\alpha_{24} = 29$$

$$(2)8\alpha_{21} + (-1)11 + (2)12 + (0)15 = 29$$

$$(5)8\alpha_{21} + (-1)11 + (0)12 + (0)15 = 29$$

$$8\alpha_{31} + 11\alpha_{32} - 12 + 15\alpha_{34} = 29$$

$$(0)8 + (1)11 + (-1)12 + (2)15 = 29$$

$$8\alpha_{41} + 11\alpha_{42} + 12\alpha_{43} - 15 = 29$$

$$(0)8 + (4)11 + (0)12 + (-1)15 = 29$$

$$(1)8 + (0)11 + (3)12 + (-1)15 = 29$$

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla $f \in PF(K)$ için tek türlü RF -matris yazımı olma zorunluluğu yoktur.

Şimdi ise RF -matrislerini daha pratik çözümü için aşağıdaki sorulara bakalım.

Örnek 4.4.

$$K = \langle 4, 7, 13 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 11, 12 \rightarrow\} \quad PF(K) = \{9, 10\}$$

K , 2 tipinde RF – matrisi

$9 \in PF(K)$ RF – matrisini yazalım.

$4x + 7y + 13z = 9$ denkleminin her satır için x, y ve z ayrı ayrı -1 değerleri verilir diğerlerine ise temel sayma işlemine göre değerler verilerek eşitlik sağlanır. RF – matrisi oluşur.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Aynı şekilde de $10 \in PF(K)$ RF – matrisini yazalım,

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 4.5.

$$K = \langle 5, 8, 19 \rangle = \{0, 5, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23 \rightarrow\} \quad PF(K) = \{11, 22\}$$

$11 \in PF(K)$ RF – matrisini yazalım,

$5x + 8y + 19z = 11$ denkleminin her satır için x, y ve z ayrı ayrı -1 değerleri verilir diğerlerine ise temel sayma işlemine göre değerler verilerek eşitlik sağlanır. RF – matrisi oluşur.

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Aynı şekilde $22 \in PF(K)$ RF -matrisini yazalım,

$$B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 4.6.

$$K = \langle 7, 12, 13 \rangle = \{0, 7, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 31 \rightarrow\}$$

$$PF(K) = \{29, 30\}$$

$29 \in PF(K)$ RF -matrisini yazalım,

$$C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$30 \in PF(K)$ RF -matrisini yazalım,

$$C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Genel durumda ise $K = \langle n_1, n_2, \dots, n_f \rangle$ g için RF – matris in i -inci satırındır ve bu satır K da $g + n_i$ nin ayrışımına karşılık gelir. Bunun için, $Z(k)$ $k \in K$ nın çarpanlarının kümesini, K nın minimal doğuraylarının bir lineer birleşimi olarak gösterelim. Fakat g için bir RF – matrisinin i -inci satırını,

$$|Z(g + n_i)| \text{ yolla seçilir.}$$

Bunun için $g \in PF(K)$ için RF – matrislerinin sayısı,

$$\prod_{i=1}^e |Z(g + n_i)| \text{ ye eşittir.}$$

Eğer $PF(K)$ nın iki elemanı simetrik ise yani toplamaları $F(K)$ ise RF – matrislerinin bir özelliği vardır.

Önerme 4.7.

$K = \langle n_1, n_2, \dots, n_f \rangle$ bir sayısal yarıgrup olsun. $F(K) - g \in PF(K)$ olacak şekilde $g \in PF(K) / \{F(K)\}$ olsun. $A = (a_{ij})$, g için bir RF – matris ve $B = (b_{ij})$, $F(K) - g$ bir RF – matris olsun. O halde, her $i \neq j$ için

$$a_{ij} b_{ji} = 0 \text{ dır.}$$

İspat

$i, j \in \{1, 2, \dots, f\}$, $i \neq j$ olsun. A nın i – ninci satırının ve B nın j -ninci satırını gözönüne alalım. Onları ekleyerek,

$$F(K) = g + (F(K) - g)$$

$$= \sum_{p=1}^f a_{ip} n_p + \sum_{q=1}^f b_{jq} n_q$$

$$= \sum_{h=1}^f (a_{ih} + b_{jh}) n_h$$

elde edilir.

Eğer $h \neq i$ ise, $a_{ih}, b_{jh} \in \mathbb{N}$ olduğu açıktır ve dolayısıyla $a_{ih} + b_{jh} \in \mathbb{N}$ olur. n_i ve n_j nin katsayıları sırasıyla $b_{ji} - 1$ ve $a_{ji} - 1$ dir. $F(K) \notin K$ olduğundan, bu katsayıların her ikisinde negatif değildir. $a_{ih}, b_{jh} \in \mathbb{N}$ olduğundan $b_{ji} = 0$ ya da $a_{ij} = 0$ olmalıdır. Yani, $a_{ij} b_{ji} = 0$ dir ve ispat biter.

Yardımcı Teorem 4.8.

$g, g^* \in PF(K)$ ve $g + g^* \notin K$ olsun. $RF(g) = A = (a_{ij})$ ve $RF(g^*) = B = (b_{ij})$ alalım. $\forall i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ veya $b_{ij} = 0$ 'dır. Eğer $RF\left(\frac{F(K)}{2}\right) = (a_{ij})$ ise $\forall i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ veya $a_{ji} = 0$ 'dır.

İspat

$g \in PF(K)$ için g 'nin RF -matrisi $A = (a_{ij})$ ise $i = 1, \dots, e$ ve $g = a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + \dots + a_{ii}n_i + \dots + a_{ie}n_e$ 'dir.

Her i için $a_{ii} = -1$ olduğundan

$$g = a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + \dots + (-1)n_i + \dots + a_{ie}n_e$$

$$g + n_i = a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + \dots + a_{i(i-1)}n_{(i-1)} + a_{i(i+1)}n_{(i+1)} + \dots + a_{ie}n_e$$

$$g + n_i = \sum_{p \neq i} a_{ip} n_p$$

yazılır. Benzer yolla $g^* \in PF(K)$ ve g^* 'nin RF -matrisi olan $B = (b_{ij})$ de yazalım

$$g^* + n_j = \sum_{j \neq r} a_{jr} n_r$$

elde edilir. $a_{ij} \geq 1$ ve $b_{ji} \geq 1$ ise

$$g = a_{i1}n_1 + \dots + (-1)n_i + \dots + a_{ij}n_j + \dots + a_{ie}n_e$$

$$g^* = b_{j1}n_1 + \dots + b_{ji}n_i + \dots + (-1)n_j + \dots + b_{je}n_e$$

eşitlikleri toplandığında

$$g^* + g = (a_{i1} + b_{j1})n_1 + \dots + (b_{ji} - 1)n_i + \dots + (a_{ij} - 1)n_j + \dots + (a_{ie} + b_{je})n_e$$

$$g + g^* = (b_{ji} - 1)n_i + (a_{ji} - 1)n_j + \sum_{s \neq i, j} (a_{is} + b_{js})n_s$$

elde edilir. Bu eşitlik K 'nin bir elemanı olacağından $g + g^* \notin K$ ile çelişir.

Dolayısıyla $a_{ij} \geq 1$ ve $b_{ji} \geq 1$ kabulü yanlıştır.

O hâlde,

$$\forall i \neq j \text{ için } a_{ij} = 0 \text{ veya } b_{ji} = 0 \text{ 'dır.}$$

Eğer;

$$\frac{F(K)}{2} \in PF(K) \text{ ve } RF\left(\frac{F(K)}{2}\right) = (a_{ij}) \text{ ise yukarıdaki gibi } g = \frac{F(K)}{2} \text{ ve } g^* = \frac{F(K)}{2}$$

$$\text{ için } RF(g) = RF\left(\frac{F(K)}{2}\right) = (a_{ij})$$

ve

$$RF(g^*) = RF\left(\frac{F(K)}{2}\right) = (b_{ij}) = (a_{ij})$$

yazılabileceğinden $\forall i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ veya $b_{ji} = 0$ elde edilir.

Şimdide farklı çoklu kümeleri tanımlayalım o halde,

$i, j \in \{1, \dots, e(K)\}, i \neq j$ olsun.

$$\partial_{ij} = \max \{L \in \mathbb{N} / Ln_j - n_i \notin K\} \text{ ve } M_{ij} = \partial_{ij}n_j - n_i \notin K \text{ dır.}$$

$$\vee \text{ ile } \vee = \{M_{ij} / i \neq j\} \text{ çoklu kümesini gösterelim,}$$

Eğer, $L \leq \partial_{ij}$ ve $Ln_j - n_i \notin K$ ve $L > \partial_{ij}$ ise, $Ln_j - n_i \in K$ olduğu kolaylıkla görülür

ve $g \in PF(K) / \{F(K)\}$ elemanlarından oluşan gamma kümesini oluşturulur. O halde

$\overline{g} = \{M_{ij} \in \mathbb{N} / M_{ij} = g\}$ çoklu kümeyi tanımlanır ve $\forall g \in PF(K) / \{F(K)\}$ için $\overline{}, \overline{g}$ nin birleşimi olur.

Önerme 4.9.

K bir sayısal yarıgrup olsun ve $g = an_j - n_i, j \neq i$ olacak şekilde $g \in PF(K)$ olsun. O halde $a = \partial_{ij}$ dir. Ayrıca, eğer $g, g^* \in PF(K) / \{F(K)\}, g \neq g^*$ ise $\Gamma_g \cap \Gamma_{g^*} = \emptyset$ dir.

İspat

$g \in PF(K)$ olduğunda, $g = an_j - n_i \notin K$ olur. Dolayısıyla,

$$a \leq \partial_{ij} \text{ ve } g \leq_k g + (\partial_{ij} - a)n_j = M_{ij} \text{ olur,}$$

bununla birlikte $M_{ij} \notin K$ den $g \in PK(K)$ ve $g = M_{ij}$ dir. Yani $a = \partial_{ij}$ dir.

Bu bölümün geri kalan kısmında gömme boyutu $e(K) = 4$ olan hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupların K durumunu ele alacağız. Temel fikir, sayı üzerinde sayma işlemidir ve RF – matrislerinde sıfırların yer değişmesidir. Gelecek bölümde ise $PF(K) / \{F(K)\}$ ve $\vee$ kümelerini ilişkilendirmede kullanacağız ($|\vee| = 12$ ve $\Gamma \subseteq \vee$ olduğunu biliyoruz. Örnek 4.2). Dolayısıyla $T(K)$ yi sınırlıyoruz.

BÖLÜM V

SAYISAL YARIGRUBUN TİPİNİN BELİRLENMESİ

Bu bölümde ise daha önceki önermeler ve RF -matrislerinin sıfır değişimleri yardımı ile sayısal yarıgrubun tipini belirlemiş olacağız. Bu bölümdeki lemmalar ise $PF(K)/\{F(K)\}$ ile $\vee$ kümelerini ilişkilendirerek ($|\vee|=12$ ve $\Gamma \subseteq \vee$) olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla sayısal yarıgrubun tipi için sınır bulmakta kolaylık sağlayacaktır. Gerçekte, $g \in PF(K)/\{F(K)\}$ için A bir RF -matris ise A nın tam iki sıfırlı herbir satırı, $\vee$ nın g ye eşit olan elemanın verir. Bununla birlikte Γ_g , A nın böyle satırlarından daha fazla eleman içerebilir; Örneğin, Örnek 4.2 teki $K = \langle 6, 7, 9, 10 \rangle$ sayısal yarıgrubunda, 8 için iki RF - matrisleri B_1 ve B_2 tam iki sıfırlı iki satır içeriyor. Fakat açıkça Γ_{g_8} ikiden fazla eleman içeriyor. Gelecek lemmaların ispatında çok iyi bilinen bir gerçeği kullanalım ([11], Corollary 10.22). O da şudur 3-doğuraylı herhangi bir sayısal yarıgrubun tipi en çok 2 dir.

Lemma 5.1.

$K = \langle n_1, n_2, \dots, n_f \rangle$ hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olsun. $g \in PF(K)/\{F(K)\}$ ve M g için RF - matris olsun, öyle ki M nin sütununda pozitif eleman olmasın. O halde , $g = \frac{F(K)}{2}$ dır.

İspat

Genelliği bozmaksızın,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ 0 & -1 & m_{23} & m_{24} \\ 0 & m_{32} & -1 & m_{34} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & -1 \end{pmatrix} \text{ olsun}$$

O halde,

$d = \gcd(n_2, n_3, n_4)$ olsun. M nin ilk iki satırını yaparak,

$$\begin{aligned} g &= -n_1 + m_{12}n_2 + m_{13}n_3 + m_{14}n_4 \\ &= -n_2 + m_{23}n_3 + m_{24}n_4 \end{aligned} \quad \text{elde edilir. Dolayısıyla,}$$

$d|g$ ve $d|n_1$ olur. Buradan $d|\gcd(n_1, n_2, n_3, n_4)=1$ ve $d=1$ elde edilir. Bunun için $A = \langle n_2, n_3, n_4 \rangle$ de bir sayısal yarıgruptur ve RF – matris M yi kontrol ederek $g \notin A$ olduğunu çıkarılır ve şu şekilde elemanlar oluşur $g + n_2, g + n_3, g + n_4 \in A$ dır. Yani, $g \in PF(A), A \subseteq K \Rightarrow F(A) \geq F(K)$ olduğu için $g \neq F(A)$ olur. O halde, $T(A) = 2$ dır ve $\{g, F(A)\} = PF(A)$ dir. Şimdi, $F(A) - g$ yi ele alalım. $g \in PF(A) \setminus \{F(A)\}$ olduğundan, $F(A) - g \notin A$ elde edilir.

Sözde-Frobenius sayısı tanımı ile ya $F(A) - g \leq_A F(A)$ yada $F(A) - g \leq_A g$ dır. $F(A) - g \leq_A F(A)$ olduğundan $g \in A$ çelişkisi elde edilir. $F(A) - g \leq_A g$ olur. Diğer taraftan ise $F(K) \notin A$ yi göz önüne alarak, $g \in PF(K) \setminus \{F(K)\}$ olduğundan, $F(K) > g$ gösterir ki $F(K) \leq_A F(A)$ ve bunun için $F(A) - F(K) \in A$ dır. Fakat, $F(K) - g \notin K$ olduğundan $F(K) - g \notin A$ ve $F(K) - g \leq_A F(K) - g + [F(A) - F(K)] \Rightarrow F(A) - g \leq_A g$ yani, $F(K) - g \leq_A g$ dır. Açıkça, $F(K) - g \leq_K g$ olur. Son olarak, $F(K) - g \in PF(K)$ olduğundan, $F(K) - g = g$ olur ve ispat tamamlanır.

Lemma 5.2.

$K = \langle n_1, n_2, \dots, n_f \rangle$ hemen hemen simetrik yarıgrup, $g \in PF(K) \setminus \{F(K)\}$ ve A, B sırasıyla g ve $F(K) - g$ nin RF – matrisleri olsun. O halde,

$$A \cup B \text{ de en çok } |\Gamma_g| + |\Gamma_{F(K)-g}| + 8 \text{ tane sıfır vardır.}$$

İspat $g \in \mathbb{N}$ olduğundan, 3 sıfırlı A yada B nin bir satırı olamaz. Bunun için S_1 bir sıfırlı $A \cup B$ nin satır sayısı S_2 iki sıfırlı $A \cup B$ nin satır sayısını gösterebilir.

$S_1 + S_2 \leq 8$ olsun. Aynı zamanda $A \cup B$ de tam olarak $S_1 + 2S_2$ tane sıfır vardır.

Eğer, A yada

B nın satırının tam olarak iki sıfırı varsa önerme 4.9 ile bu satır g yada $F(K) - g$ ye eşit olan $\vee$ nın bir elemanına karşılık gelir. O halde, $S_2 \leq |\Gamma_g| + |\Gamma_{F(K)-g}|$, $S_1 \leq 8 - S_2$ dir. Bu sınırlamalar altında $S_1 + 2S_2$ nin olası maksimum değeri $|\Gamma_g| + |\Gamma_{F(K)-g}| + 8$ dir. Bu da bizim aradığımız sonuçtur.

Lemma 5.3.

$K = \langle n_1, n_2, \dots, n_f \rangle$ hemen hemen simetrik yarıgrup, $g \in PF(K) / \{F(K)\}$ olsun.

O halde,

$$|\Gamma_g| + |\Gamma_{F(K)-g}| \geq 4 \text{ tür. Ayrıca,}$$

$$|\Gamma| \geq 2|PF(K) / \{F(K)\}| = 2(T(K) - 1) \text{ dir.}$$

İspat

$A = (a_{ij})$ g nin bir RF -matrisi ve $B = (b_{ij})$ de $F(K) - g \in PF(K) / \{F(K)\}$ için bir RF -matris olsun. Bu matrislerde a_{ij}, b_{ij} formunda elemanların 12 çifti vardır. O halde Önerme 4.7 ile A ve B elemanları arasında en az 12 sıfır vardır. Bunun için lemma 5.2. ile $12 \leq |\Gamma_g| + |\Gamma_{F(K)-g}| + 8$ olur. Yani, $|\Gamma_g| + |\Gamma_{F(K)-g}| \geq 4$ tür. Çeşitli Γ_g ler ayrık olduğundan, $g = \frac{F(K)}{2}$ dir. $|\Gamma_g| \geq 2$ olur. Çeşitli $|\Gamma_g|$ ler ekleyerek ve $|\Gamma_g|$ leri $|\Gamma_{F(K)-g}|$ ler ile eşleyerek $|\Gamma| \geq 2|PF(K) / \{F(K)\}| = 2(T(K) - 1)$ elde edilir ve ispat biter.

Daha önceki lemmada Γ elemanlı RF -matrislerinin bir ikisinin sıfırları verildi. Bu sonuç $T(K)$ için bir ilk sınır verir.

Gerçekte $\Gamma \subseteq \vee$ olduğundan, Örnek 4.2 den $|\vee| = 12 \geq 2(T(K) - 1)$ dır. Bunun için, $T(K) \leq 7$ elde edilebilir. Önerme 4.7 , $A \cup B$ de en az 12 sıfırın varlığını söyler. İleride, bu sınırın Γ nın elemanlarına bağlı olarak geliştirilebilir olduğu görülebilir.

Lemma 5.4.

$K = \langle n_1, n_2, \dots, n_f \rangle$ ve $g, g^* \in PF(K) / \{F(K)\}$ için

$$\begin{aligned} g &= M_{ji} = \partial_{ji} n_i - n_j \\ g^* &= M_{ki} = \partial_{ki} n_i - n_k \end{aligned} \quad \partial_{ji} \geq \partial_{ki}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

farklı indisler için $A = (a_{pq})$, $F(K) - g$ için RF -matris olsun. O halde $a_{kj} = 0$ dır.

İspat

$a_{kj} \neq 0$ olsun. A nın k -nıncı satırı olarak,

$$\begin{aligned} F(K) &= g + (F(K) - g) = \partial_{ji} n_i - n_j n_i + a_{ki} n_i + a_{kj} n_j - n_k + a_{kh} n_h = \\ &= (\partial_{ji} + a_{ki}) n_i + (a_{kj} - 1) n_j - n_k + a_{kh} n_h \end{aligned}$$

$\partial_{ji} + a_{ki} \geq \partial_{ji} \geq \partial_{ki}$ olduğundan, $a_{kj} - 1 \geq 0$ olur. Buradan $g^* = \partial_{ki} n_i - n_k \leq_K F(K)$ olur. Bu bir çelişkidir ve ispat biter.

Lemma 5.4 ün anlamı, herbir $M_{ji}, M_{ki} \in \Gamma$ için $a_{jk} = b_{jk} = 0$ olacak şekilde a_{jk}, b_{jk} ikilileri bulunabilir.

Dolayısıyla, Önerme 4.7 ile alt sınıra bir daha sıfır eklenebilir. Bir sonraki aşama, Γ nın elemanlarının olası konfigürasyonları ile ilgilidir.

Önerme 5.5.

$K = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olsun. O halde, $\{i, j, k, h\} = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\begin{aligned} g &= M_{ji} = \partial_{ji} n_i - n_j \\ g^* &= M_{ki} = \partial_{ki} n_i - n_k \\ g^{**} &= M_{hi} = \partial_{hi} n_i - n_h \end{aligned}$$

olacak şekilde farklı olmayan $g, g^*, g^{**} \in PF(K)/\{F(K)\}$ vardır.

İspat

Genelliği bozmaksızın,

$$\begin{aligned} g &= M_{21} = \partial_{21} n_1 - n_2 \\ g^* &= M_{31} = \partial_{31} n_1 - n_3 \end{aligned}$$

$$g^{**} = M_{41} = \partial_{41}n - n_4$$

ve $\partial_{21} \geq \partial_{31} \geq \partial_{41}$ olsun. $w = F(K) - g \in PF(K)$ alalım.

g ve w için sırasıyla RF – matrislerini,

$$G = \begin{pmatrix} -1 & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ \partial_{21} & -1 & 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & -1 & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & -1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} -1 & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ \partial_{21} & -1 & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & -1 & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & -1 \end{pmatrix}$$

ele alalım. $\partial_{21} > 0$ olduğundan, $w_{12} = 0$ dır. Lemma 5.4 $\{g, g^*\}$ ve $\{g, g^{**}\}$ ikililerine uygulayarak, $w_{32} = w_{42} = 0$ edilir. Bunun için W lemma 5.1.in hipotezini sağlar.

Dolayısıyla, $w = \frac{F(K)}{2}$ ve $g = \frac{F(K)}{2}$ dır. $g = w \Rightarrow W$ nın hem w hemde g için bir

RF – matris olduğunu verir. Bunun için Önerme 4.6 yi W ye uygulayarak w ve g için RF – matrislerin gözönüne alarak $w_{ij} \neq 0$ elde edilebilir. Buradan $w_{ij} = 0$ elde edilir.

Son olarak, $g = w = \partial_{21}n_1 - n_2$ olduğundan genelliği bozmaksızın,

$$W = \begin{pmatrix} -1 & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ \partial_{21} & -1 & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & -1 & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & -1 \end{pmatrix}$$

kabul edelim (G ve W matrilerinin ikinci satırları kadar dır). Bununla beraber,

w_{34}, w_{43} arasında en az bir sıfır vardır. Bu nedenden dolayı $w_{43} = 0$ kabul edilirse

$g = w = \partial_{21}n_1 - n_2 = w_{41}n_1 - n_4$ elde edilir.

Çünkü, $g = w_{41}n_1 - n_4$ olduğundan önerme 4.9 $w_{41} = \partial_{41}$ olur. Dolayısıyla, $\partial_{21} \geq \partial_{41} = w_{41}$

dır ve $n_2 = (\partial_{21} - w_{41})n_1 + n_4$ tür. Bu da imkansızdır. $w_{34} = 0$ olduğunu kabul edilirse,

farklı bir çelişki elde edilir. Bu sonuçları gözönüne alarak, $T(K)$ için sınır geliştirilebilir.

Önerme 5.6.

$K = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olsun. O halde,

$$T(K) \leq 4 \text{ tür}[4].$$

İspat

Lemma 5.3 kullanırsak $|\Gamma| \geq 2|PF(K)/\{F(K)\}| = 2(T(K)-1)$ dir. Bununla birlikte $|\Gamma| \geq 9$ gösterir ki $\{i, j, k, h\} = \{1, 2, 3, 4\}$ $PF(K)/\{F(K)\}$ de M_{ji}, M_{ki}, M_{hi} formunda 3 eleman vardır. Bu önerme 5.5 ile çelişir.

Bunun için $|\Gamma| \leq 8$ ve $2(T(K)-1) \leq 8$,yani $T(K) \leq 5$ tır. $T(K) = 5$ olduğunu kabul edelim. Buradan $|\Gamma| = 8$ olur. O halde, önerme 5.5 ile $i = 1, 2, 3, 4$ için $M_{ji}, M_{ki} \in \Gamma$ olacak şekilde tamamıyla iki index j, k vardır. Bunun için genelliği bozmaksız, $g = \partial_{21}n_1 - n_2, g^* = \partial_{31}n_1 - n_3, \partial_{21} \geq \partial_{31}$ olacak şekilde $g, g^* \in PF(K)/\{F(K)\}$ vardır. $A = (a_{ij})$ g için bir RF – matris ve $B = (b_{ij})$ $F(K) - g$ için bir RF – matris olsun. Lemma 5.3 ile her $g \in PF(K)/\{F(K)\}$

$$|\Gamma| = 8 \Rightarrow |\Gamma_g| + |\Gamma_{F(K)-g}| = 4 \text{ tür.}$$

Bunun için lemma 5.3 ve önerme 4.6 ile $A \cup B$ nin tamamıyla 12 sıfır içerdiğini söyleriz ve dolayısıyla önerme 4.6 ile her i, j indisi için $i \neq j$, a_{ij}, b_{ij} arasında kesin biri sıfırdır. Bununla beraber lemma 5.4 ile dir. Dolayısıyla, $a_{32} = b_{32} = 0$ elemanlarının ikilisini alarak çelişki elde edilir. Bununla birlikte tipi 5 alındığında tam 12 sıfır olması gerekirken 13 sıfır oluyor bundan dolayı $T(K) \leq 4$ elde edilir.

Lemma 5.7.

$K = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ hemen hemen simetrik olsun. $C, \frac{F(K)}{2} \in PF(K)/\{F(K)\}$ için bir RF – matris olsun. O halde ,

$|\Gamma| = 8, \left| \Gamma_{\frac{F(K)}{2}} \right| = 4$ tür. C nin her bir satırı kesin iki sıfır içerir.

İspat

Lemma 5.3 ve önerme 5.6 kullanılırsa, $6 \leq |\Gamma| \leq 8$ elde edilir.

$PF(K) = \left\{ g, \frac{F(K)}{2}, F(K) - g, F(K) \right\}$ olsun. A, B, g ve $F(K) - g$ için RF - matrisler

olsun. A, B ve C, C matris çiftlerini ele alalım. $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ sırasıyla A, B, C matrislerinde yer alan Γ nin elemanlarını içeren ayrık kümeler olsun. Bu üç küme arasında ve kesin iki sıfır içeren A, B, C nin satırları arasında bijeksiyon (1-1, örtenlik) vardır. Ayrıca, bir sıfırlı A nin satır sayısı en çok $4 - |\Gamma_A|$ tür ve A nin en çok $4 - |\Gamma_A| + 2|\Gamma_A| = 4 + |\Gamma_A|$ sıfırı vardır. Bu değerleri toplayarak A, B ve C, C matris ikililerinde en çok $16 + |\Gamma_A| + |\Gamma_B| + 2|\Gamma_C|$ tane sıfır vardır. Bununla beraber önerme 4.7 ten bu sıfırları sayarak, her bir matris çiftçinde en az 12 sıfır vardır. Önerme 5.6 ile her bir i için $g = M_{ji}$, $g^* = M_{ki}$ olacak şekilde en çok iki indis j, k ve iki eleman $g_i, g_i^* \in PF(K) \setminus \{F(K)\}$ vardır.

Ayrıca, böyle her bir ikili için lemma 5.4 ile her ikisinde sıfır olan a_{jk}, b_{jk} ya da c_{jk}, c_{kj} formunda bir eleman çifti vardır. Böyle ikililerin sayısı en az $|\Gamma_A| + |\Gamma_B| + |\Gamma_C| - 4$ olduğundan A, B ve C, C kililerinde en az $12 + 12 + |\Gamma_A| + |\Gamma_B| + |\Gamma_C| - 4$ sıfır vardır.

Her iki sınırları birleştirerek $20 + |\Gamma_A| + |\Gamma_B| + |\Gamma_C| \leq 16 + |\Gamma_A| + |\Gamma_B| + 2|\Gamma_C|$ elde edilir.

Dolayısıyla, $|\Gamma_C| \geq 4$ elde edilir. C nin herbir satırının Γ_C nin bir elemanını gösterdiğini verir. Bunun için, kesin iki sıfır içerir ve $\Gamma_C \subseteq \Gamma_{\frac{F(K)}{2}}$, $|\Gamma| \leq 8$ ve $|\Gamma_g| + |\Gamma_{F(K)-g}| \geq 4$

sınırlamalarından $|\Gamma| = 8, \left| \Gamma_{\frac{F(K)}{2}} \right| = 4$ elde edilir.

Bu lemma ile $T(K) \leq 3$ olduğunu ispatlanır. Burada $T(K) = 4$ olduğunu ispatlayalım.

Sonra bir önceki lemma ile $\frac{F(K)}{2} \in PF(K) \setminus \{F(K)\}$ için RF - matrisi olmadığını söyleriz ve ispat tamamlanır.

Teoremin[5] ispatından, $T(K) = 4$ olsun yani $|PF(K)/\{F(K)\}| = 3$ olsun. Lemma 5.7 de $|\Gamma| = 8$ olduğundan önerme 5.6 bakılırsa

$M_{j_i,i}, M_{k_i,i} \in PF(K)/\{F(K)\}$ olsun,

$$\begin{aligned} M_{j_i,i} &= \partial_{j_i,i} n_i - n_{j_i} \\ M_{k_i,i} &= \partial_{k_i,i} n_i - n_{k_i} \quad \partial_{j_i,i} \geq \partial_{k_i,i} \end{aligned}$$

olacak şekilde iki eleman $M_{j_i,i}, M_{k_i,i}$ vardır. g ve $F(K) - g$ için RF – matrisleri A ve B olsun lemma 5.2 ve önerme 4.7 ile A, B matris ikilisinde kesin 12 sıfır vardır.

Bununla birlikte $M_{j_i,i} \neq \frac{F(K)}{2}$ gösterir ki lemma 5.4 ile A, B matris ikilisinde en az 13 sıfır vardır.

Dolayısıyla, herbir $i = 1, 2, 3, 4$ $M_{j_i,i} = \frac{F(K)}{2}$ ve $\partial_{j_i,i} \geq \partial_{k_i,i}$ dir. $C, \frac{F(K)}{2}$ için bir RF – matris olsun. Lemma 5.7 ile C nın herbir satırı iki sıfır içerir ve $\Gamma_{\frac{F(K)}{2}}$ nın elemanları C de yer alır.

Şimdi böyle bir matris olamayacağını ispatlayalım. İndeksleri yeniden düzenleyerek,

$j_1 = 2, k_1 = 3$ için,

$$\partial_{21} > \partial_{31} \quad \text{ve} \quad M_{21} = \partial_{21} n_1 - n_2 = \frac{F(K)}{2}$$

O halde ,

$$C = \begin{pmatrix} -1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ \partial_{21} & -1 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & -1 & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & -1 \end{pmatrix}$$

Bazı $p \neq 2$ için $c_{p1} \neq 0$ ise C nin her bir satırı iki sıfıra sahip olduğu için önerme 4.9 den $c_{p1} = \partial_{p1}$ olur. Bu durumda $\partial_{21}n_1 - n_2 = \partial_{p1}n_1 - n_p$ olur. Bu ifadeden sonra $n_2 \in \langle n_1, n_p \rangle$ yada $n_p \in \langle n_1, n_2 \rangle$ ye neden olur. Bununla birlikte her iki sonuç imkansızdır. Bunun için $c_{41} = c_{31} = 0$ dır.

Benzer nedenle, C nin her bir sütununda en çok bir pozitif eleman olabilir ve C nin her bir satırında en az iki sıfır vardır. (Dolayısıyla, bütün C de en çok 4 pozitif eleman vardır.) Buradan C nin her bir sütununda tam olarak en az bir pozitif eleman vardır.

Ayrıca önerme 4.7 ile $c_{12} = 0$ ve $c_{32} = 0$ dır. Bunun için $c_{42} > 0$ olmalıdır. Önerme 4.9 ile $c_{42} = \partial_{42}$ ve $c_{41} = c_{43} = 0$ elde edilir. Ayrıca, $c_{31} = c_{32} = 0$ olduğundan, C nin üçüncü satırı gözönüne alarak, $c_{34} > 0$ olmalıdır. Yani, $c_{34} = \partial_{34}$ dır. Son olarak, $c_{34} > 0 \Rightarrow c_{14} = 0$ dır. Bunun için C nin ilk satırını gözönüne alarak, $c_{13} = \partial_{13}$ elde edilir. Bunun için C tam olarak belirlenir,

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \partial_{13} & 0 \\ \partial_{21} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \partial_{34} \\ 0 & \partial_{42} & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

Yani, $M_{21} = M_{34} = M_{13} = M_{42} = \frac{F(K)}{2}$ olur.

Şimdi geriye $M_{k_1, i}$ elemanları bulmak kalır. Lemma 5.1 kullanarak $\frac{F(K)}{2}$ üzerinde,

$c_{j_i, k_i} = c_{k_i, j_i} = 0$ olacak şekilde $M_{k_i, i}$ elemanları ve C de c_{j_i, k_i} , c_{k_i, j_i} eleman çiftlerine arasında ilişki vardır.

C yi kontrol ederek, böyle tek çiftler, $c_{23} = c_{32} = 0$ ve $c_{14} = c_{41} = 0$ dır. Bunun için,

$j_1 = 2, j_2 = 4, j_3 = 1, j_4 = 3 \Rightarrow k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = 4, k_4 = 2$ elde edilir. Şimdi takip eden 4

elemanı gözönüne alalım. $M_{21} = M_{34} = \frac{F(K)}{2}$ ve $M_{31}, M_{24} \in \Gamma_g \cup \Gamma_{F(K)-g}$ j_i ve k_i

tanımı ile $\partial_{21} > \partial_{31}$ ve $\partial_{34} > \partial_{24}$ tür.

Şimdi ise M_{31} ve M_{24} ün aynı kümede Γ_g ye ait olmama varsayımını alırsak

$$M_{31} + M_{24} = F(K) = M_{21} + M_{34} \Rightarrow \partial_{31}n_1 - n_2 - n_3 + \partial_{24}n_4 = \partial_{21}n_1 - n_2 - n_3 + \partial_{34}n_4$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. Çünkü $\partial_{21} > \partial_{31}$ ve $\partial_{34} > \partial_{24}$ dir. Bunun için ,

$$M_{31} = M_{24} \text{ ve } M_{13} = M_{34} = \frac{F(K)}{2} \text{ olduğundan,}$$

$$M_{34} + M_{31} - M_{24} = M_{31} = \frac{F(K)}{2} \Rightarrow \partial_{34}w_4 - w_3 + \partial_{31}w_1 - w_3 - \partial_{24}w_4 + w_2 = \partial_{13}w_3 - w_1 = \frac{F(K)}{2}$$

dır. O halde ,

$$F(K) = \partial_{34}w_4 - w_3 + \partial_{31}w_1 - w_3 - \partial_{24}w_4 + w_2 = \partial_{13}w_3 - w_1 \Rightarrow$$

$$F(K) = (\partial_{34} - \partial_{24})w_4 + (\partial_{13} - 2)w_3 + w_2 + (\partial_{31} - 1)w_1$$

dır. Her $i = 1, 2, 3, 4$ için , $j_4 = 3, k_4 = 2$ ve $\partial_{j_i, i} > \partial_{k_i, i}$ olduğundan $\partial_{34} > \partial_{24}$ olur.

Bunun için $F(K) \notin K \Rightarrow \partial_{13} = 1$ dir. Diğer taraftan $j_3 = 1$ ve $k_3 = 4$ olduğunu biliyoruz.

Bundan dolayı $1 = \partial_{13} > \partial_{14} > 0$ olur ve bu bir çelişkidir. Bunun için, $\frac{F(K)}{2}$ için bir

RF – matris C olamaz ve $\frac{F(K)}{2} \in PF(K)$ olduğundan buda bir çelişkidir. O halde

$T(K) \leq 3$ tür. Bu bölümün sonuçlarından yüksek gömme boyutlarından $T(K)$ için sınırlar araştırmak doğaldır.

Eğer hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupların, $K = \langle n_1, n_2, \dots, n_f \rangle, f \geq 4$,

$g \in PF(K) \setminus \{F(K)\}$ için g ve $F(K) - g$ ifadelerinde sırasıyla A, B RF – matrislerini gözönüne alırsak, a_{ij}, b_{ij} formunda $f^2 - f$ elemanlarının çiftleri vardır. Bunun için

Önerme 4.7 ile $A \cup B$ de en az $f^2 - f$ tane sıfır vardır. Eğer r_i yi en az i sıfırlı

$A \cup B$ nın satır sayısı olarak gösterilerse, g yada $F(K) - g$ yi $\partial n_i - n_j$ fornumda

elemanlar ile ilişkilendirmek için, r_{f-2} için bazı sınırlar bulmaya gerek var

$$\sum_{i=1}^{f-2} r_i \geq f^2 - f \text{ olduğundan her bir } r_i \text{ en çok } 2f \text{ olduğundan } d = \left\lfloor \frac{f}{2} \right\rfloor \text{ olarak,}$$

$$\sum_{i=1}^{f-2} r_i = \sum_{i=1}^{d-1} r_i + \sum_{i=d}^{f-2} r_i \leq 2f(d-1) + \sum_{i=1}^{f-2} r_i \leq f^2 - 2f + \sum_{i=d}^{f-2} r_i \text{ elde edilir.}$$

Bunun için bu eşitlikleri birleştirerek, $\sum_{i=d}^{f-2} r_i \geq f$ elde edilir. Bununla birlikte, $f = 4$ iken $f - 2 = d$ elde edilir ve bundan sonra $f \geq 5$ için $r_{f-2} \geq 4$ elde edilir.

Bu sonuç başarısızdır. Ayrıca $p < f - 2$ ile r_p için sınırlar yararlı değildir. Çünkü aynı indeks kümeleri için $(\sum a_i n_i) - n_j$ formunda birden fazla Söze - Frobenius sayıları olabilir [4].

Örnek 5.8

$K = \langle 14, 15, 17, 19, 20 \rangle$ sayısal yarıgrubu ele alalım. $PF(K) = \{16, 18, 23, 25, 41\}$ dir.

$41 = 25 + 16 = 23 + 18$ olduğundan $T(K) = e(K) = 5$ olacak şekilde K hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur. Genelde, $T(K) < e(K)$ sağlanmaz gömme boyutunun her bir değeri için tipi sınırlıdır. Bu herhangi bir sayısal yarıgrup için doğru değildir. ([11], örnek 2.24). Bundan başka örneklerde tip daima $e(K) + 1$ ile sınırlıdır.

BÖLÜM VI

SONUÇLAR

Bu çalışmada , 4 doğuraylı hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup tipinin en çok 3 olması gerektiği RF – matrislerin sıfır sayma işlemlerini kullanarak ispatlanmıştır. Bunlar için Sözdde-Frobenius sayılarının çarpanlarını $\partial n_i - n_j$ bularak K sayısal yarıgrubu için $T(K)$ nın sınırlarını ispatlandı. Önerme 4.7 ile $\{g, F(K) - g\} \subseteq PF(K)$ için RF – matrislerinde sıfırları sayarak yapıldı.

Genel olarak bakılırsa $T(K) < e(K)$ sağlanmaz gömme boyutunun herbir değeri için tipi sınırlıdır. Bu herhangi bir sayısal yarıgrup için doğru değildir. ([11], örnek 2.24) den $|N/K| \leq 32$ (10^6 sayısal yarıgrup etrafında), olacak şekilde, hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar için $T(K)$ ve $e(K)$ yi hesaplarız [4].

Francesco Stranzzanti [1] bakılırsa sonucumuz $T(K) < e(K)$ yi ispatlar eğer gömme boyutu 4 ise bununla birlikte eğer $e(K) = 5$ ise, bu eşitsizlik sağlanmaz. Eğer, $T(K) - e(K) \geq 0$ olacak şekilde K^* bir hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup ise sayısal ikiye katlama ile $T(K^*) - e(K^*) > T(K) - e(K)$ olacak şekilde hemen hemen bir simetrik sayısal yarıgrup inşa etmek mümkündür [6]. K nın tipi ve gömme boyutu için $b \in \mathbb{Z}^+$ için $T(K) \leq e(K) + b$ eşitsizliği bütün hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup için sağlanmaz.

KAYNAKLAR

- [1] Barucci, V., D'Anna, M., Strazzanti, F. (2015). A family of quotients of the Rees algebra, *Communications in Algebra*. **43** (1) , 130-142.
- [2] Barucci, V., Dobbs, D.E., Fontana, M. (1997). Maximality properties in numerical semigroups and applications to one-dimensional analitically irreducible local domains, *Memoirs of the American Mathematical Society*. **598**.
- [3] Barucci, V., Fröberg, R. (1997). One-dimensional almost Gorenstein rings, *Journal of Algebra*. **188**, 418-442.
- [4] Delgado, M., Garcí'a-Sánchez, P.A., Morais. (2010). *J numericalsgps-a package for numerical semigroups*, GAP Intl.:<http://www.gap-system.org/Packages/numericalsgps.html>, 03/03/2020.
- [5] Fröberg, R., Gottlieb, C., Hågkvist, R. (1987). On numerical semigroups, *Semigroup Forum*. **35**, 63-83.
- [6] Goto, S., Takahashi, R., Taniguchi, N. (2011). Almost Gorenstein rings - towards a theory of higher dimension, *Journal of Pure and Applied Algebra*. **219**.
- [7] Kunz, E. (2015). The value-semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring, *Proceeding of the AMS-Mathematical Society*. 2666-2712. , **25** , 748-751.
- [8] Kleiman, S.L., Martins, V.T. (2009). The canonical model of a singular curve, *Geometriae Dedicata*. **139**, 139-166.
- [9] Nari, H. (2013). Symmetries on almost symmetric numerical semigroups, *Semigroup Forum*. **86**, 140-154.

- [10] Numata, T. (2013). Almost symmetric numerical semigroups generated by four elements, *Proceeding of the Institute of Natural Sciences*, Nihon University. **48**, 197-20.
- [11] Rosales, J.C., Garc'ia-S'anchez, P.A. (2009). Numerical Semigroups, *Springer Developments in Mathematics*. **20**.
- [12] Nari, H. (2013). Symmetries on almost symmetric numerical semigroups, *Semigroup Forum*. **86**(1), 140-154.
- [13] Rosales, J.C, Branco, M.B. (2002). Numerical semigroups that can be expressed as an intersection of symmetric numerical semigroups, *Journal of Pure and Applied Algebra*. **171** no. 2-3, 303.

ÖZ GEÇMİŞ

Ad Soyad: Hüseyin TURAN

EĞİTİM DURUMU

Derece Alan	Üniversite	Mezuniyet
Lisans Matematik Bölümü	İnönü Üniversitesi	2015
Lisans İlköğretim Matematik Ö	Yakındoğu Üniversitesi	2018

YAYINLAR

2018 İksad uluslararası kongresi, .sayısal yarıgrup hakkında bildiri sunuldu katılım belgesi alındı.