



**HEPATİT B VİRÜS MODELİNİN
ATANGANA-BALEANU KESİRLİ TÜREV OPERATÖRÜ İLE ANALİZİ**

Hatice Merve TURAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

AĞRI-2022

Her hakkı saklıdır

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Hatice Merve TURAN

HEPATİT B VİRÜS MODELİNİN ATANGANA-BALEANU KESİRLİ
TÜREV OPERATÖRÜ İLE ANALİZİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

AĞRI - 2022

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ
HEPATİT B VİRÜS MODELİNİN ATANGANA-BALEANU KESİRLİ TÜREV
OPERATÖRÜ İLE ANALİZİ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Jüri: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Doç. Dr. Abdullah ERGÜN

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Bu tezde Hepatit B virüs modeli (Ullah ve dig., 2019) Atangana-Baleanu kesirli türevine (Atangana ve Baleanu, 2016) uygulanarak genişletilmiş modelin çözümü incelenmiştir. Sonrasında Atangana-Baleanu kesirli türev operatörüne (Atangana ve Baleanu, 2016) uygulanan bu modelin varlık çözümü yapılmıştır. Varlık çözümü gerçekleştirildikten sonra teklik çözümlerinin hangi durumlarda sağlandığı Picard'ın teklik teoremleri yardımıyla incelenmiştir. Teorik çözümler tamamladıktan sonra Atangana ve Owolabi (Atangana ve Owolabi, 2018) tarafından Caputo ve Atangana-Baleanu operatörleri için üretilmiş olan nümerik çözümler modele uygulanmıştır. Sayısal çözümler yapılmış ve bu çözümler simülasyonlarla gösterilip, karşılaştırılarak sonuçlar yazılmış ve çalışma sonlandırılmıştır.

2022, 82 sayfa

Anahtar Kelimeler: Atangana-Baleanu operatörü, sabit nokta teoremi, Picard-Lindelöf yaklaşımı, iki aşamalı Adams-Bashforth şeması.

ABSTRACT
MASTER'S THESIS
ANALYSIS OF HEPATITIS B VIRUS MODEL WITH ATANGANA-BALEANU
FRACTIONAL OPERATOR

Advisor of Thesis: Assoc. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Jury: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Assoc. Prof. Dr. Abdullah ERGÜN

Assoc. Prof. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

In this thesis, the solution of the extended model was investigated by applying the hepatitis B virus model (Ullah ve dig., 2019) to the Atangana-Baleanu fractional derivative (Atangana ve Baleanu, 2016). Afterwards, the entity solution of this model applied to the Atangana-Baleanu fractional derivative operator is done. After the existence solution is realized, the situations in which uniqueness solutions are provided are examined with the help of Picard's uniqueness theorems. After completing the theoretical solutions, numerical solutions produced by Atangana and Owolabi (Atangana ve Owolabi, 2018) for Caputo and Atangana-Baleanu operators were applied to the model. Numerical solutions were made and the results were written and finalized by showing and comparing them with simulations.

2022, 82 pages

Key Words: Atangana-Baleanu operator, fixed point theorem, Picard-Lindelöf approach, two-stage Adams-Bashforth scheme.

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitim sürecinde hazırladığım bu çalışmada değerli ve derin bilgileriyle, tecrübesini ve yardımını eksik etmeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Mustafa Ali Dokuyucu' a saygıyla teşekkür ederim. Ayrıca hayatımın her anında sonsuz sevgisi ve desteğiyle hep yanımda olan biricik eşime, varlıkları en büyük hediye olan canım çocuklarıma, hayatımın her döneminde sevgi ve içtenlikle beni destekleyen kıymetli aileme sonsuz teşekkür ederim.

Şubat 2022

Hatice Merve TURAN



İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1. Temel Kavramlar	3
2.1.1. Gama Fonksiyonu.....	5
2.1.2. Beta Fonksiyonu	6
2.1.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu	6
2.1.4. Türev ve İntegral Operatörü	7
2.2. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Türevi ve İntegrali	9
2.2.1. Grünwald-Letnikov Kesirli Türev ve İntegral Operatörü	9
2.2.2. Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegral Operatörü	14
2.2.3. Atangana- Baleanu-Caputo Kesirli Türev ve İntegral Operatörü	23
2.3. Varlık ve Teklik	29
2.3.1. Çözümün Varlığı	29
2.3.2. Çözümün Tekliği.....	30
3. MATERYAL VE YÖNTEM	34
3.1. Atangana-Baleanu Kesirli Türev ve İntegral Operatörü	34
3.2. Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevinin İki Aşamalı Adams-Bashforth Şeması	38
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	43
4.1. SEACHR Modeli	44
4.2. Hepatit B Virüs Modelinin Caputo Anlamındaki Atangana-Baleanu Kesirli Türev Operatörüne Genişletilmesi	45
4.3. SEACHR Modelinin Varlık ve Teklik Çözümleri	46
4.4. Nümerik Çözüm Yöntemi	68
4.4.1. SEACHR Modelinin Nümerik Çözümü	70

5. SONUÇ	79
KAYNAKLAR	80
ÖZGEÇMİŞ	81



ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.1 S fonksiyonunun farklı λ degerleri için simülasyonları	75
4.2 E fonksiyonunun farklı λ degerleri için simülasyonları	76
4.3 A fonksiyonunun farklı λ degerleri için simülasyonları.....	76
4.4 C fonksiyonunun farklı λ degerleri için simülasyonları.....	77
4.5 H fonksiyonunun farklı λ degerleri için simülasyonları.....	77
4.6 R fonksiyonunun farklı λ degerleri için simülasyonları.....	78



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R	: Reel Sayılar
R^+	: Pozitif Reel Sayılar
$\in$	: Elemanıdır
$n!$	: Faktöriyel ($n!=1.2.3...n$)
$\lim$	: Limit
$Re(z)$	: z Karmaşık Sayısının Reel kısmı
$Re(\lambda)$	: λ Karmaşık Sayısının Reel kısmı
Σ	: Toplam Sembolü
Π	: Çarpım Sembolü
$\int$	: İntegral
$\mathcal{L}$	: Laplace
$\binom{\lambda}{r}$	: λ nın r li kombinasyonu
$B.D.P$	: Başlangıç Değer Problemi
$\Gamma(n)$	: Gama Fonksiyonu
$B(z, \lambda)$	: Beta Fonksiyonu
$E_\gamma(p)$	: Tek Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_{(\gamma, \theta)}(p)$	: İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$\sinh$	: Sinüs hiperbolik fonksiyonu
$\cosh$	: Kosinüs hiperbolik fonksiyonu
${}^C D^\lambda f(t)$	: Caputo Kesirli Türevi
$D^{-\lambda} f(t)$	: Kesirli İntegral
${}_a^{CF} \mathfrak{D}_t^\lambda f(t)$	: Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi
${}_0^{AC} \mathfrak{D}_x^{\alpha, \beta} f(t)$	: Atangana Caputo Kesirli Türevi
${}^{ABC} \mathfrak{D}^\lambda f(t)$	: Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli türevi
${}^{ABR} \mathfrak{D}^\lambda f(t)$	: Riemann Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli türevi
${}^{CF} I^\lambda f(t)$	: Caputo-Fabrizio Kesirli integrali
${}_a^{AB} I_t^\lambda f(t)$	: Atangana-Baleanu Kesirli İntegrali

1. GİRİŞ

Türev matematik, fizik, kimya, mühendislik, ekonomi gibi pek çok bilim dalında kullanılmaktadır. Özellikle ısı transferi, viskoelastik, elektrik-devre, elektro-kimya, dinamik, ekonomi, polimer fizik ve kontrolü gibi çalışma alanlarında karşılaşılan problemlerin sayısal çözümlemelerinin somut çıkarımlarında bulunabilmek için kullanılır. Türev genellikle tam sayılı türev olarak ele alınmaktayken tam sayılı türevin genişletilmesiyle kesirli mertebeden türevler de matematik dünyasına girmiştir. Kesirli mertebeden türevin eski bir geçmişi olmakla beraber günümüzde daha yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır (Arslan, 2013). Yakın zamanlarda yapılan çalışmalar neticesinde yaygınlaşan kesirli mertebeden türevler tam sayılı türevlerin cevap vermekte zorlandığı durumlarda araştırmalara kolaylık sağlamaktadır. Kesirli mertebeden türev kavramına ilk defa L'Hospital ve Leibniz arasındaki yazışmalarda rastlanmıştır. Bu yazışmalarda L'Hospital, Leibniz'e tam sayılı türevi nasıl kesirli mertebeden türeve genişletileceğini sormasıyla kesirli ortaya çıkmıştır ve Leibniz'in 30 Eylül 1695 tarihinde bu mektuba cevap vermesiyle kesirli mertebeden türevler hayatımıza girmeye başlamıştır (Miller ve Ross, 1993). Bu durum pek çok matematikçinin ilgisini çekmiştir ve kesirli mertebeden türev ile ilgili çalışmalar yapmaya başlamıştır. Örneğin; Riemann, Liouville, Grünwald, Letnikov, Caputo, Euler, Abel, Fourier, Riesz ve Laplace gibi matematikçiler bu alanla ilgi pek çok çalışma yaparak pek çok tanıma ulaşmışlardır. Yapılan bu çalışmalar adım adım incelenecek olursa: 1730 yılında kesirli basamaktan türev kavramı ile ilgili Euler' in çalışmalar ortaya koymasının ardından P. S. Laplace, integraller yoluyla kesirli türevi 1812 yılında tanımlamış ve sonrasında J. B. J. Fourier keyfi mertebeden türev çalışmalarını 1822 yılında ortaya koymuştur. Abel'in Tautochrane probleminin genelleştirilmesiyle ilgili yazdığı makalesinde ifade ettiği çözümlerde günümüzde kullanılan Riemann-Liouville kesirli integrali ve Caputo kesirli türevi olarak isimlendirilen operatörleri vermiştir. Bu 1823'de yapılan kesirli türevin ilk uygulamasıdır (Podlubny ve dig., 2017).

Caputo (1967) tarafında tanımlanan kesirli türevde çekirdeğin yerel ve tekil olmasıyla ilgili pek çok çalışmalar yapılmıştır. Caputo ve Fabrizio (2015) ise tanımladığı kesirli türevde yerellik sorununu ortadan kaldırmışlardır. Sonrasında Atangana ve Baleanu (2016) bu tanımlı daha da genelleştirerek tekillik sorununu da ortadan kaldırmışlardır. Böylece oldukça kullanılan yerel ve tekil olmayan bir çekirdek elde etmişlerdir.

Yapılan bu çalışmada Atangana ve Baleanu'nun birlikte bulmuş olduğu yerel ve tekil olmamasıyla oldukça kullanışlı olan Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü (Atangana ve Baleanu, 2016) ilgili modele uygulanacaktır.



2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Temel Kavramlar

Leonhard Euler (1730): Aşağıdaki özellik verilsin:

$$\frac{d^p x^k}{dx^p} = k(k-1).(k-2).(k-3)...(k-p+1)x^{k-p}.$$

Bu özellik uygulanarak ve Gama fonksiyonu yardımıyla:

$$\frac{d^p x^k}{dx^p} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-p+1)} x^{k-p},$$

tanımına ulaşır.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1820-1822): Aşağıda yer alan integral eşitliği verilsin:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz) dp,$$

eşitliğini kullanarak:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz + n\frac{\pi}{2}) dp,$$

ifadesine ulaşır.

Nielh Henrik Abel (1823-1826): β herhangi bir değer olmak üzere:

$$\int_0^a \frac{s'(\beta) d\beta}{(a-\beta)^\lambda} = \phi(a),$$

integralini kullanarak:

$$s(a) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d^{-\lambda} \phi(a)}{da^{-\lambda}},$$

tanımına ulaşır.

Joseph Liouville (1832-1855): Seri açılımı yardımıyla bir türev tanımına ulaşır. Seri açılımı $f(x) = \sum_{t=0}^{\infty} c_t a_t e^{a_t x}$ olmak üzere:

$$\frac{d^\lambda f(x)}{dx^\lambda} = \sum_{t=0}^{\infty} c_t a_t^\lambda e^{a_t x},$$

tanımına ulaşır.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1847-1876): İntegral tanımını:

$$D^{-\lambda} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_c^x (x-t)^{\lambda-1} f(t) dt + \phi(t),$$

şeklinde tanımlar.

G.F.B Riemann , J.Liouville: İntegralinde $m \leq \lambda \leq m+1$ olmak üzere:

$${}_a D^\lambda f(t) = \frac{1}{\Gamma(m+1-\lambda)} \left(\frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t \frac{f(\nu) d\nu}{(t-\nu)^{\lambda-m}},$$

türeviyle tanımlar.

Anton Carl Grünwald, Aleksey Vasilievich Letnikov: Kesirli mertebeden türevin temel bir uzantısı olan:

$${}_a D_t^\lambda f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^k \binom{\lambda}{k} f(t - kh),$$

türevini elde ederler.

Michele Caputo (1967): $m \leq \lambda \leq m+1$ şartı altında türev operatörünü:

$${}_a^C D^\lambda f(t) = \frac{1}{\Gamma(m+1-\lambda)} \int_a^t \frac{f^{m+1}(\nu) d\nu}{(t-\nu)^{\lambda-m}},$$

şeklinde tanımlar.

Michele Caputo , Mauro Fabrizio (2015): $\lambda \in [0, 1]$ ve $f \in H^1(a, b)$ 'de $b > a$ şartıyla:

$${}_a\mathfrak{D}^\lambda f(t) = \frac{N(\lambda)}{(1-\lambda)} \int_a^t \dot{f}(\nu) \exp\left[\frac{-\lambda(t-\nu)}{1-\lambda}\right] d\nu,$$

kesirli türevi tanımlamışlardır. Burada $N(\lambda)$ normalleştirme sabiti olup,

$N(0) = N(1) = 1$ 'dir.

Jorge Losada, Juan J. Nieto (2015): $\lambda \in (0, 1)$ olmak üzere, λ . dereceden Caputo-Fabrizio kesirli türevini:

$${}^{CF}D^\lambda * f(t) = \frac{1}{1-\lambda} \int_0^t f'(\nu) \exp\left[\frac{-\lambda}{1-\lambda}(t-\nu)\right] d\nu, \quad t \geq 0$$

şeklinde oluşturmuşlardır.

Abdon Atangana, Dumitru Baleanu (2015): Bu türevde $\lambda \in [0, 1]$ ve $f \in H^1(a, b)$ 'de $b > a$ şartıyla:

$${}^{ABC}_a\mathfrak{D}^\lambda f(t) = \frac{B(\lambda)}{(1-\lambda)} \int_a^t \dot{f}(\nu) E_\lambda\left[\frac{-\lambda(t-\nu)^\lambda}{1-\lambda}\right] d\nu,$$

yukarıdaki denklemde olduğu gibi tanımlanmıştır. Söz konusu denklemde $B(\lambda)$ normalleştirme sabiti olmak üzere, buradaki $\lambda = 0$ ve $\lambda = 1$ değerleri için normalleştirme sabitinin değeri sıfır olmaktadır.

Abdon Atangana, Dumitru Baleanu (2015): $0 < \lambda < 1$ şartı altında kesirli türev operatörü,

$${}^{AB}_a I_t^\lambda \{f(t)\} = \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} f(t) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_a^t f(y)(t-y)^{\lambda-1} dy,$$

ile ifade ederler.

2.1.1. Gama Fonksiyonu

Kesirli mertebeden türev analizinin temelini oluşturan fonksiyonlardanır (Altın, 2011).

Tanım 2.1 Kesirli mertebeden türev analizinde kullanılan ana fonksiyonlardan biridir. Faktöriyel fonksiyonun genel ifadesidir. $\Gamma(n)$ ile sembolize edilir. Aşağıdaki

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad n \in R,$$

denklemleri ile ifade edilir ve $n > 0$ için yakınsaktır.

Gama fonksiyonunun bazı özellikleri şu şekilde ifade edilebilir. $\Gamma(n)$ nin tanım bölgesi $n > 0$ aralığıdır. Gama fonksiyonu $n > 0$ değeri için sürekli. Gama fonksiyonu için verilen integralde, her sonlu pozitif reel sayılar kümesinde ki $[a, b]$ kapalı aralığında düzgün yakınsak olduğunda Gama fonksiyonunun türevi elde edilebilir.

Gama fonksiyonunda, $\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$ 'dir. Buradan $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ eşitliğine ulaşılır ve ayrıca Gama fonksiyonunda $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ şeklindedir (Podlubny, 1998).

2.1.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu, Euler integralinin ilk türüdür. Bazı şartlarda bu fonksiyonun kullanılması daha kullanışlıdır. Beta fonksiyonunun tanımı:

$$B(p, \lambda) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{\lambda-1} dt, \quad Re(p) > 0, Re(\lambda) > 0$$

biçimindedir ve bazı özelliklerini:

- 1) $B(p) = \frac{\Gamma(p)^2}{\Gamma(2p)},$
- 2) $B(p, \lambda) = B(\lambda, p),$
- 3) $B(p, \lambda) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(p+\lambda)},$
- 4) $B(p, \lambda) = \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+\lambda}} dt, \quad Re(p) > 0, Re(\lambda) > 0,$
- 5) $B\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$

biçiminde özetleyebiliriz.

2.1.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonları kesirli diferansiyel denklemlerle yapılan çözümlerde çok yaygın kullanım alanı olan önemli bir fonksiyondur. Üstel fonksiyonun bir genellemesidir. Birinci derecedenden tam sayılı diferansiyel denklemlerin üstel fonksiyonda doğal çözümleri olması gibi Mittag-Leffler fonksiyonları da kesirli dereceden diferansiyel denklemlerin çözümleridir. Bununla beraber bir diferansiyel denklemin derecesi bire yaklaştıkça, Mittag-Leffler fonksiyonu üstel çözüme yakınsar.

Tanım 2.2 Mittag-Leffler fonksiyonunun bir parametrelili genelleştirilmiş şekli:

$$E_{\gamma}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{\Gamma(\gamma k + 1)}, \quad \gamma > 0,$$

olarak ifade edilir.

Bu fonksiyonu ilk olarak Agarwal (1953) ve Humbert Laplace dönüşüm yaparak iki parametrelili fonksiyona genelleştirmiştir. İki parametrelili Mittag-Leffler kesirli dereceden diferansiyel hesaplamalarında kolaylık sağlamaktadır.

Tanım 2.3 İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu :

$$E_{(\gamma, \theta)}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{\Gamma(\gamma k + \theta)}, \quad \gamma > 0, \theta > 0,$$

şeklinde gösterilir.

$\gamma = 1, \theta = 1, 2$ değerleri olsun:

$$\begin{aligned} E_{(1,1)}(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} = e^p, \\ E_{(1,2)}(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{(k+1)!} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k+1)}}{(k+1)!} = \frac{e^p - 1}{p}, \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz (Kilbas ve dig., 2006, Hristov, 2015a).

2.1.4. Türev ve İntegral Operatörü

$y = f(t)$ sürekli bir fonksiyondur. Buna göre $y = f(t)$ 'nin birinci mertebeden türevi:

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}, \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır. $y = f(t)$ 'nin ikinci mertebeden türevi:

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

gibi elde edilir. Bunun gibi üçüncü mertebeden türev ise:

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}, \quad (2.3)$$

olarak elde edilir. Bu denklemler genelleştirilirse:

$$f^n(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh), \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilir.

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r!}, \quad (2.5)$$

(2.2) - (2.5) denklem sistemleriyle bu iki denklemi genelleştiren bir denklem ifade edilirse:

$$f_h^{(\lambda)}(t) = \frac{1}{h^\lambda} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\lambda}{r} f(t-rh), \quad (2.6)$$

denklemine ulaşılır.

λ herhangi bir tam sayı ve n 'de bir tam sayı olmak üzere, $\lambda \leq n$ için:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(\lambda)}(t) = f^{(\lambda)}(t) = \frac{d^\lambda f}{dt^\lambda}, \quad (2.7)$$

ifade edilebilir. Çünkü bu ifadede (2.5) denkleminde $\binom{\lambda}{\lambda}$ dan sonra paydaki tüm katsayılar 0 (sıfır)'dır.

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ r \end{bmatrix} = \frac{\lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+r-1)}{r!}, \quad (2.8)$$

λ negatif değerlerde kolaylık sağlaması için:

$$\begin{bmatrix} -\lambda \\ r \end{bmatrix} = \frac{-\lambda(-\lambda+1) \dots (-\lambda+r-1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} \lambda \\ r \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

ifade edilebilir. (2.6) denkleminde λ ifadesine, $-\lambda$ getirilirse:

$$f_h^{(-\lambda)}(t) = \frac{1}{h^{-\lambda}} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} \lambda \\ r \end{bmatrix} f(t-rh), \quad (2.10)$$

ulaşılır. λ pozitif bir tamsayı olmak üzere: Eğer n sabitse, $h \rightarrow 0$ giderken, $f_h^{(-\lambda)}(t)$ limit 0'a yakınsar. 0 (sıfır) olmayan bir sınır olması için $n \rightarrow \infty$ ve $h \rightarrow 0$ olduğu düşünülürse; $h = \frac{t-a}{n}$ olarak ifade edilebilir. Burada değeri a sabit ve $f_h^{(-\lambda)}(t)$ sınır değeri sonlu veya sonsuz düşünülürse:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-\lambda)}(t) = {}_a D_t^{(-\lambda)}(t)$$

olarak ifade edilebilir. a ve t sınır olmakla beraber ${}_a D_t^{(-\lambda)}(t)$ ifadesi, t fonksiyonu üzerindeki integral işlemini ifade eder (Podlubny, 1999).

2.2. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Türevi ve İntegrali

Gerçek hayat problemlerinin matematiksel çözümü yapılırken diferansiyel denklemleri çokça kullanılır. Zaman içerisinde tam sayılı mertebeden diferansiyel denklemlerinin yetemediği yerlerde çözümü kolaylaştıracak kesirli mertebeden diferansiyel denklemler üretilmiştir. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, tam sayılı mertebeden diferansiyel denklemlerin çözmekte zorlandığı pek çok durumda kolaylık sağlamaktadır.

2.2.1. Grünwald-Letnikov Kesirli Türev ve İntegral Operatörü

$${}_a D_t^\lambda f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\lambda} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\lambda}{r} f(t - rh), \quad (2.11)$$

(2.11) denkleminde $\lambda = a$ ise a . dereceden türevi ve $\lambda = -a$ ise a -katlı integrali ifade eder (Podlubny, 1999). $\lambda < 0$ incelensin, (2.11) denkleminde λ yerine $-\lambda$ yazılırsa:

$${}_a D_t^{-\lambda} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^\lambda \sum_{r=0}^n (-1)^r \begin{bmatrix} \lambda \\ r \end{bmatrix} f(t - rh), \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. Aşağıdaki teorem (2.12) denkleminin varlığını ispatlayıp, sınırını incelemek için ifade edilir (Letnikov, 1868).

Teorem 2.1 α_k olsun ve k değerleri için ($k = 1, 2, \dots$):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 1, \quad (2.13)$$

varsayılın.

$$\text{Bütün } k \text{ değerleri için } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,k} = 0,$$

$$\text{Bütün } k \text{ değerleri için } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} = A,$$

$$\text{Bütün } n \text{ değerleri için } \sum_{k=1}^n |\lambda_{n,k}| < K,$$

olur. Buradan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} \alpha_k = A, \quad (2.14)$$

dır.

Grünwald-Letnikov keyfi mertebeden integrali inceledikten sonra şimdi de türevi incelensin. $\lambda > 0$ kabul edilsin. Limit de göz önünde bulundurularak:

$${}_a D_t^\lambda f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\lambda} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\lambda}{r} f(t - rh) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(\lambda)}(t), \quad (2.15)$$

ifade edilebilir (Podlubny, 1999).

$$f_h^{(\lambda)}(t) = h^{-\lambda} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\lambda}{r} f(t - rh), \quad (2.16)$$

(2.16) denkleminde:

$$\binom{\lambda}{r} = \binom{\lambda-1}{r} + \binom{\lambda-1}{r-1}, \quad (2.17)$$

kombinasyon özelliği ile $f_h^{(\lambda)}(t)$ ifadesi dönüştürülürse:

$$\begin{aligned} f_h^{(\lambda)}(t) &= h^{-\lambda} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\lambda-1}{r} f(t - rh) \\ &\quad + h^{-\lambda} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\lambda-1}{r-1} f(t - rh) \\ &= h^{-\lambda} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\lambda-1}{r} f(t - rh) \\ &\quad + h^{-\lambda} \sum_{r=-1}^{n-1} (-1)^{r+1} \binom{\lambda-1}{r} f(t - (r+1)h) \\ &= (-1)^n \binom{\lambda-1}{n} h^{-\lambda} f(a) \\ &\quad + h^{-\lambda} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{\lambda-1}{r} \Delta f(t - rh), \end{aligned} \quad (2.18)$$

bulunur. Bu ifadede,

$$\Delta f(t - rh) = f(t - rh) - f(t - (r+1)h)$$

dır. $\Delta f(t - rh)$ ifadesi $\nu = t - rh$ için $f(\nu)$ ya eşittir. (2.17) denklemindeki kombinasyon özelliği (2.18) deki denkleme m kez uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
f_h^{(\lambda)}(t) &= (-1)^n \binom{\lambda-1}{n} h^{-\lambda} f(a) + (-1)^{n-1} \binom{\lambda-2}{n-1} h^{-\lambda} \Delta f(a+h) \\
&\quad + h^{-\lambda} \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{\lambda-2}{r} \Delta^2 f(t-rh) \\
&= (-1)^n \binom{\lambda-1}{n} h^{-\lambda} f(a) + (-1)^{n-1} \binom{\lambda-2}{n-1} h^{-\lambda} \Delta f(a+h) \\
&\quad + (-1)^{n-2} \binom{\lambda-3}{n-2} h^{-\lambda} \Delta^2 f(a+2h) \\
&\quad + h^{-\lambda} \sum_{r=0}^{n-3} (-1)^r \binom{\lambda-3}{r} \Delta^3 f(t-rh) \\
&= \dots \\
&= \sum_{r=0}^m (-1)^{n-k} \binom{\lambda-k-1}{n-k} h^{-\lambda} \Delta^k f(a+kh) \\
&\quad + h^{-\lambda} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{\lambda-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

bulunur. (2.19) denkleminde ilk k . terim incelenirse:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} (-1)^{n-k} \binom{\lambda-k-1}{n-k} h^{-\lambda} \Delta^k f(a+kh) \\
&= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} (-1)^{n-k} \binom{\lambda-k-1}{n-k} (n-k)^{\lambda-k} \\
&\quad \times \left(\frac{n}{n-k}\right)^{\lambda-k} (nh)^{-\lambda+k} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&= (t-a)^{-\lambda+k} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-k} \binom{\lambda-k-1}{n-k} (n-k)^{\lambda-k} \\
&\quad \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{\lambda-k} \times \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&= \frac{f^k(a)(t-a)^{-\lambda+k}}{\Gamma(-\lambda+k+1)}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

olur. Gama fonksiyon özelliği yardımıyla:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-k} \binom{\lambda - k - 1}{n - k} (n - k)^{\lambda - k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-\lambda + k + 1)(-\lambda + k + 2) \dots (-\lambda + n)}{(n - k)^{-\lambda + k} (n - k)!} = \frac{1}{\Gamma(-\lambda + k + 1)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n - k} \right)^{\lambda - k} = 1, \\ & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a + kh)}{h^k} = f^k(a) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.20) denklemindeki limit bilinirse (2.19) eşitliğindeki limit yazılabilir. (2.19) denkleminde ikinci limit alınırsa:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(-\lambda + m + 1)} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \Gamma(-\lambda + m + 1) \binom{\lambda - m - 1}{r} r^{-m+\lambda} \\ & \times h(rh)^{m-\lambda} \frac{\Delta^{m+1} f(t - rh)}{h^{m+1}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

yazılabilir. Gama fonksiyonunun özelliği ile:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (-1)^r \Gamma(-\lambda + m + 1) \binom{\lambda - m - 1}{r} r^{-m+\lambda} = 1, \quad (2.22)$$

elde edilir.

$m - \lambda > -1$, ise:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-m-1} \lambda_{n,r} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^{n-m-1} h(rh)^{m-\lambda} \frac{\Delta^{m+1} f(t - rh)}{h^{m+1}} \\ &= \int_a^t (t - \nu)^{m-\lambda} f^{(m+1)}(\nu) d\nu. \end{aligned} \quad (2.23)$$

yazılır. (2.19) ve (2.20) denklemleri ele alınarak teorem (2.1) teoremine uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\lambda} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{\lambda - m - 1}{r} \Delta^{m+1} f(t - rh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\lambda + m + 1)} \int_a^t (t - \nu)^{m-\lambda} f^{(m+1)}(\nu) d\nu \end{aligned} \quad (2.24)$$

olur. (2.19) ve (2.24) denklemleriyle (2.15)'in limiti elde edilir. Buradan:

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\lambda &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(\lambda)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\lambda+k}}{\Gamma(-\lambda+k+1)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(-\lambda+m+1)} \int_a^t (t-\nu)^{m-\lambda} f^{(m+1)}(\nu) d\nu
\end{aligned} \tag{2.25}$$

yazılır. (2.25) ifadesi $f^{(k)}(t)$, $(k = 1, 2, \dots, p+1)$ türevleri olduğu varsayımıyla $[a, t]$ aralığında sürekli ve p , $p > \lambda - 1$ koşulunu sağlayan tamsayıdır. p 'nin en küçük değeri ise

$$p < \lambda < p+1$$

eşitsizliği ile belirlenir.

2.2.2. Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegral Operatörü

Bu tanım Cauchy formülünden yararlanılarak oluşturulmuştur. (2.25) denklemini Grünwald-Letnikov kesirli türevi olarak ifade etmek mümkün değildir. Bu denklemi diferansiyelin özel bir integrali olarak düşünebiliriz.

$${}_a D_t^\lambda f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t (t-\nu)^{m-\lambda} f(\nu) d\nu, \quad (m \leq \lambda \leq m+1). \tag{2.26}$$

(2.26) ifadesi, kesirli türevin Riemann-Liouville tanımıdır (Podlubny, 1999). Riemann-Liouville tanımı kesirli türevde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Grünwald-Letnikov kesirli türevini bulmak için $f(t)$ fonksiyonunun farklılaşabilmesi için $m+1$ kez türevini almak varsayımıyla oluşturulan (2.25) ifadesine çok kere türev ve integral alınarak (2.26) elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\lambda &= \left(\frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t (t-\nu)^{m-\lambda} f(\nu) d\nu \\
&= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\lambda+k}}{\Gamma(-\lambda+k+1)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(-\lambda+m+1)} \int_a^t (t-\nu)^{m-\lambda} f^{(m+1)}(\nu) d\nu \\
&= {}_a D_t^\lambda f(t), \quad (m \leq \lambda \leq m+1).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

(2.25) Grünwald-Letnikov ifadesi (2.26) Riemann-Liouville ifadesine denktir. Riemann-Liouville ifadesinin nasıl oluştuğu incelenecek olursa, tam sayılı türev ve integral kavramlarının birleşmesiyle ulaşılmaktadır (Podlubny, 1999). O zaman tam sayılı türev ve integralerin birleştirilmesi ayrıntılarıyla incelensin.

$f(\nu)$ sürekli fonksiyondur ve her sonlu kapalı aralık (a, t) değeri olsun, $f(t)$ fonksiyonunun $r < 1$ değerinde $\nu = a$ ya bir tekiliği olabilir. Böylelikle:

$$\lim_{\nu \rightarrow a} (\nu - a)^r f(t) = \text{const} (\neq 0) \tag{2.28}$$

olarak ifade edilebilir. Ardından integral

$$f^{-1}(t) = \int_a^t f(\nu) d\nu \tag{2.29}$$

mevcuttur ve $t \rightarrow a$ değeri için sıfıra eşittir. O halde sonlu değeri mevcuttur. $\nu = a + y(t-a)$ ve $\epsilon = t - a$ kabul edilirse:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow a} f^{(-1)}(t) &= \lim_{t \rightarrow a} \int_a^t f(\nu) d\nu \\
&= \lim_{t \rightarrow a} (t-a) \int_0^1 f(a + y(t-a)) dy \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1-r} \int_0^1 (\epsilon y)^r f(a + y\epsilon) y^{-r} dy = 0,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

elde edilebilir. Çünkü $r < 1$ dir. Bu nedenle iki katlı integral yazılabilir.

$$\begin{aligned}
f^{-2}(t) &= \int_a^t d\nu_1 \int_a^{\nu_1} f(\nu) d\nu = \int_a^t f(\nu) d\nu \int_\nu^t d\nu_1 \\
&= \int_a^t (t - \nu) f(\nu) d\nu.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Yukarıdaki denklem $f(\nu)$ fonksiyonunun iki katlı integralini gösterir:

$$\begin{aligned}
f^{-3}(t) &= \int_a^t d\nu_1 \int_a^{\nu_1} d\nu_2 \int_a^{\nu_2} f(\nu_3) d\nu_3 \\
&= \int_a^t d\nu_1 \int_a^{\nu_1} (\nu_1 - \nu) f(\nu) d\nu \\
&= \frac{1}{2} \int_a^t (t - \nu)^2 f(\nu) d\nu.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Genel durumdaki tümevarım metoduyla Cauchy formülü:

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t - \nu)^{n-1} f(\nu) d\nu \tag{2.33}$$

vardır. O zaman $n \geq 1$ sabit olmak üzere $k \geq 0$ tam sayı seçilirse:

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^t (t - \nu)^{n-1} f(\nu) d\nu \tag{2.34}$$

olur. Burada D^{-k} ifadesi ($k \geq 0$) olmak şartıyla k tekrarlanan integralleri ifade eder.

Başka bir ifade ile sabit bir $n \geq 1$ ve $k \geq n$ olmak üzere $f(t)$ 'nin $(k - n)$. dereceden türevini şöyle ifade edebiliriz:

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t - \nu)^{n-1} f(\nu) d\nu. \tag{2.35}$$

Burada D^k ($k \geq 0$), k tekrarlı türevleri ifade eder (Podlubny, 1999).

Şimdi Riemann-Liouville integrali incelensin. Herhangi katlı integral kavramını kesirli değerlere genişletmek için Cauchy integral formülü (2.33) ile başlanırken ifadede ki n tamsayısı gerçek bir $\lambda > 0$ sayısı ile değiştirilsin:

$${}_a D_t^{-\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^t (t - \nu)^{\lambda-1} f(\nu) d\nu \tag{2.36}$$

(2.33) denkleminde n tamsayı olmak üzere $n \geq 1$ koşulu sağlanmalıdır; λ için karşılaşılan dezavantaj (2.36) denklemindeki integralin var olabilmesi için $\lambda > 0$ olmasıdır. Ayrıca:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} D_t^{-\lambda} f(t) = f(t), \quad (2.37)$$

dır. Burada $\lambda = 0$ olarak yazılırsa:

$${}_a D_t^0 f(t) = f(t) \quad (2.38)$$

ulaşılır. $f(t)$ $t \leq 0$ 'ın sürekli türevleri varsa, (2.37) eşitliğindeki ilişkinin ispatı için parçalarla çözüm yapılmakla beraber Gama özelliği yardımıyla:

$${}_a D_t^{-\lambda} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} + \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_a^t (t-\nu)^\lambda f'(\nu) d\nu,$$

ulaşılır ve

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} D_t^{-\lambda} f(t) = f(a) + \int_a^t f'(\nu) d\nu = f(a) + (f(t) - f(a)) = f(t)$$

ifade edilir. $f(t)$ yalnızca $t \geq a$ için sürekli ise, (2.37) ispatı için ifadeye ${}_a D_t^{(-\lambda)} f(t)$ yazılırsa:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{(-\lambda)} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^t (t-\nu)^{\lambda-1} (f(\nu) - f(t)) d\nu \\ &\quad + \frac{f(t)}{\Gamma(\lambda)} \int_a^t (t-\nu)^{\lambda-1} d\nu \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^{t-\delta} (t-\nu)^{\lambda-1} (f(\nu) - f(t)) d\nu \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{t-\delta}^t (t-\nu)^{\lambda-1} (f(\nu) - f(t)) d\nu \\ &\quad + \frac{f(t)(t-a)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \end{aligned} \quad (2.39)$$

olur. Yukarıdaki integralin ikinci kısmı incelenirse $f(t)$ sürekli fonksiyon olduğundan, her $\epsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır.

$$|f(\nu) - f(t)| < \epsilon.$$

O zaman (2.39)'daki integralin ikinci bölümü ile ilgili aşağıdaki çıkarımlarda bulunabiliriz:

$$|I_2| < \frac{\epsilon}{\Gamma(\lambda)} \int_{t-\delta}^t (t-\nu)^{\lambda-1} d\nu < \frac{\epsilon \delta^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad (2.40)$$

ve $\epsilon \rightarrow 0$ ' a ve $\delta \rightarrow 0$ ' ı göz önünde bulundurularak tüm $\lambda \geq 0$ için

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |I_2| = 0. \quad (2.41)$$

olur. $\epsilon > 0$ alınsın ve δ seçilsin:

$$|I_2| < \epsilon \quad (2.42)$$

tüm $\lambda \geq 0$ ve δ sabiti için (2.39)'daki integralin ilk tahmini olan:

$$|I_1| \leq \frac{M}{\Gamma(\lambda)} \int_a^{t-\delta} (t-\nu)^{\lambda-1} d\nu \leq \frac{M}{\Gamma(\lambda+1)} (\delta^\lambda - (t-a)^\lambda), \quad (2.43)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Sonrasında sabit $\delta > 0$ için:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} |I_1| = 0 \quad (2.44)$$

olur.

$$\left| {}_a D_t^{(-\lambda)} f(t) - f(t) \right| \leq |I_1| + |I_2| + |f(t)| \times \left| \frac{(t-a)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} - 1 \right|$$

Yukarıdaki limitler ve tahmin göz önüne alınarak:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sup \left| {}_a D_t^{(-\lambda)} f(t) - f(t) \right| \leq \epsilon$$

olabilir. Burada ϵ istenildiği kadar küçük seçilebilir. Bu sebeple:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sup |{}_a D_t^{(-\lambda)} f(t) - f(t)| = 0,$$

ifade edilebilir ve (2.37) eşitliğinde $t \geq a$ değeri için $f(t)$ olur. $f(t)$ $t \geq a$ için sürekli fonksiyonsa (2.36) ile tanımlanan rastgele integral aşağıdaki önemli özelliğe sahiptir:

$$D_t^{-\lambda} (D_t^{-q} f(t)) = D_t^{-\lambda-q} f(t). \quad (2.45)$$

Gerçekten de:

$$\begin{aligned} D_t^{-\lambda} (D_t^{-q} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-\nu)^{q-1} D_\nu^{-\lambda} d\nu \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(q)} \int_a^t (t-\nu)^{q-1} d\nu \int_a^\nu (\nu-\xi)^{\lambda-1} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(q)} \int_a^t f(\xi) d\xi \int_\xi^t (t-\nu)^{q-1} (\nu-\xi)^{\lambda-1} d\nu \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda+q)} \int_a^t (t-\xi)^{\lambda+q-1} f(\xi) d\xi \\ &= D_t^{-\lambda-q} f(t). \end{aligned} \quad (2.46)$$

dır. Açıkçası, λ ve q yer değiştirebilir. Buradan:

$$D_t^{-\lambda} (D_t^{-q} f(t)) = D_t^{-q} (D_t^{-\lambda} f(t)) = D_t^{-\lambda-q} f(t). \quad (2.47)$$

ifade edilebilir. Burada denklemin (2.47)'nin tamsayı sıralı türevlerinin iyi bilinen :

$$\frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{d^m f(t)}{dt^m} \right) = \frac{d^{m+n} f(t)}{dt^{m+n}} \quad (2.48)$$

özellğine benzer olduğu görülebilir. Şimdi de Riemann-Liouville keyfi mertebeden türevi incelensin. (2.35) denklemi, $k - n$ kesirli mertebeden türev imkanı verir. Yani k tamsayısı olduğu gibi bırakılıp n tamsayısı gerçek bir λ 'yla değiştirilebilir, bu durumda $k - \lambda > 0$ olur. Bu durum:

$${}_a D_t^{k-\lambda} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\nu)^{\lambda-1} f(\nu) d\nu, \quad (0 < \lambda \leq 1). \quad (2.49)$$

sonucundadır.

Yukarıdaki ifadenin yakınsaması için ihtiyaç olan tek önemli kısıtlama $\lambda > 0$ olmasıdır. Buradan hareketle bu kısıtlama genellik kaybı olmadan sağlanabilir, bu durum (2.49)'daki integrallerin tanımı ve (2.47) ifadesiyle beraber kolaylıkla gösterilebilir. (2.49) eşitliğinde $\lambda = k - \lambda$ alınırsa:

$${}_a D_t^\lambda f(t) = \frac{1}{\Gamma(k - \lambda)} \frac{d^k}{dt^k} \int_{(a)}^t (t - \nu)^{k-\lambda-1} f(\nu) d\nu, \quad (k - 1 \leq \lambda < k) \quad (2.50)$$

olur ya da

$${}_a D_t^\lambda f(t) = \frac{d^k}{dt^k} ({}_a D_t^{-(k-\lambda)} f(t)), \quad (k - 1 \leq \lambda < k) \quad (2.51)$$

bulunabilir. $\lambda = k - 1$ ise, $k - 1$ mertebesinin genel bir tamsayı derecesinden türev bulunur.

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\lambda f(t) &= \frac{d^k}{dt^k} ({}_a D_t^{-(k-(k-1))} f(t)) \\ &= \frac{d^k}{dt^k} ({}_a D_t^{-1} f(t)) = f^{(k-1)}(t) \end{aligned} \quad (2.52)$$

$\lambda = k \geq 1$ ve $t > a$ için

$${}_a D_t^\lambda f(t) = \frac{d^k}{dt^k} ({}_a D_t^0 f(t)) = \frac{d^k f(t)}{dt^k} = f^{(k)}(t), \quad (2.53)$$

dır. Yani $t > a$ olursa (2.51)'deki Riemann-Liouville kesirli türevi $\lambda = k > 1$ derecesindeki k mertebesinin türevi ile çıkarır. Şimdi Riemann Liouville türevinin bazı özellikleri düşünülürse Riemann Liouville kesirli türevinin ilk özelliği $\lambda > 0$ ve $t > a$ olsun:

$${}_a D_t^\lambda ({}_a D_t^{-\lambda} f(t)) = f(t) \quad (2.54)$$

bulunmasıdır.

Bu durum Riemann Liouville kesirli integralinin, kesirli türevinin tersi olduğu anlamındadır.

Yukarıdaki özelliği ispatlamak için $\lambda = n \geq 1$ tamsayı örneği incelensin:

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^n ({}_a D_t^{-n} f(t)) &= \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\nu)^{n-1} f(\nu) d\nu \\
&= \frac{d}{dt} \int_a^t f(\nu) d\nu = f(t).
\end{aligned} \tag{2.55}$$

olur.

O zaman $k-1 \leq \lambda < k$ alınarak ve (2.47)'deki Riemann Liouville kesirli integralleri için kombinasyon kuralından hareketle:

$${}_a D_t^{-k} f(t) = {}_a D_t^{-k-\lambda} ({}_a D_t^\lambda f(t)), \tag{2.56}$$

olur. Buradan:

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\lambda ({}_a D_t^{-k} f(t)) &= \frac{d^k}{dt^k} \{ {}_a D_t^{-(k-\lambda)} ({}_a D_t^{-\lambda} f(t)) \} \\
&= \frac{d^k}{dt^k} \{ {}_a D_t^{-k} f(t) \} = f(t).
\end{aligned} \tag{2.57}$$

(2.56)'daki denklemin ispatını sonlandıran denklem bulunur. Tamsayı sıralı integral ve türevde olduğu gibi, kesirli integral ve türevde hesaplanamaz. Eğer kesirli türev ${}_a D_t^\lambda f(t)$, $(k-1 \leq \lambda < k)$, $f(t)$ fonksiyonunun türeviyle bütünleştirilebilirse:

$${}_a D_t^\lambda ({}_a D_t^{-\lambda} f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{\lambda-j}]_{t=a} \frac{(t-a)^{\lambda-j}}{\Gamma(\lambda-j+1)} \tag{2.58}$$

olur. O halde:

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^{-\lambda} ({}_a D_t^\lambda f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^t (t-\nu)^{\lambda-1} ({}_a D_\nu^\lambda f(\nu)) d\nu \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_a^t (t-\nu)^\lambda ({}_a D_\nu^\lambda f(\nu)) d\nu \right\}.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

dır.

O zaman (2.58) denklemindeki özellik uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_a^t (t-\nu)^\lambda ({}_a D_\nu^\lambda f(\nu)) d\nu \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_a^t (t-\nu)^\lambda \frac{d^k}{d\nu^k} ({}_a D_\nu^{-(k-\lambda)} f(\nu)) d\nu \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda-k+1)} \int_a^t (t-\nu)^{\lambda-k} ({}_a D_\nu^{-(k-\lambda)} f(\nu)) d\nu \\
&\quad - \sum_{j=1}^k \left[\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} {}_a D_t^{-(k-\lambda)} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\lambda-j+1}}{\Gamma(2+\lambda-j)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda-k+1)} \int_a^t (t-\nu)^{\lambda-k} ({}_a D_\nu^{-(k-\lambda)} f(\nu)) d\nu \\
&\quad - \sum_{j=1}^k \left[{}_a D_t^{\lambda-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\lambda-j+1}}{\Gamma(2+\lambda-j)} \\
&= {}_a D_t^{-(\lambda-k+1)} ({}_a D_t^{-(k-\lambda)} f(t)) \\
&\quad - \sum_{j=1}^k \left[{}_a D_t^{\lambda-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\lambda-j+1}}{\Gamma(2+\lambda-j)} \\
&= {}_a D_t^{-1} f(t) - \sum_{j=1}^k \left[{}_a D_t^{\lambda-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\lambda-j+1}}{\Gamma(2+\lambda-j)}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

bulunur. (2.60) 'daki tüm terimlerin varlığı, ${}_a D_t^\lambda f(t)$ nin bütünlüğünden kaynaklanmaktadır.

Çünkü bu koşul sebebiyle ${}_a D_t^{\lambda-j} f(t)$, $(j = 1, 2, \dots, k)$ 'ın tamamı $t = a$ ile sınırlıdır.

(2.60) ve (2.61) denklemleri birlikte düşünüldüğünde (2.60) denklemindeki ilişkinin ispatı sonlanmaktadır. $0 < \lambda < 1$ ise:

$${}_a D_t^{-\lambda} ({}_a D_t^\lambda f(t)) = f(t) - [{}_a D_t^{\lambda-1}]_{t=a} \frac{(t-a)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \tag{2.61}$$

burada özel bir durum söz konusu olmalıdır. (2.54) denklemi daha genel (2.62) denkleminin özel bir halidir.

$${}_a D_t^\lambda ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{\lambda-q} f(t), \tag{2.62}$$

$\lambda \geq q \geq 0$ ise $f(t)$ 'nin sürekli fonksiyon olduğunu ve ${}_a D_t^{\lambda-q} f(t)$ türevinin varlığı farzedilir.

İki ihtimalde de $q \geq \lambda \geq 0$ ve $\lambda > q \geq 0$ göz önüne alınmalıdır. (2.54) ve (2.62) özellikleriyle $q \geq \lambda \geq 0$ ise

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\lambda ({}_a D_t^{-q} f(t)) &= {}_a D_t^\lambda ({}_a D_t^{-\lambda} {}_a D_t^{-(q-\lambda)} f(t)) \\
&= {}_a D_t^{-(q-\lambda)} f(t) = {}_a D_t^{\lambda-q} f(t)
\end{aligned} \tag{2.63}$$

olur. Şimdi $\lambda > q \geq 0$ ve m, n tam sayılarıyla $0 \leq m-1 \leq \lambda < m$ ve $0 \leq n \leq \lambda$ $q < n$ örneği ele alınırsa $n \leq m$. Ardından tanım (2.50) ve (2.62) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\lambda ({}_a D_t^{-q} f(t)) &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_a D_t^{-(m-\lambda)} \left({}_a D_t^{-q} f(t) \right) \right\} \\
&= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_a D_t^{\lambda-q-m} f(t) \right\} \\
&= \frac{d^n}{dt^n} \left\{ {}_a D_t^{\lambda-q-n} f(t) \right\} = {}_a D_t^{\lambda-q} f(t).
\end{aligned} \tag{2.64}$$

olur. Yukarıda (2.58)'de gösterilen özellik daha özel bir haldir.

$${}_a D_t^{-\lambda} ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{q-\lambda} f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\lambda-j}}{\Gamma(\lambda-j+1)} \tag{2.65}$$

(2.65) ifadesini ispatlamak için eğer $q \leq \lambda$ ise önce (2.62)'deki özellik veya eğer $q \geq \lambda$ ise (2.64) deki özellik sonrada (2.58)'deki özellik kullanılır.

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^{-\lambda} ({}_a D_t^q f(t)) &= {}_a D_t^{q-\lambda} \left\{ {}_a D_t^{-q} \left({}_a D_t^q f(t) \right) \right\} \\
&= {}_a D_t^{q-\lambda} \left\{ f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\lambda-j}}{\Gamma(\lambda-j+1)} \right\} \\
&= {}_a D_t^{q-\lambda} f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\lambda-j}}{\Gamma(\lambda-j+1)}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

ifadesine ulaşılır (Podlubny, 1998).

2.2.3. Atangana- Baleanu-Caputo Kesirli Türev ve İntegral Operatörü

Riemann-Liouville kesirli türev ve integral tanımı kesirli türev ve integral teorisinde önemli bir yere sahiptir (Podlubny, 1999). Bununla beraber uygulama problemleri, çözülebilmek için başlangıç koşulları fiziksel yorumlamaya uygun olan operatörlere ihtiyaç duyar. Bu noktada Riemaan-Liouville kesirli türev operatörü yetersiz kalır. Çünkü bu operatör

matematiksel olarak çözülsede sonuçları kullanışlı değildir (Sökmen, 2012). Kesirli diferansiyel teorisinde fiziksel yorumlamaya en uygun olanı Caputo kesirli türev operatörüdür (Kilbas ve dig., 2006). Çünkü bu operatörde sabit bir sayının türevi sıfırdır. Sabit bir sayının türevinin sıfır olması bu problemin fiziksel yorumunun yapılabilmesini sağlar. Ayrıca Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümünde türevlerin limitleri bilinmez, bu durum türevin fiziksel durumlara uygulanmasını sınırlı kılar ancak Caputo türevinin Laplace dönüşümünde türevlerin değerleri olması sebebiyle durum tam tersi olmakla beraber fiziksel problemlere kolaylıkla uygulanabilir.

Tanım 2.4 *Caputo türevi:*

$${}_a^C D_t^\lambda f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \lambda)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\nu) d\nu}{(t - \nu)^{\lambda - n + 1}},$$

olarak ifade edilir. Eğer Caputo anlamında ki kesirli türev tanımında λ değeri $0 < \lambda < 1$ arasında bir değer olursa:

$${}_a^C D_t^\lambda f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \lambda)} \int_a^t \frac{f'(\nu) d\nu}{(t - \nu)^\lambda}, \quad (2.67)$$

şeklinde olup hem yerel (noktasal) hem de tekildir (belli bir noktada $t=\nu$ için çözüm sonsuza gider). Bu durumu yok etmek için $(t - \nu)^{-\lambda}$ çekirdeği yerine $e^{\frac{-\lambda(t - \nu)}{1 - \lambda}}$ çekirdeği kullanılır. Böylelikle Caputo-Fabrizio kesirli türevine ulaşılır.

Tanım 2.5 *Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü, $\lambda \in [0, 1]$ ve $f \in H^1(a, b)$ 'de $b > a$ şartıyla:*

$${}_a^{CF} \mathfrak{D}_t^\lambda f(t) = \frac{N(\lambda)}{(1 - \lambda)} \int_a^t \dot{f}(\nu) \exp\left[\frac{-\lambda(t - \nu)}{1 - \lambda}\right] d\nu, \quad (2.68)$$

olarak ifade edilir. Burada $N(\lambda)$ normalleştirme sabiti olmak üzere, $N(0) = N(1) = 1$ dir.

Tanım 2.6 *Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörü, $0 < \lambda < 1$ olmak üzere;*

$${}_a^{CF} I^\lambda f(t) = \frac{2(1 - \lambda)}{(2 - \lambda)N(\lambda)} u(t) + \frac{2\lambda}{(2 - \lambda)N(\lambda)} \int_0^t u(s) ds, \quad t \geq 0, \quad (2.69)$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.7 Caputo-Fabrizio operatörünün Laplace açılımı:

$$\mathfrak{L}\{\mathfrak{D}_t^\lambda f(t)\} = \frac{1}{1-\lambda} \int_0^\infty \exp - st \int_0^t f'(\nu) \exp - \frac{\lambda(t-\nu)}{1-\lambda} d\nu dt,$$

olup ters Laplace tanımından;

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{\mathfrak{D}_t^\lambda f(t)\} &= \frac{1}{1-\lambda} \mathfrak{L}\{f'(t)\} \mathfrak{L}\{\exp - \frac{\lambda t}{1-\lambda}\} = \frac{s \mathfrak{L}\{f(t) - f(0)\}}{s + \lambda(1-s)} \\ \mathfrak{L}\{\mathfrak{D}_t^{\lambda+1} f(t)\} &= \frac{1}{1-\lambda} \mathfrak{L}\{f''(t)\} \mathfrak{L}\{\exp - \frac{\lambda t}{1-\lambda}\} = \frac{(s^2 \mathfrak{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0))}{s + \lambda(1-s)}, \end{aligned}$$

bulunur. Genelleştirilmiş Laplace açılımı ise:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{\mathfrak{D}_t^{\lambda+n} f(t)\} &= \frac{1}{1-\lambda} \mathfrak{L}\{f^{n+1}(t)\} \mathfrak{L}\{\exp - \frac{\lambda t}{1-\lambda}\} = \\ &= \frac{(s^{n+1} \mathfrak{L}\{f(t)\} - s^n f(0) - s^{n-1} f'(0) \dots f^n(0))}{s + \lambda(1-s)}, \end{aligned}$$

olarak gösterilir.

Tanım 2.8 Mittag-Leffler fonksiyonu:

$$E_{(\gamma,\theta)}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\gamma k + \theta)}, \quad \gamma > 0, \theta > 0,$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.9 Mittag Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü:

$$\mathfrak{L}\{t^{\theta-1} E_{\gamma,\theta}(-t^\gamma)\} = \frac{s^{\gamma-\theta}}{s^\gamma + \iota}, \quad R(s) > |\iota|^{\frac{1}{\gamma}},$$

gösterilir.

Tanım 2.10 Riemann-Liouville anlamında Atangana- Baleanu kesirli türev operatörü:

$\lambda \in [0, 1], f \in H^1(a, b), b > a$ şartı ile;

$${}_0^{ABR}D_t^\lambda f(t) = \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \frac{d}{dt} \int_0^t f(\nu) E_\lambda \left[-\frac{\lambda(t-\nu)^\lambda}{1-\lambda} \right] d\nu$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.11 Riemann -Liouville anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev için Laplace dönüşümü: $s > 0$ olmak üzere,

$$\mathfrak{L}[{}_0^{ABR}D_t^\lambda f(t)](s) = \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \frac{s^\lambda \mathfrak{L}\{f(t)\}(s)}{s^\lambda + \frac{\lambda}{1-\lambda}} \quad (2.70)$$

ile tanımlıdır ve burada $0 > \lambda > 1$ 'dir

Tanım 2.12 Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev için Laplace dönüşümü: $s > 0$ olmak üzere:

$$\mathfrak{L}[{}_0^{ABC}D_t^\lambda f(t)](s) = \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \frac{s^\lambda \mathfrak{L}\{f(t)\}(s) - s^{\lambda-1} f(0)}{s^\lambda + \frac{\lambda}{1-\lambda}} \quad (2.71)$$

olur ve burada $0 > \lambda > 1$ 'dir

Teorem 2.2 : $f \in H^1(a, b), b > a, \lambda \in [0, 1]$ şartı ile:

$$\mathfrak{L}\{{}_0^{ABC}D_t^\lambda f(t)\}(s) = \mathfrak{L}\{{}_0^{ABR}D_t^\lambda f(t)\}(s) + H(t),$$

dir (Atangana ve Owolabi, 2018).

İspat Verilen denkleme Laplace açılımı her iki tarafa uygulanırsa;

$$\mathfrak{L}\{{}_0^{ABC}D_t^\lambda f(t)\}(s) = \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \frac{s^\lambda \mathfrak{L}\{f(t)\}(s)}{s^\lambda + \frac{\lambda}{1-\lambda}} - \frac{s^{\lambda-1} f(0)}{s^\lambda + \frac{\lambda}{1-\lambda}} \frac{B(\lambda)}{1-\lambda}, \quad (2.72)$$

bulunur. Ardından:

$$\mathfrak{L}\{{}_0^{ABC}D_t^\lambda f(t)\}(s) = \mathfrak{L}\{{}_0^{ABR}D_t^\lambda f(t)\}(s) - \frac{s^{\lambda-1} f(0)}{s^\lambda + \frac{\lambda}{1-\lambda}} \frac{B(\lambda)}{1-\lambda},$$

olur. Burada $-\frac{s^{\lambda-1}f(0)}{s^{\lambda}+1-\lambda} \frac{B(\lambda)}{1-\lambda}$ yerine $H(t)$ yazılırsa ispatlanır. Bununla beraber yukarıdaki eşitlikte ters Laplace dönüşümünü her iki tarafa olmak üzere uygulanırsa:

$${}_0^{ABC}D_t^\lambda f(t) = {}_0^{ABR}D_t^\lambda f(t) - \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} f(0) E_\lambda \left(-\frac{\lambda}{1-\lambda} t^\lambda \right)$$

bulunur.

Teorem 2.3 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere $[a, b]$ aralığında aşağıdaki bulunur.

$$\|{}_0^{ABC}D_t^\lambda f(t)\| < \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} K, \quad \|h(t)\| = \max_{a \leq t \leq b} |h(t)|. \quad (2.73)$$

İspat

$$\begin{aligned} \|{}_0^{ABC}D_t^\lambda f(t)\| &= \left\| \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \frac{d}{dt} \int_0^t f(x) E_\lambda \left[-\lambda \frac{(t-x)^\lambda}{1-\lambda} \right] dx \right\| \\ &< \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \left\| \frac{d}{dt} \int_0^t f(x) dx \right\| \\ &< \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \|f(x)\|, \end{aligned} \quad (2.74)$$

$K = \|f(x)\|$ alınır ispatlanır.

Teorem 2.4 Riemann ve Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi, Lipschitz koşuluna sahiptir, yani belirli bir fonksiyon çifti için örneğin f ve h için aşağıdaki eşitsizlikler kurulabilir:

$$\|{}_0^{ABR}D_t^\lambda f(t) - {}_0^{ABR}D_t^\lambda h(t)\| \leq H \|f(t) - h(t)\| \quad (2.75)$$

ve

$$\|{}_0^{ABC}D_t^\lambda f(t) - {}_0^{ABC}D_t^\lambda h(t)\| \leq H \|f(t) - h(t)\| \quad (2.76)$$

yazılabilir.

İspat

$$\begin{aligned} & \left| \left| {}_0^{ABR} D_t^\lambda f(t) - {}_0^{ABR} D_t^\lambda h(t) \right| \right| = \\ & \left| \left| \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \frac{d}{dt} \int_0^t f(x) E_\lambda \left[-\lambda \frac{(t-x)^\lambda}{1-\lambda} \right] dx \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \frac{d}{dt} \int_0^t h(x) E_\lambda \left[-\lambda \frac{(t-x)^\lambda}{1-\lambda} \right] dx \right| \right| \end{aligned} \quad (2.77)$$

dir. Bir pozitif sabit bulunur ki, birinci dereceden türevin Lipschitz koşulunu kullanarak:

$$\begin{aligned} & \left| \left| {}_0^{ABR} D_t^\lambda f(t) - {}_0^{ABR} D_t^\lambda h(t) \right| \right| \\ & \leq \frac{B(\lambda)\theta_1}{1-\lambda} E_\lambda \left[-\lambda \frac{t^\lambda}{1-\lambda} \right] \left| \left| \int_0^t f(x) dx - \int_0^t h(x) dx \right| \right| \end{aligned} \quad (2.78)$$

olup

$$\begin{aligned} & \left| \left| {}_0^{ABR} D_t^\lambda f(t) - {}_0^{ABR} D_t^\lambda h(t) \right| \right| \\ & \leq \frac{B(\lambda)\theta_1}{1-\lambda} E_\lambda \left[-\lambda \frac{t^\lambda}{1-\lambda} \right] \|f(t) - h(t)\| \\ & \leq H \|f(t) - h(t)\|, \end{aligned} \quad (2.79)$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan Riemann anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi Lipschitz koşulunu sağlar. Tıpkı bunun gibi Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi de Lipschitz koşulunu sağlar. Şimdi k doğal sayısı n zamanı olsun.

$f^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$ şartı ile:

$${}_0^{ABC} D_t^\lambda \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{d^n}{dt^n} ({}_0^{ABR} D_t^\lambda f(t)), \quad (2.80)$$

dir. Bu ters Laplace dönüşümü dikkate alınarak ve aşağıdaki kesirli zaman adi diferansiyel denklemin konvolüsyon teoremi yardımıyla ifade edilebilir.

$${}_0^{ABC} D_t^\lambda (f(t)) = u(t), \quad (2.81)$$

eşitliğinin tek çözümü vardır, açıklanacak olursa:

$$f(t) = \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} u(t) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t u(y)(t-y)^{\lambda-1} dy,$$

dır.

Tanım 2.13 *Kesirli integral, bölgesel olmayan yeni kesirli türev ile ilişkilendirilir ve çekirdeği:*

$${}^{AB}I_t^\lambda(f(t)) = \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}u(t) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_a^t f(y)(t-y)^{\lambda-1}dy,$$

olarak tanımlanır. $\lambda = 0$ olduğunda, başlangıç değeri bulunur ve bununla beraber $\lambda = 1$ olursa Atangana-Baleanu integrali bulunur.

2.3. Varlık ve Teklik

Başlangıç değer problemi olan diferansiyel denklemlerin çözümünün mevcut ve tek olması gereklidir. Bunlar sırasıyla varlık ve teklik konularıdır. İki konu arasındaki en temel fark; teklik en fazla bir çözümün olabileceğini gösterirken varlık en az bir çözümün olduğunu gösterir. Varlık ve teklik çözümü için öncelikle çözümün varlığına bakılır, çözümün varlığı mevcut ise tekliğine bakılır.

2.3.1. Çözümün Varlığı

Tanım 2.14

$$u'' = g(t, u) \quad u(t_0) = u_0$$

başlangıç koşulu olsun. g fonksiyonu $I \times \mathbb{R}$ 'de tanımlı ve sürekli bir fonksiyon, $I \subset \mathbb{R}$ olan açık bir aralıktır. I 'da tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyonun çözümü vardır ve $\sigma(t)$ başlangıç değer probleminin çözümüdür denir.

- $t \in I$ için $\sigma'(t)$ vardır;
- $\sigma(t_0) = u_0, t_0 \in I$
- $t \in I$ için $(t, \sigma(t)) \in I \times \mathbb{R}$
- $t \in I$ için $\sigma'(t) = g(t, \sigma(t))$

Tanım 2.15 Her $(t, r_1), (t, r_2) \in R(a, b)$ için:

$$|g(t, r_1) - g(t, r_2)| \leq K|r_1 - r_2|$$

eşitsizliği sağlanacak pozitif K sabiti varsa bu fonksiyona $R(a, b)$ bölgesinde Lipschitz koşulunu sağlıyor denir. Bu sabite de Lipschitz sabiti denir.

2.3.2. Çözümün Tekliği

Başlangıç değer probleminin çözümünün tekliği en fazla bir çözümü olduğunu gösterir. Başlangıç değer probleminin uygun aralıkta varlığını ve tekliğini göstermek için kullanılan yöntemlerden biri Picard-Lindelöf teoremidir.

Teorem 2.5 $g(t, v)$ ve $\frac{\delta(g)}{\delta(v)}$ fonksiyonları, $R(a, b) = \{(t, v) : |t - t_0| \leq a, |v - v_0| \leq b\}$ kapalı ve sınırlı aralığında t ve v 'ye göre sürekli ve aynı zamanda Lipschitz katsayısı koşulunu sağlar. Bu durumda (1)-(2) şartları altında başlangıç değer probleminin $|g(t, v)| \leq M$ ve $h = \min(a, \frac{b}{M})$ olmak üzere $|t - t_0| \leq h$ aralığında tanımlı tek bir $v(t)$ çözümü vardır.

1. $t \in I$ şartı ile $\sigma'(t)$ vardır.

2. $\sigma(t_0) = v_0, t_0 \in I$.

Teorem 2.6 Picard-Lindelöf teoremi: Başlangıç değer probleminde $B \subset IR^2$ ve f fonksiyonu $B \rightarrow IR$ tanımlı olması şartıyla bir B alanı ve $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ve $f(x_0) = y_0$ şartlarıyla f fonksiyonu vardır. Eğer f fonksiyonu B alanında sürekli bir fonksiyon ve $f(x, y)$ ve f Lipschitz şartı ile B alanında sürekli olması şartıyla $\epsilon > 0$ sabit sayısı için B alanında benzersiz bir çözüm vardır.

İspat $(x_0, y_0) \in B$ olmak üzere (x_0, y_0) noktaları B alanında herhangi birer nokta ve $a > 0, b > 0$ sabit noktalar olsun.

$D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset B$ şartıyla dikdörtgensel alan olsun.

$M = \max_{(x,y) \in R} f(x, y)$ ve $h = \min(a, \frac{b}{M})$ şartıyla: $|x - x_0| \leq h$ aralığında başlangıç değer problemi tek bir çözüme sahiptir. Böylece $a < \frac{b}{M}$ olduğunda $h = a$ olur. O zaman $R_1 = R$ bulunur. $\frac{b}{M} < a$ olduğunda $h = \frac{b}{M}$ bulunur o halde $R_1 \subset R$ olur.

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

$$R_1 = \{(x, y) : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq b\}$$

R ve R_1 yukarıdaki gibi tanımlansın. Böylelikle bu teoremin ispatı ardışık yaklaşımlarla yapılır. O halde:

$|x - x_0| < h$ aralığında $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$ fonksiyonları yazılsın:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \\ \Omega_2 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Omega_1(t)) dt \\ \Omega_3 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Omega_2(t)) dt \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \Omega_n &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Omega_{n-1}(t)) dt\end{aligned}\tag{2.82}$$

Öncelikle başlangıç değer probleminin $[x_0, x_0 + h]$ aralığında varlığı ispatlanır. Benzer şekilde $[x_0 - h, x_0]$ aralığında da varlığı ispatlanır. İspat dört adımda gerçekleştirilmektedir.

Varsayalım $\Omega_{n-1}(x)$ fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ kapalı aralığında türevli olsun ve $x \in [x_0, x_0 + h]$ için $|\Omega_{n-1}(x) - y_0| \leq b$ olsun. O zaman $(x, \Omega_{n-1}(x)) \in R_1$ olur. $(x, \Omega_{n-1}(x))$ 'da tanımlı sürekli olan $f(x, \Omega_{n-1}(x))$ fonksiyonu vardır. O zaman $[x_0, x_0 + h]$ aralığında $|f(x, \Omega_{n-1}(x))| \leq M$ bulunur. $\Omega_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Omega_{n-1}(x)) dt$ olduğu düşünülürse:

1. Ω_n var olan bir fonksiyondur ve $[x_0, x_0 + h]$ aralığında sürekli olan türevi mevcuttur ve de:

$$\begin{aligned}|\Omega_n(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, \Omega_{n-1}(x)) dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x f(t, \Omega_{n-1}(x)) dt \\ &\leq \int_{x_0}^x M dt = M(x - x_0) \quad h = \min(a, \frac{b}{M}) \\ &\leq Mh \leq b\end{aligned}$$

$(x, \Omega_n(x))$ R_1 aralığında bulunan noktadır ve bu sebeble $f(x, \Omega_n(x))$, $[x_0, x_0 + h]$ kapalı aralığında tanımlı sürekli olan fonksiyondur. Farz edelim ki $n = 1$ olsun, o zaman $\Omega_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt$ bulunur. Bu durumda Ω_1 fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ kapalı aralığında tanımlanabilen ve sürekli olan bir fonksiyondur. Bununla beraber:

$$\begin{aligned}
|\Omega_1(x) - y_0| &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \\
&\leq M(x - x_0) \leq Mh \leq b
\end{aligned}$$

dır.

O zaman $n = 1$ değerinde $(x, \Omega_1(x))$ noktası R_1 'de tanımlı bir nokta ve $f(\Omega_1(x))$, $[x_0, x_0 + h]$ kapalı aralığında sürekli olan bir fonksiyondur ve bununla beraber $[x_0, x_0 + h]$ kapalı aralığında çözümdür.

Aynı yöntemle yukarıdaki denklemde tanımlanan Ω_n fonksiyonu, tümevarım yöntemi ile $[x_0, x_0 + h]$ kapalı aralığındaki özellikleri gösterir. Bu durumda Ω fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ kapalı aralığında vardır ve denklemin çözümüdür. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

2. $(x_0, x_0 + h)$ aralığında $\{\Omega_n\}$ çözümü tektir ve aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$[x_0, x_0 + h] \text{ aralığında } |\Omega_n(x) - \Omega_{n-1}(x)| \leq \frac{M}{\alpha} \frac{(\alpha h)^n}{n!} \text{ 'dır.}$$

$x \in (x_0, x_0 + h)$ aralığında $|\Omega_{n-1}(x) - \Omega_{n-2}(x)| \leq \frac{M\alpha^{n-2}}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1}$ olduğu düşünülürse:

$$\begin{aligned}
|\Omega_n(x) - \Omega_{n-1}(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(t, \Omega_{n-1}(t)) - f(t, \Omega_{n-2}(t))) dt \right| \\
&\leq \int_{x_0}^x |f(t, \Omega_{n-1}(t)) - f(t, \Omega_{n-2}(t))| dt
\end{aligned}$$

İspatın ilk bölümünden $x \in (x_0, x_0 + h)$ aralığında $|\Omega_n(x) - y_0| \leq b$ olur. Bu sebeple $(x, \Omega_{n-1}(x))$ ve $(x, \Omega_{n-2}(x))$ noktaları $x \in (x_0, x_0 + h)$ aralığında R_1 de iki nokta olduğu söylenebilir. Lipschitz katsayısı teoremi yardımıyla $|\Omega_n(x) - \Omega_{n-1}(x)| \leq \alpha \int_{x_0}^x |\Omega_{n-1}(t) - \Omega_{n-2}(t)| dt$ olur.

$$\begin{aligned}
|\Omega_n(x) - \Omega_{n-1}(x)| &\leq \alpha \int_{x_0}^x |\Omega_{n-1}(t) - \Omega_{n-2}(t)| dt \\
&\leq \alpha \int_{x_0}^x \frac{M\alpha^{n-2}}{(n-1)!} (t - x_0)^{n-1} dt \\
&\leq \frac{M\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \left[\frac{(t - x_0)^n}{n} \right]_{x_0}^x = \frac{M\alpha^{n-1}}{n!} (x - x_0)^n = \frac{M}{\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} h^n \\
&\leq \frac{M}{\alpha} \frac{(\alpha h)^n}{n!} \quad \left(|x - x_0| \leq h \right)
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilir. Böylelikle ispat tamamlanır. O zaman çözüm tektir denir.

3. $n \rightarrow \infty$ Ω_n sürekli fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ kapalı aralığında eşit aralıklarla Ω fonksiyonunu yakınsar.
4. Ω fonksiyonunda limit $[x_0, x_0 + h]$ aralığında başlangıç değer problemine karşılık gelmektedir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Atangana-Baleanu Kesirli Türev ve İntegral Operatörü

Caputo ve Fabrizio (2015) üstel çekirdekli kesirli türev tanımı yapmışlardır. Bunun üzerine Losada ve Nieto (2015) bu tanımın kesirli integral tanımını yapmışlardır. Atangana ve Baleanu ise bu tanıma en uygun çekirdeği bulmak için: Mittag-Leffler fonksiyonunun kesirli adi diferansiyel denkleminde yola çıktılar. Aşağıdaki denklem Mittag-Leffler fonksiyonunun kesirli adi diferansiyel denklemdir (Kilbas ve dig., 2006, Hristov, 2015b, Hristov, 2015a).

$$\frac{d^\lambda y}{dx^\lambda} = ay, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (3.1)$$

Mittag-Leffler fonksiyonu yerel olmayan bir işleve sahiptir. Genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu incelenirse:

$$E_\lambda(-t^\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^{\lambda k}}{\Gamma(\lambda k + 1)} \quad (3.2)$$

T noktasındaki $\exp(-a(t - y))$ Taylor serisi:

$$\exp(-a(t - y)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a(t - y))^k}{k!} \quad (3.3)$$

$a = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ seçilerek (3.3) denklemi Caputo-Fabrizio türevi ile değiştirilirse:

$$D_t^\lambda(f(t)) = \frac{M(\lambda)}{(1-\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \int_b^t \frac{df(y)}{dy} (t - y)^k dy. \quad (3.4)$$

Yerellik problemini ortadan kaldırmak için aşağıdaki ifadede denklem (3.4)'da $k!$ yerine $\Gamma(\lambda k + 1)$ ve $(t - y)^k$ yerine $(t - y)^{\lambda k}$ yazılırsa:

$$D_t^\lambda(f(t)) = \frac{M(\lambda)}{(1-\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(\lambda k + 1)} \int_b^t \frac{df(y)}{dy} (t-y)^{\lambda k} dy. \quad (3.5)$$

bulunur. O halde, aşağıdaki kesirli türev tanımı yazılabilir.

Tanım 3.1 $f \in H^1(a, b)$, $b > a$, $\lambda \in [0, 1]$ için, yeni kesirli türevin tanımı :

$${}_b^{ABC} D_t^\lambda(f(t)) = \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \int_b^t f'(x) E_\lambda \left[-\lambda \frac{(t-x)^\lambda}{1-\lambda} \right] dx. \quad (3.6)$$

olarak yazılır.

Bulunan bu tanım Laplace transformunu kullanan başlangıç değer problemlerinin çözümünde oldukça kullanışlı olmakla beraber çözümlerde kolaylık sağlamaktadır. Ancak $\lambda = 0$ olduğunda ilk fonksiyonu kaybedilir. Bu problemi ortadan kaldırmak için aşağıdaki tanım oluşturulmuştur.

Tanım 3.2 $H^1(a, b)$, $b > a$, $[0, 1]$ içindeki λ 'de f olsun, yeni kesirli türevin tanımı

$${}_b^{ABR} D_t^\lambda(f(t)) = \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \frac{d}{dt} \int_b^t f(x) E_\lambda \left[-\lambda \frac{(t-x)^\lambda}{1-\lambda} \right] dx. \quad (3.7)$$

şeklinde verilir.

(3.6) ve (3.7) denklemlerinin çekirdeği yerel değildir. f fonksiyonu sabitse türevi sıfırdır (Atangana ve Baleanu, 2016). Bu bilgi doğrultusunda (3.6) denkleminde fonksiyon sabit olduğunda türevi sıfır bulunur. (3.6) ve (3.7)'de sırasıyla türeviyle Laplace ilişkisi incelendiğinde aşağıdaki eşitlikler:

$$\mathfrak{L}[{}_b^{ABR} D_t^\lambda f(t)](s) = \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \frac{s^\lambda \mathfrak{L}\{f(t)\}(s)}{s^\lambda + \frac{\lambda}{1-\lambda}} \quad (3.8)$$

ve

$$\mathfrak{L}[{}_b^{ABC} D_t^\lambda f(t)](s) = \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \frac{s^\lambda \mathfrak{L}\{f(t)\}(s) - s^{\lambda-1} f(0)}{s^\lambda + \frac{\lambda}{1-\lambda}} \quad (3.9)$$

elde edilir (Atangana ve Baleanu, 2016). Buradan aşağıdaki teorem oluşturulabilir.

Teorem 3.1 $f \in H^1(a, b)$, $b > a$, $\lambda \in [0, 1]$ alınırsa aşağıdaki denklem:

$${}_0^{ABC} D_t^\lambda(f(t)) = {}_0^{ABR} D_t^\lambda(f(t)) + H(t) \quad (3.10)$$

bulunur.

İspat Tanım (3.2) ve Laplace dönüşümleri kullanılarak:

$$\mathfrak{L}[{}_0^{ABC}D_t^\lambda f(t)](s) = \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \frac{s^\lambda \mathfrak{L}\{f(t)\}(s)}{s^\lambda + \frac{\lambda}{1-\lambda}} - \frac{s^{\lambda-1} f(0)}{s^\lambda + \frac{\lambda}{1-\lambda}} \frac{B(\lambda)}{1-\lambda}, \quad (3.11)$$

bulunur. Teoremdaki denklemden:

$$\mathfrak{L}[{}_0^{ABC}D_t^\lambda f(t)](s) = \mathfrak{L}[{}_0^{ABR}D_t^\lambda f(t)](s) - \frac{s^{\lambda-1} f(0)}{s^\lambda + \frac{\lambda}{1-\lambda}} \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \quad (3.12)$$

olur. Bu ifadenin her iki tarafına da ters Laplace açılımı yapılırsa:

$${}_0^{ABC}D_t^\lambda f(t) = {}_0^{ABR}D_t^\lambda f(t) - \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} f(0) E_\lambda\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda} t^\lambda\right) \quad (3.13)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2 F , $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\|{}_0^{ABC}D_t^\lambda f(t)\| < \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} K, \quad \|h(t)\| = \max_{a \leq t \leq b} |h(t)| \quad (3.14)$$

eşitsizliği bulunur (Atangana ve Baleanu, 2016).

İspat

$$\begin{aligned} \|{}_0^{ABC}D_t^\lambda f(t)\| &= \left\| \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \frac{d}{dt} \int_0^t f(x) E_\lambda\left[-\lambda \frac{(t-x)^\lambda}{1-\lambda}\right] dx \right\| \\ &< \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \left\| \frac{d}{dt} \int_0^t f(x) dx \right\| \\ &= \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \|f(x)\|. \end{aligned}$$

$K = \|f(x)\|$ olur.

Teorem 3.3 Riemann anlamında Atangana-Baleanu ve Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevleri Lipschitz şartını sağlar ve

$$\|{}_0^{ABR}D_t^\lambda f(t) - {}_0^{ABR}D_t^\lambda h(t)\| \leq H \|f(t) - h(t)\| \quad (3.15)$$

$$\left\| {}_0^{ABC} D_t^\lambda f(t) - {}_0^{ABC} D_t^\lambda h(t) \right\| \leq H \|f(t) - h(t)\| \quad (3.16)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Yukarıdaki iki eşitsizliğinde ispatı benzer olduğundan (3.15) eşitsizliğinin ispatı incelensin.

İspat

$$\left\| {}_0^{ABR} D_t^\lambda f(t) - {}_0^{ABR} D_t^\lambda h(t) \right\| =$$

$$\left\| \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \frac{d}{dt} \int_0^t f(x) E_\lambda \left[-\lambda \frac{(t-x)^\lambda}{1-\lambda} \right] dx - \frac{B(\lambda)}{1-\lambda} \frac{d}{dt} \int_0^t h(x) E_\lambda \left[-\lambda \frac{(t-x)^\lambda}{1-\lambda} \right] dx \right\|,$$

olarak gösterilir. Pozitif bir sabit bulunabilir bunun için birinci mertebeden türevin Lipschitz koşulu kullanılabilir:

$$\begin{aligned} \left\| {}_0^{ABR} D_t^\lambda f(t) - {}_0^{ABR} D_t^\lambda h(t) \right\| &\leq \frac{B(\lambda)\theta_1}{1-\lambda} E_\lambda \left[-\lambda \frac{t^\lambda}{1-\lambda} \right] \\ &\times \left\| \int_0^t f(x) dx - \int_0^t h(x) dx \right\|, \end{aligned} \quad (3.17)$$

ardından

$$\begin{aligned} \left\| {}_0^{ABR} D_t^\lambda f(t) - {}_0^{ABR} D_t^\lambda h(t) \right\| &\leq \frac{B(\lambda)\theta_1}{1-\lambda} E_\lambda \left[-\lambda \frac{t^\lambda}{1-\lambda} \right] \\ &\times \|f(x) - h(x)\| t \\ &\leq H \|f(x) - h(x)\|, \end{aligned} \quad (3.18)$$

(3.18) elde edilir. Böylelikle Lipshitz koşulunu sağlar. Lipshitz koşulunu sağlayan Atangana-Baleanu anlamında Riemann anlamında kesirli diferansiyel denklemi f , n kez farklılaşabilir doğal sayı olsun ve $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ şartıyla:

$${}_0^{ABC} D_t^\lambda \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{d^n}{dt^n} ({}_0^{ABR} D_t^\lambda f(t)) \quad (3.19)$$

bulunur. Burada, ters Laplace dönüşümü uygulanarak ve aşağıdaki kesirli adi diferansiyel denklemin Laplace dönüşümü kullanılarak denklem ispatlanabilir.

$${}_0^{ABC}D_t^\lambda(f(t)) = u(t) \quad (3.20)$$

O halde (3.20)'deki çözüme ulaşılır. Bu çözüm:

$$f(t) = \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}u(t) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t u(y)(t-y)^{\lambda-1}dy.$$

olur.

Tanım 3.3 Yerel olmayan kesirli diferansiyel denklemin integral operatörü,

$${}_a^{AB}I_t^\lambda(f(t)) = \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}u(t) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_a^t f(y)(t-y)^{\lambda-1}dy.$$

olarak ifade edilir. Burada $\lambda = 0$ değeri verilirse, başlangıç fonksiyonu bulunur ancak $\lambda = 1$ değeri verilirse standart integral elde edilir (Atangana ve Baleanu, 2016).

3.2. Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevinin İki Aşamalı Adams-Bashforth Şeması

Bu bölümde klasik mertebeden diferansiyel denklemleri çözme algoritması olan Adams-Bashforth şeması (Bashforth ve Adams, 1883), Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi için incelenecektir. Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli diferansiyel denklemin olan:

$${}_0^{ABC}D_t^\lambda y(t) = f(t, y(t)) \quad (3.21)$$

eşitliği için analizin temel teoremi dikkate alınarak:

$$\begin{aligned} y(t) - y(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} f(t, y(t)) \\ &+ \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{\lambda-1} f(\nu, y(\nu)) d(\nu), \end{aligned} \quad (3.22)$$

ulaşılabilir. O zaman t_{n+1} için:

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) - y(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} f(t_n, y_n) \\
&+ \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \nu)^{\lambda-1} f(t, y(t)) dt,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

ve t_n için:

$$\begin{aligned}
y(t_n) - y(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\
&+ \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n - \nu)^{\lambda-1} f(t, y(t)) dt,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

bulunur. Yukarıdaki t_{n+1} ve t_n denklemlerinin farkı alınırsa:

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) - y(t_n) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} \\
&+ \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\lambda-1} f(t, y(t)) dt \\
&- \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\lambda-1} f(t, y(t)) dt
\end{aligned} \tag{3.25}$$

ve bu ifade düzenlenirse:

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + A_{\lambda,1} - A_{\lambda,2} \tag{3.26}$$

ulaşılır. Bu genelliği göz önünde bulundurarak:

$$A_{\lambda,1} = \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\lambda-1} f(t, y(t)) dt \tag{3.27}$$

Lagrange dönüşümü yardımıyla:

$$p(t) = \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} f(t_n, y_n) + \frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n} f(t_{n-1}, y_{n-1}) \tag{3.28}$$

bulunur. Bu şekilde:

$$\begin{aligned}
A_{\lambda,1} &= \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\lambda-1} \\
&\quad \times \left\{ \frac{t - t_{n-1}}{h} f(t_n, y_n) - \frac{t - t_n}{h} f(t_{n-1}, y_{n-1}) \right\} \\
&= \frac{\lambda f(t_n, y_n)}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left\{ \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\lambda-1} f(t - t_{n-1}) \right\} dt \\
&\quad - \frac{\lambda f(t_{n-1}, y_{n-1})}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left\{ \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\lambda-1} f(t - t_n) \right\} dt \\
&= \frac{\lambda f(t_n, y_n)}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left\{ \frac{2ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right\} - \frac{\lambda f(t_{n-1}, y_{n-1})}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \\
&\quad \times \left\{ \frac{ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right\}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

olur. Aynı yöntemle:

$$A_{\lambda,2} = \frac{\lambda f(t_n, y_n)}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left\{ \frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right\} - \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} t_n^{\lambda+1}, \tag{3.30}$$

olur. Bu şekilde:

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) - y(t_n) &= \frac{1 - \lambda}{ABC(\lambda)} \{ f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1}) \} \\
&\quad + \frac{\lambda f(t_n, y_n)}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left\{ \frac{2ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right\} \\
&\quad - \frac{\lambda f(t_{n-1}, y_{n-1})}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left\{ \frac{ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right\} \\
&\quad - \frac{\lambda f(t_n, y_n)}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left\{ \frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right\} \\
&\quad + \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} t_n^{\lambda+1}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + f(t_n, y_n) \left\{ \frac{1 - \lambda}{ABC(\lambda)} + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)h} \left[\frac{2ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left[\frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \right\} + f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\
&\quad \times \left\{ \frac{\lambda - 1}{ABC(\lambda)} - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \right. \\
&\quad \left. \times \left[\frac{ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{t^{\lambda+1}}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

bulunur. Bu denkleme Caputo anlamında Atangana-Baleanu fraksiyonel türevi için iki aşamalı Adams-Bashforth şeması denir.

Teorem 3.4 (Yakınsama Sonucu) Aşağıdaki denklem $y(t)$ 'nin bir çözümü olmak üzere:

$${}_0^{ABC}D_t^\lambda y(t) = f(t, y(t))$$

f sürekli ve sınırlıdır. $y(t)$ 'nin sayısal çözümü:

$$\begin{aligned} y_{n+1} = & y_n + f(t_n, y_n) \left\{ \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)h} \left[\frac{2ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \right. \\ & \left. - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left[\frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \right\} + f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\ & \times \left\{ \frac{\lambda-1}{ABC(\lambda)} - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left[\frac{ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \right. \\ & \left. + \frac{t^{\lambda+1}}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \right\} + R_\lambda, \end{aligned} \quad (3.33)$$

olarak gösterilir. Burada $\|R_\lambda\|_\infty < M$ 'dir.

İspat

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(t_n) = & \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \\ & \times \left[\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\lambda-1} f(t, y(t)) dt - \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\lambda-1} f(t, y(t)) dt \right] \\ = & \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} (f_n - f_{n-1}) + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \left\{ \left[\int_0^{t_{n+1}} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} f(t_n, y_n) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n} f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (t - t_i) \right] (t_{n+1} - t)^{\lambda-1} dt \right. \\ & \left. - \int_0^{t_n} \left[\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} f(t_n, y_n) + \frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n} f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{f^n(t)}{(n)!} \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i) \right] \right. \\ & \left. \times (t_n - t)^{\lambda-1} dt \right\} \\ = & L(t, \lambda, n) + \int_0^{t_{n+1}} \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (t - t_i) (t_{n+1} - t)^{\lambda-1} dt \\ & - \int_0^{t_n} \frac{f^n(t)}{(n)!} \prod_{i=0}^n (t - t_i) (t_n - t)^{\lambda-1} dt \end{aligned}$$

dır. Böylelikle (3.34) denklemini ifade edilebilir.

$$y_{n+1} - y_n = L(t, \lambda, n) + R_\lambda(t) \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}
L(t, \lambda, n) = & f(t_n, y_n) \left\{ \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)h} \left[\frac{2ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \right. \\
& \left. - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left[\frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \right\} \\
& + f(t_{n-1}, y_{n-1}) \times \left\{ \frac{\lambda-1}{ABC(\lambda)} + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \right. \\
& \times \left[\frac{ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{t^{\lambda+1}}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \right] \left. \right\} + R_\lambda,
\end{aligned}$$

ve

$$R_\lambda(t) = \int_0^{t_{n+1}} \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (t-t_i)(t_{n+1}-t)^{\lambda-1} dt - \int_0^{t_n} \frac{f^n(t)}{(n)!} \prod_{i=0}^{n-1} (t-t_i)(t_n-t)^{\lambda-1} dt$$

Bunu gösterecek olursak:

$$\begin{aligned}
\|R_\lambda(t)\|_\infty &= \left\| \int_0^{t_{n+1}} \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (t-t_i)(t_{n+1}-t)^{\lambda-1} dt \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_n} \frac{f^n(t)}{(n)!} \prod_{i=0}^{n-1} (t-t_i)(t_n-t)^{\lambda-1} dt \right\|_\infty \\
&< \left\| \int_0^{t_{n+1}} \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (t-t_i)(t_{n+1}-t)^{\lambda-1} dt \right\|_\infty \\
&\quad + \left\| \int_0^{t_n} \frac{f^n(t)}{(n)!} \prod_{i=0}^{n-1} (t-t_i)(t_n-t)^{\lambda-1} dt \right\|_\infty \\
&< \max_{t \in [0, t_{n+1}]} \frac{|f^{n+1}(t)|}{(n+1)!} \left\| \prod_{i=0}^n (t-t_i) \right\|_\infty \frac{t_{n+1}^\lambda}{\lambda} \\
&\quad + \max_{t \in [0, t_{n+1}]} \frac{|f^n(t)|}{(n)!} \left\| \prod_{i=0}^{n-1} (t-t_i) \right\|_\infty \frac{t_n^\lambda}{\lambda} \\
&< \sup_{t \in [0, t_{n+1}]} \left\{ \max_{t \in [0, t_{n+1}]} \frac{|f^{n+1}(t)|}{(n+1)!}, \max_{t \in [0, t_{n+1}]} \frac{|f^n(t)|}{(n)!} \right\} \\
&\quad \times \left(n! \frac{h^{n+1}}{4\lambda} t_{n+1}^\lambda + (n-1)! \frac{h^n}{4\lambda} t_n^\lambda \right)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Hepatit B enfeksiyonu dünyada birçok ölüme sebep olan ciddi bir sağlık sorunudur. Hepatit B virüsünün (HBV) neden olduğu, Hepatit B enfeksiyonu esas olarak karaciğeri etkileyen bulaşıcı ve tedavi edilmediğinde ölümcül olabilen bir hastalıktır. Bu hastalık global düzeyde karşımıza çıkmaktadır. Hepatit B virüsü kimi zaman akut hastalıklara, kimi zaman da kronik hastalıklara yol açabildiği gibi tedavi edilmediğinde ölümlere yol açmaktadır.

Hepatit B virüsü yüksek oranda Asya, Güney Avrupa, Afrika ve Latin Amerika'dan rapor edilmektedir. Yayılım miktarı ise Çin nüfusunda endemik düzeyde iken Asya ve Afrika nüfusunda durum salgın düzeyindedir. Örneğin, Pakistan'da 6 milyondan fazla kişi Hepatit B virüsünden muzdariptir. Hatta bazı bölgelerde, Sindh ve Pencap'taki bazı köylerde %20'den fazla insan bu enfeksiyondan etkilenmektedir. Hepatit B ve komplikasyonları nedeniyle her yıl binlerce Pakistanlı bu hastalık yüzünden hayatını kaybetmektedir. Pakistan kronik Hepatit B yükünün en yüksek olduğu; karaciğer yetmezliği ve diğer komplikasyonlar nedeniyle ölüm oranının oldukça yüksek olduğu ülkelerden biridir. Bunlarla beraber kronik Hepatit B enfeksiyonuna en çok çocuklarda rastlanmaktadır.

Hepatit B virüsünün insanlar arasında bulaşma şeklini yatay ve dikey bulaşma olarak iki başlık altında toplayabiliriz. Yatay bulaşma, enfeksiyona sahip veya taşıyıcı bir kişinin vücut sıvılarıyla bu enfeksiyonu başkasına bulaştırmasıdır. Dikey bulaşma, enfeksiyona sahip veya taşıyıcı bir anneden doğan bebeğe enfeksiyonun geçmesidir.

Hepatit B virüsü ile enfekte kişilerin belirtilerini şu şekilde özetleyebiliriz. Diğer viral hastalıkların semptomlarına benzer ancak bazı durumlarda büyük bir hasar olana kadar mesela karaciğer hasarı olana kadar kendisini göstermeyebilir. HBV ile enfekte kişiler minimal semptom gösterse bile veya semptomlar olmasa bile yine de enfeksiyonu başkalarına bulaştırabilirler. Bazı bireyler HBV'yi vücutlarında taşır ve hayatlarının geri kalanı için bulaşıcıdır.

Biyolojik olayların matematiksel modelleri, biyolojik olayların modellerini keşfetmek için ve toplumda enfeksiyonun yayılımı kontrol altına alma önerilerinde bulunmak için önemlidir. Bu tezde Hepatit B virüsünün yayılımında göçmenlerin etkisini araştırmak için önerilen, erken aşamada farkındalık, etkili aşılama ve uygun tedavi olmak üzere üç parametre geliştirilmesini sağlayan Hepatit B virüsü bulaşma modeli olan SEACHR modelinin analizi

yapılmıştır (Ullah ve dig., 2019). Salgın yayılımını kontrol altına almak için önerilen bu modelin Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev operatörüne genişletilerek varlık ve teklik çözümü, nümerik çözümü ve sayısal simülasyonları verilmiştir.

4.1. SEACHR Modeli

Hepatit B virüs modeli (Ullah ve dig., 2019) aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= (1 - \psi C(t))b - \beta(\mu C(t) + A(t))S(t) - dS(t) \\
\frac{dE(t)}{dt} &= \beta S(t)(\mu C(t) + A(t)) - \delta E(t) + b\psi C(t) - dE(t) \\
\frac{dA(t)}{dt} &= \delta E(t) - h_1 A(t) - d_A A(t) - dA(t) - \gamma A(t) \\
\frac{dC(t)}{dt} &= \gamma A(t) - dC(t) - d_C C(t) - h_2 C(t) \\
\frac{dH(t)}{dt} &= h_1 A(t) + h_2 C(t) - (d + \xi)H(t) \\
\frac{dR(t)}{dt} &= \xi H(t) - dR(t).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Altı adi diferansiyel denklemden oluşan HBV iletiminin matematiksel modelinde; $S(t)$ t zamanında şüpheli bireylerin sayısını, $E(t)$ t zamanında maruz kalan sayısını yani temaslı birey sayısını, $A(t)$ t zamanında akut sayısını yani kronik olmayan hasta sayısını, $C(t)$ t zamanında taşıyıcı kişi sayısını, $H(t)$ t zamanında hastaneye kaldırılan kişi sayısını (Burada $H(t)$ sınıfına, tedavi amacıyla bir hastane ya da sağlık kuruluşuna başvuran bireyler dahil edilmektedir), $R(t)$ t zamanında iyileşen kişi sayısını gösterir. Böylece toplam nüfus; $N(t) = S(t) + E(t) + A(t) + C(t) + H(t) + R(t)$ şeklinde gösterilecektir. Burada $N(t) = S(t) + E(t) + A(t) + C(t) + H(t) + R(t)$ sabittir.

Ayrıca bu modelde; d katsayısı doğal ölüm oranını, d_A katsayısı akut hastalık sebebiyle ölüm neticesinde azalma oranını, d_C katsayısı taşıyıcı hastalık sebebiyle ölüm oranını, b katsayısı doğum oranını, μ katsayısı akut enfeksiyon aracılığı ile taşıyıcıların bulaşıcılığı oranını, β katsayısı hastalık temas oranını verir başka bir deyişle iletim katsayısıdır, ψ katsayısı taşıyıcı annelerden doğan aşılanmamış çocuk oranını, δ katsayısı Hepatit B virüsünün taşıyıcıdan maruz kalana akış hızı oranını, γ katsayısı akut bireylerin taşıyıcı bireylere dönüşme oranını, ξ katsayısı iyileşme hızı oranını, h_1 katsayısı hastaneye yatırılan akut hasta oranını, h_2 katsayısı hastaneye yatırılan taşıyıcı oranını ifade etmektedir.

Şimdi Hepatit B virüs modeli Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev operatörüne genişletilecek ve sırasıyla sabit nokta teoremi yardımıyla modelin varlık ve teklik çözümü ispat edilecektir.

4.2. Hepatit B Virüs Modelinin Caputo Anlamındaki

Atangana-Baleanu Kesirli Türev Operatörüne Genişletilmesi

Hepatit B virüs modeli (Ullah ve dig., 2019) parantezlerin başındaki katsayılar dağıtılarak tekrar düzenlensin ve (4.2) denklem sistemine ulaşılsın:

$$\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= b - b\psi C(t) - \beta\mu C(t)S(t) - \beta A(t)S(t) - dS(t) \\
\frac{dE(t)}{dt} &= \beta\mu C(t)S(t) + \beta A(t)S(t) + b\psi C(t) - \delta E(t) - dE(t) \\
\frac{dA(t)}{dt} &= \delta E(t) - h_1 A(t) - d_A A(t) - dA(t) - \gamma A(t) \\
\frac{dC(t)}{dt} &= \gamma A(t) - dC(t) - d_C C(t) - h_2 C(t) \\
\frac{dH(t)}{dt} &= h_1 A(t) + h_2 C(t) - dH(t) - \xi H(t) \\
\frac{dR(t)}{dt} &= \xi H(t) - dR(t).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

(4.2) denkleminde b katsayısı doğum oranı, d katsayısı doğal ölüm oranı, d_A katsayısı akut hastalık sebebiyle ölüm oranı, d_C katsayısı virüs taşıyıcısı olması sebebiyle ölüm oranı olmak üzere, doğum oranı ve ölüm oranları sıfır alınırsa:

$$\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta\mu C(t)S(t) - \beta A(t)S(t) \\
\frac{dE(t)}{dt} &= \beta\mu C(t)S(t) + \beta A(t)S(t) - \delta E(t) \\
\frac{dA(t)}{dt} &= \delta E(t) - h_1 A(t) - \gamma A(t) \\
\frac{dC(t)}{dt} &= \gamma A(t) - h_2 C(t) \\
\frac{dH(t)}{dt} &= h_1 A(t) + h_2 C(t) - \xi H(t) \\
\frac{dR(t)}{dt} &= \xi H(t)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir. $N(t) = S(t) + E(t) + A(t) + C(t) + H(t) + R(t)$ şeklinde olup, $N(t)$ toplam

nüfusu göstermektedir. O halde doğum oranı ve ölüm oranları sıfır alınırsa; $N(t)=0$ olacaktır. Bu bilgiler doğrultusunda (4.3) denklem sistemi Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev tanımı yardımıyla:

$$\begin{aligned}
{}_t^{ABC}D_0^\lambda S(t) &= -\beta\mu C(t)S(t) - \beta A(t)S(t) \\
{}_t^{ABC}D_0^\lambda E(t) &= \beta\mu C(t)S(t) + \beta A(t)S(t) - \delta E(t) \\
{}_t^{ABC}D_0^\lambda A(t) &= \delta E(t) - h_1 A(t) - \gamma A(t) \\
{}_t^{ABC}D_0^\lambda C(t) &= \gamma A(t) - h_2 C(t) \\
{}_t^{ABC}D_0^\lambda H(t) &= h_1 A(t) + h_2 C(t) - \xi H(t) \\
{}_t^{ABC}D_0^\lambda R(t) &= \xi H(t)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4) denklem sistemi için başlangıç koşulları: $S(0) = c_0, E(0) = c_1, A(0) = c_2, C(0) = c_3, H(0) = c_4, R(0) = c_5$ olsun. Araştırmaya konu olan bu çalışmada $N = S + E + A + C + H + R$ sabittir. Banach uzayında $F : R \rightarrow R$ şeklinde tanımlı ve sürekli F fonksiyonu T normu ile $\|S\| = \sup\{|S(t)| : t \in T\}, \|E\| = \sup\{|E(t)| : t \in T\}, \|A\| = \sup\{|A(t)| : t \in T\}, \|C\| = \sup\{|C(t)| : t \in T\}, \|H\| = \sup\{|H(t)| : t \in T\}, \|R\| = \sup\{|R(t)| : t \in T\}$ olmak üzere; $\|(S, E, A, C, H, R)\| = \|S\| + \|E\| + \|A\| + \|C\| + \|H\| + \|R\|$ şeklindedir. Özellikle $F = C(T) \times C(T) \times C(T) \times C(T) \times C(T) \times C(T)$ Banach uzayında R 'de tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olmak üzere T supremum norma sahiptir.

4.3. SEACHR Modelinin Varlık ve Teklik Çözümleri

Bu kısımda (4.4) sisteminin varlığı sabit nokta teoremi yardımıyla incelenecektir. Araştırılan modelin varlığını incelemek için (4.4) sistemi Atangana-Baleanu integral operatörü yardımıyla:

$$\begin{aligned}
S(t) &= S(0) + {}_t^{ABC}I_0^\lambda \{-\beta\mu C(t)S(t) - \beta A(t)S(t)\}, \\
E(t) &= E(0) + {}_t^{ABC}I_0^\lambda \{\beta\mu C(t)S(t) + \beta A(t)S(t) - \delta E(t)\}, \\
A(t) &= A(0) + {}_t^{ABC}I_0^\lambda \{\delta E(t) - h_1 A(t) - \gamma A(t)\}, \\
C(t) &= C(0) + {}_t^{ABC}I_0^\lambda \{\gamma A(t) - h_2 C(t)\}, \\
H(t) &= H(0) + {}_t^{ABC}I_0^\lambda \{h_1 A(t) + h_2 C(t) - \xi H(t)\}, \\
R(t) &= R(0) + {}_t^{ABC}I_0^\lambda \{\xi H(t)\},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

şeklinde gösterilir. (4.5) sistemi Atangana-Baleanu integral operatörü ile düzenlenirse:

$$\begin{aligned}
S(t) - S(0) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \{-\beta\mu C(t)S(t) - \beta A(t)S(t)\} \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \{-\beta\mu C(\nu)S(\nu) \\
&\quad - \beta A(\nu)S(\nu)\} d(\nu) \\
E(t) - E(0) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \{\beta\mu C(t)S(t) + \beta A(t)S(t) - \delta E(t)\} \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \{\beta\mu C(\nu)S(\nu) \\
&\quad + \beta A(\nu)S(\nu) - \delta E(\nu)\} d(\nu) \\
A(t) - A(0) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \{\delta E(t) - h_1 A(t) - \gamma A(t)\} \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \{\delta E(\nu) \\
&\quad - h_1 A(\nu) - \gamma A(\nu)\} d(\nu) \\
C(t) - C(0) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \{\gamma A(t) - h_2 C(t)\} \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \{\gamma A(\nu) \\
&\quad - h_2 C(\nu)\} d(\nu) \\
H(t) - H(0) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \{h_1 A(t) + h_2 C(t) - \xi H(t)\} \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \{h_1 A(\nu) \\
&\quad + h_2 C(\nu) - \xi H(\nu)\} d(\nu) \\
R(t) - R(0) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \{\xi H(t)\} \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \{\xi H(\nu)\} d(\nu)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

denklemlerine ulaşılır. İşlemlerin daha anlaşılır olması için çekirdekler aşağıdaki gibi alınırsa:

$$\begin{aligned}
\kappa_1(t, S(t)) &= -\beta\mu C(t)S(t) - \beta A(t)S(t) \\
\kappa_2(t, E(t)) &= \beta\mu C(t)S(t) + \beta A(t)S(t) - \delta E(t) \\
\kappa_3(t, A(t)) &= \delta E(t) - h_1 A(t) - \gamma A(t) \\
\kappa_4(t, C(t)) &= \gamma A(t) - h_2 C(t) \\
\kappa_5(t, H(t)) &= h_1 A(t) + h_2 C(t) - \xi H(t) \\
\kappa_6(t, R(t)) &= \xi H(t)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

çekirdekleri yazılabilir. Modelin Lipschitz şartını sağladığı ve her bir denklemin sırasıyla Lipschitz katsayılarının:

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \beta\mu\Theta_1 + \beta\Theta_2, \\
\zeta_2 &= \delta, \\
\zeta_3 &= h_1 + \gamma, \\
\zeta_4 &= h_2, \\
\zeta_5 &= \xi, \\
\zeta_6 &= 0,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

şeklinde olduğunu göstermek için; $S_1(t), S_2(t), E_1(t), E_2(t), A_1(t), A_2(t), C_1(t), C_2(t), H_1(t), H_2(t), R_1(t), R_2(t) \in L[0, 1]$, H' 'de sürekli olmak üzere; $\|S(t)\| \leq \Theta_3, \|E(t)\| \leq \Theta_4, \|A(t)\| \leq \Theta_2, \|C(t)\| \leq \Theta_1, \|H(t)\| \leq \Theta_5, \|R(t)\| \leq \Theta_6$ olsun.

Teorem 4.1 (4.7) sistemindeki $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \kappa_6$ çekirdeklerinin Lipschitz katsayıları $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6$ olmak üzere katsayılar aşağıdaki görüldüğü gibi pozitif ve birden küçükse Lipschitz koşulunu sağlar.

$$\begin{aligned}
0 &\leq \beta\mu\Theta_1 + \beta\Theta_2 < 1 \\
0 &\leq \delta < 1 \\
0 &\leq h_1 + \gamma < 1 \\
0 &\leq h_2 < 1 \\
0 &\leq \xi < 1 \\
0 &\leq 0 < 1
\end{aligned} \tag{4.9}$$

İspat İlk önce κ_1 çekirdeğinin varlığı incelensin. $S_1(t)$ ve $S_2(t)$ iki fonksiyondur:

$$\begin{aligned}
\|\kappa_1(t, S_1(t)) - \kappa_1(t, S_2(t))\| &= \| -\beta\mu C(t)S_1(t) - \beta A(t)S_1(t) \\
&\quad + \beta\mu C(t)S_2(t) + \beta A(t)S_2(t) \| \\
&= \| -\beta\mu C(t)\{S_1(t) - S_2(t)\} - \beta A(t)\{S_1(t) - S_2(t)\} \|
\end{aligned} \tag{4.10}$$

olur. (4.10) denkleminde üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
\|\kappa_1(t, S_1(t)) - \kappa_1(t, S_2(t))\| &\leq \| -\beta\mu C(t)\{S_1(t) - S_2(t)\} \| + \| -\beta A(t)\{S_1(t) - S_2(t)\} \| \\
&\leq \{\beta\mu\|C(t)\| + \beta\|A(t)\|\}\|S_1(t) - S_2(t)\| \\
&\leq \{\beta\mu\Theta_1 + \beta\Theta_2\}\|S_1(t) - S_2(t)\| \\
&= \zeta_1\|S_1(t) - S_2(t)\|
\end{aligned} \tag{4.11}$$

eşitliğine ulaşılır. Yani, κ_1 çekirdeği büzölmeye sahiptir. O halde Lipschitz koşulunu sağlar.

İkinci çekirdek olan κ_2 çekirdeğinin varlığı incelensin. $E_1(t)$ ve $E_2(t)$ iki fonksiyondur:

$$\begin{aligned}
\|\kappa_2(t, E_1(t)) - \kappa_2(t, E_2(t))\| &= \| \beta\mu C(t)S(t) + \beta A(t)S(t) - \delta E_1(t) \\
&\quad - \beta\mu C(t)S(t) - \beta A(t)S(t) + \delta E_2(t) \| \\
&= \| -\delta E_1(t) + \delta E_2(t) \|
\end{aligned} \tag{4.12}$$

olur. (4.12) denkleminde üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
\|\kappa_2(t, E_1(t)) - \kappa_2(t, E_2(t))\| &\leq \| -\delta\{E_1(t) - E_2(t)\} \| \\
&\leq \{\delta\}\|E_1(t) - E_2(t)\| \\
&\leq \delta\|E_1(t) - E_2(t)\| \\
&= \zeta_2\|E_1(t) - E_2(t)\|
\end{aligned} \tag{4.13}$$

eşitliğine ulaşılır. Yani, κ_2 çekirdeği büzülmeye sahiptir. O halde Lipschitz koşulunu sağlar.

Üçüncü çekirdek olan κ_3 çekirdeğinin varlığı incelensin. $A_1(t)$ ve $A_2(t)$ iki fonksiyondur:

$$\|\kappa_3(t, A_1(t)) - \kappa_3(t, A_2(t))\| = \|\delta E(t) - h_1 A_1(t) - \gamma A_1(t) - \delta E(t) + h_1 A_2(t) + \delta A_2(t)\| \quad (4.14)$$

olur. (4.14) denklemine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} \|\kappa_3(t, A_1(t)) - \kappa_3(t, A_2(t))\| &\leq \|h_1\{A_1(t) - A_2(t)\} - \gamma\{A_1(t) - A_2(t)\}\| \\ &\leq \|(-h_1 - \gamma)\{A_1(t) - A_2(t)\}\| \\ &\leq \{h_1 + \gamma\}\|A_1(t) - A_2(t)\| \\ &= \zeta_3\|A_1(t) - A_2(t)\| \end{aligned} \quad (4.15)$$

eşitliğine ulaşılır. Yani, κ_3 çekirdeği büzülmeye sahiptir. O halde Lipschitz koşulunu sağlar.

Dördüncü çekirdek olan κ_4 çekirdeğinin varlığı incelensin. $C_1(t)$ ve $C_2(t)$ iki fonksiyondur:

$$\|\kappa_4(t, C_1(t)) - \kappa_4(t, C_2(t))\| = \|\gamma A(t) - h_2 C_1(t) - \gamma A(t) + h_2 C_2(t)\| \quad (4.16)$$

olur. (4.14) denklemine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} \|\kappa_4(t, C_1(t)) - \kappa_4(t, C_2(t))\| &\leq \| - h_2\{C_1(t) - C_2(t)\}\| \\ &\leq \| - h_2\|\|C_1(t) - C_2(t)\| \\ &\leq \{h_2\}\|C_1(t) - C_2(t)\| \\ &= \zeta_4\|C_1(t) - C_2(t)\| \end{aligned} \quad (4.17)$$

eşitliğine ulaşılır. Yani, κ_4 çekirdeği büzülmeye sahiptir. O halde Lipschitz koşulunu sağlar.

Beşinci çekirdek olan κ_5 çekirdeğinin varlığı incelensin. $H_1(t)$ ve $H_2(t)$ iki fonksiyondur:

$$\|\kappa_5(t, H_1(t)) - \kappa_5(t, H_2(t))\| = \|h_1A(t) + h_2C(t) - \xi H_1(t) - h_1A(t) - h_2C(t) + \xi H_2(t)\| \quad (4.18)$$

olur. (4.14) denkleminde üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} \|\kappa_5(t, H_1(t)) - \kappa_5(t, H_2(t))\| &\leq \|-\xi\{H_1(t) - H_2(t)\}\| \\ &\leq \{\xi\}\|H_1(t) - H_2(t)\| \\ &= \zeta_5\|H_1(t) - H_2(t)\| \end{aligned} \quad (4.19)$$

eşitliğine ulaşılır. Yani, κ_5 çekirdeği büzülmeye sahiptir. O halde Lipschitz koşulunu sağlar.

Son ve altıncı çekirdek olan κ_6 çekirdeğinin varlığı incelensin. $R_1(t)$ ve $R_2(t)$ iki fonksiyondur:

$$\|\kappa_6(t, R_1(t)) - \kappa_6(t, R_2(t))\| = \|\xi H(t) - \xi H(t)\| \quad (4.20)$$

olur. (4.14) denkleminde üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} \|\kappa_6(t, R_1(t)) - \kappa_6(t, R_2(t))\| &\leq \|\xi\{H(t) - H(t)\}\| \\ &\leq \|0\| \\ &= \zeta_6\|R_1(t) - R_2(t)\| \end{aligned} \quad (4.21)$$

eşitliğine ulaşılır. Yani, κ_6 çekirdeği büzülmeye sahiptir. O halde Lipschitz koşulunu sağlar. Her bir denklemin pozitif ve birden küçük Lipschitz katsayısının var olduğu bulunmuştur, teoremdaki katsayılarla ulaşılmıştır ve teorem ispatlanmıştır .

Atangana-Baleanu integral operatörü ile düzenlenen (4.6) denklem sisteminde başlangıç değerleri sıfır kabul edilsin,

$$\begin{aligned}
S(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \kappa_1(t, S) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \kappa_1(\nu, S) d(\nu) \\
E(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \kappa_2(t, E) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \kappa_2(\nu, E) d(\nu) \\
A(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \kappa_3(t, A) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \kappa_3(\nu, A) d(\nu) \\
C(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \kappa_4(t, C) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \kappa_4(\nu, C) d(\nu) \\
H(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \kappa_5(t, H) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \kappa_5(\nu, H) d(\nu) \\
R(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \kappa_6(t, R) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \kappa_6(\nu, R) d(\nu)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

olur. Tümevarım metodu yardımıyla:

$$\begin{aligned}
S_n(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \kappa_1(t, S_{n-1}) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \kappa_1(\nu, S_{n-1}) d(\nu) \\
E_n(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \kappa_2(t, E_{n-1}) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \kappa_2(\nu, E_{n-1}) d(\nu) \\
A_n(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \kappa_3(t, A_{n-1}) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \kappa_3(\nu, A_{n-1}) d(\nu) \\
C_n(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \kappa_4(t, C_{n-1}) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \kappa_4(\nu, C_{n-1}) d(\nu) \\
H_n(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \kappa_5(t, H_{n-1}) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \kappa_5(\nu, H_{n-1}) d(\nu) \\
R_n(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \kappa_6(t, R_{n-1}) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \kappa_6(\nu, R_{n-1}) d(\nu)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

olur. (4.23) denklem grubunun ardışık terimlerinin farkları alınırsa:

$$\begin{aligned}
S_{n+1}(t) - S_n(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}(\kappa_1(t, S_n) - \kappa_1(t, S_{n-1})) \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times (\kappa_1(\nu, S_n) - \kappa_1(\nu, S_{n-1}))d(\nu) \\
E_{n+1}(t) - E_n(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}(\kappa_2(t, E_n) - \kappa_2(t, E_{n-1})) \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times (\kappa_2(\nu, E_n) - \kappa_2(\nu, E_{n-1}))d(\nu) \\
A_{n+1}(t) - A_n(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}(\kappa_3(t, A_n) - \kappa_3(t, A_{n-1})) \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times (\kappa_3(\nu, A_n) - \kappa_3(\nu, A_{n-1}))d(\nu) \\
C_{n+1}(t) - C_n(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}(\kappa_4(t, C_n) - \kappa_4(t, C_{n-1})) \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times (\kappa_4(\nu, C_n) - \kappa_4(\nu, C_{n-1}))d(\nu) \\
H_{n+1}(t) - H_n(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}(\kappa_5(t, H_n) - \kappa_5(t, H_{n-1})) \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times (\kappa_5(\nu, H_n) - \kappa_5(\nu, H_{n-1}))d(\nu) \\
R_{n+1}(t) - R_n(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}(\kappa_6(t, R_n) - \kappa_6(t, R_{n-1})) \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times (\kappa_6(\nu, R_n) - \kappa_6(\nu, R_{n-1}))d(\nu)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Ardışık terimlerin farkı alındığında (4.24) denklem sistemini elde edilir. Bu sistemdeki her bir denklemin tek tek normu alınsın.

$S_{n+1}(t) - S_n(t)$ denkleminin normu alınsın:

$$\begin{aligned}
\|S_{n+1}(t) - S_n(t)\| &= \left\| \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} (\kappa_1(t, S_n) - \kappa_1(t, S_{n-1})) \right. \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times (\kappa_1(\nu, S_n) - \kappa_1(\nu, S_{n-1})) d(\nu) \Big\| \\
&\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \\
&\quad \times \|\kappa_1(t, S_n) - \kappa_1(t, S_{n-1})\| \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \left\| \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \right. \\
&\quad \times (\kappa_1(\nu, S_n) - \kappa_1(\nu, S_{n-1})) d(\nu) \Big\|
\end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edilir. κ_1 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağladığı için aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\|S_{n+1}(t) - S_n(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_1 \|S_n - S_{n-1}\| \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_1 \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \|S_n - S_{n-1}\| d(\nu)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

denkleme ulaşılır.

$E_{n+1}(t) - E_n(t)$ denkleminin normu alınsın:

$$\begin{aligned}
\|E_{n+1}(t) - E_n(t)\| &= \left\| \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} (\kappa_2(t, E_n) - \kappa_2(t, E_{n-1})) \right. \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times (\kappa_2(\nu, E_n) - \kappa_2(\nu, E_{n-1})) d(\nu) \Big\| \\
&\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \|\kappa_2(t, E_n) - \kappa_2(t, E_{n-1})\| \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \left\| \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} (\kappa_2(\nu, E_n) \right. \\
&\quad \left. - \kappa_2(\nu, E_{n-1})) d(\nu) \right\|
\end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. κ_2 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağladığı için aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\|E_{n+1}(t) - E_n(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_2 \|E_n - E_{n-1}\| \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_2 \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \|E_n - E_{n-1}\| d(\nu)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

denkleminde ulaşılır.

$A_{n+1}(t) - A_n(t)$ denkleminin normu alınsın:

$$\begin{aligned}
\|A_{n+1}(t) - A_n(t)\| &= \left\| \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} (\kappa_3(t, A_n) - \kappa_3(t, A_{n-1})) \right. \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times (\kappa_3(\nu, A_n) - \kappa_3(\nu, A_{n-1})) d(\nu) \left. \right\| \\
&\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \|\kappa_3(t, A_n) - \kappa_3(t, A_{n-1})\| \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \left\| \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \right. \\
&\quad \times (\kappa_3(\nu, A_n) - \kappa_3(\nu, A_{n-1})) d(\nu) \left. \right\|
\end{aligned} \tag{4.29}$$

elde edilir. κ_3 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağladığı için aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\|A_{n+1}(t) - A_n(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_3 \|A_n - A_{n-1}\| \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_3 \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \|A_n - A_{n-1}\| d(\nu)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

denkleminde ulaşılır.

$C_{n+1}(t) - C_n(t)$ denkleminin normu alınsın:

$$\begin{aligned}
\|C_{n+1}(t) - C_n(t)\| &= \left\| \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} (\kappa_4(t, C_n) - \kappa_4(t, C_{n-1})) \right. \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times (\kappa_4(\nu, C_n) - \kappa_4(\nu, C_{n-1})) d(\nu) \left. \right\| \\
&\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \|\kappa_4(t, C_n) - \kappa_4(t, C_{n-1})\| \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \left\| \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \right. \\
&\quad \times (\kappa_4(\nu, C_n) - \kappa_4(\nu, C_{n-1})) d(\nu) \left. \right\|
\end{aligned} \tag{4.31}$$

elde edilir. κ_4 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağladığı için aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\begin{aligned} \|C_{n+1}(t) - C_n(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_4 \|C_n - C_{n-1}\| \\ &\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_4 \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \|C_n - C_{n-1}\| d(\nu) \end{aligned} \quad (4.32)$$

denkleme ulaşılır.

$H_{n+1}(t) - H_n(t)$ denkleminin normu alınsın:

$$\begin{aligned} \|H_{n+1}(t) - H_n(t)\| &= \left\| \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} (\kappa_5(t, H_n) - \kappa_5(t, H_{n-1})) \right. \\ &\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\ &\quad \times (\kappa_5(\nu, H_n) - \kappa_5(\nu, H_{n-1})) d(\nu) \left. \right\| \\ &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \\ &\quad \times \|\kappa_5(t, H_n) - \kappa_5(t, H_{n-1})\| \\ &\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \left\| \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \right. \\ &\quad \times (\kappa_5(\nu, H_n) - \kappa_5(\nu, H_{n-1})) d(\nu) \left. \right\| \end{aligned} \quad (4.33)$$

elde edilir. κ_5 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağladığı için aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\begin{aligned} \|H_{n+1}(t) - H_n(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_5 \|H_n - H_{n-1}\| \\ &\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_5 \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \|H_n - H_{n-1}\| d(\nu) \end{aligned} \quad (4.34)$$

denkleme ulaşılır.

$R_{n+1}(t) - R_n(t)$ denkleminin normu alınsın:

$$\begin{aligned}
\|R_{n+1}(t) - R_n(t)\| &= \left\| \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} (\kappa_6(t, R_n) - \kappa_6(t, R_{n-1})) \right. \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times (\kappa_6(\nu, R_n) - \kappa_6(\nu, R_{n-1})) d(\nu) \left. \right\| \\
&\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \\
&\quad \times \|\kappa_6(t, R_n) - \kappa_6(t, R_{n-1})\| \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \left\| \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \right. \\
&\quad \times (\kappa_6(\nu, R_n) - \kappa_6(\nu, R_{n-1})) d(\nu) \left. \right\|
\end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir. κ_6 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağladığı için aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\|R_{n+1}(t) - R_n(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_6 \|R_n - R_{n-1}\| \\
&\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_6 \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \|R_n - R_{n-1}\| d(\nu)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

denklemine ulaşılır.

Ulaşılan bu denklemler gözönünde bulundurularak aşağıdaki teorem ifade edilmiştir.

Teorem 4.2 *Hepatit B virüs modeli denklem sisteminin, Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev tanımı yardımıyla oluşturulan (4.4) denklemleri aşağıda verilen şartlar altında kesin çözümlere sahiptir.*

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_1 + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_1 t_0 < 1 \\
\Delta_2 &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_2 + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_2 t_0 < 1 \\
\Delta_3 &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_3 + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_3 t_0 < 1 \\
\Delta_4 &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_4 + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_4 t_0 < 1 \\
\Delta_5 &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_5 + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_5 t_0 < 1 \\
\Delta_6 &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_6 + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_6 t_0 < 1
\end{aligned} \tag{4.37}$$

İspat Aşağıdaki eşitlikler tanımlansın.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{n+1}(t) - S(t) = K_n(t) \\ E_{n+1}(t) - E(t) = L_n(t) \\ A_{n+1}(t) - A(t) = M_n(t) \\ C_{n+1}(t) - C(t) = N_n(t) \\ H_{n+1}(t) - H(t) = P_n(t) \\ R_{n+1}(t) - R(t) = R_n(t) \end{array} \right. \quad (4.38)$$

$K_n(t)$ için:

$$\begin{aligned} \|K_n(t)\| &= \left\| \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} (\kappa_1(t, S_{n-1}) - \kappa_1(t, S)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} (\kappa_1(\nu, S_{n-1}) - \kappa_1(\nu, S)) d(\nu) \right\| \\ &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \|\kappa_1(t, S_{n-1}) - \kappa_1(t, S)\| \\ &\quad + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \|\kappa_1(\nu, S_{n-1}) - \kappa_1(\nu, S)\| d(\nu) \\ &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_1 \|S_{n-1} - S\| + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_1 \|S_{n-1} - S\| t \end{aligned} \quad (4.39)$$

Yapılan bu işlemler tekrar edilirse (genişletilirse) aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\|K_n(t)\| \leq \left(\frac{1-\lambda}{B(\lambda)} + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} t \right)^n \zeta_1^n \quad (4.40)$$

(4.40) denkleminde $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\|K_n(t)\| \leq \left(\frac{1-\lambda}{B(\lambda)} + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} t_0 \right)^n \zeta_1^n \quad (4.41)$$

Elde edilen denklemin limiti alınırsa $n \rightarrow \infty$ giderken $\|K_n(t)\| \rightarrow 0$ olur.

Aynı şekilde:

$$\begin{aligned}
\|L_n(t)\| &= \left\| \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} (\kappa_2(t, E_{n-1}) - \kappa_2(t, E)) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \right. \\
&\quad \times (\kappa_2(\nu, E_{n-1}) - \kappa_2(\nu, E)) d(\nu) \Big\| \\
&\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \|\kappa_2(t, E_{n-1}) - \kappa_2(t, E)\| + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times \|\kappa_2(\nu, E_{n-1}) - \kappa_2(\nu, E)\| d(\nu) \\
&\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_2 \|E_{n-1} - E\| + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_2 \|E_{n-1} - E\| t
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Yapılan bu işlemler tekrar edilirse (genişletilirse) aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\|L_n(t)\| \leq \left(\frac{1-\lambda}{B(\lambda)} + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} t \right)^n \zeta_2^n \tag{4.43}$$

(4.43) denkleminde $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\|L_n(t)\| \leq \left(\frac{1-\lambda}{B(\lambda)} + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} t_0 \right)^n \zeta_2^n \tag{4.44}$$

Elde edilen denklemin limiti alınırsa $n \rightarrow \infty$ giderken $\|L_n(t)\| \rightarrow 0$ olur.

Aynı şekilde:

$$\begin{aligned}
\|M_n(t)\| &= \left\| \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} (\kappa_3(t, A_{n-1}) - \kappa_3(t, A)) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \right. \\
&\quad \times (\kappa_3(\nu, A_{n-1}) - \kappa_3(\nu, A)) d(\nu) \Big\| \\
&\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \|\kappa_3(t, A_{n-1}) - \kappa_3(t, A)\| + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times \|\kappa_3(\nu, A_{n-1}) - \kappa_3(\nu, A)\| d(\nu) \\
&\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_3 \|A_{n-1} - A\| + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_3 \|A_{n-1} - A\| t
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Yapılan bu işlemler tekrar edilirse (genişletilirse) aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\|M_n(t)\| \leq \left(\frac{1-\lambda}{B(\lambda)} + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} t \right)^n \zeta_3^n \tag{4.46}$$

(4.46) denkleminde $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\|M_n(t)\| \leq \left(\frac{1-\lambda}{B(\lambda)} + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} t_0 \right)^n \zeta_3^n \quad (4.47)$$

Elde edilen denklemin limiti alınırsa $n \rightarrow \infty$ giderken $\|M_n(t)\| \rightarrow 0$ olur.

Aynı şekilde:

$$\begin{aligned} \|N_n(t)\| &= \left\| \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} (\kappa_4(t, C_{n-1}) - \kappa_4(t, C)) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \right. \\ &\quad \times (\kappa_4(\nu, C_{n-1}) - \kappa_4(\nu, C)) d(\nu) \Big\| \\ &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \|\kappa_4(t, C_{n-1}) - \kappa_4(t, C)\| + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\ &\quad \times \|\kappa_4(\nu, C_{n-1}) - \kappa_4(\nu, C)\| d(\nu) \\ &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_4 \|C_{n-1} - C\| + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_4 \|C_{n-1} - C\| t \end{aligned} \quad (4.48)$$

Yapılan bu işlemler tekrar edilirse (genişletilirse) aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\|N_n(t)\| \leq \left(\frac{1-\lambda}{B(\lambda)} + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} t \right)^n \zeta_4^n \quad (4.49)$$

(4.49) denkleminde $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\|N_n(t)\| \leq \left(\frac{1-\lambda}{B(\lambda)} + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} t_0 \right)^n \zeta_4^n \quad (4.50)$$

Elde edilen denklemin limiti alınırsa $n \rightarrow \infty$ giderken

$\|N_n(t)\| \rightarrow 0$ olur.

Aynı şekilde:

$$\begin{aligned}
||T_n(t)|| &= \left\| \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} (\kappa_5(t, H_{n-1}) - \kappa_5(t, H)) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \right. \\
&\quad \times (\kappa_5(\nu, H_{n-1}) - \kappa_5(\nu, H)) d(\nu) \Big\| \\
&\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} ||\kappa_5(t, H_{n-1}) - \kappa_5(t, H)|| + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times ||\kappa_5(\nu, H_{n-1}) - \kappa_5(\nu, H)|| d(\nu) \\
&\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_5 ||H_{n-1} - H|| + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_5 ||H_{n-1} - H|| t
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Yapılan bu işlemler tekrar edilirse (genişletilirse) aşağıdaki denklem elde edilir:

$$||T_n(t)|| \leq \left(\frac{1-\lambda}{B(\lambda)} + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} t \right)^n \zeta_5^n \tag{4.52}$$

(4.52) denkleminde $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$||T_n(t)|| \leq \left(\frac{1-\lambda}{B(\lambda)} + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} t_0 \right)^n \zeta_5^n \tag{4.53}$$

Elde edilen denklemin limiti alınır $n \rightarrow \infty$ giderken $||T_n(t)|| \rightarrow 0$ olur.

Aynı şekilde:

$$\begin{aligned}
||Q_n(t)|| &= \left\| \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} (\kappa_6(t, R_{n-1}) - \kappa_6(t, R)) + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \right. \\
&\quad \times (\kappa_6(\nu, R_{n-1}) - \kappa_6(\nu, R)) d(\nu) \Big\| \\
&\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} ||\kappa_6(t, R_{n-1}) - \kappa_6(t, R)|| + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \\
&\quad \times ||\kappa_6(\nu, R_{n-1}) - \kappa_6(\nu, R)|| d(\nu) \\
&\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_6 ||R_{n-1} - R|| + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_6 ||R_{n-1} - R|| t
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Yapılan bu işlemler tekrar edilirse (genişletilirse) aşağıdaki denklem elde edilir:

$$||Q_n(t)|| \leq \left(\frac{1-\lambda}{B(\lambda)} + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} t \right)^n \zeta_6^n \tag{4.55}$$

(4.55) denkleminde $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\|Q_n(t)\| \leq \left(\frac{1-\lambda}{B(\lambda)} + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} t_0 \right)^n \zeta_6^n \quad (4.56)$$

Elde edilen denklemin limiti alınır $n \rightarrow \infty$ giderken $\|Q_n(t)\| \rightarrow 0$ olur.

Böylelikle (4.4) denklem sisteminin varlığı ispatlanmış olur.

Şimdi (4.4) denklem sisteminin tekliği ispatlansın. $S_1(t), E_1(t), A_1(t), C_1(t), H_1(t), R_1(t)$ (4.4) denklem sisteminin herhangi başka çözüm sistemi olsun:

$$\begin{aligned} S(t) - S_1(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} (\kappa_1(t, S) - \kappa_1(t, S_1)) \\ &+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} (\kappa_1(\nu, S) - \kappa_1(\nu, S_1)) d(\nu) \end{aligned} \quad (4.57)$$

olmak üzere bu fark denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned} \|S(t) - S_1(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \|\kappa_1(t, S) - \kappa_1(t, S_1)\| \\ &+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \|\kappa_1(\nu, S) - \kappa_1(\nu, S_1)\| d(\nu) \end{aligned} \quad (4.58)$$

şeklinde bulunur. Çekirdeğin Lipschitz katsayısı kullanılırsa:

$$\begin{aligned} \|S(t) - S_1(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_1 \|S(t) - S_1(t)\| \\ &+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_1 \|S(t) - S_1(t)\| \end{aligned} \quad (4.59)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik düzenlenirse yani her terim denklemin sol tarafına alınır:

$$\|S(t) - S_1(t)\| \left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_1 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_1 t \right) \leq 0 \quad (4.60)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Aynı şekilde:

$$\begin{aligned} E(t) - E_1(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}(\kappa_2(t, E) - \kappa_2(t, E_1)) \\ &+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)}(\kappa_2(\nu, E) - \kappa_2(\nu, E_1))d(\nu) \end{aligned} \quad (4.61)$$

olmak üzere bu fark denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned} \|E(t) - E_1(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}\|\kappa_2(t, E) - \kappa_2(t, E_1)\| \\ &+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)}\|\kappa_2(\nu, E) - \kappa_2(\nu, E_1)\|d(\nu) \end{aligned} \quad (4.62)$$

şeklinde bulunur. Çekirdeğin Lipschitz katsayısı kullanılırsa:

$$\|E(t) - E_1(t)\| \leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}\zeta_2\|E(t) - E_1(t)\| + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)}\zeta_2\|E(t) - E_1(t)\| \quad (4.63)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik düzenlenirse yani her terim denklemin sol tarafına alınırsa:

$$\|E(t) - E_1(t)\| \left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}\zeta_2 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)}\zeta_2 t \right) \leq 0 \quad (4.64)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Aynı şekilde:

$$\begin{aligned} A(t) - A_1(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}(\kappa_3(t, A) - \kappa_3(t, A_1)) \\ &+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)}(\kappa_3(\nu, A) - \kappa_3(\nu, A_1))d(\nu) \end{aligned} \quad (4.65)$$

olmak üzere bu fark denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned} \|A(t) - A_1(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}\|\kappa_3(t, A) - \kappa_3(t, A_1)\| \\ &+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)}\|\kappa_3(\nu, A) - \kappa_3(\nu, A_1)\|d(\nu) \end{aligned} \quad (4.66)$$

şeklinde bulunur. Çekirdeğin Lipschitz katsayısı kullanılırsa:

$$\begin{aligned} \|A(t) - A_1(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}\zeta_3\|A(t) - A_1(t)\| \\ &+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)}\zeta_3\|A(t) - A_1(t)\| \end{aligned} \quad (4.67)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik düzenlenirse yani her terim denklemin sol tarafına alınır:

$$\|A(t) - A_1(t)\| \left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}\zeta_3 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)}\zeta_3 t \right) \leq 0 \quad (4.68)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Aynı şekilde:

$$\begin{aligned} C(t) - C_1(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}(\kappa_4(t, C) - \kappa_4(t, C_1)) \\ &+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)}(\kappa_4(\nu, C) - \kappa_4(\nu, C_1))d(\nu) \end{aligned} \quad (4.69)$$

olmak üzere bu fark denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned} \|C(t) - C_1(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}\|\kappa_4(t, C) - \kappa_4(t, C_1)\| \\ &+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)}\|\kappa_4(\nu, C) - \kappa_4(\nu, C_1)\|d(\nu) \end{aligned} \quad (4.70)$$

şeklinde bulunur. Çekirdeğin Lipschitz katsayısı kullanılırsa:

$$\|C(t) - C_1(t)\| \leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}\zeta_4\|C(t) - C_1(t)\| + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)}\zeta_4\|C(t) - C_1(t)\| \quad (4.71)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik düzenlenirse yani her terim denklemin sol tarafına alınır:

$$\|C(t) - C_1(t)\| \left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}\zeta_4 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)}\zeta_4 t \right) \leq 0 \quad (4.72)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Aynı şekilde:

$$\begin{aligned} H(t) - H_1(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}(\kappa_5(t, H) - \kappa_5(t, H_1)) \\ &+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)}(\kappa_5(\nu, H) - \kappa_5(\nu, H_1))d(\nu) \end{aligned} \quad (4.73)$$

olmak üzere bu fark denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned} \|H(t) - H_1(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}\|\kappa_5(t, H) - \kappa_5(t, H_1)\| \\ &+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)}\|\kappa_5(\nu, H) - \kappa_5(\nu, H_1)\|d(\nu) \end{aligned} \quad (4.74)$$

şeklinde bulunur. Çekirdeğin Lipschitz katsayısı kullanılırsa:

$$\|H(t) - H_1(t)\| \leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}\zeta_5\|H(t) - H_1(t)\| + \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)}\zeta_5\|H(t) - H_1(t)\| \quad (4.75)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik düzenlenirse yani her terim denklemin sol tarafına alınırsa:

$$\|H(t) - H_1(t)\| \left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}\zeta_5 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)}\zeta_5 t \right) \leq 0 \quad (4.76)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Aynı şekilde:

$$\begin{aligned} R(t) - R_1(t) &= \frac{1-\lambda}{B(\lambda)}(\kappa_6(t, R) - \kappa_6(t, R_1)) \\ &+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)}(\kappa_6(\nu, R) - \kappa_6(\nu, R_1))d(\nu) \end{aligned} \quad (4.77)$$

olmak üzere bu fark denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned}
\|R(t) - R_1(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \|\kappa_6(t, R) - \kappa_6(t, R_1)\| \\
&+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{(\lambda-1)} \|\kappa_6(\nu, R) - \kappa_6(\nu, R_1)\| d(\nu)
\end{aligned} \tag{4.78}$$

şeklinde bulunur. Çekirdeğin Lipschitz katsayısı kullanılırsa:

$$\begin{aligned}
\|R(t) - R_1(t)\| &\leq \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_6 \|R(t) - R_1(t)\| \\
&+ \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_R \|R(t) - R_1(t)\|
\end{aligned} \tag{4.79}$$

olarak yazılabilir. Eşitlik düzenlenirse yani her terim denklemin sol tarafına alınır:

$$\|R(t) - R_1(t)\| \left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_6 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_6 t \right) \leq 0 \tag{4.80}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Yukarıda bulunan denklemler gözönünde bulundurularak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 4.3 *Verilen koşullar altında (4.4) denklem sisteminin tek çözümü vardır.*

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_1 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_1 t \right) &> 0 \\
\left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_2 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_2 t \right) &> 0 \\
\left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_3 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_3 t \right) &> 0 \\
\left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_4 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_4 t \right) &> 0 \\
\left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_5 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_5 t \right) &> 0 \\
\left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_6 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_6 t \right) &> 0
\end{aligned} \tag{4.81}$$

İspat: *Teorem (4.3)'teki koşullar sağlansın. (4.60) eşitsizliğinden:*

$$\|S(t) - S_1(t)\| \left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_1 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_1 t \right) \leq 0$$

olduğu için $\|S(t) - S_1(t)\| = 0$ olur. Bu durum $S(t) = S_1(t)$ 'ye ulaştırmaktadır.

Aynı şekilde (4.64) eşitsizliğinden,

$$\|E(t) - E_1(t)\| \left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_2 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_2 t \right) \leq 0$$

olduğu için $\|E(t) - E_1(t)\| = 0$ olur. Bu durum $E(t) = E_1(t)$ 'ye ulaştırmaktadır.

Aynı şekilde (4.68) eşitsizliğinden,

$$\|A(t) - A_1(t)\| \left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_3 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_3 t \right) \leq 0$$

olduğu için $\|A(t) - A_1(t)\| = 0$ olur. Bu durum $A(t) = A_1(t)$ 'ye ulaştırmaktadır.

Aynı şekilde (4.72) eşitsizliğinden,

$$\|C(t) - C_1(t)\| \left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_4 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_4 t \right) \leq 0$$

olduğu için $\|C(t) - C_1(t)\| = 0$ olur. Bu durum $C(t) = C_1(t)$ 'ye ulaştırmaktadır.

Aynı şekilde (4.76) eşitsizliğinden,

$$\|H(t) - H_1(t)\| \left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_5 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_5 t \right) \leq 0$$

olduğu için $\|H(t) - H_1(t)\| = 0$ olur. Bu durum $H(t) = H_1(t)$ 'ye ulaştırmaktadır.

Son olarak (4.80) eşitsizliğinden,

$$\|R(t) - R_1(t)\| \left(1 - \frac{1-\lambda}{B(\lambda)} \zeta_2 - \frac{\lambda}{B(\lambda)\Gamma(\lambda)} \zeta_6 t \right) \leq 0$$

olduğu için $\|R(t) - R_1(t)\| = 0$ olur. Bu durum $R(t) = R_1(t)$ 'ye ulaştırmaktadır.

Böylece (4.4) denklem sisteminin çözümünün tekliğine ulaşılır.

4.4. Nümerik Çözüm Yöntemi

Atangana ve Owolabi (2018) kesirli diferansiyel denklemlerin ayrılabilmesi için Caputo kesirli türevini kullanarak yepyeni bir sayısal yaklaşım bulmuşlardır. İlk önce gösterilen diferansiyel denklemi düşünmüşlerdir.

$${}_0^{ABC}\mathfrak{D}_t^\lambda x(t) = (f(t, x(t))). \quad (4.82)$$

Bu denklem analizin temel teoremi yardımıyla düzenlenirse:

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) &= \frac{1 - \lambda}{ABC(\lambda)} f(t, x(t)) + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \\ &\times \int_0^t (t - \nu)^{\lambda-1} f(\nu, x(\nu)) d\nu, \end{aligned} \quad (4.83)$$

ulaşılır. Neticesinde,

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) - x(0) &= \frac{1 - \lambda}{ABC(\lambda)} f(t_n, x_n) + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \\ &\times \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\lambda-1} f(t, x(t)) dt, \end{aligned} \quad (4.84)$$

olur ve t_n için:

$$\begin{aligned} x(t_n) - x(0) &= \frac{1 - \lambda}{ABC(\lambda)} f(t_{n-1}, x_{n-1}) + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \\ &\times \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\lambda-1} f(t, x(t)) dt, \end{aligned} \quad (4.85)$$

olur. (4.84) ve (4.85) denklem sistemlerinin farkı alınırsa:

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) - x(t_n) &= \frac{1 - \lambda}{ABC(\lambda)} \{f(t_n, x_n) - f(t_{n-1}, x_{n-1})\} \\ &+ \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\lambda-1} f(t, x(t)) dt \\ &- \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\lambda-1} f(t, x(t)) dt \end{aligned} \quad (4.86)$$

denkleme ulaşılır. Böylece,

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \frac{1 - \lambda}{ABC(\lambda)} \{f(t_n, x_n) - f(t_{n-1}, x_{n-1})\} + A_{\lambda,1} - A_{\lambda,2} \quad (4.87)$$

genel ifadesine bağlı kalarak, $A_{\lambda,1}$ için:

$$A_{\lambda,1} = \frac{\lambda f(t_n, x_n)}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left\{ \frac{2ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right\} - \frac{\lambda f(t_{n-1}, x_{n-1})}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left\{ \frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right\} \quad (4.88)$$

yazılır ve aynı şekilde, $A_{\lambda,2}$ için:

$$A_{\lambda,2} = \frac{\lambda f(t_n, x_n)}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left\{ \frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right\} - \frac{f(t_{n-1}, x_{n-1})}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \quad (4.89)$$

ulaşılır. Neticede,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n) & \left\{ \frac{1 - \lambda}{ABC(\lambda)} + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)h} \left[\frac{2ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \right. \\ & \left. - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left[\frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \right\} + f(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ & \times \left\{ \frac{\lambda - 1}{ABC(\lambda)} - \frac{\lambda}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \left[\frac{ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \right. \\ & \left. + \frac{t^{\lambda+1}}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \right\} \end{aligned} \quad (4.90)$$

denkleminde ulaşılır. İşte bu ulaşılan denkleme, Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi için iki aşamalı Adams-Bashforth şeması denir.

Teorem 4.4 *Denklemin çözümü $x(t)$ olmak üzere:*

$${}_0^{ABC}D_t^\lambda x(t) = f(t, x(t)), \quad (4.91)$$

f fonksiyonu sürekli ve sınırlıdır, $x(t)$ sayısal çözümü ise:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n) & \left\{ \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)h} \left[\frac{2ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \right. \\
& \left. - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left[\frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \right\} + f(t_{n-1}, x_{n-1}) \\
& \times \left\{ \frac{\lambda-1}{ABC(\lambda)} - \frac{\lambda}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \left[\frac{ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \right. \\
& \left. + \frac{t^{\lambda+1}}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \right\} + R_\lambda
\end{aligned} \tag{4.92}$$

(4.92) de ki gibidir. Buradan $\|R_\lambda\|_\infty < M$ olur.

4.4.1. SEACHR Modelinin Nümerik Çözümü

Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi ile Hepatit B virüsü için genişletilmiş matematiksel model (4.4) sisteminde gösterilmiştir. Atangana-Baleanu integral operatörü yardımıyla elde edilen sistem (4.5) temel analiz teoremi ile yeniden düzenlendiğinde κ_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ çekirdekleri için bir sonraki sistem:

$$\begin{aligned}
S(t) - S(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_1(t, S(t)) \\
&+ \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{\lambda-1} \kappa_1(\nu, S(\nu)) d\nu, \\
E(t) - E(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_2(t, E(t)) \\
&+ \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{\lambda-1} \kappa_2(\nu, E(\nu)) d\nu, \\
A(t) - A(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_3(t, A(t)) \\
&+ \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{\lambda-1} \kappa_3(\nu, A(\nu)) d\nu, \\
C(t) - C(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_4(t, C(t)) \\
&+ \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{\lambda-1} \kappa_4(\nu, C(\nu)) d\nu,
\end{aligned} \tag{4.93}$$

$$\begin{aligned}
H(t) - H(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_5(t, H(t)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{\lambda-1} \kappa_5(\nu, H(\nu)) d\nu, \\
R(t) - R(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_6(t, R(t)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\nu)^{\lambda-1} \kappa_6(\nu, R(\nu)) d\nu,
\end{aligned}$$

olarak oluşturulur. Bu sistemde olduğu gibi:

$$\begin{aligned}
S_{n+1}(t) - S(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_1(t_n, S_n(t)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\lambda-1} \kappa_1(t, S(t)) dt, \\
E_{n+1}(t) - E(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_2(t_n, E_n(t)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\lambda-1} \kappa_2(t, E(t)) dt, \\
A_{n+1}(t) - A(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_3(t_n, A_n(t)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\lambda-1} \kappa_3(t, A(t)) dt, \\
C_{n+1}(t) - C(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_4(t_n, C_n(t)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\lambda-1} \kappa_4(t, C(t)) dt, \\
H_{n+1}(t) - H(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_5(t_n, H_n(t)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\lambda-1} \kappa_5(t, H(t)) dt, \\
R_{n+1}(t) - R(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_6(t_n, R_n(t)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\lambda-1} \kappa_6(t, R(t)) dt,
\end{aligned} \tag{4.94}$$

olur ve t_n değeri yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned}
S_n(t) - S(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_1(t_{n-1}, S_{n-1}(t)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\lambda-1} \kappa_1(t, S(t)) dt, \\
E_n(t) - E(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_2(t_{n-1}, E_{n-1}(t)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\lambda-1} \kappa_2(t, E(t)) dt, \\
A_n(t) - A(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_3(t_{n-1}, A_{n-1}(t)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\lambda-1} \kappa_3(t, A(t)) dt, \\
C_n(t) - C(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_4(t_{n-1}, C_{n-1}(t)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\lambda-1} \kappa_4(t, C(t)) dt, \\
H_n(t) - H(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_5(t_{n-1}, H_{n-1}(t)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\lambda-1} \kappa_5(t, H(t)) dt, \\
R_n(t) - R(0) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \kappa_6(t_{n-1}, R_{n-1}(t)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\lambda-1} \kappa_6(t, R(t)) dt,
\end{aligned} \tag{4.95}$$

olarak bulunur. (4.94) ve (4.95) denklemlerinde herbirinin sırasıyla farkı alınırsa:

$$\begin{aligned}
S_{n+1}(t) - S_n(t) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \{ \kappa_1(t_n, S_n(t)) - \kappa_1(t_{n-1}, S_{n-1}(t)) \} \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\lambda-1} \kappa_1(t, S(t)) dt, \\
&\quad - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\lambda-1} \kappa_1(t, S(t)) dt, \\
E_{n+1}(t) - E_n(t) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \{ \kappa_2(t_n, E_n(t)) - \kappa_2(t_{n-1}, E_{n-1}(t)) \} \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\lambda-1} \kappa_2(t, E(t)) dt, \\
&\quad - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\lambda-1} \kappa_2(t, E(t)) dt,
\end{aligned} \tag{4.96}$$

$$\begin{aligned}
A_{n+1}(t) - A_n(t) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \{ \kappa_3(t_n, A_n(t)) - \kappa_3(t_{n-1}, A_{n-1}(t)) \} \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\lambda-1} \kappa_3(t, A(t)) dt, \\
&\quad - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n-t)^{\lambda-1} \kappa_3(t, A(t)) dt, \\
C_{n+1}(t) - C_n(t) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \{ \kappa_4(t_n, C_n(t)) - \kappa_4(t_{n-1}, C_{n-1}(t)) \} \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\lambda-1} \kappa_4(t, C(t)) dt, \\
&\quad - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n-t)^{\lambda-1} \kappa_4(t, C(t)) dt, \\
H_{n+1}(t) - H_n(t) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \{ \kappa_5(t_n, H_n(t)) - \kappa_5(t_{n-1}, H_{n-1}(t)) \} \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\lambda-1} \kappa_5(t, H(t)) dt, \\
&\quad - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n-t)^{\lambda-1} \kappa_5(t, H(t)) dt, \\
R_{n+1}(t) - R_n(t) &= \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} \{ \kappa_6(t_n, R_n(t)) - \kappa_6(t_{n-1}, R_{n-1}(t)) \} \\
&\quad + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\lambda-1} \kappa_6(t, R(t)) dt, \\
&\quad - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \int_0^{t_n} (t_n-t)^{\lambda-1} \kappa_6(t, R(t)) dt,
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Teorem (4.4)'e göre:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + \kappa_1(t_n, S_n(t)) \left\{ \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)h} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{2ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left[\frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \Big\} \\
&\quad + \kappa_1(t_{n-1}, S_{n-1}(t)) \left\{ \frac{\lambda-1}{ABC(\lambda)} - \frac{\lambda}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{t^{\lambda+1}}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \right] \Big\} + {}^1\mathfrak{R}_\lambda
\end{aligned} \tag{4.97}$$

yazılıp $\|{}^1\mathfrak{R}_\lambda\|_\infty < M$ 'ye ulaşılır.

Aynı yöntemle:

$$\begin{aligned}
E_{n+1} = E_n + \kappa_2(t_n, E_n(t)) & \left\{ \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)h} \right. \\
& \times \left[\frac{2ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left[\frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \Big\} \\
& + \kappa_2(t_{n-1}, E_{n-1}(t)) \left\{ \frac{\lambda-1}{ABC(\lambda)} - \frac{\lambda}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \right. \\
& \times \left[\frac{ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{t^{\lambda+1}}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \right] \Big\} + {}^2\mathfrak{R}_\lambda
\end{aligned} \tag{4.98}$$

yazılıp $\|{}^2\mathfrak{R}_\lambda\|_\infty < M'$ ye ulaşılır.

Aynı yöntemle:

$$\begin{aligned}
A_{n+1} = A_n + \kappa_3(t_n, A_n(t)) & \left\{ \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)h} \right. \\
& \times \left[\frac{2ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left[\frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \Big\} \\
& \times + \kappa_3(t_{n-1}, A_{n-1}(t)) \left\{ \frac{\lambda-1}{ABC(\lambda)} - \frac{\lambda}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \right. \\
& \times \left[\frac{ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{t^{\lambda+1}}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \right] \Big\} + {}^3\mathfrak{R}_\lambda
\end{aligned} \tag{4.99}$$

olup $\|{}^3\mathfrak{R}_\lambda\|_\infty < M'$ ye ulaşılır.

Aynı yöntemle:

$$\begin{aligned}
C_{n+1} = C_n + \kappa_4(t_n, C_n(t)) & \left\{ \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)h} \right. \\
& \times \left[\frac{2ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left[\frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \Big\} \\
& \times + \kappa_4(t_{n-1}, C_{n-1}(t)) \left\{ \frac{\lambda-1}{ABC(\lambda)} - \frac{\lambda}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \right. \\
& \times \left[\frac{ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{t^{\lambda+1}}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \right] \Big\} + {}^4\mathfrak{R}_\lambda
\end{aligned} \tag{4.100}$$

olup $\|{}^4\mathfrak{R}_\lambda\|_\infty < M'$ ye ulaşılır.

Aynı yöntemle:

$$\begin{aligned}
H_{n+1} = H_n + \kappa_5(t_n, H_n(t)) & \left\{ \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)h} \right. \\
& \times \left[\frac{2ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left[\frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \Big\} \\
& \times + \kappa_5(t_{n-1}, H_{n-1}(t)) \left\{ \frac{\lambda-1}{ABC(\lambda)} - \frac{\lambda}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \right. \\
& \times \left[\frac{ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{t^{\lambda+1}}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \right] \Big\} + {}^5\mathfrak{R}_\lambda
\end{aligned} \tag{4.101}$$

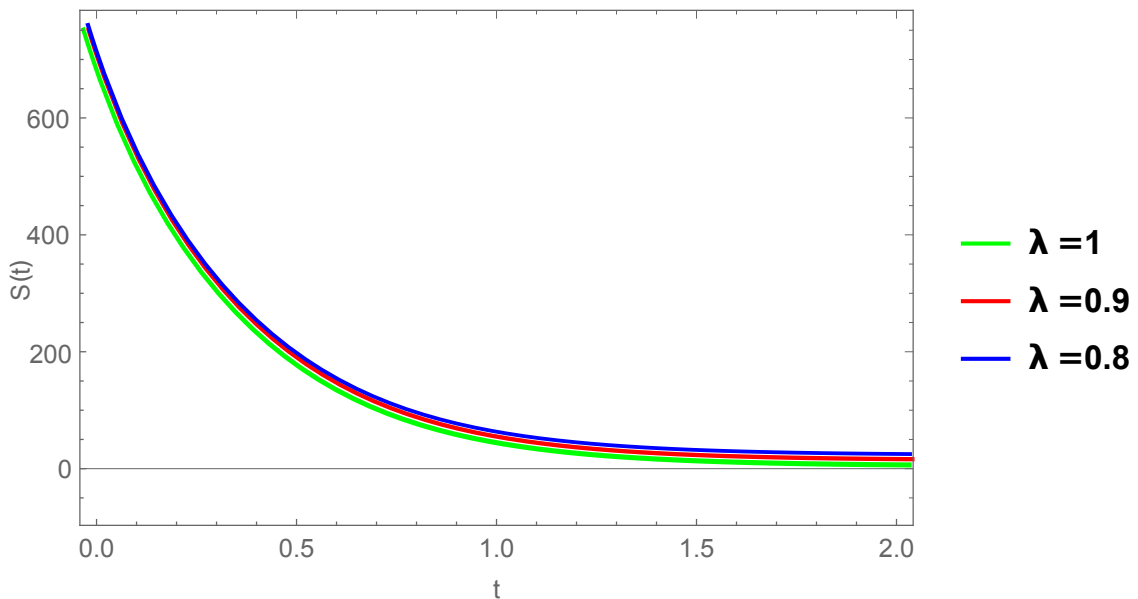
olup $\|{}^5\mathfrak{R}_\lambda\|_\infty < M$ 'ye ulaşılır.

Son olarak aynı yöntemle:

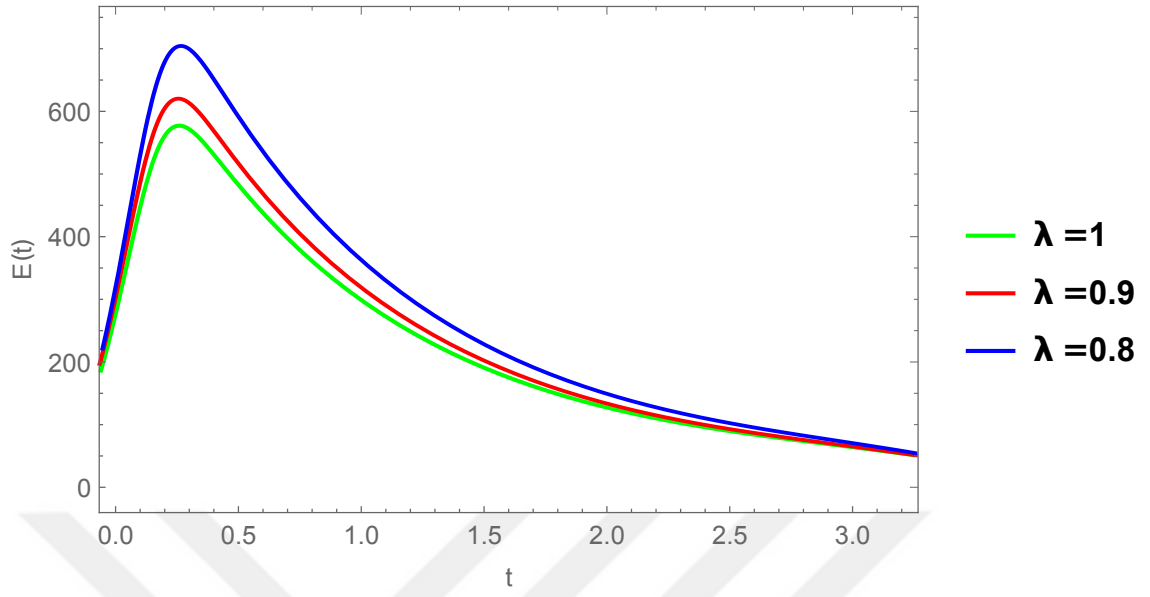
$$\begin{aligned}
R_{n+1} = R_n + \kappa_6(t_n, R_n(t)) & \left\{ \frac{1-\lambda}{ABC(\lambda)} + \frac{\lambda}{ABC(\lambda)h} \right. \\
& \times \left[\frac{2ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] - \frac{\lambda}{ABC(\lambda)\Gamma(\lambda)h} \left[\frac{ht_n^\lambda}{\lambda} - \frac{t_n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] \Big\} \\
& + \kappa_6(t_{n-1}, R_{n-1}(t)) \left\{ \frac{\lambda-1}{ABC(\lambda)} - \frac{\lambda}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \right. \\
& \times \left[\frac{ht_{n+1}^\lambda}{\lambda} - \frac{t_{n+1}^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{t^{\lambda+1}}{hABC(\lambda)\Gamma(\lambda)} \right] \Big\} + {}^6\mathfrak{R}_\lambda
\end{aligned} \tag{4.102}$$

olup $\|{}^6\mathfrak{R}_\lambda\|_\infty < M$ 'ye ulaşılır.

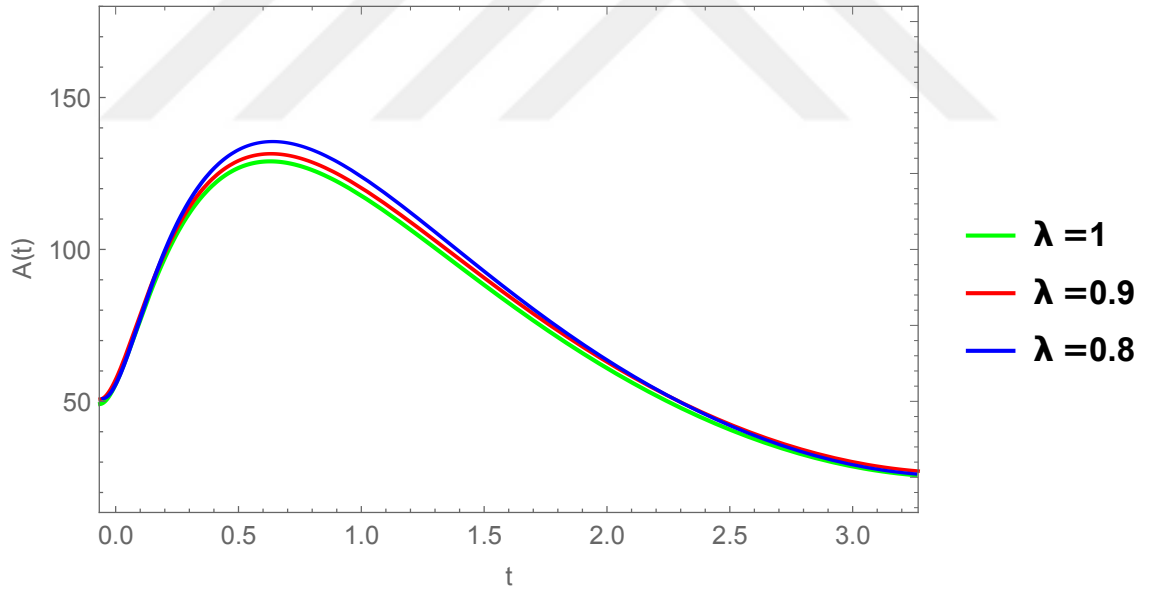
Nümerik çözümü yukarıdaki gibi yapılan (4.4) SEACHR matematiksel modelinin farklı λ kesirli türev değerleri için simülasyonları aşağıdaki gibidir.



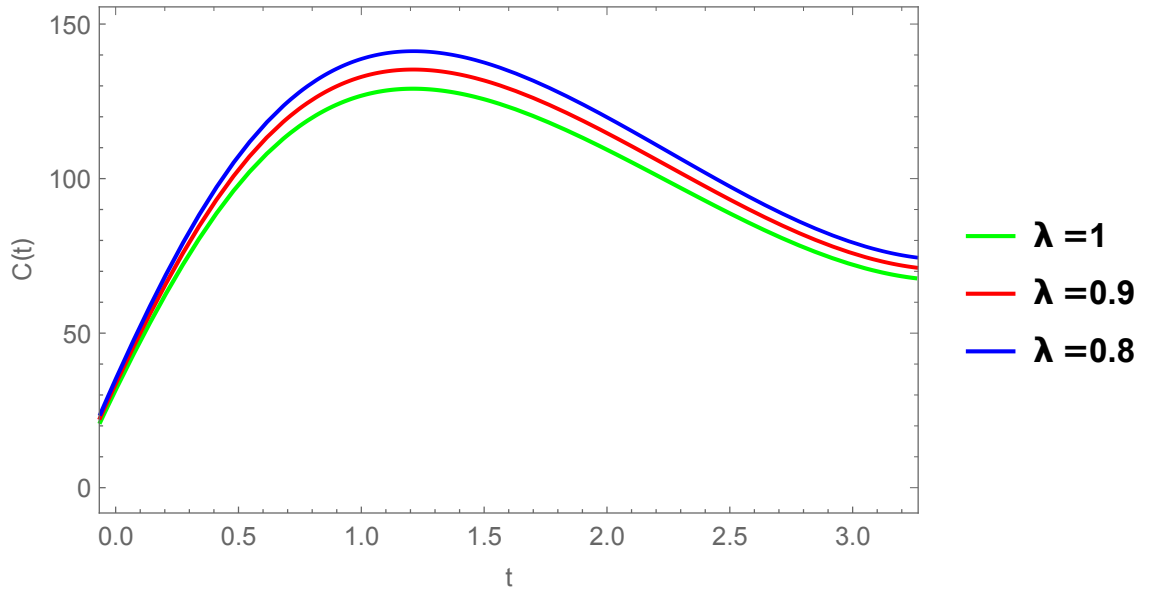
Şekil 4.1. S fonksiyonunun farklı λ degerleri için simülasyonları



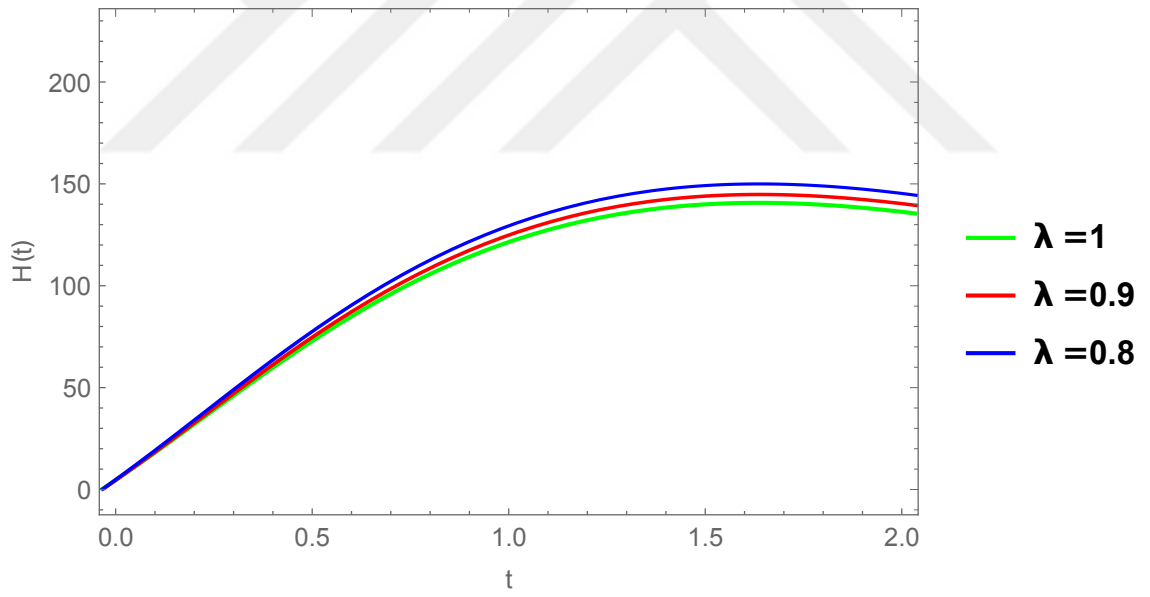
Şekil 4.2. E fonksiyonunun farklı λ degerleri için simülasyonları



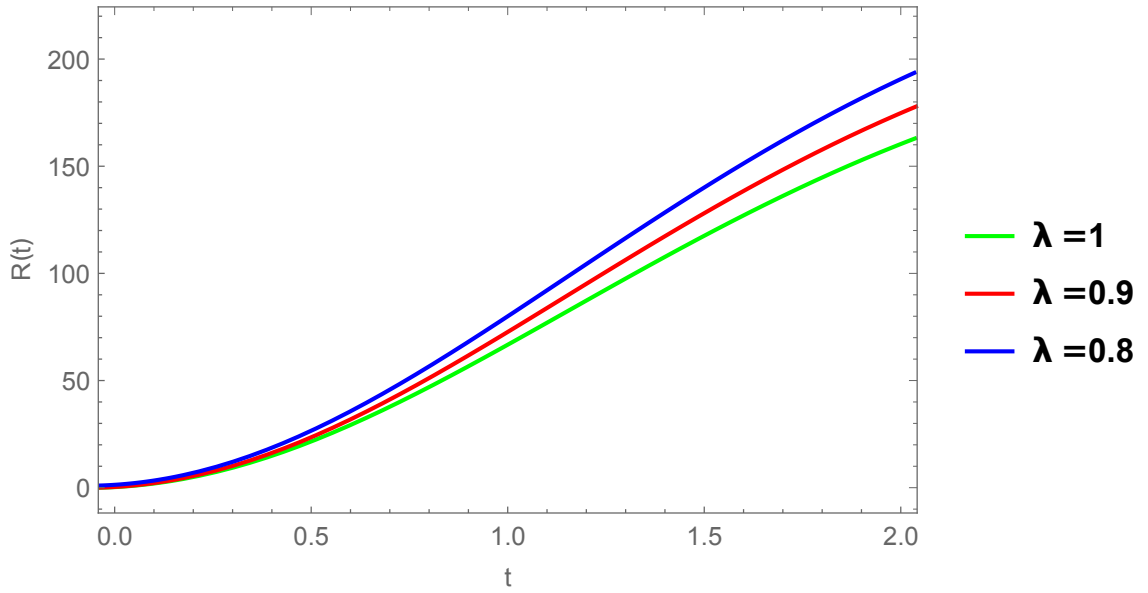
Şekil 4.3. A fonksiyonunun farklı λ degerleri için simülasyonları



Şekil 4.4. C fonksiyonunun farklı λ değerleri için simülasyonları



Şekil 4.5. H fonksiyonunun farklı λ değerleri için simülasyonları



Şekil 4.6. R fonksiyonunun farklı λ degerleri için simülasyonları

Sırasıyla ilk grafikte S fonksiyonunun zamana bağlı olarak azaldığı görülmektedir. İkinci grafikte verilen E fonksiyonu ise belli bir t zamanına kadar artarken sonrasında düşerek azalmaya başlamış ve o şekilde devam etmiştir. Üçüncü grafikte A fonksiyonu da E fonksiyonu gibi belli bir artış yaşadıktan sonra düşüşe geçmiştir. Dördüncü grafikte verilen C fonksiyonu belli bir süre arttıktan sonra düşüşe geçmiştir. Fakat E ve A fonksiyonlarında farklı olarak düşüş belli bir seviyeye kadar olmuştur. Yani başlangıç değerin altına kadar gelmemiştir. Diğer yandan beşinci ve altıncı grafikler incelendiğinde sırasıyla H ve R fonksiyonlarında sürekli bir artış gözlemlenmiştir. Genel olarak tüm grafikler incelendiğinde Hepatit B virüsünün değişimi ile aynı şekilde ilerlemiştir. Bu sonuçlarla çalışmanın doğru yönde ilerlediği ve farklı kesirli türev değerleri ile çözülen modelin doğru sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

5. SONUÇ

Bu tezde Hepatit B virüs matematiksel modelinin analizi yapılmıştır. Altı farklı diferansiyel denklemden oluşan matematiksel model şüpheli birey popülasyonu, temaslı birey popülasyonu, kronik olmayan akut hasta popülasyonu, taşıyıcı birey popülasyonu, hastaneye kaldıran birey popülasyonu ve iyileşen birey popülasyonu olarak incelenmiştir. İlk olarak tam sayılı mertebeden matematiksel model kesirli mertebeden Atangana-Baleanu operatörüne genişletilmiştir. Genişletilen modelin sabit nokta teoremi yardımıyla varlık ve teklik çözümleri incelenmiştir. Daha sonra model Adams-Basford şeması yöntemi ile nümerik olarak çözülmüştür. Sonuç olarak bir matematiksel modelin kesirli türev operatörleri ile analizinin yapılması, süreç hakkında daha güvenilir yorum yapılmasını sağlamıştır.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R. (1953). a propos dune note de humbert, pierre. *Comtes rendus hebdomadaires des seances de l academie des sciences*, 236(21):2031–2032.
- Altin, A. (2011). *Uygulamalı Matematik*. Gazi Kitapevi.
- Arslan, D. (2013). *Kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümü*. PhD thesis, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Atangana, A. ve Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with non-local and non singular kernel: Theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 20(2):763–769.
- Atangana, A. ve Owolabi, K. M. (2018). New numerical approach for fractional differential equations. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 13(1):3.
- Bashforth, F. ve Adams, J. C. (1883). *An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid*. University Press.
- Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—ii. *Geophysical Journal International*, 13(5):529–539.
- Caputo, M. ve Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):1–13.
- Hristov, J. (2015a). Approximate solutions to time-fractional models by integral-balance approach. In *Fractional dynamics*, s. 78–109.
- Hristov, J. (2015b). Diffusion models of heat and momentum with weakly singular kernels in the fading memories: How the integral-balance method can be applied? *Thermal Science*, 19(3):947–957.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., ve Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. elsevier.

- Letnikov, A. (1868). Theory of differentiation of fractional order. *Mat. Sb*, 3(1):1868.
- Losada, J. ve Nieto, J. J. (2015). Properties of a new fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):87–92.
- Miller, K. S. ve Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley.
- Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier.
- Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations, vol. 198 of mathematics in science and engineering.
- Podlubny, I., Magin, R. L., ve Trymorush, I. (2017). Niels henrik abel and the birth of fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 20(5):1068–1075.
- Sökmen, Y. (2012). *Genelleştirilmiş Caputo Kesirli Türevi Ve Uygulamaları, Ahi Evran Üniversitesi*. PhD thesis, Yüksek Lisans Tezi, Kırşehir.
- Ullah, S., Khan, M. A., ve Gómez-Aguilar, J. (2019). Mathematical formulation of hepatitis b virus with optimal control analysis. *Optimal Control Applications and Methods*, 40(3):529–544.