

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ekrem TAŞDEMİRCİ

Hepatit C Modelinin Caputo Kesirli Türevi ile Analizi

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

AĞRI – 2025

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HEPATİT C VİRÜSÜNÜN CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ İLE ANALİZİ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Jüri: Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

Prof. Dr. İlknur KOCA

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Bu tez çalışmasında ölümcül sonuçlara yol açabilen Hepatit C virüsü için hazırlanmış matematiksel bir model Caputo kesir türev tanımı ile genişletilecektir. Genişletilmiş modelin analizi yapılacak, bu denklem sisteminin sabit nokta teoremi kullanılarak çözümünün varlığı ve teklik teoremleri kullanılarak çözümünün tekliği incelenecektir.

Son olarak matematiksel modelin Hyers-Ulam kararlılığı incelenecek ve her bir fonksiyonun farklı mertebeden kesirli türev değerleri için nümerik çözümler oluşturulup ayrıntılı analizi yapılacaktır.

2025, 74 sayfa

Anahtar Kelimeler: Matematiksel Modelleme, Caputo Kesirli Türev Operatörü, Hepatit C Virüsü, Varlık, Teklik, Nümerik Çözüm

ABSTRACT
MASTER'S THESIS
ANALYSIS OF HEPATITIS C VIRUS WITH CAPUTO FRACTIONAL
DERIVATIVE

Advisor Of Thesis: Assoc. Prof. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Jury: Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

Assoc. Prof. Dr. İlknur KOCA

Assoc. Prof. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

In this thesis, a mathematical model prepared for Hepatitis C virus, which can lead to fatal results, will be extended with the Caputo fractional derivative definition. The analysis of the extended model will be made, the existence of a solution of this system of equations using the fixed point theorem and the uniqueness of its solution using uniqueness theorems will be examined.

Finally, the Hyers-Ulam stability of the mathematical model will be examined and numerical solutions will be created for different order fractional derivative values of each function and detailed analysis will be done.

2025, 74 pages

Key Words: Mathematical Modeling, Caputo Fractional Derivative, Hepatitis C Virus, Existence, Uniqueness, Numerical Solution .

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında gemiyi limana salimen ulaştırma hedefiyle adeta bir kaptan misali gayreti, tecrübesi ve sabrıyla danışmanlığı akademik alanının ötesine geçerek kişisel rehberliğe dönüşen değerli hocam Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU 'ya şükranlarımı arz ederim. Kendisi, çalışmamın her aşamasında değerli görüşleri, teşvik ve eleştirileriyle katkıda bulunarak tezin kalitesini arttırmıştır.

Bu meşakkatli süreçte motive edici sözleri ve güzel gözleriyle her sıkıntıma paydaş olan, varlığıyla huzura erdiğim biricik eşim Gülsün 'e çalışmalarımınla büyüyen beni yoran ama hep güldüren kızım Beste 'ye ve oğlum İbrahim 'e hayatımın her döneminde yanımda olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Haziran 2025

Ekrem TAŞDEMİRCİ

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	6
2.1. Gama ve Beta Fonksiyonu	6
2.2. Mittag-Leffler Fonksiyonu	9
2.3. Laplace Dönüşümü	10
2.4. Kesirli Mertebeden Türev ve İntegral Operatörleri	14
2.4.1. Riemann- Liouville Kesirli Türevi ve İntegrali	14
2.4.2. Caputo Kesirli Türevi	18
2.4.3. Caputo-Fabrizio kesirli Türev ve İntegral Operatörü	20
2.4.4. Atangana-Baleanu kesirli Türev ve İntegral Operatörü	23
3. MATERYAL VE YÖNTEM	26
3.1. Caputo Kesirli Türevi	26
3.2. Varlık -Teklik Çözümü	30
3.3. Hyers-Ulam Kararlılığı.....	34
3.4. Nümerik Çözüm Yöntemi	36
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	40
4.1. Hepatit C Virüsü Caputo Modeli	40
4.2. Çözümün Varlık ve Tekliği	41
4.3. Kararlılık Analizi	49
4.4. Nümerik Çözüm	52
5. SONUÇ	61
KAYNAKLAR	62

ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1 Klasik ve Kesirli Analizin Soy Ağacı	2
1.2 Hepatit C enfeksiyonun doğal seyri	4
1.3 2007 yılı DSÖ verilerine göre dünyadaki ülkelerin HCV yayılım haritası	4
2.1 Gama fonksiyonu	7
2.2 Beta fonksiyonu	8
2.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu	9



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R	Reel Sayılar
R^+	Pozitif Reel Sayılar
$\in$	Elemanıdır
$Re(z)$	z Karmaşık Sayısının Reel kısmı
$Re(\lambda)$	λ Karmaşık Sayısının Reel kısmı
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\geq$	Büyük veya eşittir
$\leq$	Küçük veya eşittir
$n!$	Faktöriyel ($n!=1.2.3...n$)
$\lim$	Limit
Σ	Toplam
$\int$	İntegral
Γ	Gama fonksiyonu
β	Beta fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}$	Mittag-Leffler fonksiyonu
$\mathcal{L}$	Laplace fonksiyonu
I_x^α	α . mertebeden Rieemann-Liouville kesirli integrali
D_x^α	α . mertebeden Rieemann-Liouville kesirli türevi
${}^C I_x^\alpha$	α . mertebeden Caputo kesirli integrali
${}^C D_x^\alpha$	α . mertebeden Caputo kesirli türevi
${}^{CF} I_x^\alpha$	α . mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli integrali
${}^{CF} D_x^\alpha$	α . mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli türevi
$M(\alpha)$	Normalleştirme sabiti
${}^{AB} I_t^\lambda f(t)$	Atangana-Baleanu Kesirli İntegrali
${}^{ABC} \mathfrak{D}^\lambda f(t)$	Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli türevi
${}^{ABR} \mathfrak{D}^\lambda f(t)$	Riemann Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli türevi

1. GİRİŞ

Gerçek hayat problemlerinin laboratuvar ortamında deneysel olarak incelenmesinin zorluğu ve maliyetli olması gibi eksikliklerini gidermesinin yanında mevcut durumun analizi ve sonrasına yönelik tahminlere olanak vermesi matematiksel modellerin oluşturulmasında etkili olan faktörlerdir.

Son yıllarda özellikle küresel çapta etkili olan Covid-19 salgını ile beraber matematiksel modellemelerin, hastalıkların seyrini incelemesi, hangi tedavi tekniklerinin etkili olabileceğini ve hangilerinin etkili olamayacağını tespit etmesi, mevcut durumuna göre sağlık politikaları geliştirmeye imkân sağlaması gibi faydaları bilim çevrelerince kabul edilmiş ve birçok alanda yaygın olarak kullanılır hale gelmiştir.

Salgın hastalıkların sadece bireyleri değil ülkeleri de olumsuz etkilediği ve toplumsal, sosyal, ekonomik vb. kayıplara sebep olduğu bilinen bir gerçektir. (Öz ve diğ.).

Salgın hastalıkların davranışlarını anlamak ve çözümler üretmek için geçmişten bu yana birçok çalışma yapılmış, farklı istatistiksel yöntem ve modeller kullanılarak mevcut veriler değerlendirilmiştir (Alemdar Kılıç (2017)).

Kısaca salgın hastalıkların oluşum, gelişim ve seyrini istatistiksel yöntemlerle inceleyen bilim dalı olarak tarif edebileceğimiz epidemiyolojinin matematik ile sentezinden hem bulaşıcı hastalıklarla hem de bulaşıcı olmayan hastalıklarla ilgilenen matematiksel epidemiyoloji kavramı ortaya çıkmıştır. 1760 yılında Dr. Daniel Bernoulli'nin dönemin ölümcül salgını çiçek hastalığı için geliştirilen aşılama yöntemini inceleme amacıyla geliştirdiği ve "An attempt at a new analysis of the mortality caused by smallpox and of the advantages of inoculation to prevent it" adıyla yayımladığı bilimsel çalışmasında ele aldığı model, matematiksel epidemiyoloji alanında ilk matematiksel modelleme çalışması olarak bilinmektedir. A.G.McKendrick ve W.O Kermack ikilisi 1927 yılında yayımladıkları "A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics" adlı makaleleri ile literatürde SIR adıyla bilinen yeni bir matematiksel model tanıtmış ve bulaşıcı hastalıkların matematiksel modellemesi alanındaki çalışmalara yeni bir ivme kazandırmışlardır (Kermack ve McKendrick (1927)). Modelleme çalışmaları 2019 yılında bütün dünyayı etkisi altına alan Covid-19 salgınıyla birlikte bir kez daha bilim insanlarının ilgisini çekmiş ve sağlık politikalarına yön verebilecek modellerin oluşumuna ön ayak olmuştur.

Dr. Daniel Bernoulli'nin başlattığı bu fikir ışığında farklı modeller ve durumlar için farklı kesirli türev ve integral tanımlarının kullanıldığı çalışmalar yapılmış ve insanlığın hizmetine sunulmuştur (Koca ve dig. (2020), Koca (2018b), Koca (2018a), Koca ve Atangana (2017), Dokuyucu Ali ve dig. (2018), Dokuyucu (2020), Dokuyucu ve Dutta (2020), Dokuyucu ve Celik (2021), Dokuyucu ve Dutta (2021)).

Gerçek dünyanın değişim halindeki dinamik sistemlerini içeren bir matematiksel model oluşturmak ve yorumlamak için türeğe ihtiyaç vardır. Kavram ve terimleri sebebiyle gerçek hayatla bağlantısız, soyut bir bilim dalı olarak düşünülmüşse de aksine kökleri gerçek dünya problemlerinden beslenen fizik, kimya, biyoloji, tıp ve mühendislik gibi disiplinlerle ilişkisi kadim bir bilim dalı olan matematiğin yaklaşık 300 yıllık bir geçmişe sahip konusu türev, kendisine ilgi duyan araştırmacı ve analizci matematikçilerin eliyle sürekli bir gelişime tabi tutulmuştur.

Tarih sahnesine ilk olarak İsaac Newton ile çıkan türev, G.W. L'Hospital ile G.F. Leibnez arasındaki mektuplaşma trafiği neticesinde takvimler 30.09.1695 tarihini gösterdiğinde kesirli türevi doğurmuş ve bilim literatürüne kazandırmıştır. Zaman içerisinde birçok kesirli türev tanımı yapılmış olup kronolojik sırayla L. Euler (1730), J. B. J. Fourier (1820-1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1855), G. F. B. Riemann (1847-1876), M. Caputo (1967), K. S. Miller, B. Ross (1993) M. Caputo, M. Fabrizio (2015) A. Atangana, D. Baleanu (2016) (ABC ve ABR) şeklinde örneklendirebileceğimiz tanımlamalara daha yenilerinin eklenmesi olağandır.



Şekil 1.1. Klasik ve Kesirli Analizin Soy Ağacı

Klasik türevde olduğu gibi tek bir türev tanımının olmayışı kesirli türevin klasik türevden en önemli farkıdır. 1998 yılında Podlubny, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler üzerine detaylı bir eser kaleme almış ve ‘Fractional Differential Equations’ adıyla yayımlamıştır (Podlubny (1998)).

Gerçek dünya olayları modellenirken birçok biyolojik olayda var olan sistem hafıza etkisini ve kalıtsal özelliklerini daha iyi tanımlayabiliyor olmasından ötürü kesirli mertebeli denklemler ile oluşturulmuş matematiksel modeller klasik tamsayı mertebeli denklemlerle oluşturulan modellere göre daha fazla tercih edilmektedir.

Günümüzde de salgın hastalıkların analizine yönelik kesirli türev tanımlarıyla yapılan modelleme çalışmaları devam etmekte olup bu çalışmaların etkili sonuçlar verdiği görülmektedir (Dokuyucu ve Dutta (2020)).

Kesirli türev matematikçilerin meraklı zihinlerinin eleğinden geçerek sürekli değişim geçirmiş ve aşağıda kısaca yazıya döktüğümüz kesirli türevlere ait dezavantajlar çekirdek fonksiyonlarının değiştirilmesiyle giderilmiştir.

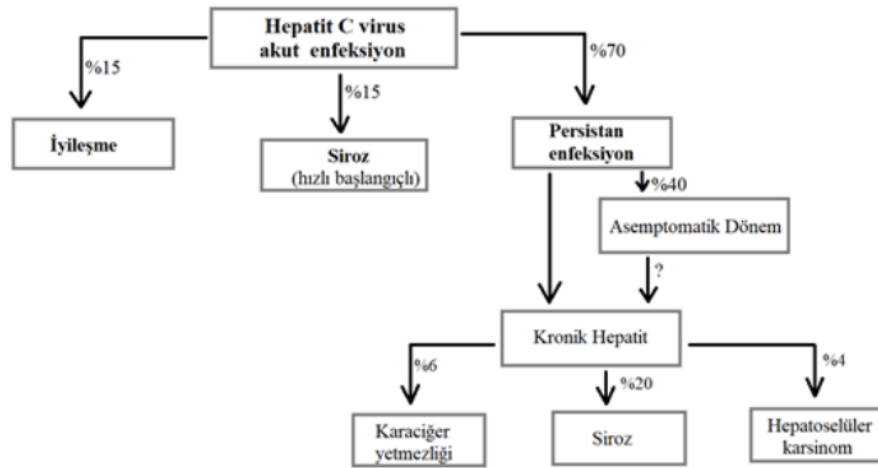
Riemann – Liouville kesirli türevinin sabitin türevini sıfır yapamama sorunu 1967 yılında M. Caputo tarafından sabitin türevini sıfır yapan yeni bir kesirli türev tanımı yapılarak çözülmüştür. Yerellik ve teklik gibi zayıflıkları olan bu yeni Caputo kesirli türevi 2015 yılında M. Caputo ile M. Fabrizio ortaklığında geliştirilen ve üstel fonksiyonun çekirdek olarak kullanıldığı Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörüyle teklik problemi çözülerek iyileştirilmiş, daha sonra 2016 yılında Mittag-Leffler fonksiyonunun çekirdek olarak kullanıldığı A. Atangana ve D. Baleanu tarafından geliştirilen yeni türev operatörü tanımıyla Caputo-Fabrizio kesirli türevinin yerellik problemi de ortadan kalkmıştır.

Bu tez çalışmasında ele alınan matematiksel modelde başlangıç koşullarını içeren kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için daha kullanışlı olması sebebiyle Caputo kesirli türev tanımı tercih edilmiştir.

Şimdi sonraki bölümlerde Caputo kesirli türev operatörü kullanılarak matematiksel modeli analiz edilecek olan Hepatit C virüsü (HCV) ile ilgili bazı önemli bilgilere değinilecektir.

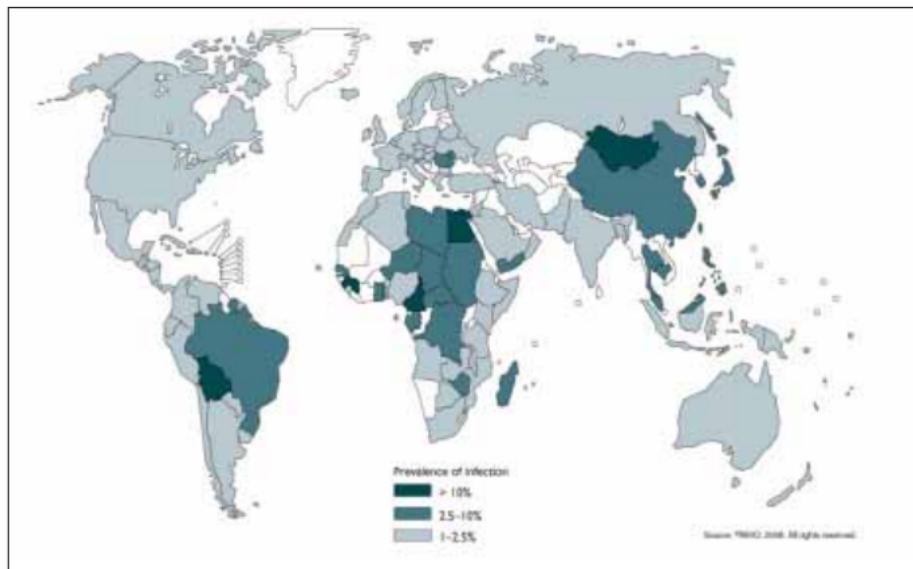
1970 li yıllara kadar hepatotropik virüs kaynaklı Hepatit A ve Hepatit B hastalığı biliniyordu. 1989 yılına gelindiğinde ise rapor edilen yeni bulgular üzerine yapılan araştırmalarda ne A ne de B cinsi hepatit olmayan yeni bir hepatit virüsü keşfedilmiş olup bu yeni virüs Hepatit C adıyla salgın hastalık bilimi olan epidemiyolojide kendine yer bulmuştur (Feinstone ve dig. (1975), Choo ve dig. (1989), Kuo ve dig. (1989), Dietz ve Maasoumy (2022)).

Hepatit C virüsü kalıtsal olmayan çoğunlukla sessiz ve herhangi bir belirti göstermeden ilerleyerek karaciğer hücresinin tahribine yol açan bir Ribonükleik asit (RNA) virüsüdür. Kronikleşme eğilimi gösteren bir virüs olan HCV sinisi bir şekilde ilerleyerek geç dönemde siroza, karaciğer yetmezliğine, kansere ve neticede ölümlere yol açabilmektedir (Gürel ve Eminler (2010), Seeff (2009), Natasha ve dig. (2011)).



Şekil 1.2. Hepatit C enfeksiyonunun doğal seyri

Herhangi bir aşısı olmayan Hepatit C virüsünün tek doğal konağı insanlardır. İnsan dışı primatların HCV'nin kaynağı olabileceği düşünülmüşse de farklı maymun türlerinde yapılan taramalar bu görüşü desteklememiştir (Ergünay ve Abacıoğlu (2015)).



Şekil 1.3. 2007 yılı DSÖ verilerine göre dünyadaki ülkelerin HCV yayılım haritası

Dünya Sağlık Örgütünün 2019 küresel Hepatit raporuna göre tüm dünyada 58 milyon insanın kronik Hepatit C virüsü taşıdığı tahmin edilmektedir. Her yıl yaklaşık 1,5

milyon yeni Hepatit C virüsü vakası meydana gelirken çoğunluğu siroz ve hepatosellüler karsinom olmak üzere yaklaşık 290.000 kişinin Hepatit C' den öldüğü tahmin edilmektedir (Yunus Gürbüz ve Dig (2024)).

Bulaş yolları; damar içi madde kullanımı, kan ve kan ürünlerinin transfüzyonu, cinsel temas, hemodiyaliz, dövme, piercing vb. olan Hepatit C virüsü için Dünya Sağlık Örgütü (DSÖ) 2030 yılına kadar HCV insidansında %80 azalma hedeflemektedir (Larney ve dig. (2017), Choo ve dig. (1989), Duncan ve dig. (2020), Alter (2007), Alastair ve dig. (2019) DSÖ (2017)).

Yapılan literatür taramalarında halk sağlığını tehdit eden Hepatit C ile ilgili yayılımını anlamak ve tedavi yöntemlerinin etki düzeyini incelemek amaçlı matematiksel modelleme çalışmalarının varlığı tespit edilmiştir (Dayan ve dig. (2023), Vujovic ve Krstic (2020), Lestari ve dig. (2023)).

Bu çalışmalardan farklı olduğunu ve salgın hastalık modellemeleri alanında mesai harcayan araştırmacılara yön tayin edebileceğini düşündüğümüz Hepatit C virüsünün Caputo kesirli türevi ile analizi çalışmamız beş bölümden oluşmakta olup; ilk bölümde kesirli türevin kısa bir tarihçesi anlatılmış akabinde Hepatit C ile ilgili önemli hususlara değinilmiştir. İkinci bölüm kullanılacak tanım, teorem ve lemmalara, üçüncü bölüm araştırma bulgularında kullanılan tanım ve teoremlere, dördüncü bölüm üzerinde çalışılan matematiksel modelin varlığının ve tekliğinin ispatına, modelin kararlılık analizi ile nümerik çözümlerine son bölüm ise genel bir değerlendirmenin yapıldığı sonuç kısmına ayrılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde faktöriyel genelleştirme işlemlerinde kullanılacak olan Gama fonksiyonu, kuvvet fonksiyonlarının kesirli türevlerini hesaplamada kullanılacak olan Beta fonksiyonu, lineer kesirli diferansiyel denklemleri çözerken kullanılacak olan Mittag- Leffler fonksiyonu tanıtılacaktır. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev operatörleri ile Caputo anlamında Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türev operatörleri incelenecektir.

2.1. Gama ve Beta Fonksiyonu

Tanım: $x \in \mathbb{C}$ ve $x > 0$ olmak üzere kompleks düzlemin sağ yarısında düzgün yakınsak olması koşuluyla

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilen fonksiyon Gama fonksiyonu olarak tanımlanır (Podlubny (1998)).

Karmaşık sayılar doğrusunun sol yarısı yani $x < 0$ değerleri için (2.1) denkleminde e^{-t} yerine $\lim_{y \rightarrow \infty} (1 - \frac{t}{y})^y$ yazılarak n defa integral alınırsa

$$\Gamma(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y! x^y}{x.(x+1) \dots (x+y)} \quad (2.2)$$

ifadesi elde edilir. Gama fonksiyonunun limit tanımı olarak bilinen (2.2) denklemini

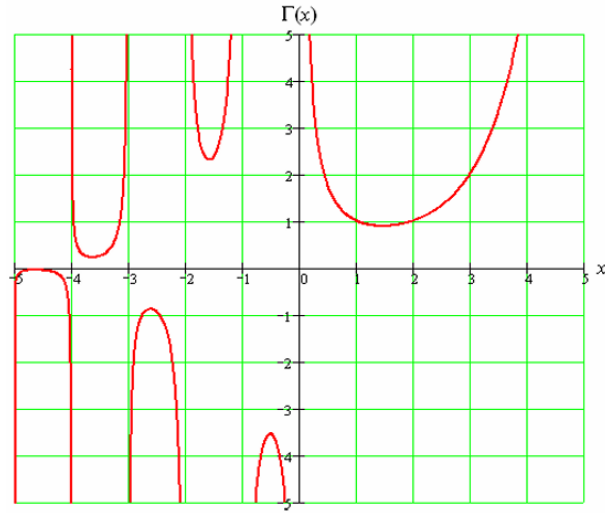
$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x.(x+1) \dots (x+y)}{y! x^y} \quad (2.3)$$

şeklinde yazarsak $\frac{1}{\Gamma(x)}$ ifadesi negatif tam sayılarda dahil olmak üzere bütün karmaşık sayılar için tanımlı olur.

Faktöriyel fonksiyonu olarak bilinen Gama fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x! \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \frac{\pi}{\sin \pi x} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Tanım ve özellikleri verilen Gama fonksiyonunun grafiği aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Gama fonksiyonu

Tanım: Beta fonksiyonu, üstel fonksiyonların kesirli türevlerini hesaplamada oldukça kullanışlıdır. $\mu, \nu > 0$ koşulları altında Beta fonksiyonu,

$$\beta(\mu, \nu) = \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{\nu-1} dt \quad (2.5)$$

veya

$$\beta(\mu, \nu) = \int_0^\infty \frac{\lambda^{\mu-1}}{(1+\lambda)^{\mu+\nu}} d\lambda \quad (2.6)$$

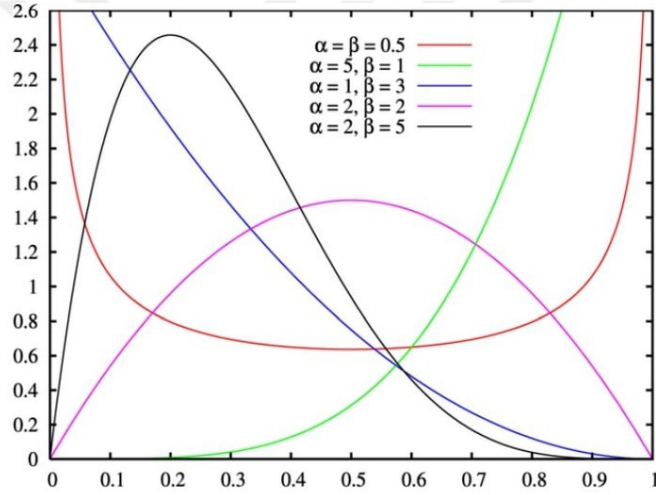
şeklinde tanımlanır (Podlubny (1998)).

Simetrik bir fonksiyon olan Beta fonksiyonu yardımıyla Gama fonksiyonu $0 < \text{Re}(x) < 1$ ve $x \neq 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ koşulları altında

$$\begin{aligned} \beta(\mu, 1-\mu) &= \Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \pi\mu} \\ \beta(\mu) &= \frac{\Gamma(\mu)^2}{\Gamma(2\mu)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

eşitliklerini de sağlar (Podlubny (1998)).

Tanım ve özellikleri verilen Beta fonksiyonunun grafiği aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 2.2. Beta fonksiyonu

Teorem: $\beta(\mu, \nu) = \beta(\nu, \mu)$ eşitliğinden hareketle Beta fonksiyonu ile Gama fonksiyonu arasında

$$\beta(\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)} \quad (2.8)$$

şeklinde bir ilişki vardır (Podlubny (1999a)).

İspat: Laplace dönüşümü yardımıyla Gama fonksiyonu ile Beta fonksiyonu arasındaki bu ilişkinin tespiti için aşağıdaki yol izlenebilir.

$$h_{\mu, \nu}(t) = \int_0^t \lambda^{\mu-1} (1 - \lambda)^{\nu-1} d\lambda \quad (2.9)$$

integralinden hareketle $h_{\mu, \nu}(t)$ nın $t^{\mu-1}$ ve $t^{\nu-1}$ fonksiyonlarının konvülasyonu olduğu ve $h_{\mu, \nu}(1) = B(\mu, \nu)$ eşitliğinin sağlandığı aşıkardır. Farklı iki fonksiyonun konvülasyonunun Laplace dönüşümü, verilen iki fonksiyonunun Laplace dönüşümünün çarpımına eşit olduğu bilindiğinden

$$H_{\mu, \nu}(s) = \frac{\Gamma(\mu)}{s^\mu} \cdot \frac{\Gamma(\nu)}{s^\nu} = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{s^{\mu+\nu}} \quad (2.10)$$

denklemini yazılabilir. $H_{\mu, \nu}(t)$ fonksiyonu $h_{\mu, \nu}(s)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümüdür. $\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)$ çarpımı sabit olduğundan eşitliğin sağ tarafına ters Laplace uygulanırsa $h_{\mu, \nu}(t)$ orjinal fonksiyonu elde edilebilir. Bu durumda

$$h_{\mu, \nu}(t) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)} t^{\mu+\nu-1} \quad (2.11)$$

olur ve $t = 1$ alınırsa

$$\beta(\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)} \quad (2.12)$$

bulunur. Buradan da

$$\beta(\mu, \nu) = \beta(\nu, \mu) \quad (2.13)$$

sonucuna ulaşılır.

2.2. Mittag-Leffler Fonksiyonu

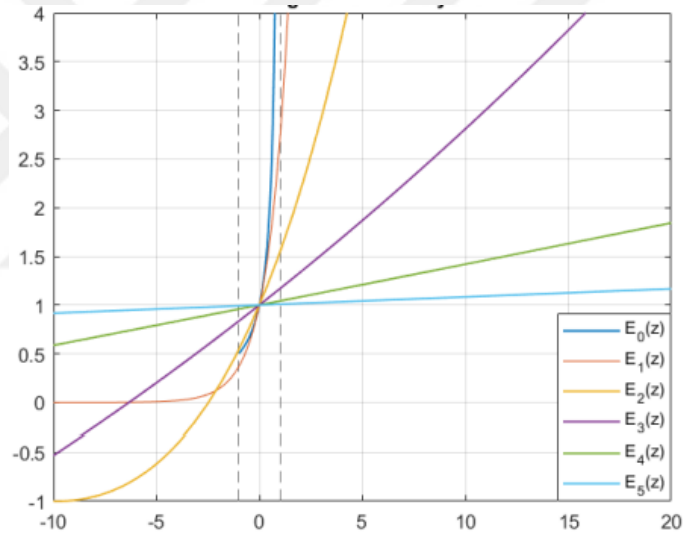
1903 yılında İsveçli Matematikçi Magnus Gustaf Mittag-Leffler tarafından oluşturulan ve üstel fonksiyonun genelleştirilmesi şeklinde tanımlanabilecek olan Mittag-Leffler fonksiyonu aşağıdaki şekilde formüle edilebilir.

Tanım: $\alpha > 0$ olması koşuluyla bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (z \in \mathbb{C}, \quad \text{Re}(\alpha) > 0) \quad (2.14)$$

şeklinde ifade edilir (Kilbas ve dig. (2006)).

Bir parametrelili Mittag Leffler fonksiyonlarına ait grafik aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonunda $\alpha = 1$ alınırsa

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (2.15)$$

elde edilir.

(2.14) de formüle edilen Mittag-Leffler fonksiyonuna 1953 yılında R. P. Agarwal ve A. Erdelyi adlı bilim adamlar tarafından Laplace dönüşümü uygulanmış ve aşağıda tanımı gösterilen iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu elde edilmiştir.

Tanım: İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (z, \beta \in C, \quad Re(\alpha) > 0) \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanır (Kilbas ve dig. (2006)).

İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= e^z \\ E_{1,2}(z) &= \frac{e^{z-1}}{z} \\ E_{2,1}(z^2) &= \cosh(z) \\ E_{2,2}(z^2) &= \frac{\sinh(z)}{z} \\ E_{\frac{1}{2},1}(z) &= e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Mittag-Leffler fonksiyonunun genel denklemi

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\} \quad (2.18)$$

şeklinde yazılabilir (Kilbas ve dig. (2006)).

2.3. Laplace Dönüşümü

Diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere çevirmede oldukça kullanışlı olan Laplace dönüşümü fizik, mühendislik ve matematik gibi birçok alanda kendisine önemli bir yer bulmaktadır.

$f(\varrho)$, $\varrho \geq 0$ için tanımlı ϱ reel değişkeninin bir fonksiyonu olduğu ($\varrho < 0$ için $f(\varrho)_0$ olduğu varsayılabilir.) ve bunun yanında $s > 0$ reel veya kompleks bir parametre olduğu kabulünden hareketle ϱ değişkeninin bir $e^{-s\varrho}$ üstel fonksiyonu kullanılarak

$$\int_0^{\infty} f(\varrho) e^{-s\varrho} d\varrho$$

şeklinde bir integralin varlığını sağlayacak s parametresi için bir değer bulunabilirse bu integrale $f(\varrho)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir ve söz konusu dönüşüm $L\{f(\varrho)\}$ veya $f(s)$ ifadeleri ile gösterilir. Laplace dönüşümü için genel olarak aşağıdaki tanım kullanılır.

Tanım: f fonksiyonun $\varrho > 0$ zaman değişkeninin tek değerli bir fonksiyonu olduğu varsayımından hareketle $f(\varrho)$ fonksiyonuna ait Laplace dönüşümü

$$L\{f(\varrho)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(\varrho)e^{-s\varrho}d\varrho \quad (s \in C) \quad (2.19)$$

şeklinde ifade edilir (Povstenko (2015)).

Bir $F(\varrho)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $L\{F(\varrho)\} = f(s)$ ise bu durumda $F(\varrho)$ fonksiyonu $f(s)$ Laplace dönüşümünün ters Laplace dönüşümü olarak ifade edilir ve

$$F(\varrho) = L^{-1}\{f(s)\}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki L^{-1} operatörü ters Laplace dönüşüm operatörü adını alır ve ters Laplace dönüşümü için genel olarak aşağıdaki tanım kullanılır.

Tanım: $\varrho > 0$ ve $L\{f(\varrho)\} = F(s)$ kabul edilsin. Bu durumda ters Laplace dönüşümü

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(\varrho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{s\varrho}ds, \quad \varrho > 0, \quad (s \in C) \quad (2.20)$$

şeklinde formüle edilir (Povstenko (2015)).

Kesirli dereceden diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri hesaplanırken ters Laplace dönüşümü kullanılabilir ve bu işlemle önemli sonuçlar elde edilebilir. Örneğin ters Laplace dönüşümü yardımıyla iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$L^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} + \lambda}\right\} = \varrho^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda\varrho^{\alpha}) \quad (2.21)$$

şeklinde elde edilir (Diethelm ve dig. (2004)).

Eğer özel olarak sırasıyla β değerleri $\beta = 1, \beta = 2$ ve $\beta = \alpha$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + \lambda}\right\} &= E_{\alpha,1}(-\lambda\varrho^{\alpha}) \\ L^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha} + \lambda}\right\} &= \varrho E_{\alpha,2}(-\lambda\varrho^{\alpha}) \\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha} + \lambda}\right\} &= \varrho^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda\varrho^{\alpha}) \end{aligned}$$

sonuçlarına ulaşılır.

Laplace dönüşümü aşağıda verilen özelliklere sahiptir.

1. $L\{g(\varrho)\} = G(s), \quad L\{f(\varrho)\} = F(s)$ ve $c_1, c_2 \in R$ olmak üzere

$$L\{c_1f(\varrho) + c_2g(\varrho)\} = c_1L\{f(\varrho)\} + c_2L\{g(\varrho)\} = c_1F(s) + c_2G(s) \quad (2.22)$$

linierlik özelliği olarak bilinen eşitlik sağlanır.

2. $F(\varrho)$ fonksiyonunun integrali $I\{f(\varrho)\} = \int_0^\varrho f(\tau)d\tau$ o şekilde verilecek olursa bu durumda Laplace dönüşümü $L\{I\{f(\varrho)\}\} = \frac{1}{s}F(s)$ şeklinde ifade edilir.

Aynı şekilde n katlı $I^n f(\varrho) = \int_0^\varrho d\varrho_1 \int_0^{\varrho_1} d\varrho_2 \dots \int_0^{\varrho_{n-1}} f(\varrho_n)d\varrho_n$ integralinin Laplace dönüşümü ise

$$L\{I^n f(\varrho)\} = \frac{1}{s^n}F(s) \quad (2.23)$$

şeklindedir.

3. $\varrho > 0$ olması koşuluyla $f(\varrho)$ ve $g(\varrho)$ fonksiyonlarının konvülyasyon çarpımı

$$f(\varrho) * g(\varrho) = \int_0^\varrho f(\varrho - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^\varrho f(\varrho)g(\varrho - \tau)d\tau \quad (2.24)$$

şeklinde ifade edilir. Konvülyasyon çarpımının Laplace dönüşümü alınacak olursa

$$L\{f(\varrho) * g(\varrho)\} = F(s)G(s)$$

şeklinde bulunur burada $L\{f(\varrho)\} = F(s)$ ve $L\{g(\varrho)\} = G(s)$ formundadır.

Teorem: $0 \leq \varrho \leq b$ kapalı aralığında süreklilik özelliğine sahip f ve g fonksiyonları verilsin.

Bu durumda

$$L\{f(\varrho) * g(\varrho)\} = L\{f(s)\}.L\{g(s)\}, \quad s > a \quad (2.25)$$

şeklinde elde edilen ifade, $f(\varrho)$ ve $g(\varrho)$ fonksiyonlarının konvülyasyon çarpımları olarak tanımlanır (Kilbas ve dig. (2006)).

İspat: Laplace dönüşümünün tanımı kullanılarak

$$L\{f(\varrho) * g(\varrho)\} = \int_0^\infty e^{-s\varrho} \left(\int_0^s f(\varrho)g(s - \varrho)d\varrho \right) ds \quad (2.26)$$

yazılır.

Sonrasında $0 < s < \infty$ ve $0 < \varrho < s$ eşitsizliklerinin sentezinden $0 < \varrho < s < \infty$ elde edilir. Buradan işleme devam edilirse

$$\int_0^\infty f(\varrho) \left(\int_s^\infty e^{-s\varrho} g(s - \varrho)ds \right) d\varrho \quad (2.27)$$

sonucuna ulaşılır. Burada $u = s - \varrho$ değişken değiştirme işlemi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
L\{f(\varrho) * g(\varrho)\} &= \int_0^\infty f(\varrho) \left(\int_0^\infty e^{-s\varrho} g(s - \varrho) ds \right) d\varrho \\
&= \int_0^\infty f(\varrho) \left(\int_0^\infty e^{-(u+\varrho)s} g(u) du \right) d\varrho \\
&= \int_0^\infty e^{-s\varrho} f(\varrho) \left(\int_0^\infty e^{-us} g(u) du \right) d\varrho \\
&= \int_0^\infty e^{-s\varrho} f(\varrho) d\varrho \int_0^\infty e^{-us} g(u) du \\
&= L\{f(\varrho)\} \cdot \{g(\varrho)\} \\
&= f(s) \cdot g(s)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

sonucu elde edilir. Burada eşitliğin her iki yanına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
L^{-1}\{f(s)\} \cdot \{g(s)\} &= \{f(\varrho)\} * \{g(\varrho)\} \\
&= \int_0^\varrho f(\varrho) g(\varrho - \tau) d\tau
\end{aligned} \tag{2.29}$$

veya

$$\begin{aligned}
L^{-1}\{f(s)\} \cdot \{g(s)\} &= \{g(\varrho)\} * \{f(\varrho)\} \\
&= \int_0^\varrho g(\varrho) f(\varrho - \tau) d\tau
\end{aligned} \tag{2.30}$$

sonuçlarına ulaşılır.

Laplace ve ters Laplace fonksiyonu ile ilgili daha fazla içerik ve detaya (Kilbas ve dig. (2006)) dan ulaşılabilir.

Şimdi sırasıyla $f(t) = C = \text{Sabit}$, $f(t) = t$ ve $f(t) = e^{at}$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri inceleyecek olursak

$f(t) = C$ sabit fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
L\{f(t)\} &= L\{C\} = \int_0^\infty C \cdot e^{-st} dt \\
&= C \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt \\
&= C \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-st}}{-s} \right) \Big|_0^b \\
&= C \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \right) \\
&= \frac{C}{s}, \quad s > 0
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

$f(t) = t$ fonksiyonu için,

$$L\{f(t)\} = L\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt$$

integralinde $u = t \implies du = dt$ ve $dv = e^{-st} \implies v = \frac{e^{-st}}{s}$ kısmi integral dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= L\{t\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^b - \int_0^b \frac{e^{-st}}{-s} dt \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\left[t \cdot \frac{e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right] \Big|_0^b \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-b}{s e^{sb}} - \frac{1}{s^2 e^{sb}} + \frac{1}{s^2} \right] \\ &= \frac{1}{s^2}, \quad s > 0 \end{aligned}$$

bulunur.

$f(t) = e^{at}$ kuvvet fonksiyonu için

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(s-a)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(s-a)e^{(s-a)b}} + \frac{1}{s-a} \right) \\ &= \frac{1}{s-a}, \quad s > 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

2.4. Kesirli Mertebeden Türev ve İntegral Operatörleri

Literatürde birçok tanımı yapılmış olan kesirli analizin tarihi 1695 lere dayanmaktadır. En sık kullanılan operatörler Riemann-Liouville ve Caputo yaklaşımlarıdır fakat bu operatörlerin bazı eksiklikleri bulunmaktadır. 2016 yılında söz konusu eksiklikleri gideren Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu integral ve türev tanımları yapılmıştır. Bu bölümde adı geçen operatörler incelenecektir.

2.4.1. Riemann- Liouville Kesirli Türevi ve İntegrali

Tanım: $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $0 \leq n - 1 < \alpha < n$, $n = [\alpha]$, $n \in \mathbb{N}$ şartları altında $\alpha > 0$ mertebeden Riemann- Liouville kesirli türevi

$$\begin{aligned} {}_0^{RL}D_u^\alpha f(u) &= \frac{d^n}{du^n} I_u^{n-\alpha} f(u) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{n-\alpha-1} f(\gamma) d\gamma \end{aligned} \quad (2.31)$$

şeklinde formüle edilir (Podlubny (1999a)).

Tanım: $f(u)$ fonksiyonunun $\alpha > 0$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevine ait Laplace dönüşümü ise

$$L[{}_0D_u^\alpha f(u)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k I^{n-\alpha} f(0^+) s^{n-k-1}, \quad n-1 < \alpha < n \quad (2.32)$$

şeklinde bulunur (Povstenko (2015)).

Riemann-Liouville kesirli türev operatörünün bilinmesi gereken birkaç temel özelliği aşağıda verilmiştir.

Teorem: $\alpha > 0$ ve $u > n$ olmak üzere

$${}_nD_u^\alpha ({}_nD_u^{-\alpha} f(u)) = f(u) \quad (2.33)$$

eşitliği sağlanır (Podlubny (1999a)).

İspat: $k-1 < \alpha < k$ için

$${}_nD_u^{-k} f(u) = {}_nD_u^{-(k-\alpha)} ({}_nD_u^{-\alpha} f(u)) \quad (2.34)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} {}_nD_u^\alpha ({}_nD_u^{-\alpha} f(u)) &= \frac{d^k}{du^k} [{}_nD_u^{-(k-\alpha)} ({}_nD_u^{-\alpha} f(u))] \\ &= \frac{d^k}{du^k} [{}_nD_u^{-k} f(u)] \\ &= f(u) \end{aligned} \quad (2.35)$$

sonucu ile ispat tamamlanmış olur. Buradan da sol Riemann-Liouville kesirli tanımının ters işlem özelliğine sahip olduğu ve sonuç olarak Riemann-Liouville kesirli integralinin, kesirli türevinin tersi olduğu görülür.

Riemann-Liouville kesirli türev operatörü

$${}^{RL}D^\alpha \lambda(f(u) + g(u)) = \lambda {}^{RL}D^\alpha f(u) + \lambda {}^{RL}D^\alpha g(u) \quad (2.36)$$

denklemleri ifade edebileceğimiz lineerlik özelliğine sahiptir.

Tanım: $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda $\alpha > 0$ mertebeden ${}_0^{RL}D_u^{-\alpha}$ Riemann- Liouville kesirli integrali

$${}_0^{RL}D_u^{-\alpha} f(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} f(\gamma) d\gamma, \quad u > 0 \quad (2.37)$$

veya

$${}_0^{RL}I_u^\alpha f(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} f(\gamma) d\gamma, \quad u > 0 \quad (2.38)$$

şeklinde formüle edilir. (Podlubny (1999a)).

Teorem: $f(t)$ fonksiyonu $t \geq a$ için sürekli olsun. O halde $f(t)$ fonksiyonun herhangi mertebeden kesirli integrali için

$${}_aD_t^{-\alpha}({}_aD_t^{-\beta} f(t)) = {}_aD_t^{-\alpha-\beta} f(t) \quad (2.39)$$

eşitliği elde edilir (Podlubny (1999a)).

İspat: $\alpha, \beta > 0$ için

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-\alpha}({}_aD_t^{-\beta} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} {}_aD_t^{-\beta} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \int_a^\tau (\tau - u)^{\beta-1} f(u) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) du \int_u^t (\tau - u)^{\beta-1} (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^t (t - u)^{\alpha+\beta-1} f(u) du \\ &= {}_aD_t^{-\alpha-\beta} f(t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

elde edilir ve bu denklem sistemi Riemann-Liouville kesirli integralinin toplama ve değişme özelliklerine sahip olduğunu gösterir.

Riemann-Liouville kesirli türev operatörünün bilinmesi gereken önemli özelliklerinden biri de aşağıdaki teoremdedir verilmiştir.

Teorem: $\alpha > 0$ ve $Re(\lambda) > -1$ olmak üzere $f(t) = t^\lambda$ fonksiyonunun α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$$I_t^\alpha f(t^\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + \alpha + 1)} t^{\lambda+\alpha} \quad (2.41)$$

şeklinde (Podlubny (1999a)).

İspat: (2.38) deki kesirli integral tanımı yardımıyla istenilen eşitlik

$$\begin{aligned}
I_t^\alpha f(t^\lambda) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\tau = ut, \quad d\tau = t du) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t)^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} u^\lambda t^\lambda t du \\
&= \frac{t^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\lambda du \\
&= \frac{B(\alpha, \lambda+1)}{\Gamma(\alpha)} t^{\lambda+\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda\alpha+1)} t^{\lambda+\alpha}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

şeklinde edilir.

Örnek:

$f(t) = t$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden integralini hesaplayalım.

Çözüm:

Teorem (2.41) deki eşitlikte $\lambda = 1$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$I_t^{\frac{1}{2}}(t) = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\frac{5}{2}} t^{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3\pi} t^{\frac{3}{2}} \tag{2.43}$$

sonucuna ulaşılır.

Riemann-Liouville kesirli integrale Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L\{ {}_0I_t^{-\alpha} f(t), s \} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L\left\{ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right\}$$

burada konvülasyon tanımı gereği;

$$\begin{aligned}
L\{ {}_0I_t^{-\alpha} f(t), s \} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L\left\{ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right\}, \quad (\alpha > 0) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L\{ t^{\alpha-1} * f(t) \} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L\{ t^{\alpha-1} \} L\{ f(t) \} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} f(s) = s^{-\alpha} f(s)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned}
L\left\{ \frac{d^n}{dx^n} f, s \right\} &= s^n f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k(0) \\
&= s^n f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{n-k-1}(0), \quad (n-1 \leq \alpha < n)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

eşitliği de mevcuttur. (2.44) ve (2.45) denklemlerinde ulaşılan sonuçlar birlikte bir değerlendirilmeye tabi tutulduğunda $(n - 1 \leq \alpha < n)$ aralığında aşağıda formüle edildiği şekilde

$$\begin{aligned}
L\{ {}_0^{RL}D_t^\alpha f, s \} &= L\left\{ \frac{d^n}{dx^n} I_t^{n-\alpha} f, s \right\} \\
&= s^n L\{ {}_0I_t^{n-\alpha} f, s \} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} I_t^{n-\alpha} f(0) \\
&= s^n s^{\alpha-n} f(s) \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{\alpha-k-1} f(0), \quad \left(D = \frac{d}{dt} \right) \\
&= s^\alpha f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{\alpha-k-1} f(0)
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Riemann-Liouville kesirli integralinin Laplace dönüşümü elde edilir.

2.4.2. Caputo Kesirli Türevi

Literatürde birçok farklı türden kesirli türev tanımı olduğuna ve bu türev tanımlarından bazılarının diğerlerine göre belli başlı avantajlara sahip olduklarına giriş bölümünde değinilmiştir. Örnek vermek gerekirse 1960 lı yıllarda İtalyan matematikçi M. Caputo tarafından önerilen Caputo kesirli türev operatörünün avantajı Riemann-Liouville tanımının Laplace dönüşüm ifadesinin uygulamalarında başlangıç değer problemini ortadan kaldırması olmuştur.

Caputo kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarının fiziksel olarak yorumlanabilir şekilde olması sebebiyle kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerinde Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev operatörü yerine, Caputo kesirli mertebeden türev operatörü tercih edilmektedir. Caputo kesirli türev operatörü genel olarak aşağıdaki şekilde formüle edilmektedir.

Tanım: $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $n - 1 < \alpha < n$ şartları altında $\alpha > 0$ mertebeden Caputo kesirli türevi

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_u^\alpha f(u) &= {}_0I_u^{(n-\alpha)} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} f(u) \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{n-\alpha-1} f^n(\gamma) d\gamma
\end{aligned} \tag{2.47}$$

şeklinde formüle edilir (Podlubny (1999a)).

Aşağıda tanımı gösterilen Caputo kesirli türev operatörüne Laplace dönüşümü uygulanırsa

$${}_0^C D_u^\alpha f(u) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^u (u-\gamma)^{-\alpha} f'(\gamma) d\gamma, \quad (0 < \gamma < 1)$$

$$L\{ {}^C D_u^\alpha f(u) \} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} L \left\{ \int_0^u (u-\gamma)^{-\alpha} f'(\gamma) d\gamma \right\}$$

elde edilir. Konvülyasyon teoremine göre

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} L \left\{ \int_0^u (u-\gamma)^{-\alpha} f'(\gamma) d\gamma \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} L \{ u^{-\alpha} * f'(u) \} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} L \{ u^{-\alpha} \} \{ f'(u) \} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{-\alpha+1}} [s L \{ f(u) - f(0) \}] \\ &= s^\alpha f(s) - s^{\alpha-1} f(0) \end{aligned} \tag{2.48}$$

sonucuna ulaşılır. (2.48) den işleme devam edilirse

$$\begin{aligned} L\{ {}^C D_u^\alpha f(u) \} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} L \left\{ \int_0^u (u-\gamma)^{n-\alpha-1} f^n(\gamma) d\gamma \right\}, \quad (n-1 < \gamma < n) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} L \{ u^{n-\alpha-1} * f^n(u) \} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} L \{ u^{n-\alpha-1} \} L \{ f^n(u) \} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{n-\alpha}} [s^n L \{ f(u) \} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots s^{n-\alpha} f^{(n-1)}(0)] \\ &= s^\alpha L \{ f(u) \} - s^{\alpha-1} f(0) - s^{\alpha-2} f'(0) - \dots f^{(n-1)} f(0) \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \end{aligned} \tag{2.49}$$

Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü elde edilmiş olur.

Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü $f^{(k)}(0)$ tam sayı mertebeli başlangıç değerlerine ve dolayısıyla fiziksel olarak analizi yapılabilir bir özelliğe sahipken Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü fiziksel olarak analizinin yapılamadığı dolayısıyla yorumlanamayan $[{}_0 D_u^{\alpha-k} f(u)]_{u=0}$ başlangıç koşullarını içerir. Bu nedenle fiziksel uygulamalar açısından Caputo kesirli türevinin daha avantajlı olduğu söylenebilir (Kilbas ve dig. (2006)).

Tanım: Kuvvet çekirdeği ile formüle edilen Caputo kesirli integrali

$${}_0^C I_u^\alpha f(u) = f(u) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u f(u)(u-\gamma)^{\alpha-1} d\gamma \tag{2.50}$$

şeklinde yazılabilir (Atangana ve İğret Araz (2021)).

Burada $f(u) = 0$ olması halinde Riemann-Liouville kesirli integrali elde edilir (Atangana (2021)).

Tanım ve özellikleri önceki başlıklarda verilen ve kesirli mertebeden türev yaklaşımları arasında en sık kullanılan Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev tanımları aşağıda belirtilen bazı dezavantajlara sahiptir:

1. Riemann-Liouville türev tanımı bir sabitin türevini sıfır yapmamaktadır.
2. Caputo türev tanımı, verilen bir f fonksiyonunun türevlenebilir olduğu kabulüyle işlem yapar.
3. Her iki kesirli türev tanımında da iki fonksiyonun çarpımının türevinin bilinen formülü elde edilemez.
4. Her iki kesirli türev tanımında da iki fonksiyonun bölümünün türevinin bilinen formülü elde edilemez.
5. Her iki kesirli türev tanımında da zincir kuralı geçerli değildir.

Maddeler halinde sıralanan dezavantajlar araştırmacıları söz konusu koşulları sağlayan yeni kesirli türev tanımlarının keşfine yöneltmiştir.

2.4.3. Caputo-Fabrizio kesirli Türev ve İntegral Operatörü

M. Caputo ve M. Fabrizio, Caputo kesirli türev operatöründeki integralin çekirdek fonksiyonu olarak ifade edilebilecek olan $(u - \gamma)^{-\alpha}$ fonksiyonunu üstel bir fonksiyon olan $e^{\frac{-\alpha(u-\gamma)}{1-\alpha}}$ fonksiyonu ile değiştirip, $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ yerine de $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$ alarak $\alpha \in [0, 1]$ ve $v < b$ için $f(u) \in H^1(v, b)$ koşulları altında aşağıdaki Caputo-Fabrizio kesirli türev tanımını literatüre kazandırmış

$${}_v^{CF}D_u^\alpha f(u) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_v^u f'(\gamma) e^{-\frac{\alpha(u-\gamma)}{1-\alpha}} d\gamma, \quad M(0) = M(1) = 1 \quad (2.51)$$

ve böylece Caputo kesirli türevinin $u = \gamma$ noktasındaki tekillik problemini gidermişlerdir (Caputo ve Fabrizio (2015)).

C-F kesirli türev tanımı incelenirse $M(\alpha)$ fonksiyonu ve $H^1(v, b)$ uzayı gibi ifadelerin olduğu görülür bu ifadelerin anlamlarına bakılacak olursa ilk olarak derecesi 1 olan H uzayı için;

$$H^1(v, b) = \{f \in L^2(v, b) : f' \in L^2(v, b)\}$$

"Sobolev uzayı" tanımına ve buradan da f fonksiyonunun (v, b) aralığında kendisinin ve türevinin integrallenebilir olduğu sonucuna ulaşılır.

$L^2(v, b)$ ise (v, b) aralığında $\int_v^b |f(u)|^2 du < \infty$ koşulunu gerçekleyen fonksiyonları kapsar. C-F tanımında yer alan bir diğer ifade ise $M(\alpha)$ dır. Bu ifadeye "normalleştirme sabiti" ya da "normalleştirme fonksiyonu" denir.

$\alpha = 1$ için $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \alpha = 1$ olduğunda C-F kesirli türevini hesaplamak için

$$p_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} e^{\frac{-\alpha(u-\gamma)}{1-\alpha}}$$

fonksiyonunu inceleyecek olursak $u = \gamma$ alındığında $p_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}$ sonucuna ulaşılır. Buradan

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} p_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{1-\alpha} = \infty$$

eşitliği yazılabilir. İşleme devam edilirse $u > \gamma$ ve $(u - \gamma > 0)$ koşulları altında

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} p_\alpha &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} e^{\frac{-\alpha(u-\gamma)}{1-\alpha}} \right\} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{\frac{1}{1-\alpha}}{e^{\frac{\alpha(u-\gamma)}{1-\alpha}}} \right\} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{belirsizliği} \right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{\frac{1}{1-\alpha^2}}{e^{\frac{\alpha(u-\gamma)}{1-\alpha} \frac{u-\gamma}{1-\alpha}}} \right\} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{e^{\frac{\alpha(u-\gamma)}{1-\alpha} \frac{u-\gamma}{1-\alpha}}} \right\} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} p_\alpha = \begin{cases} \infty, & u = \gamma \\ 0, & u > \gamma \end{cases} = \delta(u - \gamma) \quad (\text{Dirac delta fonksiyonu})$$

yazılabilir. Delta fonksiyonu

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - \gamma) d\gamma &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma) \delta(u - \gamma) d\gamma &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \delta(u - \gamma) d\gamma = f(u) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağladığından Caputo-Fabrizio kesirli türevi için

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} {}^{CF}_v D^\alpha_u f(u) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_v^u e^{\frac{-\alpha(u-\gamma)}{1-\alpha}} f'(\gamma) d\gamma \right\} \quad (M(1) = 1) \\ &= 1. \int_v^u \left\{ \frac{1}{1-\alpha} e^{\frac{-\alpha(u-\gamma)}{1-\alpha}} \right\} f'(\gamma) d\gamma \\ &= \int_v^u \lim_{\alpha \rightarrow 1} (k_\alpha) f'(\gamma) d\gamma = \int_v^u \delta(u - \gamma) f'(\gamma) d\gamma \\ &= f'(u) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç $\alpha = 1$ olması halinde Caputo - Fabrizio kesirli türevi ile klasik türevin aynı sonucu verdiğini gösterir.

Tanım: Caputo anlamında Caputo-Fabrizio kesirli türevi f , $H^1(a, b)$ de tanımlı, $\iota \in [0, 1]$ ve $b > a$ koşulları altında

$${}_0^{CF}D_u^\alpha f(u) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_a^u f'(\gamma) e^{-\frac{\alpha(u-\gamma)}{1-\alpha}} d\gamma, \quad (0 \leq \alpha < 1) \quad (2.52)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $M(\alpha)$ normalleştirme sabitidir (Losada ve Nieto (2015)).

Caputo anlamında Caputo-Fabrizio kesirli türevinin Laplace dönüşümü alınacak olursa $M(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu olmak üzere denklem (2.52) de verilen Caputo-Fabrizio kesirli türevi tanımına Laplace dönüşümü uygulandığında

$$L\{{}_0^{CF}D_u^\alpha f(u)\} = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} L\left\{ \int_0^u f'(\gamma) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(u-\gamma)} d\gamma \right\} \quad (2.53)$$

elde edilir. Burada konvülyasyon teoremi kullanılarak

$$\begin{aligned} &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} L\left\{ f'(u) * e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}u} \right\} \\ &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} L\left\{ f'(u) \right\} L\left\{ e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}u} \right\} \\ &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} [sL\{f(u)\} - f(0)] \frac{1}{s + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} [sL\{f(u)\} - f(0)] \frac{1-\alpha}{\alpha + s(1-\alpha)} \\ &= \frac{M(\alpha)[s\{f(u)\} - f(0)]}{\alpha + s(1-\alpha)} \end{aligned} \quad (2.54)$$

olarak bulunur. İşleme denklem (2.54) den devam edilirse

$${}_0^{CF}D_u^\alpha f(u) = \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} \int_0^u f^{(n)}(\gamma) e^{-\frac{\alpha(u-\gamma)}{n-\alpha}} d\gamma \quad (n-1 \leq \alpha < n) \quad (2.55)$$

$$L\{{}_0^{CF}D_u^\alpha f(u)\} = \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} L\left\{ \int_0^u f^{(n)}(\gamma) e^{-\frac{\alpha(u-\gamma)}{n-\alpha}} d\gamma \right\} \quad (2.56)$$

konvülyasyon tanımı gereği

$$\begin{aligned} &= \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} L\left\{ f^{(n)}(u) * e^{-\frac{\alpha}{n-\alpha}u} \right\} \\ &= \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} L\left\{ f^{(n)}(u) \right\} L\left\{ e^{-\frac{\alpha}{n-\alpha}u} \right\} \\ &= \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} [s^n L\{f(u)\} - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)] \frac{1}{s + \frac{\alpha}{n-\alpha}} \\ &= \frac{M(\alpha)[s^n L\{f(u)\} - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)]}{\alpha + s(n-\alpha)} \end{aligned} \quad (2.57)$$

sonucuna ulaşılır (Losada ve Nieto (2015)).

(2.52) eşitliğinde verilen Caputo-Fabrizio kesirli türev tanımı $M(\alpha)$ normalleştirme fonksiyonu olmak üzere $0 < \alpha < 1$, $u > 0$ şartları altında

$${}^{CF}D_u^\alpha f(u) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_0^u e^{\frac{-\alpha(u-\gamma)}{1-\alpha}} f'(\gamma) d\gamma \quad (2.58)$$

olarak ifade edilebilir (Losada ve Nieto (2015)).

Bu denkleme Laplace dönüşümü uygulandığında ise

$$\mathcal{L}\left\{{}^{CF}D_u^\alpha f(u)\right\}(s) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(s+\alpha(1-s))}(s\mathcal{L}\{f(u)\}(s) - f(0)), \quad s > 0$$

sonucuna ulaşılır.

Tanım: $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$${}^{CF}I^\alpha f(u) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} A(u) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^u A(\gamma) d\gamma, \quad u \geq 0 \quad (2.59)$$

şeklinde verilen denklem Caputo-Fabrizio kesirli integrali olarak adlandırılır (Losada ve Nieto (2015)).

2.4.4. Atangana-Baleanu kesirli Türev ve İntegral Operatörü

Bir önceki bölümde 2015 yılında M. Caputo ve M. Fabrizio tarafından geliştirilen yeni türev tanımı ve yine aynı yıl J. Losado ve J.J Nieto tarafından geliştirilen kesirli integral tanımı verilmişti. Bu yeni yaklaşımlarla Caputo kesirli türevinin teklik problemi giderilmişti fakat çözülmesi gereken bir sorun varlığını devam ettirmekteydi. Çekirdeğin lokal (yerel) olması şeklinde ifade edilebilecek bu sorunu çözmek için en uygun çekirdek nedir sorusu 2016 yılında Atangana-Baleanu ikilisi tarafından Mittag-Leffler fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki adımlar izlenerek çözülmüştür.

Aşağıda verilen kesirli adi diferansiyel denklemin sonucu bizi Mittag-Leffler fonksiyonuna götürmektedir.

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \alpha y, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.60)$$

Şimdi genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu ele alındığında

$$E_\alpha(-u^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-u^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.61)$$

u noktasındaki $e^{-(u-y)}$ nin taylor seri açılımı

$$e^{-(u-y)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha(u-y))^k}{k!} \quad (2.62)$$

şeklinde bulunur. Burada $\alpha = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ alınıp yukarıdaki denklem Caputo-Fabrizio kesirli türevinde yerine yazıldığında

$$D_u^\alpha f(u) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k}{k!} \int_b^u \frac{df(y)}{dy} (u-y)^k dy \quad (2.63)$$

elde edilir. Son olarak denklemdeki $k!$ yerine $\Gamma(\alpha k + 1)$ ve $(u-y)^k$ yerine de $(u-y)^{\alpha k}$ yazıldığında

$$D_u^\alpha f(u) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_b^u \frac{df(y)}{dy} (u-y)^{\alpha k} dy \quad (2.64)$$

sonucuna ulaşılır (Atangana ve Baleanu (2016)).

Şimdi Atangana-Baleanu kesirli Türev ve İntegral Operatörlerinin sırasıyla Caputo ve Riemann-Liouville yaklaşımları incelenecektir.

Tanım: $f \in H^1(\alpha, b)$, $b > \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$ şartları altında Caputo anlamında Atangana - Baleanu kesirli türev operatörü

$${}_b^{ABC} D_u^\alpha f(u) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_b^u f'(\gamma) E_\alpha \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} (u-\gamma)^\alpha \right) d\gamma \quad (0 \leq \alpha < 1) \quad (2.65)$$

şeklinde formüle edilir. Burada $0 < \alpha < 1$ için $M(\alpha)$ normalleştirme sabitidir (Atangana ve Baleanu (2016)).

Bu tanım gerçek hayat problemlerinde karşılaşılan başlangıç değer problemlerinde Laplace dönüşümü uygulanırken bizlere birçok kolaylık sağlamakla birlikte $\alpha = 0$ olması halinde orjinal fonksiyonu geri getirememektedir.

Tanım: $f \in H^1(\alpha, b)$, $b > \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$ şartları altında Riemann-Liouville anlamında, Atangana - Baleanu kesirli türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$${}_b^{ABR} D_u^\alpha f(u) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{du} \int_b^u f(\gamma) E_\alpha \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} (u-\gamma)^\alpha \right) d\gamma \quad (0 \leq \alpha < 1) \quad (2.66)$$

Burada $0 < \alpha < 1$ için $M(\alpha)$ normalleştirme sabitidir (Atangana ve Baleanu (2016)).

(2.65) ve (2.66) denklemlerinin lokal (yerel) olmayan çekirdekleri mevcuttur. Aynı zamanda (2.65) denklemi f fonksiyonunun sabit olması durumunda türevi sıfır olarak vermektedir.

Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevinin Laplace dönüşümü alınacak olursa $M(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve E_α , Mittag-Leffler fonksiyonu olmak üzere denklem (2.65) de verilen Atangana-Baleanu kesirli türevi tanımına Laplace dönüşümü uygulandığında

$$L\{D_u^\alpha f(u)\} = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} L\left\{ \int_0^u f'(u) E_\alpha \left(\frac{-\alpha(u-\gamma)^\alpha}{1-\alpha} \right) d\gamma \right\}, \quad (0 \leq \alpha < 1) \quad (2.67)$$

elde edilir. Konvülyasyon tanımı gereği

$$\begin{aligned}
&= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} L \left\{ f'(u) * E_\alpha \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} u^\alpha \right) \right\} \\
&= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} L \{ f'(u) \} L \left\{ E_\alpha \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} u^\alpha \right) \right\} \\
&= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} [s L \{ f(u) \} - f(0)] \frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha})} \\
&= \frac{M(\alpha) s^\alpha f(s) - s^{\alpha-1} f(0)}{s^\alpha (1-\alpha) + \alpha}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

olur. Buradan işleme devam edilirse

$$\begin{aligned}
&= \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} L \left\{ \int_0^u f^\alpha(\gamma) E_\alpha \left(\frac{-\alpha}{n-\alpha} (u-\gamma)^\alpha \right) d\gamma \right\} \\
&= \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} L \left\{ f^{(n)}(u) * E_\alpha \left(\frac{-\alpha u^\alpha}{n-\alpha} \right) \right\} \\
&= \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} L \{ f^{(n)}(u) \} L \left\{ E_\alpha \left(\frac{-\alpha u^\alpha}{n-\alpha} \right) \right\} \\
&= \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} [s^n L \{ f(u) \} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)] \frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + \frac{\alpha}{n-\alpha})}
\end{aligned} \tag{2.69}$$

sonucuna ulaşılır.

Tanım: $0 < \alpha < 1$ olmak üzere mertebesi α olan $f(u)$ fonksiyonunun Atangana - Baleanu kesirli integrali,

$${}_0^{AB} I_u^\alpha f(u) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(u) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha) M(\alpha)} \int_0^u f(s) (u-s)^{\alpha-1} ds \tag{2.70}$$

şeklinde tanımlanır (Atangana ve Baleanu (2016)).

Yukarıda verilen eşitlik $\alpha = 1$ için hesaplanırsa klasik integral tanımı elde edilir.

Caputo ve Riemann anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev operatörleri arasındaki ilişkiyi göstermek için öncelikle her iki türev operatörüne Laplace dönüşümleri uygulanır ve

$$\begin{aligned}
L \left\{ {}_0^{ABR} D_u^\alpha f(u) \right\} &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \left(\frac{s^\alpha f(s)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \right) \\
L \left\{ {}_0^{ABC} D_u^\alpha f(u) \right\} &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \left(\frac{s^\alpha f(s) - s^{\alpha-1} f(0)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \right)
\end{aligned} \tag{2.71}$$

elde edilir.

$${}_0^{ABC} D_u^\alpha f(u) = {}_0^{ABR} D_u^\alpha f(u) - \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} f(0) E_\alpha \left[\frac{-\alpha}{1-\alpha} u^\alpha \right] \tag{2.72}$$

eşitliğinde her iki tarafa Laplace dönüşümü uygulandığı taktirde

$$L \left\{ {}_0^{ABC} D_u^\alpha f(u) \right\} = L \left\{ {}_0^{ABR} D_u^\alpha f(u) \right\} - L \left\{ \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} f(0) E_\alpha \left[\frac{-\alpha}{1-\alpha} u^\alpha \right] \right\} \tag{2.73}$$

$$\frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \left(\frac{s^\alpha f(s) - s^{\alpha-1} f(0)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \right) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \left(\frac{s^\alpha f(s)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \right) - \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \left(\frac{s^{\alpha-1} f(0)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \right) \tag{2.74}$$

eşitliği elde edilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Kesirli mertebeden türevlerin birbirinden farklı birçok tanımı mevcut olmakla birlikte literatür incelediğinde bu tanımların arasındaki temel farkın ele alınan fonksiyonların tanım kümesi ve seçilen yardımcı parametreler olduğu görülmektedir (Li, 2003). Kesirli türev tanımları arasında en sık kullanılan tanımlardan biri Caputo Kesirli türev tanımıdır.

Bu tez çalışmasında ele alınan matematiksel model başlangıç koşullarını içeren kesirli diferensiyel denklemlerden oluştuğu için bu tip denklemlerde daha avantajlı olan Caputo türev tanımı kullanılmıştır. Aşağıdaki başlık altında Caputo kesirli türevin tanımı verildikten sonra gerekli şartlarına ve özelliklerine değinilecektir.

3.1. Caputo Kesirli Türevi

Tanım: $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $n - 1 < \alpha < n$ şartları altında $\alpha > 0$ mertebeden Caputo Kesirli Türevi

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^\alpha f(t) &= {}_0 I_t^{(n-\alpha)} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} f(t) \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.1)$$

şeklinde formüle edilir (Podlubny (1999a)).

Örneğin $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \mathbf{c}$ sabit fonksiyonunun Riemann-Liouville ve

Caputo kesirli türevleri hesaplanacak olursa

$$\begin{aligned}
{}^{RL}_y D_x^\alpha(\mathbf{c}) &= \frac{d^n}{dx^n_y} I_x^{n-\alpha}(\mathbf{c}) = \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_y^x (x-t)^{n-\alpha-1}(\mathbf{c}) dt \\
&= \frac{d^n}{dx^n} \frac{\mathbf{c}}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{x-t^{n-\alpha}}{(n-\alpha)(-1)} \Big|_y^x = \frac{d^n}{dx^n} \frac{\mathbf{c}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[0 + \frac{(x-y)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right] \\
&= \frac{d^n}{dx^n} \frac{\mathbf{c}}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{(x-y)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \\
&= \frac{\mathbf{c}}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} (x-y)^{n-\alpha} \right\} \\
&= \frac{\mathbf{c}}{\Gamma(1+n-\alpha)} \frac{(n-\alpha)!(x-y)^{n-\alpha-n}}{(n-\alpha-n)!} \\
&= \frac{\mathbf{c}}{\Gamma(1+n-\alpha)} \frac{\Gamma(1+n-\alpha)(x-y)^{-\alpha}}{(-\alpha)!} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(x-y)^\alpha} \neq 0
\end{aligned}$$

çözümü elde edilir. Klasik analizden biliyoruz ki sabitin türevi sıfırdır fakat burada sıfırdan farklı bir sonuç elde edildi. Ayrıca paydada $(x-y)$ bulunduğundan $x=y$ olması durumunda ifade sonsuz olacak yani bu da fonksiyonu süreksiz ve türev tanımsız yapacaktır. Bu durum Riemann-Liouville kesirli türev operatörünün kullanışlılığını azaltmaktadır.

Caputo kesirli türeviyle elde edilen sonuç ise

$$\begin{aligned}
{}^C_y D_x^\alpha(\mathbf{c}) &= {}_y I_x^{(n-\alpha)} \left\{ \frac{d^n}{dx^n}(\mathbf{c}) \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_y^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[\frac{d^n}{dt^n} \mathbf{c} \right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_y^x (x-t)^{n-\alpha-1} \mathbf{0} dt \\
{}^C_y D_x^\alpha(\mathbf{c}) &= 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Görüldüğü gibi ulaşılan sonuç klasik analizde elde edilen sonuca eşit ve 0 olmuştur.

Örnek: $\lambda > -1$ olmak üzere $f(t) = t^\lambda$ üstel fonksiyonunun Caputo kesirli türevini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
{}^C_p D_t^\alpha(x^\lambda) &= {}_p I_x^{(n-\alpha)} \left[\frac{d^n}{dx^n}(x^\lambda) \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_p^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n}(t^\lambda) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_p^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[\frac{\lambda!}{(\lambda-n)!} t^{\lambda-n} \right] dt \\
&= \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\lambda-n)} \int_p^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\lambda-n} dt \\
&= \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\lambda-n)} \int_p^x (x)^{n-\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1} t^{\lambda-n} dt
\end{aligned}$$

ifadesinde $\frac{t}{x} = u$ yazılırsa $t = xu$ ve $dt = xdu$ olur. Dolayısıyla $t \rightarrow p$ iken $u \rightarrow \frac{p}{x}$ ve $t \rightarrow x$ iken $u \rightarrow 1$ elde edilir.

$$\begin{aligned} {}^C_p D_x^\alpha(x^\lambda) &= \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\lambda-n)} \int_{p/x}^1 (x)^{n-\alpha-1} (1-y)^{n-\alpha-1} (xy)^{\lambda-n} x dy \\ &= \frac{\Gamma(1+\lambda)(x)^{n-\alpha-1+\lambda-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\lambda-n)} \int_{p/x}^1 (1-y)^{n-\alpha-1} (y)^{\lambda-n} dy \end{aligned}$$

$p = 0$ olarak alındığı taktirde Beta fonksiyonu elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &= \frac{\Gamma(1+\lambda)(x)^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\lambda+n)} \beta(n-\alpha, \lambda-n+1) \\ &= \frac{\Gamma(1+\lambda)(x)^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\lambda+n)} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\lambda+n)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda-n+1)} \\ {}^C_p D_x^\alpha(x^\lambda) &= \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(1+\lambda-\alpha)} x^{\lambda-\alpha} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır (Podlubny (1998)). Bu sonuç Caputo kesirli türevinin polinom fonksiyonlarının tamamında kullanılabilir olduğunu gösterir.

Caputo kesirli türev operatörü aşağıya çıkarılmış özelliklere de sahiptir.

Lineerlik:

$m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ koşulları altında α . mertebeden Caputo kesirli operatörü,

$${}^C_0 D_t^\alpha(m_1 f(t) + m_2 g(t)) = m_1 \left({}^C_0 D_t^\alpha f(t) \right) + m_2 \left({}^C_0 D_t^\alpha g(t) \right) \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir (Podlubny (1998)).

İspat:

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^\alpha(m_1 f(t) + m_2 g(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} (m_1 f(t-rh) + m_2 g(t-rh)) \\ &= m_1 \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t-rh) \\ &\quad + m_2 \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} g(t-rh) \\ &= m_1 \left({}^C_0 D_t^\alpha f(t) \right) + m_2 \left({}^C_0 D_t^\alpha g(t) \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Homojenlik:

x sabit bir sayı olsun. Bu durumda $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ koşulları altında α . mertebeden Caputo kesirli operatörü için

$${}^C_0 D_t^\alpha [x f(t)] = x {}^C_0 D_t^\alpha f(t) \quad (3.4)$$

eşitliği ile formüle edilen homojenlik özelliği sağlanır (Podlubny (1998)).

Birleşme özelliği:

$f(t)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ve $\alpha < \beta$ koşulları altında

$$D_t^\alpha [D_t^{-\beta} f(t)] = D_t^{\alpha-\beta} \quad (3.5)$$

eşitliği yazılabilir (Podlubny (1998)).

Sadece (Caputo (1966)) değil, başka alanlardaki farklı çalışmalarda da aynı tanıma ulaşılmıştır (Caputo ve Mainardi (1971), Kilbas ve dig. (2006), Bagley ve Torvik (1986), Hilfer ve dig. (2000)).

Tanımlardan da fark edileceği üzere Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev operatörleri arasında belirleyici farklar vardır. Örneğin $\alpha = n$ ve $(n \in N^+)$ koşullarına sahip bir $h(t)$ fonksiyonunun n . dereceden Laplace dönüşümü;

$$L\{h^n(t)\} = s^n H(s) - \sum_{k=1}^n h^{n-k}(0) s^{k-1} \quad (3.6)$$

şeklinde bulunur (Povstenko (2015)). Burada $h^{n-k}(0)$ değerleri fiziksel yorumlamalara imkan vermektedir.

$\alpha = n$ ve $(n \in N^+)$ koşullarına sahip bir $h(t)$ fonksiyonunun n . mertebeden türevi ile integrali arasındaki ilişki analizin en temel özelliği göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} D^n I^n h(t) &= h(t) \\ I^n D^n h(t) &\neq h(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

formunda ifade edilebilir. Bu durumda D^n operatörünün I^n 'in sol tersi olduğu ve

$$I^n D^n h(t) = h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} h^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0 \quad (3.8)$$

eşitliğinin geçerliliği tespit edilmiş olur. $\alpha \geq 0$ olması halinde Riemann-Liouville türevi için $D^n I^n h(t) = h(t)$ eşitliği geçerli olduğundan Caputo kesirli türevi ile Riemann-Liouville arasında aşağıdaki teoremden ispat edildiği formuyla bir ilişki mevcuttur.

Teorem: Caputo kesirli türevi ile Riemann-Liouville kesirli türevi arasındaki ilişki

$${}_0^{RL} D_t^\alpha f(t) = {}_0^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) \quad (3.9)$$

şeklinde gösterilir (Podlubny (1999b)).

İspat: Riemann-Liouville kesirli türevi ele alınır ve

$${}_m^{RL} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_m^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.10)$$

tanımındaki

$$\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.11)$$

(3.11) ifadesine n kez kısmi integral uygulanırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{(t-m)^{n-\alpha} f(m)}{n-\alpha} + \frac{1}{n-\alpha} \int_m^t (t-\tau)^{n-\alpha} f'(\tau) d\tau \\ &= \frac{(t-m)^{n-\alpha} f(m)}{n-\alpha} + \frac{(t-m)^{n-\alpha+1} f'(m)}{(n-\alpha)(n-\alpha+1)} + \frac{1}{(n-\alpha)(n-\alpha+1)} \int_m^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f''(\tau) d\tau \\ &= \frac{(t-m)^{n-\alpha} f(m)}{n-\alpha} + \frac{(t-m)^{n-\alpha+1} f'(m)}{(n-\alpha)(n-\alpha+1)} + \frac{(t-m)^{n-\alpha+2} f''(m)}{(n-\alpha)(n-\alpha+1)(n-\alpha+2)} \\ &\quad + \frac{1}{(n-\alpha)(n-\alpha+1)(n-\alpha+2)} \int_m^t (t-\tau)^{n-\alpha+2} f'''(\tau) d\tau \\ &= \frac{(t-m)^{n-\alpha} f(m)}{n-\alpha} + \frac{(t-m)^{n-\alpha+1} f'(m)}{(n-\alpha)(n-\alpha+1)} + \frac{(t-m)^{n-\alpha+2} f''(m)}{(n-\alpha)(n-\alpha+1)(n-\alpha+2)} \\ &\quad + \dots \frac{(t-m)^{n-\alpha+n-1} f^{(n-1)}(m)}{(n-\alpha)(n-\alpha+1)(n-\alpha+2)\dots(n-\alpha+n-1)} \\ &\quad + \frac{1}{(n-\alpha)(n-\alpha+1)(n-\alpha+2)\dots(n-\alpha+n-1)} \int_m^t (t-\tau)^{n-\alpha+n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-m)^{n-\alpha+k} f^{(k)}(m) \Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} + \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+n)} \int_m^t (t-\tau)^{n-\alpha+n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.12)$$

(3.12) ile numaralandırılan denklemde elde edilen son eşitlik

$${}^{RL}_m D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_m^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde formüle edilen Riemann-Liouville kesirli türevinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-m)^{n-\alpha+k} f^{(k)}(m) \Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} + \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+n)} \int_m^t (t-\tau)^{n-\alpha+n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-m)^{n-\alpha+k} f^{(k)}(m)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+n)} \int_m^t (t-\tau)^{n-\alpha+n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-\alpha+k+1)(t-m)^{-\alpha+k} f^{(k)}(m)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{\Gamma(n-\alpha+n)}{\Gamma(n-\alpha+n)\Gamma(n-\alpha)} \int_m^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-m)^{-\alpha+k} f^{(k)}(m)}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_m^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-m)^{-\alpha+k} f^{(k)}(m)}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + {}^C_m D_t^\alpha f(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

sonucu elde edilir.

3.2. Varlık -Teklik Çözümü

Varlık ve teklik; başlangıç değer problemleri içeren diferansiyel denklemlerde en önemli iki unsur olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu başlık altında diferansiyel denklemin en az bir çözümü olması durumunu ifade eden varlık unsurunun tanımlanmasından sonra diferansiyel denklemin en fazla bir çözümü olması durumunu ifade eden teklik unsurunun ispatı konusuna geçilecektir.

Tanım 3.1

$$m'' = n(t, m), \quad m(t_0) = m_0$$

başlangıç değeri kabul edilsin. Burada $I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık olduğu ve n fonksiyonunun $I \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olduğu varsayıldığında I üzerinde tanımlı ve

1. *$t \in I$ durumunda $\varpi'(t)$ mevcuttur.*
2. *$\varpi(t_0) = m_0, \quad t_0 \in I$*
3. *$t \in I$ üzere $(t, \varpi(t)) \in I \times \mathbb{R}$*
4. *$t \in I$ üzere $\varpi'(t) = n(t, \varpi(t))$*

başlangıç koşullarını sağlayan bir $\varpi(t)$ fonksiyonu olması halinde (1) ile (2) numaralı öncüller başlangıç değer problemi için çözüm oluşturduğundan bu durumda çözümün varlığından söz edilebilir.

Tanım 3.2 $\forall (t, m_1), (t, m_2) \in R(a, b)$ için

$$|n(t, m_1) - n(t, m_2)| \leq K|m_1 - m_2|$$

eşitsizliğini sağlayan sıfırdan büyük K sabiti olması halinde n fonksiyonu (a, b) reel aralığında Lipschitz şartını sağlar ve K , Lipschitz sabiti adını alır.

Diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığı tespit edildikten sonra aşağıda verilen teorem kullanılarak çözümün tekliği incelenebilir.

Teorem 3.1 $f(t, \iota)$ ve $\frac{\partial f}{\partial \iota}$, $R(a, b) = \{(t, \iota) : |t - t_0| \leq a, |\iota - \iota_0| \leq b\}$ aralığında t ve ι 'e bağlı sürekli ve Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlar olmak üzere, (1) ile (2) koşulları altında başlangıç değer problemi için $|f(t, \iota)| \leq M$ ve $h = \min(a, \frac{b}{M})$ ise $|t - t_0| \leq h$ eşitsizliğinde, tanımlı tek bir $\iota(t)$ çözümü mevcuttur.

1. $t \in I$ üzere $v'(t)$ vardır.

2. $v(t_0) = \iota_0, \quad t_0 \in I$

Başlangıç değer probleminin en fazla bir çözümü olması durumu çözümün tekliği olarak ifade edilir ve bu durumun tespitinde aşağıda ispatı verilen Picard-Lindelöf teoremi oldukça kullanışlı bir yöntemdir.

Teorem 3.2 (Picard-Lindelöf Teoremi): Başlangıç değer probleminde $E \subset IR^2$ ve g fonksiyonu $E \rightarrow IR$ olsun. Bu koşullar altında bir E alanı; $\frac{db}{da} = g(a, b)$ ve $g(a_0) = b_0$ şartlarına sahip bir g fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda g fonksiyonu E alanında sürekli $g(a, b)$ ile g fonksiyonları da Lipschitz kuralı ile E alanında sürekli ise sıfırdan büyük sabit bir ω değeri için E alanında tek bir çözüme ulaşılır.

İspat $(a_0, b_0) \in E$ olmak üzere (a_0, b_0) noktalarının E alanında $x > 0, \quad y > 0$ koşullarına sahip sabit iki nokta olduğu kabul edilsin.

$A = \{(a, b) : |a - a_0| \leq x \quad |b - b_0| \leq y\} \subset E$ koşulları altında bir dikdörtgensel alan bulunsun. $M = \max_{(a,b) \in R} f(a, b)$ ve $h = \min(x, \frac{y}{M})$ için $|b - b_0| \leq h$ eşitsizliğini gerçekleyen başlangıç değer probleminin tek bir çözümü vardır. Buradan $x < \frac{y}{M}$ olması halinde $h = x$ olur dolayısıyla $R_1 = R$ bulunur. Aynı zamanda $\frac{y}{M} < x$ olması halinde ise $h = \frac{y}{M}$ olur böylece $R_1 \subset R$ olur. R ve R_1

$$R = \{(a, b) : |a - a_0| \leq x, |b - b_0| \leq y\}$$

$$R_1 = \{(a, b) : |a - a_0| \leq h, |b - b_0| \leq y\}$$

olarak tanımlansın. Ardışık yaklaşımlar metoduyla teorem ispatlanabilir. O halde,

$|x - x_0| < h$ aralığında $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots$ fonksiyonları tanımlansın.

$$\kappa_1 = b_0 + \int_{a_0}^a g(t, y_0) dt$$

$$\kappa_2 = b_0 + \int_{a_0}^a g(t, \kappa_1(t)) dt$$

$$\kappa_3 = b_0 + \int_{a_0}^a g(t, \kappa_2(t)) dt$$

.....

.....

$$\kappa_n = b_0 + \int_{a_0}^a g(t, \kappa_{n-1}(t)) dt$$

Başlangıç değer probleminin önce $[y_0, y_0 + h]$ aralığında sonra yine aynı yöntemle $[y_0 - h, y_0]$ aralığında varlığı incelenecek bunların akabinde de çözümün teklik durumunun ispatı yapılacaktır. İspat dört aşama halinde yapılacaktır:

$\kappa_{n-1}(a)$ fonksiyonu $[a_0, a_0 + h]$ kapalı aralığında türevli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $a \in [a_0, a_0 + h]$ için $|\kappa_{n-1}(a) - b_0| \leq b$ eşitsizliğinin sağlanması halinde $(a, \kappa_{n-1}(a)) \in R_1$ olur. O halde $(a, \kappa_{n-1}(a))$ noktasında tanımlı ve sürekli olan bir $g(a, \kappa_{n-1}(a))$ fonksiyonunun mevcut olduğu dolayısıyla $[a_0, a_0 + h]$ kapalı aralığında $|g(a, \kappa_{n-1}(a))| \leq M$ eşitsizliğinin yazılabildiği görülür.

Eğer ki

$$\kappa_n(a) = b_0 + \int_{a_0}^a g(t, \kappa_{n-1}(a)) dt \quad (3.14)$$

olduğu varsayılırsa:

1. κ_n fonksiyonu $[a_0, a_0 + h]$ kapalı aralığında sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyondur.

Bunun yanında:

$$\begin{aligned} |\kappa_n(a) - b_0| &= \left| \int_{a_0}^a g(t, \kappa_{n-1}(a)) dt \right| \\ &\leq \int_{a_0}^a g(t, \kappa_{n-1}(a)) dt \\ &\leq \int_{a_0}^a M dt = M(a - a_0) \quad h = \min(x, \frac{y}{M}) \\ &\leq Mh \leq y \end{aligned}$$

$(a, \kappa_n(a))$ noktası R_1 aralığında bulunan bir nokta olduğundan dolayı $g(a, \kappa_n(a))$ fonksiyonu $[a_0, a_0 + h]$ kapalı aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyondur. $n = 1$ olması durumunda $\kappa_1(a) = b_0 + \int_{a_0}^a g(t, b_0) dt$ bulunur. Bu sonuçta bizi κ_1 fonksiyonunun $[a_0, a_0 + h]$ aralığında tanımlanabilen ve sürekli olan bir fonksiyon olduğu yargısına götürür. Bununla beraber,

$$\begin{aligned} |\kappa_1(a) - b_0| &\leq \int_{a_0}^a |f(t, b_0)| dt \\ &\leq M(a - a_0) \leq Mh \leq y \end{aligned}$$

olur. Burada farzedelim ki $n = 1$ olsun o halde $(a, \kappa_1(a))$ noktası R_1 'de tanımlı bir nokta olur. Buradan ise $f(\kappa_1(a))$ fonksiyonunun $[a_0, a_0 + h]$ kapalı aralığında bir çözüme sahip ve sürekli olan bir fonksiyon olduğu sonuçlarına ulaşılır.

Yukarıdaki denklemdeki κ_n fonksiyonu, tümevarım yöntemiyle $[a_0, a_0 + h]$ kapalı aralığındaki özellikleri gösterir. O zaman κ fonksiyonu $[a_0, a_0 + h]$ kapalı aralığında vardır ve denklemin çözümüdür. Böylece ispatı yapılmış olur.

2. $(a_0, a_0 + h)$ aralığında $\{\kappa_n\}$ fonksiyonu $|\kappa_n(a) - \kappa_{n-1}(a)| \leq \frac{M}{\iota} \frac{(\iota h)^n}{n!}$ eşitsizliğini sağlar ve çözümü de tektir.

$a \in (a_0, a_0 + h)$ aralığında $|\kappa_{n-1}(a) - \kappa_{n-2}(a)| \leq \frac{M \iota^{n-2}}{(n-1)!} (a - a_0)^{n-1}$ olduğu düşünülürse,

$$\begin{aligned} |\kappa_n(a) - \kappa_{n-1}(a)| &= \left| \int_{a_0}^a (g(t, \kappa_{n-1}(t)) - g(t, \kappa_{n-2}(t))) dt \right| \\ &\leq \int_{a_0}^a |g(t, \kappa_{n-1}(t)) - g(t, \kappa_{n-2}(t))| dt \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspatın birinci bölümünde $y \in (y_0, y_0 + h)$ aralığında

$|\varpi_n(y) - z_0| \leq b$ eşitsizliği elde edilmişti. Bu durumda $(y, \varpi_{n-1}(y))$ ve $(y, \varpi_{n-2}(y))$ noktalarının $y \in (y_0, y_0 + h)$ aralığında R_1 eşitsizliğini sağlayan iki nokta olduğu sonucuna ulaşılır. O halde Lipschitz teoremi kullanılarak

$$|\kappa_n(a) - \kappa_{n-1}(a)| \leq \iota \int_{a_0}^a |\kappa_{n-1}(t) - \kappa_{n-2}(t)| dt \quad (3.15)$$

eşitsizliği elde edilir. İşleme devam edilirse

$$\begin{aligned} |\kappa_n(a) - \kappa_{n-1}(a)| &\leq \iota \int_{a_0}^a |\kappa_{n-1}(t) - \kappa_{n-2}(t)| dt \\ &\leq \iota \int_{a_0}^a \frac{M \iota^{n-2}}{(n-1)!} (t - a_0)^{n-1} dt \\ &\leq \frac{M \iota^{n-1}}{(n-1)!} \left[\frac{(t - a_0)^n}{n} \right]_{a_0}^a = \frac{M \iota^{n-1}}{n!} (a - a_0)^n = \frac{M}{\iota} \frac{\iota^n}{n!} h^n \\ &\leq \frac{M}{\iota} \frac{(\iota h)^n}{n!} \quad \left(|a - a_0| \leq h \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilerek ispat tamamlanmış olur ve çözüm tektir sonucuna ulaşılır.

3. $n \rightarrow \infty$ olması durumunda $[a_0, a_0 + h]$ kapalı aralığında κ_n sürekli fonksiyonu eşit aralıklarla κ fonksiyonuna yakınsar.
4. κ fonksiyonunun $[a_0, a_0 + h]$ kapalı aralığındaki limiti başlangıç değer problemine karşılık gelmektedir.

3.3. Hyers-Ulam Kararlılığı

Stanislaw Ulam'ın 1940 yılında Wisconsin Üniversitesinde gerçekleştirilen konferansta gündeme getirdiği $(F_1, .)$ bir grup ve $(F_2, *)$, $d(., .)$ metriğiyle bir metrik grup olsun. $\varepsilon > 0$ kabulünden hareketle her $x, y \in F_1$ için $d(h(x.y), h(x) * h(y)) < \delta$ eşitsizliğini gerçekleyen $h : F_1 \rightarrow F_2$ bir dönüşüm mevcut olduğunda, her $x \in F_1$ için $d(h(x), H(x)) < \varepsilon$ ile $H : F_1 \rightarrow F_2$ bir homomorfizm olacak şekilde $\delta > 0$ değeri var mıdır? veya daha farklı bir şekilde ifade edecek olursak hangi koşullar altında bir yaklaşım homomorfizmine yaklaşan bir homomorfizm vardır? (Hyers (1941)) sorusu Hyers tarafından 1941 yılında Banach uzayları kullanılarak yanıtlanmış ve literatüre Hyers-Ulam yaklaşımı olarak bilinen teorem kazandırılmıştır. Ulam'ın ortaya attığı problemdeki fonksiyonel denklemlerin yerine zamanla diferansiyel denklemlerin kullanılmasıyla yeni bir çalışma sahası oluşmuş ve pek çok araştırmacı diferansiyel denklemlerin Hyer-Ulam kararlılığı üzerine incelemelerde bulunmuştur.

Birinci dereceden lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını araştıran ilk isimler 1998 yılında Alsina ve Ger olmuştur (Alsina ve Ger (1998)). Sonraki dönemlerde farklı yöntemler kullanılarak ikinci dereceden diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı araştırılmıştır.

Örneğin 2009 yılında Lie ve Shen ikilisi $y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0$ formunda verilen ikinci dereceden bir diferansiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını araştırmıştır (Li ve Shen (2009)).

2013 yılında Otrocol ve Ilea ikilisi $x'(t) = f(t, x(t), x(g(t)))$ formundaki diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını incelemiştir (Otrocol ve Ilea (2009)).

Tunç ve Biçer ikilisi 2015 yılında sabit nokta teoremi yardımıyla birinci dereceden diferansiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını incelemiş ve aynı ikili 2017 yılında ise ikinci dereceden kısmi türevli bir diferansiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını incelemiştir (Tunc ve Bicer (2015), Biçer ve Tunç (2017)).

Literatür taramaları neticesinde birkaç çalışma örneği verilen Hyers-Ulam kararlılığının tanımını aşağıya çıkarılmıştır.

Tanım: X, P cismi üzerinde bir normlu uzay olduğu ve $I \subset R$ bir açık aralık olduğu varsayalım. Burada $P = R$ veya C 'dir. Benzer şekilde $a_0, a_1, \dots, a_n : I \rightarrow P$ ve $f : I \rightarrow X$ sürekli fonksiyonları verilsin. Bu durumda n . mertebeden sürekli türevlenebilir

herhangi bir $y : I \rightarrow X$ fonksiyonu her $x \in I$ ve bazı $\varepsilon \geq 0$ için

$$\|a_n(x)y^n(x) + a_{n-1}(x)y^{n-1}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) + h(x)\| \leq \varepsilon \quad (3.16)$$

eşitsizliğini sağladığı takdirde herhangi $x \in I$ için

$$\|y(x) - y_0(x)\| \leq P(\varepsilon) \quad (3.17)$$

olacak şekilde

$$a_n(x)y^n(x) + a_{n-1}(x)y^{n-1}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) + h(x) = 0 \quad (3.18)$$

denklemini gerçekleyen n . dereceden sürekli türevlenebilir bir $y_0 : I \rightarrow X$ çözümü var ise (3.16) diferansiyel denklemi Hyers-Ulam teoremine göre kararlıdır denir (Jung (2006)).

Matematiksel modellerin Hyers-Ulam teoremine göre kararlılıkları incelenirken Banach sabit nokta teoremiden faydalanılır. Aşağıda tanımı verilen ve metrik uzaylar teorisinde gözardı edilemez işleve sahip Banach sabit nokta teoremi, belli koşullara haiz fonksiyonların sabit noktalarının mevcut olduğunu garanti eder.

Teorem: (X, d) bir metrik uzay ve $P : X \rightarrow X$ bir daralma dönüşümü olduğu kabulüyle her $e, k \in X$ için $d(Pe, Pk) \leq ad(e, k)$ eşitsizliğini sağlayan $a \in [0, 1)$ çözümünün olduğu varsayılın. O halde $Pa = a$ olacak şekilde bir tek $a \in X$ vardır ve

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n e$$

koşuluyla her $e \in X$ için

$$d(a, e) \leq \frac{1}{1-a} d(e, Pe) \quad (3.19)$$

olur (Gordji ve dig. (2011)).

3.4. Nümerik Çözüm Yöntemi

Adi diferansiyel denklem içeren matematiksel modellerin sayısal çözümü için en kullanışlı yöntemlerin başında doğrusal çok adımlı yöntemler gelmektedir. Söz konusu yöntemler kavramsal olarak bir başlangıç noktasından başlar ve ardından bir sonraki çözüm noktasını bulmak için t zamanda bir adım ileri gider. Süreç, çözümün simülasyonunu elde etmek üzere sonraki adımlarla devam eder.

Yalnızca matematiği kullanarak Neptün gezegeninin varlığını keşfetmesiyle tanınan ve aydaki bir kratere adı verilen bilim insanı John Couch Adams çok adımlı algoritmalar

teorisini 1883 yılında Francis Bashforth'un kılcal eylemini modelleyen diferansiyel denklemini çözmek için tasarlamış ve literatüre Adams-Bashford metodu olarak giren yöntemini yayınlamıştır (Adams ve Bashforth (1883), Goldstine (1977)).

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerde Adams-Bashford metodu uygulanırken aşağıda tanımı verilen Lagrange polinomundan faydalanılır.

Tanım: n . mertebeden bir polinom için $(n + 1)$ noktadan geçen eğri uydurma işlemi olarak kısaca tanımlanabilecek Lagrange polinomu

$$P(x) = \sum_{k=0}^n L_{n,k}(x) \cdot f(x_k) \quad (3.20)$$

şeklinde formüle edilir (Carroll (2011)).

Adams-Bashford metodunu formüle edebilmek için öncelikle aşağıdaki gibi bir adi diferansiyel denklem ele alınır

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

ve verilen denklemin her iki tarafına integral uygulanırsa

$$y(t) - y(0) = \int_0^t f(s, y(s)) ds \quad (3.22)$$

elde edilir. Elde edilen denklemin $t = t_k$ ve $t = t_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ noktalarında farkı alınır

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, y(s)) ds \quad (3.23)$$

eşitliği elde edilir.

$[t_k, t_{k+1}]$ aralığında Lagrange dönüşümü kullanılarak $f(s, y(s))$ fonksiyonu yaklaşık olarak

$$P_k(s) = \frac{s - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} f(t_k, y(t_k)) - \frac{s - t_k}{t_k - t_{k-1}} f(t_{k-1}, y(t_{k-1})) \quad (3.24)$$

veya

$$\begin{aligned} P_k(s) &= \frac{f(t_k, y(t_k))}{h} (s - t_{k-1}) - \frac{f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))}{h} (s - t_k) \\ &\sim \frac{f(t_k, y_k)}{h} (s - t_{k-1}) - \frac{f(t_{k-1}, y_{k-1})}{h} (s - t_{k-1}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen denklem integral ifadesinde yerine yazılır

$$y_{k+1} = y_k + \frac{f(t_k, y_k)}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_{k-1}) ds - \frac{f(t_{k-1}, y_{k-1})}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k) ds \quad (3.26)$$

ve elde edilen integraller hesaplanırsa bu durumda nümerik çözüm

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left(3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1}) \right) \quad (3.27)$$

şeklinde bulunur (Adams ve Bashforth (1883)).

Şimdi Caputo kesirli türev operatörü için Adams-Bashford metodunun kesirli versiyonu ele alınacak olursa, kesirli mertebeden Caputo türevi

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \quad (3.28)$$

şeklindedir. Bu denklem kesirli mertebeden analizin temel tanımından

$$y(t) - y(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3.29)$$

integral formuna dönüştürülebilir. Daha sonra $t = t_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ koşulları altında

$$y(t_{n+1}) - y(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \quad (3.30)$$

denkleme ulaşılır. Benzer şekilde $t = t_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ alınır

$$y(t_n) - y(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \quad (3.31)$$

denklemini elde edilir. (3.30) denkleminde (3.31) denklemini çıkarılırsa

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \quad (3.32)$$

sonucuna ulaşılır. Bu aşamada

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + A_{\alpha,1} + A_{\alpha,2} \quad (3.33)$$

denklemini yazılır ve $A_{\alpha,1}$ ile $A_{\alpha,2}$ değerleri için aşağıdaki integraller hesaplanırsa

$$\begin{aligned} A_{\alpha,1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \\ A_{\alpha,2} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \end{aligned} \quad (3.34)$$

$f(t, y(t))$ fonksiyonu Lagrange Dönüşümü kullanılarak yaklaşık olarak

$$\begin{aligned} P(t) &\simeq \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} f(t_n, y_n) + \frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n} f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\ &= \frac{f(t_n, y_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h} (t - t_n) \end{aligned} \quad (3.35)$$

şeklinde bulunur. Buradan hareketle işleme devam edilirse

$$\begin{aligned} A_{\alpha,1} &= \frac{f(t_n, y_n)}{h\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} (t - t_{n-1}) dt - \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} (t - t_n) dt \\ &= \frac{f(t_n, y_n)}{h\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} y^{\alpha-1} (t_{n+1} - y - t_{n-1}) dy - \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} y^{\alpha-1} (t_{n+1} - y - t_n) dy \\ &= \frac{f(t_n, y_n)}{h\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{2ht_{n+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{t_{n+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right\} - \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{ht_{n+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{t_{n+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde edilir bu durumda

$$A_{\alpha,1} = \frac{f(t_n, y_n)}{h\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{2h}{\alpha} t_{n+1}^\alpha - \frac{t_{n+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right\} - \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{h}{\alpha} t_{n+1}^\alpha - \frac{t_{n+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right\} \quad (3.37)$$

yazılabilir benzer şekilde

$$\begin{aligned} A_{\alpha,2} &= \frac{f(t_n, y_n)}{h\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\alpha-1} (t - t_{n-1}) dt - \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\alpha-1} (t - t_n) dt \\ &= \frac{f(t_n, y_n)}{h\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} y^{\alpha-1} (t_n - y - t_{n-1}) dy + \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\alpha)} \frac{t_n^{\alpha+1}}{\alpha} \\ &= \frac{f(t_n, y_n)}{h\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{ht_n^\alpha}{\alpha} - \frac{t_n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right\} + \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\alpha+1)} t_n^{\alpha+1} \end{aligned} \quad (3.38)$$

denklem sistemi yazılabilir. Sonuç olarak yaklaşık çözüm

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \frac{f(t_n, f_n)}{h\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{2h}{\alpha} t_{n+1}^\alpha - \frac{t_{n+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{h}{\alpha} t_n^\alpha - \frac{t_n^{\alpha+1}}{\alpha} \right\} \\ &\quad + \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{h}{\alpha} t_{n+1}^\alpha - \frac{t_{n+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{t_n^\alpha}{\alpha+1} \right\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

şeklinde elde edilir ve bu denklem Caputo türevinin iki aşamalı kesirli Adams-Bashford metodu olarak tanımlanır (Owolabi K. M. ve dig. (2018), Naik ve dig. (2020)).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Hepatit C Virüsü Caputo Modeli

Bu bölümde üzerinde çalışılan matematiksel model tanıtılacak ve bu model Caputo kesirli türevine genişletilecektir.

Global düzeyde karşımıza çıkmakta olan Hepatit C virüsü özellikle karaciğer hücrelerini etkileyen bulaşıcı ve tedavi edilmediği takdirde ölümlere yol açabilen ciddi bir sağlık sorunudur. Bulaşma şekillerini yatay ve dikey bulaşma olarak iki şekilde tanımlayabiliriz. Taşıyıcı veya enfeksiyona sahip bir kişinin damar içi madde kullanımı, kan ve kan ürünlerinin transfüzyonu şeklinde başka bir kişiye bulaştırması yatay bulaşma olarak tarif edilirken taşıyıcı veya enfeksiyona sahip hamile bir kadının yeni doğan bebeğine bulaştırması dikey bulaştırma olarak tarif edilebilir.

Belirtileri diğer viral hastalıkların semptomlarına benzese de Hepatit C virüsü bazı durumlarda karaciğerde siroz benzeri büyük bir hasar oluşturmayana kadar kendisini göstermeyen sinsi bir virüstür. Enfekte kişiler hiçbir belirti göstermese veya minimal semptom gösterse bile başkalarına bulaştırabilir.

Salgın hastalıkların matematiksel modellemeleri deney veya farklı bir yöntemle ulaşılması zor veya yüksek maliyetli verilerin elde edilmesinde, salgının yayılma hızı ve seyrini takip, tahmin ve kontrol etmede son derece faydalı sonuçlar vermektedir.

Bu tez çalışmasında Hepatit C virüsünün bulaşma hareketlerinin anlaşılabilmesi için matematiksel model beş adi diferansiyel denklemle ifade edilmiş olup Hepatit C virüs modeli aşağıda gösterilmiştir (Saad ve dig. (2020)).

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\Phi_1(u) &= r\Phi_1(u)\left(1 - \frac{\Phi_1(u) + \Phi_2(u)}{\kappa}\right) - \beta_1\Phi_1(u)\Phi_2(u) \\ \frac{d}{du}\Phi_2(u) &= \beta_1\Phi_1(u)\Phi_2(u) - d_1\Phi_1(u) - \beta_2(u)\Phi_2(u)\Phi_5(u) \\ \frac{d}{du}\Phi_3(u) &= \lambda - \delta_1\Phi_3(u) - \omega\Phi_3(u)\Phi_2(u) \\ \frac{d}{du}\Phi_4(u) &= \omega\Phi_3(u)\Phi_2(u) - \delta_2\Phi_4(u) \\ \frac{d}{du}\Phi_5(u) &= \nu\Phi_4(u)\Phi_5(u) - \beta_3\Phi_2(u)\Phi_5(u) - \mu\Phi_5(u), \quad u > 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

Çalışmamıza konu matematiksel modelde; Φ_1 fonksiyonu u anında sağlıklı hepatositleri, Φ_2 fonksiyonu u anında enfekte hepatositleri, Φ_3 fonksiyonu u anında aktive edilmemiş dentritik hücreleri, Φ_4 fonksiyonu u anında aktive edilmiş dentritik hücreleri, Φ_5 fonksiyonu u anında sitotoksik T lenfositlerini ifade etmektedir.

Ayrıca bu modelde kullanılan parametrelerden r katsayısı içsel çoğalma oranını, β_1 katsayısı enfekte olmuş sağlıklı hücrelerin dolaşımdaki virüs başına enfekte olma oranını, κ serbest virüsün üretim oranını, d_1 serbest virüsün hücre başına ölüm oranını, γ virüsün temizlenme oranını, β_2 enfekte hepatositlerin CTL (sitotoksik T lenfositleri) tarafından lize edilme oranını, λ aktif olmayan DC (dendritik hücreler) üretiminin sabit oranını, ω enfekte hepatosit başına aktive olmayan hepatosit başına aktive olma oranını, δ_2 aktive olmuş DC başına aktive olmuş DC hücrelerin kaybolma oranını, ν çapraz sunum oranı enfekte hepatosit başına ve aktive olmuş DC başına CTL genişleme oranını, β_3 CTL nin enfekte hepatosit başına ve CTL başına temizlenme oranını, μ CTL nin ölüm oranını ifade etmektedir (Saad ve dig. (2020)).

(4.1) de verilen matematiksel modelin Caputo kesirli mertebeye genişletilmiş hali aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_u^\alpha \phi_1(u) &= r\Phi_1(u) \left(1 - \frac{\Phi_1(u) + \Phi_2(u)}{\kappa} \right) - \beta_1 \Phi_1(u) \Phi_2(u) \\
{}_0^C D_u^\alpha \phi_2(u) &= \beta_1 \Phi_1(u) \Phi_2(u) - d_1 \Phi_1(u) - \beta_2(u) \Phi_2(u) \Phi_5(u) \\
{}_0^C D_u^\alpha \phi_3(u) &= \lambda - \delta_1 \Phi_3(u) - \omega \Phi_3(u) \Phi_2(u) \\
{}_0^C D_u^\alpha \phi_4(u) &= \omega \Phi_3(u) \Phi_2(u) - \delta_2 \Phi_4(u) \\
{}_0^C D_u^\alpha \phi_5(u) &= \nu \Phi_4(u) \Phi_5(u) - \beta_3 \Phi_2(u) \Phi_5(u) - \mu \Phi_5(u)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Denklem (4.2) ile verilen kesirli mertebeden matematiksel modelimiz

$$\phi_1(0) = \phi_{1_0}(0), \quad \phi_2(0) = \phi_{2_0}(0), \quad \phi_3(0) = \phi_{3_0}(0), \quad \phi_4(0) = \phi_{4_0}(0), \quad \phi_5(0) = \phi_{5_0}(0) \tag{4.3}$$

başlangıç koşullarına sahiptir.

(4.2) sisteminde $0 < \alpha \leq 1$ ve $\Phi_1(u), \Phi_2(u), \Phi_3(u), \Phi_4(u), \Phi_5(u) \in R_+^5$ dir.

(4.2) sisteminde $\alpha = 1$ alınması durumunda sistem (4.1) de verilen tam sayılı mertebeden adi diferansiyel denklem sistemine dönüşür. (4.2) sisteminde $\Phi_1(u), \Phi_2(u), \Phi_3(u), \Phi_4(u), \Phi_5(u)$ fonksiyonlarının ve bu fonksiyonların Caputo kesirli türevlerinin $u \geq 0$ koşulu altında sürekli olduğu kabul edilmektedir.

4.2. Çözümün Varlık ve Tekliği

Bu bölümde

$\phi_1(0) = \phi_{1_0}(0)$, $\phi_2(0) = \phi_{2_0}(0)$, $\phi_3(0) = \phi_{3_0}(0)$, $\phi_4(0) = \phi_{4_0}(0)$ ve $\phi_5(0) = \phi_{5_0}(0)$ başlangıç koşullarına sahip (4.2) deki Caputo kesirli türevine genişletilmiş Hepatit C modelinin varlık ve teklik durumları incelenecektir.

İlk olarak (4.2) de verilen denklem sisteminde her iki tarafa (2.50) de tanımı verilen Caputo kesirli integrali uygulanırsa aşağıda ifade edilen Volterra tipi integral denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned}\phi_1(u) - \phi_1(0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} (r\Phi_1(u)(1 - \frac{\Phi_1(u) + \Phi_2(u)}{\kappa}) - \beta_1\Phi_1(u)\Phi_2(u)) d\gamma \\ \phi_2(u) - \phi_2(0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} (\beta_1\Phi_1(u)\Phi_2(u) - d_1\Phi_1(u) - \beta_2(u)\Phi_2(u)\Phi_5(u)) d\gamma \\ \phi_3(u) - \phi_3(0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} (\lambda - \delta_1\Phi_3(u) - \omega\Phi_3(u)\Phi_2(u)) d\gamma \\ \phi_4(u) - \phi_4(0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} (\omega\Phi_3(u)\Phi_2(u) - \delta_2\Phi_4(u)) d\gamma \\ \phi_5(u) - \phi_5(0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} (\nu\Phi_4(u)\Phi_5(u) - \beta_3\Phi_2(u)\Phi_5(u) - \mu\Phi_5(u)) d\gamma\end{aligned}$$

Şimdi işlemlerimizin daha anlaşılır olması adına $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ve φ_5 çekirdek fonksiyonları

$$\begin{aligned}\varphi_1(u, \phi_1) &= r\Phi_1(u)(1 - \frac{\Phi_1(u) + \Phi_2(u)}{\kappa}) - \beta_1\Phi_1(u)\Phi_2(u), \\ \varphi_2(u, \phi_2) &= \beta_1\Phi_1(u)\Phi_2(u) - d_1\Phi_1(u) - \beta_2(u)\Phi_2(u)\Phi_5(u), \\ \varphi_3(u, \phi_3) &= \lambda - \delta_1\Phi_3(u) - \omega\Phi_3(u)\Phi_2(u), \\ \varphi_4(u, \phi_4) &= \omega\Phi_3(u)\Phi_2(u) - \delta_2\Phi_4(u), \\ \varphi_5(u, \phi_5) &= \nu\Phi_4(u)\Phi_5(u) - \beta_3\Phi_2(u)\Phi_5(u) - \mu\Phi_5(u)\end{aligned}\tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Varlık-teklik ispatlarını yapmadan önce φ_i çekirdek fonksiyonlarının Lipschitz koşulunu sağladığı gösterilmelidir. O halde aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 4.1 *Denklem (4.4) sisteminin $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ve φ_5 şeklinde tanımlanan çekirdekleri*

$$\|\phi_1\| \leq v_1, \quad \|\phi_2\| \leq v_2, \quad \|\phi_3\| \leq v_3, \quad \|\phi_4\| \leq v_4, \quad \|\phi_5\| \leq v_5$$

$$\begin{aligned} s_1 &= r\left(1 - \frac{v_1 + v_2}{\kappa}\right) - \beta_1 v_2 \\ s_2 &= \beta_1 v_1 - \beta_2 v_5 \\ s_3 &= -\delta_1 - \omega v_2 \\ s_4 &= -\delta_2 \\ s_5 &= \nu v_4 - \beta_3 v_2 - \mu \end{aligned} \tag{4.5}$$

şartları altında $0 \leq s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 < 1$ eşitsizliğini sağlarsa Lipschitz koşulu sağlanmış olur.

İspat : A_1 ve A_2 , φ_1 çekirdeği için iki fonksiyon olsun. Aynı şekilde B_1 ve B_2 , φ_2 çekirdeği için C_1 ve C_2 , φ_3 çekirdeği için D_1 ve D_2 , φ_4 çekirdeği için ve son olarak E_1 ve E_2 , φ_5 çekirdeği için iki fonksiyon olarak kabul edilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(u, A_1) - \varphi_1(u, A_2)\| &= \|rA_1\left(1 - \frac{A_1 + \Phi_2}{\kappa}\right) - \beta_1 A_1 \Phi_2 - (rA_2\left(1 - \frac{A_2 + \Phi_2}{\kappa}\right) - \beta_1 A_2 \Phi_2)\| \\ &\leq (r\left(1 - \frac{v_1 + v_2}{\kappa}\right) - \beta_1 v_2) \|A_1 - A_2\| \\ &= s_1 \|A_1 - A_2\| \\ \|\varphi_2(u, B_1) - \varphi_2(u, B_2)\| &= \|\beta_1 \Phi_1 B_1 - d_1 \Phi_1 - \beta_2 B_1 \Phi_5 - (\beta_1 \Phi_1 B_2 - d_1 \Phi_1 - \beta_2 B_2 \Phi_5)\| \\ &\leq (\beta_1 v_1 - \beta_2 v_5) \|B_1 - B_2\| \\ &= s_2 \|B_1 - B_2\| \\ \|\varphi_3(u, C_1) - \varphi_3(u, C_2)\| &= \|\lambda - \delta_1 C_1 - \omega C_1 \Phi_2 - (\lambda - \delta_1 C_2 - \omega C_2 \Phi_2)\| \\ &\leq (-\delta_1 - \omega v_2) \|C_1 - C_2\| \\ &= s_3 \|C_1 - C_2\| \\ \|\varphi_4(u, D_1) - \varphi_4(u, D_2)\| &= \|\omega \Phi_3 s_2 - \delta_2 \beta_1 - (\omega \Phi_3 s_2 - \delta_2 \beta_2)\| \\ &\leq (-\delta_2) \|D_1 - D_2\| \\ &= s_4 \|D_1 - D_2\| \\ \|\varphi_5(u, E_1) - \varphi_5(u, E_2)\| &= \|\nu \Phi_4 E_1 - \beta_3 \Phi_2 E_1 - \mu E_1 - (\nu \Phi_4 E_2 - \beta_3 \Phi_2 E_2 - \mu E_2)\| \\ &\leq (\nu v_4 - \beta_3 v_2 - \mu) \|E_1 - E_2\| \\ &= s_5 \|E_1 - E_2\| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $0 \leq s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 < 1$ ise Lipschitz koşulları $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ve φ_5 çekirdekleri için sağlanarak Teorem (4.1) ispat edilmiş olur.

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ve φ_5 çekirdekleri (4.4) 'deki denklem sistemi dikkate alınarak aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\phi_1(u) &= \phi_1(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_1(\gamma, \phi_1) d\gamma \\
\phi_2(u) &= \phi_2(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_2(\gamma, \phi_2) d\gamma \\
\phi_3(u) &= \phi_3(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_3(\gamma, \phi_3) d\gamma \\
\phi_4(u) &= \phi_4(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_4(\gamma, \phi_4) d\gamma \\
\phi_5(u) &= \phi_5(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_5(\gamma, \phi_5) d\gamma
\end{aligned} \tag{4.6}$$

genelleştirilerek sistem devam ettirilirse

$$\begin{aligned}
\phi_{1_n}(u) &= \phi_1(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_1(\gamma, \phi_{1_{n-1}}) d\gamma \\
\phi_{2_n}(u) &= \phi_2(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_2(\gamma, \phi_{2_{n-1}}) d\gamma \\
\phi_{3_n}(u) &= \phi_3(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_3(\gamma, \phi_{3_{n-1}}) d\gamma \\
\phi_{4_n}(u) &= \phi_4(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_4(\gamma, \phi_{4_{n-1}}) d\gamma \\
\phi_{5_n}(u) &= \phi_5(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_5(\gamma, \phi_{5_{n-1}}) d\gamma
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada başlangıç koşulları

$$\phi_{1_0}(u) = \phi_{1_0}(0), \quad \phi_{2_0}(u) = \phi_{2_0}(0), \quad \phi_{3_0}(u) = \phi_{3_0}(0), \quad \phi_{4_0}(u) = \phi_{4_0}(0), \quad \phi_{5_0}(u) = \phi_{5_0}(0)$$

şeklinde dir. Bu durumda denklem sistemini

$$\begin{aligned}
K_n(u) &= \phi_{1_n}(u) - \phi_{1_{n-1}}(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} [\varphi_1(\gamma, \phi_{1_{n-1}}) - \varphi_1(\gamma, \phi_{1_{n-2}})] d\gamma \\
W_n(u) &= \phi_{2_n}(u) - \phi_{2_{n-1}}(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} [\varphi_2(\gamma, \phi_{2_{n-1}}) - \varphi_2(\gamma, \phi_{2_{n-2}})] d\gamma \\
P_n(u) &= \phi_{3_n}(u) - \phi_{3_{n-1}}(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} [\varphi_3(\gamma, \phi_{3_{n-1}}) - \varphi_3(\gamma, \phi_{3_{n-2}})] d\gamma \\
Q_n(u) &= \phi_{4_n}(u) - \phi_{4_{n-1}}(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} [\varphi_4(\gamma, \phi_{4_{n-1}}) - \varphi_4(\gamma, \phi_{4_{n-2}})] d\gamma \\
L_n(u) &= \phi_{5_n}(u) - \phi_{5_{n-1}}(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} [\varphi_5(\gamma, \phi_{5_{n-1}}) - \varphi_5(\gamma, \phi_{5_{n-2}})] d\gamma
\end{aligned} \tag{4.7}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\phi_{1_n}(u) = \sum_{j=1}^n K_n(u), \quad \phi_{2_n}(u) = \sum_{j=1}^n W_n(u)$$

$$\phi_{3_n}(u) = \sum_{j=1}^n P_n(u), \quad \phi_{4_n}(u) = \sum_{j=1}^n Q_n(u) \quad \phi_{5_n}(u) = \sum_{j=1}^n L_n(u)$$

şeklindedir.

(4.7) denklem sisteminde her bir denklem için iki tarafın normu alınırsa

$$\begin{aligned} \|K_n(u)\| &= \|\phi_{1_n}(u) - \phi_{1_{n-1}}(u)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} [\varphi_1(\gamma, \phi_{1_{n-1}}) - \varphi_1(\gamma, \phi_{1_{n-2}})] d\gamma \right\| \\ \|W_n(u)\| &= \|\phi_{2_n}(u) - \phi_{2_{n-1}}(u)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} [\varphi_2(\gamma, \phi_{2_{n-1}}) - \varphi_2(\gamma, \phi_{2_{n-2}})] d\gamma \right\| \\ \|P_n(u)\| &= \|\phi_{3_n}(u) - \phi_{3_{n-1}}(u)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} [\varphi_3(\gamma, \phi_{3_{n-1}}) - \varphi_3(\gamma, \phi_{3_{n-2}})] d\gamma \right\| \\ \|Q_n(u)\| &= \|\phi_{4_n}(u) - \phi_{4_{n-1}}(u)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} [\varphi_4(\gamma, \phi_{4_{n-1}}) - \varphi_4(\gamma, \phi_{4_{n-2}})] d\gamma \right\| \\ \|L_n(u)\| &= \|\phi_{5_n}(u) - \phi_{5_{n-1}}(u)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} [\varphi_5(\gamma, \phi_{5_{n-1}}) - \varphi_5(\gamma, \phi_{5_{n-2}})] d\gamma \right\| \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

Teorem (4.1) de verilen Lipschitz koşulları denklemin çekirdekleri için sağlandığından

$$\begin{aligned} \|\phi_{1_n}(u) - \phi_{1_{n-1}}(u)\| &\leq \frac{s_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_1(\gamma, \phi_{1_{n-1}}) - \varphi_1(\gamma, \phi_{1_{n-2}})\| d\gamma \\ \|\phi_{2_n}(u) - \phi_{2_{n-1}}(u)\| &\leq \frac{s_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_2(\gamma, \phi_{2_{n-1}}) - \varphi_2(\gamma, \phi_{2_{n-2}})\| d\gamma \\ \|\phi_{3_n}(u) - \phi_{3_{n-1}}(u)\| &\leq \frac{s_3}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_3(\gamma, \phi_{3_{n-1}}) - \varphi_3(\gamma, \phi_{3_{n-2}})\| d\gamma \\ \|\phi_{4_n}(u) - \phi_{4_{n-1}}(u)\| &\leq \frac{s_4}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_4(\gamma, \phi_{4_{n-1}}) - \varphi_4(\gamma, \phi_{4_{n-2}})\| d\gamma \\ \|\phi_{5_n}(u) - \phi_{5_{n-1}}(u)\| &\leq \frac{s_5}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_5(\gamma, \phi_{5_{n-1}}) - \varphi_5(\gamma, \phi_{5_{n-2}})\| d\gamma \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Sonrasında verilen eşitsizliklerden

$$\begin{aligned} \|K_n(u)\| &\leq \frac{s_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \|K_{n-1}(u)\| d\gamma \\ \|W_n(u)\| &\leq \frac{s_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \|W_{n-1}(u)\| d\gamma \\ \|P_n(u)\| &\leq \frac{s_3}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \|P_{n-1}(u)\| d\gamma \\ \|Q_n(u)\| &\leq \frac{s_4}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \|Q_{n-1}(u)\| d\gamma \\ \|L_n(u)\| &\leq \frac{s_5}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \|L_{n-1}(u)\| d\gamma \end{aligned} \tag{4.8}$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuçlar bizi aşağıdaki teoreme götürür.

Teorem 4.2 *Caputo kesirli operatörü ile tanımlanan (4.2) deki Hepatit C modelinin bir çözümü u_{max} bulunabilmesi koşuluyla*

$$\frac{s_i u_{max}^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

şeklindedir.

İspat : $\Phi_1(u), \Phi_2(u), \Phi_3(u), \Phi_4(u)$ ve $\Phi_5(u)$ fonksiyonlarının sınırlı olduğu ve bunun yanında $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ çekirdekleri için Lipschitz şartının sağlandığı gerçeğinden hareketle teorem (4.2) verilen eşitsizlik

$$\begin{aligned} \|K_n(u)\| &\leq \|\Phi_1(u)\| \left\{ \frac{s_1 u_{max}^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\}^n \\ \|W_n(u)\| &\leq \|\Phi_2(u)\| \left\{ \frac{s_2 u_{max}^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\}^n \\ \|P_n(u)\| &\leq \|\Phi_3(u)\| \left\{ \frac{s_3 u_{max}^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\}^n \\ \|Q_n(u)\| &\leq \|\Phi_4(u)\| \left\{ \frac{s_4 u_{max}^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\}^n \\ \|L_n(u)\| &\leq \|\Phi_5(u)\| \left\{ \frac{s_5 u_{max}^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\}^n \end{aligned} \quad (4.9)$$

şeklinde Hepatit C matematiksel modeline uyarlanabilir. Şimdi (4.9) da verilen denklem sisteminde yer alan fonksiyonların Hepatit C matematiksel modelinin çözümü olduğunun tespiti için öncelikle

$$\begin{aligned} \phi_1(u) - \phi_1(0) &= \phi_{1_n}(u) - \epsilon_n(u) \\ \phi_2(u) - \phi_2(0) &= \phi_{2_n}(u) - \vartheta_n(u) \\ \phi_3(u) - \phi_3(0) &= \phi_{3_n}(u) - \chi_n(u) \\ \phi_4(u) - \phi_4(0) &= \phi_{4_n}(u) - \varrho_n(u) \\ \phi_5(u) - \phi_5(0) &= \phi_{5_n}(u) - \varsigma_n(u) \end{aligned} \quad (4.10)$$

şeklinde bir denklem sisteminin olduğu kabulüyle hareket edilir. Sonrasında (4.10) sisteminde verilen terimlere $\lim_{n \rightarrow \infty}$ uygulanırsa

$$\|\epsilon_n(u)\| \rightarrow 0, \quad \|\vartheta_n(u)\| \rightarrow 0, \quad \|\chi_n(u)\| \rightarrow 0, \quad \|\varrho_n(u)\| \rightarrow 0, \quad \|\varsigma_n(u)\| \rightarrow 0$$

şartlarını sağladığı aşağıdaki işlemler neticesinde görülecektir.

$$\begin{aligned} \|\epsilon_n(u)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} [\varphi_1(\gamma, \phi_1) - \varphi_1(\gamma, \phi_{1_{n-1}})] d\gamma \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_1(\gamma, \phi_1) - \varphi_1(\gamma, \phi_{1_{n-1}})\| d\gamma \\ &\leq \frac{u^\alpha s_1}{\Gamma(\alpha + 1)} \|\phi_1 - \phi_{1_{n-1}}\| \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \|\vartheta_n(u)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} [\varphi_2(\gamma, \phi_2) - \varphi_2(\gamma, \phi_{2_{n-1}})] d\gamma \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_2(\gamma, \phi_2) - \varphi_2(\gamma, \phi_{2_{n-1}})\| d\gamma \\ &\leq \frac{u^\alpha s_2}{\Gamma(\alpha + 1)} \|\phi_2 - \phi_{2_{n-1}}\| \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
\|\chi_n(u)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} [\varphi_3(\gamma, \phi_3) - \varphi_3(\gamma, \phi_{3_{n-1}})] d\gamma \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_3(\gamma, \phi_3) - \varphi_3(\gamma, \phi_{3_{n-1}})\| d\gamma \\
&\leq \frac{u^\alpha s_3}{\Gamma(\alpha+1)} \|\phi_3 - \phi_{3_{n-1}}\|
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\|\varrho_n(u)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} [\varphi_4(\gamma, \phi_4) - \varphi_4(\gamma, \phi_{4_{n-1}})] d\gamma \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_4(\gamma, \phi_4) - \varphi_4(\gamma, \phi_{4_{n-1}})\| d\gamma \\
&\leq \frac{u^\alpha s_4}{\Gamma(\alpha+1)} \|\phi_4 - \phi_{4_{n-1}}\|
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\|\varsigma_n(u)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} [\varphi_5(\gamma, \phi_5) - \varphi_5(\gamma, \phi_{5_{n-1}})] d\gamma \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_5(\gamma, \phi_5) - \varphi_5(\gamma, \phi_{5_{n-1}})\| d\gamma \\
&\leq \frac{u^\alpha s_5}{\Gamma(\alpha+1)} \|\phi_5 - \phi_{5_{n-1}}\|
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Elde edilen eşitsizlik sisteminden hareketle benzer şekilde genelleştirilmiş formül ile devam edilirse

$$\begin{aligned}
\|\epsilon_n(u)\| &\leq \left\{ \frac{u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\}^{n+1} s_1^n K \\
\|\vartheta_n(u)\| &\leq \left\{ \frac{u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\}^{n+1} s_2^n W \\
\|\chi_n(u)\| &\leq \left\{ \frac{u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\}^{n+1} s_3^n P \\
\|\varrho_n(u)\| &\leq \left\{ \frac{u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\}^{n+1} s_4^n Q \\
\|\varsigma_n(u)\| &\leq \left\{ \frac{u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\}^{n+1} s_5^n L
\end{aligned} \tag{4.16}$$

eşitsizlik sistemi yazılabilir. u_{max} noktası eşitsizlikler dikkate alındığı takdirde

$$\begin{aligned}
\|\epsilon_n(u)\| &\leq \left\{ \frac{u_{max}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\}^{n+1} s_1^n K \\
\|\vartheta_n(u)\| &\leq \left\{ \frac{u_{max}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\}^{n+1} s_2^n W \\
\|\chi_n(u)\| &\leq \left\{ \frac{u_{max}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\}^{n+1} s_3^n P \\
\|\varrho_n(u)\| &\leq \left\{ \frac{u_{max}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\}^{n+1} s_4^n Q \\
\|\varsigma_n(u)\| &\leq \left\{ \frac{u_{max}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\}^{n+1} s_5^n L
\end{aligned} \tag{4.17}$$

şeklinde elde edilir. Teorem (4.1) in sonuçları göz önünde bulundurulur ve eşitsizliklerin her iki tarafına $\lim_{n \rightarrow \infty}$ uygulanırsa

$$\|\epsilon_n(u)\| \rightarrow 0, \quad \|\vartheta_n(u)\| \rightarrow 0, \quad \|\chi_n(u)\| \rightarrow 0, \quad \|\varrho_n(u)\| \rightarrow 0, \quad \|\varsigma_n(u)\| \rightarrow 0 \quad (4.18)$$

şeklinde elde edilir. Böylece Hepatit C matematiksel modelinin çözümünün varlığı tespit edilmiş olur.

Teorem 4.3 *Caputo kesirli türev operatörüne genişletilen (4.2) deki Hepatit C matematiksel modelinin çözümü tektir.*

İspat : (4.2) de verilen modelin $\Lambda_1(u)\Lambda_2(u)\Lambda_3(u)\Lambda_4(u)$ ve $\Lambda_5(u)$ gibi başka çözümleri olduğu kabulüyle denklemlerimizi

$$\begin{aligned} \phi_1(u) - \Lambda_1(u) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} [\varphi_1(\gamma, \phi_1) - \varphi_1(\gamma, \Lambda_1)] d\gamma \\ \phi_2(u) - \Lambda_2(u) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} [\varphi_2(\gamma, \phi_2) - \varphi_2(\gamma, \Lambda_2)] d\gamma \\ \phi_3(u) - \Lambda_3(u) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} [\varphi_3(\gamma, \phi_3) - \varphi_3(\gamma, \Lambda_3)] d\gamma \\ \phi_4(u) - \Lambda_4(u) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} [\varphi_4(\gamma, \phi_4) - \varphi_4(\gamma, \Lambda_4)] d\gamma \\ \phi_5(u) - \Lambda_5(u) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} [\varphi_5(\gamma, \phi_5) - \varphi_5(\gamma, \Lambda_5)] d\gamma \end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklinde yazabiliriz. (4.19) daki denklem sisteminin her iki tarafının normu alınır;

$$\begin{aligned} \|\phi_1(u) - \Lambda_1(u)\| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_1(\gamma, \phi_1) - \varphi_1(\gamma, \Lambda_1)\| d\gamma \\ \|\phi_2(u) - \Lambda_2(u)\| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_2(\gamma, \phi_2) - \varphi_2(\gamma, \Lambda_2)\| d\gamma \\ \|\phi_3(u) - \Lambda_3(u)\| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_3(\gamma, \phi_3) - \varphi_3(\gamma, \Lambda_3)\| d\gamma \\ \|\phi_4(u) - \Lambda_4(u)\| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_4(\gamma, \phi_4) - \varphi_4(\gamma, \Lambda_4)\| d\gamma \\ \|\phi_5(u) - \Lambda_5(u)\| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_5(\gamma, \phi_5) - \varphi_5(\gamma, \Lambda_5)\| d\gamma \end{aligned} \quad (4.20)$$

eşitsizliklerini elde ederiz. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ve φ_5 çekirdekleri Lipsichtz şartını sağladığından

$$\begin{aligned} \|\phi_1(u) - \Lambda_1(u)\| &\leq \frac{s_1 u^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|\phi_1(u) - \Lambda_1(u)\| \\ \|\phi_2(u) - \Lambda_2(u)\| &\leq \frac{s_2 u^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|\phi_2(u) - \Lambda_2(u)\| \\ \|\phi_3(u) - \Lambda_3(u)\| &\leq \frac{s_3 u^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|\phi_3(u) - \Lambda_3(u)\| \\ \|\phi_4(u) - \Lambda_4(u)\| &\leq \frac{s_4 u^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|\phi_4(u) - \Lambda_4(u)\| \\ \|\phi_5(u) - \Lambda_5(u)\| &\leq \frac{s_5 u^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|\phi_5(u) - \Lambda_5(u)\| \end{aligned} \quad (4.21)$$

eşitsizlik sistemine ulaşılır. Ayrıca;

$$\begin{aligned}
& \|\phi_1(u) - \Lambda_1(u)\| \left(1 - \frac{s_1 u^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}\right) \leq 0 \\
& \|\phi_2(u) - \Lambda_2(u)\| \left(1 - \frac{s_2 u^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}\right) \leq 0 \\
& \|\phi_3(u) - \Lambda_3(u)\| \left(1 - \frac{s_3 u^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}\right) \leq 0 \\
& \|\phi_4(u) - \Lambda_4(u)\| \left(1 - \frac{s_4 u^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}\right) \leq 0 \\
& \|\phi_5(u) - \Lambda_5(u)\| \left(1 - \frac{s_5 u^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}\right) \leq 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

eşitsizlik sistemi yazılabilir. Bu durumda

$$\phi_1(u) = \Lambda_1(u), \quad \phi_2(u) = \Lambda_2(u), \quad \phi_3(u) = \Lambda_3(u), \quad \phi_4(u) = \Lambda_4(u), \quad \phi_5(u) = \Lambda_5(u)$$

eşitliklerinin ispatını gerektiren

$$\begin{aligned}
& \|\phi_1(u) - \Lambda_1(u)\| = 0, \quad \|\phi_2(u) - \Lambda_2(u)\| = 0, \quad \|\phi_3(u) - \Lambda_3(u)\| = 0, \\
& \|\phi_4(u) - \Lambda_4(u)\| = 0 \text{ ve } \|\phi_5(u) - \Lambda_5(u)\| = 0 \text{ eşitlikleri elde edilir.}
\end{aligned}$$

Dolayısıyla Hepatit C modelinin teorem (4.3) de ifade edilen tek çözümünün olduğu hipotezi ispatlanmış olur.

4.3. Kararlılık Analizi

Tanım: (4.2) de verilen matematiksel modelin $\rho_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ve

$\Xi_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sabitleri olması halinde Hyers-Ulam'a göre kararlı olduğu söylenebilir.

İşlemlerin daha anlaşılır olması için $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ve φ_5 çekirdek fonksiyonları (4.6) teki gibi ele alınacak olursa

$$\begin{aligned}
& |\phi_1(u) - \phi_1(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \varphi_1(\gamma, \phi_1(\gamma)) d\gamma| < \Xi_1 \\
& |\phi_2(u) - \phi_2(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \varphi_2(\gamma, \phi_2(\gamma)) d\gamma| < \Xi_2 \\
& |\phi_3(u) - \phi_3(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \varphi_3(\gamma, \phi_3(\gamma)) d\gamma| < \Xi_3 \\
& |\phi_4(u) - \phi_4(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \varphi_4(\gamma, \phi_4(\gamma)) d\gamma| < \Xi_4 \\
& |\phi_5(u) - \phi_5(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \varphi_5(\gamma, \phi_5(\gamma)) d\gamma| < \Xi_5
\end{aligned} \tag{4.23}$$

denklem sistemi yazılabilir.

Bu durumda $\Phi'_1(u), \Phi'_2(u), \Phi'_3(u), \Phi'_4(u)$ ve $\Phi'_5(u)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
|\phi'_1(u) - \phi'_1(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_1(\gamma, \phi'_1(\gamma)) d\gamma| &< \Xi_1 \\
|\phi'_2(u) - \phi'_2(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_2(\gamma, \phi'_2(\gamma)) d\gamma| &< \Xi_2 \\
|\phi'_3(u) - \phi'_3(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_3(\gamma, \phi'_3(\gamma)) d\gamma| &< \Xi_3 \\
|\phi'_4(u) - \phi'_4(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_4(\gamma, \phi'_4(\gamma)) d\gamma| &< \Xi_4 \\
|\phi'_5(u) - \phi'_5(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_5(\gamma, \phi'_5(\gamma)) d\gamma| &< \Xi_5
\end{aligned} \tag{4.24}$$

yazılabilir.

Teorem 4.4 (4.2) 'de verilen Hepatit C modeli Hyers-Ulam teoremine göre kararlıdır.

İspat : Teorem (4.3) 'ün ispatında $\Phi_1(u), \Phi_2(u), \Phi_3(u), \Phi_4(u)$ ve $\Phi_5(u)$ 'nin tek çözümünün olduğu ifade edilmişti. Burada $\Phi'_1(u), \Phi'_2(u), \Phi'_3(u), \Phi'_4(u)$ ve $\Phi'_5(u)$ fonksiyonları (4.2) deki modelin bir çözümü olması koşuluyla başlangıç değerleri sıfır alınırsa aşağıdaki denklem sistemini sağlar.

$$\begin{aligned}
\phi_1(u) &= \phi_1(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_1(\gamma, \phi_1(\gamma)) d\gamma \\
\phi_2(u) &= \phi_2(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_2(\gamma, \phi_2(\gamma)) d\gamma \\
\phi_3(u) &= \phi_3(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_3(\gamma, \phi_3(\gamma)) d\gamma \\
\phi_4(u) &= \phi_4(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_4(\gamma, \phi_4(\gamma)) d\gamma \\
\phi_5(u) &= \phi_5(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \varphi_5(\gamma, \phi_5(\gamma)) d\gamma
\end{aligned} \tag{4.25}$$

O halde

$$\begin{aligned}
\|\phi_1(u) - \phi'_1(u)\| &\leq \|\varphi_1(u, \phi_1) - \varphi_1(u, \phi'_1)\| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-\gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_1(\gamma, \phi_1(\gamma)) - \varphi_1(\gamma, \phi'_1(\gamma))\| d\gamma \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} R_1 \|\phi_1 - \phi'_1\|
\end{aligned} \tag{4.26}$$

yazılabilir. Burada $\Xi_1 = R_1$ ve $\rho_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} u$ alınırsa

$$\|\phi_1(u) - \phi'_1(u)\| \leq \Xi_1 \rho_1 \tag{4.27}$$

olacaktır. (Eşitsizliğin sağ tarafındaki $\|\phi_1(u) - \phi'_1(u)\|$ ifadesi çok küçük bir değer olduğundan hesaplamalarda ihmal edilmiştir.) Aynı şekilde

$$\begin{aligned} \|\phi_2(u) - \phi'_2(u)\| &\leq \|\varphi_2(u, \phi_2) - \varphi_2(u, \phi'_2)\| \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_2(\gamma, \phi_2(\gamma) - \varphi_2(\gamma, \phi'_2(\gamma))\| d\gamma \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} R_2 \|\phi_2 - \phi'_2\| \end{aligned} \quad (4.28)$$

yazılabilir. Burada $\Xi_2 = R_2$ ve $\rho_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}u$ alınırsa

$$\|\phi_2(u) - \phi'_2(u)\| \leq \Xi_2 \rho_2 \quad (4.29)$$

olacaktır. (Eşitsizliğin sağ tarafındaki $\|\phi_2(u) - \phi'_2(u)\|$ ifadesi çok küçük bir değer olduğundan hesaplamalarda ihmal edilmiştir.) Aynı şekilde

$$\begin{aligned} \|\phi_3(u) - \phi'_3(u)\| &\leq \|\varphi_3(u, \phi_3) - \varphi_3(u, \phi'_3)\| \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_3(\gamma, \phi_3(\gamma) - \varphi_3(\gamma, \phi'_3(\gamma))\| d\gamma \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} R_3 \|\phi_3 - \phi'_3\| \end{aligned} \quad (4.30)$$

yazılabilir. Burada $\Xi_3 = R_3$ ve $\rho_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}u$ alınırsa

$$\|\phi_3(u) - \phi'_3(u)\| \leq \Xi_3 \rho_3 \quad (4.31)$$

olacaktır. (Eşitsizliğin sağ tarafındaki $\|\phi_3(u) - \phi'_3(u)\|$ ifadesi çok küçük bir değer olduğundan hesaplamalarda ihmal edilmiştir.) Aynı şekilde

$$\begin{aligned} \|\phi_4(u) - \phi'_4(u)\| &\leq \|\varphi_4(u, \phi_4) - \varphi_4(u, \phi'_4)\| \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_4(\gamma, \phi_4(\gamma) - \varphi_4(\gamma, \phi'_4(\gamma))\| d\gamma \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} R_4 \|\phi_4 - \phi'_4\| \end{aligned} \quad (4.32)$$

yazılabilir. Burada $\Xi_4 = R_4$ ve $\rho_4 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}u$ alınırsa

$$\|\phi_4(u) - \phi'_4(u)\| \leq \Xi_4 \rho_4 \quad (4.33)$$

olacaktır. (Eşitsizliğin sağ tarafındaki $\|\phi_4(u) - \phi'_4(u)\|$ ifadesi çok küçük bir değer olduğundan hesaplamalarda ihmal edilmiştir.) Aynı şekilde

$$\begin{aligned} \|\phi_5(u) - \phi'_5(u)\| &\leq \|\varphi_5(u, \phi_5) - \varphi_5(u, \phi'_5)\| \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u - \gamma)^{\alpha-1} \|\varphi_5(\gamma, \phi_5(\gamma) - \varphi_5(\gamma, \phi'_5(\gamma))\| d\gamma \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} R_5 \|\phi_5 - \phi'_5\| \end{aligned} \quad (4.34)$$

yazılabilir. Burada $\Xi_5 = R_5$ ve $\rho_5 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}u$ alınırsa

$$\|\phi_5(u) - \phi'_5(u)\| \leq \Xi_5 \rho_5 \quad (4.35)$$

olacaktır. (Eşitsizliğin sağ tarafındaki $\|\phi_5(u) - \phi'_5(u)\|$ ifadesi çok küçük bir değer olduğundan hesaplamalarda ihmal edilmiştir.)

Bu şekilde teorem ispat edilmiş olur ve (4.2) de verilen matematiksel modelin Hyers-Ulam'a göre kararlı olduğu sonucuna varılır.

4.4. Nümerik Çözüm

Lineer olmayan adi veya kısmi diferansiyel denklem formlarının analitik çözümlerinin elde edilmesinin zorluğu bilinmekte olup bu yüzden analitik çözümlere ulaşamadığı koşullarda yaklaşık-analitik veya nümerik yöntemlerden faydalanılır ki bu yöntemlerin en bilinen ve sıklıkla kullanılanları Adams-Bashforth tipi tahmin etme-düzeltilme metodu (Owolabi (2019), Naik ve dig. (2020)), Adomian ayrıştırma metodu (ADM) (Wazwaz (1999)), Laplace dönüşümü metodu (Durbin (1974)), homotopi analiz metodu (Liao (2009)), homotopi pertürbasyon metodu (Esen ve dig. (2012)) şeklinde sıralanabilir.

Caputo anlamında Hepatit C matematiksel modelinin nümerik çözümünde yukarıda bahsedilen nümerik yöntemlerden özellikle son yıllarda sıkça kullanılan Adams-Bashforth tipi tahmin etme-düzeltilme metodundan yararlanılacaktır. Adams-Bashforth yöntemlerinin sıklıkla kullanılması temelde avantajlı özelliklere sahip olması, uygun hesaplama maliyeti, uygulama kolaylığı vb. gerekçelere dayandırılabilir.

Hepatit C modelinin nümerik çözümü için aşağıdaki teoremden faydalanılacaktır.

Teorem 4.5 *f fonksiyonun sınırlı olması koşuluyla*

$${}_0^C D_u^\alpha g(u) = f(u, g(u))$$

kesirli diferansiyel denklemi verilsin. Bu durumda $g(u)$ nin nümerik çözümünü

$$\begin{aligned} g(u_{n+1}) = & g(u_n) + \frac{f(u_n, f_n)}{h\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{2h}{\alpha} u_{n+1}^\alpha - \frac{u_{n+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{h}{\alpha} u_n^\alpha - \frac{u_n^{\alpha+1}}{\alpha} \right\} \\ & + \frac{f(u_{n-1}, g_{n-1})}{h\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{h}{\alpha} u_{n+1}^\alpha - \frac{u_{n+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{u_n^\alpha}{\alpha+1} \right\} + \Omega_n^\alpha(u) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\Omega_n^\alpha(u) < \frac{h^{3+\alpha} M}{12\Gamma(\alpha+1)} \left[(n+1)^\alpha + n^2 \right]$$

eşitsizliği geçerlidir (Owolabi K. M. ve dig. (2018)).

İspat: Kesirli analizin temel teoreminden elde edilen

$$g(u_{n+1}) = g(u_n) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} f(u, g(u)) du + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} (u_n - u)^{\alpha-1} f(u, g(u)) du \quad (4.36)$$

denkleminde Lagrange polinomu kullanılarak işlemlere devam edilirse

$$\begin{aligned} g(u_{n+1}) - g(u_n) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} L_1(u) (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} du + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} \Omega_1(u) (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} du \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} L_2(u) (u_n - u)^{\alpha-1} du + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} \Omega_2(u) (u_n - u)^{\alpha-1} du \\ &= \frac{f(u_n, g_n)}{h\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{2h}{\alpha} u_{n+1}^\alpha - \frac{u_{n+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{h}{\alpha} u_n^\alpha - \frac{u_n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right\} + \frac{f(u_{n-1}, g_{n-1})}{h\Gamma(\alpha)} \\ &\quad X \left\{ \frac{h}{\alpha} u_{n+1}^\alpha - \frac{u_{n+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{u_n^\alpha}{\alpha+1} \right\} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} \Omega(u) (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} du \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} \Omega(u) (u_n - u)^{\alpha-1} du \end{aligned} \quad (4.37)$$

sonucuna ulaşılır.

$$\Omega_n(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} \Omega_1(u) (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} du - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} \Omega_1(u) (u_n - u)^{\alpha-1} du \quad (4.38)$$

denklemini aşağıda verildiği şekilde ilerletildiğinde

$$\Omega_1(u) = \frac{f^{(n+1)}(u, g(u))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (u - u_i) \quad (4.39)$$

eşitliğinden hareketle

$$\begin{aligned} \Omega_n(u) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} \frac{f^{(n+1)}(u, g(u))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (u - u_i) (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} du \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} \frac{f^{(n+1)}(u, g(u))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (u - u_i) (u_n - u)^{\alpha-1} du \end{aligned} \quad (4.40)$$

yazılabilir.

$\|f(u)\|_\infty = \sup_{u \in [a, b]} |f(u)|$ olması koşuluyla

$$\|f^{(3)}(u, g(u))\|_\infty < M < \infty \quad (4.41)$$

eşitsizliği elde edilir sonrasında

$$\begin{aligned} \|\Omega_n(u)\|_\infty &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} \frac{f^{(3)}(u, g(u))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (u - u_i) (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} du \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} \frac{f^{(n+1)}(u, g(u))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (u - u_i) (u_n - u)^{\alpha-1} du \right\|_\infty \\ \|\Omega_n(u)\|_\infty &\leq \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} \frac{f^{(n+1)}(u, g(u))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (u - u_i) (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} du \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} \frac{f^{(n+1)}(u, g(u))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (u - u_i) (u_n - u)^{\alpha-1} du \right\|_\infty \end{aligned} \quad (4.42)$$

denklemlerine ulaşılır. Burada genellik formunu kaybetmeden işleme devam edilirse

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{6\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} f^{(3)}(u, g(u)) \prod_{i=0}^2 (u - u_i) (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} du \right\|_{\infty} \\
& \leq \left\| \frac{1}{6\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} \|f^{(3)}(u, g(u))\|_{\infty} \prod_{i=0}^2 (u - u_i) (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} du \right\|_{\infty} \\
& \leq \left\| \frac{1}{6\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} \|f^{(3)}(u, g(u))\|_{\infty} \prod_{i=0}^2 (u - u_i) \int_0^{u_{n+1}} (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} du \right\|_{\infty} \quad (4.43) \\
& \leq \frac{2h^3}{4 \times 6\Gamma(\alpha)} \|f^{(3)}(u, g(u))\|_{\infty} \frac{u_{n+1}^{\alpha}}{\alpha} \\
& < \frac{h^3 u_{n+1}^{\alpha} M}{12\Gamma(\alpha + 1)}
\end{aligned}$$

elde edilir böylece

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} \frac{f^{(n+1)}(u, g(u))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (u - u_i) (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} du \right\|_{\infty} < \frac{h^3 u_{n+1}^{\alpha} M}{12\Gamma(\alpha + 1)} \quad (4.44)$$

ve

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} \frac{f^{(n+1)}(u, g(u))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (u - u_i) (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} du \right\|_{\infty} < \frac{h^3 u_n^{\alpha} M}{12\Gamma(\alpha + 1)} \quad (4.45)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\|\Omega(u)\|_{\infty} & < \frac{h^3 M}{12\Gamma(\alpha + 1)} (u_n^{\alpha} + u_{n+1}^{\alpha}) \\
& < \frac{h^{3+\alpha} M}{12\Gamma(\alpha + 1)} (n^{\alpha} + (n+1)^{\alpha})
\end{aligned} \quad (4.46)$$

eşitsizliği yazılıp tekrar bir değerlendirme yapılırsa

$$\begin{aligned}
\|g_{n+1} - g_n\|_{\infty} & = \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} f(u, g(u)) du \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} (u_n - u)^{\alpha-1} f(u, g(u)) du \right\|_{\infty} \\
& \leq \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} f(u, g(u)) du \right\|_{\infty} \\
& \quad + \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} (u_n - u)^{\alpha-1} f(u, g(u)) du \right\|_{\infty}
\end{aligned} \quad (4.47)$$

elde edilir. Genellik kaybı olmadan işleme devam edilirse

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} f(u, g(u)) du \right\|_{\infty} \\
& \leq \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n \int_{u_j}^{u_{j+1}} (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} f(u_j, g(u_j)) du \right\|_{\infty} \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n \int_{u_j}^{u_{j+1}} (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} \|f(u_j, g(u_j))\| du \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \max_{u \in [u_j, u_{j+1}]} \|f(u_j, g(u_j))\| \sum_{j=0}^n \int_{u_j}^{u_{j+1}} (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \max_{u \in [u_j, u_{j+1}]} \|f(u_j, g(u_j))\| \sum_{j=0}^n \left\{ \frac{(u_{n+1} - u_j)^{\alpha}}{\alpha} - \frac{(u_{n+1} - u_{j+1})^{\alpha}}{\alpha} \right\} \\
& \leq \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \max_{u \in [u_j, u_{j+1}]} \|f(u_j, g(u_j))\| \sum_{j=0}^n \left\{ (n + 1 - j)^{\alpha} - (n - j)^{\alpha} \right\} \\
& \leq \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \max_{u \in [u_j, u_{j+1}]} \|f(u_j, g(u_j))\| \left\{ (n + 1)^{\alpha} + 1 \right\} \\
& \leq \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \max_{u \in [u_j, u_{j+1}]} \|f(u, g(u))\| \left\{ (n + 1)^{\alpha} + 1 \right\}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

denklem sistemine ulaşılır böylece

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} (u_{n+1} - u)^{\alpha-1} f(u, g(u)) du \right\| < \frac{h^{\alpha} \cup_n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \max_{u \in [u_j, u_{j+1}]} \|f(u, g(u))\| \tag{4.49}$$

ve

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} (u_n - u)^{\alpha-1} f(u, g(u)) du \right\| < \frac{h^{\alpha} \vee_n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \max_{u \in [u_j, u_{j+1}]} \|f(u, g(u))\| \tag{4.50}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Buradan da

$$\|g_{n+1} - g_n\|_{\infty} < \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \max_{u \in [u_j, u_{j+1}]} \|f(u, g(u))\| (\cup_n^{\alpha} + \vee_n^{\alpha}) \tag{4.51}$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır.

Caputo kesirli türevine genişletilmiş (4.2) deki Hepatit C virüsü matematiksel modelinin

$J_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 5$ çekirdekleri için

$$\begin{aligned}
\Phi_1(u) - \Phi_1(0) &= J_1(u, \Phi_1(u)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u J_1(\gamma, \Phi_1(\gamma)) \\
\Phi_2(u) - \Phi_2(0) &= J_2(u, \Phi_2(u)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u J_2(\gamma, \Phi_2(\gamma)) \\
\Phi_3(u) - \Phi_3(0) &= J_3(u, \Phi_3(u)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u J_3(\gamma, \Phi_3(\gamma)) \\
\Phi_4(u) - \Phi_4(0) &= J_4(u, \Phi_4(u)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u J_4(\gamma, \Phi_4(\gamma)) \\
\Phi_5(u) - \Phi_5(0) &= J_5(u, \Phi_5(u)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u J_5(\gamma, \Phi_5(\gamma))
\end{aligned} \tag{4.52}$$

denklem sistemi elde edilir. Sonrasında

$$\begin{aligned}
\Phi_{1_{n+1}}(u) - \Phi_1(0) &= J_1(u_n, \Phi_1(u_n)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} J_1(\gamma, \Phi_1(\gamma)) \\
\Phi_{2_{n+1}}(u) - \Phi_2(0) &= J_2(u_n, \Phi_2(u_n)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} J_2(\gamma, \Phi_2(\gamma)) \\
\Phi_{3_{n+1}}(u) - \Phi_3(0) &= J_3(u_n, \Phi_3(u_n)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} J_3(\gamma, \Phi_3(\gamma)) \\
\Phi_{4_{n+1}}(u) - \Phi_4(0) &= J_4(u_n, \Phi_4(u_n)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} J_4(\gamma, \Phi_4(\gamma)) \\
\Phi_{5_{n+1}}(u) - \Phi_5(0) &= J_5(u_n, \Phi_5(u_n)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_{n+1}} J_5(\gamma, \Phi_5(\gamma))
\end{aligned} \tag{4.53}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Phi_{1_n}(u) - \Phi_1(0) &= J_1(u_{n-1}, \Phi_1(u_{n-1})) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} J_1(\gamma, \Phi_1(\gamma)) \\
\Phi_{2_n}(u) - \Phi_2(0) &= J_2(u_{n-1}, \Phi_2(u_{n-1})) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} J_2(\gamma, \Phi_2(\gamma)) \\
\Phi_{3_n}(u) - \Phi_3(0) &= J_3(u_{n-1}, \Phi_3(u_{n-1})) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} J_3(\gamma, \Phi_3(\gamma)) \\
\Phi_{4_n}(u) - \Phi_4(0) &= J_4(u_{n-1}, \Phi_4(u_{n-1})) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} J_4(\gamma, \Phi_4(\gamma)) \\
\Phi_{5_n}(u) - \Phi_5(0) &= J_5(u_{n-1}, \Phi_5(u_{n-1})) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u_n} J_5(\gamma, \Phi_5(\gamma))
\end{aligned} \tag{4.54}$$

denklem sistemleri oluşturulup (4.53) denklem sisteminden (4.54) denklem sistemi çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
\Phi_{1_{n+1}} - \Phi_{1_n} &= J_1(u_n, \Phi_1(u_n)) - J_1(u_{n-1}, \Phi_1(u_{n-1})) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{u_n}^{u_{n+1}} J_1(u, \Phi_1(u)) \\
\Phi_{2_{n+1}} - \Phi_{2_n} &= J_2(u_n, \Phi_2(u_n)) - J_2(u_{n-1}, \Phi_2(u_{n-1})) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{u_n}^{u_{n+1}} J_2(u, \Phi_2(u)) \\
\Phi_{3_{n+1}} - \Phi_{3_n} &= J_3(u_n, \Phi_3(u_n)) - J_3(u_{n-1}, \Phi_3(u_{n-1})) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{u_n}^{u_{n+1}} J_3(u, \Phi_3(u)) \\
\Phi_{4_{n+1}} - \Phi_{4_n} &= J_4(u_n, \Phi_4(u_n)) - J_4(u_{n-1}, \Phi_4(u_{n-1})) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{u_n}^{u_{n+1}} J_4(u, \Phi_4(u)) \\
\Phi_{5_{n+1}} - \Phi_{5_n} &= J_5(u_n, \Phi_5(u_n)) - J_5(u_{n-1}, \Phi_5(u_{n-1})) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{u_n}^{u_{n+1}} J_5(u, \Phi_5(u))
\end{aligned} \tag{4.55}$$

yazılabilir. Buradan işleme devam edilirse

$$\begin{aligned}
\int_{u_n}^{u_{n+1}} J_1(u, \Phi_1(u)) du &= \int_{u_n}^{u_{n+1}} \left\{ \frac{J_1(u_n, \Phi_{1_n})}{h} (u - u_{n-1}) - \frac{J_1(u_{n-1}, \Phi_{1_{n-1}})}{h} (u - u_n) \right\} \\
&= \frac{3h}{2} \left\{ J_1(u_n - \Phi_{1_n}) \right\} - \frac{h}{2} \left\{ J_1(u_{n-1}, \Phi_{1_{n-1}}) \right\} \\
\int_{u_n}^{u_{n+1}} J_2(u, \Phi_2(u)) du &= \int_{u_n}^{u_{n+1}} \left\{ \frac{J_2(u_n, \Phi_{2_n})}{h} (u - u_{n-1}) - \frac{J_2(u_{n-1}, \Phi_{2_{n-1}})}{h} (u - u_n) \right\} \\
&= \frac{3h}{2} \left\{ J_2(u_n - \Phi_{2_n}) \right\} - \frac{h}{2} \left\{ J_2(u_{n-1}, \Phi_{2_{n-1}}) \right\} \\
\int_{u_n}^{u_{n+1}} J_3(u, \Phi_3(u)) du &= \int_{u_n}^{u_{n+1}} \left\{ \frac{J_3(u_n, \Phi_{3_n})}{h} (u - u_{n-1}) - \frac{J_3(u_{n-1}, \Phi_{3_{n-1}})}{h} (u - u_n) \right\} \\
&= \frac{3h}{2} \left\{ J_3(u_n - \Phi_{3_n}) \right\} - \frac{h}{2} \left\{ J_3(u_{n-1}, \Phi_{3_{n-1}}) \right\} \\
\int_{u_n}^{u_{n+1}} J_4(u, \Phi_4(u)) du &= \int_{u_n}^{u_{n+1}} \left\{ \frac{J_4(u_n, \Phi_{4_n})}{h} (u - u_{n-1}) - \frac{J_4(u_{n-1}, \Phi_{4_{n-1}})}{h} (u - u_n) \right\} \\
&= \frac{3h}{2} \left\{ J_4(u_n - \Phi_{4_n}) \right\} - \frac{h}{2} \left\{ J_4(u_{n-1}, \Phi_{4_{n-1}}) \right\} \\
\int_{u_n}^{u_{n+1}} J_5(u, \Phi_5(u)) du &= \int_{u_n}^{u_{n+1}} \left\{ \frac{J_5(u_n, \Phi_{5_n})}{h} (u - u_{n-1}) - \frac{J_5(u_{n-1}, \Phi_{5_{n-1}})}{h} (u - u_n) \right\} \\
&= \frac{3h}{2} \left\{ J_5(u_n - \Phi_{5_n}) \right\} - \frac{h}{2} \left\{ J_5(u_{n-1}, \Phi_{5_{n-1}}) \right\}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

denklem sistemine ulaşılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\Phi_{1_{n+1}} - \Phi_{1_n} &= J_1(u_n, \Phi_{1_n}) - J_1(u_{n-1}, \Phi_{1_{n-1}}) \\
&\quad + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} \left\{ J_1(u_n - \Phi_{1_n}) \right\} - \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} \left\{ J_1(u_{n-1}, \Phi_{1_{n-1}}) \right\} \\
\Phi_{2_{n+1}} - \Phi_{2_n} &= J_2(u_n, \Phi_{2_n}) - J_2(u_{n-1}, \Phi_{2_{n-1}}) \\
&\quad + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} \left\{ J_2(u_n - \Phi_{2_n}) \right\} - \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} \left\{ J_2(u_{n-1}, \Phi_{2_{n-1}}) \right\} \\
\Phi_{3_{n+1}} - \Phi_{3_n} &= J_3(u_n, \Phi_{3_n}) - J_3(u_{n-1}, \Phi_{3_{n-1}}) \\
&\quad + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} \left\{ J_3(u_n - \Phi_{3_n}) \right\} - \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} \left\{ J_3(u_{n-1}, \Phi_{3_{n-1}}) \right\} \\
\Phi_{4_{n+1}} - \Phi_{4_n} &= J_4(u_n, \Phi_{4_n}) - J_4(u_{n-1}, \Phi_{4_{n-1}}) \\
&\quad + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} \left\{ J_4(u_n - \Phi_{4_n}) \right\} - \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} \left\{ J_4(u_{n-1}, \Phi_{4_{n-1}}) \right\} \\
\Phi_{5_{n+1}} - \Phi_{5_n} &= J_5(u_n, \Phi_{5_n}) - J_5(u_{n-1}, \Phi_{5_{n-1}}) \\
&\quad + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} \left\{ J_5(u_n - \Phi_{5_n}) \right\} - \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} \left\{ J_5(u_{n-1}, \Phi_{5_{n-1}}) \right\}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

eşitlikleri yazılabilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\Phi_{1_{n+1}} &= \Phi_{1_n} + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} J_1(u_n, \Phi_{1_n}) + \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} J_1(u_{n-1}, \Phi_{1_{n-1}}) \\
\Phi_{2_{n+1}} &= \Phi_{2_n} + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} J_2(u_n, \Phi_{2_n}) + \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} J_2(u_{n-1}, \Phi_{2_{n-1}}) \\
\Phi_{3_{n+1}} &= \Phi_{3_n} + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} J_3(u_n, \Phi_{3_n}) + \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} J_3(u_{n-1}, \Phi_{3_{n-1}}) \\
\Phi_{4_{n+1}} &= \Phi_{4_n} + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} J_4(u_n, \Phi_{4_n}) + \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} J_4(u_{n-1}, \Phi_{4_{n-1}}) \\
\Phi_{5_{n+1}} &= \Phi_{5_n} + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} J_5(u_n, \Phi_{5_n}) + \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} J_5(u_{n-1}, \Phi_{5_{n-1}})
\end{aligned} \tag{4.58}$$

denklem sistemi elde edilir.

$${}_0^C D_u^\alpha g(u) = f(u, g(u)) \tag{4.59}$$

(4.59) da verilen eşitlik ele alınır ve Teorem (4.5) e göre düzenlenecek olursa

$$\begin{aligned}
\Phi_{1_{n+1}} &= \Phi_{1_n} + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} J_1(u_n, \Phi_{1_n}) + \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} J_1(u_{n-1}, \Phi_{1_{n-1}}) + {}^1 \Omega_n^\alpha \\
\Phi_{2_{n+1}} &= \Phi_{2_n} + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} J_2(u_n, \Phi_{2_n}) + \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} J_2(u_{n-1}, \Phi_{2_{n-1}}) + {}^2 \Omega_n^\alpha \\
\Phi_{3_{n+1}} &= \Phi_{3_n} + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} J_3(u_n, \Phi_{3_n}) + \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} J_3(u_{n-1}, \Phi_{3_{n-1}}) + {}^3 \Omega_n^\alpha \\
\Phi_{4_{n+1}} &= \Phi_{4_n} + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} J_4(u_n, \Phi_{4_n}) + \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} J_4(u_{n-1}, \Phi_{4_{n-1}}) + {}^4 \Omega_n^\alpha \\
\Phi_{5_{n+1}} &= \Phi_{5_n} + \frac{3h}{2\Gamma(\alpha)} J_5(u_n, \Phi_{5_n}) + \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} J_5(u_{n-1}, \Phi_{5_{n-1}}) + {}^5 \Omega_n^\alpha
\end{aligned} \tag{4.60}$$

bulunur. Böylece

$${}_i \Omega_n^\alpha < \frac{h^{3+\alpha} M}{12\Gamma(\alpha+1)} \left[(n+1)^\alpha + n^2 \right], \quad i = 1, 2, \dots, 5 \tag{4.61}$$

eşitsizliği elde edilerek nümerik çözüm tamamlanmış olur.

Sonuç olarak (4.2) ile verilen Caputo kesirli mertebeden HCV modelinde Adams-Bashford metodu yardımıyla

$$\begin{aligned}
\phi_{1_{n+1}} - \phi_{1_n} &= \frac{f\phi_1(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n})}{h\Gamma\alpha} \left(\frac{2hu_{n+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{u_1^{\alpha+1}n+1}{\alpha+1} + \frac{hu_n^\alpha}{\alpha} - \frac{u_n^{\alpha+1}}{\alpha} \right) \\
&+ \frac{f\phi_1(u_{n-1}, \phi_{1_{n-1}}, \phi_{2_{n-1}}, \phi_{3_{n-1}}, \phi_{4_{n-1}}, \phi_{5_{n-1}})}{h\Gamma\alpha} \\
&X \left(\frac{hu_{n+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{u_1^{\alpha+1}n+1}{\alpha+1} + \frac{u_n^\alpha}{\alpha+1} \right)
\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{2_{n+1}} - \phi_{2_n} &= \frac{f\phi_2(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n})}{h\Gamma\alpha} \left(\frac{2hu_{n+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{u_1^{\alpha+1}n+1}{\alpha+1} + \frac{hu_n^\alpha}{\alpha} - \frac{u_n^{\alpha+1}}{\alpha} \right) \\
&\quad + \frac{f\phi_2(u_{n-1}, \phi_{1_{n-1}}, \phi_{2_{n-1}}, \phi_{3_{n-1}}, \phi_{4_{n-1}}, \phi_{5_{n-1}})}{h\Gamma\alpha} \\
&\quad X \left(\frac{hu_{n+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{u_1^{\alpha+1}n+1}{\alpha+1} + \frac{u_n^\alpha}{\alpha+1} \right)
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{3_{n+1}} - \phi_{3_n} &= \frac{f\phi_3(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n})}{h\Gamma\alpha} \left(\frac{2hu_{n+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{u_1^{\alpha+1}n+1}{\alpha+1} + \frac{hu_n^\alpha}{\alpha} - \frac{u_n^{\alpha+1}}{\alpha} \right) \\
&\quad + \frac{f\phi_3(u_{n-1}, \phi_{1_{n-1}}, \phi_{2_{n-1}}, \phi_{3_{n-1}}, \phi_{4_{n-1}}, \phi_{5_{n-1}})}{h\Gamma\alpha} \\
&\quad X \left(\frac{hu_{n+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{u_1^{\alpha+1}n+1}{\alpha+1} + \frac{u_n^\alpha}{\alpha+1} \right)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{4_{n+1}} - \phi_{4_n} &= \frac{f\phi_4(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n})}{h\Gamma\alpha} \left(\frac{2hu_{n+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{u_1^{\alpha+1}n+1}{\alpha+1} + \frac{hu_n^\alpha}{\alpha} - \frac{u_n^{\alpha+1}}{\alpha} \right) \\
&\quad + \frac{f\phi_4(u_{n-1}, \phi_{1_{n-1}}, \phi_{2_{n-1}}, \phi_{3_{n-1}}, \phi_{4_{n-1}}, \phi_{5_{n-1}})}{h\Gamma\alpha} \\
&\quad X \left(\frac{hu_{n+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{u_1^{\alpha+1}n+1}{\alpha+1} + \frac{u_n^\alpha}{\alpha+1} \right)
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{5_{n+1}} - \phi_{5_n} &= \frac{f\phi_5(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n})}{h\Gamma\alpha} \left(\frac{2hu_{n+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{u_1^{\alpha+1}n+1}{\alpha+1} + \frac{hu_n^\alpha}{\alpha} - \frac{u_n^{\alpha+1}}{\alpha} \right) \\
&\quad + \frac{f\phi_5(u_{n-1}, \phi_{1_{n-1}}, \phi_{2_{n-1}}, \phi_{3_{n-1}}, \phi_{4_{n-1}}, \phi_{5_{n-1}})}{h\Gamma\alpha} \\
&\quad X \left(\frac{hu_{n+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{u_1^{\alpha+1}n+1}{\alpha+1} + \frac{u_n^\alpha}{\alpha+1} \right)
\end{aligned} \tag{4.66}$$

çözüm iterasyonlarına ulaşılır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&f\phi_1(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n}) \\
&f\phi_2(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n}) \\
&f\phi_3(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n}) \\
&f\phi_4(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n}) \\
&f\phi_5(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n})
\end{aligned} \tag{4.67}$$

değerleri

$$\begin{aligned}f\phi_1(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n}) &= r\Phi_1(u) \left(1 - \frac{\Phi_1(u) + \Phi_2(u)}{\kappa}\right) - \beta_1\Phi_1(u)\Phi_2(u) \\f\phi_2(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n}) &= \beta_1\Phi_1(u)\Phi_2(u) - d_1\Phi_1(u) - \beta_2(u)\Phi_2(u)\Phi_5(u) \\f\phi_3(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n}) &= \lambda - \delta_1\Phi_3(u) - \omega\Phi_3(u)\Phi_2(u) \\f\phi_4(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n}) &= \omega\Phi_3(u)\Phi_2(u) - \delta_2\Phi_4(u) \\f\phi_5(u_n, \phi_{1_n}, \phi_{2_n}, \phi_{3_n}, \phi_{4_n}, \phi_{5_n}) &= \nu\Phi_4(u)\Phi_5(u) - \beta_3\Phi_2(u)\Phi_5(u) - \mu\Phi_5(u)\end{aligned}\tag{4.68}$$

fonksiyonları kullanılarak hesaplanabilir ve böylece sayısal çözümün algoritması bulunmuş olur.



5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında Hepatit C matematiksel modelinin analizi yapılmıştır. Beş farklı diferansiyel denklemden oluşan söz konusu modelde tam sayı mertebeden türeve göre daha anlamlı dönütler verdiği gerçeğinden hareketle kesirli mertebeden türev tercih edilmiş ve ilk olarak matematiksel model Caputo kesirli türev operatörüne genişletilmiştir.

Matematiksel modelin Banach sabit nokta teoremi yardımıyla çözümünün varlığı ve Picard-Lindelöf teoremi yardımıyla çözümünün tekliği tespit edilmiş akabinde sistemin biyolojik açıdan anlamlılığını tespit etmek için Hyers-Ulam yöntemi yardımıyla sınırlılığı ve kararlılığı incelenmiş son olarak Adams- Bashford metodu kullanılarak modelin nümerik çözümü yapılmıştır.

Çalışma sonucunda uygun parametrelerle geliştirilen Hepatit C modelinin etkinliği ve doğruluğu incelenmiş söz konusu modelin gelecekteki seyri ile ilgili tahmin ve önerilere imkan sağladığı görülmüştür. Araştırmacı okurlarına farklı kesirli türev ve integral tanımlarıyla yapılacak çalışmalarda ulaşılan sonuçları karşılaştırma ve daha güvenilir değerlendirmelerde bulunabilme imkanı sağlayacak bu tezin literatürde kendisine yer bulabilecek faydalı bir çalışma olduğu kanaatindeyiz.

KAYNAKLAR

- Adams, J. ve Bashforth, F. (1883). An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid. with an explanation of the method of integration employed in constucting the tables which give the theoretical forms of such drops. *Cambridge University Press*, s. 1819–1892.
- Alastair, H. ve dig. (2019). Scaling up prevention and treatment towards the elimination of hepatitis c: a global mathematical model. *Articles*, 393:1319–1329.
- Alemdar Kılıç, M. (2017). Bir hiv/aid's modelinin kararlılık analizi ve sayısal çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Alsina, C. ve Ger, R. (1998). On some inequalities and stability results related to the exponential function. *J. Inequal. Appl*, 4:373–380.
- Alter, M. (2007). Hepatit c virüsü enfeksiyonunun epidemiyolojisi. *World J Gastroenterol.*, 13(243).
- Atangana, A. (2021). Mathematical model of survival of fractional calculus, critics and their impact: How singular is our world? *Advances in Difference Equations*, (1):1–59.
- Atangana, A. ve Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with non-local and non singular kernel: Theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 20(2):763–769.
- Atangana, A. ve İğret Araz, S. (2021). New numerical scheme with newton polynomial: Theory, methods and applications. *Elsevier, Academic press*, (ISBN:9780323854481).
- Bagley, R. L. ve Torvik, P. J. (1986). On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, 30(1):133–155.
- Biçer, E. ve Tunç, C. (2017). On the hyers-ulam stability of certain partial differential equations of second order. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory.*, 17:150–157.
- Caputo, M. (1966). Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent.

Annals of Geophysics, 19(4):383–393.

Caputo, M. ve Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):1–13.

Caputo, M. ve Mainardi, F. (1971). A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Applied Geophysics*, 91(1):134–147.

Carroll, J. (2011). Interpolation and polynomial approximation lagrange interpolating polynomials. *Numerical Analysis (9th Edition)*, Brooks/Cole, Cengage Learning.

Choo, Q., Kuo, G., ve dig. (1989). Isolation of a cdna clone derived from a blood-borne non-a, non-b viral hepatitis genome. *Science*, (244):359–362.

Dayan, F., Ahmed, N., ve dig. (2023). Computational study of a co-infection model of hiv/aids and hepatitis c virus models. *Scientific Reports*, (13,(1)).

Diethelm, K., Ford, N. J., ve Freed, A. D. (2004). Detailed error analysis for a fractional adams method. *Numerical Algorithms*, 36(1):31–52.

Dietz, C. ve Maasoumy, B. (2022). Direct-acting antiviral agents for hepatitis c virus infection-from drug discovery to successful implementation in clinical practice. *Viruses*, (14, 6):1325.

Dokuyucu, M. ve Celik, E. (2021). Analyzing a novel coronavirus model (covid-19) in the sense of caputo-fabrizio fractional operator. *Applied and Computational Mathematics*, 20(1).

Dokuyucu, M. A. (2020). Caputo and atangana-baleanu-caputo fractional derivative applied to garden equation. *Turkish Journal of Science*, 5(1):1–7.

Dokuyucu, M. A. ve Dutta, H. (2020). A fractional order model for ebola virus with the new caputo fractional derivative without singular kernel. *Chaos, Solitons & Fractals*, 134:109717.

Dokuyucu, M. A. ve Dutta, H. (2021). Analysis of a fractional tumor-immune interaction

model with exponential kernel. *Filomat*, 35(6):2023–2042.

Dokuyucu Ali, M., Celik, E., Bulut, H., ve Mehmet Baskonus, H. (2018). Cancer treatment model with the caputo-fabrizio fractional derivative. *The European Physical Journal Plus*, 133:1–6.

DSÖ (2017). Küresel hepatit raporu. *Cenevre Dünya Sağlık Örgütü*.

Duncan, J., Urbanowicz, R., ve dig. (2020). Hepatitis c virus vaccine. *Vhallenges and prospects, Vaccines*, (8, 1).

Durbin, F. (1974). Numerical inversion of laplace transforms: an efficient improvement to dubner and abate is method. *The Computer Journal*, 17(4):371–376.

Ergünay, K. ve Abacıoğlu, H. (2015). Hepatit c virusunun genomik varyasyonları ve kliniğe etkileri. *Mikrobiyol Bul*, (49, 4).

Esen, A., Taşbozan, O., ve Yağmurlu, N. M. (2012). Approximate analytical solutions of the fractional sharma-tasso-olver equation using homotopy analysis method and a comparison with other methods. *Cankaya University Journal of Science and Engineering*, 9(2).

Feinstone, S., Kapikian, A., ve dig. (1975). Transfusion-associated hepatitis not due to viral hepatitis type a or b . *New England Journal of Medicine*, (292, 15):767–770.

Goldstine, H. H. (1977). *16. yüzyıldan 19. yüzyıla kadar Sayısal Analizin Tarihi*, volume ISBN 978-0-387-90277-7. New York: Springer-Verlag.

Gordji, M., Cho, Y., ve dig. (2011). Stability of the second order partial differential equations. *J.Inequal. Appl*, 81(10 pp).

Gürel, S. ve Eminler, A. (2010). Hepatit c doğal seyri ve kliniği. *Türkiye Klinikleri J Gastroenterohepatol-Special Topics.*, 3(1).

Hilfer, R. ve others (2000). *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific Singapore.

- Hyers, D. H. (1941). On the stability of the linear functional equation. *Proc. Nat. Acad. Sci, U.S.A*, 27:222–224.
- Jung, S. (2006). Hyers ulam stability of linear differential equations of first order. (II). *Appl. Math. Lett.*, 19:854–858.
- Kermack, W. ve McKendrick, A. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, (115, 772):700–721.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., ve Trujillo, J. J. (2006). North-holland mathematics studies 204. *Theory and applications of fractional differential equations*.
- Koca, I. (2018a). Analysis of rubella disease model with non-local and non-singular fractional derivatives. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, 8(1):17–25.
- Koca, I. (2018b). Modelling the spread of ebola virus with atangana-baleanu fractional operators. *The European Physical Journal Plus*, 133:1–11.
- Koca, İ., Akçetin, E., ve Yaprakdal (2020). Numerical approximation for the spread of siqr model with caputo fractional order derivative. 5(2):124–139.
- Koca, I. ve Atangana, A. (2017). Solutions of cattaneo-hristov model of elastic heat diffusion with caputo-fabrizio and atangana-baleanu fractional derivatives. *Thermal Science*, 21(6 Part A):2299–2305.
- Kuo, G., Choo, Q., ve dig. (1989). An assay for circulating antibodies to a major etiologic virus of human non-a, non-b hepatitis. *Science*, (244):362–366.
- Larney, S., Peacock, A., ve dig (2017). Global, regional, and country-level coverage of interventions to prevent and manage hiv and hepatitis c among people who inject drugs. *A systematic review, The Lancet Global Health*, (5):1208–1220.
- Lestari, D., Adi-Kusumo, F., ve dig. (2023). A minimum principle for stochastic control of hepatitis c epidemic model. *Boundary Value Problems*, (2023, 1):1–12.

- Li, Y. ve Shen, Y. (2009). Hyers-ulam stability of nonhomogeneous linear differential equations of second order. *International Journal of Mathematics and Mathematical Analysis*, s. 1–7.
- Liao, S. (2009). Notes on the homotopy analysis method: some definitions and theorems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(4):983–997.
- Losada, J. ve Nieto, J. J. (2015). Properties of a new fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):87–92.
- Naik, P. A. ve dig. (2020). Stability analysis and approximate solution of sir epidemic model with crowley-martin type functional response and holling type-ii treatment rate by using homotopy analysis method. *Chaos, Solitons and Fractals*,, 115(10).
- Natasha, K., Vickerman, P., ve Hickman, M. (2011). Mathematical modelling of hepatitis c treatment for injecting drug users. *Journal of Theoretical Biology*, 274.
- Otrocol, D. ve Ilea, V. (2009). Ulam stability for a delay differential equation. *Cent. Eur. J. Math*,, 7:1296–1303.
- Owolabi, K. M. (2019). Mathematical modelling and analysis of love dynamics: A fractional approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 525:849–865.
- Owolabi K. M., Atangana, A. ve dig. (2018). Numerical patterns in reaction–diffusion system with the caputo and atangana–baleanu fractional derivatives. *Chaos, Solitons and Fractals*,, 115:160–169.
- Öz, F. ve dig. Hiv pozitif ve aids hastalarının yaşadıkları güçlükler ve başetmeleri. Doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier.
- Podlubny, I. (1999a). *Fractional differential equations*. Academic Press, San Diego.

- Podlubny, I. (1999b). Fractional-order systems and $\pi/\sup/\text{spl } \lambda/\text{d}/\sup/\text{spl } \mu/-$ controllers. *IEEE Transactions on automatic control*, 44(1):208–214.
- Povstenko, Y. (2015). *Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engineers*, volume 460. Switzerland: Springer International Publishing.
- Saad, K. M., Alqhtani, M., ve Gomez-Aguilar, J. (2020). Fractal-fractional study of the hepatitis c virus infection model. *Results in Physics*, 19(103555).
- Seeff, L. (2009). Hepatit c'nin doğal tarihinin gemiři (1968-2009). *Liver International*, 29(1).
- Tunc, C. ve Bicer, E. (2015). Hyers-ulam-rassias stability for a first order functional differential equation. *Cent. Eur. J. Math.*, 47:143–153.
- Vujovic, V. ve Krstic, M. (2020). Stability of stochastic model for hepatitis-c transmission with an isolation stage. *Filomat*, (34, 14).
- Wazwaz, A. M. (1999). A reliable modification of adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 102(1):77–86.
- Yunus Grbz, Y. ve Dig (2024). Kronik hepatit c hastalarında glekaprevir pibrentasvir'in etkinliği ve covid 19 pandemisinin etkisi ok merkezli gerçek yaşam verileri. *Bulaşıcı Hastalıklar ve Klinik Mikrobiyoloji*.