

HER ALTGRUBU $\mathcal{B}_n$ VEYA HER ÖZ HOMOMORFİK GÖRÜNTÜSÜ N_0
OLAN LOKAL NİLPOTENT GRUPLAR

123563

Selami ERCAN

DOKTORA TEZİ
(MATEMATİK)

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

OCAK 2002

ANKARA

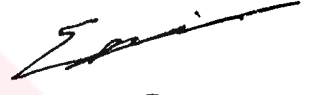
123563

Selami ERCAN tarafından hazırlanan HER ALTGRUBU $\mathcal{B}_n$ VEYA HER ÖZ
HOMOMORFİK GÖRÜNTÜSÜ N_0 OLAN LOKAL NİLPOTENT GRUPLAR
adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

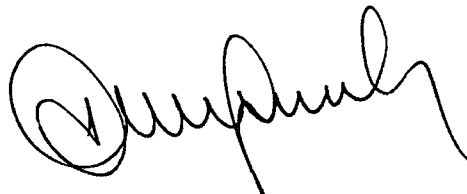


Yrd. Doç. Dr. Ahmet ARIKAN
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak
kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Erdoğan Eşin	
Üye	: Prof. Dr. Sait Halicioğlu	
Üye	: Prof. Dr. Dursun Taşçı	
Üye	: Doç. Dr. Nuri Gimen	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Ahmet Arıkan	

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	iv
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
3. HER ÖZ ALTGRUBU $\mathcal{B}_n$ OLAN HİPERMERKEZ VEYA BAER GRUPLAR.....	20
4. HER ÖZ ALTGRUBU $\mathcal{B}_n$ OLAN LOKAL NİLPOTENT GRUPLAR.....	25
5. NİLPOTENT OLMAYAN ALTGRUPLARI MAKSİMAL ALTGRUBA SAHİP OLMAYAN HER ÖZ ALTGRUBU $\mathcal{B}_n$ OLAN GRUPLAR.....	34
6. HER ÖZ HOMOMORFİK GÖRÜNTÜSÜ N_0 OLAN GRUPLAR.....	41
KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ.....	55

**HER ALTGRUBU $\mathcal{B}_n$ VEYA HER ÖZ HOMOMORFİK GÖRÜNTÜSÜ N_0
OLAN LOKAL NİLPOTENT GRUPLAR
DOKTORA TEZİ**

Selami ERCAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
OCAK 2002

ÖZET

Bu tez çalışmasında her öz altgrubu $\mathcal{B}_n$ (n , altgruplara bağlı, $n \in \mathbb{N}$) olan lokal nilpotent gruplar ve her öz homomorfik görüntüsü N_0 olan grupların yapısı incelenmiştir. 3. ve 4. Bölümde her öz altgrubu $\mathcal{B}_n$ olan lokal nilpotent grupların hipermerkez veya Baer grup, ve n , H dan bağımsız sabit olması durumu incelenmiştir. 5. Bölümde her öz altgrubu $\mathcal{B}_n$ (n , altgruplara bağlı, $n \in \mathbb{N}$) olan nilpotent olmayan altgrubu maksimal altgruba sahip olmayan gruplar incelenmiştir. 6. Bölümde W. Möhres in N_0 gruplar için elde ettiği bazı sonuçlar, her öz homomorfik görüntüsü N_0 olan gruplar içinde elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 403.01.01

Anahtar Kelimeler Lokal nilpotent gruplar, Hipermerkez gruplar, Altnormal altgruplar, Baer gruplar, Just-non- χ gruplar, Öz homomorfik görüntü

Sayfa Adedi : 55

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

**LOCALLY NILPOTENT GROUPS WITH ALL SUBGROUPS $\mathcal{B}_n$ OR ALL
PROPER HOMOMORPHIC IMAGES N_0**

(Ph. D. Thesis)

Selami ERCAN

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
JANUARY 2002

ABSTRACT

In this thesis, we consider locally nilpotent groups with all subgroups $\mathcal{B}_n$ (n , depends on subgroups, $n \in \mathbb{N}$) or all proper homomorphic images N_0 . In Chapter 3 and Chapter 4 we consider hypercentral or Baer groups with all proper subgroups $\mathcal{B}_n$ (n , depends on subgroups, $n \in \mathbb{N}$) and locally nilpotent groups with all subgroups $\mathcal{B}_n$ (n is fixed and independent on subgroups, $n \in \mathbb{N}$). In Chapter 5 we consider the groups with all proper subgroups are $\mathcal{B}_n$ (n , depends on subgroups, $n \in \mathbb{N}$) and each non-nilpotent subgroup has no maximal subgroup. In Chapter 6 we obtained certain same results for the groups whose all homomorphic images are N_0 , which due to W. Möhres.

Science Code	: 403.01.01
Key Words	: Locally nilpotent groups, Hypercentral groups, Subnormal subgroups, Baer groups, Just-non- χ groups, Proper homomorphic image.
Page Number	: 55
Adviser	: Yrd. Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

TEŞEKKÜR

Bu teze başlamamda ve hazırlanmasında bana yardımlarını esirgemeyen, faydalı tavsiyelerde bulunan ,yol gösteren, cesaret veren ve her konuda kendisinden çok şey öğrendiğim sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Ahmet ARIKAN'a teşekkürlerimi ve en derin saygılarımı sunarım.



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$[x, y]$	x ve y nin komütatörü
$[X, Y]$	$\langle [x_1, x_2] : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$
G'	$[G, G]$
$G^{(n)}$	$[G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$
$H \triangleleft G$	H, G nin normal alt grubudur.
G/H	G nin H ile bölüm grubu
$\text{Aut}(C)$	G nin otomorfizma grubu
$H^{G, \alpha}$	H nin standart serisinin bir terimi
$s(G:H)$	H nin G içindeki altnormallik indeksi
$N_G(A)$	A nin G içindeki normalleyeni
$C_G(A)$	A nin G içindeki merkezleyeni
$C_G(K/L)$	$\{g: g \in G, \text{ her } k \in K \text{ için } [g, k] \in L\}$
$H \cong K$	H ile K izomorftur
$o(g)$	G nin mertebesi
C_{p^∞}	quasi-cyclic grup
$B(G)$	G nin Baer radikali
$\langle x \rangle$	x tarafından üretilen devirli grup
$\langle H, K \rangle$	H ve K tarafından üretilen grup
K^G	$\langle g^{-1}kg : g \in G, k \in K \rangle$
$\text{Fit}(G)$	G nin Fitting alt grubu
$Z(G)$	G grubunun merkezi
$Z_\alpha(G)$	G grubunun α -merkezi
$Z_\infty(G)$	G nin hipermerkezi
$d(G)$	G nin derived uzunluğu
$\gamma_i(G)$	$\gamma_1(G) = G, \gamma_i(G) = [\gamma_i(G), G]$
G^m	$\langle g^m : g \in G \rangle$
$\text{Hchar}G$	H, G nin bir karakteristik
$[H : G]$	H nin G içindeki indeksi
$H \triangleleft \triangleleft G$	H, G nin bir altnormal alt grubu

1. GİRİŞ

Gruplar teorisinde altnormal altgruplarının altnormallik indeksi sınırlı olan grupların yapısının nasıl olduğu önemli problemlerden biridir. Altnormal altgruplarının altnormallik indeksi en çok n olan grupların sınıfını $\mathcal{B}_n$ ile gösterilsin ($n \in \mathbb{N}$). $n = 1$ olması durumu D. J. S. Robinson tarafından çözülebilir grupların metabelyan olduğunu gösterilmiştir [3]. D. J. S. Robinson her $d \in \mathbb{N}$ için çözülebilir uzunluğu d olan torsiyonsuz çözülebilir $\mathcal{B}_n$ grup inşa etmiştir [13]. Ayrıca C. Casolo tarafından $n = 2$ olması durumunda çözülebilir periyodik grubun çözülebilir uzunluğunun en fazla 4 olduğu gösterilmiştir [19]. D. Mc Dougall tarafından $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathcal{B}_n$ ve Baer olan bir grubunun nilpotent olduğu gösterilmiştir ve $\mathcal{B}_n$ deki periyodik çözülebilir grupları incelenmiştir [10].

Her altgrubu altnormal olan grupların sınıfı N_0 ile gösterilsin. Bu problemle ilgili olarak J. E. Roseblade altnormallik indeksleri bir $n \in \mathbb{N}$ ile sınırlı olması halinde her altgrubu altnormal olan bir grubun nilpotent ve nilpotentlik sınıfının $\leq \sigma(n)$ olduğunu göstermiştir burada σ Roseblade fonksiyonudur. Daha sonra H. Heineken-I. J. Mohamed aşağıdaki örneği inşa etmişlerdir.

Aşağıdaki şartları sağlayan bir G grubu vardır ki:

- (i) G' , üssü p olan bir elemanter abelyan grup ve $G/G' \cong C_{p^\infty}$ dur.
- (ii) G nin her öz altgrubu altnormal ve nilpotenttir.
- (iii) $Z(G) = 1$ dir.

W. Möhres [7] de N_0 grupların çözülebilir olduğunu ve böyle bir grubun hipermerkez periyodik olması durumunda grubun nilpotent olduğunu göstermiştir. [28] de C. Casolo N_0 grubun Fitting grup olduğunu göstermiştir.

χ bir grup sınıfı olmak üzere her öz homomorfik görüntüsü χ olan grupların yapısının nasıl olduğu da gruplar teorisinin önemli problemlerden biridir. Bu konu ile ilgili ilk çalışmalar 1960 lar da M. F. Newman tarafından χ grup sınıfı yerine abelyan gruplar sınıfı alınarak yapılmıştır. Daha sonra D. McCarthy ve J. S. Wilson birbirlerinden bağımsız olarak χ grup sınıfı yerine sonlu gruplar sınıfı; J. R. Groves, D. J. S. Robinson, ve J. S. Wilson χ grup sınıfı yerine polycyclic veya supersoluble gruplar sınıfı; S. Franciosi, F. De Giovanni, L. A. Kurdachenko, V. E. Goretsky, V. V., Pylaev, χ grup sınıfı yerine Chernikov gruplar sınıfı; J. S. D. Robinson ve Z. Zhang, χ grup sınıfı yerine (central-by-finite) gruplar sınıfı; S. Franciosi, F. De Giovanni, L. A. Kurdachenko, χ grup sınıfı yerine FC-gruplar sınıfı; J. Otal, L. A. Kurdachenko, χ grup sınıfı yerine CC-gruplar sınıfı; L. A. Kurdachenko, I. Y. Subbotin, χ grup sınıfı yerine hipermerkez gruplar sınıfı olarak çalışmalar yapmışlardır. Bu konu üzerinde yapılan çalışmalar toplu bir şekilde [4] de bulunabilir.

Bu tez çalışmasının 3. Bölümünde her öz altgrubu $\mathcal{B}_n$ olan hipermerkez veya Baer gruplar ele alınmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. 4. ve 5. Bölümlerde her öz altgrubu $\mathcal{B}_n$ olan grupların hangi şartlarda nilpotent veya çözülebilir olduğu gösterilmiştir. 6. Bölümde her öz homomorfik görüntüsü N_0 olan gruplar incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Her $g \in G$ ve $n \in N$ için $g^{-1}ng \in N$ ise o zaman N ye G nin bir normal altgrubu denir ve $N \triangleleft G$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2. G bir grup ve $x_1, x_2, \dots, x_n$, G nin elemanları olsun.

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2$$

elemanına x_1 ve x_2 nin komütatörü denir. $n \geq 2$ olsun. O zaman indüksiyon yardımıyla,

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n]$$

olarak tanımlanır. Buna ağırlığı n olan bir basit komütatör denir. Burada $[x_1] = x_1$ olarak tanımlanır.

$X_1, X_2, \dots, X_n$; bir G grubunun boş olmayan altkümeleri olsun.

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$$

altgrubuna X_1 ile X_2 nin komütatör grubu denir. $n \geq 2$ olsun. O zaman indüksiyon yardımıyla,

$$[X_1, X_2, \dots, X_n] = [[X_1, X_2, \dots, X_{n-1}], X_n]$$

olarak tanımlanır. Buna $X_1, X_2, \dots, X_n$ nin komütatör grubu denir.

Tanım 2.3. G bir grup olsun. Eğer $S = \{1 = G_0, G_1, G_2, \dots, G_n\}$, G nin altgruplarının bir dizisi ve $G_i \triangleleft G_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) ise S ye G nin bir serisi denir ve;

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

şeklinde gösterilir. G_{i+1}/G_i bölüm grubuna serinin faktörleri ve G_i gruplarına serinin terimleri denir. Eğer bütün terimler farklı ise n ye serinin uzunluğu denir.

$T = \{H_\alpha : \alpha \leq \beta\}$ bir β ordinaline eşit veya küçük ordinallerle indekslenen G nin altgruplarının bir kümesi olsun. Eğer T kümesi;

- (i) $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1} \leq H_{\alpha_2}$ dir ,
- (ii) $H_0 = 1$ ve $H_\beta = G$ dir,
- (iii) $H_\alpha \triangleleft H_{\alpha+1}$ dir,
- (iv) Eğer λ limit ordinal ise $H_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} H_\alpha$ dır,

şartlarını sağlıyorsa T ye artan bir seri denir. Artan bir seriyi $1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_\beta = G$ şeklinde yazmak uygundur.

Eğer T kümesi;

- (i) $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1} \geq H_{\alpha_2}$ dir,
- (ii) $H_0 = G$ ve $H_\beta = 1$ dir,
- (iii) $H_{\alpha+1} \triangleleft H_\alpha$ dir,
- (iv) Eğer λ limit ordinal ise $H_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H_\alpha$ dır,

şartlarını sağlıyorsa T ye azalan seri denir. Azalan seriyi $1 = H_\beta \dots \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$ şeklinde yazmak uygundur.

Tanım 2.4. G bir grup ve H , G nin bir altgrubu olsun. Eğer G nin

$$H = H_r \triangleleft H_{r-1} \triangleleft \dots \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$$

olacak şekilde $H_0, H_1, H_2, \dots, H_r$ altgrupları varsa H ya G de altnormaldir denir. Burada r sonlu ve $i = 0, 1, 2, \dots, r-1$ için $H_{i+1} \triangleleft H_i$ dir. Genellikle $H \triangleleft^r G$, $H \triangleleft \triangleleft G$ veya $H \text{sn} G$ ile gösterilir. H dan G ye bu şekilde uzanan serilerin uzunluklarının en küçüğüne H nın G içindeki altnormallik indeksi denir ve $s(G:H)$ ile gösterilir.

G bir grup ve $\emptyset \neq X \subseteq G$ olsun. $X^{G,0} = G$ ve her $i \geq 0$ için $X^{X^{G,i}} = X^{G,i+1}$ olarak tanımlansın. O zaman G nin;

$$\dots X^{G,2} \triangleleft X^{G,1} \triangleleft X^{G,0} = G$$

serisi elde edilir. Bu seriye X in G içindeki normal kapanış serisi denir. $H \leq G$ ve her $i \geq 0$ için $H_i = H^{G,i}$ olsun. Eğer $H \text{sn} G$ ve $s(G:H) = n$ ise o zaman

$$H = H_n \triangleleft H_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$$

dir. Böylece H nın G içindeki altnormallik indeksi H nın G içindeki normal kapanış uzunluğuna eşittir. $n = 0$ ise $H = G$; $n = 1$ ise $H \triangleleft G$; $s(G:H) = n$ ise $[G, {}_n H] \leq H$ dir.

Tanım 2.5. G bir grup olsun.

$$Z(G) = \{x \in G: \text{her } g \in G \text{ için } xg = gx \text{ dir}\}$$

kümesine G nin merkezi denir ve $Z(G)$ ile gösterilir.

G bir grup ve $x \in G$ olsun.

$$C_G(x) = \{g \in G: gx = xg\}$$

kümesine x in G içindeki merkezleyeni denir.

Tanım 2.6. G bir grup olsun. G nin bir sonlu serisi

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

olmak üzere eğer, her $0 \leq i < n$ için G_{i+1}/G_i abelyan ise G ye bir çözülebilir grup denir. G nin bu şekildeki serilerinin en küçük uzunluğuna G nin çözülebilir uzunluğu denir ve $d(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.7. G bir grup ve β bir ordinal sayı olsun. G nin bir artan,

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \dots \triangleleft G_\beta = G$$

serisi, her $\lambda \leq \beta$ için $G_\lambda \triangleleft G$ ve her $\alpha < \beta$ için $G_{\alpha+1}/G_\alpha \leq Z(G/G_\alpha)$ oluyorsa bu seriye artan merkez seri denir. Artan merkez seriye sahip olan bir gruba hipermerkez grup denir. Eğer G nin $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

serisi her $0 \leq i < n$ için $G_i \triangleleft G$ ve her $0 \leq i < n$ için $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ şartlarını sağlıyorsa G ye bir nilpotent grup denir. G nin bu şekildeki serilerinin en küçük uzunluğa sahip olanın uzunluğuna G nin nilpotentlik sınıfı denir.

Tanım 2.8. G bir grup ve $G^{(0)} = G$ olsun. $i \geq 0$ olmak üzere

$$G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots$$

dir. Bu seriye G nin komütatör serisi denir. $G^{(1)} = G'$ ile gösterilir ve G' ye G nin komütatör altgrubu denir. Eğer $G = G'$ ise o zaman G ye bir perfekt grup denir.

G çözülebilir bir grup ise bir $n \in \mathbb{N}$ için $G^{(n)} = 1$ dir. Bu şekildeki n lerin en küçüğüne G nin komütatör uzunluğu denir.

Tanım 2.9 G bir grup ve $Z_0(G) = 1$ ve $Z_1(G) = Z(G)$ olarak tanımlansın. $\alpha > 1$ bir ordinal sayı olmak üzere her $\lambda < \alpha$ için $Z_\lambda(G)$ tanımlanmış olsun. Eğer α limit ordinal ise;

$$Z_\alpha(G) = \bigcup_{\lambda < \alpha} Z_\lambda(G)$$

α limit ordinal değilse;

$$Z_\alpha(G)/Z_{\alpha-1}(G) \leq Z(G/G_{\alpha-1})$$

şeklinde tanımlansın. G nin kardinali aşılamayacağından $Z_\beta(G) = Z_{\beta+1}(G) = \dots$ olacak şekilde bir en küçük β ordinali vardır. Bu terminal gruba G nin hipermerkezi denir.

$$1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \dots$$

ye G nin genelleştirilmiş yukarı merkez serisi denir.

Eğer $Z_\beta(G) = G$ ise G hipermerkez gruptur. Eğer bir $n \in \mathbb{N}$ için $Z_n(G) = G$ ise G nilpotent gruptur. Bu şekildeki n lerin en küçüğü G nin nilpotentlik sınıfıdır.

Tanım 2.10. G bir grup $\gamma_1(G) = G$ olarak tanımlansın. Eğer α limit ordinal ise;

$$\gamma_\alpha(G) = \bigcap_{\beta < \alpha} \gamma_\beta(G)$$

α limit ordinal değilse

$$\gamma_\alpha(G) = [\gamma_{\alpha-1}(G), G]$$

şeklinde tanımlansın.

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \dots$$

ye G nin genelleştirilmiş aşağı merkez serisi denir.

Eğer bir $n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_{n+1}(G) = 1$ ise G nilpotenttir. Bu şekildeki sayıların en küçüğü $n+1$ ise G nin nilpotentlik sınıfı n dir.

G nin hypocentral grup olması için gerek ve yeter şart bir α ordinali için $\gamma_\alpha(G) = 1$ olmasıdır. G nin bir residually nilpotent grup olması için gerek ve yeter şart $\gamma_\omega(G) = 1$ olmasıdır. Böylece her residually nilpotent grup hypocentral gruptur.

Tanım 2.11. G bir grup ve β bir ordinal sayı olsun. G nin bir

$$1 = G_0 < G_1 < G_2 < \dots < G_\beta = G$$

artan serisi, her $\alpha < \beta$ için $G_\alpha < G_{\alpha+1}$ ve $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ abelyan oluyorsa bu seriye G nin hiperabelyan serisi denir. Bir hiperabelyan seriye sahip olan gruba hiperabelyan grup denir.

Tanım 2.12. G bir grup olsun. G nin bütün abelyan altnormal altgruplarının ürettiği altgruba G nin Baer radikali denir ve $B(G)$ ile gösterilir. $G = B(G)$ ise G ye bir Baer grup denir.

Tanım 2.13. G bir grup olsun. G nin bütün normal nilpotent altgruplarının ürettiği gruba G nin Fitting altgrubu denir ve $\text{Fit}(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.14 G bir grup olsun. Eğer G sonlu sayıda C_p tipindeki altgrupların direkt çarpımının sonlu genişlemesi ise G ye bir Chernikov grup denir.

Tanım 2.15. $n \geq 0$ bir tamsayı ve G bir grup olsun. Eğer her $x, y \in G$ için $[x, {}_n y] = 1$ ise o zaman G ye bir n -Engel grup denir. Bu durumda G ye bir n -Engel şartını sağlıyor denir.

Tanım 2.16. G bir grup olsun.

$$C = \{x \in G : G/C_G(x^G) \text{ Chernikov gruptur}\}$$

ye G nin CC-merkezi denir. Eğer $G = C$ ise G ye bir CC-grup denir.

$$F = \{x \in G : [G : C_G(x)] < \infty\}$$

ye G nin FC-merkezi denir. Eğer $G = F$ ise G ye bir FC-grup denir.

Teorem 2.17. ([1] Teorem 4.36) G bir grup olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

- (i) Her $x \in G$ için $[G, x]$ Chernikov ve $G/C_G([G, x])$ periyodiktir.
- (ii) Her $x \in G$ için x^G nin öyle bir normal Chernikov altgrubu H vardır ki x^G/H devirli ve $G/C_G(x^G)$ periyodiktir.
- (iii) G bir CC-gruptur.

İspat. (i $\Rightarrow$ ii) $x^G = \langle x \rangle [G, x]$ olduğundan $\langle x \rangle^G$ Chernikov bir grubun devirli bir grupla genişlemesi olur. $\frac{G/C_G(x^G)}{C_G([G, x])/C_G(x^G)} \cong G/C_G([G, x])$ olduğundan $C_G([G, x])/C_G(x^G)$ periyodik olduğu gösterilebilirse o zaman istenilen elde edilir. $C_G(x^G) = C_G(\langle x \rangle [G, x]) \geq C_G(\langle x \rangle) \cap C_G([G, x]) = D$ olsun. $a \in C_G([G, x])$ olmak üzere $[G, x]$ Chernikov olduğundan periyodiktir. $[x, a]^n = 1$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır.

$$x^a = x[x, a]$$

$$x^{a^2} = (x^a)^a = a^{-1}x[x, a]a = x[x, a]^2$$

.

.

.

$$x^{a^n} = x[x, a]^n = x$$

Böylece $a^n \in C_G(\langle x \rangle)$ bulunur. O halde $a^n \in C_G(\langle x \rangle) \cap C_G([G, x])$ elde edilir. Bu $[G, x]/D$ kümesinin periyodik olduğunu gösterir. $D \leq C_G(x^G)$ olduğundan $[G, x]/C_G(x^G)$ periyodik olur. Periyodik bir grubun periyodik grupla genişlemesi periyodik olduğundan $G/C_G(x^G)$ periyodik olur.

(ii $\Rightarrow$ iii) [29] Lemma 2.23 de $T = x^G$, $B = [G, x]$ alınırsa [2] Teorem 3.29 dan dolayı bir Chernikov grubun otomorfizmalarının periyodik altgrubu Chernikovdur. $G/C_G([G, x])$ periyodik olduğundan, bu gruba izmorf olan otomorfizma grubu Chernikovdur. O halde $G/C_G([G, x])$ de Chernikovdur. $x^G/[G, x]$ devirli ve devirli bir grubun otomorfizma grubu sonlu olduğundan $\frac{G/B}{C_{G/B}(T/B)}$ grubu Chernikov olur. O halde [29] Lemma 2.33 den dolayı $G/C_G(x^G)$ de Chernikovdur.

(iii $\Rightarrow$ i) G bir CC-grup X , G nin sonlu bir altkütmesi $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ olsun.

$$X^G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle^G = \langle x_1^G, \dots, x_n^G \rangle = \prod_{i=1}^n x_i^G$$

, dir.

$$G / \bigcap_{i=1}^n C_G(x_i^G) \rightarrow \prod_{i=1}^n G / C_G(x_i^G)$$

ye bir monomorfizma olduğundan $G / \bigcap_{i=1}^n C_G(x_i^G)$ sonlu sayıda Chernikov grubun

direkt çarpımının bir altgrubuna izomorf olur. O halde $G / \bigcap_{i=1}^n C_G(x_i^G)$ Chernikovdur.

$\bigcap_{i=1}^n C_G(x_i^G) \leq C_G(x^G)$ olduğundan dolayı $G / C_G(x^G)$ de Chernikovdur. O halde

$x^G C_G(x^G) / C_G(x^G) \cong x^G / Z(x^G)$ Chernikov olduğundan [2] Teorem 4.23 den dolayı $(x^G)'$

de Chernikovdur. B, G' nin bir sonlu üreteçli grubu olsun. O zaman $B = \langle g'_1, \dots, g'_t \rangle$

dir, $g'_i \in G'$ ve $g'_i = [a_{i_1}, b_{i_1}] \dots [a_{i_n}, b_{i_n}]$ ($i = 1, \dots, t$) dir. $K = \{a_{i_1}, b_{i_1}, \dots, a_{i_k}, b_{i_k}\}$

olsun. $B \leq (K^G)'$ olur. $(K^G)'$ Chernikov olduğundan ve Chernikov bir grup lokal

sonlu olduğundan B sonludur. O halde G' lokal sonludur. $A = x^G$, $C = C_G(x^G)$ ve G/C

sonlu residuali de R/C olsun. G/C Chernikov olduğundan [3] 5.4.22 den dolayı min

şartını sağlayan sonlu indeksli bir tek altgrubu vardır ve diğer bütün sonlu indeksli

normal altgrupları bu grubu kapsar. G/C Chernikov grubunun köklü abelyan grubu S/C ise $R/C \leq S/C$ olur. $\frac{S/C}{R/C}$ sonlu ve köklü olduğundan aşıkardır. Böylece

$S/C = R/C$ olur. Bu ise R/C nin köklü abelyan olduğunu gösterir. A/A' abelyandır. A'

yukarıdaki açıklamalardan dolayı Chernikovdur, $[G, x]A'/A'$ Chernikovdur. Fakat

Chernikov gruplar genişleme kapalı olduğundan $[G, x]$ Chernikovdur. O halde A yı abelyan almak teoremin genelliği bozmaz. R/C , G/C nin sonlu residuali olduğundan G/R sonludur. O zaman R nin G içindeki transversali $\{t_1, \dots, t_m\}$ olsun. O zaman $G = \bigcup_{i=1}^m R t_i$ dir. $g \in G$ için $[g, x] = [rt_i, x] = [r, x]^{t_i} [t_i, x]$ elde edilir. O halde

$[G, x] = \langle [R, x]^{t_i}, [t_i, x] : i = 1, 2, \dots, m \rangle$ dir. $[G, x] \leq A$ olduğundan $[G, x]$ abelyandır.

$K = \prod_{i=1}^m [R, x]^{t_i}$; $L = \langle \{t_i, x\} \rangle, i = 1, \dots, m$ gruplarını göz önüne alalım. O zaman

$[G, x] = KL$ dir. $L \leq G'$ ve G' lokal sonlu olduğundan L sonludur. L sonlu

olduğundan Chernikovdur. Şimdi K nin Chernikov olduğunu gösterelim. $\langle x, r \rangle^{G'}$ Chernikov olduğundan $[r, A]$ da Chernikovdur. R/C abelyan olduğundan $R' \leq C = C_G(A)$ dir. $[r, a]^{r_i} = [r^{r_i}, a^{r_i}] \in [r^R, A]$ olduğundan $[r, A]^R \leq [r, A]$ dir.

$[r^{r_i}, a] = [r^{r_i} r^{-1} r, a] = [[r_i, r^{-1}], a]^r [r, a] = [r, a]$ olduğundan $[r^R, A] = [r, A]$ dir. O halde $[r, A]^R \leq [r^R, A] = [r, A]$ dir. Buradan $[r, A] \triangleleft R$ ve $C_R([r, A]) \triangleleft R$ elde edilir.

$\bar{R} = R / C_R([r, A])$ olsun. $A \triangleleft G$ olduğundan $[r, A] \leq A$ dir. A abelyan olduğundan $[r, A]$ da abelyandır. $C_R(A) \leq C_R([r, A])$ ve $C \leq R$ olduğundan $C_R(A) = C_G(A) = C$ dir.

O halde $C \leq C_R([r, A])$ dir. G/C Chernikov olduğundan periyodiktir. O halde R/C periyodik olacağından $R/C_R([r, A])$ periyodik ve aynı zamanda da abelyandır. $\bar{R}$, bir Chernikov abelyan grubun periyodik otomorfizma grubuna izomorf olur. O halde $\bar{R}$, [1] Teorem 3.29.2 den sonludur. $R/C_R([r, A])$ köklü ve sonlu olduğundan aşıkardır.

Böylece $R = C_R([r, A])$ dir. Buradan $[R, A] \leq Z(G)$ elde edilir.

$$\beta_x : R/C \rightarrow [R, x]; \quad rC \rightarrow [r, x]$$

şeklinde tanımlansın. β_x iyi tanımlıdır. β_x bir epimorfizma ve R/C bir Chernikov olduğundan $[R, x]$ de Chernikovdur. Burada her t_i ; $i=1, \dots, m$ için $[R, x]^{t_i}$ de Chernikovdur. O halde $K = \prod_{i=1}^m [R, x]^{t_i}$ grubu da bir Chernikov gruptur. $[G, x] = KL$ olduğundan $[G, x]$ de Chernikov gruptur. $C_G(x^G) \leq C_G([G, x])$ ve $G/C_G(x^G)$ Chernikov dolayısıyla da periyodik olduğundan $G/C_G([G, x])$ periyodiktir.

Tanım 2.18. G bir grup olsun. Her $x \in G$ ve her pozitif m tamsayısı için

$$x = y^m$$

olacak şekilde bir $y \in G$ varsa G ye bir köklü (radicable) grup denir. Toplamsal gruplarda köklü terimi yerine bölümlü (divisible) terimi kullanılır. Eğer her pozitif n tamsayısı için $G^n = G$ ise G ye yarı-köklü (semi-radicable, quasi-radicable) grup denir. Burada

$$G^n = \langle g^n : g \in G \rangle$$

dir. Periyodik ,köklü, abelyan grupların sınıfını $\mathcal{L}$ ile gösterelim. Eğer G faktörleri $\mathcal{L}$ -grup olan bir sonlu seriye sahip ise G ye bir $\wp\mathcal{L}$ grubu denir. Eğer G faktörleri $\mathcal{L}$ -grup olan artan transfinite normal seriye sahip ise G ye bir $\wp'\mathcal{L}$ grubu denir. Bir G grubunun aşikar olmayan yarı-köklü altgrubu yoksa G ye indirgenmiş grup denir.

Teorem 2.19. ([13] Sonuç 6.1.3) Öyle bir σ fonksiyonu vardır ki aşağıdakiler sağlanır. G bir grup ve d bir tamsayı olsun. Eğer G nin her altgrubu altnormal ve altnormallik indeksi $\leq d$ ise o zaman G nilpotenttir ve nilpotentlik sınıfı $\leq \sigma(d)$ dir.

İspat: [2] Teorem 7.42.

Teorem 2.20. G bir grup ve her altgrubu altnormal olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

- (i) [16] G çözülebilirdir.
- (ii) [17] Eğer G sonlu üslü ise o zaman G nilpotenttir.
- (iii) [18] Eğer G periyodik ve hipermerkez ise o zaman G nilpotenttir.
- (iv) [15] Eğer G nilpotent bir grubun sonlu üslü genişlemesi ise o zaman G nilpotenttir.
- (v) [20] Eğer G torsiyonsuz ise o zaman G nilpotenttir.
- (vi) [22] G nin her nilpotent altgrubu bir normal nilpotent altgrup tarafından içerilir.
- (vii) [28] G nin öyle bir normal nilpotent N altgrubu vardır ki G/N nilpotenttir.
- (viii) [28] Eğer G periyodik ise o zaman öyle bir normal nilpotent altgrubu N altgrubu vardır ki G/N sonlu ranklı köklü abelyan gruptur.

Teorem 2.21. ([10] Teorem 5.5) G çözülebilir bir p -grup olsun. O zaman G nin altnormal altgruplarının altnormallik indeksi üzerinde bir sınıra sahip olması için gerek ve yeter şart G nin bir $\wp\mathcal{L}$ -grubunun bir nilpotent grupla genişletilmiş olmasıdır.

İspat. G altnormal altgruplarının altnormallik indeksi üzerinde bir sınıra sahip olmak üzere $d(G) = n$ olsun. [10] Lemma 4.3 den dolayı $K_n(G) = K_{n+1}(G) = \dots$ ve $K_n(G) \in \wp\mathcal{L}$ dir. Şimdi $G/K_n(G)$ nin nilpotent olduğunu göstereyim. Bunun için $G/K_n(G)$ nin [10] Teorem 5.4 ün şartlarını sağladığını göstereceğiz. $G/K_n(G)$ altnormal indisleri üzerinde bir sınıra sahip p -gruptur. $G/K_n(G)$ nin her normal

abelyan altgrubunun indirgenmiş olduğunu gösterelim. $H/K_n(G)$, $G/K_n(G)$ nin abelyan normal altgrubu ve $S/K_n(G)$ de $H/K_n(G)$ nin köklü altgrubu olsun. Böylece $S/K_n(G)$ bir $\mathcal{L}$ -grubudur ve $S/K_n(G) \triangleleft G/K_n(G)$ dir. O halde

$$S/K_n(G) \leq K_1(G/K_n(G)) = K_{n+1}(G)/K_n(G) = 1$$

dir. Buradan $S/K_n(G) = 1$ dir. Bundan dolayı $G/K_n(G)$ nilpotenttir.

Karşıt olarak $N \triangleleft G$, $N \in \wp \mathcal{L}$ ve G/N nilpotent olsun. G/N nin nilpotentlik sınıfı m ve $N \in \wp \mathcal{L}$ olduğundan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ki $N = K_n(N)$ dir. H , G nin herhangi bir altgrubu olsun.

$$1 = G_m/N \triangleleft \dots \triangleleft G_1/N = G/N$$

G/N nin bir merkez serisi olsun. Buradan

$$N \triangleleft G_m \triangleleft \dots \triangleleft G_1 = G$$

elde edilir. Şimdi $1 \leq i < m$ için $HG_{i+1} \leq HG_i$ dir. O halde $HN \triangleleft^m G$ dir.

$$1 = K_0(HN) \triangleleft K_1(HN) \triangleleft \dots \triangleleft K_n(HN)$$

serisini göz önüne alalım. $H \triangleleft G$ olduğundan $H \triangleleft HN$ dir. [10] Lemma 4.6 dan

$$H \triangleleft HK_1(HN) \triangleleft \dots \triangleleft HK_n(HN)$$

dir. $N \triangleleft HN$ olduğundan $K_n(N) \leq K_n(HN)$ ve $N = K_n(N)$ dir.

$$H \triangleleft \dots \triangleleft H \triangleleft HK_1(HN) \triangleleft \dots \triangleleft HK_n(HN) = HN$$

olduğundan $H \triangleleft^n HN$ dir. Böylece $s(G:H) \leq n+m$ dir.

Teorem 2.22. ([10] Lemma 6.1) G bir Baer grup olsun. Eğer G altnormal altgruplarının altnormallik indisleri üzerinde bir sınıra sahip ise o zaman G bir nilpotent gruptur.

İspat. G bir Baer grup olduğu için her $x \in G$ için $\langle x \rangle \triangleleft G$ dir. G altnormal altgruplarının altnormallik indeksleri üzerinde bir sınıra sahip olduğundan [30] Teorem 1.14 den G nin her altgrubu altnormaldir. Böylece Teorem 2.19 dan dolayı G nilpotenttir.

Teorem 2.23. G bir p -grup olsun. Eğer G nin bir sonlu üslü grubun sonlu grupla genişlemesi ise o zaman G nilpotenttir.

İspat. [2] Lemma 6.34.

Teorem 2.24. ([10] Teorem 6.2) G bir periyodik, hipermerkez grup olsun. O zaman G nin altnormal altgruplarının altnormallik indeksi üzerinde bir sınıra sahip olması için gerek ve yeter şart G nin bir $\mathcal{L}$ -grubunun bir nilpotent grupla genişlemesi olmasıdır.

İspat. G altnormal altgruplarının altnormallik indeksi üzerinde bir sınıra sahip olsun. G lokal nilpotent grup olduğundan G , p -bileşenleri olan G_p gruplarının direkt çarpımıdır. Böylece G nin bir G_p bileşenini göz önüne alalım. R , G_p nin bütün yarı-köklü altgruplarının ürettiği altgrup olsun. Aşıkarak R , G_p nin tek maksimal yarı-köklü altgrubu ve özel olarak $R \triangleleft G$ dir. Fakat [30] Teorem 1.18 den dolayı R abelyandır. Böylece R bir $\mathcal{L}$ -gruptur. Şimdi G/R nin nilpotent olduğunu gösterelim.

$S/R \leq G/R$ olmak üzere S/R köklü ve abelyan olsun. Böylece her $s \in S$ ve her $m > 0$ için $sR = s_1^m R$ olacak şekilde bir $s_1 \in S$ ve dolayısıyla $s = s_1^m r$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Fakat R yarı-köklü olduğundan $r = \prod_{i=1}^k r_i^m$ ($r_i \in R$) yazılabilir.

$s = s_1^m \prod_{i=1}^k r_i^m \in S^m$ dir. Böylece $S = S^m$ elde edilir. O halde $S \leq R$ yani S/R aşıkardır.

Demek ki G/R nin aşıkâr olmayan köklü ve abelyan bir altgruba sahip değildir. G_p/R nin nipotent olmadığını kabul edelim. $\{Z_\alpha\}_{\alpha \leq p}$, G_p/R nin yukarı merkez serisi olmak üzere λ , Z_λ nilpotent olmayacak şekilde en küçük ordinal olsun. Eğer λ limit ordinal ise $Z_\lambda = \bigcup_{\mu < \lambda} Z_\mu$ dir. Fakat her $\mu < \lambda$ için r , G nin altnormal indisleri üzerinde bir sınırı olmak üzere Z_μ en çok $\sigma(r)$ sınıftan nilpotenttir. O halde Z_λ nilpotenttir. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı λ limit ordinal değildir. Böylece $\lambda-1$ vardır; $Z_{\lambda-1}$ nilpotenttir ve $Z_\lambda/Z_{\lambda-1}$ abelyan olduğundan Z_λ çözülebilir. Ayrıca Z_λ bir p -grup ve G_p/R nin aşıkâr olmayan köklü abelyan altgrubu olmadığından Z_λ nın her normal abelyan altgrubu indirgenmiştir. Böylece [10] Teorem 5.4 den Z_λ nilpotenttir. Bu bir çelişkidir. O halde G_p/R nilpotenttir. Böylece G/R Teorem 2.21 den dolayı G/R nilpotenttir.

Teoremin karşıtı Teorem 2.21 den kolayca görülür.

Sonuç 2.25. G bir hiperabelyan p -grup ve G nin altnormal altgruplarının altnormallik indeksi üzerinde bir sınıra sahip olsun. O zaman G bir $\wp'\mathcal{L}$ - grubunun bir nilpotent grupla genişlemesidir.

İspat. $K_\lambda(G)$, G nin yukarı $\mathcal{L}$, serisinin son terimi olsun. $K_\lambda(G) \in \wp'\mathcal{L}$ dir ve $G/K_\lambda(G)$ [10] Teorem 6.3 ün şartlarını sağladığından $G/Z_\lambda(G)$ nilpotenttir.

Lemma 2.26. G bir lokal nilpotent ve perfekt grup olsun. O zaman her $x \in G$ için $\langle x \rangle^G \neq G$ dir. Özel olarak

İspat. Bir $x \in G$ için $\langle x \rangle^G = \langle x \rangle [G, x] = G$ olsun. Eğer $[G, x] \neq G$ ise o zaman $x^G/[G, x] \cong \langle x \rangle / \langle x \rangle \cap [G, \langle x \rangle]$ dir. $x^G/[G, x]$ abelyan olduğundan $G/[G, \langle x \rangle]$ de abelyandır. Böylece $G' \not\subseteq [G, x] \neq G$ dir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $[G, x] = G$ dir. Böylece $x \in [G, \langle x \rangle]$ dir ve $x = [g_1, x][g_2, x] \dots [g_n, x]$ olacak şekilde $g_1, \dots, g_n \in G$ vardır. $H = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$, $A = x^H$ olsun. $x \in [H, A] \leq A$ dir. $A = x^H \leq [H, A] \leq A$ dir. Böylece $A = [H, A]$ olur ki bu bir çelişkidir.

Lemma 2.27. G bir sonsuz Chernikov grup ve G^0 köklü abelyan kısmı olsun. Eğer G' sonlu üslü ise o zaman G^0 , G nin merkezi tarafından içerilir. Özel olarak G nilpotenttir.

İspat. $\varphi: G^0 \rightarrow [G^0, x]; g \rightarrow [g, x]$ olarak tanımlansın. φ bir epimorfizmadır. Böylece $[G^0, x]$ köklü ve G' sonlu üslü olduğundan $[G^0, x] = 1$ dir. Dolayısıyla $G^0 \leq Z(G)$ dir. Eğer G/G^0 nilpotent ise o zaman bir $r \in \mathbb{N}$ için $\gamma_r(G/G^0) = 1$ dir. Buradan $\gamma_r(G) \leq G^0$ dir. Böylece $\gamma_{r+2}(G) = 1$ dir. Bu ise G nin nilpotent olmasıdır.

Tanım 2.28. G bir grup olsun. Eğer G nin aşıkâr olmayan her sonlu üreteçli altgrubunun sonlu indeksli bir öz altgrubu varsa G ye lokal dereceli grup denir. Yani eğer X , G nin sonlu üreteçli bir altgrubu ve $X \neq 1$ ise o zaman X in öyle bir öz altgrubu K vardır ki $[X : K] < \infty$ dur.

Lemma 2.29. G bir lokal nilpotent grup olsun. Eğer $N \triangleleft G$; $F \triangleleft \triangleleft G$ ve N ile F nilpotent ise o zaman FN nilpotenttir.

İspat. $F \triangleleft \triangleleft G$ olduğundan $F = F_m \triangleleft F_{m-1} \dots \triangleleft F_1 \triangleleft F_0 = G$ olacak şekilde bir altnormal serisi vardır. Ayrıca F , FN içinde de altnormaldir. Böylece öyle bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ki $F_n = F$ dir. Eğer $n=0$ ise $F = F_0 = FN$ olduğundan FN nilpotenttir. O halde $n \geq 1$ kabul edebiliriz. Kabul edelim ki bir $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için F_i nilpotent olsun. O zaman

$F_i \triangleleft F_{i-1}$ olduğundan $F_{i-1} \cap N \triangleleft F_{i-1}$, F_i ve $F_{i-1} \cap N$, F_{i-1} nin normal nilpotent altgruplarıdır. $F_i (F_{i-1} \cap N)$, F_{i-1} nin normal nilpotent alt grubudur. $F_{i-1} = F_{i-1} \cap FN = (F_{i-1} \cap N)F_i$ olduğundan F_{i-1} nilpotenttir. Böylece induksiyondan $F_0 = FN$ nilpotenttir.

Lemma 2.30. ([2] Teorem 9.23, Corollary 2) G bir periyodik, yarı-köklü ve hipermerkez grup ise G abelyandır.



3. HER ÖZ ALTGRUBU $\mathcal{B}_n$ OLAN HİPERMERKEZ VEYA BAER GRUPLAR

Bu bölümde her öz altgrubu $\mathcal{B}_n$ olan hipermerkez veya Baer grubun kendisinin $\mathcal{B}_n$ de veya nilpotent olduğu gösterilmiştir. Burada hipermerkez uzunluğu üzerindeki şartı kaldırılamaz, çünkü $G = C_{2^\infty} \rtimes \langle x \rangle$ lokal dihedral 2-grubunu göz önüne alalım. O zaman G bir hipermerkez gruptur ve hipermerkez uzunluğu $\omega+1$ ve her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) dir. Ama G nilpotent olmadığından her öz altgrubunun altnormal altgrubunun altnormallik indeksi bir $r \in \mathbb{N}$ ile sınırlı değildir. $G = A \rtimes \langle x \rangle$, buradaki $A \cong C_{2^\infty}$, $\langle x \rangle$ sonsuz mertebeli devirli grup ve her $a \in A$ için $a^x = a^{-1}$ dir. G lokal nilpotent grup hem mertebesi sonlu hem de mertebesi sonsuz elemanlar içerir.

Lemma 3.1. G bir hipermerkez periyodik grup ve hipermerkez uzunluğu $\leq \omega$ olsun. Eğer her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) ise o zaman G nilpotenttir.

İspat. Kabul edelim ki G nilpotent olmasın. O zaman G nin hipermerkez uzunluğu ω dir. $G = Z_\omega(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i(G)$ dir. Her $x \in G$ için $x \in Z_i(G)$, olacak şekilde $i \geq 1$ vardır.

Her $i \in \mathbb{N}$ için $Z_i(G)$ nilpotent olduğundan $\langle x \rangle \triangleleft \triangleleft Z_i(G) \triangleleft G$ dir. Böylece G bir Baer gruptur. $G' \not\leq G$ olduğundan Teorem 2.22 den dolayı G' nilpotenttir. G/G' abelyan grup olduğundan G çözülebilirdir. Teorem 2.22 den dolayı G nin her öz altgrubu nilpotenttir. Eğer G maksimal altgruba sahip değilse [9] Teorem 3.1 (ii) den dolayı G nin her altgrubu altnormaldir. [18] Teorem 2.7 den dolayı G nilpotenttir. Eğer G maksimal altgruba sahip ise o zaman G nin bir M maksimal altgrubu ve öyle bir $x \in G$ vardır ki $G = \langle x \rangle M$ olacak şekilde $x \in G$ vardır. G Baer grup olduğundan dolayı $\langle x \rangle \triangleleft \triangleleft G$ ve $M \triangleleft G$ olduğundan Lemma 2.29 dan dolayı G nilpotenttir.

Lemma 3.2. G bir lokal dereceli torsiionsuz grup ve her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$), H , hipermerkez ve H nin hipermerkez uzunluğu $\leq \omega$ olsun. O zaman G nilpotenttir.

İspat. Her $H \not\leq G$ için H nin hipermerkez uzunluğu ω olduğundan $H = Z_\omega(H) = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i(H)$ dir. $x \in H$ olsun. O zaman $x \in Z_i(H)$, $i \geq 1$ vardır. Her $i \in \mathbb{N}$ için $Z_i(H)$ nilpotent olduğundan $\langle x \rangle \triangleleft Z_i(H) \triangleleft H$ dir. Buradan H bir Baer gruptur ve böylece Teorem 2.22 den dolayı H nilpotenttir. F, G nin bir sonlu üreteçli altgrubu olsun. Eğer $F \neq G$ ise F nilpotenttir. Eğer $F = G$ ise o zaman G sonlu üreteçli lokal dereceli torsiionsuz gruptur. [21] Teorem 2 den dolayı G nilpotenttir. Böylece G lokal nilpotenttir. [9] Teorem 2.1 den dolayı G nilpotenttir.

Teorem 3.3. G bir lokal nilpotent grup olsun. Ayrıca her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) ve H hipermerkez uzunluğu $\leq \omega$ olsun. O zaman G çözülebilirdir.

İspat. Kabul edelim ki G çözülebilir olmasın. $T(G)$, G nin mertebesi sonlu olan elemanlarının kümesi olsun. [3] 12.1.1 den dolayı $T(G)$, G nin altgrubudur. Eğer $T(G) = 1$ ise Lemma 3.2 den dolayı G nilpotenttir. Dolayısıyla G çözülebilirdir. Eğer $T(G) = G$ ise G nin her $H \not\leq G$ için H nin hipermerkez uzunluğu $\leq \omega$ olduğundan Lemma 3.1 den dolayı H nilpotenttir. [9] Teorem 3.3 (i) (ii) den dolayı G bir Fitting p -gruptur. Böylece [8] Teorem 1.1 den dolayı $G \neq G'$ dir. Böylece G çözülebilirdir. $1 \neq T(G) \neq G$ olsun. O zaman $T(G)$ nin hipermerkez uzunluğu $\leq \omega$ olduğundan Lemma 3.1 den dolayı $T(G)$ nilpotenttir. Dolayısıyla $T(G)$ çözülebilirdir. $G/T(G)$ torsiionsuz olduğundan dolayı Lemma 3.2 den $G/T(G)$ çözülebilirdir. Böylece G çözülebilirdir.

Teorem 3.4. G bir hipermerkez grup olsun. Ayrıca her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) ve H nin hipermerkez uzunluğu $\leq \omega$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

- (i) Eğer G bir maksimal altgruba sahip değilse o zaman G nilpotenttir.
- (ii) $G \in \mathcal{B}_m$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat. Teorem 3.3 den dolayı G çözülebilirdir. Ayrıca her $H \not\leq G$ için Lemma 3.1 ispatından dolayı H nilpotenttir. Böylece G nin her öz altgrubu nilpotenttir. Kabul edelim ki G nilpotent olmasın. Eğer G bir maksimal altgruba sahip değilse [9] Teorem 3.1(i), (ii) den dolayı G nin her altgrubu altnormaldir ve G bir p -gruptur. [18] Teorem 2.7 den dolayı G nilpotenttir. Eğer G bir maksimal altgruba sahip ise o zaman [11] dolayı G metabelyan Chernikov p -gruptur. R , G nin köklü kısmı olmak üzere G/R sonludur. R , Lemma 2.30 dan dolayı abelyandır. Teorem 2.24 den dolayı $G \in \mathcal{B}_m$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ vardır.

Sonuç 3.5. G bir hipermerkez grup ve her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) olsun. G nin nilpotent olması için gerek ve yeter şart G nin Baer grup olmasıdır.

İspat. G bir nilpotent grup olsun. O zaman G bir Baer gruptur. Şimdi karşıt olarak G bir Baer grup olsun. Kabul edelim ki G nilpotent olmasın. G bir Baer grup olduğundan H da bir Baer gruptur ve altnormal altgruplarının indeksi sınırlı olduğundan Teorem 2.22 den dolayı H nilpotenttir. G hipermerkez grup olduğundan $G \neq G'$ dir. Böylece G' nilpotenttir. G/G' abelyan olduğundan G çözülebilirdir. Eğer G bir maksimal altgruba sahip değil ise [9] Teorem 3.1.(i), (ii) den dolayı G bir p -grup ve G nin her altgrubu altnormaldir. [18] Teorem 7.2 den dolayı G nilpotenttir. Bu bir çelişkidir. O zaman G bir maksimal altgruba sahiptir. Böylece [11] den dolayı G metabelyan Chernikov p -gruptur. Dolayısıyla G altgrupları için minimal şartını sağlar [3] 12.2.9 den dolayı G nilpotenttir. Bu bir çelişkidir.

Lemma 3.6. G bir Baer grup ve her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) ve G çözülebilir olmasın. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

- (i) G bir periyodik gruptur.
- (ii) G maksimal altgruba sahip değildir.
- (iii) G bir Fitting gruptur.
- (iv) G nin altnormal olmayan bir öz altgrubu vardır.

İspat. (i) G periyodik grup olmasın. O zaman G nin torsiyon elemanlarının kümesi T olsun. [3] 12.1.1 den dolayı $T \not\cong G$ dir. $T \neq G$ olduğundan nilpotenttir. [3] 12.1.1 den dolayı G/T torsiyonsuz olduğundan [9] Teorem 2.1 den dolayı nilpotenttir. Dolayısıyla G çözülebilir olur ki bu bir çelişkidir. Böylece G periyodik gruptur.

(ii) G nin bir maksimal altgrubu M olsun. O zaman $[G : M] = p$ olacak şekilde $p \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca $G = FM$ olacak şekilde bir sonlu F altgrubu vardır. $M \triangleleft G$, M nilpotenttir ve $F \triangleleft G$ olduğundan Lemma 2.29 dan dolayı G nilpotenttir. Buradan G çözülebilirdir. Bu G nilpotent değilse de doğrudur.

(iii) $F = \text{Fit}(G)$ olsun. $F \neq G$ ise Teorem 1.22 den dolayı F nilpotenttir. Ayrıca G/F nin aşıkâr olmayan normal altgrubu yoktur. O zaman $[G : F] = p$ dir. Böylece G çözülebilirdir. Bu bir çelişkidir. Buradan $F = G$ dir.

(iv) Eğer G nin her altgrubu altnormal ise [16] Teorem 7 den dolayı G çözülebilir olur ki bu çelişkidir.

Lemma 3.7. G bir torsiyonsuz lokal dereceli grup, her $H \not\cong G$ için H bir Baer grup ve $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) olsun. O zaman G bir Baer gruptur.

İspat. Her $H \not\cong G$ için H bir Baer grup ve H nin altnormal altgruplarının indeksi sınırlı olduğundan Teorem 2.22 den dolayı H nilpotenttir. F , G nin sonlu üreteçli altgrubu olsun. $F \not\cong G$ ise F nilpotenttir. $F = G$ ise G lokal dereceli grup olduğundan G/N sonlu olacak şekilde $1 \neq N \neq G$ ve $N \triangleleft G$ vardır. Böylece G lokal çözülebilir-by-

sonludur. [21] Teorem 2 den dolayı G nilpotenttir. Böylece G lokal nilpotenttir. [9] Teorem 2.1 den dolayı G nilpotenttir. Dolayısıyla G bir Baer gruptur.

Teorem 3.8 G bir Baer grup ve her $H \leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) ise o zaman G çözülebilirdir.

İspat. Kabul edelim ki G çözülebilir olmasın. O zaman Lemma 3.6 dan dolayı G periyodik ve Fitting gruptur. [3] 12.1.1. den dolayı p asal sayı için G_p , G nin p -bileşeni olmak üzere $G = \text{Dr}G_p$ dir. Eğer G p -grup ise [8] Teorem 1.1 den dolayı G çözülebilirdir. G p -grup olmasın. Her p asal sayısı için G_p çözülebilirdir olduğundan G çözülebilirdir.

4. HER ÖZ ALTGRUBU $\mathcal{B}_n$ OLAN LOKAL NİLPOTENT GRUPLAR

C. Casolo [19] da her p asal sayısı için çözülebilir olmayan hiperabelyan grup ve altnormal altgruplarının altnormallik indeksi sınırlı olan bir grup inşa etmiştir.

Teorem 4.1. G bir lokal dereceli hiperabelyan p -grup, her $H \leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$

($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) her $x \in G$ için $\exp([G, \langle x \rangle])$ sonlu olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

- (i) G çözülebilirdir.
- (ii) G bir Fitting gruptur. Eğer G maksimal altgruba sahip ise o zaman G nilpotenttir.
- (iii) G nin köklü abelyan altgrupları G nin merkezi tarafından içerilir.

İspat. (i) Kabul edelim ki G çözülebilir olmasın. G nin bir sonlu üreteçli altgrubu F olsun. Eğer $F \leq G$ ise [2] Teorem 10.54 den dolayı F sonlu-by-nilpotenttir. Dolayısıyla F çözülebilirdir. $F = G$ ise G lokal dereceli olduğundan $N \neq G$ vardır ki $[G : H] < \infty$ dir. Buradan G/M olacak şekilde $M < G$ vardır. [3] 1.6.11 den dolayı M sonlu üreteçlidir. Böylece G çözülebilirdir. Bu ise kabulümüzle çelişir. Böylece G lokal çözülebilir gruptur. Dolayısıyla G lokal sonlu gruptur. G bir p -grup olduğundan G lokal nilpotenttir. [10] Sonuç 6.4 den dolayı her $H \leq G$ için $1 \neq N < H$ vardır ki $N \in \mathcal{P}\mathcal{L}$ ve H/N nilpotenttir. N hiperabelyan p -grup ve $N \in \mathcal{B}_n$ dir. Kabul edelim ki N nilpotent olmasın. N hiperabelyan olduğundan $1 = N_0 < N_1 < N_2 < \dots < N_\beta = N$ olmak üzere N nin bir normal abelyan serisi vardır. N_λ nilpotent olmayacak şekilde λ en küçük ordinal sayı olsun. Eğer λ limit ordinal ise $N_\lambda = \bigcup_{\mu < \lambda} N_\mu$ dir. $\mu < \lambda$ olduğundan N_μ nilpotenttir. Her $x \in N_\lambda$ için öyle bir $\mu < \lambda$ vardır ki $x \in N_\mu$ dir. Dolayısıyla N_λ Fitting p -gruptur. Lemma 2.22 den dolayı N_λ nilpotent olur ki bu kabulümüzle çelişir. O zaman λ limit ordinal değildir. $N_{\lambda-1} < N_\lambda$ ve $N_\lambda / N_{\lambda-1}$ abelyandır.

Dolayısıyla N_λ çözülebilirdir. Her $x \in N_\lambda$ için $\langle x \rangle^{N_\lambda}$ çözülebilir ve exponenti sonlu olduğundan [2] Teorem 7.17 den dolayı $\langle x \rangle^{N_\lambda}$ bir Baer gruptur. Lemma 2.22 den dolayı $\langle x \rangle^{N_\lambda}$ nilpotenttir. Böylece N_λ Baer gruptur. Lemma 2.22 den dolayı N nilpotenttir. Böylece N ve H/N nilpotent olduğundan H çözülebilirdir. Her $H \not\leq G$ için H çözülebilir ve her $x \in H$ için $\langle x \rangle^H$ nin exponenti sonlu olduğundan [2] Teorem 7.17 den dolayı $\langle x \rangle^H$ bir Baer gruptur. Lemma 2.22 den dolayı $\langle x \rangle^H$ nilpotenttir. Sonuç olarak H bir Baer gruptur. Lemma 2.22 den dolayı H nilpotenttir. [9] Teorem 3.3 (i), (ii) den dolayı G bir Fitting p -gruptur. [8] Teorem 1.1 den dolayı G çözülebilirdir. Böylece ispat tamamlanır.

(ii) Kabul edelim ki G Fitting grup olmasın. O zaman G nilpotent değildir. (i) deki gibi her $H \not\leq G$ için H nilpotent ve (i) den dolayı G çözülebilirdir. Her $x \in G$ için $\langle x \rangle^G$ çözülebilir ve sonlu üslü olduğundan [2] Teorem 7.17 den dolayı $\langle x \rangle^G$ bir Baer gruptur. Lemma 2.22 den dolayı $\langle x \rangle^G$ nilpotenttir. Böylece G bir Baer gruptur. G maksimal altgruba sahip değilse [9] Teorem 3.1(i), (ii) den G nin her altgrubu altnormal ve G sayılabilir bir p -gruptur. Dolayısıyla $G' \neq G$ olduğundan G' nilpotent gruptur. Böylece G bir Fitting gruptur. G bir maksimal altgruba sahip ise $G = FM$ olacak şekilde F sonlu üreteçli altgrubu ve M maksimal altgrubu vardır. G bir Baer grup olduğundan dolayı $F \triangleleft \triangleleft G$ dir. Lemma 2.29 den dolayı G nilpotenttir.

(iii) Her $x \in G$ için (ii) den dolayı $\langle x \rangle \triangleleft \triangleleft G$ dir. A köklü abelyan altgrubu olsun. (ii) den dolayı $A \triangleleft \triangleleft G$ dir. [30] Lemma 1.5 den dolayı $[A, \langle x \rangle] = 1$ dir. Böylece $A \leq Z(G)$ dir.

Sonuç 4.2. G bir lokal nilpotent hiperabelyan periyodik grup, her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) ve her $x \in G$ için $\exp([G, \langle x \rangle])$ nin sonlu olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

- (i) G çözülebilirdir.
- (ii) G bir Fitting gruptur. Eğer G maksimal altgruba sahip ise G nilpotenttir.
- (iii) $A \leq G$, A abelyan köklü grup ise $A \leq Z(G)$ dir.

İspat. (i) Kabul edelim ki G çözülebilir olmasın. G lokal nilpotent periyodik olduğundan G , p -bileşenlerinin direkt çarpımıdır ve her p asal sayısı için Teorem 4.1 den dolayı G nin p -bileşeni G_p çözülebilirdir. Her $x \in G_p$ için $\langle x \rangle^{G_p}$ üssü sonludur. [2] Teorem 7.17 den dolayı $\langle x \rangle^{G_p}$ bir Baer gruptur. Lemma 2.22 den dolayı $\langle x \rangle^{G_p}$ nilpotenttir. G_p bir Baer gruptur. Lemma 2.22 den dolayı G_p nilpotenttir. Böylece her $x \in G$ için $\langle x \rangle^{G_p}$ nilpotenttir. Bundan dolayı G bir Fitting gruptur. Her $H \not\leq G$ için Lemma 2.22 den dolayı H nilpotenttir. [9] Teorem 3.3 (i) den dolayı G bir p -gruptur. Böylece Teorem 4.1 den dolayı G çözülebilirdir.

(ii) Kabul edelim ki G Fitting grup olmasın. O zaman G nilpotent grup değildir. Fakat (i) de olduğu gibi her $H \not\leq G$ için H nilpotenttir. Eğer G maksimal altgruba sahip değilse [9] Teorem 3.1 (i), (ii) den G nin her altgrubu altnormal ve G sayılabilir bir p -gruptur. Dolayısıyla G bir Baer gruptur. $G' \neq G$ olduğundan G' nilpotenttir. Böylece G bir Fitting gruptur. Eğer G bir maksimal altgruba sahip ise [11] den dolayı G metabelyan Chernikov p -gruptur. Teorem 4.1 deki gibi G nin nilpotent olduğu gösterilir.

- (iii) Her $x \in G$ için (ii) den dolayı $\langle x \rangle \triangleleft \triangleleft G$ dir. A köklü abelyan altgrubu olsun. (ii) den dolayı $A \triangleleft \triangleleft G$ dir. [30] Lemma 1.5 den dolayı $A \leq Z(G)$ dir.

Teorem 4.3. G bir lokal nilpotent grup ve her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ (n , H dan bağımsız sabit) olsun. O zaman G nilpotenttir.

İspat. Kabul edelim ki G nilpotent olmasın. F , G nin bir sonlu üreteçli altgrubu olsun. $F \leq G$ ve hipotezden dolayı F nilpotent olduğundan dolayı F nin nilpotentlik sınıfı, σ

Roseblade fonksiyonu olmak üzere en fazla $\sigma(n)$ dir. $[x_1, x_2, \dots, x_{\sigma(n)}, x_{\sigma(n)+1}] = x$ komütatörünü göz önüne alalım ve $H = \langle x_1, x_2, \dots, x_{\sigma(n)}, x_{\sigma(n)+1} \rangle$ olsun. H sonlu üreteçlidir ve hipotezden dolayı H nin nilpotentlik sınıfı en çok $\sigma(n)$ dir. Buradan her $x = 1$ dir. Böylece $\gamma_{\sigma(n)+1}(G) = 1$ ve G nin nilpotentlik sınıfı en fazla $\sigma(n)$ dir.

Sonuç 4.4. G bir lokal nilpotent grup ve her $H \not\leq G$ için her $K \leq H$ için $[H, {}_n K] = [H, {}_{n+1} K] = \dots$ olacak şekilde H ve K dan bağımsız bir $n \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman G nilpotenttir ve G nin nilpotentlik sınıfı, σ Roseblade fonksiyonu olmak üzere en fazla $\sigma(n)$ dir.

İspat. Her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ olduğunu gösterelim. Her $H \not\leq G$ için, her $K \leq H$ için $K^{H,n} = K[H, {}_n K] = K[H, {}_{n+1} K] = K^{H,n+1}$ dir. Böylece her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ dir. Teorem 4.3 den dolayı G nilpotenttir.

Teorem 4.5. G bir çözülebilir olmayan lokal çözülebilir torsiysuz grup ve her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) olsun. O zaman G lokal nilpotenttir.

İspat. F, G nin bir sonlu üreteçli altgrubu olsun. O zaman F çözülebilirdir. Hipotez ve [2] Teorem 10.54, Sonuç 2 den dolayı F sonlu-by-nilpotenttir. G torsiysuz olduğundan sonlu altgrupları birim gruptur dolayısıyla F nilpotenttir. Böylece G lokal nilpotenttir.

Sonuç 4.6. G bir lokal çözülebilir torsiysuz grup ve her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ bir $n \in \mathbb{N}$ (n, H dan bağımsız sabit) olsun. O zaman G çözülebilirdir. Eğer $H \leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ bir $n \in \mathbb{N}$ (n, H dan bağımsız sabit) ise o zaman G nilpotenttir.

İspat. Önce kabul edelim ki G çözülebilir olmasın. Teorem 4.5 den dolayı G lokal nilpotenttir ve Teorem 4.3 den dolayı G nilpotenttir. Böylece G çözülebilirdir.

Böylece [2] Teorem 10.54, Sonuç 2 den dolayı G lokal nilpotenttir ve Teorem 4.3 den dolayı G nilpotenttir.

Sonuç 4.7. G bir hiperabelyan torsiyonsuz grup ve her $H \leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ (n , H dan bağımsız sabit) olsun. O zaman G nilpotenttir.

İspat. F , G nin bir sonlu üreteçli altgrubu olsun. [2] Teorem 10.54, Sonuç 2 den dolayı F nilpotenttir. Böylece G lokal nilpotenttir. Teorem 4.3 den dolayı G nilpotenttir.

Teorem 4.8. G bir lokal dereceli p -grup ve her $H \not\leq G$ için H , $\wp\mathcal{L}$ -by-nilpotent olsun. O zaman G lokal nilpotenttir.

İspat. $H \not\leq G$ olsun. Hipotezden dolayı $N \in \wp\mathcal{L}$ ve H/N nilpotent olacak şekilde $N < H$ vardır. $N \in \wp\mathcal{L}$ olduğundan hiperabelyandır. Ayrıca bir $n \in \mathbb{N}$ için $N \in \mathcal{B}_n$ dir. F , N nin sonlu üreteçli altgrubu olsun. $N \in \mathcal{B}_n$ olduğundan [2] Teorem 10.54, Sonuç 2 den dolayı F sonlu-by-nilpotenttir. O zaman $M < F$ olmak üzere M sonlu ve F/M nilpotenttir. $M = 1$ ise F sonlu hiperabelyan olduğundan F çözülebilirdir. $1 \neq M$ ise o zaman M çözülebilir. F/M nilpotent olduğundan F çözülebilirdir. Böylece N lokal nilpotenttir. H/N nilpotent olduğundan H lokal nilpotenttir. E , G nin sonlu üreteçli altgrubu olsun. Eğer $E = G$ ise G lokal dereceli olduğundan G/N sonlu p -grubu olacak şekilde G nin normal öz altgrubu N vardır. G/N nilpotent ve N lokal nilpotent olduğundan G lokal nilpotenttir.

Sonuç 4.9. G bir lokal dereceli p -grup, her $H \not\leq G$ için H , $\wp\mathcal{L}$ -by-nilpotent ve $H \in \mathcal{B}_n$ (n , her $H \not\leq G$ için sabit) olsun. O zaman G nilpotenttir.

İspat. Teorem 4.8 den dolayı G lokal nilpotenttir ve böylece Teorem 4.3 den dolayı G nilpotenttir.

Teorem 4.10. G bir sonlu üreteçli olmayan lokal residually central ve hiperabelyan grup ve her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

- (i) Eğer G torsiyonsuz ise o zaman G nilpotenttir.
- (ii) Eğer G periyodik ise o zaman G lokal nilpotenttir.

İspat. (i) G torsiyonsuz grup olduğundan Sonuç 4.7 den dolayı G nilpotenttir.

(ii) F, G nin bir sonlu üreteçli altgrubu olsun. [2] Teorem 10.54, Sonuç 2 ve hipotez den dolayı F sonlu-by-nilpotenttir. Yani F/N nilpotent olacak şekilde N sonlu normal altgrubu vardır. $N = 1$ ise F sonlu ve hiperabelyan olduğundan F çözülebilirdir. Dolayısıyla N çözülebilir. Sonuç olarak F çözülebilirdir. Dolayısıyla G lokal çözülebilirdir. [3] 5.4.11 den dolayı G lokal sonludur. [2] Teorem 6.12 in sonucundan dolayı G lokal nilpotenttir.

Sonuç 4.11. G bir sonlu üreteçli olmayan lokal dereceli hiperabelyan periyodik grup ve her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ (n , her $H \not\leq G$ için sabit) olsun. O zaman G nilpotenttir.

İspat. Teorem 4.10 den dolayı G lokal nilpotenttir ve böylece Teorem 4.3 den dolayı G nilpotenttir.

Lemma 4.12. G bir radical grup ve her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ (n , her $H \not\leq G$ için sabit) olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

- (i) Eğer G p -grup ise o zaman G nilpotent ve G nin nilpotentlik sınıfı, σ Roseblade fonksiyonu olmak üzere en fazla $\sigma(n)$ dir.
- (ii) Eğer G torsiyonsuz ise o zaman G nilpotenttir.

İspat. (i) G bir radical grup olduğundan G nin

$$1 = \rho_0(G) \triangleleft \rho_1(G) \triangleleft \rho_2(G) \triangleleft \rho_3(G) \triangleleft \rho_4(G) \dots \rho_\alpha(G) = G$$

serisi vardır ki serinin faktörleri lokal nilpotenttir. G nin serisinin terimlerinin çözülebilir olduğunu gösterelim. Eğer $\beta = 0$ ise aşıkardır. $\beta = 1$ ise $\rho_1(G)/\rho_0(G)$ lokal nilpotent olduğundan Teorem 4.3 den dolayı $\rho_1(G)$ nilpotenttir. Eğer β limit ordinal değilse $\beta-1$ var ve $\rho_{\beta-1}(G)$ çözülebilirdir. Böylece $\rho_\beta(G)/\rho_{\beta-1}(G)$ lokal nilpotent olduğundan Teorem 4.3 den dolayı $\rho_\beta(G)/\rho_{\beta-1}(G)$ nilpotenttir. Böylece $\rho_\beta(G)$ çözülebilirdir. β limit ordinal ise $\rho_\beta(G) = \bigcup_{\gamma < \beta} \rho_\gamma(G)$ dir. Her $\gamma < \beta$ için $\rho_\gamma(G)$ çözülebilirdir. G bir p -grup olduğundan her $\gamma < \beta$ için $\rho_\gamma(G)$ lokal nilpotenttir. Teorem 4.3 den dolayı her $\gamma < \beta$ için $\rho_\gamma(G)$ nilpotent ve nilpotentlik sınıfı en fazla $\sigma(n)$ dir. Böylece $\rho_\beta(G)$ nilpotenttir. Özel olarak $\rho_\alpha(G) = G$ çözülebilirdir ve böylece Teorem 4.3 den dolayı G nilpotenttir.

(ii) Eğer $\beta = 0$ ise aşıkardır. $\beta = 1$ ise $\rho_1(G)/\rho_0(G)$ lokal nilpotent olduğundan Teorem 4.3 den dolayı $\rho_1(G)$ nilpotenttir. Eğer β limit ordinal değilse $\beta-1$ var ve $\rho_{\beta-1}(G)$ çözülebilirdir. Böylece $\rho_\beta(G)/\rho_{\beta-1}(G)$ lokal nilpotent olduğundan Teorem 4.3 den dolayı $\rho_\beta(G)/\rho_{\beta-1}(G)$ nilpotenttir. Böylece $\rho_\beta(G)$ çözülebilirdir. Eğer β limit ordinal ise $\rho_\beta(G) = \bigcup_{\gamma < \beta} \rho_\gamma(G)$ dir. Her $\gamma < \beta$ için $\rho_\gamma(G)$ çözülebilirdir. [2]

Teorem 10.54, Sonuç 2 den dolayı her $\gamma < \beta$ için $\rho_\gamma(G)$ nilpotenttir ve nilpotentlik sınıfı en fazla $\sigma(n)$ dir. Böylece $\rho_\beta(G)$ nilpotenttir. Özel olarak $\rho_\alpha(G) = G$ nilpotenttir.

Lemma 4.13. G bir lokal nilpotent p -grup ve her $K \not\cong G$ için K köklü-by-sonlu olsun. O zaman $G' \not\cong G$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $G = G'$ olsun. $A \not\leq G$ için A abelyan grup olsun. A sonlu ise A Chernikov grup dolayısıyla A min şartını sağlar. A sonsuz olsun. Hipotezden dolayı A köklü-by-sonlu gruptur. O zaman öyle bir $N \triangleleft A$ köklü altgrubu vardır ki A/N sonludur. N bir köklü abelyan grup olduğundan $N \cong \text{Dr}C_{p^\infty}$ dir. N deki C_{p^∞} ye izomorf çarpan sayısı sonlu ise N Chernikov dur. Böylece A Chernikovdur. N nin C_{p^∞} ye izomorf çarpan sayısı sonsuz ise o zaman N nin $\langle a_{11} \rangle \times \langle a_{21} \rangle \times \dots$ sonsuz elemanter abelyan altgrubu bulunur ki bu N nin köklü olmasıyla çelişir. Sonuç olarak A Chernikov gruptur. Böylece A min şartını sağlar [23] 1.G.4 den dolayı G Chernikovdur. [24] (1.1) den dolayı G hipermerkezdur. Bundan dolayı $G' \not\leq G$ dir.

Lemma 4.14. G bir lokal nilpotent p -grup ve her $K \not\leq G$ ve K sonsuz altgrubu için K köklü ve çözülebilir olsun. O zaman $G' \not\leq G$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $G = G'$ olsun. $A \not\leq G$, A abelyan olsun. A sonlu ise o zaman A bir Chernikov gruptur. Dolayısıyla A min şartını sağlar. A sonsuz olsun. A bir köklü abelyan grup olduğundan $A \cong \text{Dr}C_{p^\infty}$ dir. A nın C_{p^∞} ye izomorf çarpan sayısı sonsuz ise $N = \langle a_{11} \rangle \times \langle a_{21} \rangle \times \dots$; $o(a_{11})=p$ olmak üzere N altgrubunu göz önüne alalım. N elemanter abelyan p -grubu olur ki bu hipotezle çelişir. Böylece $A \cong \text{Dr}C_{p^\infty}$ dir. A nın C_{p^∞} ye izomorf olanlar sonlu sayıda ise o zaman A Chernikovdur. Sonuç olarak G lokal nilpotent p -grup ve abelyan altgrupları min şartını sağlar. [23] 1.G.4 den dolayı G hipermerkez p -gruptur. Böylece $G' \not\leq G$ dir.

Lemma 4.15. G bir lokal nilpotent p -grup ve her $K \not\leq G$ ve K sonsuz altgrubu için K köklü ve çözülebilir olsun. O zaman G hipermerkezdur.

İspat. Lemma 4.14 den dolayı G çözülebilirdir. Kabul edelim ki G hipermerkez olmasın. O zaman G nilpotent grup değildir. Her $K \not\leq G$ için K sonlu ise o zaman K nilpotenttir. O zaman K sonsuz olsun. Hipotezden dolayı K köklü ve çözülebilir

gruptur. A , K nin abelyan altgrubu olsun. Eğer A sonlu ise o zaman A Chernikovdur ve min şartını sağlar. A sonsuz ise A köklü abelyan grup olduğundan $A \cong \text{Dr}C_{p^\infty}$ dir. A nin C_{p^∞} ye izomorf çarpan sayısı sonsuz ise $N = \langle a_{11} \rangle \times \langle a_{21} \rangle \times \dots$; $o(a_{i1})=p$ olmak üzere altgrubunu göz önüne alalım. N elemanter abelyan p -grubu olur ki bu hipotezle çelişir. Böylece $A \cong \text{Dr}C_{p^\infty}$ dir. A nin C_{p^∞} ye izomorf sonlu sayıda ise A Chernikovdur. Sonuç olarak K nin her altgrubu min şartını sağlar [23] 1.G.4 den dolayı K Chernikovdur. [24] (1.1) den dolayı K bir hipermerkez p -gruptur. Lemma 2.30 dan dolayı K abelyandır. Böylece G nin her öz altgrubu nilpotenttir. Eğer G maksimal altgruba sahip değilse o zaman [9] Teorem 3.1 (i), (ii) den dolayı G nin her altgrubu altnormal ve $G/G' \cong C_{p^\infty}$ dir. G' Chernikov olduğundan G Chernikov gruptur. [24] (1.1) den dolayı hipermerkezdir. [18] Teorem 2.7 den dolayı G nilpotenttir. Eğer G maksimale sahip ise o zaman G bir metabelyan Chernikov p -gruptur. Böylece [24] (1.1) den dolayı G hipermerkezdir.

5. NİLPOTENT OLMAYAN ALTGRUPLARI MAKSİMAL ALTGRUBA SAHİP OLMAYAN HER ÖZ ALTGRUBU $\mathcal{B}_n$ OLAN GRUPLAR

Bu bölümde nilpotent olmayan altgrupları maksimal altgruba sahip olmayan her öz altgrubu $\mathcal{B}_n$ olan gruplar incelemiştir. Aşağıdaki sonuçlarda nilpotent olmayan altgruplarının maksimal altgruba sahip olmaması şartı kaldırılamaz; çünkü $G = C_{2^\infty} \rtimes \langle x \rangle$ lokal dihedral 2-grubu göz önüne alalım. O zaman G bir hipermerkez gruptur ve hipermerkez uzunluğu $\omega+1$ ve her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$) dir. C_{2^∞} , G nin bir maksimal altgrubudur.

Lemma 5.1. G bir hipermerkez p -grup ve her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$), G nin nilpotent olmayan her altgrubu maksimal altgruba sahip olmasın. O zaman G nilpotenttir.

İspat. G hipermerkez grup olduğundan $G' \neq G$ dir. Her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ olduğundan Teorem 2.24 den dolayı her $H \not\leq G$ için H/R nilpotent olacak şekilde R köklü abelyan normal altgrubu vardır. Böylece her $H \not\leq G$ için H çözülebilirdir. $G' \not\leq G$ olduğundan G' çözülebilir ve G/G' abelyan olduğundan dolayı G çözülebilirdir. Her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ olduğundan Teorem 2.24 den dolayı H/R nilpotent olacak şekilde R köklü abelyan normal altgrubu vardır. Önce H nin Baer grup olduğunu gösterelim. H bir p -grup olduğundan her $x \in H$ için $o(x) = p^n$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. $\langle x, R \rangle = \langle x \rangle R$ nin nilpotent olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için n üzerine indüksiyon yapalım. $n = 1$ ise $o(x) = p$ dir. $\langle x \rangle R$ nilpotent olmasın. $\langle x \rangle R/R \cong \langle x \rangle / \langle x \rangle \cap R$ dir. Buradan $|\langle x \rangle / \langle x \rangle \cap R| = p$ dir. $\langle x \rangle \cap R = 1$ ise R , $\langle x \rangle R$ nin maksimal altgrubudur. Bu hipotezle çelişir. $|\langle x \rangle \cap R| = p$ ise $\langle x \rangle = \langle x \rangle \cap R$ dir. Buradan $x \in R$ olur ki $\langle x \rangle R$ nilpotenttir. $n > 1$ olmak üzere $o(x) = p^n$ olsun. H nin

$\langle x \rangle R \geq \langle x^p \rangle R \geq \dots \geq \langle x^{p^{n-1}} \rangle R$ altgruplarını göz önüne alalım. $i = 0, \dots, n-1$ için $|\langle x^{p^i} \rangle R : \langle x^{p^{i+1}} \rangle R| \leq p$ dir. Eğer $\langle x \rangle R$ nilpotent değil ise hipotezden dolayı $\langle x \rangle R = \langle x^p \rangle R = \dots = \langle x^{p^{n-1}} \rangle R$ dir. Fakat $o(x^{p^{n-1}}) = p$ olduğundan yukarıdaki incelemeden dolayı $\langle x^{p^{n-1}} \rangle R$ nilpotenttir. Böylece $\langle x \rangle R$ nilpotenttir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece ispat tamamdır. Her $x \in H$ için $\langle x \rangle R$ nilpotent olduğundan $\langle x \rangle \triangleleft \triangleleft \langle x \rangle R \triangleleft \triangleleft H$ dir. Buradan $\langle x \rangle \triangleleft \triangleleft H$ dir. Böylece H bir Baer gruptur. H bir Baer grup olduğundan G nin her öz altgrubu Teorem 2.22 den dolayı nilpotenttir. Kabul edelim ki G nilpotent olmasın. Hipotezden dolayı G maksimal altgruba sahip değildir. [9] Teorem 3.1 (ii) den dolayı G nin her altgrubu altnormaldir. [18] Teorem 2.7 den dolayı G nilpotenttir.

Lemma 5.2. G bir lokal dereceli p -grup, her $H \not\leq G$ için H çözülebilir ve $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) olsun. Ayrıca G nin nilpotent olmayan her altgrubu maksimal altgruba sahip olmasın. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

- (i) G çözülebilirdir.
- (ii) G Fitting gruptur ve G nilpotent-by-Chernikov dur.
- (iii) $G' = \gamma_3(G) = \dots$ dir.
- (iv) $G/G' \cong C_{p^\infty}$ dir.

İspat. (i) Kabul edelim ki G çözülebilir olmasın. Her $H \not\leq G$ için H çözülebilir ve $H \in \mathcal{B}_n$ olduğundan Teorem 2.21 den dolayı H/N nilpotent olacak şekilde bir normal altgrubu $N \in \mathcal{NL}$ dir. $N \in \mathcal{NL}$ olduğundan bir $r \in \mathbb{N}$ için $K_0(N) \triangleleft K_1(N) \triangleleft \dots \triangleleft K_r(N) = N$ $\mathcal{L}$ -serisine sahiptir. $K_2(N)/K_1(N) = K_1(N/K_1(N))$ $\mathcal{L}$ -gruptur. Böylece $K_2(N)$ $\mathcal{L}$ -gruptur. Lemma 5.1 in ispatından dolayı $K_2(N)$ nilpotenttir. Yarı-köklü gruplar genişleme kapalı ve her $\mathcal{L}$ -grup yarı-köklü grup olduğundan $K_2(N)$ yarı-köklü gruptur. Lemma 2.30 dan dolayı $K_2(N)$ bir $\mathcal{L}$ -gruptur. Böylece $K_1(N) = K_2(N)$ dir.

Benzer şekilde $K_0(N) = K_1(N) = \dots = K_r(N) = N$ olduğundan N , $\mathcal{L}$ -gruptur. Lemma 5.1 in ispatında dolayı H nilpotenttir. G nin her öz altgrubu nilpotent olduğundan [9] Teorem 3.3. (i) (ii) den G bir Fitting p -gruptur. [8] Teorem 1.1 den dolayı G çözülebilirdir.

(ii) Kabul edelim ki G bir Fitting grup olmasın. O zaman G nilpotent grup değildir. Dolayısıyla G maksimal altgruba sahip değildir. (i) nin ispatından dolayı her $H \not\leq G$ için H nilpotenttir. (i) den dolayı G çözülebilirdir. [9] Teorem 3.1 (ii) den G nin her altgrubu altnormaldir. [28] Teorem 1 den dolayı G bir Fitting gruptur.

(iii) [11] Teorem 2.12 den görülür.

(iv) [11] Sonuç 2.11 den görülür.

Teorem 5.3. G bir hipermerkez periyodik grup; her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) ve G nin nilpotent olmayan her altgrubu maksimal altgruba sahip olmasın. O zaman G nilpotenttir.

İspat. G hipermerkez grup olduğundan G_p , G nin p -bileşeni olmak üzere $G = DrG_p$ dir. Lemma 5.1 den dolayı G_p nilpotenttir. Her $x \in G$ için $x = x_1 x_2 \dots x_i$ olacak şekilde $x_i \in G_p$ vardır. $x^G \leq x_1^G x_2^G \dots x_i^G$, ve x^G nilpotenttir. Böylece G bir Baer gruptur. Teorem 2.22 den dolayı G nin her öz altgrubu nilpotenttir. $G \neq G'$ olduğundan G çözülebilirdir. Kabul edelim ki G nilpotent olmasın. [9] Teorem 3.1 (i) (ii) den dolayı G nin her altgrubu altnormaldir. Böylece [18] Teorem 2.7 den dolayı G nilpotenttir.

Lemma 5.4. G bir periyodik lokal nilpotent grup, her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ve çözülebilir olsun. Ayrıca G nin nilpotent olmayan her altgrubu maksimal altgruba sahip olmasın. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

(i) G çözülebilirdir.

- (ii) G nilpotent-by-Chernikov ve Fitting gruptur.
- (iii) $G' = \gamma_3(G) = \dots$ dir.
- (iv) $G/G' \cong C_p^\infty$ dir.

İspat.(i) Kabul edelim ki G çözülebilir olmasın. G periyodik lokal nilpotent grup olduğundan G_p , G nin bir p -bileşeni olmak üzere $G = \text{Dr}G_p$, dir. $G = G_p$ ise Lemma 5.2 den dolayı G çözülebilirdir. O zaman $G \neq G_p$ dır. Lemma 5.2 nin ispatındakine benzer olarak her G_p nilpotenttir. Her $\lambda \in G$ için $x = x_1 x_2 \dots x_i$ olacak şekilde $x_i \in G_p$ vardır. $x^G \leq x_1^G x_2^G \dots x_i^G$, x^G nilpotenttir. Böylece G bir Fitting gruptur. [9] Teorem 3.3.(i) den dolayı G p -gruptur. Böylece G çözülebilirdir.

(ii) Kabul edelim ki G bir Fitting grup olmasın. O zaman G nilpotent değildir. [9] Teorem 3.1 (i), (ii) den dolayı G bir p -grup ve her altgrubu altnormaldir. [28] Teorem 1 den dolayı G bir Fitting gruptur. [22] Teorem 1 den $N \triangleleft G$ vardır ki N nilpotent ve G/N köklü abelyan sonlu ranklı gruptur. Böylece G nilpotent-by-Chernikov dur.

(iii) [11] Teorem 2.12 den görülür.

(iv) [11] Sonuç 2.11 den görülür.

Lemma 5.5. G bir sonlu üslü çözülebilir p -grup olsun. Eğer $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) ise o zaman G nilpotenttir.

İspat. G sonlu üslü p -grup olduğundan [2] Teorem 7.17 den dolayı G bir Baer gruptur. Teorem 2.22 den dolayı her $H \not\leq G$ için H nilpotenttir. Kabul edelim ki G nilpotent olmasın. Eğer G maksimal altgruba sahip değilse o zaman [9] Teorem 3.1 (ii) den dolayı G nin her altgrubu altnormaldir. Böylece [18] Teorem 2.7 den dolayı G nilpotenttir. Bu kabulümüzle çelişir. Eğer G maksimal altgruba sahip ise o zaman G nin öyle bir maksimal altgrubu M ve x elemanı vardır ki $G = \langle x \rangle M$ ve [3]

12.1.5 den dolayı $M \triangleleft G$ dir. Dolayısıyla Lemma 2.29 dan dolayı G nilpotenttir. Bu kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla G nilpotenttir.

Lemma 5.6. G bir lokal nilpotent sonlu üslü çözülebilir grup olsun. Eğer her $H \not\cong G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) ise o zaman G nilpotenttir.

İspat. G lokal nilpotent ve sonlu üslü olduğundan dolayı p asal sayı için G_p , G nin bir p -bileşeni olmak üzere $G = \text{Dr}G_p$ dir. G sonlu üslü olduğundan G_p de sonlu üslüdür. Lemma 5.5 den dolayı her p asal sayısı için G_p nilpotenttir. $x \in G$ olsun. O zaman $x = x_1 x_2 \dots x_i$ olacak şekilde $x_i \in G_p$ vardır. $x^G \leq x_1^G x_2^G \dots x_i^G$, x^G nilpotenttir. Sonuç olarak G bir Baer gruptur. Her $H \not\cong G$ için H nin altnormal altgruplarının altnormallik indeksi sınırlı olduğundan Teorem 2.22 den dolayı H nilpotenttir. Kabul edelim ki G nilpotent olmasın. Eğer G maksimal altgruba'sahip değilse o zaman [9] Teorem 3.1. (i), (ii) den dolayı G sayılabilir p -grup ve $G/G' \cong C_{p^\infty}$ dir. Fakat G sonlu üslü olduğundan bu bir çelişkidir. Eğer G maksimal altgruba sahip ise o zaman [11] den dolayı G metabelyan Chernikov p -gruptur. G sonlu üslü p -grup olduğundan dolayı Lemma 5.5 den dolayı G nilpotenttir.

Lemma 5.7. G bir metabelyan p -grup ve her $H \not\cong G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) olsun. Eğer G' nin sonlu üslü ise o zaman G bir Fitting gruptur. Eğer G bir maksimal altgruba sahip ise o zaman G nilpotenttir.

İspat. Kabul edelim ki G bir Fitting grup olmasın. G bir metabelyan grup olduğundan dolayı G' abelyandır. Böylece $G' \leq F = \text{Fit}(G)$ dir. Her $x \in G$ için $\langle x, G' \rangle$ için Teorem 2.23 den dolayı $\langle x, G' \rangle$ nilpotenttir. Böylece G bir Baer gruptur. Teorem 2.22 den dolayı her $H \not\cong G$ için H nilpotenttir. Eğer G maksimal altgruba sahip değilse o zaman [9] Teorem 3.1 (ii) den dolayı G nin her altgrubu altnormaldir. [28] Teorem 1 den dolayı G bir Fitting gruptur. Eğer G bir maksimal altgruba sahip ise o zaman $G = FM$ olacak şekilde G nin bir F sonlu ve M maksimal altgrubu vardır. [3]

12.1.5 den dolayı $M \triangleleft G$ dir. F sonlu ve G Baer grup olduğundan $F \triangleleft \triangleleft G$ dir. Lemma 2.29 dan dolayı G nilpotenttir. Böylece G bir Fitting gruptur.

Sonuç 5.8. G çözülebilir p -grup ve her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) olsun. Eğer G' sonlu üslü ise o zaman G bir Fitting gruptur.

İspat. G nin çözülebilir uzunluğu d olsun. d üzerine induksiyon yapalım. Eğer $d = 1$ ise G abelyan ve böylece sonuç aşıkardır. Eğer $d = 2$ ise o zaman G metabelyandır. Lemma 5.7 den dolayı G bir Fitting gruptur. $2 < d$ ise o zaman $G'' \neq 1$ dir. G' sonlu üslü grup olduğundan [2] Teorem 7.17 den dolayı G' sınırlı Engel gruptur. [3] 12.3.3 (ii) den dolayı G bir Baer gruptur. Teorem 2.22 den dolayı G' nilpotenttir. G/G'' metabelyan p -grup ve G'/G'' sonlu üslüdür. Lemma 5.7 den dolayı G/G'' Fitting gruptur. [3] 5.2.10 dan dolayı G bir Fitting gruptur.

Lemma 5.9. G bir lokal nilpotent grup ve G' sonlu üslü olsun. Eğer her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) ve çözülebilir ise o zaman G çözülebilirdir.

İspat. Kabul edelim ki $G' = G$ olsun. O zaman G sonlu üslüdür. [3] 12.1.1 den dolayı p asal sayı ve G_p , G nin p -bileşenleri olmak üzere $G = \text{Dr}G_p$ dir. G nin G_p bileşenini göz önüne alalım. Lemma 2.26 dan dolayı $x \in G_p$ için $\langle x \rangle^{G_p} \neq G_p$ dir. [2] Lemma 7.17 den dolayı $\langle x \rangle^{G_p}$ Baer gruptur. Teorem 2.22 den dolayı $\langle x \rangle^{G_p}$ nilpotenttir. $x \in G$ olsun. O zaman $x = x_1 x_2 \dots x_r$ olacak şekilde $x_i \in G_p$ vardır. $x^G \leq x_1^G x_2^G \dots x_r^G$, dir. x^G nilpotenttir. Böylece G bir Fitting gruptur. Teorem 2.22 den dolayı her $H \not\leq G$ için H nilpotenttir. [9] Teorem 3.3.(i) den dolayı G bir p -gruptur. [8] Teorem 1.1 den dolayı G çözülebilirdir.

Teorem 5.10. G bir lokal nilpotent grup ve G' sonlu üslü olsun. Eğer her $H \not\leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) ve çözülebilir ise o zaman G bir Fitting gruptur.

İspat. Kabul edelim ki G bir Fitting grup olmasın. O zaman G nilpotent grup değildir. Lemma 5.9 dan dolayı çözülebilirdir. Teorem 2.22 den dolayı her $H \leq G$ için H nilpotenttir. Eğer G maksimal altgruba sahip değilse o zaman [9] Teorem 3.1. (i), (ii) den dolayı G bir p -grup ve G nin her altgrubu altnormaldir. $G' \neq G$ olduğundan dolayı G' nilpotenttir. Her $x \in G$ için $\langle x \rangle \triangleleft G$ olduğundan Lemma 2.29 dan dolayı G bir Fitting gruptur. Bu bir çelişkidir. O zaman G maksimal altgruba sahiptir. [11] den dolayı G metabelyan Chernikov p -gruptur. Lemma 2.27 den dolayı G nilpotenttir.



6. HER ÖZ HOMOMORFİK GÖRÜNTÜSÜ N_0 OLAN GRUPLAR

Bu bölümde her öz homomorfik görüntüsü N_0 olan gruplar incelenmiştir. W. Möhres in [7] de elde ettiği bazı sonuçların bir genellemesi yapılmıştır. χ bir grup sınıfı olmak üzere eğer her $1 \neq N \triangleleft G$ ve $N \not\leq G$ için $G/N \in \chi$ fakat $G \notin \chi$ ise G ye bir just-non- χ grup denir. Just-non- χ grup sınıfını çalışırken doğal olarak grupların basit olmadığını kabul ediyoruz.

Lemma 6.1. G bir just-non- N_0 grup olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

- (i) $Z(G) = 1$ dir.
- (ii) G çözülebilir olması için gerek ve yeter şart $\text{Fit}(G) \neq 1$ olmasıdır.
- (iii) $G' \not\leq G$ dir.
- (iv) Eğer G bir p -grup ise G aşıkâr olmayan sonlu normal altgruba sahip değildir.

İspat. (i) Kabul edelim ki $Z = Z(G) \neq 1$ olsun. O zaman her $K \leq G$ için $KZ/Z \triangleleft \triangleleft G/Z$ dir. Buradan $K \triangleleft \triangleleft G$ dir. Bu G nin just-non- N_0 grup olmasıyla çelişir.

(ii) Kabul edelim ki $\text{Fit}(G) \neq 1$ olsun. O zaman G , aşıkâr olmayan normal nilpotent N altgrubuna sahiptir. Hipotezden dolayı G/N nin her altgrubu altnormaldir. [16] Teorem 7 den dolayı G/N çözülebilirdir. Böylece G çözülebilirdir.

Karşıt olarak G çözülebilir olsun. O zaman $G^{(d)} = 1$ olacak şekilde $d \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $G^{(d-1)}$ bir abelyan gruptur. Böylece $G^{(d-1)} \triangleleft G$ ve $G^{(d-1)}$ nilpotenttir. Sonuç olarak $\text{Fit}(G) \neq 1$ dir.

(iii) Kabul edelim ki $G=G'$ ve N , G nin bir öz normal aşıkâr olmayan altgrubu olsun. O zaman G/N nin her altgrubu altnormaldir. [16] Teorem 7 den dolayı G/N çözülebilirdir. Buradan $G'N/N \neq G/N$ dir. Bu bir çelişkidir. Böylece $G' \not\leq G$ dir.

(iv) Kabul edelim ki F , G nin bir aşıkâr olmayan normal sonlu altgrubu olsun. O zaman $\text{Fit}(G) \neq 1$ dir. (ii) den dolayı G çözülebilirdir. G bir p -grup olduğundan G lokal nilpotenttir. G bir minimal normal altgruba sahip olduğundan $Z(G) \neq 1$ dir. Bu ise (i) ile çelişir.

Lemma 6.2. G bir just-non- N_0 , lokal nilpotent, torsiyonsuz grup olsun. O zaman $G \neq \text{Fit}(G)$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $G = \text{Fit}(G)$ olsun. O zaman Lemma 6.1. (ii) den G çözülebilirdir. Böylece $F = \text{Fit}(G) \neq 1$ dir. Şimdi G nin her normal nilpotent altgrubunun abelyan olduğunu gösterelim. N , G nin bir abelyan olmayan normal nilpotent altgrubu olsun. N abelyan grup olmadığından dolayı $N' \neq 1$ ve böylece $I_G(N') \neq 1$ dir. Ayrıca $I_G(N') \triangleleft G$ dir. Hipotezden dolayı $G/I_G(N')$ her altgrubu altnormal torsiyonsuz gruptur. [20] Teorem 1 den dolayı $G/I_G(N')$ nilpotenttir. [7] Lemma 4.3.1 den G nilpotenttir. Bu G nin just-non- N_0 grup olmasıyla çelişir. Böylece N bir abelyan gruptur. $G = \text{Fit}(G)$ olduğundan her $x \in G$ için $\langle x \rangle^G \triangleleft N$ dir. Dolayısıyla $\langle x \rangle^G$ abelyan gruptur. Böylece $\langle x \rangle \triangleleft \triangleleft G$ ve $\langle x \rangle$ nin G içindeki altnormallik indeksi en fazla 2 dir. Buradan G bir 3-Engel gruptur. G bir torsiyonsuz ve çözülebilir olduğundan [1] Teorem 7.36 dan dolayı G nilpotent olur ki bu bir çelişkidir.

Teorem 6.3. G bir just-non- N_0 ve metabelyan p -grup olsun. O zaman G sonsuz üslüdür.

İspat. Kabul edelim ki G sonlu üslü olsun. G metabelyan p -grup olduğundan G' nilpotenttir. Böylece $\text{Fit}(G) \neq 1$ dir. Her $N \not\leq G$ ve $1 \neq N \triangleleft G$ için G/N nin her altgrubu altnormal ve sonlu üslü olduğundan [17] Teorem 2.7 dolayı G/N nilpotenttir. Lemma 6.1. (i) den dolayı $Z(G) = 1$ dir. Böylece G bir just-non-hipermerkez gruptur. [4] Lemma 12.9 dan dolayı $F = \text{Fit}(G)$ bir elemanter abelyan p -gruptur. G/F nilpotent olduğundan her $x \in G$ için $\langle x, F \rangle \triangleleft \triangleleft G$ dir. Teorem 2.23 den

dolayı $\langle x, F \rangle$ nilpotenttir. Böylece G bir Baer gruptur. Her $x \in G$ için $\langle x \rangle \triangleleft \triangleleft G$ ve $G' \triangleleft G$ nilpotent olduğundan Lemma 2.29 dan dolayı G bir Fitting gruptur. Buradan $G = F$ dir. Böylece $G = Z(G)$ dir. Bu ise $Z(G) = 1$ olmasıyla çelişir. Böylece G bir sonlu üslü grup olamaz.

Lemma 6.4. G bir just-non- N_0 p-grup ve $\text{Fit}(G) \neq 1$ olsun. Eğer G sonlu üslü ise o zaman G bir Baer gruptur. Ayrıca G' nilpotent değildir.

İspat. $\text{Fit}(G) \neq 1$ olduğundan Lemma 6.1.(ii) den dolayı G çözülebilirdir. G nin aşıkâr olmayan her normal altgrubu N için [17] Teorem 2.7 den dolayı G/N nilpotenttir. Lemma 6.1. (i) den dolayı G bir just-non-hipermerkez gruptur. [4] Lemma 12.9 dan dolayı $F = \text{Fit}(G)$ bir elemanter abelyan p-gruptur. G/F nilpotent olduğundan her $x \in G$ için $\langle x, F \rangle \triangleleft \triangleleft G$ dir. Teorem 2.23 den dolayı $\langle x, F \rangle$ nilpotenttir. Böylece G bir Baer gruptur. G' nilpotent ise $G = \text{Fit}(G)$ dir. Bu G nin just-non- N_0 grup olmasıyla çelişir.

Teorem 6.5. G bir just-non- N_0 , lokal nilpotent, torsiyonsuz grup ve $F = \text{Fit}(G) \neq 1$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

- (i) F ve $G/C_G(F)$ torsiyonsuz nilpotenttir.
- (ii) G/F torsiyonsuzdur.
- (iii) Eğer $F \neq zF \in Z(G/F)$ ise $C_F(z) = 1$ dir.
- (iv) F sonlu ranka sahip değildir.
- (v) $F = I_G(F)$ dir.
- (vi) Her $x \in G$ için $\langle x, F \rangle$ metabelyandır.

İspat. (i) $F = \text{Fit}(G) \neq 1$ olduğundan Lemma 6.1 (ii) den dolayı G çözülebilirdir. Böylece [1] Lemma 2.17 den dolayı $C_G(F) \leq F$ dir. Eğer $G = C_G(F)$ o zaman ise $Z(G) \neq 1$ dir. Bu Lemma 6.1. (i) ile çelişir. Dolayısıyla $G \neq C_G(F)$ dir. Her $x \in F \leq G$

için $\langle x \rangle^G$ nilpotenttir. Lemma 6.2 nin ispatındaki gibi $\langle x \rangle^G$ abelyandır. Böylece F , bir 3-Engel gruptur. [1] Teorem 7.36 dan dolayı F nilpotenttir.

(ii) (i) den dolayı $F \neq G$ dir. $1 \neq T/F \leq G/F$ ve $T/F = T(G/F)$ periyodik kısmı olsun. $T/F \leq G/F$ dir. Buradan $T \leq G$ dir. T/F periyodik olduğundan $x \in T/F$ için öyle bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ki $x^n \in F$ dir. (i) den dolayı F abelyan olduğundan $[x^n, F] = 1$ dir. Buradan $x \in C_G(F)$ dir. Böylece G/F torsiyonsuzdur.

(iii) (i) den dolayı F nilpotent grup olduğundan Lemma 6.2 nin ispatından dolayı F abelyan ve $F = C_G(F)$ dir. $\varphi : F \rightarrow F; a \rightarrow [a, z]$, şeklinde tanımlayalım. $F \neq zF \in Z(G/F)$ olduğundan $[z, G] \leq F$ dir. Her $n \in \mathbb{Z}$ ve $x, y \in F$ için $(xy)^n = x^n y^n$ dir. φ , bir homomorfizma olduğundan φ , F nin $\mathbb{Z}G$ -endomorfizmasıdır. $\text{Im}(\varphi) = [z, F]$ ve $\text{Ker}(\varphi) = C_F(z)$ ler F nin G -invariant altgruplarıdır. $z \notin C_G(F)$ olduğundan $C_F(z) \neq F$ dir. Kabul edelim ki $C_F(z) \neq 1$ olsun. O zaman $C_F(z) \triangleleft G$ dir. $G/C_F(z)$ nin her altgrubu altnormal altgrup olduğundan dolayı [14] Teorem 11 den dolayı $G/C_F(z)$ hipermerkezdir. Böylece [3] Exercies12.2.1 den dolayı $(F/C_F(z)) \cap Z(G/C_F(z)) \neq 1$ dir. O zaman bir $C_F(z) \neq aC_F(z) \in (F/C_F(z)) \cap Z(G/C_F(z))$ vardır. $a \notin C_F(z)$ olduğundan dolayı $a_1 = [a, z] \neq 1$ dir. $g \in G$ olsun. [3] 5.1.5 (iv) den dolayı
$$[[a, z], g]^{z^{-1}} [[z^{-1}, g^{-1}], a]^g [[g, a], z^{-1}]^g = 1 \quad \text{dir.} \quad zF \in Z(G/F)$$
 olduğundan $[z^{-1}, g^{-1}] \in F$ ve $[[z^{-1}, g^{-1}], a] = 1$ dir. Bundan başka $aC_F(z) \in Z(G/C_F(z))$ olduğundan $[g, a] \in C_F(z)$ ve $[[g, a], z^{-1}] = 1$ dir. $[[a, z], g] = [a_1, g]$ dir. Böylece $a_1 \in Z(G)$ olur ki bu bir çelişkidir.

(iv) Kabul edelim ki F sonlu ranka sahip olsun. [2] Lemma 6.37 den dolayı öyle bir $r \in \mathbb{N}$ vardır ki $F \leq Z_r(G)$ dir. Böylece $F = 1$ olur ki bu bir çelişkidir.

(v) [14] Lemma 1 (iii) den dolayı $F = I_G(F)$ dir.

(vi) Her $x \in F$ için $\langle x, F \rangle / F$ abelyandır. Buradan $(\langle x, F \rangle)' \leq F$ dir ve (i) den dolayı F abelyandır. Böylece $\langle x, F \rangle$ metabelyandır.

Lemma 6.6. G , her altgrubu altnormal ve her homomorfik görüntüsü hipermerkez grup olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

- (i) G bir hipermerkez gruptur.
- (ii) Eğer G periyodik ise G nilpotenttir.

İspat. (i) Eğer G sonlu ise o zaman [3] 5.2.4 (ii) den dolayı G nilpotenttir. O zaman G yi sonsuz kabul edebiliriz. G nin her altgrubu altnormal olduğundan [22] Teorem 1 den dolayı $G = \text{Fit}(G)$ dir. Kabul edelim ki G bir hipermerkez grup olmasın. O zaman G just-non-hipermerkez gruptur. [4] Lemma 12.9 dan dolayı $\text{Fit}(G)$ elemanter abelyan p -grup ya da torsiyonsuz abelyan grup olur ki bu bir çelişkidir. Böylece G hipermerkezdir.

(ii) G bir periyodik ve her altgrubu altnormal olduğundan (i) ve [18] Teorem 2.7 den dolayı G nilpotenttir.

Lemma 6.7. G bir CC-grup ve G nin her altgrubu altnormal olsun. O zaman G nilpotenttir.

İspat. G bir CC-grup olduğundan [29] Lemma 2.41 den dolayı $G/Z(G)$ residually Chernikovdur. $G/Z(G)$ residually Chernikov ve CC-grup olduğundan [5] Teorem 6.2 den dolayı $G/Z_2(G)$ periyodiktir. G lokal nilpotent grup ve [24] (1.1) den dolayı G hipermerkezdir. $G/Z_2(G)$ hipermerkez periyodik ve her altgrubu altnormal olduğundan [18] Teorem 2.7 den dolayı $G/Z_2(G)$ nilpotenttir. Dolayısıyla $G/Z(G)$ nilpotenttir. Sonuç olarak G nilpotenttir.

Lemma 6.8. G sonsuz just-non- N_0 olsun. O zaman G bir CC-grup değildir.

İspat. G bir CC-grup olsun. O zaman $1 \neq N \triangleleft G$ için G/N CC-grup ve her altgrubu altnormaldir. Lemma 6.7 den dolayı G bir just-non-nilpotenttir. Lemma 6.1 (i) den dolayı G bir just-non-hipermerkez gruptur. [4] Lemma 12.9 den dolayı $F = \text{Fit}(G)$ bir elemanter abelyan p -gruptur. Ayrıca her $x \in G$ için $K = \langle x \rangle^G$ Chernikovdur. [6] Lemma 1.5.10 dan dolayı $1 \neq L \text{char} K$ vardır ki L sonludur. [4] Lemma 12.8 den dolayı G sonludur. Bu bir çelişkidir.

Lemma 6.9. G bir p -grup; A , G nin bir abelyan normal altgrubu ve G/A elemanter abelyan p -grup olsun. Ayrıca G nin her öz homomorfik görüntüsü N_0 olsun. O zaman G nilpotenttir.

İspat. Kabul edelim ki G nilpotent olmasın. O zaman [15] Teorem 12 den dolayı G , N_0 değildir. A nilpotent olduğundan $F = \text{Fit}(G) \neq 1$ dir. Ayrıca G bir just-non- N_0 -gruptur. Eğer her $1 \neq N \triangleleft G$, $N \not\leq G$ için G/N nilpotent ise o zaman G just-non-nilpotent gruptur. [4] Lemma 12.9 dan dolayı F , G nin bir elemanter abelyan p -grupbudur. $A \leq F$ olduğundan ve hipotezden $G^{p^2} \leq A^p \leq F^p = 1$ dir. Böylece G sonlu üslüdür, fakat bu Teorem 6.3 ile çelişir. Dolayısıyla öyle bir $1 \neq N \triangleleft G$ vardır ki G/N nilpotent değildir. Fakat hipotezden dolayı $G/N \in N_0$ dir. $\bar{G} = G/N$ ve $\bar{A} = AN/N$ olsun. Eğer $\bar{G} = \bar{A}$ ise o zaman $G=AN$ ise G/N abelyan olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $\bar{G} \neq \bar{A}$, $\bar{G} \in N_0$ ve $\bar{G}/\bar{A}$ bir elemanter abelyan p -grup ve $\bar{A}$ abelyandır. [17] Lemma 2.5 den dolayı $\bar{G}$ nilpotenttir. Bundan dolayı G bir nilpotent gruptur.

Teorem 6.10. G bir p -grup ve G nin her öz homomorfik görüntüsü N_0 olsun. Eğer G nin G/N sonlu üslü olacak şekilde G nin aşikar olmayan bir öz normal altgrubu N var ve N nilpotent ise o zaman G nilpotenttir.

İspat. $N \not\leq G$, $1 \neq N \triangleleft G$, N nilpotent olduğundan $\text{Fit}(G) \neq 1$ dir. G/N sonlu üslü ve $G/N \in N_0$ olduğundan [16] Teoremi 7 den dolayı G/N çözülebilidir. G/N nin çözülebilir uzunluğu n olsun. O zaman

$$N = G_n \leq \dots \leq G_0 = G$$

serisi vardır ki $G_i \triangleleft G$ ve G_{i-1}/G_i ($i = 1, \dots, n$) bir elemanter abelyan p -gruptur. n üzerine induksiyon yapalım. Eğer $n = 0$ ise o zaman $N = G$ ve böylece G nilpotenttir. Şimdi $n = 1$ olsun. O zaman $N = G_1$ ve $G = G_0$ ve G/N bir elemanter abelyan p -gruptur. N abelyan olmasın. O zaman $N' \neq 1$ dir. G/N' bölüm grubunu göz önüne alalım. $G \neq N'$ ve $N/N' \leq G/N'$ dir. N/N' abelyan ve $\frac{G/N'}{N/N'} \cong G/N$ elemanter abelyan p -gruptur. $G/N' \in N_0$ olduğundan [17] Lemma 2.5 den dolayı G/N' nilpotenttir. [3] 5.2.10 dan dolayı G nilpotenttir. Eğer N abelyan ise Lemma 6.9 dan dolayı G nilpotenttir. Bir $i \in \{1, \dots, n\}$ için G_i nilpotent olsun. Şimdi G_{i-1} nin bir nilpotent olduğunu gösterelim. $G_i' \triangleleft G_{i-1}$ ve $G_i' \triangleleft G$ dir. Lemma 6.9 dan dolayı G_i abelyan grup olmadığından $G_i' \neq 1$ dir. $G_i/G_i' \leq G_{i-1}/G_i' \leq G_i/G_i'$ dir. Hipotezden dolayı $G_{i-1}/G_i' \in N_0$, G_i/G_i' abelyan ve $(G_{i-1}/G_i')/(G_i/G_i')$ elemanter abelyan p -gruptur. [15] Teorem 12 den dolayı G_{i-1}/G_i' nilpotent gruptur. [3] 5.2.10 dan dolayı G_{i-1} nilpotenttir. Böylece G nilpotenttir.

Sonuç 6.11. G çözülebilir bir sonlu üslü bir p -grup olsun. Ayrıca G nin her öz homomorfik görüntüsü N_0 olsun. O zaman G nilpotenttir.

İspat. G çözülebilir grup olduğundan G nin çözülebilir uzunluğu d olsun. O zaman $G^{(d)} = 1$ ve $G^{(d-1)}$ nilpotent gruptur. G sonlu üslü olduğundan $G/G^{(d-1)}$ sonlu üslüdür. Teorem 6.10 dan dolayı G nilpotenttir.

Lemma 6.12. G çözülebilir bir p -grup ve her öz homomorfik görüntüsü N_0 olsun. Eğer G nilpotent-by-sonlu üslü ise o zaman G nilpotenttir.

İspat. G çözülebilir olduğundan $\text{Fit}(G) \neq 1$ dir. Hipotezden dolayı $N \triangleleft G$, N nilpotent ve G/N sonlu üslüdür. Eğer $N = 1$ ise G sonlu üslü olduğundan Sonuç 6.11 den dolayı G nilpotenttir. Eğer $1 \neq N$, G/N sonlu üslü ise Teorem 6.10 dan dolayı G nilpotenttir.

Lemma 6.13. G bir metabelyan Engel p -grup ve $[G', G^p] = 1$ olsun. Eğer G nin her öz homomorfik görüntüsü N_0 ise o zaman G nilpotenttir.

İspat. Kabul edelim ki G nilpotent olmasın. O zaman [15] Lemma 4 den dolayı G, N_0 da değildir. Böylece G bir just-non- N_0 -gruptur. $a \in G'$ ve $x \in G$ için

$$1 = [a, x^p] = \prod_{j=1}^p [a, x]^{p_j} \text{ dir. Buradan } [a, x]^p = \prod_{j=2}^p [a, x]^{p_j} \in [a, x]^{<x>} \text{ dir. Her}$$

$n \in \mathbb{N}$ için $[a, x]^{p^n} \in [a, x]^{<x>}$ dir. G bir Engel grup olduğundan her $x, y \in G$ için öyle bir $k \in \mathbb{N}$ vardır ki $[y, x^k] = 1$ dir. Her $x \in G$ ve $a \in G'$ için $[a^{p^{k-1}}, x] = [a, x]^{p^{k-1}} \in [a, x]^{<x>} = 1$ dir. Buradan $(G')^{p^{k-1}} \leq Z(G)$ dir. Lemma 6.1.(i) den dolayı $Z(G) = 1$ dir. $Z(G) = 1$ olduğundan G' sonlu üslü p -gruptur. $C = C_G(G')$ olsun. $G^p \leq C$ dir. $[G^p, G] \leq [C^{p^{k-1}}, G] = [C, G]^{p^{k-1}} \leq (G')^{p^{k-1}} = 1$ dir. Böylece $G^{p^k} \leq Z(G) = 1$ ve dolayısıyla G sonlu üslüdür. Bu ise Teorem 6.3 ile çelişir.

Lemma 6.14. G bir çözülebilir p -grup ve G' sonlu üslü olsun. Ayrıca G bir Engel grup ve her öz homomorfik görüntüsü N_0 olsun. O zaman G nilpotenttir.

İspat. Kabul edelim ki G nilpotent olmasın. Her $N \not\leq G$, $1 \neq N \triangleleft G$ için $G/N \in N_0$, $(G/N)'$ sonlu üslü ve G bir Engel grup olduğundan [18] Teorem 1.2 den dolayı G/N nilpotenttir. Böylece G bir just-non-nilpotent gruptur. [4] Lemma 12.9 dan dolayı $\text{Fit}(G) = F \neq 1$ bir elemanter abelyan p -gruptur. G/F hipotezin şartlarını sağladığından G/F nilpotenttir. $x \in G$ için $\langle x, F \rangle \triangleleft \triangleleft G$ ve Teorem 2.23 den dolayı G bir Baer

gruptur. O halde G' bir sınırlı Engel gruptur. [3] 12.3.3 (ii) den dolayı $G' = \bigcup_{i=0}^{\infty} Z_i(G')$ dir. Bir $i \in \mathbb{N}$ için $Z_i(G') \neq 1$ dir. $G/Z_i(G') \in N_0$ ve hipotezin şartlarını sağladığından $G/Z_i(G')$ nilpotenttir. Dolayısıyla $G'/Z_i(G')$ nilpotenttir. Böylece G' nilpotenttir. G bir Baer grup olduğundan Lemma 2.29 dan dolayı $G = \text{Fit}(G)$ dir. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak G nilpotenttir.

Lemma 6.15. G bir lokal nilpotent grup ve her $H \not\leq G$ için H nin her altgrubu altnormal olsun. O zaman G çözülebilirdir.

İspat. Kabul edelim ki G çözülebilir olmasın. O zaman $G = G'$ dir. [16] Teorem 7 den dolayı her $H \not\leq G$ çözülebilirdir. Eğer $T(G) = 1$ ise G nin her öz altgrubu [20] Teorem 1 den dolayı nilpotenttir ve böylece [9] Teorem 2.1 den dolayı G nilpotenttir. O zaman $T(G) \neq 1$ dir. Eğer $T(G) \neq G$ ise hipotezden dolayı $T(G)$ çözülebilirdir. $G/T(G)$ torsiyonsuz olduğundan $G/T(G)$ çözülebilirdir. Dolayısıyla G çözülebilirdir. Böylece G bir periyodik gruptur. [3] 12.1.1 den dolayı G_p ler G nin p -bileşenleri olmak üzere $G = \text{Dr}G_p$ ve [28] Teorem 1 den dolayı G nin her G_p bir nilpotent-by-Chernikov gruptur. Eğer G bir p -grup ise o zaman [8] Teorem 1.3 den dolayı G nilpotent-by-Chernikov gruptur. Dolayısıyla G çözülebilirdir. $G = \text{Dr}G_p$ ise her G_p nilpotent-by-Chernikov gruptur. G_p ler çözülebilir olduğundan $G \neq G'$ dir. Böylece G çözülebilirdir.

Lemma 6.16. G bir lokal nilpotent grup ve her $H \not\leq G$ için H nin her altgrubu altnormal olsun. Eğer G nilpotent-by-sonlu üslü ise o zaman G hipermerkezdur.

İspat. Lemma 6.15 den dolayı G çözülebilirdir. G nilpotent-by-sonlu üslü olduğundan öyle bir $N \triangleleft G$, N nilpotent altgrubu vardır ki G/N sonlu üslüdür. Eğer $1 = N$ ise o zaman G sonlu üslüdür. [17] Teorem 2.7 den dolayı her $H \not\leq G$ için H nilpotenttir. Eğer G maksimal altgruba sahip değilse o zaman [9] Teorem 3.1 (i), (ii) den dolayı G nin her altgrubu altnormaldir. [17] Teorem 2.7 den dolayı G

nilpotenttir. Eğer G maksimal altgruba sahip ise o zaman [11] den dolayı G metabelyan Chernikov p -gruptur. [24] 1.1 den dolayı G hipermerkezdır.

Şimdi $1 \neq N \triangleleft G$ olsun. Her $H \not\leq G$ için $HN/N \leq G/N$ ve hipotezden dolayı HN/N sonlu üslü ve her altgrubu altnormaldir. $HN/N \neq G/N$ ise [17] Teorem 2.7 den dolayı HN/N nilpotenttir. $HN/N = G/N$ ise $HN = G$ dir. $G/N = HN/N \cong H/H \cap N$ dir. H nin her altgrubu altnormal ve $H/H \cap N$ sonlu üslü olduğundan [15] Teorem 12 den dolayı H nilpotenttir. Böylece her $H \not\leq G$ için H nilpotenttir. Eğer G maksimal altgruba sahip değilse o zaman [9] Teorem 3.1 (ii) den dolayı G nin her altgrubu altnormaldir. [15] Teorem 12 den dolayı G nilpotenttir. Eğer G maksimal altgruba sahip ise o zaman [11] den dolayı G metabelyan Chernikov p -gruptur. [24] (1.1) den dolayı G hipermerkez gruptur.

Sonuç 6.17. G bir periyodik lokal nilpotent grup ve her $H \not\leq G$ için H nin her altgrubu altnormal olsun. Eğer G nilpotent-by-sonlu üslü ise G nilpotent ya da G nin hipermerkez uzunluğu $\omega+1$ dir.

İspat. Lemma 6.16 dan dolayı G hipermerkez gruptur. G nilpotent-by-sonlu üslü olduğundan G/N sonlu üslü olacak şekilde $N \triangleleft G$ nilpotent altgrubu vardır. Böylece her $H \not\leq G$ için HN/N sonlu üslü olduğundan H nilpotenttir. Böylece G nin her öz altgrubu nilpotenttir. Eğer G maksimal altgruba sahip değilse o zaman [9] Teorem 3.1 (i), (ii) den dolayı G nin her altgrubu altnormal ve G bir p -gruptur. [18] Teorem 2.7 den dolayı G nilpotenttir. Eğer G maksimal altgruba sahip ise o zaman [11] den dolayı G metabelyan Chernikov ve hipermerkez uzunluğu $\omega+1$ olan bir p -gruptur.

Şimdi; G bir grup, her $H \leq G$ için $H \in \mathcal{B}_1$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) olan grupların sınıfı $G \in \mathcal{B}_n^*$ ile gösterelim.

Lemma 6.18. G bir hypocentral lokal nilpotent grup ve her $H \leq G$ için $H \in \mathcal{B}_n$ ($n = (H)$, $n \in \mathbb{N}$) olsun. O zaman G hipermerkezdir.

İspat. Önce kabul edelim ki G çözülebilir olmasın. Her $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $H/\gamma_i(H)$ nilpotenttir. $H/\gamma_i(H) \in \mathcal{B}_n$ olduğundan dolayı $H/\gamma_i(H)$ nin nilpotent sınıfı Roseblade fonksiyonu σ olmak üzere $\sigma(n)$ dir. Buradan $\gamma_{\sigma(n)+1}(H) \leq \gamma_i(H)$ dir. $T = \sigma(n)+2$ için $\gamma_1(H) = \gamma_{t+1}(H) = \dots$ dir. Fakat G hypocentral grup olduğundan dolayı H da bir hypocentral gruptur. Böylece her $H \leq G$ için H nilpotenttir. G çözülebilir olmadığından [9] Teorem 3.3 (i) (ii) den dolayı G bir p -grup ve Fitting gruptur. Fakat [8] Teorem 1.1 den dolayı $G' \neq G$ olduğundan G çözülebilirdir. Bu bir çelişkidir.

Şimdi de kabul edelim ki G hipermerkez grup olmasın. O zaman G nilpotent değildir. Yukarıdaki incelemeden dolayı G çözülebilirdir ve her $H \leq G$ için H nilpotenttir. Eğer G maksimal altgruba sahip ise [11] dolayı G bir metabelyan Chernikov p -gruptur. Böylece [24] (1.1) den dolayı G bir hipermerkez gruptur. Eğer G maksimal altgruba sahip değilse [9] Teorem 3.1 (i) (ii) den dolayı G nin her altgrubu altnormal ve sayılabilir p -gruptur. [22] Teorem 1 den dolayı G Fitting gruptur. Teorem 2.24 den dolayı G nilpotenttir.

Lemma 6.19. G bir hipermerkez p -grup ve her öz homomorfik görüntüsü $\mathcal{B}_n^*$ grup olsun. O zaman G nilpotenttir.

İspat. G bir hipermerkez grup olduğundan $Z(G) \neq 1$ dir. Hipotezden dolayı $G/Z(G) \in \mathcal{B}_n$ dir. Teorem 2.24 den dolayı öyle bir $N/Z(G) \triangleleft G/Z(G)$ vardır ki $N/Z(G)$ bir köklü abelyan gruptur ve G/N nilpotenttir. [2] Teorem 9.23 (ii) den dolayı $N/Z(G) \leq Z(G/Z(G))$ dir. Buradan $N \leq Z_2(G)$ dir. Sonuç olarak $G/Z_2(G)$ nilpotenttir. Böylece G nilpotenttir.

Teorem 6.20. G bir just-non- $\mathcal{B}_n^*$, lokal nilpotent ve hypocentral, $\text{Fit}(G) \neq 1$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

- (i) G çözülebilirdir.
- (ii) Eğer G bir p -grup ve G' nilpotent ise G hipermerkezdir.

İspat. (i) $\text{Fit}(G) \neq 1$ olduğundan bir $1 \neq N \triangleleft G$ için $G/N \in \mathcal{B}_n^*$ dir. Lemma 6.18 den dolayı G/N hipermerkezdir. $G/N \in \mathcal{B}_n^*$ olduğundan Teorem 2.24 den dolayı G/N çözülebilirdir. Böylece G çözülebilirdir.

(ii) Kabul edelim ki G hipermerkez grup olmasın. Lemma 6.18 den dolayı her $1 \neq N \triangleleft G$ için G/N hipermerkezdir. G hipermerkez olmadığından dolayı G just-non-hipermerkez gruptur. [4] Lemma 12.9 den dolayı $F = \text{Fit}(G)$ elemanter abelyan gruptur. G' nilpotent olduğundan G/F nilpotenttir. Her $x \in G$ için $\langle x, F \rangle \triangleleft \triangleleft G$ dir. Teorem 2.23 den dolayı $\langle x, F \rangle$ nilpotenttir. Böylece G Baer gruptur. Her $x \in G$ için $\langle x \rangle \triangleleft \triangleleft G$ ve $G' \triangleleft G$ olduğundan Lemma 2.29 dan dolayı $\langle x \rangle^G$ nilpotenttir. Böylece $\text{Fit}(G) = G$ dir. Böylece G abelyan gruptur. Bu bir çelişkidir. Böylece G hipermerkez gruptur.

KAYNAKLAR

1. Robinson, D. J. S., 1972, Finiteness conditions and generalized soluble groups, I, **Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin-New York**
2. Robinson, D. J. S., 1972, Finiteness conditions and generalized soluble groups, II, **Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin-New York**
3. Robinson, D. J. S., 1982, A course in the theory of groups, **Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin-New York**
4. Kurdachenko, L. A., Otal, J., Subbotin, I. Y., 1998, Groups with many similar proper factor-groups, **Universidad de Zaragoza**
5. Tomkinson, M. J., Pena, J. M., Otal, J., 1991, Locally inner automorphisms of CC-groups, **Journal of Algebra** 141 (2), 382-398
6. Dixon, Martyn, R., 1994, Sylow theory, formations and fitting classes in locally finite groups, **World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore**
7. Möhres, W., 1988, Gruppen ,deren untergruppen alle subnormal sind, **Würzburg, Ph. D. the thesis, Aus Karlstadt**
8. Asar, A. O., 2000, Locally nilpotent p-groups whose proper subgroups are hypercentral or nilpotent-by-chernikov, **Journal London Math. Soc.**(2) 61, 412-422
9. Smith, H., 1997, Groups with few non-nilpotent subgroups, **Glasgow Math. J.** 39, 141-151
10. McDougall, D., 1972, The subnormal structure of some classes of soluble groups, **J. Austral. Math. Soc.** 13, 365-377
11. Newman, M. F., Wiegold, J., 1964, Groups with many nilpotent subgroups, **Archiv der Math.** 15, 241-250
12. Franciosi, S., Giovanni, F. De, Kurdachenko, L. A., 1998, Groups with finite conjugacy classes of non-subnormal subgroups, **Arch. Math.** 70 (3), 169-181
13. Lennox, C. J., Stonehewer, S. E., 1987, Subnormal subgroups of groups, **Oxford Univ. Press**
14. Möhres, W., 1989, Torsionfreie gruppen, deren untergruppen alle subnormal sind, **Math. Ann.** 284,245-249
15. Möhres, W.,1989, Torsionsgruppen ,deren untergruppen alle subnormal sind, **Geom. Ded.** 31, 237-244

16. Möhres, W., 1990, Auflösbarkeit von gruppen deren untergruppen alle subnormal sind, **Arch. Math.** 54, 232-235
17. Möhres, W., 1989, Auflösbare gruppen mit endlichem exponenten, deren untergruppen alle subnormal sind-II, **Rend. Sem. Mat. Univ. Padova** 81, 269-287
18. Möhres, W., 1991, Hyperzentrale torsionsgruppen, deren untergruppen alle subnormal sind, **Illinois J. Math.** 35, 147-157
19. Casolo, C., 1986, Periodic Soluble groups in which every subnormal subgroups has defect at most two, **Arch. Math.** 46, 1-7
20. Smith, H., 2001, Torsion-free groups with all subgroups subnormal, **Arch. Math.(Basel)**, 76, No:1, 1-6
21. Smith, H., 2001 Torsion-free groups with all non-nilpotent subgroups subnormal, Preprint
22. Casolo, C., 2001, Nilpotent subgroups of groups with all subgroups subnormal ,Preprint
23. Kegel, O., H., Wehrfritz, B. A. F., 1973, Locally finite groups, **North-Holland**,
24. Otal, J., Pena, J. M., 1988, Minimal non-CC-groups, **Communications in Algebra** 16 (6), 1231-1241
25. Detomi, E. M., 2000, Generalizing subnormality and nilpotency in infinite groups, **Universita degli Studi di Firenze, Ph. D. the thesis**, Firenze
26. Casolo, C., 1987, Groups with subnormal subgroups of bounded defect, **Rend. Sem. Mat. Univ. Padova**, Vol. 77, 177-187
27. Gaschütz, W., 1957, Gruppen in denen das normalteilersien transitiv ist, **J. Reine Angew. Mat.**, 198, 87-92
28. Casolo, C., 2001, On the structure of groups with all subgroups subnormal, Preprint
29. Özen, T., 1998, **Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi**, Ankara
30. Arıkan, A., 1988, **Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi**, Ankara

ÖZGEÇMİŞ

Selami ERCAN 1970 yılında Kırıkkale’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Hamzalı ilk ve orta okulunda tamamladı.1985 yılında M. E. V den burs kazanarak 1988 yılında lise öğrenimini İstanbul Kabataş Erkek Lisesinde tamamladı.1992 de G. Ü. Gazi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Anabilim dalını bitirdi. Aynı bölümde 1992 de araştırma görevlisi olarak göreve başladı.1995 de G. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Matematik Eğitimi anabilim dalında Yüksek Lisansını tamamladı. Halen G. Ü. Gazi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliğinde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.