

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa BİLGİN

**HER DEVİRLİ OLMAYAN ALT GRUBUNUN
MERKEZLEYENİNİ İÇERDİĞİ GRUPLAR**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA-2018

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HER DEVİRLİ OLMAYAN ALT GRUBUNUN
MERKEZLEYENİNİ İÇERDİĞİ GRUPLAR**

Mustafa BİLGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez/....../..... Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....
Dr. Öğr. Üyesi Ela AYDIN
DANIŞMAN

.....
Dr. Öğr. Üyesi Leyla BUGAY
ÜYE

.....
Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

**Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HER DEVİRLİ OLMAYAN ALT GRUBUNUN MERKEZLEYENİNİ İÇERDİĞİ GRUPLAR

Mustafa BİLGİN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Ela AYDIN
Yıl: 2018, Sayfa: 51
Jüri : Dr. Öğr. Üyesi Ela AYDIN
: Dr. Öğr. Üyesi Leyla BUGAY
: Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL

G bir grup ve H de onun bir alt grubu olmak üzere, H nin merkezleyeni olan $C_G(H)$, eğer H tarafından içeriliyorsa, H ye kendinden merkezli alt grup denir. Bu çalışmada aşıkır olmayan her alt grubu, kendinden merkezli olan grupların C sınıfı üzerinde çalışılmıştır. Ayrıca H , G nin devirli olmayan bir alt grubu iken $C_G(H) \not\leq H$ özelliğine sahip G gruplarının $\mathcal{X}$ sınıfları incelenmiştir. Tüm devirli grupların $\mathcal{X}$ sınıfında olduğu ve $\mathcal{X}$ sınıfının C sınıfını içerdiği açıktır. Bu sınıftaki nilpotent ve süper çözülebilir gibi özel gruplar göz önünde bulundurulmuştur. Aynı zamanda $\mathcal{X}$ sınıfındaki sonlu p -gruplar ve sonlu basit gruplar da çalışılmıştır. Yukarıda sözü edilen çalışmalarla ilgili örnekler incelenmiş ve yeni örnekler ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kendinden merkezli alt gruplar, p -gruplar, basit gruplar, nilpotent gruplar, süper çözülebilir gruplar

ABSTRACT

MSc THESIS

GROUPS IN WHICH EVERY NON-CYCLIC SUBGROUP CONTAINS ITS CENTRALIZER

Mustafa BİLGİN

**ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Ela AYDIN
Year: 2018, Pages: 51
Jury : Asst. Prof. Dr. Ela AYDIN
: Asst. Prof. Dr. Leyla BUGAY
: Asst. Prof. Dr. Cennet ESKAL

A subgroup H of a group G is self-centralizing if the centralizer $C_G(H)$ is contained in H . Let denote the class of all groups, in which all non-trivial subgroups are self-centralizing, by C . We consider some special families of groups in C namely nilpotent groups and süper solvable groups are studied. And we focus on the class $\mathcal{X}$ of groups G with the property that if H is a non-cyclic subgroup of G , then $C_G(H) \not\leq H$. It is trivial that all cyclic groups are in the class $\mathcal{X}$ and class C is contained in the class $\mathcal{X}$. We also study the finite p -groups and finite simple groups in $\mathcal{X}$. Moreover, we study the examples about these subjects and give some different examples.

Keywords: Self-centralizing subgroups, p -groups, simple groups, nilpotent groups, super solvable groups

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

G bir grup ve H , G nin bir alt grubu iken $C_G(H) = \{g \in G \mid h \in H \text{ için } gh = hg\}$ şeklinde tanımlanan H nin merkezleyeni H nin kendi içinde yer alıyorsa, H ye kendinden merkezli (merkezi kendinde) alt grup denir.

C ile aşıkâr olmayan alt grupları kendinden merkezli olan grupların sınıfını, $\mathcal{X}$ ile de H , G nin devirli olmayan bir alt grubu olduğunda $C_G(H) \not\leq H$ özelliğini taşıyan G gruplarının sınıfını gösterelim. Bu çalışmada daha çok $\mathcal{X}$ sınıfındaki grupların sınıflandırmasını inceleyeceğiz. Tanımdan dolayı tüm devirli grupların $\mathcal{X}$ sınıfında olduğu açıktır.

$\mathcal{X}$ sınıfındaki nilpotent grupları incelediğimizde; sonlu grupların ailesindeki her bir G grubunun herhangi bir alt grubu $Z(G)$ yi içeriyorsa bu aile $\mathcal{X}$ sınıfında yer alır. Değişmeli bir G grubunun $\mathcal{X}$ sınıfında olması için;

- devirli,
- $\mathbb{C}_{p^k}$ şeklindeki Prüfer p -grubuna izomorf,
- $C_p \times C_p$ gibi p asal derecesinden iki grubun çarpımına izomorf

şartlarından birini sağlaması gerekir. $\mathcal{X}$ sınıfındaki bir nilpotent grup ya değişmelidir ya da sonlu dereceden bir p -gruptur. Sonlu ve değişmeli olmayan bir p -grubun $\mathcal{X}$ sınıfına ait olması için

- p tek bir sayı iken derecesi p^3 olmalı,
- $p = 2$ iken
 - ü derecesi 2^n olan D_{2^n} dihedral,

ü derecesi 2^n olan SD_{2^n} yarı dihedral,

ü derecesi 2^n olan Q_{2^n} genelleştirilmiş quaternion

gruplarından birine izomorf olmalıdır. Son olarak $\mathcal{X}$ sınıfındaki her değişmeli olmayan nilpotent p -grup sonludur.

$\mathcal{X}$ sınıfındaki nilpotent olmayan gruplar incelendiğinde, devirli olmayan süper çözülebilir bir grup $\mathcal{X}$ sınıfında ise ya sonlu olduğu ya da sonsuz bir dihedral gruba izomorf olduğu sonucu elde edilmiştir. Devirli olmayan bir P grubunun $\mathcal{X}$ sınıfına ait olması için X , derecesi $p - 1$ ile bölünen ve P üzerinde sabit noktasız bir etkiye sahip olan devirli bir grup olmak üzere, $X \rtimes P$ şeklinde yazılması gerekir. Devirli bir G grubun $\mathcal{X}$ sınıfına ait olması için;

- C ile D devirli ve D , C üzerinde sabit noktasız bir etkiye sahip iken;
 $G = D \rtimes C$ şeklinde yazılması,
- C tek dereceli devirli grup, D genelleştirilmiş quaternion grup ve $Z(G) = Z(D)$ iken $G = D \rtimes C$ şeklinde yazılması,
- C devirli $q\mathbb{C}$ -grup, D devirli q -grup (burada q , G derecesini bölen en küçük asal) ve $1 < Z(G) < D$ iken $G = D \rtimes C$ şeklinde yazılması

gerekir.

D_{2n} dihedral grubunun $\mathcal{X}$ sınıfında olabilmesi için n tamsayısının tek veya 2 nin bir kuvveti olması gerekir.

Son olarak $\mathcal{X}$ sınıfındaki değişmeli olmayan sonlu basit grupların, q sayısı 4, 9, bir Fermat asalı ve ya bir Mersenne asalı olmak üzere, $PSL_2(q)$ grupları olduğu görülmüştür.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında her zaman yanımda olan, pes etme aşamasına her gelişimde vazgeçmememi sağlayan, yardımıyla ve desteğiyle çalışmamın tamamlanmasını sağlayan, bilgisine ve koca yüreğine saydı duyduğum danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ela AYDIN'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, tüm çalışmam boyunca sevgisi ve ilgisiyle beni eşim Nüket BİLGİN ve her çalışma masasına oturduğumda “babam çalışıyor” diyerek gerekli ortamı sağlayan çocuklarım Arda ve Berra'ya teşekkür ederim.

Son olarak, lisans hayatımdan başlayarak bugüne kadar bilgileriyle ve sıcaklıklarıyla üzerimde emeği olan Çukurova Üniversitesi Matematik bölümünün bütün değerli hocalarına sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ.....	I
ABSTRACT	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR.....	V
İÇİNDEKİLER.....	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	5
3. X SINIFINDAKİ NİLPOTENT GRUPLAR	19
4. X SINIFINDAKİ NİLPOTENT OLMAYAN GRUPLAR.....	27
KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	51



ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 2.1. Klein-4 Grubu.....	9
Şekil 2.2. Karenin Simetrileri Grubu (D4)	9
Şekil 3.1. İspatta Verilen Grup Örneği	23
Şekil 4.1. İspatta Verilen Grup Örneği	34





1. GİRİŞ

G bir grup ve H , G nin bir alt grubu olmak üzere; eğer $C_G(H)$ merkezleyeni H nin içinde yer alıyorsa, H ye kendinden merkezli (merkezi kendinde) alt grup denir. Şimdi C ile aşikâr olmayan alt gruplarının merkezi kendinde olanların sınıfını gösterelim. Bu durumda sonlu bir grubun C sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul ya asal dereceden devirli olması ya da p ve q asal, $q < p$ ve $p \equiv 1 \pmod{q}$ iken pq dereceli ve değişmeli olmamasıdır. C deki sonsuz gruplar, aşikâr merkeze sahiptir; dahası, bunların asal dereceli her elemanı periyodiktir. Bunu C deki yerel sonlu grupların da sonlu olması takip eder. (Deaconescu, 1989) da asal dereceli tüm elemanlar ile sonlu gruplar sınıflandırılmıştır. Böyle bir grubun elemanlarının dereceleri olan asal sayıların en fazla 3 olduğu görülür. Asal dereceden tüm elemanlara sahip grupların sınıfı kapalı olduğundan, C sınıfındaki rezidülü sonlu grupların sonlu kuvvete sahip olduğu sonucuna varılabilir. Buradan standart bir ispatla C sınıfının yerel dereceli gruplarının da sonlu olduğu görülür. Diğer yandan, Tarski p -grupları C de sonsuz grupların örnekleridir. Grupların boyutu 3 ten küçük olduğunda nilpotent olduğundan, $p = 2, 3$ için C sınıfında hiçbir sonsuz p -grubu yoktur. Burada C sınıfındaki sonsuz grubun sonlu üretilmiş sonsuz bir bölüm içermesi gerektiğine dikkat edilmelidir.

Genellikle birçok kendinden merkezli alt grupları içeren gruplar üzerinde güçlü yapısal kısıtlamalar da vardır. Bu durum, özellikle sonlu p -gruplarda daha çok ortaya çıkar. (Shirong, 2001) G nin her değişmeli A alt grubu için $C_G(A)$ nın A ya da $N_G(A)$ olması ile G nin herhangi bir sonlu değişmeli olmayan p -grubu olması durumunda, G nin derecesinin p^3 olduğunu kanıtlamıştır. Benzer bir sonuç olarak, (Suzuki, 1961) değişmeli olmayan sonlu bir G p -grubu, derecesi p^2

olan değişmeli ve kendinden merkezli A alt grubunu içeriyorsa, G nin maksimal sınıf olduğunu göstermiştir. Yakın zamanda da, (Hao and Jin, 2013), kendinden merkezli, devirli ve normal bir alt grup içeren tüm sonlu olmayan devirli p -grupları sınıflandırmıştır.

(Berkovich, 2008) G bir p -grup olmak üzere, G nin değişmeli olmayan ve $C_G(A) = Z(A)$ olan $A \in G$ alt gruplarının çalışılmasını tavsiye ediyordu.

Bu çalışmada, sonlu olmayan gruplar için yukarıda belirtilen Berkovich in tavsiye ettiği çalışmanın kolaylaştırılması amaçlanmıştır. H , G nin devirli olmayan bir alt grubu olduğunda $C_G(H) \in H$ özelliği ile G grubunun $\mathcal{X}$ -sınıflarına odaklanacağız. Tüm devirli grupların $\mathcal{X}$ sınıfında olduğu açıktır. Aynı zamanda $\mathcal{X}$ sınıfının alt grup alma altında kapalı olduğu ve yukarıda tanımlanan C sınıfının $\mathcal{X}$ sınıfı tarafından içerildiği de açıktır.

Çalışmadaki ana sonuçlar şöyledir: (Delizia, 2014) İlk olarak p asal olduğunda $\mathcal{X}$ e ait tek değişmeli grubun derecesi p^2 olan temel değişmeli p -grup ve Prüfer p -grup olduğu, daha sonra $\mathcal{X}$ in bir nilpotent grubunun ya değişmeli ya da sonlu kuvvetli p -grup olması gerektiği görülmüştür. Bu durumda, bu tür bir grubun sonlu olması gerektiği gösterilmiş ve $\mathcal{X}$ e ait tüm sonlu p -gruplarını sınıflandırılmıştır. Buradan ya p tek olduğunda derecesi p^3 olduğu ya da maksimal sınıfının 2-li grupları olduğu ortaya çıkar.

$\mathcal{X}$ in tüm sonlu değişmeli olmayan basit grupları sınıflandırabilir. (Delizia, 2014) q sayısı 4, 9, bir Fermat veya bir Mersenne asalı olduğunda bu gruplar açıkça $PSL_2(q)$ olarak ortaya çıkar. Bu sonuç basit sonlu grupların sınıflandırmasına bağlı değildir, çünkü bu kanıt sadece Brauer-Suzuki teoreminde olduğu gibi bazı klasik sonuçlar için kullanılır.

Son olarak, $\mathcal{X}$ süper çözülebilir gruplarının yapısı karakterize edilmiştir. Bu grupların ya bir sonsuz dihedral ya da sonlu olmak zorunda olduğu görülmüştür. Sonlu olma durumunda yapısı tamamen açıklanmıştır. Temelde grubun derecesini bölen en büyük asal ile ilişkin Sylow alt grubunun devirli veya devirli olmamasına bağlıdır.





2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1: Bir küme üzerinde bir ya da daha fazla ikili işlem tanımlanmış ise bu işlemlerle beraber o kümeye bir cebirsel yapı denir. G bir küme ve $*, G$ üzerinde bir ikili işlem olsun. Her $a, b, c \in G$ için

$$1) \quad a * b \in G \quad (\text{kapalılık özelliği})$$

$$2) \quad (a * b) * c = a * (b * c) \quad (\text{birleşme özelliği})$$

özellikleri sağlanıyorsa $(G, *)$ cebirsel yapısına bir yarı gruptur denir. Bunlara ek olarak;

3) $a * e = e * a$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa (birim eleman) $(G, *)$ ye bir monoid denir. Bununla beraber;

4) $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ varsa (ters eleman) $(G, *)$ ye bir grup denir. Son olarak;

5) $a * b = b * a$ (değişme özelliği) oluyorsa $(G, *)$ ye bir değişmeli (abelyen) grup denir.

İşlemin ne olduğu açıksa, $(G, *)$ cebirsel yapısı bir gruptur deyimi yerine G bir gruptur denir.

Tanım 2.2: G bir grup ve H de G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H kümesi G de tanımlanan grup işlemi ile bir grup oluyorsa H ye G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ yazılır.

Tanım 2.3: H , bir G grubunun bir alt kümesi olsun. H yi kapsayan, G nin bütün alt gruplarının ara kesitine H nin ürettiği (doğurduğu) alt grup denir ve $\langle H \rangle$ ile gösterilir. H nin elemanlarına da $\langle H \rangle$ grubunun üreteçleri (doğurayları) denir. Bir G grubu için, $G = \langle H \rangle$ olacak şekilde bir $H \leq G$ alt kümesi bulunabiliyorsa, G ye H tarafından üretilmiş grup denir. Eğer H sonlu bir küme ise G ye sonlu üretilmiş grup, $M = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise G ye a tarafından üretilmiş devirli grup denir ve $G = \langle a \rangle$ ile gösterilir.

Tanım 2.4: G bir grup ve H , G nin bir alt grubu olsun. Eğer her $g \in G$ için $H = gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ koşulu sağlanıyor ise H alt grubuna G nin bir normal alt grubu adı verilir ve $H \triangleleft G$ şeklinde yazılır.

Eğer her $g \in G$ için $gHg^{-1} \leq H$ ise bu durumda her $g \in G$ için $g^{-1}H(g^{-1})^{-1} = g^{-1}Hg \leq H$ olacağından $H \leq gHg^{-1}$ buluruz. Böylece, $gHg^{-1} = H$ dır. O halde H alt grubunun bir normal alt grup olduğunu göstermek için her $g \in G$ ve her $h \in H$ için $ghg^{-1} \in H$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Tanım 2.5: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu durumda

$$N_G(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$$

kümesine H nin G içerisindeki normalleyicisi denir.

Tanım 2.6: Bir G grubunun öz normal alt grubu yoksa G ye basit grup denir.

Örnek 2.7: $(\mathbb{Q}, +)$ tamsayılar grubunun, $(\mathbb{R}, +)$ reel sayılar grubunun bir normal alt grubu olduğunu gösterelim. Bunun için, " $x \in \mathbb{R}$ " için

$$x + \mathbb{C} = \mathbb{C} + x$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$x + \mathbb{C} = \{x + z \mid z \in \mathbb{C}\} = \{z + x \mid z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C} + x$$

olduğu ; nin toplama işlemine göre değişmeli bir grup olmasından açıktır.

Tanım 2.8: G bir grup olsun. $Z(G) = \{g \in G \mid x \in G \text{ için } gx = xg\}$

kümesine G nin merkezi denir. $Z(G) < G$ dir.

Tanım 2.9: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. O zaman $C_G(H) = \{g \in G \mid h \in H \text{ için } gh = hg\}$ olarak tanımlanan kümeye H nin G deki merkezleyeni denir. $C_G(H)$ kümesi G nin alt grubudur.

Tanım 2.10: G bir grup ve $a \in G$ olsun. $C_G(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}$ kümesine a nın merkezleyeni denir. Bu küme G nin bir alt grubudur.

Örnek 2.11:

$$D_4 = \langle a, b : a^4 = b^2 = e, ab = ba^3 \rangle = \{e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$$

dihedral grubu için $Z(D_4)$ merkezini inceleyelim. $Z(D_4)$, D_4 ün normal alt grubu olduğundan her $k = 1, 2, 3$ için

$$a(ba^k) = (ba^k)a^3 = ba^{k+3} \text{ ve } (ba^k)a = ba^{k+1}$$

olup $ba^{k+3} = ba^{k+1}$ olduğundan $a(ba^k)^{-1}(ba^k)a$ yani $ba^k \in Z(D_4)$ olur.

Benzer şekilde

$$ab = ba^3 \text{ ve } a^3b = ba$$

olup $a \notin Z(D_4)$ ve $a^3 \notin Z(D_4)$ olur. Bu durumda $Z(D_4) = \{e, a^2\}$ dir.

Tanım 2.12: G bir grup ve H , G nin bir alt grubu olmak üzere, eğer $C_G(H)$ merkezleyeni H tarafından içeriliyorsa, H ye kendinden merkezli (merkezi kendinde) alt grup denir.

Tanım 2.13: Bir G grubunun bütün elemanları sonlu dereceden ise bu gruba bir periyodik grup denir. Bu gruba aynı zamanda torsiyon grup ta denir. Bu durumda her $a \in G$ için $a^n = e$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer G nin birim eleman dışında hiçbir elemanı sonlu dereceden değilse G ye bir serbest grup veya torsiyonu olmayan (torsion-free) adı verilir.

Tanım 2.14: G değişmeli bir grup olsun. G nin sonlu dereceli bütün elemanlarının oluşturduğu küme G nin bir alt grubudur. Bu gruba G nin torsiyon grubu adı verilir.

Örnek 2.15: Sonlu her grup bir torsiyon grubudur. Çünkü her elemanı sonlu derecedendir.

Örnek 2.16: $(\mathbb{Z}, +)$ tamsayılar grubu bir torsiyon olmayan gruptur. Çünkü $e = 0$ haricinde hiçbir elemanı sonlu dereceden değildir.

Örnek 2.17: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ bir torsiyon grubu değildir. Çünkü $(0,1)$ elemanı 2. derecedendir ama $(1,0)$ elemanı sonlu dereceli değildir. Diğer taraftan, $T = \{(0,0), (0,1)\}$ kümesi $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ nin bir torsiyon alt grubunu oluşturur.

Tanım 2.18: p bir asal sayı olsun. G grubunun tüm elemanlarının derecesi p nin bir kuvveti ise G ye p -grup denir.

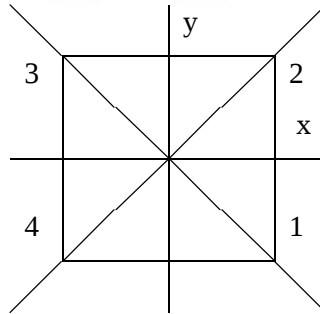
Örnek 2.19: Klein-4 grubunu inceleyelim.

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Şekil 2.1. Klein-4 Grubu

Burada $a^2 = e$, $b^2 = e$, $c^2 = e$ olup bütün elemanların derecesi 2 olduğundan Klein-4 grubu bir 2-gruptur.

Örnek 2.20: Karenin simetrileri grubunu (D_4) inceleyelim.



Şekil 2.2 Karenin Simetrileri Grubu (D_4)

0° , 180° , 270° , 360° derece döndürmeleri r ile gösterirsek

$$r = (1234), r^2 = (13)(24), r^3 = (1432), r^4 = I$$

olur. x ve y eksenine göre simetrisi

$$s_x = (12)(34) \text{ ve } s_y = (14)(23) \text{ olup } s_x^2 = I \text{ ve } s_y^2 = I$$

Köşegenlere göre simetrisi

$$d_I = (13) \text{ ve } d_{II} = (24) \text{ olup } d_I^2 = I \text{ ve } d_{II}^2 = I$$

olur. Bu durumda karenin simetrisi grubunun her elemanının derecesi 2 nin bir kuvveti olduğundan Karenin simetrisi grubu bir 2-gruptur.

Dikkat edilirse, derecesi p^n olan her grubun elemanlarının derecesi grubun derecesini böleceğinden bir p -gruptur. G nin bir H alt grubu p -grup ise H ye G nin bir p -alt grubu denir.

Tanım 2.21: G ve G' iki grup olsun. G den G' ye bire-bir, örten ve " $x, y \in G$ için

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

koşulunu sağlayan $f : G \rightarrow G'$ dönüşümüne bir grup izomorfizması adı verilir.

Tanım 2.22: Bir G grubundan kendi üzerine olan bir izomorfizmaya G nin bir otomorfizması denir. G nin bütün otomorfizmalarının kümesi bileşke işlemi ile bir grup olur. Bu gruba G nin otomorfizmalar grubu denir ve $\text{Aut}G$ ile gösterilir.

$$\text{Aut}G = \{ f : G \rightarrow G \mid f, 1\text{-1, örten homomorfizma} \}$$

Tanım 2.23: $G_1, G_2, \dots, G_n$ grupları verilmiş olsun. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için i -inci bileşeni G_i olan sıralı n -lilerden oluşan

$$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = \{(g_1, g_2, \dots, g_n) \mid g_i \in G_i, 1 \leq i \leq n\}$$

kümesine $G_1, G_2, \dots, G_n$ gruplarının dış direkt çarpımı (veya dış direkt toplamı) denir.

Örnek 2.24: $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$ grubu, derecesi 6 olan bir değişmeli gruptur. Bu grup içinde $(1,1)$ in ürettiği devirli alt grup,

$$\langle (1,1) \rangle = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$$

olup bu $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_3$ ün tamamıdır. Bu durumda $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_3$ bir devirli grup olup $\mathbb{C}_6$ ya izomorftur.

Örnek 2.25: $\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3$ grubu 9. dereceden devirli olmayan bir gruptur. Çünkü $\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3$ grubunun bir üretici yoktur. Bu yüzden $\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3$ grubu $\mathbb{C}_9$ grubuna izomorf değildir. Benzer şekilde $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$ grubu 4. dereceden devirli olmayan bir gruptur. Derecesi 4 olan $\mathbb{C}_4$ ve Klein-4 grubunu düşünürsek; bu gruplardan $\mathbb{C}_4$ devirli fakat Klein-4 grubu devirli değildir. Bu durumda $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$ grubu devirli olmadığından Klein-4 grubuna izomorftur.

Tanım 2.26: G bir grup ve $H_1, H_2, \dots, H_n$, G nin alt grupları olsun. Aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa G grubu $H_1, H_2, \dots, H_n$ alt gruplarının iç direkt çarpımıdır denir ve $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ olarak gösterilir.

- i) $G = H_1 H_2 \dots H_n$
- ii) Her $i \neq j$ iken $H_i \cap H_j = \{e\}$ ve $H_i H_j = H_j H_i$ için $H_i H_j = H_j H_i$
- iii) Her $i = 1, 2, \dots, n-1$ için $(H_1 H_2 \dots H_{i-1}) \cap H_i = \{e\}$

Tanım 2.27: G bir grup, H ve K da G nin aşağıdaki koşulları sağlayan alt grupları olsun;

- H, K de normal,
- $H \cap K = \{e\}$,
- $HK = G$.

Bu durumda G ye, H ile K nin yarı direkt çarpım denir ve $G = H \rtimes K$ yazılır.

Örnek 2.28: $\mathbb{C}_{36}^* = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\}$ (36 dan küçük 36 ile aralarında asal olan sayılar) grubu içinde $H_1 = \{1, 13, 25\}$, $H_2 = \{1, 17\}$ ve $H_3 = \{1, 19\}$ alt gruplarını düşünelim.

$$H_1 H_2 = \{1, 5, 13, 17, 25, 29\}, H_2 H_3 = \{1, 17, 19, 35\},$$

$$H_1 H_2 H_3 = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\}$$

olur. Burada $H_1 \wr H_2 = H_1 H_2 \wr H_3 = \{1\}$ ve $H_1 H_2 H_3 = Z_{36}^*$ olur. Her $i \neq j$ iken $h_i \in H_i$ ve $h_j \in H_j$ için $h_i h_j = h_j h_i$ dir. Bu durumda $\Phi_{36}^* = H_1' H_2' H_3$ tür.

Örnek 2.29: S_3 grubu içinde $H_1 = \{1, (12)\}$, $H_2 = \{1, (13)\}$ ve $H_3 = \{1, (23)\}$ alt grupları alınırsa

$$\begin{aligned} H_1 H_2 &= \{1, (12), (13), (132)\}, \quad H_2 H_3 = \{1, (13), (23), (132)\} \\ H_1 H_2 H_3 &= \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\} \end{aligned}$$

olur. Burada $H_1 \wr H_2 = H_1 H_2 \wr H_3 = \{1\}$ ve $H_1 H_2 H_3 = S_3$ olur. Fakat $(12)(23) = (123)$ ve $(23)(12) = (132)$ olduğundan ikinci koşul sağlanmaz. Bu durumda $S_3 \neq H_1' H_2' H_3$ tür.

Teorem 2.30: G grubu $H_1, H_2, \dots, H_n$ alt gruplarının bir iç direkt çarpımı ise bu takdirde her $g \in G$ elemanını $h_i \in H_i$ olmak üzere, $g = h_1 h_2 \dots h_n$ şeklinde tek türlü yazabiliriz.

İspat: $(h_1, h_2, \dots, h_n) \in H_1 H_2 \dots H_n$ alalım. $h_i \in H_i$ olmak üzere

$$g = h_1 h_2 \dots h_n = (h_1, e_2, \dots, e_n)(e_1, h_2, \dots, e_n) \dots (e_1, e_2, \dots, h_n)$$

yazabiliriz ve $\overline{H_i} = \{(e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots, e_n) \mid a_i \in H_i\}$ olmak üzere iz düşüm dönüşümü $\rho : \overline{H_i} \rightarrow H_i$, $\rho(e_1, e_2, \dots, a_i, \dots, e_n) = a_i$ ile $\overline{H_i}$ ve H_i grupları izomorf olduklarından $g = h_1 h_2 \dots h_n$ elde ederiz.

Tanım 2.31: G bir grup ve H , G nin bir alt grubu olsun. $a \in G$ olmak üzere $aH = \{ah \mid h \in H\}$ kümesine H nin G deki bir sol kalan sınıfı (sol koseti) adı verilir. N , G nin bir normal alt grubu olsun. G deki işlemle tanımlanan N kalan sınıflarının grubuna G nin N normal alt grubuna göre bölüm grubu adı verilir ve G/N şeklinde gösterilir

Tanım 2.32: Bir G grubunun her sonlu alt kümesi sonlu bir alt grup oluştuyorsa G ye yerel sonlu (locally finite) grup denir.

Örnek 2.33: a) Her sonlu grup, yerel sonlu gruptur.
b) p bir asal sayı olmak üzere

$$0 \in \mathbb{C} / p\mathbb{C} \in \mathbb{C} / p^2\mathbb{C} \in \dots \in \mathbb{C} / p^n\mathbb{C} \in$$

şeklindeki p -quasicyclic grubu, yerel sonlu gruptur.

c) $\mathbb{Q} / \mathbb{C}$ grubu, bir yerel sonlu grup örneğidir.

Tanım 2.34: G bir grup olmak üzere, $g^{-1} e_G$ olacak şekilde her $g \in G$ için; $f(g)^{-1} e_F$ olacak şekilde bir F sonlu grubu ve bir $f : G \rightarrow F$ homomorfizmi varsa G ye rezidüel sonlu (residually finite) grup denir.

Örnek 2.35: a) Her sonlu grup, rezidüel sonlu gruptur.

- b) $\mathbb{C}$ toplamsal grubu rezidülü sonlu gruptur. Çünkü bu grup üzerindeki birim dönüşümü alırsak, $g^{-1}1$ olacak şekildeki $g \in G$ için $f(g) = g^{-1}1$ olur.
- c) $GL_n(\mathbb{C})$ grubu, her $n \geq 1$ için, rezidülü sonlu gruptur.

Önerme 2.36: G bir grup olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir

- a) G rezidülü sonlu gruptur.
- b) $g^{-1}h$ olmak üzere $g, h \in G$ için, $f(g)^{-1}f(h)$ olacak şekilde bir F sonlu grubu ve bir $f : G \rightarrow F$ homomorfizmi vardır.

Tanım 2.37: Eğer bir grup alt kümelerinden herhangi biriyle izomorf değilse bu gruba Hopfian denir. Bir G grubunun Hopfian olması için gerek ve yeter koşul her örten endomorfizminin $G \rightarrow G$ ye bir otomorfizm olmasıdır.

Eğer bir grup, öz alt gruplarından herhangi biri ile izomorf değilse bu gruba co-Hopfian denir. Bir G grubunun co-Hopfian olması için gerek ve yeter koşul her bire-bir endomorfizminin $G \rightarrow G$ ye bir otomorfizm olmasıdır.

Örnek 2.38: a) Her sonlu grup hem Hopfian hem de co-Hopfian'dır.

- b) $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar grubu hem Hopfian hem de co-Hopfian olan sonsuz bir grubun bir örneğidir.
- c) $\mathbb{C}$ tamsayılar grubu Hopfian'dır, fakat co-Hopfian değildir. Daha genel olarak, sonlu olarak üretilen her değişmeli grup, Hopfian'dır, ancak sonlu olmadığı sürece co-Hopfian değildir.
- d) (Örnek 2.26.b) de olduğu gibi, p bir asal sayı olmak üzere

$$0 \in \mathbb{C} / p\mathbb{C} \in \mathbb{C} / p^2\mathbb{C} \in \dots \in \mathbb{C} / p^n\mathbb{C} \in$$

şeklinde tanımlanan p -quasicyclic grubu co-Hopfian' dır, ancak Hopfian değildir.

Tanım 2.39: Bir G Tarski grubu aşikâr olmayan tüm öz alt grupları asal dereceli olacak şekilde sonsuz bir gruptur. Tarski gruplarına Tarski canavarları da denir. Tarski grupları, tüm p asalları için mevcut değildir. Örneğin, $p = 2$ için Tarski grubu yoktur.

Tanım 2.40: $Q_8 = \langle a, b : a^2 = b^2, a^4 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ grubuna quaternion grubu denir.

$Q_{4n} = \langle a, b : a^n = b^2, a^{2n} = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ grubuna genelleştirilmiş quaternion grup denir. $n = 1$ iken $Q_4 = \langle a, b : a = b^2, a^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ olup $Q_4 \cong \mathbb{C}_4$ olduğu görülür. Sonuç olarak;

1. $|Q_{4n}| = 4n$
2. Q_{4n} in değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $n=1$ olmasıdır.
3. Q_{4n} in her elemanı $0 \leq i < 2n, j = 0,1$ olmak üzere $a^i b^j$ şeklinde tek türlü yazılır.

$$4. \quad Z(Q_{4n}) = \langle a^n \rangle \cong \mathbb{C}_2$$

$$5. \quad Q_{4n} / Z(Q_{4n}) = D_{2n}$$

Bu durumda $Q_{2^n} = \langle a, b : a^{2^{n-2}} = b^2, a^{2^{n-1}} = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ olur.

Tanım 2.41: $D_4 = \langle a, b : a^4 = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ grubuna dihedral (karenin simetrileri) grubu denir. Genel olarak

$$D_n = \langle a, b : a^n = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

şeklinde verilen gruba n -inci dihedral grup denir. Bu grup aynı zaman da n -genin simetrileri olarak ta bilinir ve $D_n = \langle a^i, b^j : 0 \leq i < n, j = 0, 1 \rangle$ şeklinde de tanımlanır. Bu durumda $D_{2^n} = \langle a, b : a^{2^n} = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ olur.

Tanım 2.42: $SD_{4n} = \langle a, b : a^{2n} = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{n-1} \rangle$ şeklinde tanımlanan gruba yarı dihedral grup denir. Bu grup QD_{4n} (semi-dihedral, quasi-dihedral) olarak ta gösterilir. Bu durumda

$$SD_{2^n} = \langle a, b : a^{2^{n-1}} = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{2^{n-2}-1} \rangle$$

olur.

Tanım 2.43: p bir asal sayı ve $c > 1$ olduğunda nilpotentlik derecesi c olan ve $p^{(c+1)}$ derecesine sahip bir gruba maksimal sınıf grubu denir. Örneğin $p = 2$ ve $c = 2$ için $p^{(c+1)} = 8$ derecesine sahip iki maksimal grup vardır. Bunlar D_8 dihedral grubu ve Q quaternion grubudur.

Tanım 2.44: G torsiyonu bir değişmeli grubu olsun. Her p asalı için

$$G[p^i] = \{g \in G \mid g^{p^i} = 1\}$$

tanımını yapalım. O zaman $G \cong p^{\infty} \leq G$ ve $G \cong \bigoplus_{p \text{ asal}} G \cong p^{\infty}$ olur. $\mathfrak{a} / \mathfrak{C}$ bir torsion gruptur. $G = \mathfrak{a} / \mathfrak{C}$ ve p bir asal olsun. O zaman yukarıda tanımlanan $G \cong p^{\infty}$ alt grubu,

$$\{\bar{a} \mid a = a / p^n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathfrak{C}\}$$

grubuna, yani

$$\{\bar{a} \mid a = a / p^n, n \in \mathbb{N}, a = 0, 1, 2, \dots, p^n - 1\}$$

grubuna eşittir. Burada söz ettiğimiz $G \cong p^{\infty}$ gruplarına Prüfer p -grubu adı verilir ve bu alt gruplar $\mathfrak{C}_{p^{\infty}}$ olarak gösterilir.

Tanım 2.45: G bir grup ve $N < G$, G nin normal alt grubu olsun. Eğer $Q = G / N$ iken $1 \oplus N \oplus G \oplus Q \oplus 1$ kısa tam dizisi varsa G ye Q ile N nin bir genişlemesi (split) denir. Bu kısa tam dizi G , N deki koşullara uygun ve Q ya izomorf olan bir alt gruba sahip olursa, G ye Q ile N nin bir ayrık genişlemesi (split extension) denir.

3. $\mathcal{X}$ SINIFINDAKİ NİLPOTENT GRUPLAR

Bu kısımda yapılan çalışmalar (Delizia, 2014) ten alınmıştır. Öncelikle çalışma boyunca defalarca kullanılacak aşağıdaki genel ifadeden bahsedelim.

Lemma 3.1: F sonlu grupların bir ailesi olsun. F alt grup alma altında kapalı olsun. O zaman $F \in \mathcal{X}$ olması için gerek ve yeter koşul F de ki her G grubu için, F nin herhangi bir devirli olmayan alt grubunun $Z(G)$ yi içermesidir.

İspat: F_n , F de ki n -inci dereceden grupların ailesi olsun. $F \in \mathcal{X}$ olduğunu n üzerinden tümevarım ile gösterelim. G , F de n -inci dereceden bir grup ve H de G nin devirli olmayan bir alt grubu olsun. $z \in C_G(H)$ alalım. Eğer $\langle H, z \rangle = G$ ise $z \in Z(G)$ ve hipotezden $z \in H$ olur. Şimdi $\langle H, z \rangle$ nin, G nin öz alt grubu olduğunu varsayalım. Tümevarımdan hipotezinden $\langle H, z \rangle \in \mathcal{X}$ sınıfına ait olup, böylece $z \in H$ olur. Buradan $G \in \mathcal{X}$ elde edilir.

Bunun tersi de benzer şekilde gösterilir.

Bundan sonraki hedefimiz $\mathcal{X}$ sınıfındaki değişmeli grupların karakterize edilmesini incelemektir.

Teorem 3.2: G bir değişmeli bir grup olsun. O zaman G nin $\mathcal{X}$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

- G devirlidir.
- $G \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ şeklinde Prüfer p -gruba izomorftur.

· $G @_{C_p} C_p$ gibi p asal derecesinde grupların iki kopyasının direkt çarpımına izomorftur.

İspat: G , $\mathcal{X}$ sınıfında bir değişmeli grup olsun. O zaman G nin tüm öz alt grupları devirlidir. Eğer G sonlu ise ve devirli değilse buradan $G @_{C_p} C_p$ sağlanır. O zaman G nin sonsuz olduğunu varsayalım. Buradan açıkça G periyodik veya torsiyonu olmayandır. İlk durumda G nin tüm alt grupları sonlu olup, buradan $G @_{\mathbb{C}_{p^*}}$ olur. İkinci durumda G tüm rasyonel sayıların $\mathbb{Q}$ toplamsal grubunun bir alt grubu olup devirli olması gerekir. Bunun tersi de benzer şekilde gösterilir.

Eğer G , $\mathcal{X}$ sınıfının herhangi bir değişmeli olmayan grubu ise o zaman G nin $Z(G)$ merkezi devirli olmak zorundadır.

Tanım 3.3: G bir grup olmak üzere G nin alt gruplarının bir serisi

$$G = G_1 \hat{=} G_2 \hat{=} \dots \hat{=} G_n \hat{=} G_{n+1} = \{1\}$$

şeklinde olsun. Bu durumda $1 \leq i \leq n$ için

- G_{i+1} , G_i nin bir normal alt grubu ise bu seriye alt normal seri denir.
- Her G_i alt grubu G nin normal alt grubu ise bu seriye bir normal seri denir.
- G_i / G_{i+1} bölüm grubu değişmeli ise G grubuna çözülebilirdir denir.
- G_i / G_{i+1} bölüm grubu devirli ise G grubuna süper çözülebilirdir denir.

- G_i / G_{i+1} bölüm grubu G / G_{i+1} bölüm grubunun merkezinde ise G grubuna nilpotenttir denir.

Örnek 3.4: $\mathfrak{C}_8 \hat{=} \mathfrak{C}_4 \hat{=} \mathfrak{C}_2 \hat{=} e = \{1\}$ olup $\mathfrak{C}_4 / \mathfrak{C}_2 = \{\mathfrak{C}_2, 2 + \mathfrak{C}_2\}$ bölüm grubu $\mathfrak{C}_8 / \mathfrak{C}_2 = \{\mathfrak{C}_2, 2 + \mathfrak{C}_2, 4 + \mathfrak{C}_2, 6 + \mathfrak{C}_2\}$ bölüm grubunun merkezinde olup $\mathfrak{C}_8$ nilpotent bir gruptur.

Teorem 3.5: G , $\mathcal{X}$ sınıfında bir nilpotent grup olsun. O zaman G grubu ya değişmelidir ya da sonlu dereceden bir p -gruptur.

İspat: G , $\mathcal{X}$ sınıfında bir nilpotent grup olsun ve G nin değişmeli olmadığını varsayalım. O zaman G ya periyodiktir ya da torsiyonu olmayandır. Eğer $Z(G)$ sonlu ise G , sonlu kuvvetten dereceye sahiptir. Eğer $Z(G)$ sonsuz devirli bir grup ise G torsiyonu olmayandır.

G periyodik olsun. O zaman G yi G_p lerin bir direkt çarpımı olarak $G = \prod_{p \in \mathfrak{P}} G_p$ şeklinde ifade edebiliriz. G değişmeli olmadığından en az bir q asal sayısı için G_q bileşenini ele alalım. O zaman, $\prod_{p \in \mathfrak{P}} G_p \not\leq C_G(G_p) \not\leq G_q$ olur. Böylece G_q , G nin aşikâr olmayan tek bileşeni olacaktır.

Şimdi de G yi torsiyonu olmayan kabul edelim. Eğer H , G nin sonlu üretilmiş alt grubu ise o zaman H , her biri sonsuz devirli çarpanlardan oluşan

$$\{e\} = H_0 < H_1 < H_2 < \dots < H_n = H$$

gibi bir merkezi seriye sahiptir. $n > 1$ olduğunu varsayalım. O zaman H_2 , $\mathcal{X}$ -sınıfında sonlu üretilmiş torsiyonu olmayan nilpotent bir grup olur. Ayrıca $H_1 \in Z(H_2)$ olduğundan ve H_2/H_1 de devirli olduğundan H_2 değişmeli olur. Yani H_2 , devirli bir grup olacaktır ve böylece $H_2 = H_1$ çelişkisini elde ederiz. O halde, G yerel devirli olup değişmeli olarak elde edilir.

Aşağıdaki teorem $\mathcal{X}$ -sınıfına ait tüm sonlu ve değişmeli olmayan p -grupların bir sınıflandırmasını verir.

Teorem 3.6: G , sonlu ve değişmeli olmayan bir p -grup olsun. G nin $\mathcal{X}$ -sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul ya p tek bir sayı ve G nin derecesi p^3 olmalı ya da $p = 2$ ve G aşağıdaki gruplardan birine izomorf olmalıdır:

- D_{2^n} , derecesi 2^n olan dihedral grup,
- SD_{2^n} , derecesi 2^n olan yarı dihedral grup,
- Q_{2^n} , derecesi 2^n olan genelleştirilmiş quaternion grup.

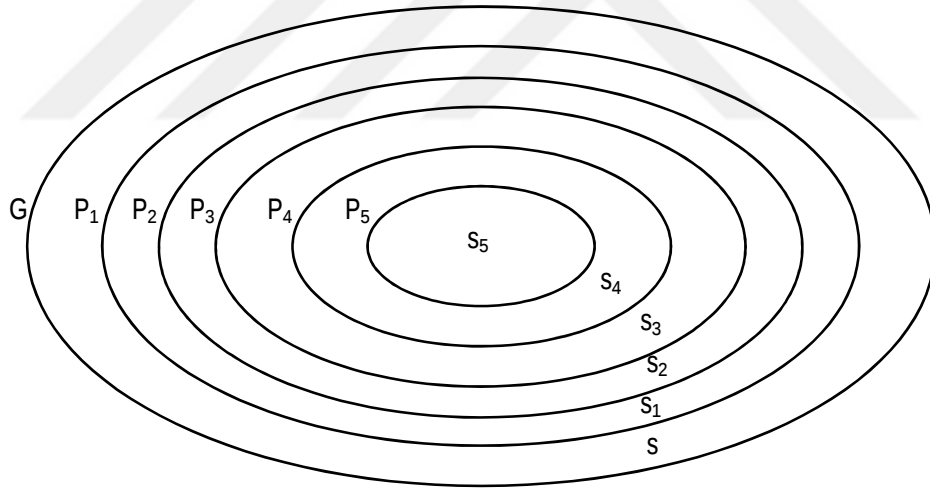
İspat: $\triangleright$: G , $\mathcal{X}$ -te sonlu ve değişmeli olmayan bir p -grup olsun. Öncelikle, G nin her değişmeli alt grubunun devirli olduğunu varsayalım. O zaman G grubu genelleştirilmiş Q_{2^n} quaternion grubuna izomorf olmalıdır. (Cartan ve Eilenberg, 1999)

Şimdi G nin devirli olmayan bir alt grubu içerdiğini varsayalım. Teorem 3.2 nin üçüncü koşulundan dolayı derecesi p^2 olmalıdır. $(G @_{C_p} C_p @_{C_{p^2}})$

Bu durumda G grubu ya p^3 dereceden bir gruptur ya da maksimal nilpotentlik sınıfındadır. (Blackburn, 1975)

$p = 2$ olduğunda, her iki durumda da G grubu dihedral, yarı dihedral veya genelleştirilmiş quaternion grubuna izomorf olur. (Leedham-Gren ve McKay, 2002)

Şimdi p tek olsun ve $n > 3$ iken $|G| = p^n$ olduğunu varsayalım. G grubu, $G = P_0 > P_1 > P_2 > \dots > P_{n-1} > P_n = 1$ şeklinde alt gruplarının bir temel dizisine sahiptir. $s \in G \setminus P_1$ ve $s_1 \in P_1 \setminus P_2$ seçelim ve $i \geq 2$ için $s_i = [s_{i-1}, s]$ olarak tanımlayalım. $P_{n-2} = \langle s_{n-2}, s_{n-1} \rangle$ alt grubunu ele alalım.



Şekil 3.1. İspatta Verilen Grup Örneği

$P_4 = \langle s_4, s_5 \rangle$ olup $s_4 = [s_3, s]$ ve $s_5 = [s_4, s]$ dir. Eğer $n = 4$ ise P_1 değişmelidir ve P_{n-2} nin merkezindedir. Bu ise kabulümüzle bir çelişir. (Yani G , ~~X~~ sınıfında olmaz. $P_1 \not\leq Z(P_{n-2})$ olmaz)

$n > 4$ olsun ve s_2 elemanını göz önünde bulunduralım. Benzer şekilde $[P_2, P_{n-2}] = 1$ olup, s_2 elemanı P_{n-2} nin merkezinde olur. P_{n-2} alt grubunun derecesi p ye eşit olduğundan devirli değildir. Bu durum G nin $\mathcal{X}$ e ait olması ile çelişir.

Şimdi de yukarıdaki sözü geçen grupların $\mathcal{X}$ sınıfında olduğunu gösterelim. F_3 ile her p asalı için p^3 dereceli gruplar ile onların alt gruplarından oluşan aileyi gösterelim.

G , F_3 te herhangi bir grup ve H de G nin devirli olmayan bir alt grubu olsun. Dolayısıyla G , derecesi p^3 ve H , derecesi p^2 olan bir değişmeli gruptur. O zaman G nin $HZ(G)$ alt grubu değişmelidir. Böylece $Z(G) \not\subseteq H$ olduğu elde edilir. Lemma 3.1'den de F_3 ailesi $\mathcal{X}$ sınıfındadır.

Şimdi F_2 ile teoremden bahsedilen 2-gruplar ile onların alt gruplarından oluşan aileyi gösterelim.

Dihedral, yarı dihedral ve genelleştirilmiş quaternion gruplarının her biri tam olarak üç maksimal alt gruba sahiptir öyle ki bu alt gruplar ya devirli ya da maksimal sınıftan 2-gruplarından birisidir. Örneğin;

$$Q_8 = \langle a, b \mid a^2 = b^2, a^4 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle = \{e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$$

olup alt grupları $\{e\}$, $\{e, a, a^2, a^3\}$ ve Q_8 dir.

G , F_2 de herhangi bir grup ve H de onun devirli olmayan alt grubu olsun. G nin x ve y gibi iki eleman tarafından üretildiğini ve $Z(G)$ merkezinin de bunlardan maksimal kuvvete sahip y tarafından üretilen alt grup olduğunu varsayalım.

y nin hiçbir kuvveti H tarafından içermemeli ve bazı i ler için $H \nmid \{1, x, xy^i\}$ olup bu durum H nin devirli olmaması ile çelişir. Böylece H alt grubu y nin aşikar olmayan kuvvetini ve bu nedenle $Z(G)$ merkezini içerir. Lemma 3.1 den $F_2 \nmid \mathcal{X}$ olur.

Teorem 3.7: $\mathcal{X}$ sınıfındaki her değişmeli olmayan nilpotent p -grup sonludur.

İspat: G , $\mathcal{X}$ sınıfında değişmeli olmayan nilpotent p -grup olsun. G değişmeli olmadığından, G nin değişmeli olmayan sonlu üretilmiş bir H alt grubu vardır. H sonlu üretilmiş nilpotent ve periyodik olduğundan sonludur.

Öncelikle, p nin bir tek asal sayı olduğunu varsayalım. Teorem 3.6 dan H nin derecesi p^3 tür. Her $x \in G$ için, $\langle H, x \rangle$ alt grubu sonludur ve bu alt grubun derecesi de p^3 tür. Sonuç olarak, G sonlu bir grup olur.

Şimdi $p = 2$ olduğunu varsayalım ve tersine, G nin sonsuz olduğunu kabul edelim. Teorem 3.6 dan $n_1 > 2$ pozitif tamsayısı vardır öyle ki H nin derecesi 2^{n_1} dir ve H , $n_1 - 1$ nilpotentir. $H \neq G$ olduğundan bir $x_1 \in G$ vardır öyle ki $x_1 \notin H$ dir. O zaman $n_2 > n_1$ pozitif tamsayısı için $\langle H, x_1 \rangle$ alt grubunun derecesi 2^{n_2}

dir ve bu alt grup, $n_2 - 1$ nilpotent olacaktır. Bu işlemleri tekrarlayarak G nin artan nilpotentlik derecelerine sahip alt gruplarının bir zincirini oluşturabiliriz. Bu ise G nin sonsuz olması ile çelişir. Yani G sonludur.



4. ~~X~~ SINIFINDAKİ NİLPOTENT OLMAYAN GRUPLAR

Bu kısımda yapılan çalışmalar (Delizia, 2014) ten alınmıştır.

Tanım 4.1: G bir grup olsun. G nin bütün normal nilpotent alt grupları tarafından üretilen gruba G nin Fitting alt grubu denir ve $F(G)$ ile gösterilir.

G nin sonlu olması durumunda, G nin $F(G)$ Fitting alt gruplarının en büyüğünün G nin kendisi olacağı aşikârdır.

Tanım 4.2: G bir grup ve $g \in G$ için $a(g) = g$ (ve ya $g^a = g$) ise G grubunun a otomorfizmasına sabit bir noktaya sahiptir denir. e_G , a nın tek sabit noktası ise a ya G üzerinde sabit noktasız (Fixed-Point-Free) denir. $H \in \text{Aut}G$ iken H nin aşikar olmayan her elemanı sabit noktasız ise, H alt grubuna sabit noktasızdır denir.

Örnek 4.3: $(\mathbb{C}, +)$ toplamsal grubunu düşünelim ve $i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $i(x) = -x$ dönüşümü ile tanımlansın. Açıkça

$$i(x+y) = -(x+y) = -y - x = -x - y = i(x) + i(y)$$

ve $i(x) = 0$ olması için $x = 0$ olmalıdır. Böylece i bir otomorfizmdir. x , $i(x) = x$ olacak şekilde $\mathbb{C}$ nin bir elemanı olsun. O zaman

$$i(x) = x \text{ olup } -x = x \text{ ve } x = 0$$

olur. Böylece i sabit noktasıdır.

Teorem 4.4: (Robinson, 1982) α , G sonlu grubunun sabit noktasız otomorfizmi olsun ve α nın derecesi n olsun.

- i) Eğer i ile n aralarında asal ise o zaman α^i de sabit noktasıdır.
- ii) $x^{-1+\alpha} = x^{-1}\alpha^x$ şeklindeki $-1+\alpha$ dönüşümü G nin bir permütasyonudur.
- iii) x ve α^x nın eş (denk) olması için gerek ve yeter koşul $x = e$ olmasıdır.
- iv) G deki tüm x ler için $x^{1+\alpha+\dots+\alpha^{n-1}} = e$

Teorem 4.5: Eğer α , G sonlu grubunun sabit noktasız otomorfizmi ise her p asalı için $P^\alpha = P$ olacak şekilde bir Sylow P p -alt gurubu vardır.

İspat: P_0 herhangi bir Sylow p -alt gurubu olsun. O zaman G de bazı g ler için $P_0^\alpha = P_0^g$ olur. Teorem 4.4 (ii) maddesinden, uygun bir h için $g = h^{-1+\alpha}$ yazabiliriz. Şimdi $P = P_0^{h^{-1}}$ alalım. O zaman

$$P^\alpha = (P_0^{h^{-1}})^\alpha = (P_0^\alpha)^{h^{-\alpha}} = (P_0^g)^{g^{-1}h^{-1}} = P_0^{h^{-1}} = P$$

Teorem 4.6: (Robinson, 1982) H, A sonlu değişmeli grubunun otomorfizmlerinin grubu olsun. H nin M deki her b elemanı için p -inci dereceden sabit noktasız Sb şeklinde $\langle S \rangle \ltimes M$ yarı direkt çarpımı olduğunu varsayalım. $|A|$ ve $|M|$ nin de aralarında asal olsun. O zaman $M = 1$ dir.

Teorem 4.7 (Thompson): G sonlu ve p dereceden bir grup olsun. Eğer G , p dereceden sabit noktasız α otomorfizmine sahip ise G nilpotentir.

İspat: Teoremin iddiasının doğru olmadığını kabul edelim. G minimum dereceden aksi bir örnek olsun. Teorem 4.4 (ii) maddesinden $-1+\alpha$, $G/Z(G)$ de örtendir, böylece G üzerindeki hipotezler $G/Z(G)$ tarafından miras alınır. Bu nedenle $Z(G)=e$ olur. İspat planı, ilk olarak G nin çözülebilir olduğu durumla ilgilenmektir, o zaman genel durumu tekrar etmek için Thompson'un kriterini kullanalım.

G çözülebilirdir. $1 \neq A < G$ ve $A, A^\alpha = A$ sağlayan minimum grup olsun. $(A^\alpha)^\alpha = A^\alpha$ olduğundan A nin değişmeli olduğunu ve $(A^q)^\alpha = A^q$ olduğundan bazı q asalları için elementer q -grup olduğunu görürüz. G nilpotent olmadığı için q -grup olamaz, böylece $|G|$ yi bölen q dan farklı bir asal vardır. Teorem 4.5 den, G , α -kabul edilebilir R Sylow r -alt grubuna sahiptir. $r \neq p$ olduğuna dikkat edelim, aksi takdirde $\langle S \rangle \rtimes R$ nilpotent olacağından α , R de sabit bir noktaya sahip olurdu.

$AR \neq G$ ise $(AR)^\alpha = AR$ olacağından, minimum $|G|$, AR nin nilpotent olmaya zorlar ve böylece $R \in G_G(A)$ dır, çünkü $|A|$ ile $|R|$ aralarında asaldır. Bu tüm $r \neq q$ için doğru olmalı, böylece $\bar{G} = G/C_G(A)$ grubu için $\bar{G} \rtimes A$ q -grubu olur ve böylece nilpotent olur, bu da $A \not\subset Z(G)^{1 \neq}$ çelişkisine yol açar. Sonuç olarak bazı $r \neq q$ için $G = AR$ olur.

S, a nın A ya bir kısıtlaması olsun ve M, R nin elemanları tarafından denklilere dayanan A nın otomorfizmler grubu olsun. O zaman

$$H = \langle s, M \rangle = \langle s \rangle \rtimes M \in \text{Aut} A$$

Teorem 4.8: (Robinson, 1982) H, G sonlu grubunun otomorfizmlerinin bir sabit noktasız grubu olsun. O zaman p ve q asal olduğunda derecesi pq olan H nin her alt grubu devirlidir. p tek ise H nin Sylow p -alt grubu devirlidir ve $p = 2$ ise devirli ya da genelleştirilmiş quaterniondur.

Tanım 4.9: X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere, 1-1 ve örten $\rho : X \rightarrow X$ fonksiyonuna X in bir permütasyonu denir. X in tüm permütasyonlarının kümesi, X üzerinde fonksiyon bileşkesi işlemi ile bir gruptur. Bu gruba X üzerinde simetrik grup denir ve $\text{Sym } X$ ile gösterilir.

Tanım 4.10: G bir grup, X de bir küme olsun. $\alpha : G \times X \rightarrow X$ fonksiyonu ele alalım. $\alpha(g, x) = g.x$ olsun. Bu “çarpma” işlemi şu özellikleri sağlasın:

1. Her $x \in X$ için $1.x = x$
2. Her $g, h \in G$ ve $x \in X$ için $g.(h.x) = (gh).x$

Bir başka deyişle, çarpma işlemi grubun işlemiyle uyumlu olsun. Bu durumda (G, X, α) üçlüsüne grup etkisi denir.

4. X SINIFINDAKİ NİLPOTENT OLMAYAN GRUPLAR Mustafa BİLGİN

Bir (G, X, a) grup etkisinde $gx = gy$ ise, o zaman her iki tarafı da g^{-1} ile çarparsak

$$x = 1.x = (g^{-1}g).x = g^{-1}(gx) = g^{-1}(gy) = (g^{-1}g)y = 1y = y$$

Dolayısıyla X in elemanlarını soldan sabit bir $g \in G$ elemanı ile çarpmak $X \otimes X$ birebir bir fonksiyondur. Bu fonksiyon ayrıca örtendir, çünkü her $y \in X$ için

$$g(g^{-1}y) = y$$

olur. O zaman $x \otimes gx$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon X in bir eşleşmesidir, yani $\text{Sym } X$ in bir elemanıdır. Bu fonksiyonu j_g olarak göstereyim. Demek ki her $g \in G$ için,

$$j_g : X \otimes X \rightarrow X, j_g(x) = gx$$

olur ve bu fonksiyon $\text{Sym } X$ in bir elemanıdır. Ayrıca her $x \in X$ için,

$$(j_g \circ j_h)(x) = j_g(j_h(x)) = j_g(hx) = g(hx) = (gh)x = j_{gh}(x)$$

olur. Bundan da $j(g) = j_g$ olarak tanımlanan $j : G \rightarrow \text{Sym } X$ fonksiyonunun bir grup homomorfizması olduğu sonucu çıkar. Bu fonksiyonun yukarıdaki tanımdaki 1 ve 2 önermelerini sağladığını kanıtlayalım. $j : G \rightarrow \text{Sym } X$ fonksiyonu bir homomorfizma olduğundan, j , G nin 1 elemanını $\text{Sym } X$ in birim elemanı olan Id_X fonksiyonuna götürür; demek ki

$$1 \cdot x = j_1(x) = Id_x(x) = x$$

olur. Ayrıyeten:

$$g \cdot (h \cdot x) = j_g(j_h(x)) = (j_g \circ j_h)(x) = j_{gh}(x) = (gh) \cdot x$$

Böylece bu bir grup etkisidir.

Teorem 4.11: G , ~~X~~ sınıfında devirli olmayan süper çözülebilir bir grup olsun. O zaman G , ya sonludur ya da sonsuz bir dihedral gruba izomorftur.

İspat: F , G nin Fitting alt grubu olsun. Süper çözülebilir gruplar alt maksimal koşulunu sağladığından, F sonlu üretilmiştir ve bu nedenle nilpotenttir. Bu yüzden Teorem 3.5 ve 3.7 den, F sonlu veya değişmelidir. Eğer F sonlu ise; $C_G(F)$ ve $G/C_G(F)$ nin her ikisi de sonlu olacağından G nin kendisi de sonludur. Eğer F sonsuz ve değişmeli ise, F sonlu üretilmiş olduğundan, Teorem 3.2 den dolayı devirlidir. Böylece $C_G(F)$ ve $G/C_G(F)$ nin derecesi 2 olur. $F = \langle a \rangle$ ve $G/F = \langle bF \rangle$ yazalım. Teorem 3.2 den G değişmeli değildir. Bu yüzden $a^b = a^{-1}$ olmak üzere $G = \langle b \rangle \rtimes \langle a \rangle$ alabiliriz. Dahası, $\langle a \rangle$ nin her aşikâr olmayan elemanı kendisinin tersi ile eşlenebileceğinden, $b^2 \hat{=} a$ ve böylece $b^2 = 1$. Bu nedenle G sonsuz dihedral grubuna izomorf olur.

Örnek 4.12: $\mathbb{C}_9 \rtimes \mathbb{C}_9$ devirli olmayan bir gruptur, çünkü bir üretici yoktur. Bununla beraber

$$\mathbb{C}_9 \rtimes \mathbb{C}_9 \hat{=} \mathbb{C}_9 \rtimes \mathbb{C}_3 \hat{=} \mathbb{C}_3 \rtimes \mathbb{C}_3 \hat{=} \mathbb{C}_3 \rtimes \mathbb{C}_1 \hat{=} e = \{1\}$$

olup, bu grup süper çözülebilir bir gruptur. Bu grup teoremden belirtilen 81. dereceden sonlu grup örneğidir.

Teorem 4.13 (Mashcke Teoremi): K , bir temel değişmeli p -grubu olan V üzerinde otomorfizmlerle etkiye sahip olan sonlu bir p -grup olsun ve p , $|K|$ ni bölmesin. $U \leq V$ nin K -invariant alt grubu olsun. O zaman $V = U \rtimes N$ olacak şekilde bir K -invariant $U \leq V$ alt grubu vardır.

Bundan sonraki iki önermede, G nin nilpotent olmayan sonlu süper çözülebilir grup olduğunu ve $p > 2$ sayısının G nin derecesini bölen en büyük asal olduğunu varsayacağız ($G = p^m \cdot p'$). Dahası, G nin Sylow p -alt grubunu P olarak tanımlayacağız ($|P| = m$). Böylece P , G de normal olup iyi tanımlıdır. Bu nedenle X , p' -grup iken, $G = X \rtimes P$ olur. Sonuç olarak P_1 , P nin içerdigi G nin minimal normal bir alt grubu olur. O zaman $|P_1| = p$ ve $G/C_G(P_1)$ bölüm grubu da devirli ve derecesi $p - 1$ ile bölünür. Böylece $P_1 \in Z(P)$ dir.

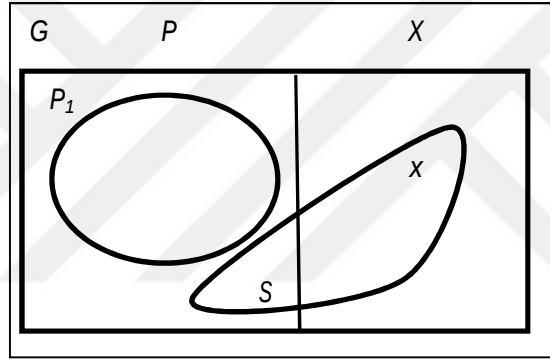
Bu durumları P devirli olmadığı zaman (Teorem 4.14) de ve devirli olduğu zaman (Teorem 4.18) de ayrı ayrı inceleyeceğiz.

Teorem 4.14: P devirli olmasın. O zaman G nin $\mathcal{X}$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul X devirli ve derecesi $p - 1$ ile bölündüğünde ve P üzerinde sabit noktasız bir etkiye sahip iken, $G = X \rtimes P$ olmasıdır.

İspat: G , $\mathcal{X}$ sınıfına ait olsun. P devirli olmadığından $C_G(P) \leq P$ elde ederiz. $p > 2$ için, Teorem 3.2 ve 3.7 den P nin ya p^2 derecesinden değişmeli olduğunu ya da p^3 derecesinden değişmeli olmadığını biliyoruz.

$C_G(P_1) = P$ olduğunu göstererek başlayalım. Bunun için $C_G(P_1) \not\subseteq P$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Aksini kabul edelim, yani $x \in C_G(P_1)$, G nin p -elemanı olsun.

Öncelikle, varsayalım ki $|P| = p^2$ olsun. Maschke teoreminden S , $\langle x \rangle$ -invariant iken $P = P_1' S$ olur. $C_G(P) \not\subseteq P$ olduğundan $x \notin C_G(S)$ elde ederiz. Böylece, $S \langle x \rangle$ devirli değildir. Bu yüzden $P_1 \notin C_G(S \langle x \rangle) \not\subseteq S \langle x \rangle$ ve $P \not\subseteq S \langle x \rangle$ olup, bu bir çelişkidir.



Şekil 4.1. İspatta Verilen Grup Örneği

Şimdi de $|P| = p^3$ olsun ve P değişmeli olmasın. O zaman P/P_1 , G/P_1 in devirli olmayan normal alt grubudur. S_1/P_1 , P/P_1 tarafından içerilen G/P_1 in minimal bir normal alt grubu olsun ($S_1/P_1 \leq P/P_1 \not\subseteq G/P_1$). O zaman Maschke teoreminden, S_2/P_1 , $\langle x \rangle$ -invariant olmak üzere $P/P_1 = S_1/P_1' S_2/P_1$ olur. Eğer S_1 ve S_2 nin her ikisi de devirli ise x , S_1 ve S_2 de p -inci dereceden her eleman üzerinde birim etkiye sahiptir. Böylece $x \in C_G(P) \not\subseteq P$ olup, bu bir çelişkidir (P/P_1 devirli değil ama S_1 ve S_2 devirli

ve $P/P_1 = S_1/P_1' S_2/P_1$ iken sağ taraf devirli olduğundan çelişkidir). O zaman $S \hat{=} \{S_1, S_2\}$ ve S devirli olmayacak şekilde bir S nin varlığını kabul edebiliriz. $|P| = p^2$ olduğunu düşünürsek $Q_1, \langle x \rangle$ -invariant iken $S = P_1' Q_1$ olarak elde ederiz. O halde $x \hat{=} C_G(Q_1)$ ve böylece de $x \hat{=} C_G(S) \not\subseteq S$ olup yine bir çelişki buluruz. Bundan dolayı $C_G(P_1) \not\subseteq P$ ve $C_G(P_1) = P$ olur.

Buradan $X = G/P$ derecesi $p-1$ ile bölünen devirli bir gruptur. $X = \langle x \rangle$ alalım. Birimden farklı x^r ve $a \hat{=} P$ için x^r ve a elemanları değişmeli olsunlar. O zaman $C_G(P_1) \not\subseteq P$ olduğundan $P_1 \langle x^r \rangle$ devirli değildir ve $a \hat{=} C_G(P_1 \langle x^r \rangle) \not\subseteq P_1 \langle x^r \rangle$ dir. Fakat buradan $a \hat{=} P \not\subseteq P_1 \langle x^r \rangle = P_1$ olup bu bir çelişkidir. Bu nedenle X, P üzerinde sabit noktasız bir etkiye sahiptir.

Tersi durumda Lemma 3.1 kullanılarak G nin $\mathcal{X}$ sınıfına ait olduğu elde edilir.

Örnek 4.15: $f(x) = \{x \text{ in } 1 \text{ dışındaki pozitif bölenlerinin sayısı}\}$ olmak üzere

$$\langle a, b, c \mid a^r = b^p = c^p = 1, [b, a] = b, [c, a] = c, [c, b] = 1 \rangle$$

grubunu ele alalım. Burada p bir asal sayı ve $r, p-1$ in bölenlerinden biri olmak üzere, bu grup $C_p' C_p$ ile C_r gruplarının ayırık genişlemesidir. Bu şekildeki grupların sayısı da $f(p)$ kadardır.

Bu örneği şöyle bir algoritma ile bulabiliriz.

1. Adım: Bize bir p asal sayısı verilsin.
2. Adım: Devirli olmayan ve p^2 dereceli $P = C_p \wr C_p$ grubunu seçelim.
3. Adım: $p - 1$ i bölen bir r sayısı bulalım.
4. Adım: X olarak derecesi r olan devirli ve P üzerinde sabit noktasız etkiye sahip olan C_r grubunu alalım.
5. Adım: $G = X \rtimes P$ olarak aldığımızda teoremdaki forma uygun grubu seçmiş oluruz.
6. Adım: $f(p) = \{p \text{ nin } 1 \text{ dışındaki pozitif bölenlerinin sayısı}\}$ fonksiyonu ile p asalı için bu forma uygun grupların sayısını da bulmuş oluruz.

Örnek 4.16: $\langle a, b, c \mid a^2 = b^3 = c^3 = 1, [b, a] = b, [c, a] = c, [c, b] = 1 \rangle$ grubunu alalım. Burada

$$\begin{aligned}
 P &= C_3 \wr C_3, \quad P_1 = C_3, \quad X = C_2 \\
 P &= \{1, b, b^2, c, c^2, bc, bc^2, b^2c, b^2c^2\} \\
 P_1 &= \{1, b, b^2\} \\
 P_1 &\in Z(P) \text{ dir.}
 \end{aligned}$$

Bu $C_3 \wr C_3$ ile C_2 grubunun ayrık genişlemesidir ve Teorem 4.14 yapısına sahip en küçük gruptur Benzer şekilde

$$\langle a, b, c \mid a^3 = b^7 = c^7 = 1, [b, a] = b, [c, a] = c, [c, b] = 1 \rangle$$

grubu, $C_7' C_7$ ile C_3 grubunun ayrık genişlemesi olan, Teorem 4.14 yapısına sahip tek dereceli en küçük gruptur.

Teorem 4.17: (Isaacs, 2008) G bir değişmeli p -grubu ve A bir sonlu $p\mathcal{C}$ -grup iken, A otomorfizmler yoluyla G üzerine etki etsin. Eğer A, G de p derecesinden her bir elemanı sabit bırakırsa A, G üzerinde aşıkâr etkiye sahiptir.

Teorem 4.18: P nin devirli bir grup olduğunu varsayalım. O zaman G nin $\mathcal{X}$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerden birisini sağlanmasıdır.

- i) C, D devirli ve D de C üzerinde sabit noktasız bir etkiye sahip iken;
 $G = D \rtimes C$,
- ii) C tek dereceli devirli grup, D genelleştirilmiş quaternion grup ve $Z(G) = Z(D)$ iken $G = D \rtimes C$,
- iii) C devirli $q\mathcal{C}$ -grup, D devirli q -grup (burada q, G derecesini bölen en küçük asal) ve $1 < Z(G) < D$ iken $G = D \rtimes C$.

İspat: $G, \mathcal{X}$ sınıfına ait olsun. Teorem 4.17 dan $C_X(P_1) = C_X(P)$ olup, bundan dolayı $C_G(P_1) = PC_X(P_1) = P' C_X(P_1)$ olur. $P_1 \in C_G(C_X(P_1))$ olduğundan, $C_X(P_1)$ in sonuç olarak da $C_G(P_1)$ in devirli olduğu elde edilir. Bu durumda $C_G(P_1) = \langle c \rangle$ ve $G/C_G(P_1) = \langle dC_G(P_1) \rangle$ alalım. O zaman $G = \langle c \rangle \langle d \rangle$ olur ve $\langle c \rangle, G$ de normaldir.

Eğer $Z(G) = 1$ ise $\langle c \rangle \leq \langle d \rangle = 1$. Bu durumda, $\langle d \rangle$ nin $\langle c \rangle$ üzerinde sabit noktasız bir etkiye sahip olduğu görülebilir. O zaman, $c^{m-1} \neq 1$ iken $1 \neq d^m \in C_G(c^m)$ elemanı varsa $c^m \in C_G(P_1 \langle d^n \rangle) \leq P_1 \langle d^n \rangle$ olup $d^m \in C_G(P_1)$ olduğundan $c^m \in P_1 \langle d^n \rangle$ bulunur. Böylece $c^m \in \langle c \rangle \leq P_1 \langle d \rangle = P_1$ ve $c^m \in P_1$ elde edilir. Bu ise bir çelişki olup, (i) koşulu sağlanır.

Şimdi de $Z(G) \neq 1$ olsun. G , $\mathcal{X}$ sınıfında değişmeli olmayan bir grup olduğundan $Z(G)$ devirli olacaktır. $r \in Z^+(G/C_G(P_1))$ grubunun derecesini bölen en küçük asal olsun. O zaman $q \in r < p$ ve G nin herhangi bir R Sylow r -alt grubu $C_G(P_1)$ de bulunmaz. O zaman $P_1 R$ değişmeli değildir ve böylece $C_G(P_1) \leq P_1 R$ dir. Özel olarak $Z(G) \leq P_1 R$ olup, s^a asal kuvvetli dereceye sahip her $z \in Z(G)$ elemanı $P_1 R$ de olacaktır. $zP_1 \in P_1 R / P_1$ elemanı r ninci dereceden kuvvete sahip olduğundan, $r = s$ elde edilir. Böylece $Z(G)$ bir r -grup olur. Aynı ifade $G/C_G(P_1)$ in de bir r -grup olmasını sağlar. Dikkat edilirse $r = q$ sayısı, G nin derecesini bölen en küçük asalıdır. $r \neq q$ olması durumunda, G nin herhangi bir aşık olmayan Sylow q -alt grubu $C_G(P_1)$ e ait olacaktır. Böylece, $C_G(P_1)$ devirli olduğundan, G nin q . dereceden normal bir N alt grubu mevcuttur. Yani her $g \in G/N$ elemanı N üzerinde G nin derecesini bölen dereceye sahip bir otomorfizm belirler. Diğer taraftan, $\text{Aut} N$ grubu, $q-1$ dereceden devirli grup olup $g \in C_G(N)$ ve dolayısıyla $N \leq Z(G)$ elde edilir. Fakat $Z(G)$ bir r -grup olduğundan, bu bir çelişkidir. Özel olarak $Z(G)$, G nin

herhangi Q Sylow q -alt grubunun tamamen içindedir. Bununla birlikte Q devirli veya genelleştirilmiş quaternion olmak zorundadır. Aksi halde Q nun q nuncu dereceden $Q_1 \triangleleft Q_2$ alt grupları vardır ki bunların her biri $Z(G)$ de olmalıdır ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, $q < r$ olacak şekilde G nin her R Sylow r -alt grubunun devirli olması gerekir. Bunun dışında R nin, derecesi r olan, $R_1 \triangleleft R_2$ alt grupları için $V = R_1 \triangleleft R_2$ alt grubu devirli değildir. Bu yüzden de $Z(G) \not\leq C_G(V) \leq V$ olup, $r \nmid q$ olduğundan bu bir çelişkidir.

G nin derecesi tek sayı ya da G nin bir Sylow 2-altgrubu devirli iken, $D = Q$ ve C , q tarafından bölünemeyen dereceye sahip $C_G(P_1)$ in en büyük alt grubu olmak üzere (iii) koşulu sağlanır. Diğer taraftan, G nin bir Q Sylow 2-alt grup genelleştirilmiş quaternion ise $Z(G) = Z(Q)$ olup (ii) sağlanır.

Tersine, eğer (i) koşulu sağlanıyorsa Lemma 3.1 den G , $\mathcal{X}$ sınıfına aittir. Eğer (ii) koşulu sağlanıyorsa ve $Z(G)$ nin derecesi 2^i ise $Z(G)$, G nin 2^i dereceden tek alt grubudur. Dolayısıyla S , G nin herhangi bir devirli olmayan bir alt grubu ise, bazı $i < j$ için 2^j , S nin derecesi böler ve $Z(G) < S$ olur. Benzer şekilde eğer (iii) koşulu sağlanıyorsa $Z(G)$ alt grubu G nin 2 dereceli tek alt grubudur. G nin devirli olmayan her alt grubu $Z(G)$ yi içerir. Her iki durumda da Lemma 3.1 den sonuç elde edilir.

Örnek: 4.19: S_3 simetrik grubu C_2 ile C_3 gruplarının bir ayrık genişlemesidir. Burada C_2 sabit noktasız etkiye sahiptir. Bu durum Teorem 4.18 (i) de tanımlanan yapıdaki en küçük gruptur.

$$G = \langle g_1, g_2, g_3, g_4 \mid g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = g_4^3 = 1, \\ [g_2, g_1] = g_3, [g_4, g_1] = g_4, \text{ diğ}er \ i < j \text{ için } [g_i, g_j] = 1 \rangle$$

ile verilen grubu ele alalım. Bu durumda G , C_3 ile Q_8 gruplarının bir ayrık genişlemesidir ve $Z(G) = Z(Q_8)$ dir. Bu da Teorem 4.18 (ii) de tanımlanan gruplar arasında en küçük gruplardan birisidir.

Son olarak,

$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b, b^2 = c^3 = 1, [b, a] = 1, [c, a] = c, [c, b] = 1 \rangle$$

grubunu ele alalım. G grubu $1 < Z(G) < C_4$ iken C_3 ile C_4 gruplarının bir ayrık genişlemesidir. Bu grup Teorem 4.18 (iii) de tanımlanan yapıya sahip küçük gruptur.

$\mathcal{X}$ sınıfındaki tek dereceli bir sonlu grubun süper çözülebilir olması gerekmediğine dikkat edelim. Bu şekilde süper çözülebilir olmayan en küçük grup,

$$\langle a, b, c \mid a^3 = b^5 = c^5 = 1, [b, a] = c^2, [c, a] = bc^2, [c, b] = 1 \rangle$$

takdimine sahip $C_5' \times C_5$ ile C_3 gruplarının bir ayrık genişlemesidir.

Önerme 4.20: D_{2n} dihedral grubunun $\mathcal{X}$ sınıfında olabilmesi için gerek ve yeter koşul n nin tek veya 2 nin bir kuvveti olmasıdır.

İspat: $D_{2n} = \langle x, y : y^n = x^2 = 1, y^x = y^{-1} \rangle$ olduğunu hatırlayalım. n , 2 nin bir kuvveti ise Teorem 3.7 den dolayı D_{2n} grubu $\mathcal{X}$ sınıfındadır. Diğer durumda bir p tek asalı n yi bölsün. n çift ise, $y^{n/2}$ elemanı D_{2n} nin merkezindedir, ama $\langle x, y^{n/p} \rangle$ alt grubunda değildir, bu yüzden D_{2n} grubu $\mathcal{X}$ sınıfına ait değildir. Şimdi de n tek olsun. D_{2n} in herhangi devirli olmayan bir alt grubunun yine m tek iken $2m$ dereceden bir dihedral grubu olduğuna dikkat edelim. $Z(D_{2n})$ merkezi aşikar olduğundan, Lemma 3.1 den sonuca ulaşılır.

Tanım 4.21: n' n tipinde kompleks bir matris için $A = \overline{A^T}$ oluyorsa A ya Hermityen matris denir. Yani A bir Hermityen matris ise her i, j için $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ olmalıdır. A Hermityen matris iken A nın esas köşegeni gerçel sayılardan oluşur.

Tanım 4.22: n' n tipinde kompleks bir matris için $A \cdot \overline{A^T} = \overline{A^T} \cdot A = I_n$ oluyorsa A ya üniter matris denir. Yani A bir üniter matris ise $A^{-1} = \overline{A^T}$ olmalıdır.

Tanım 4.23: Herhangi bir sonlu cismin derecesi bir asal sayının kuvvetidir. Her q asal kuvveti için söz konusu cisim F_q ile gösterilir. Bu cisimlerin varlığı Galois tarafından ve mümkün her derece için Moore tarafından kurulmuştur. Bu cisimlere genellikle Galois cisimleri denir ve Dickson un $GF(q)$ gösterimi ile F_q anlaşılabacaktır.

Tanım 4.24: Genel lineer grup $GL_n(q)$, determinantı sıfırdan farklı olan bileşenleri F_q dan gelen tüm n' n tipi matrislerinden oluşur. Buna eşdeğer olarak

4. ~~X~~ SINIFINDAKİ NİLPOTENT OLMAYAN GRUPLAR Mustafa BİLGİN

F_q üzerindeki n -boyutlu bir vektör uzayının tüm lineer otomorfizmlerinin grubudur.

Özel lineer grup (special linear group) $SL_n(q)$, determinantı 1 olan $GL_n(q)$ nun alt grubudur.

Projektif genel lineer grup $PGL_n(q)$ ve projektif özel lineer grup $PSL_n(q)$ grupları, $GL_n(q)$ ve $SL_n(q)$ gruplarının skaler matris içeren elemanları tarafından elde edilen gruplardır.

$n \geq 2$ için $PSL_2(2) = S_3$ ve $PSL_2(3) = A_4$ dışında $PSL_n(q)$ gruplarının hepsi basittir. Genel olarak bu gruplar için tek harfli basit gösterimler kullanılır ve bunlar $L_n(q)$ ile gösterilir. Yukarıdaki grupların dereceleri aşağıdaki formüllerle verilir:

$$N = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdots (q^2 - 1) \text{ ve } d = (q - 1, n)$$

olmak üzere;

$$|GL_n(q)| = (q-1) N, \quad |SL_n(q)| = |PGL_n(q)| = N, \quad |PSL_n(q)| = |L_n(q)| = \frac{N}{d}$$

Tanım 4.25: V , F_{q^2} üzerinde vektör uzayı olsun. O zaman $f(x, y)$ fonksiyonu, bileşenleri F_{q^2} den gelen ve V deki tüm x ve y ler tarafından tanımlanan fonksiyon olmak üzere eğer

$$f(l_1 x_1 + l_2 x_2, y) = l_1 f(x_1, y) + l_2 f(x_2, y)$$

koşulunu sağlıyorsa, bu fonksiyona conjugate-symmetric sesquilinear form denir. Aynı zamanda $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$ koşulu da sağlanacaktır. Eğer her y için $f(x_0, y) = 0$ olacak şekilde en az bir $x_0 \neq 0$ varsa $f(x, y)$ polinomuna singülerdir denir. Bu şekildeki tüm x_0 elemanlarının kümesi çekirdeği verecektir.

Genel üniter grup $GU_n(q)$, singüler olmayan Hermit formunu sabit bırakan $GL(q^2)$ grubunun tüm elemanlarının alt grubudur. Yani singüler olmayan conjugate-symmetric sesquilinear formun sabit olarak alınmasıdır. Buradan bir U matrisinin $GU_n(q)$ grubunda olması için $U^{-1} = \overline{U^T}$ olmalıdır.

Bu durumda özel üniter grup $SU_n(q)$, $GU_n(q)$ nun determinanı 1 olan matrislerden oluşan alt grubudur.

Projektif genel üniter grup $PGU_n(q)$ ve projektif özel üniter grup $PSU_n(q)$ grupları da yukarıdaki düşünceyle elde edilir.

Tanım 4.26: Asal bir a sayısı için $2^a - 1$ biçiminde yazılan asal sayılara Mersenne asalları denir ve $M_a = 2^a - 1$ şeklinde gösterilir. Fakat bu formda yazılan her sayı asal olmayabilir. Bazı Mersenne asalları;

$$M_2 = 3, M_3 = 7, M_5 = 31, M_7 = 127 \text{ dir.}$$

Tanım 4.27: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $2^{2^n} + 1$ biçiminde yazılan asal sayılara Fermat asalları denir ve $F_n = 2^{2^n} + 1$ şeklinde gösterilir. Fakat bu formda yazılan her sayı asal olmayabilir. Bazı Fermat asalları;

$$F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537 \text{ dir.}$$

Lemma 4.28: (Aschbacher, Lyons, Smith and Solomon, 2011) G devirli Sylow 2-alt gruplarına sahipse, 2-nilpotenttir (yani, bir sylow 2-alt gruba tamamlayan bir normal alt gruba sahiptir). Bu formdaki yegâne basit grup, 2. dereceden devirli gruptur.

Teorem 4.29: (Gorenstein, 2007) G merkezi kendinde bir Sylow 2-alt grubu ile 4. dereceden bir grup olsun. Bu durumda, aşağıdakilerden biri sağlanır.

- i) G normal bir 2-tamamlayıcı alt gruba sahiptir,
- ii) $G / \text{Aut}G \cong L_2(q)$ burada $q \equiv 3, q \equiv 5 \pmod{8}$ dir.

Özel olarak G basitse, $G \cong L_2(q)$, $q \equiv 3, q \equiv 5 \pmod{8}$ ve $q > 3$ tür.

Tanım 4.30: a, b, c, d ve e sembollerinin arasındaki bağıntıları aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

- (a) $a^4 = b^4 = 1, a^2 = b^2, b^a = b^{-1}$
 (b) $c^2 = 1, c^a = (bc)^2, c^b = (ac)^2$
 (c) $d^2 = 1, a^d = a^{-1}, b^d = ab, (cd)^3 = 1$
 (d) $e^2 = 1, b^e = b^{-1}, a^e = ab, c^e = c, (de)^3 = 1$

$M_{11} = \{a, b, c, d, e \mid (a), (b), (c), (d) \text{ bağıntıları sağlanıyor}\}$ sunumuyla verilen sonlu gruba 11. Dereceden Mathieu grubu denir.

Sıradaki teorem $\mathcal{X}$ sınıfındaki tüm sonlu basit grupları sınıflandırır.

Teorem 4.31: $q = 4, 9$, bir Fermat veya bir Mersenne asalı iken $\mathcal{X}$ sınıfındaki değişmeli olmayan sonlu basit gruplar $PSL_2(q)$ gruplarıdır.

İspat: G , $\mathcal{X}$ sınıfındaki sonlu basit bir grup ve S , G nin Sylow 2-alt grubu olsun. S değişmeli ise Teorem 3.2 den devirli ya da $C_2' C_2$ ye izomorfiktir. Lemma 4.28 den devirli olma durumu mümkün değildir, buna karşılık q tek ve $S \gg C_2' C_2$ iken Teorem 4.29 den G grubu $PSL_2(q)$ ya izomorfik olmalıdır. Şimdi de S nin değişmeli olmasın. Teorem 3.7 den S dihedral, yarı dihedral veya genelleştirilmiş quaternion gruba izomorfiktir. Dihedral durumunda, G , A_7 veya $PSL_2(q)$ grubuna izomorfik olmalıdır. S yarı dihedral ise (Alperin, Brauer and Gorenstein, 1970) dan G , ya $q \equiv 3 \pmod{4}$ iken $PSL_3(q)$ ve M_{11} e ya da $q \equiv 1 \pmod{4}$ iken $PSU_3(q)$ ya izomorftur. Sonuç olarak S , Brauer-Suzuki teoreminden genelleştirilmiş quaternion grup olamaz (Aschbacher, Lyons, Smith and Solomon, 2011).

4. $\mathcal{X}$ SINIFINDAKİ NİLPOTENT OLMAYAN GRUPLAR Mustafa BİLGİN

Şimdi $q = 4, 9$, bir Fermat veya bir Mersenne asalı iken yukardakilerden sadece $PSL_2(q)$ grubunun $\mathcal{X}$ sınıfına ait olduğunu gösterelim. Öncelikle, A_7 alterne grubu $\langle (1, 2)(3, 4)(5, 6, 7), (1, 3)(2, 4) \rangle \cong C_2$ grubunu içerir, bu yüzden Teorem 3.2 den dolayı $\mathcal{X}$ sınıfına ait olmaz. M_{11} Mathieu grubu $\langle (1, 2, 3)(4, 10)(5, 11, 6, 8, 9, 7), (2, 3)(5, 11)(6, 7)(8, 9) \rangle \cong D_{12}$ grubunu içerir, bu yüzden Önerme 4.20 den dolayı $\mathcal{X}$ sınıfında değildir. $PSL_3(q)$ ve $PSU_3(q)$ grupları $PSL_3(p)$ ve $PSU_3(p)$ gruplarını alt grup olarak içerir. g , $GF(p)$ nin birimlerinin oluşturduğu grubunun üretici olsun. $PSL_3(p)$ grubu $D_{2(p-1)}$ grubuna izomorf olan

$$\left\langle \begin{pmatrix} g & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g^{p-2} & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

alt grubunu içerir. Önerme 4.20 nin ışığında ve $p \equiv 3 \pmod{4}$ nedeniyle, $PSL_3(q)$ grubu $\mathcal{X}$ sınıfında değildir. Şimdi $p \equiv 1 \pmod{4}$ olacak şekilde $PSU_3(p)$ grubunu düşünelim. $p = 5$ için, $PSU_3(5)$ grubu A_7 ye izomorf olan maksimal alt gruba sahiptir. Bu son grup D_{12} dihedral grubuna izomorf olan $\langle (12)(34)(567), (12)(67) \rangle$ alt grubunu içerir. Bundan dolayı $PSU_3(5)$ grubu $\mathcal{X}$ sınıfına ait değildir. Şimdi $p > 5$ olsun. N , $PSU_3(p)$ de ki herhangi kuvvetin merkezi olsun. Bu, N nin $ebob(p+1, 3)$ dereceden bir merkezi alt grup tarafından $GU_2(p)$ nin bir bölümüne izomorf olduğunu gösterir (Alperin, Brauer and Gorenstein, 1970). $O(N)$, N grubunun tek dereceden en büyük normal alt

grubu iken; $N, L_0 @O(N)' SL_2(p)$ alt grubunu içerir. r ile $p+1$ i bölen en büyük tek sayıyı gösterelim. $p > 5$ ve $p \equiv 1 \pmod{4}$ olduğundan $r > 3$ olduğuna dikkat edelim. $g, GF(p^2)$ nin birimlerinin oluşturduğu grubunun üretici olsun ve $A, GU_2(p)$ de köşegen üzerinde elemanları $g^{(p^2-1)/r}$ olan skaler matris olsun. A matrisi r -dereceden ve $\langle A \rangle$ alt grubu da $GU_2(p)$ de derecesi 3 ten büyük tek sayı olan merkezi alt gruptur. Bunun anlamı N nin $O(N)$ alt grubu aşıkardır değildir. Böylece $r \nmid r/(q+1, 3)$ ve $p \nmid r$ nü bölen herhangi bir asal olmak üzere $L_0, C_{r \nmid} C_{2p \nmid}$ değişmeli alt grubunu içerir. Teorem 3.2 den $PSU_3(p)$ grubu ve böylece $PSU_3(q), \mathcal{X}$ sınıfına ait değildir.

Son olarak, $q = p^m$ iken $PSL_2(q)$ grubunu düşünelim. (Suzuki, 1961) teoremindeki durumu iddia ediyoruz. q tek olduğundan, herhangi bir kuvvetin merkezi $q^0 - 1$ ya da $q^0 \equiv 1 \pmod{4}$ e göre $q+1$ veya $q-1$ dereceden dihedral gruptur (Burnside, 1911). $PSL_2(q)$ grubunun $\mathcal{X}$ sınıfında olması için, Önerme 3.6 dan ya $q+1$ veya $q-1, 2$ nin kuvveti olmalıdır. Öncelikle $q+1 = 2^n$ olsun. m çift ise, $q+1 = p^m + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ olması imkansızdır. O halde m herhangi bir tek sayı olup $m = 2k+1$ alabiliriz. O zaman l tek iken $q+1 = (p+1)l$ olur ki bu sadece $l=1$ olması durumunda mümkündür, böylece $q = p = 2^n - 1$ bir Mersenne asalıdır. Şimdi de $q-1 = 2^n$ olsun. Eğer m tek ise, $q = p$ nin bir Fermat asalı olduğunu göstermek için üstteki aynı argüman kullanılır. Eğer m çift ise, o zaman $q = l^2$, bu yüzden $2^n = q-1 = (l-1)(l+1)$, bu sadece $l-1=2$ için mümkündür ve buradan da $q=9$ olur. $PSL_2(4)$ ve $PSL_2(9)$ gruplarının sırasıyla A_5 ve A_6 alterne gruplarına izomorf olduğuna dikkat edelim.

Lemma 3.1 den A_5 grubu $\mathcal{X}$ sınıfına aittir, bunun merkezi aşıkardığından $C_2' C_2$, S_3 , D_{10} ve A_4 e izomorf olan devirli olmayan alt gruplarının hepsi $\mathcal{X}$ sınıfına aittir. Aynı mantıkla, A_6 nın devirli olmayan alt gruplarının D_8 , $C_3' C_3$, A_4 alt gruplarının birine veya C_4 ile $C_3' C_3$ ün kesin ayrık genişlemesinin alt gruplarından birine izomorf olduğuna dikkat edelim. Bu grupların hepsi $\mathcal{X}$ sınıfına aittir, bu yüzden A_6 da $\mathcal{X}$ sınıfına aittir. Şimdi p bir Mersenne veya Fermat asalı iken $PSL_2(p)$ gruplarından birini düşünelim. $p = 3$ durumunda, $PSL_2(p)$ grubunun $\mathcal{X}$ sınıfına ait olan A_4 e izomorf olduğuna edelim. Şimdi $p > 3$ olsun. Lemma 3.1. in ışığında, $PSL_2(p)$ nin her uygun alt grubunun $\mathcal{X}$ sınıfında olduğunu kanıtlamak yeterlidir. $PSL_2(p)$ nin devirli olmayan herhangi bir alt grubu şu grupların herhangi birine izomorfiktir: n , 2 nin bir kuvveti ya da tek iken derecesi D_{2n} olan dihedral grubu, A_4 , S_4 , A_5 ve ya kendi Sylow alt grubunu içeren Sylow p -alt grubunun normalleştiricisinin bir alt grubu. Önerme 4.19 dan dihedral grup $\mathcal{X}$ sınıfındadır ve bunun üç permütasyon grubunun da $\mathcal{X}$ sınıfında olduğu yukarıdaki gibi doğrulanır. Şimdi $PSL_2(p)$ nin bir P Sylow p -alt grubunun N normalleştiricisini düşünelim. Olası bir birleştirme (konjugasyondan) sonra, $P = \{g \in PSL_2(p) \mid s^g = s + b, \text{ bazı } b \in GF(p)\}$ gibi P izdüşümünün eşlemesi anlamında verildiğini varsayabiliriz. Buradan $C_N(P) = P$, bu nedenle N yi içeren P nin herhangi bir alt grubu da N de kendisinin merkezleyeni içermelidir. Böylece düşünüldüğü gibi N , $\mathcal{X}$ sınıfındadır.

KAYNAKLAR

- Alperin, J. L., Brauer, R. and Gorenstein, D., 1970. Finite groups with quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 151, 1–261.
- Aschbacher, M., Lyons, R., Smith, S. D. And Solomon, R., 2011. Classification of Finite Simple Groups: Groups of Characteristic 2 Type. American Mathematical Society, Providence, RI.
- Beaumont, R. A. and Zuckerman, H. S., 1951. A characterization of the subgroups of the additive rationals. *Pacific J. Math.* 1, 169–177.
- Berkovich, Y., 2008. Groups of Prime Power Order, Vol. 1. Walter de Gruyter.
- Blackburn, N., 1975. On centralizers in p-groups. *J. London Math. Soc.* (2) 9, 478–482.
- Burnside, W., 1911. The Theory of Groups of Finite Order. Cambridge.
- Cartan, H. and Eilenberg, S., 1999. Homological Algebra. (PMS-19) (Princeton University Press).
- Conway, J. H., Curtis, R. T., Norton, S. P., Parker, R. A. and Wilson R. A., 1985. Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups. (Oxford University Press).
- Deaconescu, M., 1989. Classification of finite groups with all elements of prime order. *Proc. Amer. Math. Soc.* 106, 625–629.
- Delizia, C., Jezernik, U., Moravec, P. and Nicotera C., 2014. Groups In Which Every Non-Cyclic Subgroup Contains Its Centralizer. *Journal of Algebra and Its Applications*, Vol 13, No. 5, 1350154
- Gorenstein, D., 2007. Finite Groups. (Chelsea Publishing).
- Hao, C. and Jin, Z., 2013. Finite p-groups which contain a self-centralizing cyclic normal subgroup. *Acta Math. Sci. B* 33, 131–138.
- Huppert, B., 1967. Endliche Gruppen I. (Springer-Verlag).

- Isaacs, I. M., 2008. Finite Group Theory. (American Mathematical Society, Providence, RI).
- Leedham-Green, C. R. and McKay, S., 2002. The Structure of Groups of Prime Power Order. (Oxford University Press).
- Nah; C. K., Deaconescu, M., Lung, L. M. and Wuje S., 1993. Corrigendum and addendum to “Classification of finite groups with all elements of prime order”. Proc. Amer. Math. Soc. 117, 1205–1207.
- Robinson, D. J. S., 1982. A Course in the Theory of Groups. 2nd edn. (Springer-Verlag).
- Shirong, L., 2001. The structure of NC-groups. J. Algebra 241, 611–619.
- Suzuki, M., 1961. Finite groups with nilpotent centralizers. Trans. Amer. Math. Soc. 99, 425–470.
- Zel'manov, E., 1991. The solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent. Math. USSR Izv. 36, 41–60.
- Zel'manov, E., 1991. The solution of the restricted Burnside problem for 2-groups, Math. Sb. 182, 568–592.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Hatay'ın Altınözü ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Seferli Köyü İlkokulunda, orta öğrenimini Atatürk ortaokulunda, lise öğrenimini 23 Temmuz Merkez Lisesinde tamamladı. 1997 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2001 yılında mezun oldu. Aynı yıl Çukurova Üniversitesinde yüksek lisansa başladı. 2002 yılında yüksek lisansa ara vererek Millî Eğitim Bakanlığında Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı. Öğretmenliğe devam ederek 2015 yılında ara verdiği yüksek lisansa tekrar başladı.