

55037

HER ÖZALTGRUBU NC-GRUP OLAN LOKAL NİLPOTENT
p-GRUPLARI

DOKTORA TEZİ

(MATEMATİK)

Aynur YALINCAKLIOĞLU

Ocak, 1996

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

A. O. Asar
Danışman

Prof. Dr. Ali Osman ASAR

Sınav Jürisi

Başkan : Prof.Dr.Abdullah HARMANCI

Abdullah Harmancı

Üye : Prof.Dr.Ali Osman ASAR

A. O. Asar

Üye : Prof.Dr.İsmail Ş.GÜLOĞLU

İsmail Ş. Güloğlu

Üye : Prof.Dr.Erdoğan ESİN

Erdoğan Esin

Üye : Yrd.Doç.Dr.Baki KARLIĞA

Baki Karlığa

Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Esaslarına uygundur.

Yrd. Doç. Dr. Baki Karlığa

İÇİNDEKİLER

ÖZ	II
ABSTRACT.....	III
TEŞEKKÜR	IV
SEMBOLLERİN LİSTESİ.....	V
GİRİŞ	1
BÖLÜM 1	
BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI	3
BÖLÜM 2	
$\overline{NF}$ ve $\overline{NC}$ GRUPLARI	9
BÖLÜM 3	
NİLPOTENT MERKEZLEYENLİ $\overline{NC}$ -p-GRUPLARI.....	21
BÖLÜM 4	
HER ÖZALT GRUBU NC OLAN BİR GRUBUN NF-GRUP OLMA ŞARTI.....	40
KAYNAKLAR.....	49

HER ÖZALTGRUBU NC-GRUP OLAN LOKAL NİLPOTENT p-GRUPLARI

(Doktora Tezi)

Aynur YALINCAKLIOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 1996

ÖZ

Bu tez çalışmasında $\overline{NC}$ -p-gruplarının yapısı araştırılmıştır. İlk defa J. Otal ve M. Peña tarafından tanımlanan ve çalışılan $\overline{NC}$ -p-gruplarının araştırılmasına [1] de A.O. Asar devam etmiş ve bu gruplara ait genel nitelikte ilk sonuçları elde etmiştir. [1] ve [3] de bir $\overline{NC}$ -p-grubunun “normalleyen şartı” ek hipotezi altında, böyle bir grubun $\overline{NF}$ -grubu olan bir epimorfik görüntüsünün olup olmadığı, problemi araştırılmıştır. Biz de yukardaki problemi, öz merkezleyenlerin nilpotent olması, ek hipotezi altında inceledik ve böyle bir grubun epimorfik görüntüsünün $\overline{NF}$ -grup olmasına ait bir yeter şart verdik. Ayrıca her özaltgrubu NC-grubu olan bir lokal nilpotent p-grubun kendisinin de NC-grup olması için de bir yeter şart verip [2] deki Teorem C nin bir genellemesini elde ettik.

A LOCALLY NILPOTENT p -GROUPS IN WHICH EVERY PROPER SUBGROUP IS AN NC-GROUP

(Ph. D. Thesis)

Aynur YALINCAKLIOĞLU

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

January 1996

ABSTRACT

In this thesis the structure of $\overline{\text{NC}}$ - p -groups has been investigated. $\overline{\text{NC}}$ - p -groups were defined and investigated for the first time by J. Otal and M. Peña. Later A.O. Asar in [1] continued the investigation of these groups and obtained some general results about them. The problem that whether or not an $\overline{\text{NC}}$ - p -group has an epimorphic image which is an $\overline{\text{NF}}$ -group was studied in [1] and [3] under the additional condition of the “normalizer condition”. In the present work we have continued the study of the above problem under the additional hypothesis that proper centralizers in every epimorphic image of the group in question be nilpotent and we have given a sufficient condition for such a group to have an epimorphic image which is an $\overline{\text{NF}}$ -group. Furthermore we have given a sufficient condition for a locally nilpotent p -group in which every proper subgroup is an NC-group to be an NC-group and we have obtained a generalization of Theorem C in [2].

TEŞEKKÜR

Bu teze başlamamda ve hazırlanmasında faydalı tavsiyeleriyle yardımlarını esirgemeyen, yol gösteren ve her konuda bilgi ve tecrübelerinden çok şey öğrendiğim Sayın Hocam Prof. Dr. Ali Osman ASAR'a en derin saygılarımla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca sabır ile bu çalışmayı yazan ELİCOM Bilgisayar Ltd. Şti. personeline teşekkür ederim.



SEMBOLLERİN LİSTESİ

<u>Sembol</u>	<u>Anlam</u>
$H \triangleleft G$	H , G nin normal alt grubu
$H \text{char} G$	H , G nin karakteristik altgrubu
G/H	G nin H ile bölüm grubu
$[G:H]$	H nın G içindeki indeksi
$\langle x \rangle$	x tarafından üretilen devirli grup
$\langle H, K \rangle$	H ve K tarafından üretilen grup
$[x, y]$	x ve y nin komütatörü
$[X_1, X_2]$	$\langle [x_1, x_2] : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$
G'	$[G, G]$
$G^{(n)}$	$[G^{(n-1)}, G]$
$N_G(A)$	A nın G içindeki normalleyeni
$C_G(A)$	A nın G içindeki merkezleyeni
$C_G(K/L)$	$\{g: g \in G, \text{ her } k \in K \text{ için } [g, k] \in L\}$
$H \cong K$	H ile K izomorftur
$o(g)$	g nin mertebesi
C_{p^∞}	quasi-cyclic grup
$\Omega_n(G)$	$\langle x \in G: x^n = 1 \rangle$

<u>Sembol</u>	<u>Anlam</u>
K^G	$\langle g^{-1}kg : g \in G, k \in K \rangle$
$Z(G)$	G grubunun merkezi
$Z_\alpha(G)$	G grubunun α -merkezi
$Z_\infty(G)$	G nin hipermerkezi
$\gamma_i(G)$	$\gamma_1(G) = G, \gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G]$
N_n	Nilpotentlik sınıfı en çok n olan grupların sınıfı
G^m	$\langle g^m : g \in G \rangle$
G°	G nin maksimal, normal, köklü, abelyan altgrubu
$H \text{ s-n } G, H \triangleleft\triangleleft G$	H, G nin bir alt normal alt grubudur.
$H \text{ asc } G$	H, G nin bir artan alt grubudur.

GİRİŞ

Sonsuz gruplar teorisinde en önemli problemlerden birisi hiç kuşkusuz, bir lokal nilpotent p -grubunun yapısının belirlenmesidir. Henüz bu alanda bilinen çok az sonuç ve metot vardır. B. Bruno [5] $\overline{NF}$ -gruplarını tanımlayarak bu yönde önemli bir araştırma başlatmıştır. B. Bruno'ya göre her özaltgrubu bir nilpotent grubun sonlu genişlemesi olan (NF -grubu) fakat kendisi NF -grup olmayan lokal dereceli bir gruba, **nilpotent grubun sonlu genişlemesi olmayan bir minimal grup** ($\overline{NF}$ -grup) denir. Bruno aynı makalede göstermiştir ki eğer G bir $\overline{NF}$ -grubu ve $G' < G$ ise $G/G' \cong C_{p^\infty}$ dur. Bundan başka eğer G bir p -grubu ise G' nün G de öz tümleyeni yoktur.

Otal ve Peña [6] da $\overline{NF}$ -gruplarına paralel olarak $\overline{NC}$ -gruplarını tanımlamış ve bu grupların bazı özelliklerini elde etmiştir. ($\overline{NF}$ -grubunun tanımında “sonlu” yerine “Černikov” konursa $\overline{NC}$ -grubu elde edilir). Daha sonra $\overline{NF}$ -gruplarının ve $\overline{NC}$ -gruplarının araştırmasına A.O. Asar [1] ve A. Arkan-A.O. Asar [2] de devam edilmiştir. Henüz mükemmel $\overline{NF}$ - p -gruplarının ve $\overline{NC}$ - p -gruplarının yapısı bilinmemektedir. Bilindiği gibi $\overline{NC}$ - p -grubu mükemmeldir. $\overline{NC}$ - p -gruplarına ve mükemmel $\overline{NF}$ - p -gruplarına ait genel nitelikte ilk sonuç [1] de verilmiştir. Burada önemli bir soru şudur: **Her $\overline{NC}$ - p -grubunun $\overline{NF}$ -grubu olan bir epimorfik görüntüsü var mıdır?** Bu problem [1] ve [3] de “normalleyen şartı” ek hipotezi altında araştırılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışmada, yukardaki problemin araştırılmasına devam edilmiştir. Yani bir $\overline{NC}$ - p -grubu var mıdır, varsa yapısı nedir? sorusu araştırılmıştır. Bölüm 3 de bu soru merkezleyenlerin nilpotent olması ek hipotezi altında incelenmiş ve grubun bir epimorfik görüntüsünün $\overline{NF}$ -grup olmasına ait bir yeter şart verilmiştir.

Bölüm 4 de ise her altgrubu NC-grubu olan bir lokal nilpotent p -grubunun kendisinin bir NC-grup olması için bir yeter şart verilmiştir. Böylece [2] deki Teorem C nin bir genellemesi elde edilmiştir.



BÖLÜM 1

BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI

Tanım 1.1. G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Her $g \in G$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $g^{-1}ng \in N$ ise o zaman N ye G nin bir normal altgrubu denir ve $N \triangleleft G$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2. G bir grup ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ G nin elemanları olsun.

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 = x_1^{-1} x_1 x_2^{-1} x_2$$

elemanına x_1 ile x_2 nin komütatörü denir. Genel olarak $n \geq 2$ ağırlıklı bir basit komütatör, indüksiyon yardımıyla

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n]$$

şekilde tanımlanır. Burada $[x_1] = x_1$ olarak kabul edilir.

$x, y \in G$ için $[x, y, \dots, y]_{\leftarrow n \rightarrow}$ komütatörü $[x, {}_n y]$ ile gösterir.

$X_1, X_2, \dots$ bir G grubunun boştan farklı alt kümeleri olsun. X_1 ve X_2 nin komütatör alt grubu

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$$

olarak tanımlanır.

Burada $X_1 = X_2 = G$ ise $[G, G]$ komütatör grubuna G nin komütatör altgrubu denir ve G' ile gösterilir. Daha genel olarak $n \geq 2$ için

$$[X_1, \dots, X_n] = [[X_1, \dots, X_{n-1}], X_n] \text{ ve } [X_1] = \langle X_1 \rangle$$

dir.

Tanım 1.3. G bir grup olsun. Eğer, $1 = G_0, G_1, \dots, G_n = G$ G nin altgruplarının bir dizisi ve $G_i \triangleleft G_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) olmak üzere

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

ise bu diziye G nin bir **sonlu serisi** denir. G_{i+1}/G_i bölüm gruplarına **serinin faktörleri** ve G_i ler farklı ise n negatif olmayan tamsayısına **serinin uzunluğu** denir.

$T = \{H_\alpha : \alpha \leq \beta\}$ bir β ordinaline eşit veya küçük ordinallerle indekslenen G nin altgruplarının bir kümesi olsun, eğer T kümesi

- (a) $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1} \leq H_{\alpha_2}$
- (b) $H_0 = 1$ ve $H_\beta = G$
- (c) $H_\alpha \triangleleft H_{\alpha+1}$
- (d) Eğer λ limit ordinal ise $H_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} H_\alpha$ dır;

şartlarını sağlıyorsa T ye G nin bir **artan serisi** denir ve $1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_\beta = G$ şeklinde gösterilir.

Eğer T kümesi

- (a') $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1} \geq H_{\alpha_2}$
- (b') $H_0 = G$ ve $H_\beta = 1$
- (c') $H_{\alpha+1} \triangleleft H_\alpha$

(d') Eğer λ limit ordinal ise $H_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H_\alpha$ dır;

şartlarını sağlıyorsa T ye G nin bir **azalan serisi** denir ve $1 = H_\beta \dots \triangleleft H_2 \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.4. G bir grup, $H \leq G$ olsun. Eğer H , G nin bir artan serisinin bir terimi ise H ya G nin bir **artan altgrubu** denir ve $\text{Hasc } G$ ile ifade edilir.

Tanım 1.5. G bir grup ve H , G nin bir alt grubu olsun. Eğer G nin

$$H = H_r \triangleleft H_{r-1} \triangleleft \dots \triangleleft H_0 = G$$

olacak şekilde $H_0, H_1, \dots, H_r$ alt grupları varsa H , G de **altnormaldir** denir.

Burada r sonlu ve $i = 0, 1, \dots, r-1$ için $H_{i+1} \triangleleft H_i$ dir. Genellikle $H \triangleleft^r G$,

$H \triangleleft\triangleleft G$ veya $\text{Hsn}G$ ile gösterilir. $H_r = H$ olacak şekildeki en küçük $r \geq 0$ tamsayısına H nın G içindeki **altnormallik indeksi** denir ve $s(G: H)$ ile gösterilir.

Tanım 1.6. G bir grup olsun. G nin her özaltgrubu H , $N_G(H)$ içinde öz ise G ye **normalleyen şartını sağlar** denir.

Tanım 1.7. G bir grup olsun. Her $x \in G$ ve her pozitif m tamsayısı için

$$x = y^m$$

olacak şekilde bir $y \in G$ varsa G ye bir **köklü (radicable) grup** denir. Toplamsal gruplarda köklü terimi yerine **bölünebilir (divisible)** terimi kullanılır. Eğer her pozitif m tamsayısı için $G^m = G$ ise G ye **yarı-köklü (quasi-radical)** grup denir. Burada

$$G^m = \langle g^m : g \in G \rangle$$

dir.

Tanım 1.8. G bir grup,

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

G nin bir serisi olsun. Eğer her $0 \leq i \leq n$ için G_{i+1}/G_i abelyan ise G ye **çözülebilir grup** denir. G nin bu şekildeki serilerinin en küçük uzunluğuna G nin **komutatör uzunluğu** denir.

Tanım 1.9. G bir grup olsun. G nin artan bir

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_\beta = G$$

serisi için $G_\alpha \triangleleft G$ ($\alpha \leq \beta$) ve her $\alpha < \beta$ için

$$G_{\alpha+1}/G_\alpha \leq Z(G/G_\alpha)$$

oluyorsa bu seriye artan **merkez seri** denir. Bir artan merkez seriye sahip olan bir gruba **hipermerkez grup** denir. Eğer G nin bir sonlu merkez serisi varsa G ye bir **nilpotent grup** denir. Bu durumda G nin merkez serilerinin uzunluklarının en küçüğüne G nin **nilpotentlik sınıfı** denir.

Tanım 1.10. G bir grup, $G^{(0)} = G$ olsun. Her $i > 1$ için

$$G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$$\dots \leq G^{(2)} \leq G^{(1)} \leq G$$

dir. Buna G nin **komutatör serisi** denir. $G^{(1)} = G'$ ile gösterilir.

G bir çözülebilir grup ise bir $n \geq 0$ için $G^{(n)} = 1$ dir. Bu şekildeki en küçük $n \geq 0$ tamsayısı G nin komutatör uzunluğuna eşittir.

Tanım 1.11. G bir grup $Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$ olsun. Eğer α limit ordinal ise

$$Z_\alpha(G) = \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta(G)$$

ve α limit ordinal değil ise $Z_\alpha(G)$,

$$Z_\alpha(G) / Z_{\alpha-1}(G) = Z(G / Z_{\alpha-1}(G))$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu şekilde devam edilirse öyle bir $\beta \geq 0$ ordinali vardır ki her $\alpha \geq \beta$ için $Z_\alpha(G) = Z_\beta(G)$ dir. $Z_\beta(G)$ ye G nin hipermerkezi denir.

$$1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots$$

ye G nin **genelleştirilmiş yukarı merkez serisi** denir.

Eğer $Z_\beta(G) = G$ ise G bir hipermerkez gruptur. Eğer bir n doğal sayısı için $Z_n(G) = G$ ise G nilpotent gruptur. Bu şekildeki n tamsayılarının en küçüğü G nin nilpotentlik sınıfına eşittir.

Tanım 1.12. G bir grup, $\gamma_1(G) = G$ olsun. Eğer α limit ordinal ise

$$\gamma_\alpha(G) = \bigcap_{\beta < \alpha} \gamma_\beta(G)$$

ve α limit ordinal değil ise,

$$\gamma_\alpha(G) = [\gamma_{\alpha-1}(G), G]$$

şekilde tanımlansın.

$$\dots \leq \gamma_2(G) \leq \gamma_1(G) \leq G$$

ye G nin **genelleştirilmiş aşağı merkez serisi** denir.

Eğer bir n tamsayısı için $\gamma_{n+1}(G) = 1$ ise G nilpotenttir. Bu şekilde doğal sayıların en küçüğü n ise G nin nilpotentlik sınıfı n dir.

Tanım 1.13. Her sonlu üretecli altgrubu nilpotent olan gruba **lokal nilpotent grup** denir.

Tanım 1.14. $G = \langle c_i : c_1^p = 1, c_{i+1}^p = c_i, i = 1, 2, 3, \dots \rangle$ şeklinde tanımlı G grubuna **lokal devirli p -grubu** veya **prüfer p -grubu** veya **C_{p^∞} tipinde bir grup** denir.

C_{p^∞} tipinde bir grup, bir sonsuz p -grubudur ve her özaltgrubu bir devirli p -gruptur.

Tanım 1.15. G bir grup olsun. Eğer G sonlu sayıda C_{p^∞} tipindeki grupların direkt çarpımının sonlu genişlemesi ise G ye bir **Černikov grup** denir.

Tanım 1.16. G bir grup olsun

$$F = \{x \in G : |G : C_G(x)| < \infty\}$$

kümesine G nin **FC-merkezi** denir. Eğer $G = F$ ise G ye bir **FC-grup** denir.

$$C = \{x \in G : G / C_G(x^G) \text{ Černikov}\}$$

kümesine G nin **CC-merkezi** denir. Eğer $G = C$ ise G ye bir **CC-grup** denir.

Teorem 1.1. (Polivickii). G bir grup olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir.

- (i) Her $x \in G$ için $[G, x]$ Černikov ve $G / C_G([G, x])$ periyodik
- (ii) Her $x \in G$ için x^G nin öyle bir normal Černikov altgrubu H vardır ki x^G / H devirli ve $G / C_G(x^G)$ periyodiktir.
- (iii) G bir CC-gruptur.

İspat [14] Teorem 4.38

BÖLÜM 2

$\overline{NF}$ ve $\overline{NC}$ -GRUPLARI

Bu çalışmada $\overline{NC}$ -p-gruplarının (Tanım 2.3), [5] ve [6] de başlatılan [1] ve [3] de sürdürülmüş olan, araştırmalarına devam edilmiştir. Son zamanlarda $\overline{NC}$ -p-grupları [1], [2], [3], [5], [6] den de görüldüğü gibi bir çok araştırmanın konusu olmuştur ve artan bir oranda ilgi alanı olmaya devam etmektedir. Bunun nedeni, bu grupların belirlenmesi lokal nilpotent p-gruplarına ait bazı temel soruların çözümlenmesine katkıda bulunabilecek olmasıdır.

Buradaki başlıca önemli problemler şunlardır.

Problem 1. Bir mükemmel $\overline{NF}$ -p-grubu var mıdır, varsa böyle bir grubun yapısı nedir?

Problem 2. Bir $\overline{NC}$ -p-grubu var mıdır, varsa böyle bir grubun yapısı nedir?

Böyle bir grubun daima $\overline{NF}$ -grup olan bir epimorfik görüntüsü var mıdır?

Bu bölümde $\overline{NF}$ ve $\overline{NC}$ -gruplarının tanımlarını ve yukarıdaki problemlerle ilgili [1] ve [3] de elde edilen bazı sonuçları vereceğiz.

Tanım 2.1. G bir grup olsun. Eğer G nin aşıkâr olmayan her sonlu üreteçli altgrubunun sonlu indeksli bir özalt grubu varsa G ye **lokal dereceli grup** denir. Yani, eğer X , G nin sonlu üreteçli bir altgrubu ve $X \neq 1$ ise o zaman X in öyle bir özaltgrubu K vardır ki $|X:K| < \infty$ dur.

Bu tanım Tarski grubu olarak bilinen grupları saf dışı bırakmak için yapılmıştır. Bilindiği gibi p bir asal sayı olmak üzere aşıkâr olmayan her özaltgrubunun mertebesi p ye eşit gruplara **Tarski Grupları** denir.

OL' shanski ve Rips, yeterince büyük seçilen p asal sayıları için her öaltgrubunun mertebesi p ye eşit olan sonsuz grup inşa etmiştir. Bu gruplar Tarksi grupları olup, lokal dereceli değildir.

Tanım 2.2. G bir grup olsun. Eğer G nin G/N sonlu olacak şekilde normal nilpotent N altgrubu varsa G ye bir **NF-grup** denir. N nin nilpotentlik sınıfı $\leq n$ ise G ye bir N_n **F-grup** denir.

Eğer G nin G/M Černikov olacak şekilde normal nilpotent M altgrubu varsa G ye **NC-grup** denir. M nin nilpotentlik sınıfı $\leq n$ ise G ye bir N_n **C-grup** denir.

Tanım 2.3. G lokal dereceli bir grup olsun. G nin her öaltgrubu NF-grup fakat G bir NF-grup değil ise G ye bir **minimal NF-grup** olmayan grup veya kısaca $\overline{NF}$ -grup denir. $\overline{NC}$ -grup benzer şekilde tanımlanır.

Mükemmel olmayan $\overline{NF}$ -p-grubu vardır ve Heineken ile Mohamed tarafından [7] de inşa edilen grup, böyle bir gruba ilk örnektir. Heineken ve Mohamed [7] de aşağıdaki özellikleri sağlayan bir p-grubu G inşa etmiştir.

- (i) $G/G' \cong C_{p^\infty}$
- (ii) G' elemanter abelyan,
- (iii) G nin her öaltgrubu nilpotent ve altnormal,
- (iv) $Z(G) = 1$
- (v) Her $H < G$ için $G'H < G$ dir.

Aslında bu grup hipermerkez olmayan fakat normalleyen şartını sağlayan bir gruba örnek olarak inşa edilmiştir.

Daha sonra Meldrum [8] ve B. Hartley [9] ve [10] da Heineken-Mohamed tipi gruplar inşa etmiştir. Bütün bu örneklerde komutatör altgrubu abelyandır. Bruno ve Phillips [11] de komutatör altgrubu metabelyan olan bir Heineken-Mohamed tipi grubu inşa etmiştir. Daha sonra Menegazzo [13] de komutatör altgrubu sonsuz üslü ve abelyan olan veya komutatör altgrubunun komutatör uzunluğu her $d \geq 1$ için d ye eşit olan Heineken-Mohamed tipi gruplar inşa etmiştir.

Mükemmel $\overline{NF}$ -p-grupları ve $\overline{NC}$ -gruplarına ait genel nitelikteki ilk sonuçlar [1] de verilmiştir. Bu sonuçlar çalışmamızda sık sık kullanıldığından, bunları burada ifade etmek uygun olacaktır.

Teorem A. G sonlu indeksli özaltgrubu olmayan bir lokal nilpotent p-grubu olsun. Kabul edelim ki G nin her özaltgrubu NC-grup olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

(i) Eğer $G = G'$ ise o zaman G normal nilpotent özaltgruplarının bir artan birleşimidir. Ayrıca G nin bir normal nilpotent N altgrubu vardır öyle ki G nin N yi içeren herhangi bir normal nilpotent M altgrubu için M/N sonlu üslüdür. Özel olarak G nin her özaltgrubu X in bir normal nilpotent Y altgrubu vardır öyle ki X/Y Černikov ve Y/N sonlu üslüdür.

(ii) Eğer $G \neq G'$ ise o zaman G bir NC-gruptur.

İspat. [1] Teorem A.

Sonuç 1. G bir mükemmel $\overline{NF}$ -p-grup olsun. O zaman G nin her özaltgrubu nilpotenttir. Ayrıca G nin bir normal nilpotent özaltgrubu N vardır öyle ki G/N nin her normal özaltgrubu sonlu üslüdür. Özel olarak G normalleyen şartını sağlar.

İspat [1] Sonuç 1.

Gözlem 2.4. Teorem A(i) den görüldüğü gibi G bir $\overline{NC}$ -p-grubu ise $G' = G$, yani G mükemmeldir ve G nin her sonlu altgrubu altnormaldir.

Sonuç 1 den dolayı bir $\overline{NF}$ -p- grubu normalleyen şartını sağlar. Fakat NC -p-grubu normalleyen şartını sağlamayabilir, çünkü bir Heineken-Mohamed grubunun direkt karesi normalleyen şartını sağlamaz. Buradan doğal olarak $\overline{NC}$ -p-grubuyla ilgili aşağıdaki soru akla gelmektedir.

Problem 3. Normalleyen şartını sağlayan bir $\overline{NC}$ -p-grubu var mıdır, varsa böyle bir grubun yapısı nedir?

A.O Asar [1] de, Problem 2 ve Problem 3 ün araştırmasında, NC -p-gruplarının içinde daima Heineken-Mohamed grubuna benzer grupların bulunduğunu ve bunların grubun yapısının belirlenmesinde etkili olduğunu gözlemlemiş ve o nedenle bu tip gruplar için tanım vermiştir. Bu tip grupların bazı elemanter özellikleri [1] ve [3] te elde etmiştir.

Tanım 2.5. X aşık olmaya bir lokal nilpotent p-grubu olsun. Eğer

(i) X' nilpotent ise

ve

(ii) bir $n \geq 1$ için $X/X' \cong C_{p^\infty} \times \cdots \times C_{p^\infty} = C_{p^\infty}^{(n)}$ ise

o zaman X e bir HM^* -grup denir. Eğer burda $n = 1$, $X' \neq 1$ ve X in her özaltgrubu altnormal ise X e Heineken-Mohamed tipi grup veya kısaca HM -grup denir.

Dikkat edilirse HM -grubun her özaltgrubu [12] (1) Lemma dan dolayı nilpotenttir.

HM^* -grubun bazı elemanter özellikleri aşağıdaki Lemma'da verilmiştir.

Lemma 2.6. Bir p-asal sayısı için X bir HM^* -grup olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

$$(i) X' = [X, X']$$

(ii) X in $X = X'N$ olacak şekilde bir öz normal N altgrubu yoktur. Özel olarak X/N sonlu üslü olamaz.

(iii) X normalleyen şartını sağlıyor ise o zaman X in $X = X'Y$ olacak şekilde özaltgrubu Y yoktur.

İspat. (i) $\bar{X} = X/[X, X']$ olsun. O zaman $\bar{X}' \leq Z(\bar{X})$ olduğundan $\bar{X}$ nilpotenttir. Ayrıca $\bar{X}/\bar{X}'$ köklü abelyan olduğundan $\bar{X}$ abelyandır. Buradan $X' \leq [X, X']$ ve böylece $X' = [X, X']$ elde edilir.

(ii) Kabul edelim ki N , X in bir normal nilpotent özaltgrubu ve $X = NX'$ olsun. O zaman (i) den dolayı

$$\begin{aligned} X' &= [X, X'] = [NX', X'] \\ &= [N, X'] [X', X'] \\ &= [N, X'] X'' \end{aligned}$$

elde edilir. X' nilpotent olduğundan [14] Lemma 2.22 den dolayı

$$X' = [N, X']$$

elde edilir. Fakat N , X in normal altgrubu olduğundan

$$X' = [N, X'] \leq N$$

dir. Böylece $X = NX'$ ve $X' \leq N$ olduğundan $X = N$ dir. Özel olarak X/N sonlu üslü ise o zaman X/NX' köklü abelyan ve sonlu üslü olduğundan, bu ancak $X = NX'$ olmasıyla mümkündür. Böylece (ii) nin ilk kısmından dolayı $X = N$ olurki bu bir çelişkidir.

(iii) Kabul edelim ki X in bir özaltgrubu C için $X = CX'$ olsun. $D = C \cap X'$ ve $\overline{X} = X/DX''$ olarak alalım. O zaman $\overline{X} = \overline{C}\overline{X}'$, $\overline{C}$ köklü abelyan ve Černikovdur. $\overline{Y} = N_{\overline{X}}(\overline{C})$ olsun. O zaman $\overline{C}$ ve $\overline{Y} \cap \overline{X}'$, $\overline{Y}$ nin normal nilpotent altgrubu ve $\overline{Y} = \overline{C}(\overline{Y} \cap \overline{X}')$ olduğundan $\overline{Y}$ nilpotentdir. Özel olarak $\overline{C}$ köklü abelyan ve $\overline{Y}$ nilpotent olduğundan [14] Lemma 3.13 den dolayı $[\overline{C}, \overline{Y}] = 1$ dolayısıyla $\overline{C} \leq Z(\overline{Y})$ dir. Kabul edelim ki $\overline{Y} < \overline{X}$ ve $\overline{V} = N_{\overline{X}}(\overline{Y})$ olsun. Hipotezden dolayı X dolayısıyla $\overline{X}$ normalleyen şartını sağladığından $\overline{Y} < \overline{V}$ dir. $\overline{C}$ ve $\overline{V} \cap \overline{X}'$, $\overline{V}$ nin normal nilpotent altgrubu ve $\overline{V} = \overline{C}(\overline{V} \cap \overline{X}')$ olduğundan $\overline{V}$ nilpotenttir. Tekrar [14] Lemma 3.13 den dolayı $\overline{C} \leq Z(\overline{V})$ ve böylece $\overline{V} \leq \overline{Y}$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $\overline{Y} = \overline{X}$ ve böylece $\overline{C} \leq Z(\overline{X})$ dir. Fakat (i) den dolayı

$$\begin{aligned}\overline{X}' &= [\overline{X}', \overline{X}] = [\overline{X}', \overline{C}\overline{X}'] \\ &= [\overline{X}', \overline{X}'] [\overline{X}', \overline{C}] \\ &= [\overline{X}', \overline{X}'] \\ &= \overline{X}''\end{aligned}$$

dir. Ayrıca $\overline{X}'$ nilpotent olduğundan bu ancak $\overline{X}' = 1$ olmasıyla mümkündür ve böylece $\overline{X}' \leq DX'' \leq D \leq C$ dir. $C < X$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Lemma 2.7. X bir NC-p-grup ve T , X in bir HM^* -altgrubu olsun. Eğer N , X/N Černikov olacak şekilde X in normal alt grubu ise $T' \leq N$ dir.

İspat $D = T' \cap N$ ve $\overline{T} = T/D$ olsun. O zaman $\overline{T}$ bir HM^* -grubudur. Fakat hipotezden X/N Černikov ve T' nilpotent olduğundan $\overline{T}'$ Černikov ve nilpotent altgrup ve [14] Teorem 3.29.2 nin sonucundan dolayı $\overline{T}/C_{\overline{T}}(\overline{T}')$ sonludur. Fakat Lemma 2.6. (i) den dolayı $\overline{T}$ nin sonlu üslü bölüm grubu olmadığından $\overline{T} = C_{\overline{T}}(\overline{T}')$ dir. Böylece $\overline{T}' \leq Z(\overline{T})$ ve Lemma 2.6. (i) den dolayı

$$\overline{T}' = [\overline{T}', \overline{T}] = 1$$

dir. Buradan $T' \leq D = T' \cap N \leq N$ elde edilir.

Lemma 2.8. G , her özaltgrubu bir NC-grup olan lokal nilpotent p -grup ve G nin her sonlu altgrubu altnormal olsun. Eğer T , G nin bir HM^* -grubu ve X de herhangi bir altgrup öyle ki $[X, T]$ nilpotent ise o zaman

$$[X, T] = [X, T, T]$$

dir. Özel olarak $N_G(T) = N_G(N_G(T))$ dir.

İspat. [1] Lemma 3.2

Yukardaki lemmada G bir $\overline{NC}$ - p -grup ve X, T Lemma 2.8 deki gibi olmak üzere $[X, T]$ nin nilpotentlik şartı yerine $\langle X, T \rangle < G$ alınabilir. Bu şart altında $[X, T]$ nin nilpotent olduğu gösterilebilir. Böylece Lemma 2.8 in bir genellemesini elde etmiş oluruz.

Önce aşağıdaki bilinen Lemmayı verelim.

Lemma 2.9. G bir $\overline{NC}$ - p - grup ve X , G nin bir özaltgrubu olsun. O zaman X in X/V köklü abelyan Černikov olacak şekilde bir normal nilpotent V altgrubu vardır. Özel olarak X' nilpotenttir.

İspat. X , G nin özaltgrubu olduğundan X bir NC-gruptur. O zaman X/M Černikov olacak şekilde bir normal nilpotent M altgrubu vardır. T/M , X/M nin maksimal köklü abelyan altgrubu olsun. O zaman X/T sonlu olduğundan X in $X = TF$ olacak şekilde sonlu F altgrubu vardır. FM/M , sonlu olduğundan Gözlem 2.4 den dolayı FM/M , X/M de altnormaldir. Ayrıca T/M , X/M nin normal nilpotent altgrubu olduğundan [12] (1) Lemma dan dolayı $X/M = TFM/M$ nilpotenttir. O zaman [4] Lemma 2.2 (iii) den dolayı $T/M \leq Z(X/M)$ dir.

Şimdi $X/M = (FM/M)(T/M)$ ve $T/M \leq Z(X/M)$ olduğundan $FM/M < X/M$ dir. Dolayısıyla

$$X/FM \cong \frac{X/M}{FM/M} = \frac{(FM/M)(T/M)}{FM/M} \cong \frac{T/M}{(T/M) \cap (FM/M)}$$

ve T/M köklü abelyan ve Černikov olduğunda X/FM köklü abelyan ve Černikovdur. Bundan başka F sonlu ve altnormal ve aynı zamanda M normal nilpotent olduğundan [12] (1) Lemma dan dolayı FM nilpotenttir. Böylece $V = FM$ olarak alabiliriz. Özel olarak X/V abelyan olduğundan $X \leq V$ ve dolayısıyla X' nilpotenttir.

Şimdi yukarıda bahsedilen Lemma 2.8 in genellemesini verebiliriz.

Sonuç 2.10. G bir $\overline{NC}$ - p - grup ve X , G nin özaltgrubu olsun. Eğer Y , G nin herhangi bir altgrubu ve $[X, Y] \neq G$ ise $[X, Y]$ nilpotenttir.

İspat. Önce $Y = G$ olsun. $L = X^G$ olsun [14] Sayfa 43 den dolayı

$$L = [X, G]X$$

dir. Hipotezden dolayı $[X, G] \neq G$ ve G bir $\overline{NC}$ -grup olduğundan $L \neq G$ dir. O halde L bir NC -gruptur ve Lemma 2.9 dan dolayı L nin öyle bir normal nilpotent altgrubu V vardır ki L/V köklü abelyan ve Černikovdur.

$$K = \langle V^g : g \in G \rangle$$

olsun. O zaman L/V köklü abelyan Černikov ve $V \leq K$ olduğundan L/K köklü abelyan ve Černikovdur. V , L nin normal nilpotent altgrubu olduğundan [10] Lemma 4.7(i) den dolayı K nilpotenttir. O halde $V = K$ alınabilir. Yani, V yi G de normal alabiliriz. $\overline{G} = G/V$ olsun. $\overline{L}$ köklü abelyan ve Černikov olduğundan [14] Teorem 3.29 (2) den dolayı $\overline{G}/C_{\overline{G}}(\overline{L})$ sonludur. Fakat $\overline{G}$ bir $\overline{NC}$ - p -grubu olduğundan Gözlem 2.4 den dolayı mükemmeldir. Böylece $\overline{G} = C_{\overline{G}}(\overline{L})$ ve buradan $\overline{L} \leq Z(\overline{G})$ elde edilir. Şimdi $\overline{L} = \overline{X}^{\overline{G}}$ ve $\overline{X} \leq \overline{L}$ olduğundan $\overline{X} \leq Z(\overline{G})$ dir. Buradan

$$\bar{L} = [\bar{X}, \bar{G}] = 1$$

ve

$$[X, G] \leq V$$

bulunur. Üstelik V nilpotent olduğundan $[X, G]$ nilpotenttir.

Şimdi ise $Y \neq G$ olsun. $M = X^Y Y = \langle X, Y \rangle$ olsun. O zaman $M \neq G$ olduğundan M bir NC-gruptur. L de olduğu gibi M nin öyle bir normal nilpotent altgrubu W vardır ki M/W köklü abelyan ve Černikovdur. Buradan

$$1 = [XW/W, YW/W] = [X, Y] W/W$$

ve

$$[X, Y] \leq W$$

elde edilir. W nilpotent olduğundan $[X, Y]$ nilpotenttir.

Artık Lemma 2.8 in genellemesini verebiliriz.

Sonuç 2.11. G bir $\overline{NC}$ -p-grup ve X ile T , Lemma 2.8 in ifadesindeki gibi olsun. Eğer $[X, T] \neq G$ ise

$$[X, T] = [X, T, T]$$

ve

$$N_G(T) = N_G(N_G(T))$$

dir.

İspat. $T \neq G$ olduğundan Lemma 2.10 dan dolayı $[X, T]$ nilpotenttir. O halde Lemma 2.8 uygulanırsa iddia gösterilmiş olur.

$\overline{NC}$ -p-gruplarının bir özelliği de aşağıda verilmiştir.

Lemma 2.12. G bir $\overline{NC}$ -p-grubu ve X , G nin bir altgrubu olmak üzere $X^G < G$ olsun. O zaman aşağıdakilerden sağlanır.

(i) Eğer X/N sonlu üslü olacak şekilde G nin X tarafından içerilen bir normal nilpotent N altgrubu varsa X^G nilpotenttir.

(ii) Eğer X nilpotent ve G normalleyen şartını sağlıyorsa X^G nilpotenttir.

İspat. (i) $M = X^G$ olsun. $M \neq G$ olduğundan Lemma 2.9 dan dolayı M/V köklü abelyan ve Černikov olacak şekilde M nin bir normal nilpotent altgruba V vardır. [10] Lemma 4.7 (i) den dolayı $V < G$ alınabilir. Ayrıca N ve V , X^G nin normal nilpotent altgrupları olduğundan NV nilpotenttir. Şimdi X^G / NV Černikov ve sonlu üslü olduğundan X^G / NV sonlu bir gruptur. O zaman $X^G = F(NV)$ olacak şekilde X^G nin sonlu bir F altgrubu vardır. Üstelik Gözlem 2.4 den dolayı F , G nin altnormal altgrubu olduğundan [12] (1) Lemma gereğince X^G nilpotenttir.

(ii) Hipotezden dolayı $M \neq G$ dir. Lemma 2.10 dan dolayı $[X, G]$ nilpotent ve ayrıca M de normaldir. Bundan başka $M \neq G$ ve G normalleyen şartını sağladığından [1] Lemma 3.6 dan dolayı X, M de altnormal ve nilpotenttir. Dolayısıyla [12] (1) Lemma gereğince M nilpotenttir.

Yukardaki gözlem ve sonuçlardan da görüldüğü gibi bir $\overline{NC}$ -p-grubunun yapısının belirlenmesinde HM^* -grupları önemli rol oynamaktadır. Ancak burada şu önemli soru karşımıza çıkmaktadır.

Problem 4. Her $\overline{NC}$ -p-grubu HM^* -altgrubu içerir mi?

Bu problemin cevabı henüz tam olarak bilinmemekle birlikte [1] Lemma 3.3 de bazı şartlar altında bir NC-p-grubunun, bir maksimal HM*-grup içerdiği ve bunun tek olduğu gösterilmiştir.

Şimdi bu lemmayı ifade edelim.

Lemma 2.13. X bir NC-p-grup ve N , X in sonlu üslü normal nilpotent altgrubu öyle ki X/N sonsuz Černikov grup olsun. O zaman X in bir maksimal normal HM*-altgrubu T vardır öyle ki X/T sonlu üslü ve T tekdir.

Problem 2 de ifade edildiği gibi bir $\overline{\text{NC}}$ -p-grubunun var olup olmadığı henüz bilinmemektedir. Ancak eğer böyle bir G grubu varsa o zaman Teorem A(i) den dolayı G nin bir normal nilpotent N altgrubu vardır öyle ki G/N nin her özaltgrubu sonlu üslü bir normal nilpotent altgrubun Černikov genişlemesidir. O zaman G/N nin nilpotent olmayan her özaltgrubu X/N nin Lemma 2.13 den dolayı $(X/N)/(T/N)$ sonlu olacak şekilde bir tek maksimal HM*-altgrubu T/N vardır.

Burada son olarak normalleyen şartını sağlayan $\overline{\text{NC}}$ -p-gruplarıyla ilgili olarak [3] de elde edilen aşağıdaki sonuçları verelim.

Teorem B. G normalleyen şartını sağlayan bir $\overline{\text{NC}}$ -p-grubu olsun. O zaman $G/Z(G)$ nin her özaltgrubu bir sonlu üslü nilpotent altgrubun Černikov genişlemesidir. Özel olarak $G/Z(G)$ nin bir sonlu üslü $E/Z(G)$ altgrubu vardır öyle ki $G = E^G$ dir.

İspat [3] Teorem 1.

Teorem C. G normalleyen şartını sağlayan bir $\overline{\text{NC}}$ -p-grubu olsun. Kabul edelim ki S ve T , $G/Z(G)$ nin herhangi iki HM-altgrubu olmak üzere, her $a \in S'$ için

$$[a, S, T] \leq [a, S]$$

olsun. O zaman ya G nin bir epimorfik görüntüsü $\overline{NF}$ -gruptur veya G nin bir normal özaltgrubu K vardır öyle ki her $i \geq 1$ için T_i / K , G/K nin bir normal HM-altgrubu ve $(T_i / K)' \leq (T_{i+1} / K)'$ olmak üzere

$$G / K = \bigcup_{i=1}^{\infty} (T_i / K)'$$

dir.

İspat [3] Teorem 2.

BÖLÜM 3

NİLPOTENT MERKEZLEYENLİ $\overline{NC}$ -p-GRUPLARI

Bu bölümde Problem 2 nin cevabı, öz merkezleyenlerin nilpotent olduğu $\overline{NC}$ -p-grupları için araştırılmıştır. Bu şart altında $\overline{NC}$ -p-grubunun bir epimorfik görüntüsünün $\overline{NF}$ -grup olması için bir yeter şart verilmiştir. Bu yeter şartın kesin bir ifadesi aşağıda verilmiştir.

Teorem 1: G bir $\overline{NC}$ -p-grup öyle ki aşağıdakiler sağlansın.

(i) G nin her normal nilpotent K altgrubu ve her $xK \in (G/K) \setminus Z(G/K)$ için $C_{G/K}(xK)$ nilpotent olsun.

(ii) G nin her sonlu üslü özaltgrubu E için $E^G < G$ olsun.

O zaman G nin $\overline{NF}$ -grup olan bir epimorfik görüntüsü vardır.

Bu teoremin, (i) şartının yalnızca G nin kendisi içinde sağlanması halinde, doğru olup olmadığı henüz bilinmemektedir.

Teoremin ispatına geçmeden önce lokal nilpotent p-gruplarının bazı özelliklerini verelim.

Heineken ve Mohamed [7] sayfa 379 de kendi notasyonlarının ifadesiyle

$$|(H')^{m^{n-1}}| \leq C_H(x)$$

özelliğini elde etmişlerdir. [1] Lemma 2.1 de bu özelliğin basit bir genellemesi verilmiş ve bu lemmanın daha genel durumu [3] Lemma 2.1 de verilmiştir. Bu lemma bir çok durumda lokal nilpotent p-gruplarına ait bir problemi, üssü sonlu olan bir gruba indirgemeyi mümkün kıldığından, bu tür problemler için önemli bir yardımcıdır.

Lemma 3.1. H bir G grubunun normal altgrubu ve a , G nin bir elemanı olmak üzere $[H, a] \leq Z(H)$ olsun. m, n pozitif tamsayılar olmak üzere $a^m \in C_G(H)$ ve $\langle a \rangle$ nin $H \langle a \rangle$ daki altnormallik indeksi n olsun. O zaman

$$H^{m^n} \leq C_G(a)$$

dır.

İspat: x , H nin bir elemanı olsun. Hipotezden dolayı $a^m \in C_G(H)$ ve $\langle a \rangle$ nin $H \langle a \rangle$ daki altnormallik indeksi n olduğundan

$$[x, a^m] = 1 \quad \text{ve} \quad [x_{n+1}, a] = 1$$

elde edilir. Ayrıca hipotezden dolayı $[H, a] \leq Z(H)$ olduğundan $[x_{n-1}, a]^{\langle a \rangle}$ abelyan ve aynı zamanda a tarafından normallenir.

Şimdi s üzerine indüksiyonla her $1 \leq s \leq n$ için

$$[x^{m^s}, x_{n-s+1}, a] = 1$$

olduğunu gösterelim. Hipotezden dolayı $a^m \in C_G(H)$ olduğundan

$$1 = [[x_{n-1}, a], a^m]$$

dir. Ayrıca [16] VI.5.a Lemma (3) den dolayı

$$1 = [[x_{n-1}, a], a^m]$$

$$= \prod_{k=1}^m [[x_{n-1}, a], a^k]^{m \choose k}$$

dir. Fakat $[x_{n+1}, a] = 1$ ve dolayısıyla $1 < k \leq m$ için $[x_{n+1}, a] = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
1 &= [x_{,n-1} a], a^m] \\
&= [[x_{,n-1} a], a^m] \\
&= [x^m,_{,n} a]
\end{aligned}$$

dır ve böylece iddiamız $s = 1$ için doğrudur.

Şimdi $1 \leq s < n$ için iddiamız doğru olsun. $s+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
1 &= [[x_{,n-s-1} a], a^{m^{s+1}}] \\
&= [[x_{,n-s-1} a], (a^m)^{m^s}] \\
&= [[x_{,n-s-1} a], a^m]^{m^s} \\
&= [[x_{,n-s-1} a]^{m^s}, a^m]
\end{aligned}$$

dir. [16] VI.5.a. Lemma (3) den dolayı

$$\begin{aligned}
1 &= [[x_{,n-s-1} a]^{m^s}, a^m] = \prod_{k=1}^m [x^{m^s},_{,n-s-1} a],_k a]^{\binom{m}{k}} \\
&= \prod_{k=1}^{s+1} [x^{m^s},_{,n-s-1+k} a]^{\binom{m}{k}}
\end{aligned}$$

dır. Ayrıca indüksiyon hipotezinden dolayı

$$[x^{m^s},_{,n-s+1} a] = 1$$

ve buradan her $1 < k \leq s+1$ için

$$[x^{m^s},_{,n-s+k} a] = 1$$

olduğundan

$$1 = \prod_{k=1}^{s+1} [x^{m^s},_{n-s-l+k} a]^{\binom{m}{k}} = [x^{m^s},_{n-s} a]^m$$

$$= [x^{m^{s+1}},_{n-s} a]$$

elde edilir. Böylece indüksiyon tamamdır. Özel olarak $s = n$ için

$$1 = [x^{m^n}, a]$$

olduğundan

$$H^{m^n} \leq C_H(a)$$

elde edilir.

Lemma 3.2. H , merkezi aşıkâr olan bir mükemmel lokal nilpotent p -group ve N , merkezi sonsuz üslü olan H nin bir normal nilpotent altgrubu olsun. Eğer E , H nin özaltgrubu öyle ki EN nilpotent ve EN/N sonlu üslü ise o zaman $E^H < H$ dir.

İspat $Z = Z(N)$, $c \geq 0$ EN nin nilpotentlik sınıfı ve m de EN/N nin üssü olsun. O zaman her $a \in E$ için $\langle a \rangle Z$ nilpotent ve nilpotentlik sınıfı en fazla c olduğundan $\langle a \rangle$ nin $\langle a \rangle Z$ de altnormallik indeksi en fazla c dir. Ayrıca N , H nin normal altgrubu olduğundan Z de H da normal ve dolayısıyla

$$[Z, a] \leq Z$$

elde edilir. Bundan başka, EN/N nin üssü m olduğundan $a^m \in N \leq C_H(Z)$ dir.

Böylece Lemma 3.1 den dolayı her $a \in E$ için

$$Z^{m^c} \leq C_H(a)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik E nin her elemanı için sağlandığından

$$E \leq C_H(Z^{m^c})$$

elde edilir. Fakat hipotezden Z sonsuz üslü olduğundan $Z^{m^c} \neq 1$ ve H da normaldir. Ayrıca tekrar hipotezden dolayı $Z(H) = 1$ olduğundan $E^H < H$ elde edilir.

NC-p-gruplarının elemanlarının merkezleyenleriyle ilgili olarak aşağıdaki lemmaları verebiliriz.

Lemma 3.3. G bir $\overline{NC}$ -p-grup ve $x \in G \setminus Z(G)$ öyle ki $C_G(x)$ nilpotent olsun. O zaman $C_G(xZ(G))$ de nilpotenttir.

İspat $Z = Z(G)$ olsun. Gözlem 2.4. den dolayı $G = G'$ dür. O zaman [14] Lemma 2.21 (iii) den dolayı

$$1 = [G', Z_2(G)] = [G, Z_2(G)]$$

olduğundan $Z_2(G) \leq Z(G)$ ve böylece $Z_2(G) = Z(G)$ dir. Yani $Z(G/Z(G)) = Z_2(G)/Z(G) = 1$ dir. $x \in G \setminus Z$ ve $U/Z = C_G(xZ)$ olsun. O zaman $x \notin Z$ ve $Z(G/Z) = 1$ olduğundan $U/Z \neq G/Z$ ve dolayısıyla $U \neq G$ dir. Şimdi U nun nilpotent olduğunu gösterelim. Her $u \in U$ için $u \rightarrow [u, x]$ ile verilen homomorfizmanın çekirdeği K olsun. O zaman $K = C_G(x)$ ve böylece hipotezden dolayı K nilpotent ve U da normaldir. Aynı zamanda

$$U/K \cong [U, x] \leq Z$$

dir. $o(x) = m$ olsun. O zaman U nun herhangi bir u elemanı için

$$1 = [u, x^m] = [u, x]^m$$

olduğundan $U/K \cong [U, x]$ sonlu üslü ve üssü en fazla m dir.

Bundan başka $U \neq G$ olduğundan, U bir NC-gruptur. O halde U nun U/V Černikov olacak şekilde normal nilpotent altgrubu Y vardır. O zaman U/KY Černikov ve sonlu üslü olduğundan sonludur.

Böylece U nun $U = F(KY)$ olacak şekilde sonlu F altgrubu vardır. Teorem A (i) den dolayı G , normal nilpotent özaltgrupların bir artan birleşimi olarak yazılabildiğinden G nin $F \leq N$ olacak şekilde bir normal nilpotent özaltgrubu N vardır ve böylece $F^G \leq N < G$ olduğundan F^G , G nin normal, nilpotent özalt grubudur. Ayrıca KY , U nun normal nilpotent altgrubu olduğundan

$$U = (U \cap F^G) KY$$

nilpotenttir.

Lemma 3.4. G , bir $\overline{NC}$ -p-grup öyle ki her $x \in G \setminus Z(G)$ için $C_G(x)$ nilpotent olsun. O zaman $G/Z(G)$ nin aşıkâr olmayan köklü, abelyan altgrubu yoktur.

İspat. $D/Z(G)$, $G/Z(G)$ nin bir köklü, abelyan altgrubu olsun.

Önce $Z(G) = 1$ olduğunu kabul edelim. N , G nin bir normal, nilpotent altgrubu ve $x \in D$ olsun. $\langle x \rangle$, G nin sonlu altgrubu olduğundan $\langle x \rangle \triangleleft G$ ve ayrıca $\langle x \rangle$ nilpotenttir. Fakat N , G nin normal nilpotent altgrubu olduğundan, [12] (1) Lemma dan dolayı $\langle x \rangle N$ nilpotenttir. $Y = Z(\langle x \rangle N) \cap N$ olsun. $\langle x \rangle N$ nilpotent olduğundan $Y \neq 1$ ve $YD \leq C_G(x)$ dir. Hipotezden dolayı $C_G(x)$ nilpotent olduğundan YD nilpotent ve böylece [4] Lemma 2.2. (iii) den dolayı D , $C_G(x)$ i merkezler. Şimdi $DN \leq C_G(Y)$ olduğundan DN nilpotent ve dolayısıyla D , N yi merkezler. Fakat Teorem A. (i) den dolayı G normal nilpotent altgrupların bir altan birleşimi olarak yazıldığından D , G yi merkezler. Fakat $Z(G) = 1$ olduğundan $D = 1$ elde edilir.

Şimdi $Z(G) \neq 1$ olduğunu kabul edelim. $\overline{G} = G/Z(G)$ olsun. O zaman $\overline{G}$ Lemma 3.3.'ün hipotezlerini sağlar. Fakat Gözlem 2.4. den dolayı G

mükemmel olduğundan $Z_2(G) = Z(G)$ ve böylece $Z(\bar{G}) = 1$ dir. O halde ispatın ilk kısmından dolayı $\bar{G}$ nin aşikar olmayan köklü abelyan altgrubu yoktur.

Lemma 3.5. H bir nilpotent grup öyle ki $H/Z(H)$ sonlu üslü olsun. O zaman H' sonlu üslüdür.

İspat. $c \geq 1$, H nın nilpotentlik sınıfı olsun. c üzerine induksiyonla H' nün sonlu üslü olduğunu gösterelim. $c = 1$ ise H abelyan olduğundan $H' = 1$ ve iddia açıktır. Böylece kabul edelim ki $c > 1$ ve iddiamız $c-1$ için doğru olsun. [17] Sayfa 15 deki sonuçdan dolayı.

$$\gamma_c(H) = \langle [x_1, x_2, \dots, x_c] : x_1, \dots, x_c \in H \rangle$$

ve aynı zamanda H nın nilpotentlik sınıfı c olduğundan $\gamma_c(H) \leq Z(H)$ dir. $H/Z(H)$ nın üssü m ve $t = [x_1, \dots, x_c]$ olsun. $t \in Z(H)$ olduğundan

$$t^m = [x_1, \dots, x_c]^m = [x_1^m, \dots, x_c^m]$$

dir. Fakat $x_c^m \in Z(H)$ olduğundan

$$t^m = [x_1, \dots, x_c^m] = 1$$

elde edilir. Üstelik $\gamma_c(H)$ abelyan olduğundan $\gamma_c(H)$ sonlu üslüdür. $\bar{H} = H/\gamma_c(H)$ olsun. O zaman $\bar{H}$ nin nilpotentlik sınıfı $c-1$ olduğundan $(H/\gamma_c(H))' = H'\gamma_c(H)/\gamma_c(H)$ sonlu üslüdür. Fakat $\gamma_c(H)$ sonlu üslü olduğundan H' sonlu üslüdür.

Lemma 3.6. T bir lokal nilpotent p -grup öyle ki $T/Z(T)$ bir HM^* -grup olsun. O zaman $(T/Z(T))'$ sonlu üslü ise T' sonlu üslüdür.

İspat. $Z = Z(T)$ ve $H = T'Z$ olsun. O zaman $Z \leq Z(H)$ ve hipotezden dolayı $H/Z(H)$ sonlu üslü olduğundan Lemma 3.5. den dolayı H' sonlu üslüdür.

Özel olarak T'' sonlu üslüdür. Dolayısıyla $T'' = 1$ olduğunu kabul etmek genelliği bozmaz ve böylece T' abelyandır.

$T'Z/Z$ nin üssü m ve $a \in T'$ olsun. Her $t \in T$ için

$$1 = [a^m, t] = [a, t]^m$$

olduğundan $[a, T]$ sonlu üslü ve üssü $\leq m$ dir. a, T' nün herhangi bir elemanı ve T' abelyan olduğundan $[T', T]$ sonlu üslüdür. Şimdi T/Z bir HM^* -grup olduğundan Lemma 2.6. (i) den dolayı

$$T'Z/Z = [T', T]Z/Z$$

dir. Buradan

$$T'Z = [T', T]Z$$

ve

$$T' = [T', T](T' \cap Z)$$

elde edilir.

Şimdi $\bar{T} = T/[T', T]$ olsun. $\bar{T}' = \bar{T}' \leq \bar{Z}$ olduğundan $\bar{T}$ nilpotenttir. Ayrıca $\bar{T}/\bar{T}'$ köklü abelyan olduğundan [14] Teorem 9.23 (ii) den dolayı $\bar{T}$ abelyandır. Buradan $\bar{T}' = 1$ olduğundan $T' \leq [T', T]$ elde edilir. Fakat $[T', T]$ sonlu üslü olduğundan T' sonlu üslüdür.

Lemma 3.7. T bir lokal nilpotent p -grup ve N , T nin normal nilpotent altgrubu öyle ki T/N bir HM^* -grup olsun. K , N tarafından içerilen T nin normal altgrubu öyle ki N/K sonlu üslü olsun. Eğer W/K , T/K nın tek maksimal HM^* -altgrubu öyle ki T/W sonlu üslü ise o zaman

$$(T/K)' = (W'N')K/K$$

dır.

İspat. $\bar{T} = T/K$ olsun. Hipotezden dolayı $\bar{T}/\bar{N}$ bir HM^* -grup olduğundan $(\bar{T}/\bar{N})/(\bar{T}/\bar{N})'$ köklü abelyan Černikov dur ve ayrıca $\bar{T}/\bar{W}$ sonlu üslü olduğundan

$$\left(\frac{(\bar{T}/\bar{N})}{(\bar{T}/\bar{N})'} \right), \frac{(\bar{W}\bar{N}/\bar{N})(\bar{T}/\bar{N})'}{(\bar{T}/\bar{N})'}$$

köklü abelyan ve aynı zamanda sonlu üslüdür. Aşıkarak bu

$$\frac{(\bar{T}/\bar{N})}{(\bar{T}/\bar{N})'} = \frac{(\bar{W}\bar{N}/\bar{N})(\bar{T}/\bar{N})'}{(\bar{T}/\bar{N})'}$$

demektir. Buradan

$$\bar{T}/\bar{N} = (\bar{W}\bar{N}/\bar{N})(\bar{T}/\bar{N})'$$

elde edilir. $\bar{W}\bar{N}/\bar{N}$, $\bar{T}/\bar{N}$ nin normal altgrubu olduğundan, Lemma 2.6 (ii) den dolayı

$$\bar{T}/\bar{N} = \bar{W}\bar{N}/\bar{N}$$

elde edilir. Böylece $\bar{T} = \bar{W}\bar{N}$ dir.

Şimdi

$$\bar{T}/\bar{W}' = (\bar{W}/\bar{W}')(\bar{N}\bar{W}/\bar{W}')$$

eşitliğin sağ tarafındaki her bir faktör $\bar{T}/\bar{W}'$ nün normal nilpotent altgrubu olduğundan $\bar{T}/\bar{W}'$ nilpotenttir. Üstelik $\bar{W}/\bar{W}'$ köklü abelyana olduğundan [4] Lemma 2.2. (iii) den dolayı

$$\bar{W}/\bar{W}' \leq Z(\bar{T}/\bar{W}')$$

dir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}
 \overline{T} / \overline{W}' &= (\overline{T} / \overline{W}')' \\
 &= \left((\overline{W} / \overline{W}') (\overline{NW} / \overline{W}') \right)' \\
 &= (\overline{W} / \overline{W}')' (\overline{NW} / \overline{W}')' [\overline{W} / \overline{W}', \overline{NW} / \overline{W}'] \\
 &= (\overline{NW}' / \overline{W}')'
 \end{aligned}$$

dir, çünkü $\overline{W}' / \overline{W}' \leq Z(\overline{T} / \overline{W}')$ dür. Buradan

$$\overline{T}' = \overline{N}' \overline{W}'$$

elde edilir.

Lemma 3.8. H bir $\overline{NC}$ - p -grup ve N , Teorem A(i) yi sağlayan H nin bir normal nilpotent altgrubu olsun. Kabul edelim ki H nin sonlu üslü her özaltgrubu E için $E^H < H$ olsun. O zaman T/N , H/N nin bir HM^* -altgrubu ise $T'^H < H$ dır.

İspat: T/N , H/N nin bir HM^* -altgrubu olsun. Teorem A(i) den dolayı T nin normal nilpotent Y altgrubu vardır öyle ki T/Y Černikov ve YN/N sonlu üslüdür. Lemma 2.7 den dolayı $(T/N)' \leq YN/N$ olduğundan $(T/N)' = T'N/N$ sonlu üslüdür. Üstelik Gözlem 2.4. den dolayı H mükemmel gruptur.

$Z = Z(H)$ olsun. $Z \leq N$ olarak almak genelliği bozmaz. Önce kabul edelim ki $Z = 1$ olsun. Eğer $Z(N)$ sonsuz üslü ise o zaman Lemma 3.2 den dolayı $T'^H < H$ dır. Böylece kabul edelim ki $Z(N)$ sonlu üslü olsun. O zaman [14] Teorem 2.23 den dolayı N sonlu üslüdür. Ayrıca $T'N/N$ sonlu üslü olduğundan T' sonlu üslüdür. Böylece hipotezden dolayı $T'^H < H$ dır.

Şimdi $Z \neq 1$ olduğunu kabul edelim. H mükemmel olduğundan $Z(H/Z) = 1$ dir. $\bar{H} = H/Z$ olsun. H bir $\overline{NC}$ -p-grup olduğundan $\bar{H}$ de bir $\overline{NC}$ -p-grubudur. Böylece eğer $Z(\bar{N})$ sonsuz üslü ise ispatın ilk kısmından dolayı

$$\begin{aligned} (T'Z/Z)^{H/Z} &< H/Z \\ \Rightarrow (T'Z)^H / Z &< H/Z \\ \Rightarrow T'^H Z / Z &< H/Z \\ \Rightarrow T'^H &< H \end{aligned}$$

dır. Bundan dolayı $Z(\bar{N})$ nin sonlu üslü olduğunu kabul edebiliriz. [14] Teorem 2.23 den dolayı N/Z sonlu üslüdür. Ayrıca

$$(T'N/Z)/(N/Z) \cong T'N/N$$

sonlu üslü olduğundan $T'N/Z$ sonlu üslüdür. Aynı zamanda T/N bir HM^* -grup olduğundan $(T/Z)/(T'N/Z)$ Černikov dur. Böylece Lemma 2.13 den dolayı T/Z nin tek maksimal HM^* -altgrubu V/Z vardır öyle ki T/V sonlu üslüdür.

Şimdi Lemma 3.7 den dolayı

$$(T/Z)' = (V/Z)'(N/Z)' = (V'N')Z/Z$$

dir ve böylece

$$T' = V'N'(T' \cap Z)$$

elde edilir.

Şimdi $V'^H < H$ olduğunu gösterelim. $T'N/Z$ sonlu üslü ve $V'Z/Z \leq T'N/Z$ olduğundan $(V/Z)'$ sonlu üslüdür. O halde Lemma 3.6 dan dolayı V' sonlu üslüdür. Böylece hipotezden dolayı $V'^H < H$ dir. Ayrıca N, H nin normal altgrubu olduğundan

$$N'^H \leq N^G = N < H$$

dır. O zaman

$$\begin{aligned} (T')^H &= (V'N' (T' \cap Z))^H \\ &\leq V'^H N'^H (T' \cap Z) \end{aligned}$$

dır. Fakat H bir $\overline{NC}$ -p-grubu, dolayısıyla H iki öz normal altgrubun çarpımı olarak yazılamadığından

$$T'^H \leq V'^H N'^H (T' \cap Z) < H$$

dır.

Lemma 3.9. G bir $\overline{NC}$ -p-grup ve N, G nin Teorem A (i) yi sağlayan bir normal nilpotent altgrubu olsun. H/N , G/N nin bütün HM^* -altgrupları tarafından üretilen altgrubu olsun. O zaman ya $H = G$ veya G nin H tarafından içerilen bir normal nilpotent altgrubu K vardır öyle ki G/K bir $\overline{NF}$ -gruptur.

İspat: Kabul edelim ki $H \neq G$ olsun. Açık olarak H, G de normaldir. Önce G/H nin bir $\overline{NF}$ -grup olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki G/H bir $\overline{NF}$ -grup olmasın. O zaman G/H bir NF-grup veya G/H nin NF-grup olmayan bir özalt grubu X/H vardır. Fakat G bir $\overline{NC}$ -grup olduğundan G/H nin NF-grup olması mümkün değildir. Bundan dolayı G/H nin NF-grup olmayan bir X/H özaltgrubu vardır. O zaman X/N bir NC-grup fakat NF-grup olmadığından X/N bir normal nilpotent altgrubun sonsuz Černikov genişlemesidir. Böylece Lemma 2.13 den dolayı X/N nin tek bir maksimal HM^* -altgrubu T/N vardır öyle ki X/T sonlu üslüdür. Hipotezden dolayı $T/N \leq H/N$ ve X/T sonlu üslü olduğundan X/H sonlu üslüdür. Üstelik X/H NC-grup olduğundan nilpotenttir. Fakat X/H bir NF-grup olmadığından bu bir çelişkidir. Bundan dolayı G/H bir $\overline{NF}$ -gruptur.

Şimdi H, G nin bir NC-altgrubu olduğundan H/K Černikov olacak şekilde bir normal nilpotent K altgrubu vardır. H, G nin normal altgrubu

olduğundan [10] Lemma 4.7 den dolayı K yı G de normal kabul edebiliriz. $\bar{G} = G/K$ olsun. $\bar{H}$ Černikov olduğundan ve [14] Teorem 3.29 (2) den dolayı

$$\frac{\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{H})}{\bar{H}C_{\bar{G}}(\bar{H})/C_{\bar{G}}(\bar{H})} \cong \frac{\bar{G}}{\bar{H}C_{\bar{G}}(\bar{H})}$$

Černikov dur. Fakat Gözlem 2.4. den G mükemmel ve dolayısıyla $\bar{G}$ mükemmel olduğundan

$$\bar{G} = \bar{H}C_{\bar{G}}(\bar{H})$$

dır ve $\bar{G}$ iki öz normal NC-altgrubun çarpımı olarak yazılamadığından, bu ancak $\bar{G} = C_{\bar{G}}(\bar{H})$ olmasıyla mümkündür. Böylece $\bar{H} \leq Z(\bar{G})$ dir. Üstelik $\bar{G}/\bar{H}$ bir $\overline{NF}$ -grup olduğundan kolayca görüldüğü gibi $\bar{G}$ bir $\overline{NF}$ -gruptur.

Lemma 3.10. G bir $\overline{NC}$ -p-grup olsun. Kabul edelim ki her $i \geq 1$ için T_i ler G nin normal HM^* -altgrupları öyle ki $T_i' \leq T_{i+1}'$ olmak üzere

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i'$$

olsun. O zaman bir $i \geq 1$ için $K \leq T_i'$ olacak şekilde G nin normal nilpotent K altgrubu vardır ve G/K nin merkezinde olmayan ve merkezleyeni nilpotent olmayan bir elemanı vardır.

İspat: $T_k' \neq 1$ olacak şekilde en küçük tamsayı $k \geq 1$ ve $S = T_k$ olsun. Hipotezden S , G de normal HM^* -altgrubu olduğundan S/S' , G/S' nün köklü abelyan ve Černikov altgrubudur. O zaman [14] Teorem 3.29 (2) den dolayı

$$\frac{G/S'}{C_{G/S'}(S/S')}$$

sonludur. Fakat Gözlem 2.4 den G mükemmel olduğundan $G/S' = C_{G/S'}(S/S')$ ve böylece $S/S' \leq Z(G/S')$ dır. Buradan özel olarak $[S, G] \leq S'$ elde edilir.

$i > k$ ve $T = T_i$ olarak alalım. Önce S' nün elemanter abelyan olduğunu kabul edelim. $D = [S', T']$ ve $\bar{G} = G/D$ olsun. O zaman

$$[\bar{S}', \bar{T}'] = 1$$

ve aynı zamanda $[S, G] \leq S'$ olduğundan $[\bar{S}, \bar{G}] \leq \bar{S}'$ dir. $[\bar{T}, \bar{G}] \leq \bar{T}'$ dır. $s \in S$ ve $u \in T'$ elemanlarını alalım. O zaman kabulden dolayı $\bar{S}'$ elemanter abelyan ve $[\bar{s}, \bar{u}] \in Z(\bar{T}')$ olduğundan

$$[\bar{s}, \bar{u}^p] = [\bar{s}, \bar{u}]^p = 1$$

dir. Böylece s ve u , sırasıyla S ve T' nün herhangi elemanları olduğundan

$$[\bar{S}, (\bar{T}')^p] = 1$$

dir.

Bundan başka kolayca görüldüğü gibi

$$G^p = \bigcup_{i=1}^{\infty} (T_i')^p = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i' = G$$

dir. Çünkü Lemma 2.6 (ii) den dolayı $\forall i \geq 1$ için $T_i^p = T_i$ olduğundan $T_i' \leq G^p$

dir. Dolayısıyla $(\bar{T}_i')^p \not\leq Z(\bar{G})$ olacak şekilde $i > k$ seçilebilir. Şimdi $T = T_i$ ve

$\bar{t} \in (\bar{T}')^p \setminus Z(\bar{G})$ olsun. O zaman $[\bar{S}, (\bar{T}')^p] = 1$ olduğundan

$$\bar{S} \leq C_{\bar{G}}(\bar{t}) < \bar{G}$$

ve $\bar{S}' \neq 1$ olduğundan $\bar{S}$ nilpotent değildir. Üstelik

$$D = [S', T'] \leq S'$$

olduğundan D nilpotenttir.

Şimdi $\overline{G} = G/S''(S')^p$ olsun. Mümkünse $\overline{S}' = 1$ olsun. O zaman $S' = S''(S')^p$ ve ayrıca S' nilpotent olduğundan [14] Lemma 2.22 den dolayı $S' = (S')^p$ ve böylece S'/S'' köklü abelyandır. Bu ise [14] Teorem 9.23 (ii) den dolayı S' nün köklü abelyan olmasını gerektirir. Bundan başka S nin her sonlu altgrubu F , altnormal olduğundan FS' , S nin normal nilpotent bir alt grubudur. Ayrıca S' köklü normal abelyan altgrup olduğundan [14] Lemma 3.13 den $[S', FS'] = 1$ ve buradan özel olarak

$$[F, S'] = 1$$

elde edilir.

Yani S' , F yi merkezler. F , S nin herhangi bir sonlu altgrubu olduğundan $S' \leq Z(S)$ dir. O zaman Lemma 2.6 (i) den dolayı

$$S' = [S', S] = 1$$

dir, bu ise bir çelişkidir. O halde $\overline{S}' \neq 1$ dir. Şimdi ilk durumda olduğu gibi, $i > k$ bulabiliriz. Öyle ki $\overline{D} = [\overline{S}, \overline{T}_i']$ ise o zaman $\overline{G}/\overline{D}$ nin merkezinde olmayan, merkezleyeni nilpotent olmayan bir elemanı vardır. Aynı zamanda

$$D = [S', T_i'] S''(S')^p \leq S'$$

dir. Böylece $D \leq S'$ olduğundan D nilpotenttir. Buradan $K = D$ alınabilir.

Artık Teorem 1'in ispatını tamamlayabiliriz.

Teorem 1 in ispatı. Kabul edelim ki iddiamız doğru olmasın. Gözlem 2.4 den G mükemmeldir. N , G nin Teorem A(i) de verilen normal nilpotent altgrup olsun.

Önce G/N nin bir HM^* -alt grubunun olduğunu gösterelim. G/N bir $\overline{NF}$ -grup olmadığından, G/N nin NF -grup olmayan X/N özalt grubu vardır. Teorem A(i) den dolayı X in X/Y sonsuz Černikov olacak şekilde bir normal nilpotent Y alt grubu vardır ve YN/N sonlu üslüdür. Böylece Lemma 2.13 den dolayı X/N nin bir tek maksimal HM^* -alt grubu W/N vardır öyle ki X/W sonlu üslüdür.

Önce G/N nin her HM^* -alt grubunun G/N nin bir normal HM^* -alt grubu tarafından içerildiğini gösterelim. T/N , G/N nin bir HM^* -alt grubu olsun. $L = T'^G N$ ve $\overline{G} = G/L$ olsun. Şimdi hipotez (ii) den ve Lemma 3.8 den dolayı $T'^G < G$ dir. Ayrıca N , G nin normal özalt grubu olduğundan ve G iki normal özalt grubunun çarpımı olarak yazılamadığından

$$L = T'^G N < G$$

dir.

Şimdi L nin G de nilpotent olduğunu gösterelim. Lemma 2.7 den dolayı $T'N/N \leq YN/N$ ve YN/N sonlu üslü olduğundan $T'N/N$ sonlu üslüdür. Böylece hipotezden ve [3] Lemma 2.3 den dolayı $(T'N/N)^G$ sonlu üslü nilpotenttir. Dolayısıyla

$$L/N = T'^G N/N = (T'N/N)^G$$

olduğundan L/N sonlu üslü ve nilpotenttir. Fakat L bir NC -grup olduğundan L/K Černikov olacak şekilde normal nilpotent K alt grubu vardır. Böylece L/NK sonlu üslü ve Černikov olduğundan sonludur. Bundan dolayı $L = (NK)^F$ olacak şekilde L nin sonlu F alt grubu vardır. F , L nin altnormal alt grubu ve NK normal nilpotent alt grup olduğundan [12] (1) Lemma'dan dolayı L nilpotenttir. Sonuç olarak $\overline{G}$

hipotezin (i) şikkını sağlar. Ayrıca $\overline{T}, \overline{G}$ nin köklü abelyen altgrubu olduğundan Lemma 3.4 den dolayı $\overline{T} \leq Z(\overline{G})$ dir. Böylece özel olarak LT, G de normaldir.

Lemma 2.13 den dolayı LT/N nin tek maksimal HM^* -altgrubu W/N vardır. Açık olarak W/N nin maksimalliğinden ve tekliğinden dolayı $T/N \leq W/N$ ve ayrıca $LT/N, G$ de normal olduğundan $W/N, G/N$ nin normal alt grubudur. Böylece ara iddia gösterilmiş olur.

Şimdi $P, G/N$ nin bütün normal HM^* -altgruplarının kümesi ve

$$H/N = \langle T/N : T/N \in P \rangle$$

olsun. O zaman H, G nin normal altgrubu ve G/N nin her HM^* -altgrubu H/N tarafından içerilir. Eğer $H \neq G$ ise Lemma 3.9 dan dolayı G nin H tarafından içerilen bir normal nilpotent K altgrubu vardır öyle ki G/K bir $\overline{NF}$ -gruptur. Fakat bu kabulumüzden dolayı bir çelişkidir. Böylece $H = G$ olduğunu kabul edebiliriz.

Şimdi $\overline{G} = G/N$ olsun. P nin elemanlarının bir artan zinciri

$$\overline{T}_1 \leq \overline{T}_2 \leq \dots \leq \overline{T}_n \leq \dots \quad (1)$$

ve

$$\overline{T} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T}_n$$

olsun. Önce kabul edelim ki $\overline{T} = \overline{G}$ olsun. O zaman $\overline{G} = \overline{G}'$ olduğundan

$$\overline{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T}'_n$$

dir. Aynı zamanda Lemma 2.7 den dolayı

$$\overline{T}'_n \leq \overline{T}'_{n+1}$$

dir. Bundan dolayı Lemma 3.10 dan $\overline{G}$ nin bir normal nilpotent $\overline{K}$ altgrubu vardır öyle ki bir $n \geq 1$ için $\overline{K} \leq \overline{T}_n'$ ve $\overline{G}/\overline{K}$ nin merkezinde olmayan ve merkezleyeni nilpotent olmayan bir elemanı vardır. Fakat aynı zamanda yukarda L nin durumunda olduğu gibi T' yerine T_n' alınırsa $T_n'N$ nin nilpotent olduğunu gösterir. Özel olarak $K \leq T_n'N$ olduğundan K nilpotenttir. O zaman G/K nin merkezinde olmayan ve merkezleyeni nilpotent olmayan bir elemanı olduğundan bu (i) ile çelişir. Sonuç olarak $\overline{T} \neq \overline{G}$ edilir.

Şimdi $\overline{T}$ bir NC-grup olduğundan, bir önceki paragraftan, N nin tanımından ve Lemma 2.13 den dolayı $\overline{T}$ nin bir tek maksimal HM*-altgrubu $\overline{W}$ vardır. Bundan dolayı $\overline{T} = \overline{W}$ dir. Yani $\overline{T}$ bir HM*-gruptur. Şimdi her $n \geq 1$ için $\overline{T}_n \overline{T}' / \overline{T}'$ köklü abelyan ve

$$\overline{T}_n \overline{T}' / \overline{T}' \leq \overline{T}_{n+1} \overline{T}' / \overline{T}'$$

dür. Fakat $\overline{T} / \overline{T}'$ köklü abelyan ve Černikov olduğundan

$$\overline{T}_n \overline{T}' / \overline{T}' = \overline{T} / \overline{T}'$$

olacak şekilde bir $n \geq 1$ vardır. Böylece Lemma 2.6.(ii) den dolayı

$$\overline{T} = \overline{T}_n \overline{T}' = \overline{T}_n$$

dir. Bundan dolayı (1) formundaki herhangi bir artan zincir sonludur, bu ise P nin herhangi bir elemanının P nin bir maksimal elemanı tarafından içerildiğini gösterir.

$\overline{G} = \overline{H}$ olduğundan, $\overline{G}$, P nin elemanları tarafından üretilir. Fakat yukarıda görüldüğü gibi, P nin her elemanı P nin bir maksimal elemanı tarafından içerildiğinden, P nin birbirinden farklı $\overline{U}$ ve $\overline{V}$ gibi en az iki maksimal elemanı olmalıdır. $\overline{Y} = \overline{U} \overline{V}$ olsun. G iki normal özaltgrubunun çarpımı olarak yazılamadığından $\overline{Y} \neq \overline{G}$ dir. O zaman $\overline{Y}$ bir NC grup olduğundan Lemma 2.13 den dolayı $\overline{Y}$ nin bir maksimal HM*-altgrubu $\overline{R}$ vardır. Aynı zamanda $\overline{Y}, \overline{G}$ de

normal olduğundan $\overline{R}$ de $\overline{G}$ de normal ve böylece $\overline{R} \in P$ dir. Fakat $\overline{R}$ nin maksimalliğinden $\overline{U}, \overline{V} \leq R$ olduğundan $\overline{U} = \overline{V}$ olur. Bu ise çelişkidir. Böylece Teoremin ispatı tamamlanır.



BÖLÜM 4

HER ÖZALTGRUBU NC-GRUP OLAN BİR GRUBUN NF-GRUP OLMA ŞARTI

Bu bölümde her özaltgrubu NC-grup olan bir lokal nilpotent p - grubunun kendisinin NF-olması için bir yeter şart verilmiştir. Böylece Arıkan ve Asar'ın [2] de verilen Teorem C nin bir genellemesi elde edilmiştir.

Şimdi yukarıda sözü edilen esas teoreminin ifadesini verelim.

Teorem 2. G , her özaltgrubu NC-grup olan bir lokal nilpotent p -grup olsun. Kabul edelim ki G nin her sonlu altgrubu F için $F^G = G$ veya F^G bir FC-grup olsun. O zaman G bir NF-gruptur.

(Kolayca görüldüğü gibi sonsuz lokal dihedral 2-grubu D_{2^∞} , Teorem 2 nin . hipotezini sağlar.)

Artık [2] de verilen Teorem C yi Teorem 2 nin bir sonucu olarak verebiliriz. Bilindiği gibi Teorem C de her özaltgrubu NC-grup olan bir lokal nilpotent p - grubun, her normal nilpotent özaltgrubu bir CC-grubunun Černikov genişlemesi ise bu grubun NC-grup olduğu gösterilmiştir.

Sonuç. ([2], Teorem C) G , her özaltgrubu NC-grup olan bir lokal nilpotent p - grubu olsun. Kabul edelim ki G nin her normal nilpotent N altgrubu için, D , N nin bir CC-altgrubu olmak üzere N/D Černikov olsun. O zaman G bir NC-gruptur.

Teorem 2 nin ispatına geçmeden önce, teoremin ispatı için gerekli olan lemmaların ifade ve ispatlarını verelim.

Aşağıdaki Lemma [2] Lemma 3.1 in bir genellemesidir.

Lemma 4.1. T bir lokal nilpotent p -grup ve K , T nin bir normal nilpotent altgrubu olmak üzere T/K köklü abelyan grup olsun. N , K tarafından içerilen T nin bir normal CC-altgrubu olsun. Eğer her $t \in T$ için $\langle N, t \rangle$ bir CC-grup ise c , K nin nilpotentlik sınıfı olmak üzere $N \leq Z_c(T)$ dir. Özel olarak $N = K$ ise T nilpotent ve T nin nilpotentlik sınıfı $\leq c + 1$ dir.

İspat: Her $1 \leq i \leq c$ için $A_i = N \cap Z_i(K)$ olsun. i üzerine indüksiyonla $A_i \leq Z_i(T)$ olduğunu gösterelim. $t \in T$ olsun. O zaman $A_1 \leq Z(K)$ olduğundan

$$B = [K \langle t \rangle, A_1] = [\langle t \rangle, A_1]$$

dir. Hipotezden dolayı $A_1 \langle t \rangle$ bir CC-grup olduğundan Teorem 1.1 (i) den dolayı B , Černikov dur. Aynı zamanda B , T de normaldir. Böylece [14] Teorem 3.29.2 den dolayı $T/C_T(B)$ sonludur. Üstelik $K \leq C_T(B)$ ve hipotezden T/K köklü abeliyan olduğundan $T/C_T(B)$ köklü abeliyandır. O zaman

$$B = [t, A_1] \leq Z(T)$$

dir. Burada t , T nin keyfi bir elemanı olduğundan

$$[T, A_1] \leq Z(T)$$

dir.

Şimdi $y \in T$, $a \in A_1$ ve $o(a) = m$ olsun. T/K köklü grup olduğundan bir $s \in T$ vardır öyle ki $yK = s^m K$ dir. Özel olarak $y = s^m c$ olacak şekilde $c \in K$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} [y, a] &= [s^m c, a] = [s^m, a] \\ &= [s, a]^m \\ &= [s, a^m] \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan $[y, a] = 1$ bulunur. y ve a , sırasıyla T ve A_1 in keyfi elemanları olduğundan

$$[T, A_1] = 1$$

elde edilir. Böylece iddia $i = 1$ için doğrudur.

Şimdi $i > 1$ ve iddia $i-1$ için doğru olsun. $\bar{T} = T/Z_{i-1}(K)$ olsun. $\bar{T}$ nin hipotezi sağladığı açıktır. Üstelik $\bar{A}_i \leq \bar{N} \cap Z(\bar{K})$ olduğundan, ispatın ilk kısmından dolayı $\bar{A}_i \leq Z(\bar{T})$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} [A_i, T] &\leq Z_{i-1}(K) \cap T \\ &= A_{i-1} \leq Z_{i-1}(T) \end{aligned}$$

olduğundan $A_i \leq Z_i(T)$ elde edilir. O halde induksiyon tamadır. Özel olarak $i = c$ için

$$N \cap Z_c(K) = A_c \leq Z_c(T)$$

dir ve ayrıca K nin nilpotentlik sınıfı c olduğundan

$$N \cap K \leq Z_c(T)$$

dir.

Şimdi $N = K$ ise o zaman $K \leq Z_c(T)$ ve T/K abelyan olduğundan $T/Z_c(T)$ abelyandır. Böylece $Z_{c+1}(T) = T$ elde edilir.

Aşağıdaki lemma [2] Lemma 3.4 ün basit bir genellemesidir.

Lemma 4.2: G bir $\overline{NC}$ - p -grup ve bir $n \geq 1$ için E , G nin $N_n C$ -grubu olan, bir normal CC -altgrubu olsun. O zaman E nin nilpotentlik sınıfı $\leq n + 2$ dir.

İspat: Gözlem 2.4 den dolayı G nin her sonlu altgrubu G de altnormaldir. Ayrıca E , G nin bir CC -altgrubu olduğundan [2] Lemma 3.2 den dolayı bir FC -

altgrubudur. Hipotezden dolayı E bir $N_n C$ -grup olduğundan E nin E/K Černikov olacak şekilde normal $K \in N_n$ altgrubu vardır. $R/K = (E/K)^o$ olsun. O zaman Lemma 4.1. (veya [2] Lemma 3.1) den dolayı $R \in N_{n+1}$ dir. Bundan başka E/R sonlu olduğundan $E = FR$ olacak şekilde E nin bir sonlu F altgrubu vardır.

E bir FC-grup olduğundan F^E , E nin sonlu normal altgrubudur. $C = C_E(F^E)$ olsun. O zaman E/C sonludur.

Şimdi her $i \geq 1$ için

$$C_i = C \cap Z_i(R)$$

olsun. Her $i \geq 1$ için

$$\begin{aligned} [C_i, E, \dots, E]_{\leftarrow i \rightarrow} &= [C_i, F^E R, \dots, F^E R]_{\leftarrow i \rightarrow} \\ &= [C_i, R, \dots, R]_{\leftarrow i \rightarrow} \end{aligned}$$

dir. Fakat $C_i \leq Z_i(R)$ olduğundan

$$[C_i, E, \dots, E]_{\leftarrow i \rightarrow} = [C_i, R, \dots, R]_{\leftarrow i \rightarrow} = 1$$

ve dolayısıyla $C_i \leq Z_i(R)$ dir. Özel olarak $i = n+1$ için $Z_{n+1}(R) = R$ olduğundan

$$C \cap R = C_{n+1} \leq Z_{n+1}(E)$$

dir. Fakat E/C ve E/R sonlu olduğundan $E/C \cap R$ sonlu ve böylece $E/Z_{n+1}(E)$ sonludur. Ayrıca E, G de normal olduğundan $Z_{n+1}(E)$ de G de normaldir.

$\overline{G} = G/Z_{n+1}(E)$ olsun. O zaman $\overline{G}/C_{\overline{G}}(\overline{E})$ sonludur. Fakat Gözlem 2.4 den dolayı G mükemmel olduğundan $\overline{G} = C_{\overline{G}}(\overline{E})$ dir. Buradan $[E, G] \leq Z_{n+1}(E)$ elde edilir. O zaman $E' \leq Z_{n+1}(E)$ olduğundan $E/Z_{n+1}(E)$ abelyandır. Bundan

dolayı $E = Z_{n+2}(E)$ dir.

Lemma 4.3. H bir NC-p-grup F , H nin bir sonlu altgurubu öyle ki F^H bir FC-grup olsun. O zaman F^H nilpotenttir.

İspat. $L = F^H$ olsun. Hipotezden L , H nin bir normal FC-altgrubudur. Ayna zamanda L bir NC-grup olduğundan L/K Černikov olacak şekilde L nin normal nilpotent K altgrubu vardır.

$\bar{L} = L/K$ ve $(\bar{L})^\circ = \bar{R}$ olsun. $\bar{L}$ bir FC-grup olduğundan $\bar{L}$ nin her $\bar{x}$ elemanı için

$$|\bar{L} : C_{\bar{L}}(\bar{x})| < \infty$$

dur. Böylece

$$|\bar{R} : \bar{R} \cap C_{\bar{L}}(\bar{x})| = |\bar{R} : C_{\bar{R}}(\bar{x})| < \infty$$

dur. Fakat $\bar{R}$ köklü abelyan olduğundan $\bar{R} = C_{\bar{L}}(\bar{x})$ dir ve böylece $\bar{R} \leq Z(\bar{L})$ elde edilir. Fakat $\bar{L}/\bar{R}$ sonlu dolayısıyla nilpotent olduğundan $\bar{L}$ nilpotenttir. Özel olarak $\bar{L}$ nin mertebeleri yukarıdan sınırlı olan bütün elemanlarının kümesi $\bar{L}$ nin bir sonlu altgrubunu üretir. Bundan dolayı

$$\bar{L} = L/K = F^H K/K$$

sonludur. O zaman $L = EK$ olacak şekilde L nin sonlu E alt grubu vardır. Dolayısıyla $L = E^L K$ dir. Burada K , L nin normal nilpotent altgrubu ve hipotezden L bir FC-grup olduğundan E^L , L nin bir sonlu normal altgrubu ve dolayısıyla nilpotenttir. Bundan dolayı $L = E^L K$ nilpotenttir.

Lemma 4.4. H bir NC-p-grup olsun. Eğer H nin her sonlu F altgrubu için F^H bir FC-grup ise o zaman H nilpotenttir.

İspat: H bir NC-grup olduğundan H/K Černikov olacak şekilde H nin normal nilpotent bir K altgrubu vardır. $T/K = (H/K)^\circ$ olsun. O zaman H/T sonlu olduğundan $H = YT$ olacak şekilde H nin sonlu bir Y altgrubu vardır. $H = Y^H T$ ve Lemma 4.3. den dolayı Y^H nilpotent ve H da normal olduğundan H nin nilpotentliğini göstermek için T nin nilpotent olduğunu göstermek yeterlidir.

c , K nin nilpotentlik sınıfı olsun. F , K nin herhangi bir sonlu altgrubu ve $L = F^T$ olsun. O zaman K , T nin normal altgrubu olduğundan

$$L = F^T \leq K$$

dır. Böylece L , T nin bir normal FC-altgrubudur. Aynı zamanda T nin her t elemanı için $\langle F, t \rangle$, H nin sonlu altgrubu olduğundan hipotezden dolayı $\langle F, t \rangle^H$ bir FC-gruptur. Ayrıca

$$L \langle t \rangle = F^T \langle t \rangle \leq \langle F, t \rangle^T \leq \langle F, t \rangle^H$$

olduğundan $L \langle t \rangle$ de bir FC-gruptur. Böylece Lemma 4.1 den dolayı $F \leq Z_c(T)$ ve F , K nin herhangi bir sonlu altgrubu olduğundan $K \leq Z_c(T)$ elde edilir. Bundan dolayı T/K abelyan olduğundan $T/Z_c(T)$ abelyan ve böylece $T = Z_{c+1}(T)$ dir. Yani T nin nilpotent olduğu gösterilmiş olur.

Lemma 4.5. H bir NC- p -grup öyle ki H nin her sonlu F altgrubu için $F^H = H$ veya F^H bir FC-grup olsun. O zaman H bir NF-gruptur.

İspat. H bir NC-grubu olduğundan H/K Černikov olacak şekilde H nin bir normal nilpotent altgrubu K vardır. $T/K = (H/K)^\circ$ olsun. O zaman T/K köklü abelyan Černikov ve H/T sonludur. Eğer $T/K = 1$ ise H/K sonlu ve ayrıca K nilpotent olduğundan H bir NF-gruptur. O halde $T/K \neq 1$ olduğunu kabul edebiliriz. F , T nin herhangi bir sonlu alt grubu ve $|F| = m$ olsun. O zaman

$$FK/K \leq \Omega_m(T/K) \text{ char } T/K$$

olduğundan $\Omega_m(T/K)$, H/K nin normal alt grubudur. Böylece $F^H K/K \leq \Omega_m(T/K)$ olduğundan $F^H K/K$ sonludur. Buradan $F^H K/K < T/K$ olduğundan

$$F^H < T \leq H$$

elde edilir. Böylece hipotezden dolayı F^H bir FC-grup budur. O halde Lemma 4.4 den dolayı T nilpotent ve böylece H bir NF-gruptur.

Artık Teorem 2 nin ispatını tamamlayabiliriz.

Teorem 2 nin ispatı. Kabul edelim ki G bir NF-grup olmasın. Eğer $G' < G$ ise Teorem A(ii) den dolayı G bir NC-gruptur. O zaman Lemma 4.5. den dolayı G bir NF-grup olur ki bu bir çelişkidir. O halde $G = G'$ olsun. X , G nin bir özalt grubu olsun. X in her sonlu F alt grubu Teorem A(i) den dolayı G nin bir normal nilpotent özalt grubu içinde olduğundan

$$F^G < G$$

dir. O zaman hipotezden F^G bir FC-grup dolayısıyla F^X bir FC-grup olduğundan Lemma 4.4 den dolayı X nilpotenttir. Yani G nin her özalt grubu nilpotent olduğundan G bir mükemmel $\overline{NF}$ -gruptur.

Önce G nin sayılabilir sonsuz grup olduğunu gösterelim. G nilpotent olmadığından her $i \geq 1$ için G nin nilpotentlik sınıfı i den büyük ve $F_i < F_{i+1}$ olacak şekilde sonlu bir F_i alt grubu vardır. Açık olarak

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

nilpotent olmadığından ve G bir $\overline{NF}$ -grup olduğundan $F = G$ dir.

Şimdi her $i \geq 1$ için

$$E_i = F_i^G$$

olsun. O zaman E_i , G nin FC-altgrubu ve E_i nin tanımından $E_i \leq E_{i+1}$ dir. Bundan başka $F = G$ olduğundan

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

dir.

$a \in G \setminus Z(G)$ ve $C = C_G(a)$ olsun. $C \neq G$ olduğundan yukarıda gösterildiği gibi C nilpotenttir. C nin nilpotentlik sınıfı $n \geq 1$ olsun. $a \in E_1$ olarak almak genelliği bozmaz. O zaman E_i bir FC-grup olduğundan

$$|E_i : E_i \cap C| = |E_i : C_{E_i}(a)| < \infty$$

dur.

$$D_i = \bigcap_{x \in E_i} (C_{E_i}(a))^x$$

olsun. O zaman $D_i < E_i$ ve E_i / D_i sonludur. Üstelik $D_i \leq C_{E_i}(a)$ olduğundan D_i nilpotentlik sınıfı $\leq n$ olan bir nilpotent gruptur. O halde $i \geq 1$ için E_i bir $N_n F$ ve dolayısıyla $N_n C$ -grup olduğundan Lemma 4.3. den dolayı E_i nilpotent ve nilpotentlik sınıfı $\leq n + 2$ dir. O zaman $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ nilpotent ve nilpotentlik sınıfı $\leq n + 2$ dir. Fakat G nilpotent olmadığından bu bir çelişkidir.

Sonuç'un İspatı. Kabul edelim ki G bir NC-grup olmasın. O zaman G bir $\overline{NC}$ -grup olduğundan Gözlem 2.4. den dolayı $G = G'$ dür. F , G nin bir sonlu alt grubu olsun. G mükemmel olduğundan $F \leq E'$ olacak şekilde G nin bir sonlu E altgrubu vardır. Teorem A (i) den dolayı G normal nilpotent altgrupların bir artan birleşimi olduğundan G nin bir $E \leq N$ olacak şekilde normal nilpotent N altgrubu

vardır. D, N nin CC-merkezi olsun. O zaman D, G de normal ve hipotezden dolayı N/D Černikov dur. $\overline{G} = G/D$ olsun. O zaman [14] Teorem 3.29 (2) den dolayı $\overline{G}/C_{\overline{G}}(\overline{N})$ Černikov dur. Fakat $G = G'$ olduğundan buradan $\overline{G} = C_{\overline{G}}(\overline{N})$ olduğu elde edilir. O halde $[N, G] \leq D$ dir.

Özel olarak $N' \leq D$ dir. Fakat

$$F \leq E' \leq N'$$

olduğundan, $F \leq D$ dir ve $D \triangleleft G$ olduğundan $F^G \leq D$ dir. Üstelik [2] Lemma 3.2 den dolayı D bir FC-grup olduğundan F^G FC-gruptur. F, G nin herhangi bir sonlu altgrubu olduğundan böylece Teorem 2 nin hipotezi sağlanır. Fakat o zaman G bir NF-grup olduğundan bir çelişki elde edilir. Böylece ispat tamamdır.

KAYNAKLAR

1. Asar, A.O., "On nonnilpotent p-groups and the normalizer condition", Tr. J. of Math. 18 (1994), 114-129.
2. Arıkan, A., Asar, A.O., "On periodic groups in which every proper subgroups is an NC-group", Turkish J. of Math. 18 (1994), 255-262.
3. Asar, A.O., "On $\overline{\text{NC}}$ -p-groups satisfying the normalizer condition" (submitted for publication).
4. Asar, A.O., "An elementary proof of Hartley's Lemma", M.E.T.U. Journal of Pure and Applied Sciences Vol. 18, No. 2, pp. 165-170 (1985).
5. Bruno, B. "On p-groups with nilpotent-by-finite" proper subgroups, Boll. Un. Mat. Ital (7) 3-A 45-51 (1989).
6. Otal, J. and Peña J. M. "Groups in which every proper subgroups is Chernikov by nilpotent or nilpotent by Černikov", Arch. Mat. 51 (1988), 193-197.
7. Heineken, H. And Mohamed, I.J., "A group with trivial center satisfying the normalizer condition" J. Algebra, 10 (1968), 368-376.
8. Meldrum, J.D.P., "Heineken-Mohamed groups", J. Algebra, 27 (1973), 437-444.
9. Hartley, B., "A note on the normalizer condition", Cambridge Philos. Soc. 743 (1973), 11-15.
10. Hartley, B., "Periodic locally soluble groups containing an element of prime order with Černikov centralizer", Quart. J. Math., Oxford (2) 33 (1992), 309-323
11. Bruno, B. Phillip, P.E., "On multipliers of Heinken-Mohamed groups", Rend. Sem. Mat. Padova 85 (1991), 133-145.

12. Möhres, W., "Torsionsgruppen deren Untergruppen alle subnormal sind, *Geometriae Dedicata*, 31 (1988), 237-244.
13. Menegazzo, F., "Groups of Heineken-Mohamed type" *J. Algebra*, 171 (1995), 807-825.
14. Robinson D.I.S. *Finiteness conditions and generalized solvable groups* vols. I,II Springer-verlag, Berlin 1972.
15. Hartley B. J. Otal, M. Peña, "Locally graded minimal non cc-groups are p-groups", *Arch. Math.* Vol 57, 209-221 (1991).



ÖZGEÇMİŞ

Aynur YALINCAKLI 1964 Sivas’da doğdu. İlk öğrenimini Sivas’da Devrim İlkokulunda ve orta öğrenimini Dört Eylül Ortaokulunda ve Sivas Lisesinde yaptı. Üniversite Lisans öğrenimini Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi, Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Anabilim Dalında tamamladı.

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisansını tamamladı. Halen Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

