

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**HERMİTE TİPLİ MİLNE-THOMSON POLİNOMLARININ ÜRETEÇ
FONKSİYONLARI VE BUNLARIN HESAPLAMALI BİLİMLERDEKİ
UYGULAMALARI**

Neslihan KILAR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

NİSAN 2021

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**HERMİTE TİPLİ MİLNE-THOMSON POLİNOMLARININ ÜRETEÇ
FONKSİYONLARI VE BUNLARIN HESAPLAMALI BİLİMLERDEKİ
UYGULAMALARI**

Neslihan KILAR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

NİSAN 2021

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HERMİTE TİPLİ MİLNE-THOMSON POLİNOMLARININ ÜRETEÇ
FONKSİYONLARI VE BUNLARIN HESAPLAMALI BİLİMLERDEKİ
UYGULAMALARI**

Neslihan KILAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

**Bu tez T.C. Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon
Birimi tarafından FDK-2020-5276 nolu proje ile desteklenmiştir.**

NİSAN 2021

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERMİTE TİPLİ MİLNE-THOMSON POLİNOMLARININ ÜRETEÇ
FONKSİYONLARI VE BUNLARIN HESAPLAMALI BİLİMLERDEKİ
UYGULAMALARI

Neslihan KILAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez 19/04/2021 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Dr. Öğr. Üyesi İrem KÜÇÜKOĞLU

Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE PAÇIN

Dr. Öğr. Üyesi Üyesi Füsun YALÇIN

ÖZET

HERMİTE TIPLİ MİLNE-THOMSON POLİNOMLARININ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE BUNLARIN HESAPLAMALI BİLİMLERDEKİ UYGULAMALARI

Neslihan KILAR

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Nisan 2021; 150 sayfa

Bu tezde, Hermite tipli Milne-Thomson polinomları ve bunların üreteç fonksiyonları çalışılmıştır. Euler formülü ve trigonometrik fonksiyonlar yardımıyla inşa edilen bu üreteç fonksiyonları kullanılarak, r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli bazı polinom aileleri de çalışılmıştır. Bernoulli tipli sayı ve polinom aileleri, Euler tipli sayı ve polinom aileleri, Genocchi tipli sayı ve polinom aileleri, Stirling sayıları gibi iyi bilinen bazı özel sayı ve polinom ailelerinin tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir. Elde edilen yeni üreteç fonksiyonları ve bunların fonksiyonel denklemleri, özel integral formülleri ve trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak, r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson polinomları, r -parametrelili Hermite tipli polinomları ve diğer bazı özel polinom ailelerini içeren formüller, bağıntılar ve özdeşlikler verilmiştir. Ayrıca, yüksek mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları, yüksek mertebeden Apostol-Euler sayıları, yüksek mertebeden Apostol-Genocchi sayıları, tanjant sayıları, kotanjant sayıları, Chebyshev polinomları, Dickson polinomları, Fubini tipli sayıları ve polinomları, genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet polinomları, Milne-Thomson tipli polinomları ve iki parametrelili Apostol tipli polinomları başta olmak üzere bazı özel sayı ve polinom ailelerini içeren bağıntılar ve kombinatorik toplamalar elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında, aynı zamanda r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinom ailelerini içeren üreteç fonksiyonlarının bazı özel durumları da çizelgeler halinde sunulmuştur. Bunlara ek olarak, bazı özel sayı ve polinom aileleri için hesaplamalı algoritmalar verilmiştir ve bu algoritmaların bazıları Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla

kodlanarak, r -parametrelili Hermite tipli polinom aileleri ve r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinom ailelerinin değerleri hesaplanmış, grafikleri ve yzeyleri çizilmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Bernoulli sayıları ve polinomları, Chebyshev polinomları, Dickson polinomları, Euler sayıları ve polinomları, Fubini tipli sayıları ve polinomları, Genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları, İki parametrelili Apostol-Bernoulli tipli polinomlar, İki parametrelili Apostol-Euler tipli polinomlar, İki parametrelili Apostol-Genocchi tipli polinomlar, Özel sayılar ve polinomlar, r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinomlar, r -parametrelili Hermite tipli polinomlar, Üreteç fonksiyonları.

JÜRİ: Prof. Dr. Yılmaz şİMŞEK

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Dr. Öğr. Üyesi İrem KÜÇÜKOĞLU

Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE PAÇİN

Dr. Öğr. Üyesi Füsun YALÇIN

ABSTRACT

GENERATING FUNCTIONS OF HERMITE TYPE MILNE-THOMSON POLYNOMIALS AND THEIR APPLICATIONS IN COMPUTATIONAL SCIENCES

Neslihan KILAR

PhD Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

April 2021; 150 pages

In this thesis, Hermite type Milne-Thomson polynomials and their generating functions have been studied. By using these generating functions constructed with the help of the Euler's formula and trigonometric functions, some families of r -parametric Hermite-based Milne-Thomson type polynomials have also been studied. The definitions and some properties of some well-known families of special numbers and polynomials, such as families of Bernoulli type numbers and polynomials, families of Euler type numbers and polynomials, families of Genocchi type numbers and polynomials, and the Stirling numbers, have been given. With the help of the newly obtained generating functions and their functional equations, special integral formulas and trigonometric functions, we have been given formulas, relations and identities including the r -parametric Hermite-based Milne-Thomson polynomials, the r -parametric Hermite type polynomials and some other families of special polynomials. In addition, relationships and combinatorial sums for some families of special numbers and polynomials, which include especially the Apostol-Bernoulli numbers of higher order, the Apostol-Euler numbers of higher order, the Apostol-Genocchi numbers of higher order, the tangent numbers, the cotangent numbers, the Chebyshev polynomials, the Dickson polynomials, Fubini type numbers and polynomials, the generalized Hermite-Kampè de polynomials, Milne-Thomson type polynomials, and two parametric kinds of Apostol type polynomials, have been obtained. In this thesis, some special cases of generating functions, including families of the r -parametric Hermite-based Milne-Thomson type polynomials, have also been presented in

tables. Additionally, for some families of special numbers and polynomials, computational algorithms have been given and by coding some of these algorithms in the Mathematica package program with the help of the Wolfram programming language, the values for families of the r -parametric Hermite type polynomials and families of the r -parametric Hermite-based Milne-Thomson polynomials have been calculated, and their graphs and surfaces have been drawn.

KEYWORDS: Bernoulli numbers and polynomials, Chebyshev polynomials, Dickson polynomials, Euler numbers and polynomials, Fubini type numbers and polynomials, Generalized Hermite-Kampè de Fèriet polynomials, Generating functions, Genocchi numbers and polynomials, r -parametric Hermite-based Milne-Thomson type polynomials, r -parametric Hermite type polynomials, Special numbers and polynomials, Two parametric kinds of Apostol-Bernoulli type polynomials, Two parametric kinds of Apostol-Euler type polynomials, Two parametric kinds of Apostol-Genocchi type polynomials.

COMMITTEE: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Asst. Prof. Dr. İrem KÜÇÜKOĞLU

Asst. Prof. Dr. Rahime DERE PAÇİN

Asst. Prof. Dr. Füsun YALÇIN

ÖNSÖZ

Üreteç fonksiyonları, trigonometrik fonksiyonlar, özel sayı ve özel polinom aileleri özellikle son yıllarda matematik, matematiksel fizik, kuantum fizik, olasılık ve istatistik gibi birçok bilim dalında uygulama alanlarına sahiptir. Bu tez çalışmasında, Hermite tipli polinom ailelerini içeren bazı özel polinom ailelerinin temel özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Euler formülü ve trigonometrik fonksiyonlar yardımıyla inşa edilen r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinom ailelerinin ve r -parametrelili Hermite tipli polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları ve bazı özellikleri araştırılmıştır. Bunların yanı sıra bu polinom ailelerinin ilişkili olduğu tanjant sayıları, kotanjant sayıları, Chebyshev polinomları, Dickson polinomları, Apostol-Bernoulli sayı ve polinom aileleri, Apostol-Euler sayı ve polinom aileleri, Apostol-Genocchi sayı ve polinom aileleri, Fubini tipli sayı ve polinom aileleri, genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet polinomları, Milne-Thomson polinomları ve iki parametrelili Apostol tipli polinomları başta olmak üzere bazı özel sayı ve polinom ailelerini içeren bağıntılar, formüller ve kombinatorik toplamalar elde edilmiştir. Ayrıca, bazı özel sayı ve polinom aileleri için hesaplamalı algoritmalar verilmiştir ve bu algoritmaların bazıları Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, r -parametrelili Hermite tipli polinom aileleri ve r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinom ailelerinin değerleri hesaplanmış, grafikleri ve yüzeyleri çizilmiştir. Böylece, özel sayı ve polinom aileleri için elde edilen hesaplama formüllerinin ve bunların algoritmalarının hesaplamalı bilim ve mühendislik alanlarındaki bazı uygulamaları da verilmiştir.

Bu tez, Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma, Sonuçlar olmak üzere beş ana bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, Hermite tipli polinom aileleri, Milne-Thomson tipli polinom aileleri ve bunlarla ilişkili olan bazı özel polinom ailelerinin üreteç fonksiyonlarının önemi ve tarihçesi hakkında kısaca bilgi verilmiştir. Ardından, bu tez çalışmasının kapsamı ve amacı kısaca açıklanmıştır.

Kaynak taraması bölümünde, Bernoulli tipli sayı ve polinom aileleri, Euler tipli sayı ve polinom aileleri, Genocchi tipli sayı ve polinom aileleri, Frobenius-Euler sayı ve polinom aileleri, tanjant sayıları, kotanjant sayıları, Stirling sayıları, Fubini tipli sayı ve polinom aileleri, Milne-Thomson tipli polinom aileleri, Hermite-Kampè de Fèriet tipli poli-

nom aileleri, iki parametrelili Apostol tipli polinom ailelerinin tanımları, temel özellikleri ve bazı uygulamaları literatür taraması ile birlikte verilmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde, r -parametrelili Hermite tipli polinom ailelerinin ve r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinom ailelerinin üreteç fonksiyonlarının tanımları, temel özellikleri ve bunların bazı uygulamaları verilmiştir. Ayrıca, bu polinom ailelerinin ilişkili olduğu diğer bazı özel sayı ve polinom aileleri arasındaki bağıntılar da verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde, r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson polinom ailelerinin ilişkili olduğu Chebyshev polinomları, Dickson polinomları, iki parametrelili Apostol-Bernoulli tipli polinomları, iki parametrelili Apostol-Euler tipli polinomları, iki parametrelili Apostol-Genocchi tipli polinomları, tanjant sayıları ve kotanjant sayılarını içeren özdeşlikler, bağıntılar ve formüller elde edilmiştir ve bu polinom ailelerinin sağladığı bazı özel integral formülleri ve bunların uygulamaları verilmiştir. Ayrıca, Hermite tipli polinom ailelerinin bazıları için nümerik hesaplamalar yapan algoritmalar verilmiştir. Bu algoritmaların bazıları Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, r -parametrelili Hermite tipli polinomların ve r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinomların değerleri hesaplanmış, grafikleri ve yüzeyleri çizilmiştir.

Tezin diğer bölümleri ise Sonuçlar ve Kaynaklar bölümleri olup, bu tez çalışması Özgeçmiş ile bitmektedir.

Bu tez çalışmasında ve bugüne kadar yaptığım bilimsel çalışmalarda bilgisini ve desteğini esirgemeyerek bana her zaman yardımcı olan ve yol gösteren sayın danışmanım Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e yürekten teşekkür ederim ve saygılarımı sunarım.

Doktora eğitimim sırasında öncelikli tematik alanlarda 100/2000 YÖK Doktora Projesi kapsamında verdiği burs ile beni maddi yönden destekleyen Yükseköğretim Kurulu Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Doktora eğitimim sırasında 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında verdiği burs ile beni maddi yönden destekleyen TÜBİTAK BİDEB Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı'na da teşekkür ederim.

Ayrıca, eğitim hayatım boyunca her zaman yanımda olan aileme de yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
AKADEMİK BEYAN	ix
SİMGELER	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiv
ÇİZELGELER DİZİNİ	xvi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
2.1. Bazı Özel Sayı ve Polinom Ailelerinin Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri	7
2.2. Apostol Tipli Sayı ve Polinom Ailelerinin Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri	29
2.3. İki Parametrelili Apostol Tipli Polinomların Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri	38
3. MATERYAL VE METOT	53
3.1. r -parametrelili Hermite Tipli Polinomların Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri	53
3.2. r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson Tipli Polinomlar İçin Üreteç Fonksiyonları ve Bu Polinomların Bazı Uygulamaları	57
3.3. r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson Tipli Polinomların İlişkili Olduğu Bazı Sayı Aileleri	60
3.3.1. $h_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ polinomları ve bu polinomların ilişkili olduğu bazı sayı aileleri	60
3.3.2. $h_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ polinomları ve bu polinomların ilişkili olduğu bazı sayı aileleri	73
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	82
4.1. Chebyshev Polinomları, Dickson Polinomları ve Bazı Özel Polinomları İçeren Özdeşlikler	82
4.2. Trigonometrik Sayılar, $h_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ ve $h_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ Polinomları İçeren Özdeşlikler	84

4.3. r -parametrelı Hermite-tabanlı Milne-Thomson Tipli Polinomların Sağladığı Özel İntegral Formülleri ve Bazı Uygulamaları	87
4.4. Genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet Polinomları İçin Hesaplama Algoritmaları	90
4.5. r -parametrelı Hermite Tipli Polinomlar İçin Mathematica Kodları ve Bunların Uygulamaları	91
4.5.1. $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonları için Mathematica kodları ve uygulamaları	91
4.5.2. $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomları için Mathematica kodları ve uygulamaları	98
4.5.3. $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomları için Mathematica kodları ve uygulamaları	110
4.6. r -parametrelı Hermite-tabanlı Milne-Thomson Tipli Yüksek Mertebeden Fubini Polinomları İçin Mathematica Kodları ve Bunların Uygulamaları	121
4.6.1. ${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomları için Mathematica kodları ve uygulamaları	121
4.6.2. ${}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomları için Mathematica kodları ve uygulamaları	132
5. SONUÇLAR	141
6. KAYNAKLAR	142
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum “Hermite Tipli Milne-Thomson Polinomlarının Üreteç Fonksiyonları Ve Bunların Hesaplamalı Bilimlerdeki Uygulamaları” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

19/04/2021

Neslihan KILAR



SİMGELER

Simgeler:

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$(\alpha)_v$	: Azalan faktöriyel
$\exp$	: Doğal üstel fonksiyon
$(\alpha)^{(v)}$	: Artan faktöriyel (Pochhammer sembolü)
$\operatorname{Re} \{w\}$	: w karmaşık sayısının reel kısmı
$\operatorname{Im} \{w\}$	: w karmaşık sayısının sanal (imajiner) kısmı
$\bar{w}$	: w karmaşık sayısının eşleniği (konjugesi)
$[x]$	: x sayısından küçük veya eşit olan en büyük tamsayı
$\mathcal{T}_n$	: Tanjant (tangent) sayıları
$\mathcal{C}_n$	: Kotanjant (contangent) sayıları
$B_n(x)$	: Birinci tür Bernoulli polinomları
B_n	: Birinci tür Bernoulli sayıları
$b_n(x)$	: İkinci tür Bernoulli polinomları
b_n	: İkinci tür Bernoulli sayıları
$E_n(x)$	: Birinci tür Euler polinomları
E_n	: Birinci tür Euler sayıları
E_n^*	: İkinci tür Euler sayıları
$G_n(x)$	: Genocchi polinomları
G_n	: Genocchi sayıları
$S_1(n, k)$	: Birinci tür Stirling sayıları
$S_2(n, k)$	: İkinci tür Stirling sayıları
$S(n, k; \lambda)$	: İkinci tür λ -Stirling sayıları
$S_v^n(x)$	: Array polinomları
$D_n(x, \alpha)$	: Birinci tür Dickson polinomları

$\mathfrak{D}_n(x, \alpha)$	: İkinci tür Dickson polinomları
$w_g(n)$	: Fubini sayıları
$y_6(n; x, y, z; a, b, v)$	: Milne-Thomson tipli polinomlar
$\Phi_n^{(a)}(x)$	: a . dereceden Milne-Thomson polinomları
$H_n^{(j)}(x, y)$	: Hermite-Kampè de Fèriet (Gould-Hopper) polinomları
$H_n(\vec{u}, r)$	: Genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet polinomları
$B_n^{(k)}(x)$	: k . mertebeden Bernoulli polinomları
$B_n^{(k)}$	: k . mertebeden Bernoulli sayıları
$E_n^{(k)}(x)$	: k . mertebeden Euler polinomları
$E_n^{(k)}$	: k . mertebeden Euler sayıları
$G_n^{(k)}(x)$	: k . mertebeden Genocchi polinomları
$G_n^{(k)}$	: k . mertebeden Genocchi sayıları
$H_n^{(k)}(x; u)$	: k . mertebeden Frobenius-Euler polinomları
$H_n^{(k)}(u)$	: k . mertebeden Frobenius-Euler sayıları
$a_n^{(k)}(x)$	: k . mertebeden Fubini tipli polinomlar
$a_n^{(k)}$	: k . mertebeden Fubini tipli sayılar
$\mathcal{B}_n^{(k)}(x; \lambda)$	: k . mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları
$\mathcal{B}_n^{(k)}(\lambda)$	: k . mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları
$\mathcal{E}_n^{(k)}(x; \lambda)$	: k . mertebeden Apostol-Euler polinomları
$\mathcal{E}_n^{(k)}(\lambda)$	: k . mertebeden Apostol-Euler sayıları
$\mathcal{G}_n^{(k)}(x; \lambda)$	: k . mertebeden Apostol-Genocchi polinomları
$\mathcal{G}_n^{(k)}(\lambda)$	: k . mertebeden Apostol-Genocchi sayıları
$\mathcal{H}_n^{(k)}(x; \lambda, u)$	: k . mertebeden Apostol tipli Frobenius-Euler polinomları
$\mathcal{H}_n^{(k)}(\lambda, u)$	: k . mertebeden Apostol tipli Frobenius-Euler sayıları
$C_n(x, y)$	: $C_n(x, y)$ polinomları
$S_n(x, y)$	: $S_n(x, y)$ polinomları
$B_n^{(C)}(x, y)$	: Kosinüs-Bernoulli polinomları
$B_n^{(S)}(x, y)$	: Sinüs-Bernoulli polinomları
$E_n^{(C)}(x, y)$	: Kosinüs-Euler polinomları
$E_n^{(S)}(x, y)$	: Sinüs-Euler polinomları
$G_n^{(C)}(x, y)$	: Kosinüs-Genocchi polinomları

$G_n^{(S)}(x, y)$	: Sinüs-Genocchi polinomları
$\mathcal{B}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda)$	: k . mertebeden iki parametrelili kosinüs-Apostol-Bernoulli tipli polinomlar
$\mathcal{B}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda)$	: k . mertebeden iki parametrelili sinüs-Apostol-Bernoulli tipli polinomlar
$\mathcal{E}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda)$	: k . mertebeden iki parametrelili kosinüs-Apostol-Euler tipli polinomlar
$\mathcal{E}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda)$	: k . mertebeden iki parametrelili sinüs-Apostol-Euler tipli polinomlar
$\mathcal{G}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda)$	: k . mertebeden iki parametrelili kosinüs-Apostol-Genocchi tipli polinomlar
$\mathcal{G}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda)$	: k . mertebeden iki parametrelili sinüs-Apostol-Genocchi tipli polinomlar
$\mathcal{H}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda, u)$	: k . mertebeden iki parametrelili kosinüs-Eulerian tipli polinomlar
$\mathcal{H}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda, u)$	: k . mertebeden iki parametrelili sinüs-Eulerian tipli polinomlar
$a_n^{(c,k)}(x, y)$	: k . mertebeden iki parametrelili kosinüs-Fubini tipli polinomlar
$a_n^{(s,k)}(x, y)$	: k . mertebeden iki parametrelili sinüs-Fubini tipli polinomlar
$\mathcal{K}(n; w, \vec{u}, r)$	: r -parametrelili Hermite tipli polinomlar
$k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$	: r -parametrelili kosinüs-Hermite tipli polinomlar
$K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$	: $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının üretç fonksiyonu
$k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$	: r -parametrelili sinüs-Hermite tipli polinomlar
$K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$	: $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının üretç fonksiyonu
$h(n, w, z; \vec{u}, r, a, b)$	: r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinomlar
$\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$	: r -parametrelili Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli polinomlar

$\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$	: r -parametrelı Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli polinomlar
${}_B\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a)$	: r -parametrelı Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları
${}_E\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a)$	: r -parametrelı Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Euler polinomları
${}_G\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a)$	: r -parametrelı Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Genocchi polinomları
${}_H\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a; v)$	: r -parametrelı Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Frobenius-Euler polinomları
${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a)$	: r -parametrelı Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Fubini polinomları
${}_B\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a)$	: r -parametrelı Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları
${}_E\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a)$	: r -parametrelı Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Euler polinomları
${}_G\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a)$	: r -parametrelı Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Genocchi polinomları
${}_H\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a; v)$	: r -parametrelı Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson z . mertebeden Frobenius-Euler polinomları
${}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a)$	: r -parametrelı Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Fubini polinomları

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 $K_1(t, x, y, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarının parametrik olarak çizimlerinden elde edilen parametrik eğriler	92
Şekil 4.2 $K_1(t, 2, y, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, 2, y, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarının parametrik çizimlerinden elde edilen parametrik bölge	93
Şekil 4.3 $K_1(t, x, 2, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, x, 2, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarının parametrik çizimlerinden elde edilen parametrik bölge	94
Şekil 4.4 $K_1(t, x, \frac{\pi}{3}, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonunun yüzeyinin çizimi	95
Şekil 4.5 $K_1(t, \frac{\pi}{3}, y, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonunun yüzeyinin çizimi	95
Şekil 4.6 $K_2(t, x, \frac{\pi}{3}, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonunun yüzeyinin çizimi	96
Şekil 4.7 $K_2(t, \frac{\pi}{3}, y, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonunun yüzeyinin çizimi	97
Şekil 4.8 $K_1(t, x, \frac{\pi}{3}, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, x, \frac{\pi}{3}, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarının birlikte yüzeylerinin çizimi	97
Şekil 4.9 $K_1(t, \frac{\pi}{3}, y, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, \frac{\pi}{3}, y, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarının birlikte yüzeylerinin çizimi	98
Şekil 4.10 $k_1(n; x, 5, \vec{u}, 3)$ polinomlarının grafik çizimleri	102
Şekil 4.11 $k_1(n; x, 5, \vec{u}, 4)$ polinomlarının grafik çizimleri	103
Şekil 4.12 $k_1(n; x, 5, \vec{u}, 5)$ polinomlarının grafik çizimleri	103
Şekil 4.13 $k_1(n; x, y, \vec{u}, 4)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri	105
Şekil 4.14 $k_1(20; x, y, \vec{u}, 4)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi	106
Şekil 4.15 $k_1(20; x, y, \vec{u}, 4)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi	107
Şekil 4.16 $k_1(n; x, y, \vec{u}, 5)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri	108
Şekil 4.17 $k_1(20; x, y, \vec{u}, 5)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi	109
Şekil 4.18 $k_1(20; x, y, \vec{u}, 5)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi	110
Şekil 4.19 $k_2(n; x, y, \vec{u}, 3)$ polinomlarının grafik çizimleri	114
Şekil 4.20 $k_2(n; x, y, \vec{u}, 4)$ polinomlarının grafik çizimleri	114
Şekil 4.21 $k_2(n; x, y, \vec{u}, 5)$ polinomlarının grafik çizimleri	114

Şekil 4.22	$k_2(n; x, y, \vec{u}, 4)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri	116
Şekil 4.23	$k_2(20; x, y, \vec{u}, 4)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi	117
Şekil 4.24	$k_2(20; x, y, \vec{u}, 4)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi	118
Şekil 4.25	$k_2(n; x, y, \vec{u}, 5)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri	119
Şekil 4.26	$k_2(20; x, y, \vec{u}, 5)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi	120
Şekil 4.27	$k_2(20; x, y, \vec{u}, 5)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi	121
Şekil 4.28	$_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, 1; \vec{u}, 4, 1)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri	129
Şekil 4.29	$_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, 2; \vec{u}, 5, 1)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri	131
Şekil 4.30	$_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, 1; \vec{u}, 4, 1)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri	138
Şekil 4.31	$_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, 2; \vec{u}, 5, 1)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri	140

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 $S_1(n, k)$ için bazı sayısal değerler	18
Çizelge 2.2 $S_2(n, k)$ için bazı sayısal değerler	19
Çizelge 3.3 (3.19) denkleminin özel durumlarından elde edilen Bernoulli tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları	68
Çizelge 3.4 (3.19) denkleminin özel durumlarından elde edilen Euler tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları	69
Çizelge 3.5 (3.19) denkleminin özel durumlarından elde edilen Genocchi tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları	70
Çizelge 3.6 (3.19) denkleminin özel durumlarından elde edilen Frobenius-Euler tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları	71
Çizelge 3.7 (3.19) denkleminin özel durumlarından elde edilen Fubini tipli polinomlar ve sayılar için bazı üreteç fonksiyonları	72
Çizelge 3.8 (3.33) denkleminin özel durumlarından elde edilen Bernoulli tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları	79
Çizelge 3.9 (3.33) denkleminin özel durumlarından elde edilen Euler tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları	79
Çizelge 3.10 (3.33) denkleminin özel durumlarından elde edilen Genocchi tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları	80
Çizelge 3.11 (3.33) denkleminin özel durumlarından elde edilen Frobenius-Euler tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları	80
Çizelge 3.12 (3.33) denkleminin özel durumlarından elde edilen Fubini tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları	81
Çizelge 4.13 $a_n^{(k)}$ için bazı sayısal değerler	122

1. GİRİŞ

Hermite polinomları ilk olarak 1810 yılında Pierre-Simon Laplace tarafından tanımlanmış ve 1859 yılında Pafnuty Chebyshev'in "Sur le développement des fonctions à une seule variable" adlı çalışmasında ayrıntılı olarak incelenmiştir. Daha sonrasında da Charles Hermite tarafından Hermite polinomları olarak adlandırılmıştır ve bu konuda birbirinden değerli eserler verilmiştir (Bkz: Laplace 1812; Chebyshev 1859; Hermite 1864; Gould ve Hopper 1962; Roman 1984; Dattoli vd. 1994; Dattoli vd. 1996; Bretti ve Ricci 2004; Khan vd. 2009; Pathan 2012; Kurt 2013; Kurt ve Simsek 2013b; Özarslan 2013; Bayad ve Simsek 2014; Dere ve Simsek 2015; Araci 2018; Kilar ve Simsek 2021b,c). Hermite polinomları, özel fonksiyonlar ailesinin önemli bir bölümünü oluşturan ortogonal polinomlar sınıfında yer almaktadır ve matematik, fizik, astronomi, istatistik gibi birçok bilim dalında önemli kullanım ve uygulama alanlarına sahiptir. Aynı zamanda, Hermite polinomlarının, fizikte Shrödinger dalga denklemi ve bazı özel diferansiyel denklemlerinin çözümlerinde de sıkça kullanıldığı iyi bilinmektedir. Milne-Thomson polinomları ise, 1933 yılında Louis Melville Milne-Thomson tarafından "Two classes of generalized polynomials" adlı çalışmada tanımlanmıştır ve pek çok matematikçi ve daha birçok araştırmacı bu alanda birbirinden değerli eserler vermiştir (Bkz: Milne-Thomson 1933; Dere ve Simsek 2015; Simsek ve Cakic 2018; Simsek 2019; Kilar ve Simsek 2020a; Kilar ve Simsek 2021b,c).

Üreteç fonksiyonları, ilk olarak 1730 yılında Abraham de Moivre tarafından doğrusal rekürans problemini çözmek için tanımlanmıştır. Üreteç fonksiyonları, biçimsel bir kuvvet serileri için tanımlanan işlemleri içeren bazı ifadelerle kapalı formda ifade edilebilme biçimidir. Yani, bir sayı veya polinom dizisinin biçimsel bir kuvvet serilerinin katsayılarını kodlamak, rekürans bağıntılarını ve hesaplama formüllerini elde etmek veya rekürans bağıntısı verilen herhangi bir özel sayı ve polinom ailesinin kapalı bir formülünü bulmak için üreteç fonksiyonlarından faydalanılmaktadır (Bkz: Rainville 1960; Comtet 1974; Knuth 1997). Matematiğin tarihsel gelişimine bakıldığında, üreteç fonksiyonları ve bunların fonksiyonel denklemlerinin, özel sayı ve polinom ailelerinin, trigonometrik fonksiyonlar ailesinin olasılık ve istatistik, kombinatorik, nümerik analiz, analitik sayılar teorisi, matris teorisi gibi hem teorik ve hem de uygulamalı matematik alanında önemli bir rol oynadığı ve birçok uygulamalarının olduğu görülmektedir. Bu fonksiyonlar yardı-

myla, birçok özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonlarını içeren fonksiyonel denklemleri, özel integral formülleri ve bazı özellikleri kullanılarak bu tezde birçok bağıntı, özdeşlik, formül ve kombinatorik toplamalar elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında, Euler formülü ve trigonometrik fonksiyonlar yardımıyla inşa edilen r -parametrelili Hermite tipli polinom aileleri ve r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları ve bunların bazı temel özellikleri incelenmiştir. Bu polinom aileleri ile ilişkili olan, Bernoulli tipli sayı ve polinom aileleri, Euler tipli sayı ve polinom aileleri, Genocchi tipli sayı ve polinom aileleri, Fubini tipli sayı ve polinom aileleri, Stirling sayıları, tanjant sayıları, kotanjant sayıları, Chebyshev polinomları, Dickson polinomları, iki parametrelili Apostol tipli polinom aileleri ve diğer iyi bilinen bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları ve bazı özellikleri verilmiştir. Bu tezde, r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinom ailelerinin özel durumlarından elde edilen bazı üreteç fonksiyonları çizelgeler halinde verilmiştir. Dahası, r -parametrelili Hermite tipli polinom aileleri ve r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları ve bunların sağladığı fonksiyonel denklemler kullanılarak, bu polinom aileleri için birçok özdeşlikler, bağıntılar ve formüller elde edilmiştir ve bunların bazı uygulamaları verilmiştir. Ayrıca, Hermite tipli polinom ailelerinin bazıları için nümerik hesaplamalar yapan algoritmalar da verilmiştir. Bu algoritmaların bazıları Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, r -parametrelili Hermite tipli polinom ailelerinin ve r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinom ailelerinin değerleri hesaplanmış, grafikleri ve yüzeyleri çizilmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların analitik sayılar teorisi, analiz ve fonksiyonlar teorisi, hesaplamalı sayı teorisi, kombinatorik analizde sayma problemleri, olasılık ve istatistikte moment çıkaran üreteç fonksiyonları, matematiksel fizikte ısı denklemini içeren diferansiyel denklem çözümleri, bilgisayarda temel algoritmalar başta olmak üzere, matematik, matematiksel fizik, kuantum fizik, hesaplamalı bilim ve mühendislik, olasılık ve istatistik gibi birçok alanda kullanılma potansiyeli vardır.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, tez boyunca sıkça kullanılacak olan bazı temel tanımlar, bağıntılar ve formüller verilecektir. Bu bölümdeki temel tanımlar için Dickson 1897, Milne-Thomson 1933, Norlund 1954, Abramowitz ve Stegun 1970, Comtet 1974, Conway 1978, Dattoli vd. 1994, Knuth 1997, Bretti ve Ricci 2004, Srivastava ve Pinter 2004, Liu 2009, Srivastava ve Choi 2012, Simsek 2013, Kim ve Ryoo 2018, Kilar ve Simsek 2019b, Masjed-Jamei vd. 2019, Simsek 2019, Srivastava vd. 2019 kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.1. Bir $w = f(z)$ karmaşık fonksiyonu, z_0 noktasında ve bunun bir komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyor ise f fonksiyonuna z_0 noktasında analitik fonksiyon denir (Conway 1978).

Tanım 2.2. $z, a_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

şeklindeki bir seriye z_0 merkezli kuvvet serisi denir (Conway 1978).

Tanım 2.3. Herhangi bir $f_n(x)$ polinomunun üreteç fonksiyonu $F(x, t)$ olmak üzere, bu fonksiyon

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

kuvvet serisi ile tanımlanır. Burada $F(x, t)$, $f_n(x)$ polinomunu üretir denir (Rainville 1960).

Bu tez çalışmasında sıklıkla kullanılan sonsuz seri çapımları ve bunların bazı özellikleri aşağıdaki gibi verilir:

Teorem 2.4.

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

ve

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$$

serileri verilsin. Bu iki serinin Cauchy çarpımı aşağıdaki şekilde verilir:

$$A(t) B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_{n-j} b_j \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j b_{n-j} \frac{t^n}{n!} \quad (2.1)$$

(Rainville 1960; Andrews 1998).

Genel olarak, r tane mutlak yakınsak sonsuz serilerin çarpımı aşağıdaki teorem yardımıyla hesaplanır.

Teorem 2.5. r tane mutlak yakınsak sonsuz seri verilsin. Bu serilerin çarpımı aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned} & \sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{n_{r-1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_1=0}^{\infty} A(n_1, \dots, n_r) \\ &= \sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{n_{r-1}=0}^{n_r} \cdots \sum_{n_1=0}^{n_2} A(n_1, n_2 - n_1, \dots, n_r - n_{r-1}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{n_{r-1}=0}^{n_r} \cdots \sum_{n_1=0}^{n_2} A(n_1, \dots, n_r) \\ &= \sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{n_{r-1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_1=0}^{\infty} A(n_1, n_2 + n_1, \dots, n_1 + \cdots + n_r) \end{aligned} \quad (2.3)$$

(Liu 2009; Srivastava vd. 2010).

Teorem 2.6. Eğer $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ise $N_1, N_2, \dots, N_{r-1} \in \mathbb{N}$ olmak üzere, aşağıdaki mutlak yakınsak sonsuz serinin çarpımı

$$\begin{aligned} & \sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{n_{r-1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_1=0}^{\infty} A(n_1, \dots, n_r) \\ &= \sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{n_{r-1}=0}^{\lfloor \frac{n_r}{N_{r-1}} \rfloor} \cdots \sum_{n_1=0}^{\lfloor \frac{n_2}{N_1} \rfloor} A(n_1, n_2 - N_1 n_1, \dots, n_r - N_{r-1} n_{r-1}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

dır. Eğer $r \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ ise $N_1, N_2, \dots, N_{r-1} \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{n_{r-1}=0}^{\lfloor \frac{n_r}{N_{r-1}} \rfloor} \cdots \sum_{n_1=0}^{\lfloor \frac{n_2}{N_1} \rfloor} A(n_1, \dots, n_r) \\ &= \sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{n_{r-1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_1=0}^{\infty} A(n_1, n_2 + N_1 n_1, n_3 + N_2 N_1 n_1 + N_2 n_2, \dots, \\ & \quad n_r + \prod_{j=1}^{r-1} N_j n_1 + \prod_{j=2}^{r-1} N_j n_2 + \cdots + N_{r-1} n_{r-1}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

dır (Srivastava vd. 2010).

(2.4) ve (2.5) denklemleri yardımıyla aşağıdaki özel sonuçlar elde edilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A(j, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A(j, n - 2j)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A(j, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A(j, n + 2j)$$

(Rainville 1960; Andrews 1998).

Azalan faktöriyel $(\alpha)_v$ ve artan faktöriyel (Pochhammer sembolü) $(\alpha)^{(v)}$ ifadeleri sırasıyla:

$$(\alpha)_v = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - v + 1)$$

ve

$$(\alpha)^{(v)} = \begin{cases} \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + v - 1), & v \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C} \\ 1, & v = 0, \alpha \in \mathbb{C} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca,

$$\binom{\alpha}{v} = \begin{cases} \frac{(\alpha)_v}{v!}, & v \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C} \\ 1, & v = 0 \end{cases}$$

ve

$$(\alpha)_v = (-1)^v (-\alpha)^{(v)}$$

dir (Srivastava ve Choi 2012).

Bu tez çalışması boyunca, sonlu toplamlar için $n = 0$ ise $0^n = 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise $0^n = 0$ olarak kabul edilmektedir.

$x, y \in \mathbb{R}$ ve

$$i^2 = -1$$

olmak üzere,

$$w = x + iy$$

biçimindeki sayılara karmaşık sayı denir. Bir $w = x + iy$ karmaşık sayısı verildiğinde, x sayısına, w karmaşık sayısının reel kısmı, y sayısına da w karmaşık sayısının sanal (imajiner) kısmı denir ve bunlar sırasıyla

$$x = \operatorname{Re}\{w\}, y = \operatorname{Im}\{w\}$$

ile gösterilir (Conway 1978).

$w = x + iy$ herhangi bir karmaşık sayısı olsun. Bu sayının eşleniği (konjugesi) $\bar{w}$ ile gösterilir ve

$$\bar{w} = x - iy$$

ile tanımlanır (Conway 1978).

Bu tez çalışması boyunca doğal üstel fonksiyon için

$$e^x = \exp(x)$$

gösterimi kullanılacaktır.

$\ln : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ logaritma fonksiyonu, $-\pi < \arg(w) \leq \pi$ olmak üzere,

$$\ln(w) = \ln |w| + i \arg(w),$$

olarak tanımlanır (Conway 1978).

Trigonometrik fonksiyonlar ve üstel karmaşık fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi veren ve karmaşık analizde iyi bilinen Euler formülü,

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z) \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır (Conway 1978).

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların bazıları için hesaplamalı algoritmalar verileceği için, şimdi algoritma hakkında kısaca bilgi verelim:

Tanım 2.7. *Girdi olarak bir değer veya değerler kümesi alan ve çıktı olarak da bir değer veya değerler kümesi üreten, iyi tanımlanmış herhangi bir hesaplama işlemine (prosedürüne) algoritma denir. Bu nedenle algoritma; girdiyi çıktıya dönüştüren bir dizi hesaplamayı kullanarak, iyi tanımlanmış bir hesaplama problemini sonlu adımda çözmek için bir araç olarak da görülebilir (Knuth 1997; Cormen vd. 2009).*

O halde, herhangi bir algoritma aşağıdaki verilen özellikleri sağlamalıdır:

- Sıfır veya daha fazla değer, dışarıdan girdi olarak girilebilmelidir.
- Çıktı olarak da en azından bir değer üretmelidir.
- Her adımı belirleyici ve açık olmalı, farklı anlamlar içermemelidir.

- Sonlu sayıda adım içermelidir.
- Karşılaşılabilecek tüm ihtimalleri ele alabilecek kadar genel ve basit olmalıdır

(Knuth 1997; Cormen vd. 2009).

2.1. Bazı Özel Sayı ve Polinom Ailelerinin Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri

Bu bölümde, k . mertebeden Bernoulli sayıları ve polinomları, k . mertebeden Euler sayıları ve polinomları, k . mertebeden Genocchi sayıları ve polinomları, tanjant sayıları, kotanjant sayıları, Stirling sayıları, Chebyshev polinomları, Dickson polinomları, k . mertebeden Fubini tipli sayıları ve polinomları, genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet polinomları ve Milne-Thomson tipli polinomlarının tanımları ve temel özellikleri kaynaklarıyla birlikte verilecektir.

$|t| < 2\pi$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, k . mertebeden Bernoulli sayıları $B_n^{(k)}$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$g_B(t; k) = \left(\frac{t}{\exp(t) - 1} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}. \quad (2.7)$$

Burada

$$B_0^{(0)} = 1$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n^{(0)} = 0$$

dır (Erdelyi 1953; Norlund 1954; Srivastava ve Choi 2012). Ayrıca, kaynaklar bölümünde bulunan diğer çalışmalara da bakılabilir.

$k < 0$ için (2.7) denklemindeki $B_n^{(k)}$ sayılarına negatif kuvvetli Bernoulli sayıları denir. Bu tezin konusu kapsamında ele alınmamıştır.

k . mertebeden Bernoulli polinomları $B_n^{(k)}(x)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_B(t, x; k) = g_B(t; k) \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.8)$$

(Erdelyi 1953; Norlund 1954; Srivastava ve Choi 2012).

(2.1), (2.7) ve (2.8) denklemleri yardımıyla,

$$B_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j^{(k)} x^{n-j} \quad (2.9)$$

kombinatorik toplamı elde edilir. Bu toplam, $B_n^{(k)}(x)$ polinomları için bir hesaplama formülüdür.

(2.8) bağıntısında her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$B_n^{(0)}(x) = x^n$$

dir. Ayrıca, $x = 0$ için

$$F_B(t, 0; k) = g_B(t; k)$$

elde edilir. Buradan

$$B_n^{(k)} = B_n^{(k)}(0)$$

dır (Erdelyi 1953; Norlund 1954; Srivastava ve Pinter 2004; Luo ve Srivastava 2005; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Srivastava vd. 2012).

(2.8) bağıntısında $k = 1$ alınırsa, $F_B(t, x; 1)$ fonksiyonu birinci tür Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$B_n(x) = B_n^{(1)}(x) \quad (2.10)$$

ile gösterilen birinci tür Bernoulli polinomları elde edilir.

(2.7) bağıntısında $k = 1$ alınırsa, $g_B(t; 1)$ fonksiyonu birinci tür Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$B_n = B_n^{(1)}$$

ile gösterilen birinci tür Bernoulli sayıları elde edilir.

$B_0 = 1$ ve $n > 1$ olmak üzere, birinci tür Bernoulli sayıları aşağıdaki rekürans bağıntısı ile hesaplanır:

$$B_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j \quad (2.11)$$

(Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1970; Milne-Thomson 1980; Srivastava ve Pinter 2004; Srivastava ve Choi 2012).

(2.11) denkleminde verilen rekürans bağıntısı kullanılarak, birinci tür Bernoulli sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}.$$

Burada, $n \geq 1$ için $B_{2n+1} = 0$ olur.

(2.9) denkleminde $k = 1$ alınırsa, birinci tür Bernoulli polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x. \end{aligned}$$

İkinci tür Bernoulli sayıları b_n ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$g_b(t) = \frac{t}{\ln(1+t)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!} \quad (2.12)$$

(Comtet 1974; Roman 1984). Bu sayılar, Cauchy sayıları olarak da bilinir.

$b_n(x)$ ile gösterilen ikinci tür Bernoulli polinomları aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_b(t, x) = g_b(t) (1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.13)$$

(Comtet 1974; Roman 1984).

(2.13) bağıntısında $x = 0$ için

$$F_b(t, 0) = g_b(t)$$

elde edilir. Buradan

$$b_n = b_n(0)$$

dır (Comtet 1974; Roman 1984).

(2.13) bağıntısı kullanılarak, ikinci tür Bernoulli polinomları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$b_n(x) = \int_x^{x+1} (u)_n du \quad (2.14)$$

(Comtet 1974; Roman 1984).

(2.14) bağıntısında $x = 0$ alınırsa, ikinci tür Bernoulli sayıları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$b_n = \int_0^1 (u)_n du \quad (2.15)$$

(Comtet 1974; Roman 1984). Bu sayılar Cauchy sayıları olarak da adlandırılmaktadır.

(2.15) denklemini kullanılarak, ikinci tür Bernoulli sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = -\frac{1}{6}, \quad b_3 = \frac{1}{4}, \quad b_4 = -\frac{19}{30}, \quad b_5 = \frac{9}{4}.$$

(2.14) denklemini kullanılarak, ikinci tür Bernoulli polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} b_0(x) &= 1, \\ b_1(x) &= x + \frac{1}{2}, \\ b_2(x) &= x^2 - \frac{1}{6}, \\ b_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}, \\ b_4(x) &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 - \frac{19}{30}, \\ b_5(x) &= x^5 - \frac{15}{2}x^4 + \frac{55}{3}x^3 - 15x^2 + \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

$|t| < \pi$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, k . mertebeden Euler sayıları $E_n^{(k)}$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$g_E(t; k) = \left(\frac{2}{\exp(t) + 1} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}. \quad (2.16)$$

Burada

$$E_0^{(0)} = 1$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$E_n^{(0)} = 0$$

dır (Erdelyi 1953; Norlund 1954; Srivastava ve Choi 2012). Ayrıca, kaynaklar bölümünde bulunan diğer çalışmalara da bakılabilir.

k . mertebeden Euler polinomları $E_n^{(k)}(x)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_E(t, x; k) = g_E(t; k) \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.17)$$

(Erdelyi 1953; Norlund 1954; Srivastava ve Choi 2012).

(2.1), (2.16) ve (2.17) denklemleri yardımıyla,

$$E_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_j^{(k)} x^{n-j} \quad (2.18)$$

kombinatorik toplamı elde edilir. Bu toplam, $E_n^{(k)}(x)$ polinomları için bir hesaplama formülüdür.

(2.17) bağıntısında her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$E_n^{(0)}(x) = x^n$$

dir. Ayrıca, $x = 0$ için

$$F_E(t, 0; k) = g_E(t; k)$$

elde edilir. Buradan

$$E_n^{(k)} = E_n^{(k)}(0)$$

dır (Srivastava ve Pinter 2004; Luo ve Srivastava 2005; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.17) bağıntısında $k = 1$ alınırsa, $F_E(t, x; 1)$ fonksiyonu birinci tür Euler polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$E_n(x) = E_n^{(1)}(x)$$

ile gösterilen birinci tür Euler polinomları elde edilir.

(2.16) bağıntısında $k = 1$ alınırsa, $g_E(t; 1)$ fonksiyonu birinci tür Euler sayılarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$E_n = E_n^{(1)} \quad (2.19)$$

ile gösterilen birinci tür Euler sayıları elde edilir.

$E_0 = 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere, birinci tür Euler sayıları aşağıdaki rekürans bağıntısı ile hesaplanır:

$$E_n = - \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_j \quad (2.20)$$

(Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1970; Srivastava ve Choi 2012).

(2.20) denkleminde verilen rekürans bağıntısı kullanılarak, birinci tür Euler sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E_0 = 1, \quad E_1 = -\frac{1}{2}, \quad E_3 = \frac{1}{4}, \quad E_5 = -\frac{1}{2}, \quad E_7 = \frac{17}{8}, \quad E_9 = -\frac{31}{2}.$$

Burada, $n \geq 1$ için $E_{2n} = 0$ olur.

(2.18) denkleminde $k = 1$ alınırsa, birinci tür Euler polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} E_0(x) &= 1, \\ E_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ E_2(x) &= x^2 - x, \\ E_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}, \\ E_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x, \\ E_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$|t| < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere, ikinci tür Euler sayıları E_n^* ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2 \exp(x)}{\exp(2x) + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^* \frac{t^n}{n!} \quad (2.21)$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Simsek 2010).

(2.19) ve (2.21) bağıntıları kullanılarak,

$$E_m^* = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} 2^j E_j \quad (2.22)$$

elde edilir (Abramowitz ve Stegun 1970; Simsek 2010).

(2.22) bağıntısı kullanılarak, ikinci tür Euler sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E_0^* = 1, \quad E_1^* = 0, \quad E_2^* = -1, \quad E_3^* = 0, \quad E_4^* = 5, \quad E_5^* = 0.$$

Burada, $n \geq 0$ için $E_{2n+1}^* = 0$ olur.

$|t| < \pi$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, k . mertebeden Genocchi sayıları G_n ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$g_G(t; k) = \left(\frac{2t}{\exp(t) + 1} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}. \quad (2.23)$$

Burada

$$G_0^{(0)} = 1$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$G_n^{(0)} = 0$$

dır (Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012). Ayrıca, kaynaklar bölümünde bulunan diğer çalışmalara da bakılabilir.

k . mertebeden Genocchi polinomları $G_n(x)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_G(t, x; k) = g_G(t; k) \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.24)$$

(Srivastava 2011; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Srivastava vd. 2012; Araci vd. 2014; Zou 2017).

(2.1), (2.23) ve (2.24) denklemleri yardımıyla,

$$G_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} G_j^{(k)} x^{n-j}. \quad (2.25)$$

kombinatorik toplamı elde edilir. Bu toplam, $G_n^{(k)}(x)$ polinomları için bir hesaplama formülüdür.

(2.24) bağıntısında her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$G_n^{(0)}(x) = x^n$$

dir. Ayrıca, $x = 0$ için

$$F_G(t, 0; k) = g_G(t; k)$$

elde edilir. Buradan

$$G_n^{(k)} = G_n^{(k)}(0)$$

dır (Srivastava 2011; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Srivastava vd. 2012; Araci vd. 2014; Zou 2017).

(2.24) bağıntısında $k = 1$ alınırsa, $F_G(t, x; 1)$ fonksiyonu Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$G_n(x) = G_n^{(1)}(x)$$

ile gösterilen Genocchi polinomları elde edilir.

(2.23) bağıntısında $k = 1$ alınırsa, $g_G(t; 1)$ fonksiyonu Genocchi sayılarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$G_n = G_n^{(1)}$$

ile gösterilen Genocchi sayıları elde edilir.

$G_0 = 0$, $G_1 = 1$ ve $n \geq 2$ olmak üzere, Genocchi sayıları aşağıdaki rekürans bağıntısı ile hesaplanır:

$$G_n = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} G_k \quad (2.26)$$

(Zou 2017).

(2.26) denkleminde verilen rekürans bağıntısı kullanılarak, Genocchi sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 1, \quad G_2 = -1, \quad G_4 = 1, \quad G_6 = -3.$$

Burada, $n \geq 1$ için $G_{2n+1} = 0$ olur.

(2.25) denkleminde $k = 1$ alınırsa, Genocchi polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} G_0(x) &= 0, \\ G_1(x) &= 1, \\ G_2(x) &= 2x - 1, \\ G_3(x) &= 3x^2 - 3x, \\ G_4(x) &= 4x^3 - 6x^2 + 1, \\ G_5(x) &= 5x^4 - 10x^3 + 5x. \end{aligned}$$

Sonuç 2.8. (2.7), (2.16) ve (2.23) bağıntılarında $k = 1$ alınırsa, Bernoulli sayıları, Euler sayıları ve Genocchi sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$2(1 - 2^{2n}) B_{2n} = 2n E_{2n-1} = G_{2n}$$

(Horadam 1991; Srivastava vd. 2012).

k . mertebeden Frobenius-Euler sayıları $H_n^{(k)}(u)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$g_{HE}(t; u, k) = \left(\frac{1-u}{\exp(t)-u} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(k)}(u) \frac{t^n}{n!} \quad (2.27)$$

(Kim ve Kim 2012; Simsek 2013; Bayad ve Kim 2016).

k . mertebeden Frobenius-Euler polinomları $H_n^{(k)}(x; u)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_{HE}(t, x; u, k) = g_{HE}(t; u, k) \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(k)}(x; u) \frac{t^n}{n!} \quad (2.28)$$

(Kim ve Kim 2012; Simsek 2013; Bayad ve Kim 2016).

Tanjant sayıları $\mathcal{T}_n$ ile gösterilir ve aşağıda verilen bağıntı ile tanımlanır:

$$\tan(t) = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \frac{17t^7}{315} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_n \frac{t^n}{n!}. \quad (2.29)$$

Burada her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\mathcal{T}_{2n} = 0$$

olduğundan

$$\tan(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_{2n+1} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.30)$$

dir (Abramowitz ve Stegun 1970; Rademacher 1973; Graham vd. 1994; Comtet 1974; Qi 2015).

(2.30) bağıntısı yardımıyla,

$$t \tan(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 4^n (1 - 4^n) B_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad (2.31)$$

ve

$$\tan(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{2n+1} E_{2n+1} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.32)$$

elde edilir (Abramowitz ve Stegun 1970; Rademacher 1973; Comtet 1974; Graham vd. 1994; Simsek 2010; Qi 2015; Kim ve Kim 2018).

Buradan (2.30), (2.31) ve (2.32) bağıntıları kullanılarak, tanjant sayıları, birinci tür Bernoulli sayıları ve birinci tür Euler sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\mathcal{T}_{2n-1} = (-1)^n \left(\frac{2^{2n-1} - 2^{4n-1}}{n} \right) B_{2n},$$

$$\mathcal{T}_{2n+1} = (-1)^{n+1} 2^{2n+1} E_{2n+1}$$

ve

$$E_{2n+1} = \frac{1 - 2^{2n+2}}{n+1} B_{2n+2}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Rademacher 1973; Comtet 1974; Graham vd. 1994; Simsek 2010; Qi 2015; Kim ve Kim 2018).

(2.30) bağıntısı kullanılarak, tanjant sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mathcal{T}_1 = 1, \quad \mathcal{T}_3 = 2, \quad \mathcal{T}_5 = 16, \quad \mathcal{T}_7 = 272, \quad \mathcal{T}_9 = 7936.$$

Kotanjant sayıları $\mathcal{C}_n$ ile gösterilir ve aşağıda verilen bağıntı ile tanımlanır:

$$\left(\frac{t}{2} \right) \cot \left(\frac{t}{2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_{2n} t^{2n} \quad (2.33)$$

(Rademacher 1973; Kim ve Kim 2018).

Kotanjant sayıları ve birinci tür Bernoulli sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$t \cot(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} B_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad (2.34)$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Rademacher 1973; Kim ve Kim 2018).

Buradan (2.33) ve (2.34) bağıntıları kullanılarak, kotanjant sayıları ve birinci tür Bernoulli sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\mathcal{C}_{2n} = \frac{(-1)^n B_{2n}}{(2n)!}. \quad (2.35)$$

(2.35) bağıntısı kullanılarak, kotanjant sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mathcal{C}_0 = 1, \quad \mathcal{C}_2 = -\frac{1}{12}, \quad \mathcal{C}_4 = -\frac{1}{720}, \quad \mathcal{C}_6 = -\frac{1}{30240}.$$

$n, k \in \mathbb{N}_0$ ve $k < n$ olmak üzere, $S_1(n, k)$ ile gösterilen birinci tür Stirling sayıları aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_{S_1}(t, k) = \frac{(\ln(1+t))^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_1(n, k) \frac{t^n}{n!} \quad (2.36)$$

(Riordan 1958; Comtet 1974; Graham vd. 1994; Srivastava ve Choi 2012).

$S_1(0, 0) = 1$, $n > 0$ ise $S_1(n, 0) = 0$ ve $k > n$ ise $S_1(n, k) = 0$ olmak üzere, birinci tür Stirling sayıları aşağıdaki rekürans bağıntısı ile hesaplanır:

$$S_1(n, k) = S_1(n-1, k-1) - (n-1) S_1(n-1, k) \quad (2.37)$$

(Riordan 1958; Graham vd. 1994).

Ayrıca, birinci tür Stirling sayıları

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n S_1(n, k) x^k \quad (2.38)$$

şeklinde de yazılabilir (Graham vd. 1994; Srivastava ve Choi 2012).

(2.38) bağıntısının her iki tarafının x 'e göre 0'dan 1'e integrali alınır ve (2.15) bağıntısı kullanılırsa,

$$b_n = \sum_{k=0}^n \frac{S_1(n, k)}{k+1}$$

elde edilir.

(2.10), (2.13) ve (2.36) bağıntıları kullanılarak, birinci tür Bernoulli polinomları, birinci tür Stirling sayıları, ikinci tür Bernoulli sayıları ve polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned} b_n(x) &= (1-n)b_n + n(2-n)b_{n-1} + nb_{n-1}B_1(x) \\ &+ \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)}{k(k-1)} S_1(n-2, k-2) B_k(x) \end{aligned}$$

(Roman 1984).

(2.38) denklemi kullanılarak, birinci tür Stirling sayılarının birkaç değeri Çizelge 2.1 ile verilir:

Çizelge 2.1. $S_1(n, k)$ için bazı sayısal değerler

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	-1	1	0	0	0	0	0
3	0	2	-3	1	0	0	0	0
4	0	-6	11	-6	1	0	0	0
5	0	24	-50	35	-10	1	0	0
6	0	-120	274	-225	85	-15	1	0
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1

$n, k \in \mathbb{N}_0$ ve $k < n$ olmak üzere, n elemanlı bir kümenin k tane ayrık ve boş olmayan alt kümeye parçalanışlarının sayısına “ikinci tür Stirling sayıları” denir ve $S_2(n, k)$ ile gösterilir. İkinci tür Stirling sayıları aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_{S_2}(t, k) = \frac{(\exp(t) - 1)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n, k) \frac{t^n}{n!} \quad (2.39)$$

(Graham vd. 1994; Srivastava ve Choi 2012).

$S_2(0, 0) = 1$, $n > 0$ ise $S_2(n, 0) = 0$ ve $k > n$ ise $S_2(n, k) = 0$ olmak üzere, ikinci tür Stirling sayıları aşağıdaki rekürans bağıntısı ile hesaplanır:

$$S_2(n, k) = kS_2(n-1, k) + S_2(n-1, k-1)$$

(Graham vd. 1994; Srivastava ve Choi 2012).

(2.39) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak, ikinci tür Stirling sayılarının açık formülü aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} S_2(n, k) &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n \end{aligned} \quad (2.40)$$

(Riordan 1958; Temme 1996; Boyadzhiev 2012; Srivastava ve Choi 2012).

Ayrıca, ikinci tür Stirling sayıları

$$x^n = \sum_{k=0}^n S_2(n, k) (x)_k \quad (2.41)$$

şeklinde de yazılabilir (Graham vd. 1994; Srivastava ve Choi 2012).

(2.41) bağıntısının her iki tarafının x 'e göre 0'dan 1'e integrali alınırsa ve (2.15) bağıntısı kullanılırsa,

$$\frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^n S_2(n, k) b_k$$

elde edilir.

(2.10), (2.13) ve (2.39) bağıntıları kullanılarak, birinci tür Bernoulli sayıları ve polinomları, ikinci tür Bernoulli polinomları ve ikinci tür Stirling sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned} B_n(x) &= (1-n) B_n - n B_{n-1} + n B_{n-1}(x) b_1(x) \\ &+ \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)}{k(k-1)} S_2(n-2, k-2) b_k(x) \end{aligned}$$

(Roman 1984).

(2.40) denkleminde verilen açık formül kullanılarak, ikinci tür Stirling sayılarının birkaç değeri Çizelge 2.2 ile verilir:

Çizelge 2.2. $S_2(n, k)$ için bazı sayısal değerler

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1

$\lambda \in \mathbb{C}$ ve $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $S(n, k; \lambda)$ ile gösterilen ikinci tür λ -Stirling sayıları

aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{(\lambda \exp(t) - 1)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k; \lambda) \frac{t^n}{n!} \quad (2.42)$$

(Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Simsek 2013).

Sonuç 2.9. (2.42) bağıntısında $\lambda = 1$ alınırsa $S(n, k; 1) = S_2(n, k)$ ikinci tür Stirling sayıları elde edilir (Luo ve Srivastava 2011; Simsek 2013).

Array polinomları $S_v^n(x)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{(\exp(t) - 1)^v}{v!} \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} S_v^n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.43)$$

(Chang ve Ha 2006; Simsek 2013).

$S_0^0(x) = S_n^n(x) = 1$, $S_0^n(x) = x^n$ ve $v > n$ ise $S_v^n(x) = 0$ olmak üzere, (2.43) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak, array polinomlarının açık formülü aşağıdaki gibi verilir:

$$S_v^n(x) = \frac{1}{v!} \sum_{j=0}^v (-1)^{v-j} \binom{v}{j} (x+j)^n$$

(Chang ve Ha 2006; Simsek 2013).

Birinci tür Chebyshev polinomları $T_n(x)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n \quad (2.44)$$

(Comtet 1974; Rivlin 1974).

Ayrıca, $x = \cos(\theta)$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, birinci tür Chebyshev polinomları

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

şeklinde de yazılabilir (Comtet 1974; Rivlin 1974).

İkinci tür Chebyshev polinomları $U_n(x)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n \quad (2.45)$$

(Fox ve Parker 1968; Comtet 1974; Rivlin 1974; Benjamin vd. 2010).

Ayrıca, $x = \cos(\theta)$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, ikinci tür Chebyshev polinomları

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

şeklinde de yazılabilir (Comtet 1974; Rivlin 1974).

(2.44) ve (2.45) bağıntıları kullanılarak birinci tür Chebyshev polinomları ve ikinci tür Chebyshev polinomları arasındaki ilişkiler aşağıdaki şekilde verilir:

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x) \quad (2.46)$$

ve

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - (1 - x^2)U_{n-1}(x) \quad (2.47)$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Rivlin 1974).

(2.44) denklemi yardımıyla,

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (x^2 - 1)^j x^{n-2j} \quad (2.48)$$

kombinatorik toplamı elde edilir. Bu toplam, birinci tür Chebyshev polinomları için bir hesaplama formülüdür (Rivlin 1974; Benjamin vd. 2010).

(2.45) denklemi yardımıyla,

$$U_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (x^2 - 1)^j x^{n-2j-1} \quad (2.49)$$

kombinatorik toplamı elde edilir. Bu toplam, ikinci tür Chebyshev polinomları için bir hesaplama formülüdür (Rivlin 1974; Benjamin vd. 2010).

(2.48) bağıntısı kullanılarak, birinci tür Chebyshev polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x. \end{aligned}$$

(2.49) bağıntısı kullanılarak, ikinci tür Chebyshev polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x, \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x, \\ U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1, \\ U_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x. \end{aligned}$$

Birinci tür Dickson polinomları $D_n(x, \alpha)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{2 - xt}{1 - xt + \alpha t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(x, \alpha) t^n \quad (2.50)$$

(Dickson 1897; Rassias vd. 1991; Lidl vd. 1993).

İkinci tür Dickson polinomları $\mathfrak{D}_n(x, \alpha)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{1}{1 - xt + \alpha t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{D}_n(x, \alpha) t^n \quad (2.51)$$

(Dickson 1897; Rassias vd. 1991; Lidl vd. 1993).

(2.50) ve (2.51) bağıntıları kullanılarak, birinci tür Dickson polinomları ve ikinci tür Dickson polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$D_n(x, \alpha) = 2\mathfrak{D}_n(x, \alpha) - x\mathfrak{D}_{n-1}(x, \alpha).$$

Ayrıca, (2.50) ve (2.51) bağıntılarında $\alpha = 1$ alınırsa, Chebyshev polinomları ve Dickson polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$D_n(x, 1) = 2T_n\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2.52)$$

ve

$$\mathfrak{D}_n(x, 1) = U_n\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2.53)$$

(Dickson 1897; Rassias vd. 1991; Lidl vd. 1993).

(2.50) denklemi yardımıyla,

$$D_n(x, \alpha) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} (-\alpha)^j x^{n-2j} \quad (2.54)$$

kombinatorik toplamı elde edilir. Bu toplam, birinci tür Dickson polinomları için bir hesaplama formülüdür (Dickson 1897; Rassias vd. 1991; Lidl vd. 1993).

(2.51) denklemi yardımıyla,

$$\mathfrak{D}_n(x, \alpha) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-j}{j} (-\alpha)^j x^{n-2j} \quad (2.55)$$

kombinatorik toplamı elde edilir. Bu toplam, ikinci tür Dickson polinomları için bir hesaplama formülüdür (Dickson 1897; Rassias vd. 1991; Lidl vd. 1993).

(2.54) bağıntısı kullanılarak, birinci tür Dickson polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} D_0(x, \alpha) &= 2, \\ D_1(x, \alpha) &= x, \\ D_2(x, \alpha) &= x^2 - 2\alpha, \\ D_3(x, \alpha) &= x^3 - 3x\alpha, \\ D_4(x, \alpha) &= x^4 - 4x^2\alpha + 2\alpha^2, \\ D_5(x, \alpha) &= x^5 - 5x^3\alpha + 5x\alpha^2. \end{aligned}$$

(2.55) bağıntısı kullanılarak, ikinci tür Dickson polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_0(x, \alpha) &= 1, \\ \mathfrak{D}_1(x, \alpha) &= x, \\ \mathfrak{D}_2(x, \alpha) &= x^2 - \alpha, \\ \mathfrak{D}_3(x, \alpha) &= x^3 - 2x\alpha, \\ \mathfrak{D}_4(x, \alpha) &= x^4 - 3x^2\alpha + \alpha^2, \\ \mathfrak{D}_5(x, \alpha) &= x^5 - 4x^3\alpha + 3x\alpha^2. \end{aligned}$$

Fubini sayıları $w_g(n)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{1}{2 - \exp(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} w_g(n) \frac{t^n}{n!} \quad (2.56)$$

(Comtet 1974; Good 1975; Kılar ve Simsek 2017; Kılar 2017).

(2.56) ve (2.40) bağıntıları kullanılarak, Fubini sayıları ve 2. tür Stirling sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$w_g(n) = \sum_{j=0}^n j! S_2(n, j) \quad (2.57)$$

(Comtet 1974; Good 1975; Kılar ve Simsek 2017).

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, k . mertebeden Fubini tipli sayılar $a_n^{(k)}$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$g_a(t; k) = \frac{2^k}{(2 - \exp(t))^{2k}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}. \quad (2.58)$$

Burada

$$a_0^{(0)} = 1$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n^{(0)} = 0$$

dır (Kılar ve Simsek 2017; Kılar 2017).

k . mertebeden Fubini tipli polinomlar $a_n^{(k)}(x)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_a(t, x; k) = g_a(t; k) \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.59)$$

(Kılar ve Simsek 2017; Kılar 2017).

(2.1), (2.58) ve (2.59) denklemleri yardımıyla,

$$a_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j^{(k)} x^{n-j} \quad (2.60)$$

kombinatorik toplamı elde edilir. Bu toplam, $a_n^{(k)}(x)$ polinomları için bir hesaplama formülüdür.

(2.59) bağıntısında her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$a_n^{(0)}(x) = x^n$$

dir. Ayrıca, $x = 0$ için

$$F_a(t, 0; k) = g_a(t; k)$$

elde edilir. Buradan

$$a_n^{(k)} = a_n^{(k)}(0)$$

dır (Kılar ve Simsek 2017; Kılar 2017). Dahası, $k = 1$ için

$$a_n = a_n^{(1)}$$

dir ve a_n sayıları ile Fubini sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$a_n = 2 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w_g(j) w_g(n-j) \quad (2.61)$$

(Kılar ve Simsek 2017; Kılar 2017).

(2.58) bağıntısında $k = u+v$ olmak üzere, k . mertebeden Fubini tipli sayılar aşağıdaki rekürans bağıntısı ile hesaplanır:

$$a_n^{(u+v)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j^{(u)} a_{n-j}^{(v)} \quad (2.62)$$

(Kılar ve Simsek 2017; Kılar 2017).

(2.62) denklemi Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, k . mertebeden Fubini tipli sayılarının hesaplamaları Mathematica Uygulaması 26 ile birlikte Bulgular ve Tartışmalar bölümde verilecektir.

(2.60) bağıntısında $k = 1$ alınırsa, $a_n^{(1)}(x)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} a_1^{(1)}(x) &= 2x + 4, \\ a_2^{(1)}(x) &= 2x^2 + 8x + 16, \\ a_3^{(1)}(x) &= 2x^3 + 12x^2 + 48x + 88. \end{aligned}$$

(2.60) bağıntısında $k = 2$ alınırsa, $a_n^{(2)}(x)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} a_1^{(2)}(x) &= 4x + 16, \\ a_2^{(2)}(x) &= 4x^2 + 32x + 96, \\ a_3^{(2)}(x) &= 4x^3 + 48x^2 + 288x + 736. \end{aligned}$$

(2.60) bağıntısında $k = 3$ alınırsa, $a_n^{(3)}(x)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} a_1^{(3)}(x) &= 8x + 48, \\ a_2^{(3)}(x) &= 8x^2 + 96x + 384, \\ a_3^{(3)}(x) &= 8x^3 + 144x^2 + 1152x + 3744. \end{aligned}$$

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $v \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $y_6(n; x, y, z; a, b, v)$ ile Milne-Thomson tipli polinomları aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\begin{aligned} R(t, x, y, z; a, b, v) &= (b + f(t, a))^z \exp(xt + yh(t, v)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y_6(n; x, y, z; a, b, v) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (2.63)$$

(Simsek 2019).

(2.63) bağıntısında $y = z = 1$ ve $b = v = 0$ alınırsa, $\Phi_n^{(a)}(x)$ ile gösterilen a . dereceden Milne-Thomson polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir, yani

$$f(t, a) \exp(xt + g(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(a)}(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.64)$$

olur (Milne-Thomson 1933).

(2.63) bağıntısında $z = 1$ ve $b = 0$ alınırsa, Dere ve Simsek (2015) tarafından verilen $\psi_n^{(a)}(x, y, v)$ polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir, yani

$$f(t, a) \exp(xt + yh(t, v)) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^{(a)}(x, y, v) \frac{t^n}{n!} \quad (2.65)$$

olur (Dere ve Simsek 2015).

(2.63) bağıntısında $y = 0$ ve

$$(b + f(t, a))^z = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n^{(z)}(a, b) t^n$$

şeklinde bir kuvvet serisi olmak üzere, $y_6(n; x, z; a, b)$ ile gösterilen Appell tipli polinomlar aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$(b + f(t, a))^z \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} y_6(n; x, z; a, b) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.66)$$

Buradan

$$y_6(n; x, z; a, b) = y_6(n; x, 0, z; a, b, v)$$

dır (Simsek 2019; Kilar ve Simsek 2021c).

Eğer (2.63) bağıntısında $x = y = 0$ alınırsa,

$$R_1(t, z; a, b) = (b + f(t, a))^z = \sum_{n=0}^{\infty} y_6^{(z)}(n; a, b) \frac{t^n}{n!} \quad (2.67)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanan z . mertebeden yeni bir özel fonksiyon elde edilir ve

$$y_6^{(z)}(n; a, b) = y_6(n; 0, 0, z; a, b, v)$$

ile gösterilir (Simsek 2019; Kilar ve Simsek 2021c).

a , b ve v nin bazı özel değerleri için Milne-Thomson tipli polinomlarının bazı özel durumları aşağıdaki gibi verilmiştir:

Örnek 2.10. (2.66) bağıntısında $b = 0$ ve

$$f(t, 1) = \frac{t}{\exp(t) - 1}$$

alınırsa yüksek mertebeden Bernoulli polinomları ve Milne-Thomson tipli polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$y_6(n; x, z; 1, 0) = B_n^{(z)}(x).$$

Örnek 2.11. (2.67) bağıntısında $b = 0$ ve

$$f(t, 1) = \frac{2}{\exp(t) + 1}$$

alınırsa, yüksek mertebeden Euler polinomları ve Milne-Thomson tipli polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$y_6(n; x, z; 1, 0) = E_n^{(z)}(x).$$

$j \geq 2$ ve $j \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $H_n^{(j)}(x, y)$ Hermite-Kampè de Fèriet (Gould-Hopper) polinomları aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_H(t, x, y, j) = \exp(xt + yt^j) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(j)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \quad (2.68)$$

(Gould ve Hopper 1962; Dattoli vd. 1994; Dattoli vd. 1996; Bretti ve Ricci 2004; Dere ve Simsek 2015).

(2.68) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak, Hermite-Kampè de Fèriet polinomlarının açık formülü aşağıdaki gibi verilir:

$$H_n^{(j)}(x, y) = n! \sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{j}\right]} \frac{x^{n-js} y^s}{(n-js)! s!}. \quad (2.69)$$

Bu polinom ailesi aşağıda verilen genelleştirilmiş ısı denkleminin çözümleridir:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial^j}{\partial x^j} f(x, y), \quad f(x, 0) = x^n$$

(Gould ve Hopper 1962; Dattoli vd. 1994; Dattoli vd. 1996; Bretti ve Ricci 2004; Dere ve Simsek 2015).

(2.69) bağıntısında $j = 2$ alınırsa, Hermite-Kampè de Fèriet polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$H_0^{(2)}(x, y) = 1, \quad H_1^{(2)}(x, y) = x, \quad H_2^{(2)}(x, y) = x^2 + 2y, \quad H_3^{(2)}(x, y) = x^3 + 6xy.$$

$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ olmak üzere, $H_n(\vec{u}, r)$ genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet polinomları aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_R(t, \vec{u}, r) = \exp\left(\sum_{j=1}^r u_j t^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} \quad (2.70)$$

(Dattoli vd. 1994; Dattoli vd. 1996; Bretti ve Ricci 2004).

(2.70) bağıntısında,

$$m = \sum_{j=1}^r m_j,$$

ve

$$n = \sum_{j=1}^r j m_j$$

olmak üzere, genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet polinomları

$$H_n(\vec{u}, r) = \sum_{\Pi_m(n|r)} \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_r!} \prod_{j=1}^r u_j^{m_j} \quad (2.71)$$

şeklindedir. Buradaki toplam, büyüklüğü (eleman sayısı) en fazla r olan bütün $\Pi_m(n | r)$ parçalanışlara kısıtlanmış parçalanışlar üzerinde alınacaktır ve her bir j sayısının parçalanışı m_j ile gösterilir (Dattoli vd. 1994; Dattoli vd. 1996; Bretti ve Ricci 2004).

(2.70) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak, genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet polinomlarının açık formülü aşağıdaki gibi verilir:

$$H_n(\vec{u}, r) = n! \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{r}\right]} \frac{u_r^j H_{n-rj}(\vec{u}, r-1)}{j! (n-rj)!} \quad (2.72)$$

(Dattoli vd. 1994; Dattoli vd. 1996).

(2.72) bağıntısında $r = 3$ alınırsa, genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} H_0^{(3)}((u_1, u_2, u_3), 3) &= 1, \\ H_1^{(3)}((u_1, u_2, u_3), 3) &= u_1, \\ H_2^{(3)}((u_1, u_2, u_3), 3) &= u_1^2 + 2u_2, \\ H_3^{(3)}((u_1, u_2, u_3), 3) &= u_1^3 + 6u_1u_2 + 6u_3, \\ H_4^{(3)}((u_1, u_2, u_3), 3) &= u_1^4 + 12u_1^2u_2 + 12u_2^2 + 24u_1u_3, \\ H_5^{(3)}((u_1, u_2, u_3), 3) &= u_1^5 + 20u_1^3u_2 + 60u_1u_2^2 + 60u_1^2u_3 + 120u_2u_3. \end{aligned}$$

2.2. Apostol Tipli Sayı ve Polinom Ailelerinin Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri

Bu bölümde, k . mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları ve polinomları, k . mertebeden Apostol-Euler sayıları ve polinomları, k . mertebeden Apostol-Genocchi sayıları ve polinomları, k . mertebeden Apostol tipli Frobenius-Euler sayıları ve polinomlarının tanımları ve temel özellikleri kaynaklarıyla birlikte verilecektir.

$\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = 1$ iken $|t| < |2\pi|$ ve $\lambda \neq 1$ iken $|t| < |\log \lambda|$ olsun. k . mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları $\mathcal{B}_n^{(k)}(\lambda)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$g_{AB}(t; \lambda, k) = \left(\frac{t}{\lambda \exp(t) - 1} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n^{(k)}(\lambda) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.73)$$

Burada

$$\mathcal{B}_0^{(0)}(\lambda) = 1$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{B}_n^{(0)}(\lambda) = 0$$

dır (Luo ve Srivastava 2005; Srivastava ve Choi 2012). Ayrıca, kaynaklar bölümünde bulunan diğer çalışmalara da bakılabilir.

k . mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları $\mathcal{B}_n^{(k)}(x; \lambda)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_{AB}(t, x; \lambda, k) = g_{AB}(t; \lambda, k) \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n^{(k)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!} \quad (2.74)$$

(Luo ve Srivastava 2005, 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.1), (2.73) ve (2.74) denklemleri yardımıyla,

$$\mathcal{B}_n^{(k)}(x; \lambda) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{B}_j^{(k)}(\lambda) x^{n-j} \quad (2.75)$$

kombinatorik toplamı elde edilir. Bu toplam, $\mathcal{B}_n^{(k)}(x; \lambda)$ polinomları için bir hesaplama formülüdür.

(2.74) bağıntısında her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\mathcal{B}_n^{(0)}(x; \lambda) = x^n$$

dir. Ayrıca, $x = 0$ için

$$F_{AB}(t, 0; \lambda, k) = g_{AB}(t; \lambda, k)$$

elde edilir. Buradan

$$\mathcal{B}_n^{(k)}(\lambda) = \mathcal{B}_n^{(k)}(0; \lambda)$$

dır (Luo ve Srivastava 2005, 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.74) bağıntısında $\lambda = 1$ alınırsa, $F_{AB}(t, x; 1, k)$ fonksiyonu k . mertebeden Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$B_n^{(k)}(x) = \mathcal{B}_n^{(k)}(x; 1)$$

ile gösterilen k . mertebeden Bernoulli polinomları elde edilir.

(2.74) bağıntısında $k = 1$ alınırsa, $F_{AB}(t, x; \lambda, 1)$ fonksiyonu Apostol-Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$\mathcal{B}_n(x; \lambda) = \mathcal{B}_n^{(1)}(x; \lambda)$$

ile gösterilen Apostol-Bernoulli polinomları elde edilir.

(2.73) bağıntısında $k = 1$ alınırsa, $g_{AB}(t; \lambda, 1)$ fonksiyonu Apostol-Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$\mathcal{B}_n(\lambda) = \mathcal{B}_n^{(1)}(\lambda)$$

ile gösterilen Apostol-Bernoulli sayıları elde edilir (Apostol 1951; Luo 2004; Luo ve Srivastava 2005; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.73) bağıntısı kullanılarak, k . mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$\mathcal{B}_n^{(k)}(\lambda) = k! \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k+j-1}{j} \frac{j! (-\lambda)^j}{(\lambda-1)^{j+k}} S_2(n-k, j) \quad (2.76)$$

(Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Simsek 2018).

(2.76) denkleminde $k = 1$ alınırsa, Apostol-Bernoulli sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(\lambda) &= 0, \quad \mathcal{B}_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda-1}, \quad \mathcal{B}_2(\lambda) = -\frac{2\lambda}{(\lambda-1)^2}, \quad \mathcal{B}_3(\lambda) = \frac{3\lambda(\lambda+1)}{(\lambda-1)^3}, \\ \mathcal{B}_4(\lambda) &= -\frac{4\lambda(\lambda^2+4\lambda+1)}{(\lambda-1)^4}, \quad \mathcal{B}_5(\lambda) = \frac{5\lambda(\lambda^3+11\lambda^2+11\lambda+1)}{(\lambda-1)^5}. \end{aligned}$$

(2.75) denkleminde $k = 1$ alınırsa, Apostol-Bernoulli polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(x; \lambda) &= 0, \\ \mathcal{B}_1(x; \lambda) &= \frac{1}{(\lambda-1)}, \\ \mathcal{B}_2(x; \lambda) &= \frac{1}{\lambda-1}x - \frac{2\lambda}{(\lambda-1)^2}, \\ \mathcal{B}_3(x; \lambda) &= \frac{3}{\lambda-1}x^2 - \frac{6\lambda}{(\lambda-1)^2}x + \frac{3\lambda(\lambda+1)}{(\lambda-1)^3}. \end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = 1$ iken $|t| < |\pi|$ ve $\lambda \neq 1$ iken $|t| < |\log(-\lambda)|$ olsun. k . mertebeden Apostol-Euler sayıları $\mathcal{E}_n^{(k)}(\lambda)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$g_{AE}(t; \lambda, k) = \left(\frac{2}{\lambda \exp(t) + 1} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(k)}(\lambda) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.77)$$

Burada

$$\mathcal{E}_0^{(0)}(\lambda) = 1$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{E}_n^{(0)}(\lambda) = 0$$

dır (Luo 2006; Srivastava ve Choi 2012). Ayrıca, kaynaklar bölümünde bulunan diğer çalışmalara da bakılabilir.

k . mertebeden Apostol-Euler polinomları $\mathcal{E}_n^{(k)}(x; \lambda)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_{AE}(t, x; \lambda, k) = g_{AE}(t; \lambda, k) \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(k)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!} \quad (2.78)$$

(Luo 2006; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.1), (2.77) ve (2.78) denklemleri yardımıyla,

$$\mathcal{E}_n^{(k)}(x; \lambda) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{E}_j^{(k)}(\lambda) x^{n-j} \quad (2.79)$$

kombinatorik toplamı elde edilir. Bu toplam, $\mathcal{E}_n^{(k)}(x; \lambda)$ polinomları için bir hesaplama formülüdür.

(2.78) bağıntısında her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\mathcal{E}_n^{(0)}(x; \lambda) = x^n$$

dir. Ayrıca, $x = 0$ için

$$F_{AE}(t, 0; \lambda, k) = g_{AE}(t; \lambda, k)$$

elde edilir. Buradan

$$\mathcal{E}_n^{(k)}(\lambda) = \mathcal{E}_n^{(k)}(0; \lambda)$$

dır (Luo 2006; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.78) bağıntısında $\lambda = 1$ alınırsa, $F_{AE}(t, x; 1, k)$ fonksiyonu k . mertebeden Euler polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$E_n^{(k)}(x) = \mathcal{E}_n^{(k)}(x; 1)$$

ile gösterilen k . mertebeden Euler polinomları elde edilir.

(2.78) bağıntısında $k = 1$ alınırsa, $F_{AE}(t, x; \lambda, 1)$ fonksiyonu Apostol-Euler polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$\mathcal{E}_n(x; \lambda) = \mathcal{E}_n^{(1)}(x; \lambda)$$

ile gösterilen Apostol-Euler polinomları elde edilir.

(2.77) bağıntısında $k = 1$ alınırsa, $g_{AE}(t; \lambda, 1)$ fonksiyonu Apostol-Euler sayılarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$\mathcal{E}_n(\lambda) = \mathcal{E}_n^{(1)}(\lambda)$$

ile gösterilen Apostol-Euler sayıları elde edilir (Luo 2006; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.77) bağıntısı kullanılarak, k . mertebeden Apostol-Euler sayıları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$\mathcal{E}_n^{(k)}(\lambda) = (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^{j+k} k^{n-j} \sum_{m=0}^j \binom{k+m-1}{m} \frac{m! (-\lambda)^m}{(\lambda+1)^{k+m}} S_2(j, m) \quad (2.80)$$

(Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Simsek 2018).

(2.80) denkleminde $k = 1$ alınırsa, Apostol-Euler sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(\lambda) &= \frac{2}{\lambda+1}, \quad \mathcal{E}_1(\lambda) = -\frac{2\lambda}{(\lambda+1)^2}, \quad \mathcal{E}_2(\lambda) = \frac{2\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)^3}, \\ \mathcal{E}_3(\lambda) &= -\frac{2\lambda(\lambda^2-4\lambda+1)}{(\lambda+1)^4}, \quad \mathcal{E}_4(\lambda) = \frac{2\lambda(\lambda^3-11\lambda^2+11\lambda-1)}{(\lambda+1)^5}, \\ \mathcal{E}_5(\lambda) &= -\frac{2\lambda(\lambda^4-26\lambda^3+66\lambda^2-26\lambda+1)}{(\lambda+1)^6}. \end{aligned}$$

(2.79) denkleminde $k = 1$ alınırsa, Apostol-Euler polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(x; \lambda) &= \frac{2}{\lambda+1}, \\ \mathcal{E}_1(x; \lambda) &= \frac{2}{\lambda+1}x - \frac{2\lambda}{(\lambda+1)^2}, \\ \mathcal{E}_2(x; \lambda) &= \frac{2}{\lambda+1}x^2 - \frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2}x + \frac{2\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)^3}, \\ \mathcal{E}_3(x; \lambda) &= \frac{2}{\lambda+1}x^3 - \frac{6\lambda}{(\lambda+1)^2}x^2 + \frac{6\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)^3}x - \frac{2\lambda(\lambda^2-4\lambda+1)}{(\lambda+1)^4}. \end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = 1$ iken $|t| < |\pi|$ ve $\lambda \neq 1$ iken $|t| < |\log(-\lambda)|$ olsun. k . mertebeden Apostol-Genocchi sayıları $\mathcal{G}_n^{(k)}(\lambda)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$g_{AG}(t; \lambda, k) = \left(\frac{2t}{\lambda \exp(t) + 1} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(k)}(\lambda) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.81)$$

Burada

$$\mathcal{G}_0^{(0)}(\lambda) = 1$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{G}_n^{(0)}(\lambda) = 0$$

dır (Luo ve Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012). Ayrıca, kaynaklar bölümünde bulunan diğer çalışmalara da bakılabilir.

k . mertebeden Apostol-Genocchi polinomları $\mathcal{G}_n^{(k)}(x; \lambda)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_{AG}(t, x; \lambda, k) = g_{AG}(t; \lambda, k) \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(k)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!} \quad (2.82)$$

(Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Zou 2017).

(2.1), (2.81) ve (2.82) denklemleri yardımıyla,

$$\mathcal{G}_n^{(k)}(x; \lambda) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{G}_j^{(k)}(\lambda) x^{n-j} \quad (2.83)$$

kombinatorik toplamı elde edilir. Bu toplam, $\mathcal{G}_n^{(k)}(x; \lambda)$ polinomları için bir hesaplama formülüdür.

(2.82) bağıntısında her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\mathcal{G}_n^{(0)}(x; \lambda) = x^n$$

dir. Ayrıca, $x = 0$ için

$$F_{AG}(t, 0; \lambda, k) = g_{AG}(t; \lambda, k)$$

elde edilir. Buradan

$$\mathcal{G}_n^{(k)}(\lambda) = \mathcal{G}_n^{(k)}(0; \lambda)$$

dır (Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Zou 2017).

(2.82) bağıntısında $\lambda = 1$ alınırsa, $F_{AG}(t, x; 1, k)$ fonksiyonu k . mertebeden Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$G_n^{(k)}(x) = \mathcal{G}_n^{(k)}(x; 1)$$

ile gösterilen k . mertebeden Genocchi polinomları elde edilir.

(2.82) bağıntısında $k = 1$ alınırsa, $F_{AG}(t, x; \lambda, 1)$ fonksiyonu Apostol-Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$\mathcal{G}_n(x; \lambda) = \mathcal{G}_n^{(1)}(x; \lambda)$$

ile gösterilen Apostol-Genocchi polinomları elde edilir.

(2.81) bağıntısında $k = 1$ alınırsa, $g_{AG}(t; \lambda, 1)$ fonksiyonu Apostol-Genocchi sayılarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$\mathcal{G}_n(\lambda) = \mathcal{G}_n^{(1)}(\lambda)$$

ile gösterilen Apostol-Genocchi sayıları elde edilir (Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Zou 2017).

(2.81) bağıntısı kullanılarak, k . mertebeden Apostol-Genocchi sayıları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$\mathcal{G}_n^{(k)}(\lambda) = \frac{2^k n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k+j-1}{j} \frac{j! (-\lambda)^j}{(\lambda+1)^{j+k}} S_2(n-k, j) \quad (2.84)$$

(Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.84) denkleminde $k = 1$ alınırsa, Apostol-Genocchi sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(\lambda) &= 0, \quad \mathcal{G}_1(\lambda) = \frac{2}{\lambda+1}, \quad \mathcal{G}_2(\lambda) = -\frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2}, \quad \mathcal{G}_3(\lambda) = \frac{6\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)^3}, \\ \mathcal{G}_4(\lambda) &= -\frac{8\lambda(\lambda^2-4\lambda+1)}{(\lambda+1)^4}, \quad \mathcal{G}_5(\lambda) = \frac{10\lambda(\lambda^3-11\lambda^2+11\lambda-1)}{(\lambda+1)^5}. \end{aligned}$$

(2.83) denkleminde $k = 1$ alınırsa, Apostol-Genocchi polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(x; \lambda) &= 0, \\ \mathcal{G}_1(x; \lambda) &= \frac{2}{\lambda+1}, \\ \mathcal{G}_2(x; \lambda) &= \frac{4}{\lambda+1}x - \frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2}, \\ \mathcal{G}_3(x; \lambda) &= \frac{6}{\lambda+1}x^2 - \frac{12\lambda}{(\lambda+1)^2}x + \frac{6\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)^3}. \end{aligned}$$

(2.74), (2.78) ve (2.82) denklemleri yardımıyla, Apostol-Bernoulli polinomları, Apostol-Euler polinomları ve Apostol-Genocchi polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki teorem yardımıyla verilir:

Teorem 2.12. $n, k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere;

$$\mathcal{G}_n^{(k)}(x; -\lambda) = \frac{n!}{(n-k)!} \mathcal{E}_{n-k}^{(k)}(x; -\lambda) = (-2)^k \mathcal{B}_n^{(k)}(x; \lambda)$$

dır (Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011).

$u \in \mathbb{C}$ ve $u \neq \lambda$, $\lambda \neq 1$ olsun. k . mertebeden Apostol tipli Frobenius-Euler sayıları $\mathcal{H}_n^{(k)}(\lambda, u)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$g_{AH}(t; \lambda, u, k) = \left(\frac{1-u}{\lambda \exp(t) - u} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{(k)}(\lambda, u) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.85)$$

Burada

$$\mathcal{H}_0^{(0)}(\lambda, u) = 1$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{H}_n^{(0)}(\lambda, u) = 0$$

dır (Kim ve Kim 2012; Simsek 2013; Bayad ve Kim 2016).

k . mertebeden Apostol tipli Frobenius-Euler polinomları $\mathcal{H}_n^{(k)}(x; \lambda, u)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_{AH}(t, x; \lambda, u, k) = g_{AH}(t; \lambda, u, k) \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{(k)}(x; \lambda, u) \frac{t^n}{n!} \quad (2.86)$$

(Kim ve Kim 2012; Simsek 2013; Bayad ve Kim 2016).

(2.1), (2.85) ve (2.86) denklemleri yardımıyla,

$$\mathcal{H}_n^{(k)}(x; \lambda, u) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{H}_j^{(k)}(\lambda, u) x^{n-j} \quad (2.87)$$

kombinatorik toplamı elde edilir. Bu toplam, $\mathcal{H}_n^{(k)}(x; \lambda, u)$ polinomları için bir hesaplama formülüdür.

(2.86) bağıntısında her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\mathcal{H}_n^{(0)}(x; \lambda, u) = x^n$$

dir. Ayrıca, $x = 0$ için

$$F_{AH}(t, 0; \lambda, u, k) = g_{AG}(t; \lambda, u, k)$$

elde edilir. Buradan

$$\mathcal{H}_n^{(k)}(\lambda, u) = \mathcal{H}_n^{(k)}(0; \lambda, u)$$

dır (Kim ve Kim 2012; Simsek 2013; Bayad ve Kim 2016).

(2.86) bağıntısında $\lambda = 1$ alınırsa, $F_{AH}(t, x; 1, u, k)$ fonksiyonu k . mertebeden Frobenius-Euler polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$H_n^{(k)}(x; u) = \mathcal{H}_n^{(k)}(x; 1, u) \quad (2.88)$$

ile gösterilen k . mertebeden Frobenius-Euler polinomları elde edilir (Kim ve Kim 2012; Kurt ve Simsek 2013a; Simsek 2013; Bayad ve Kim 2016).

(2.88) bağıntısında $x = 0$ ve $\lambda = 1$ alınırsa, $F_{AH}(t, 0; 1, u, k)$ fonksiyonu k . mertebeden Frobenius-Euler sayılarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$H_n^{(k)}(u) = H_n^{(k)}(0; u) \quad (2.89)$$

ile gösterilen k . mertebeden Frobenius-Euler sayıları elde edilir (Kim ve Kim 2012; Kurt ve Simsek 2013a; Simsek 2012, 2013; Bayad ve Kim 2016).

(2.73) ve (2.89) bağıntılarında $k = 1$ alınırsa,

$$\mathcal{B}_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda - 1} H_{n-1}(\lambda^{-1}) \quad (2.90)$$

elde edilir (Kim vd. 2008; Simsek 2013).

(2.86) bağıntısında $u = -1$ alınırsa, $F_{AH}(t, x; \lambda, -1, k)$ fonksiyonu k . mertebeden Apostol-Euler polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$\mathcal{H}_n^{(k)}(x; \lambda, -1) = \mathcal{E}_n^{(k)}(x; \lambda)$$

ile gösterilen k . mertebeden Apostol-Euler polinomları elde edilir (Kim ve Kim 2012; Kurt ve Simsek 2013a; Simsek 2013; Bayad ve Kim 2016).

(2.86) bağıntısında $k = 1$ alınması durumunda, $F_{AH}(t, x; \lambda, u, 1)$ fonksiyonu Apostol tipli Frobenius-Euler polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$\mathcal{H}_n(x; \lambda, u) = \mathcal{H}_n^{(1)}(x; \lambda, u)$$

ile gösterilen Apostol tipli Frobenius-Euler polinomları elde edilir (Kim ve Kim 2012; Kurt ve Simsek 2013a; Simsek 2013; Bayad ve Kim 2016; Kucukoglu ve Simsek 2019).

(2.85) bağıntısında $k = 1$ alınırsa, $g_{AH}(t; \lambda, u, 1)$ fonksiyonu Apostol tipli Frobenius-Euler sayılarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$\mathcal{H}_n(\lambda, u) = \mathcal{H}_n^{(1)}(\lambda, u)$$

ile gösterilen Apostol tipli Frobenius-Euler sayıları elde edilir (Kim ve Kim 2012; Kurt ve Simsek 2013a; Simsek 2013; Bayad ve Kim 2016; Kucukoglu ve Simsek 2019).

(2.86) ve (2.88) bağıntıları kullanılarak, k . mertebeden Apostol tipli Frobenius-Euler polinomları ve k . mertebeden Frobenius-Euler sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\mathcal{H}_n^{(k)}(x; \lambda, u) = \left(\frac{1-u}{\lambda-u} \right)^k H_n^{(k)}\left(x; \frac{u}{\lambda}\right). \quad (2.91)$$

(2.91) denkleminde $x = 0$, $k = 1$ alınırsa ve (2.90) bağıntısı ile birleştirilirse, Apostol tipli Frobenius-Euler sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(\lambda, u) &= \frac{1-u}{\lambda-u}, & \mathcal{H}_1(\lambda, u) &= -\frac{\lambda(1-u)}{(\lambda-u)^2}, \\ \mathcal{H}_2(\lambda, u) &= \frac{\lambda(\lambda+u)(1-u)}{(\lambda-u)^3}, & \mathcal{H}_3(\lambda, u) &= -\frac{\lambda(1-u)(u^2+4\lambda u+\lambda^2)}{(\lambda-u)^4} \end{aligned}$$

(2.85) denkleminde $k = 1$ alınırsa, Apostol tipli Frobenius-Euler polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(x; \lambda, u) &= \frac{1-u}{\lambda-u}, \\ \mathcal{H}_1(x; \lambda, u) &= \frac{1-u}{\lambda-u} \left(x - \frac{\lambda}{u-\lambda} \right), \\ \mathcal{H}_2(x; \lambda, u) &= \frac{1-u}{\lambda-u} \left(x^2 - \frac{2\lambda}{u-\lambda}x + \frac{\lambda(\lambda+u)}{(\lambda-u)^2} \right), \\ \mathcal{H}_3(x; \lambda, u) &= \frac{1-u}{\lambda-u} \left(x^3 - \frac{3\lambda}{u-\lambda}x^2 + \frac{3\lambda(\lambda+u)}{(\lambda-u)^2}x - \frac{\lambda(u^2+4\lambda u+\lambda^2)}{(\lambda-u)^3} \right). \end{aligned}$$

2.3. İki Parametrel Apostol Tipli Polinomların Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri

Bu bölümde, $C_n(x, y)$ polinomları, $S_n(x, y)$ polinomları, k . mertebeden iki parametrel Apostol-Bernoulli tipli polinomları, k . mertebeden iki parametrel Apostol-Euler tipli polinomları, k . mertebeden iki parametrel Apostol-Genocchi tipli polinomları, k . mertebeden iki parametrel Eulerian tipli polinomlarının tanımları ve temel özellikleri kaynaklarıyla birlikte verilecektir.

$C_n(x, y)$ polinomları ve $S_n(x, y)$ polinomları sırasıyla aşağıda verilen üreteç fonksiyonları ile tanımlanır:

$$F_C(t, x, y) = \exp(xt) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x, y) \frac{t^n}{n!} \quad (2.92)$$

ve

$$F_S(t, x, y) = \exp(xt) \sin(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x, y) \frac{t^n}{n!} \quad (2.93)$$

(Masjed-Jamei ve Koepf 2017; Kim ve Ryoo 2018; Masjed-Jamei vd. 2018; Srivastava vd. 2018; Kilar ve Simsek 2019a, 2019b).

(2.92) ve (2.93) denklemleri yardımıyla,

$$C_n(x, y) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j} x^{n-2j} y^{2j} \quad (2.94)$$

ve

$$S_n(x, y) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j+1} x^{n-2j-1} y^{2j+1} \quad (2.95)$$

kombinatorik toplamı elde edilir. Bu toplam, $C_n(x, y)$ polinomları ve $S_n(x, y)$ polinomları için birer hesaplama formülleridir (Masjed-Jamei ve Koepf 2017; Kim ve Ryoo 2018; Masjed-Jamei vd. 2018; Srivastava vd. 2018; Kilar ve Simsek 2019a, 2019b).

(2.94) bağıntısı kullanılarak, $C_n(x, y)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} C_0(x, y) &= 1, \\ C_1(x, y) &= x, \\ C_2(x, y) &= x^2 - y^2, \\ C_3(x, y) &= x^3 - 3xy^2, \\ C_4(x, y) &= x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \\ C_5(x, y) &= x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4. \end{aligned}$$

(2.95) bağıntısı kullanılarak, $S_n(x, y)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} S_0(x, y) &= 0, \\ S_1(x, y) &= y, \\ S_2(x, y) &= 2xy, \\ S_3(x, y) &= 3x^2y - y^3, \\ S_4(x, y) &= 4x^3y - 4xy^3, \\ S_5(x, y) &= 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5. \end{aligned}$$

Ayrıca, (2.92) ve (2.93) bağıntıları kullanılarak, $C_n(x, y)$ ve $S_n(x, y)$ polinomlarını içeren aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$S_n(2x, 2y) = 2 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} S_j(x, y) C_{n-j}(x, y) \quad (2.96)$$

(Kilar ve Simsek 2019a).

k . mertebeden iki parametrelili kosinüs-Apostol-Bernoulli tipli polinomlar $\mathcal{B}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda)$ ve k . mertebeden iki parametrelili sinüs-Apostol-Bernoulli tipli polinomlar $\mathcal{B}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda)$ ile gösterilir. $\mathcal{B}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda)$ polinomları ve $\mathcal{B}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda)$ polinomları aşağıda verilen üreteç fonksiyonları ile tanımlanır:

$$\begin{aligned} F_{BC}(t, x, y; \lambda, k) &= \left(\frac{t}{\lambda \exp(t) - 1} \right)^k \exp(xt) \cos(yt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (2.97)$$

ve

$$\begin{aligned} F_{BS}(t, x, y; \lambda, k) &= \left(\frac{t}{\lambda \exp(t) - 1} \right)^k \exp(xt) \sin(yt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (2.98)$$

(Srivastava ve Kızılateş 2019; Srivastava vd. 2019). Bu polinomlar ailesi k . mertebeden iki parametrelili Apostol-Bernoulli tipli polinomlar olarak da adlandırılır.

(2.1), (2.73), (2.92), (2.93), (2.97) ve (2.98) bağıntıları yardımıyla,

$$\mathcal{B}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{B}_j^{(k)}(\lambda) C_{n-j}(x, y) \quad (2.99)$$

ve

$$\mathcal{B}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{B}_j^{(k)}(\lambda) S_{n-j}(x, y) \quad (2.100)$$

kombinatorik toplamaları elde edilir. Bu toplamalar, $\mathcal{B}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda)$ polinomları ve $\mathcal{B}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda)$ polinomları için birer hesaplama formülleridir.

(2.97) ve (2.98) bağıntılarında her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\mathcal{B}_n^{(C,0)}(x, y; \lambda) = C_n(x, y)$$

ve

$$\mathcal{B}_n^{(S,0)}(x, y; \lambda) = S_n(x, y)$$

dir. Ayrıca, (2.97) bağıntısında $y = 0$ alınırsa,

$$F_{BC}(t, x, 0; \lambda, k) = F_{AB}(t, x; \lambda, k)$$

elde edilir. Buradan,

$$\mathcal{B}_n^{(k)}(x; \lambda) = \mathcal{B}_n^{(C,k)}(x, 0; \lambda)$$

dır.

(2.97) ve (2.98) bağıntılarında $k = 1$ alınırsa, $F_{BC}(t, x, y; \lambda, 1)$ ve $F_{BS}(t, x, y; \lambda, 1)$ fonksiyonları iki parametrelili Apostol-Bernoulli tipli polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$\mathcal{B}_n^{(C)}(x, y; \lambda) = \mathcal{B}_n^{(C,1)}(x, y; \lambda)$$

ve

$$\mathcal{B}_n^{(S)}(x, y; \lambda) = \mathcal{B}_n^{(S,1)}(x, y; \lambda)$$

ile gösterilen iki parametrelili Apostol-Bernoulli polinomları elde edilir (Srivastava vd. 2018).

(2.97) ve (2.98) bağıntılarında $\lambda = 1$ ve $k = 1$ alınırsa, $F_{BC}(t, x, y; 1, 1)$ ve $F_{BS}(t, x, y; 1, 1)$ fonksiyonları iki parametrelili Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$B_n^{(C)}(x, y) = \mathcal{B}_n^{(C,1)}(x, y; 1)$$

ve

$$B_n^{(S)}(x, y) = \mathcal{B}_n^{(S,1)}(x, y; 1)$$

ile gösterilen iki parametrelili Bernoulli polinomları elde edilir. Bu polinom ailesine sırasıyla kosinüs-Bernoulli polinomları ve sinüs-Bernoulli polinomları da denir (Kim ve Ryoo 2018; Masjed-Jamei vd. 2019).

(2.99) denkleminde $\lambda = 1$ ve $k = 1$ alınırsa, kosinüs-Bernoulli polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} B_0^{(C)}(x, y) &= 1, \\ B_1^{(C)}(x, y) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2^{(C)}(x, y) &= x^2 - y^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3^{(C)}(x, y) &= x^3 - 3xy^2 - \frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} + \frac{x}{2}, \\ B_4^{(C)}(x, y) &= x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 6xy^2 - 2x^3 + x^2 - y^2 - \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

(2.100) denkleminde $\lambda = 1$ ve $k = 1$ alınırsa, sinüs-Bernoulli polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} B_0^{(S)}(x, y) &= 0, \\ B_1^{(S)}(x, y) &= y, \\ B_2^{(S)}(x, y) &= 2xy - y, \\ B_3^{(S)}(x, y) &= 3x^2y - y^3 - 3xy + \frac{y}{2}, \\ B_4^{(S)}(x, y) &= 4x^3y - 6x^2y - 4xy^3 + 2y^3 + 2xy. \end{aligned}$$

(2.99) denkleminde $k = 1$ alınırsa, $\mathcal{B}_n^{(C)}(x, y; \lambda)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0^{(C)}(x, y; \lambda) &= 0, \\ \mathcal{B}_1^{(C)}(x, y; \lambda) &= \frac{1}{\lambda - 1}, \\ \mathcal{B}_2^{(C)}(x, y; \lambda) &= \frac{2\lambda - 2}{(\lambda - 1)^2}x - \frac{2\lambda}{(\lambda - 1)^2}. \end{aligned}$$

(2.100) denkleminde $k = 1$ alınırsa, $\mathcal{B}_n^{(S)}(x, y; \lambda)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0^{(S)}(x, y; \lambda) &= 0, \\ \mathcal{B}_1^{(S)}(x, y; \lambda) &= 0, \\ \mathcal{B}_2^{(S)}(x, y; \lambda) &= \frac{2}{\lambda - 1}y. \end{aligned}$$

k . mertebeden iki parametrelili kosinüs-Apostol-Euler tipli polinomlar $\mathcal{E}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda)$ ve k . mertebeden iki parametrelili sinüs-Apostol-Euler tipli polinomlar $\mathcal{E}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda)$ ile

gösterilir. $\mathcal{E}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda)$ polinomları ve $\mathcal{E}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda)$ polinomları aşağıda verilen üreteç fonksiyonları ile tanımlanır:

$$\begin{aligned} F_{EC}(t, x, y; \lambda, k) &= \left(\frac{2}{\lambda \exp(t) + 1} \right)^k \exp(xt) \cos(yt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (2.101)$$

ve

$$\begin{aligned} F_{ES}(t, x, y; \lambda, k) &= \left(\frac{2}{\lambda \exp(t) + 1} \right)^k \exp(xt) \sin(yt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (2.102)$$

(Srivastava ve Kızılateş 2019; Srivastava vd. 2019). Bu polinomlar ailesi k . mertebeden iki parametrelili Apostol-Euler tipli polinomlar olarak da adlandırılır.

(2.1), (2.77), (2.92), (2.93), (2.101) ve (2.102) bağıntıları yardımıyla,

$$\mathcal{E}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{E}_j^{(k)}(\lambda) C_{n-j}(x, y) \quad (2.103)$$

ve

$$\mathcal{E}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{E}_j^{(k)}(\lambda) S_{n-j}(x, y) \quad (2.104)$$

kombinatorik toplamaları elde edilir. Bu toplamalar, $\mathcal{E}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda)$ polinomları ve $\mathcal{E}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda)$ polinomları için birer hesaplama formülleridir.

(2.101) ve (2.102) bağıntılarında her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\mathcal{E}_n^{(C,0)}(x, y; \lambda) = C_n(x, y)$$

ve

$$\mathcal{E}_n^{(S,0)}(x, y; \lambda) = S_n(x, y)$$

dir. Ayrıca, (2.101) bağıntısında $y = 0$ alınırsa,

$$F_{EC}(t, x, 0; \lambda, k) = F_{AE}(t, x; \lambda, k)$$

elde edilir. Buradan,

$$\mathcal{E}_n^{(k)}(x; \lambda) = \mathcal{E}_n^{(C,k)}(x, 0; \lambda)$$

dır.

(2.101) ve (2.102) bağıntılarında $k = 1$ alınırsa, $F_{EC}(t, x, y; \lambda, 1)$ ve $F_{ES}(t, x, y; \lambda, 1)$ fonksiyonları iki parametrelili Apostol-Euler tipli polinomların üretic fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$\mathcal{E}_n^{(C)}(x, y; \lambda) = \mathcal{E}_n^{(C,1)}(x, y; \lambda)$$

ve

$$\mathcal{E}_n^{(S)}(x, y; \lambda) = \mathcal{E}_n^{(S,1)}(x, y; \lambda)$$

ile gösterilen iki parametrelili Apostol-Euler polinomları elde edilir (Srivastava vd. 2018; Srivastava ve Kızılateş 2019).

(2.101) ve (2.102) bağıntılarında $\lambda = 1$ ve $k = 1$ alınırsa, $F_{EC}(t, x, y; 1, 1)$ ve $F_{ES}(t, x, y; 1, 1)$ fonksiyonları iki parametrelili Euler polinomların üretic fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$E_n^{(C)}(x, y) = \mathcal{E}_n^{(C,1)}(x, y; 1)$$

ve

$$E_n^{(S)}(x, y) = \mathcal{E}_n^{(S,1)}(x, y; 1)$$

ile gösterilen iki parametrelili Euler polinomları elde edilir. Bu polinom ailesine sırasıyla kosinüs-Euler polinomları ve sinüs-Euler polinomları da denir (Kim ve Ryoo 2018; Masjed-Jamei vd. 2018a).

(2.103) denkleminde $\lambda = 1$ ve $k = 1$ alınırsa, kosinüs-Euler polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} E_0^{(C)}(x, y) &= 1, \\ E_1^{(C)}(x, y) &= x - \frac{1}{2}, \\ E_2^{(C)}(x, y) &= x^2 - y^2 - x, \\ E_3^{(C)}(x, y) &= x^3 - 3xy^2 - \frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} + \frac{1}{4}, \\ E_4^{(C)}(x, y) &= x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 6xy^2 - 2x^3 + x. \end{aligned}$$

(2.104) denkleminde $\lambda = 1$ ve $k = 1$ alınırsa, sinüs-Euler polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} E_0^{(S)}(x, y) &= 0, \\ E_1^{(S)}(x, y) &= y, \\ E_2^{(S)}(x, y) &= 2xy - y, \\ E_3^{(S)}(x, y) &= 3x^2y - y^3 - 3xy, \\ E_4^{(S)}(x, y) &= 4x^3y - 6x^2y - 4xy^3 + 2y^3 + y. \end{aligned}$$

(2.104) denkleminde $k = 1$ alınırsa, $\mathcal{E}_n^{(C)}(x, y; \lambda)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^{(C)}(x, y; \lambda) &= \frac{2}{\lambda + 1}, \\ \mathcal{E}_1^{(C)}(x, y; \lambda) &= \frac{2\lambda + 2}{(\lambda + 1)^2}x - \frac{2\lambda}{(\lambda + 1)^2}, \\ \mathcal{E}_2^{(C)}(x, y; \lambda) &= \frac{2\lambda^2 + 4\lambda + 2}{(\lambda + 1)^3}x^2 - \frac{4\lambda^2 + 4\lambda}{(\lambda + 1)^3}x - \frac{2\lambda^2 + 4\lambda + 2}{(\lambda + 1)^3}y^2 + \frac{2\lambda^2 - 2\lambda}{(\lambda + 1)^3}. \end{aligned}$$

(2.104) denkleminde $k = 1$ alınırsa, $\mathcal{E}_n^{(S)}(x, y; \lambda)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^{(S)}(x, y; \lambda) &= 0, \\ \mathcal{E}_1^{(S)}(x, y; \lambda) &= \frac{2}{\lambda + 1}y, \\ \mathcal{E}_2^{(S)}(x, y; \lambda) &= \frac{4\lambda + 4}{(\lambda + 1)^2}xy - \frac{4\lambda}{(\lambda + 1)^2}y. \end{aligned}$$

k . mertebeden iki parametrelili kosinüs-Apostol-Genocchi tipli polinomlar $\mathcal{G}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda)$ ve k . mertebeden iki parametrelili sinüs-Apostol-Genocchi tipli polinomlar $\mathcal{G}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda)$ ile gösterilir. $\mathcal{G}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda)$ polinomları ve $\mathcal{G}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda)$ polinomları aşağıda verilen üreteç fonksiyonları ile tanımlanır:

$$\begin{aligned} F_{GC}(t, x, y; \lambda, k) &= \left(\frac{2t}{\lambda \exp(t) + 1} \right)^k \exp(xt) \cos(yt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (2.105)$$

ve

$$\begin{aligned} F_{GS}(t, x, y; \lambda, k) &= \left(\frac{2t}{\lambda \exp(t) + 1} \right)^k \exp(xt) \sin(yt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (2.106)$$

(Srivastava ve Kızılateş 2019; Srivastava vd. 2019). Bu polinomlar ailesi k . mertebeden iki parametrelili Apostol-Genocchi tipli polinomlar olarak da adlandırılır.

(2.1), (2.81), (2.92), (2.93), (2.105) ve (2.106) denklemleri yardımıyla,

$$\mathcal{G}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{G}_j^{(k)}(\lambda) C_{n-j}(x, y) \quad (2.107)$$

ve

$$\mathcal{G}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{G}_j^{(k)}(\lambda) S_{n-j}(x, y) \quad (2.108)$$

kombinatorik toplamaları elde edilir. Bu toplamalar, $\mathcal{G}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda)$ polinomları ve $\mathcal{G}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda)$ polinomları için birer hesaplama formülleridir.

(2.105) ve (2.106) bağıntılarında her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\mathcal{G}_n^{(C,0)}(x, y; \lambda) = C_n(x, y)$$

ve

$$\mathcal{G}_n^{(S,0)}(x, y; \lambda) = S_n(x, y)$$

dir. Ayrıca, (2.105) bağıntısında $y = 0$ ve alınırsa,

$$F_{GC}(t, x, 0; \lambda, k) = F_{AG}(t, x; \lambda, k)$$

elde edilir. Buradan,

$$\mathcal{G}_n^{(k)}(x; \lambda) = \mathcal{G}_n^{(C,k)}(x, 0; \lambda)$$

dır.

(2.105) ve (2.106) bağıntılarında $k = 1$ alınırsa, $F_{GC}(t, x, y; \lambda, 1)$ ve $F_{GS}(t, x, y; \lambda, 1)$ fonksiyonları iki parametrelili Apostol-Genocchi tipli polinomların üretic fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$\mathcal{G}_n^{(C)}(x, y; \lambda) = \mathcal{G}_n^{(C,1)}(x, y; \lambda)$$

ve

$$\mathcal{G}_n^{(S)}(x, y; \lambda) = \mathcal{G}_n^{(S,1)}(x, y; \lambda)$$

ile gösterilen iki parametrelili Apostol-Genocchi polinomları elde edilir (Srivastava vd. 2018).

(2.105) ve (2.106) bağıntılarında $\lambda = 1$ ve $k = 1$ alınır, $F_{GC}(t, x, y; 1, 1)$ ve $F_{GS}(t, x, y; 1, 1)$ fonksiyonları iki parametrelili Genocchi polinomların üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$G_n^{(C)}(x, y) = \mathcal{G}_n^{(C,1)}(x, y; 1)$$

ve

$$G_n^{(S)}(x, y) = \mathcal{G}_n^{(S,1)}(x, y; 1)$$

ile gösterilen iki parametrelili Genocchi polinomları elde edilir (Masjed-Jamei vd. 2018b).

(2.107) denkleminde $\lambda = 1$ ve $k = 1$ alınır, kosinüs-Genocchi polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} G_0^{(C)}(x, y) &= 0, \\ G_1^{(C)}(x, y) &= 1, \\ G_2^{(C)}(x, y) &= 2x - 1, \\ G_3^{(C)}(x, y) &= 3x^2 - 3y^2 - 3x, \\ G_4^{(C)}(x, y) &= 4x^3 - 6x^2 - 12y^2x + 6y^2 + 1. \end{aligned}$$

(2.108) denkleminde $\lambda = 1$ ve $k = 1$ alınır, sinüs-Genocchi polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} G_0^{(S)}(x, y) &= 0, \\ G_1^{(S)}(x, y) &= 0, \\ G_2^{(S)}(x, y) &= 2y, \\ G_3^{(S)}(x, y) &= 6xy - 3y, \\ G_4^{(S)}(x, y) &= 12x^2y - 12xy - 4y^3. \end{aligned}$$

(2.107) denkleminde $k = 1$ alınır, $\mathcal{G}_n^{(C)}(x, y; \lambda)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki

gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0^{(C)}(x, y; \lambda) &= 0, \\ \mathcal{G}_1^{(C)}(x, y; \lambda) &= \frac{2}{\lambda + 1}, \\ \mathcal{G}_2^{(C)}(x, y; \lambda) &= \frac{4\lambda + 4}{(\lambda + 1)^2}x - \frac{4\lambda}{(\lambda + 1)^2}.\end{aligned}$$

(2.108) denkleminde $k = 1$ alınırsa, $\mathcal{G}_n^{(S)}(x, y; \lambda)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0^{(S)}(x, y; \lambda) &= 0, \\ \mathcal{G}_1^{(S)}(x, y; \lambda) &= 0, \\ \mathcal{G}_2^{(S)}(x, y; \lambda) &= \frac{4}{\lambda + 1}y.\end{aligned}$$

k . mertebeden iki parametrelili kosinüs-Eulerian tipli polinomlar $\mathcal{H}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda, u)$ ve k . mertebeden iki parametrelili sinüs-Eulerian tipli polinomlar $\mathcal{H}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda, u)$ ile gösterilir. $\mathcal{H}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda, u)$ polinomları ve $\mathcal{H}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda, u)$ polinomları aşağıda verilen üreteç fonksiyonları ile tanımlanır:

$$\begin{aligned}F_{HC}(t, x, y; \lambda, u, k) &= \left(\frac{1 - u}{\lambda \exp(t) - u} \right)^k \exp(xt) \cos(yt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda, u) \frac{t^n}{n!}\end{aligned} \quad (2.109)$$

ve

$$\begin{aligned}F_{HS}(t, x, y; \lambda, u, k) &= \left(\frac{1 - u}{\lambda \exp(t) - u} \right)^k \exp(xt) \sin(yt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda, u) \frac{t^n}{n!}\end{aligned} \quad (2.110)$$

(Kilar ve Simsek 2019b). Bu polinomlar ailesi k . mertebeden iki parametrelili Eulerian tipli polinomlar olarak da adlandırılır.

(2.1), (2.85), (2.92), (2.93), (2.97) ve (2.98) denklemleri yardımıyla,

$$\mathcal{H}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda, u) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{H}_j^{(k)}(\lambda, u) C_{n-j}(x, y) \quad (2.111)$$

ve

$$\mathcal{H}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda, u) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{H}_j^{(k)}(\lambda, u) S_{n-j}(x, y) \quad (2.112)$$

kombinatorik toplamları elde edilir. Bu toplamlar, $\mathcal{H}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda, u)$ polinomları ve $\mathcal{H}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda, u)$ polinomları için birer hesaplama formülleridir.

(2.109) ve (2.110) bağıntılarında her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\mathcal{H}_n^{(C,0)}(x, y; \lambda, u) = C_n(x, y)$$

ve

$$\mathcal{H}_n^{(S,0)}(x, y; \lambda, u) = S_n(x, y)$$

dir. Ayrıca, (2.109) bağıntısında $y = 0$ alınırsa,

$$F_{HC}(t, x, 0; \lambda, u, k) = F_{AH}(t, x; \lambda, k)$$

elde edilir. Buradan,

$$\mathcal{H}_n^{(k)}(x; \lambda, u) = \mathcal{H}_n^{(C,k)}(x, 0; \lambda, u)$$

dır.

(2.109) ve (2.110) bağıntılarında $k = 1$ alınırsa, $F_{EC}(t, x, y; \lambda, 1)$ ve $F_{ES}(t, x, y; \lambda, 1)$ fonksiyonları iki parametrelili Eulerian tipli polinomların üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$\mathcal{H}_n^{(C)}(x, y; \lambda, u) = \mathcal{H}_n^{(C,1)}(x, y; \lambda, u)$$

ve

$$\mathcal{H}_n^{(S)}(x, y; \lambda, u) = \mathcal{H}_n^{(S,1)}(x, y; \lambda, u)$$

ile gösterilen Eulerian tipli polinomlar elde edilir (Kilar ve Simsek 2019b).

(2.111) denkleminde $k = 1$ alınırsa, $\mathcal{H}_n^{(C)}(x, y; \lambda, u)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^{(C)}(x, y; \lambda, u) &= \frac{u-1}{u-\lambda}, \\ \mathcal{H}_1^{(C)}(x, y; \lambda, u) &= \frac{u-1}{u-\lambda} \left(\frac{\lambda}{u-\lambda} + x \right), \\ \mathcal{H}_2^{(C)}(x, y; \lambda, u) &= \frac{u-1}{u-\lambda} \left(\frac{2\lambda^2}{(u-\lambda)^2} + \frac{\lambda(1+2x)}{u-\lambda} + x^2 - y^2 \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3^{(C)}(x, y; \lambda, u) &= \frac{u-1}{u-\lambda} \left(\frac{6\lambda^3}{(u-\lambda)^3} + \frac{6\lambda^2(1+x)}{(u-\lambda)^2} \right) \\ &\quad + \frac{u-1}{u-\lambda} \left(\frac{\lambda(1+3x+3x^2-3y^2)}{u-\lambda} + x^3 - 3xy^2 \right). \end{aligned}$$

(2.111) denkleminde $k = 2$ alınırsa, $\mathcal{H}_n^{(C,2)}(x, y; \lambda, u)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0^{(C,2)}(x, y; \lambda, u) &= \left(\frac{u-1}{u-\lambda} \right)^2, \\ \mathcal{H}_1^{(C,2)}(x, y; \lambda, u) &= \left(\frac{u-1}{u-\lambda} \right)^2 \left(\frac{2\lambda}{u-\lambda} + x \right), \\ \mathcal{H}_2^{(C,2)}(x, y; \lambda, u) &= \left(\frac{u-1}{u-\lambda} \right)^2 \left(\frac{6\lambda^2}{(u-\lambda)^2} + \frac{2\lambda(1+2x)}{u-\lambda} + x^2 - y^2 \right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_3^{(C,2)}(x, y; \lambda, u) &= \left(\frac{u-1}{u-\lambda} \right)^2 \left(\frac{24\lambda^3}{(u-\lambda)^3} + \frac{18\lambda^2(1+x)}{(u-\lambda)^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{u-1}{u-\lambda} \right)^2 \left(\frac{2\lambda(1+3x+3x^2-3y^2)}{u-\lambda} + x^3 - 3xy^2 \right).\end{aligned}$$

(2.112) denkleminde $k = 1$ alınırsa, $\mathcal{H}_n^{(S)}(x, y; \lambda, u)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0^{(S)}(x, y; \lambda, u) &= 0, \\ \mathcal{H}_1^{(S)}(x, y; \lambda, u) &= \frac{u-1}{u-\lambda}y, \\ \mathcal{H}_2^{(S)}(x, y; \lambda, u) &= \frac{u-1}{u-\lambda} \left(\frac{2\lambda y}{u-\lambda} + 2xy \right), \\ \mathcal{H}_3^{(S)}(x, y; \lambda, u) &= \frac{u-1}{u-\lambda} \left(\frac{6\lambda^2 y}{(u-\lambda)^2} + \frac{3\lambda(y+2xy)}{u-\lambda} + 3x^2y - y^3 \right).\end{aligned}$$

(2.112) denkleminde $k = 2$ alınırsa, $\mathcal{H}_n^{(S,2)}(x, y; \lambda, u)$ polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0^{(S,2)}(x, y; \lambda, u) &= 0, \\ \mathcal{H}_1^{(S,2)}(x, y; \lambda, u) &= \left(\frac{u-1}{u-\lambda} \right)^2 y, \\ \mathcal{H}_2^{(S,2)}(x, y; \lambda, u) &= \left(\frac{u-1}{u-\lambda} \right)^2 \left(\frac{4\lambda y}{u-\lambda} + 2xy \right), \\ \mathcal{H}_3^{(S,2)}(x, y; \lambda, u) &= \left(\frac{u-1}{u-\lambda} \right)^2 \left(\frac{18\lambda^2 y}{(u-\lambda)^2} + \frac{6\lambda(y+2xy)}{u-\lambda} + 3x^2y - y^3 \right).\end{aligned}$$

k . mertebeden iki parametrelili kosinüs-Fubini tipli polinomlar $a_n^{(c,k)}(x, y)$ ve k . mertebeden iki parametrelili sinüs-Fubini tipli polinomlar $a_n^{(s,k)}(x, y)$ ile gösterilir. $a_n^{(c,k)}(x, y)$ polinomları ve $a_n^{(s,k)}(x, y)$ polinomları aşağıda verilen üreteç fonksiyonları ile tanımlanır:

$$\begin{aligned} F_{ac}(t, x, y; k) &= \frac{2^k}{(2 - \exp(t))^{2k}} \exp(xt) \cos(yt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(c,k)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (2.113)$$

ve

$$\begin{aligned} F_{as}(t, x, y; k) &= \frac{2^k}{(2 - \exp(t))^{2k}} \exp(xt) \sin(yt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(s,k)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (2.114)$$

(Srivastava ve Kızılateş 2019). Bu polinomlar ailesi k . mertebeden iki parametrelili Fubini tipli polinomlar olarak da adlandırılır.

(2.1), (2.58), (2.92), (2.93), (2.113) ve (2.114) denklemleri yardımıyla,

$$a_n^{(c,k)}(x, y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j^{(k)} C_{n-j}(x, y) \quad (2.115)$$

ve

$$a_n^{(s,k)}(x, y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j^{(k)} S_{n-j}(x, y) \quad (2.116)$$

kombinatorik toplamaları elde edilir. Bu toplamalar, $a_n^{(c,k)}(x, y)$ polinomları ve $a_n^{(s,k)}(x, y)$ polinomları için birer hesaplama formülleridir.

(2.113) ve (2.114) bağıntılarında her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$a_n^{(c,0)}(x, y) = C_n(x, y)$$

ve

$$a_n^{(s,0)}(x, y) = S_n(x, y)$$

dir.

Ayrıca, (2.113) bağıntısında $y = 0$ alınırsa,

$$F_{ac}(t, x, 0; k) = F_a(t, x; k)$$

elde edilir. Buradan,

$$a_n^{(k)}(x) = a_n^{(c,k)}(x, 0)$$

dır.

(2.113) ve (2.114) denklemleri Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, $a_n^{(c,k)}(x, y)$ ve $a_n^{(s,k)}(x, y)$ polinomlarının hesaplamaları Mathematica Uygulaması 27 ve Mathematica Uygulaması 31 ile birlikte Bulgular ve Tartışma bölümde verilecektir.



3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, Kilar ve Simsek (2021c) çalışmasında tanımlanan Hermite tipli Milne-Thomson polinom ailelerinin tanımları ve bazı özellikleri verilecektir. Ayrıca, bu polinom aileleri ile ilişkili olan bazı özel polinom aileleri için üreteç fonksiyonları çizelgeler halinde sunulacaktır ve bunların uygulamaları verilecektir. Bunlara ek olarak, ilgili polinomların hesaplamalı formülleri ve bağıntıları da verilecektir.

3.1. r -parametrelili Hermite Tipli Polinomların Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri

Bu bölümde, r -parametrelili Hermite tipli polinomların üreteç fonksiyonları ve bu polinom ailelerinin bazı özellikleri incelenecektir. Ayrıca, bu polinom ailelerinin hesaplamalı formülleri ve bağıntıları verilecektir.

$r \in \mathbb{N}$, $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$, $w = x + iy = (x, y)$ ve $u_1, u_2, \dots, u_r, x, y \in \mathbb{R}$ olsun. r -parametrelili Hermite tipli polinomlar aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\mathcal{G}(t, w, \vec{u}, r) = \exp \left(wt + \sum_{j=1}^r u_j t^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}(n; w, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} \quad (3.1)$$

(Kilar ve Simsek 2021c).

(3.1) bağıntısında $w = 0$ alınırsa, $\mathcal{G}(t, w, \vec{u}, r)$ fonksiyonu genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir. Yani,

$$H_n(\vec{u}, r) = \mathcal{K}(n; 0, \vec{u}, r), \quad (3.2)$$

ile gösterilen genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet polinomları elde edilir.

(3.1) bağıntısı ve (2.6) bağıntısında verilen Euler formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t, w, \vec{u}, r) &= \exp \left(xt + \sum_{j=1}^r u_j t^j \right) (\cos(yt) + i \sin(yt)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}(n; w, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir (Kilar ve Simsek 2021c).

(3.3) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu yardımıyla, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ ve $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomları, sırasıyla, aşağıda verilen üreteç fonksiyonları ile tanımlanır:

$$\begin{aligned}
K_1(t, x, y, \vec{u}, r) &= \operatorname{Re} \{ \mathcal{G}(t, w, \vec{u}, r) \} \\
&= \exp \left(xt + \sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \cos(yt) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} k_1(n; x, y, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_2(t, x, y, \vec{u}, r) &= \operatorname{Im} \{ \mathcal{G}(t, w, \vec{u}, r) \} \\
&= \exp \left(xt + \sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \sin(yt) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} k_2(n; x, y, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

(Kilar ve Simsek 2021c). $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomları r -parametrelili kosinüs-Hermite tipli polinomlar, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomları ise r -parametrelili sinüs-Hermite tipli polinomlar olarak da adlandırılır.

(3.4) ve (3.5) bağıntıları kullanılarak,

$$\mathcal{K}(n; w, \vec{u}, r) = k_1(n; x, y, \vec{u}, r) + i k_2(n; x, y, \vec{u}, r) \tag{3.6}$$

elde edilir (Kilar ve Simsek 2021c).

Teorem 3.13. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{x} = (x + u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ ve $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$k_1(n; x, y, \vec{u}, r) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} y^{2j} H_{n-2j}(\vec{x}, r) \tag{3.7}$$

dir (Kilar ve Simsek 2021c).

İspat (3.4) ve (2.70) bağıntıları kullanılarak, aşağıda verilen fonksiyonel denklem elde edilir:

$$K_1(t, x, y, \vec{u}, r) = \cos(yt) F_R(t, \vec{x}, r).$$

Bu fonksiyonel denklem yardımıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_1(n; x, y, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\vec{x}, r) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda seri çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_1(n; x, y, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} y^{2j} H_{n-2j}(\vec{x}, r) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir (Kılar ve Simsek 2021c). $\square$

(3.7) denklemi Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının hesaplamaları Mathematica Uygulaması 10 ile birlikte bir sonraki bölümde verilecektir.

Teorem 3.14. $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\vec{x} = (x + u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ ve $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$k_2(n; x, y, \vec{u}, r) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j+1} y^{2j+1} H_{n-1-2j}(\vec{x}, r) \quad (3.8)$$

dir (Kılar ve Simsek 2021c).

İspat (3.5) ve (2.70) bağıntıları kullanılarak, aşağıda verilen fonksiyonel denklem elde edilir:

$$K_2(t, x, y, \vec{u}, r) = \sin(yt) F_R(t, \vec{x}, r).$$

Bu fonksiyonel denklem yardımıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_2(n; x, y, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n+1} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\vec{x}, r) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda seri çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_2(n; x, y, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j+1} y^{2j+1} H_{n-1-2j}(\vec{x}, r) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir (Kılar ve Simsek 2021c). $\square$

(3.8) denklemi Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının hesaplamaları Mathematica Uygulaması 18 ile birlikte bir sonraki bölümde verilecektir.

Önerme 3.13, Önerme 3.14 ve (3.6) bağıntısı kullanılarak, $\mathcal{K}(n; w, \vec{u}, r)$ polinomları için aşağıda verilen teorem elde edilir:

Teorem 3.15. $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\vec{x} = (x + u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ ve $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(n; w, \vec{u}, r) &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j} y^{2j} H_{n-2j}(\vec{x}, r) \\ &+ i \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j+1} y^{2j+1} H_{n-1-2j}(\vec{x}, r) \end{aligned} \quad (3.9)$$

dir (Kilar ve Simsek 2021c).

Teorem 3.16. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$k_1(n; x, y, \vec{u}, r) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} C_j(x, y) H_{n-j}(\vec{u}, r) \quad (3.10)$$

dir (Kilar ve Simsek 2021c).

İspat (2.70), (2.92) ve (3.4) bağıntıları kullanılarak, aşağıda verilen fonksiyonel denklem elde edilir:

$$K_1(t, x, y, \vec{u}, r) = F_C(t, x, y) F_R(t, \vec{u}, r).$$

Bu fonksiyonel denklem yardımıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_1(n; x, y, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x, y) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\vec{u}, r) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_1(n; x, y, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} C_j(x, y) H_{n-j}(\vec{u}, r) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir (Kilar ve Simsek 2021c). $\square$

Teorem 3.17. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$k_2(n; x, y, \vec{u}, r) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} S_j(x, y) H_{n-j}(\vec{u}, r) \quad (3.11)$$

dir (Kilar ve Simsek 2021c).

İspat (2.70), (2.93) ve (3.5) bağıntıları kullanılarak, aşağıda verilen fonksiyonel denklem elde edilir:

$$K_2(t, x, y, \vec{u}, r) = F_S(t, x, y) F_R(t, \vec{u}, r).$$

Bu fonksiyonel denklem yardımıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_2(n; x, y, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x, y) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\vec{u}, r) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_2(n; x, y, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} S_j(x, y) H_{n-j}(\vec{u}, r) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir (Kılar ve Simsek 2021c). $\square$

(3.10) ve (3.11) bağıntıları, (3.6) bağıntısı ile birleştirilirse, $\mathcal{K}(n; w, \vec{u}, r)$ polinomları için açık formül aşağıdaki gibi verilir:

Önerme 3.18. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$\mathcal{K}(n; w, \vec{u}, r) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} H_{n-j}(\vec{u}, r) (C_j(x, y) + iS_j(x, y))$$

dir (Kılar ve Simsek 2021c).

3.2. r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson Tipli Polinomlar İçin Üreteç Fonksiyonları ve Bu Polinomların Bazı Uygulamaları

Bu bölümde, (2.63) ve (3.1) bağıntıları kullanılarak, r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinomların üreteç fonksiyonları verilecektir. Ayrıca, bu ailelerin bazı temel özellikleri incelenecek ve ilgili polinomlar için bazı bağıntılar ve formüller verilecektir.

$r \in \mathbb{N}$, r -bileşenli $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$, $w = x + iy = (x, y)$, $\bar{w} = x - iy$ ve $u_1, u_2, \dots, u_r, x, y \in \mathbb{R}$ olsun. $f(t, a)$ analitik fonksiyon (ya da meromorfik fonksiyon) $a, b \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinomlar, sırasıyla, aşağıda verilen üreteç fonksiyonları ile tanımlanır:

$$\begin{aligned} M_1(t, w, z, \vec{u}, r, a, b) &= (b + f(t, a))^z \mathcal{G}(t, w, \vec{u}, r) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n, w, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
M_2(t, w, z, \vec{u}, r, a, b) &= (b + f(t, a))^z (\mathcal{G}(t, w, \vec{u}, r) + \mathcal{G}(t, \bar{w}, \vec{u}, r)) \quad (3.13) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} h_1(n, w, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!},
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
M_3(t, w, z, \vec{u}, r, a, b) &= (b + f(t, a))^z (\mathcal{G}(t, w, \vec{u}, r) - \mathcal{G}(t, \bar{w}, \vec{u}, r)) \quad (3.14) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} h_2(n, w, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

(Kilar ve Simsek 2021c).

Sonuç 3.19. (3.12) bağıntısında $w = 0$ ve $\vec{u} = \vec{0}$ alınır,sa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n, 0, z; \vec{0}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} y_6^{(z)}(n; a, b) \frac{t^n}{n!}$$

olur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$h(n, 0, z; \vec{0}, r, a, b) = y_6^{(z)}(n; a, b)$$

elde edilir (Kilar ve Simsek 2021c).

Ayrıca, (3.14), (3.13) ve (3.12) bağıntıları kullanılarak, aşağıdaki Teorem 3.20 elde edilir:

Teorem 3.20. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ ve $w = x + iy$ olmak üzere,

$$h(n, w, z; \vec{u}, r, a, b) = \frac{h_1(n, w, z; \vec{u}, r, a, b) + h_2(n, w, z; \vec{u}, r, a, b)}{2} \quad (3.15)$$

elde edilir (Kilar ve Simsek 2021c).

Teorem 3.21. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ ve $w = x + iy$ olmak üzere,

$$h(n, w, z; \vec{u}, r, a, b) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_6^{(z)}(n-j; a, b) \mathcal{K}(j; w, \vec{u}, r) \quad (3.16)$$

dir (Kilar ve Simsek 2021c).

İspat (2.67), (3.1) ve (3.12) bağıntıları kullanılarak, aşağıda verilen fonksiyonel denklem elde edilir:

$$M_1(t, w, z, \vec{u}, r, a, b) = R_1(t, z; a, b) \mathcal{G}(t, w, \vec{u}, r).$$

Bu fonksiyonel denklem yardımıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n, w, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} y_6^{(z)}(n; a, b) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}(n; w, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n, w, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_6^{(z)}(n-j; a, b) \mathcal{K}(j; w, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir (Kilar ve Simsek 2021c). $\square$

Teorem 3.22. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$h_1(n, w, z; \vec{u}, r, a, b) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_6^{(z)}(n-j; a, b) (\mathcal{K}(j; w, \vec{u}, r) + \mathcal{K}(j; \bar{w}, \vec{u}, r)) \quad (3.17)$$

dir (Kilar ve Simsek 2021c).

İspat (2.67), (3.1) ve (3.13) bağıntıları kullanılarak, aşağıda verilen fonksiyonel denklem elde edilir:

$$M_2(t, w, z, \vec{u}, r, a, b) = R_1(t, z; a, b) (\mathcal{G}(t, w, \vec{u}, r) + \mathcal{G}(t, \bar{w}, \vec{u}, r)).$$

Bu fonksiyonel denklem yardımıyla,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h_1(n, w, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} y_6^{(z)}(n; a, b) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}(n; w, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} y_6^{(z)}(n; a, b) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}(n; \bar{w}, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} h_1(n, w, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_6^{(z)}(n-j; a, b) (\mathcal{K}(j; w, \vec{u}, r) + \mathcal{K}(j; \bar{w}, \vec{u}, r)) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir (Kilar ve Simsek 2021c). $\square$

Teorem 3.23. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ ve $w = x + iy$ olmak üzere,

$$h_2(n, w, z; \vec{u}, r, a, b) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_6^{(z)}(n-j; a, b) (\mathcal{K}(j; w, \vec{u}, r) - \mathcal{K}(j; \bar{w}, \vec{u}, r)) \quad (3.18)$$

dir (Kilar ve Simsek 2021c).

İspat (2.67), (3.1) ve (3.14) bağıntıları kullanılarak, aşağıda verilen fonksiyonel denklem elde edilir:

$$M_3(t, w, z, \vec{u}, r, a, b) = R_1(t, z; a, b) (\mathcal{G}(t, w, \vec{u}, r) - \mathcal{G}(t, \bar{w}, \vec{u}, r)).$$

Bu fonksiyonel denklem yardımıyla,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h_2(n, w, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} y_6^{(z)}(n; a, b) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}(n; w, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} y_6^{(z)}(n; a, b) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}(n; \bar{w}, \vec{u}, r) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} h_2(n, w, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_6^{(z)}(n-j; a, b) (\mathcal{K}(j; w, \vec{u}, r) - \mathcal{K}(j; \bar{w}, \vec{u}, r)) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir (Kilar ve Simsek 2021c). $\square$

3.3. r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson Tipli Polinomların İlişkili Olduğu Bazı Sayı Aileleri

Bu bölümde, (3.13) ve (3.14) bağıntıları kullanılarak, r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinomların ilişkili olduğu bazı polinom aileleri verilecektir. Ayrıca, bu polinom aileleri için bazı özel durumlar incelenecektir.

3.3.1. $h_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ polinomları ve bu polinomların ilişkili olduğu bazı sayı aileleri

Bu alt bölümde, $h_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu ve bu polinomların ilişkili olduğu bazı özel sayı ve polinom aileleri arasındaki bağıntılar verilecektir.

(2.6) bağıntısında verilen Euler formülü ve (3.13) bağıntısı kullanılarak, $\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ polinomları aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\begin{aligned} B(t, x, y, z, \vec{u}, r, a, b) &= 2(b + f(t, a))^z \exp(xt) M_4(t, y, \vec{u}, r) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Burada,

$$M_4(t, y, \vec{u}, r) = \exp\left(\sum_{j=1}^r u_j t^j\right) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\vec{u}, y; r) \frac{t^n}{n!}. \quad (3.20)$$

dir (Kilar ve Simsek 2021c).

Yukarıda verilen üreteç fonksiyonu için bazı özel sonuçlar aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Sonuç 3.24. (3.20) bağıntısında $r = 1$ alınırsa, (2.92) bağıntısında verilen polinomlara indirgenir. Yani,

$$C_n(u_1, y; 1) = C_n(u_1, y)$$

elde edilir (Kilar ve Simsek 2021c).

Sonuç 3.25. (3.20) bağıntısında $y = 0$ alınırsa,

$$H_n(\vec{u}, r) = C_n(\vec{u}, 0; r).$$

elde edilir (Kilar ve Simsek 2021c).

Teorem 3.26. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) = 2 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_6(n-j; x, z; a, b) C_j(\vec{u}, y; r) \quad (3.21)$$

dir (Kilar ve Simsek 2021c).

İspat (2.63), (3.19) ve (3.20) bağıntıları kullanılarak, aşağıda verilen fonksiyonel denklem elde edilir:

$$B(t, x, y, z, \vec{u}, r, a, b) = 2R(t, x, 0, z; a, b, v) M_4(t, y, \vec{u}, r).$$

Bu fonksiyonel denklem yardımıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} y_6(n; x, z; a, b) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\vec{u}, y; r) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_6(n-j; x, z; a, b) C_j(\vec{u}, y; r) \frac{t^n}{n!}.$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir (Kilar ve Simsek 2021c). $\square$

(3.21) bağıntısında $r = 1$ alınır,

$$\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; u_1, 1, a, b) = 2 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_6(n-j; x, z; a, b) C_j(u_1, y)$$

elde edilir.

(3.19) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak, bazı özel notlar ve örnekler aşağıdaki şekilde verilmiştir:

(3.19) bağıntısında $b = 0$ ve

$$f(t, 1) = \frac{2}{(\exp(t) - 2)^2}$$

alınır,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1, 0) \frac{t^n}{n!} \\ = \frac{2^{z+1}}{(\exp(t) - 2)^{2z}} \exp(xt) \cos(yt) \exp\left(\sum_{j=1}^r u_j t^j\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir. Bu polinom ailesine r -parametrelili Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Fubini polinomları adı verilir ve aşağıdaki notasyon ile gösterilir:

$$\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1, 0) := {}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1).$$

Buradan (2.70) ve (2.113) denklemlerinde verilen üreteç fonksiyonları kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(c,z)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\vec{u}, r) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j^{(c,z)}(x, y) H_{n-j}(\vec{u}, r) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa, aşağıdaki Teorem 3.27 elde edilir:

Teorem 3.27. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1) = 2 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j^{(c,z)}(x, y) H_{n-j}(\vec{u}, r) \quad (3.23)$$

dir.

(3.23) denklemi Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, ${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının hesaplamaları Mathematica Uygulaması 28 ile birlikte bir sonraki bölümde verilecektir.

Diğer yandan, (3.22) bağıntısında $\vec{u} = \vec{0}$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{0}, r, 1) \frac{t^n}{n!} = \frac{2^{z+1}}{(\exp(t) - 2)^{2z}} \exp(xt) \cos(yt) \quad (3.24)$$

olur. Buradan (2.113) denklemde verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{0}, r, 1) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(c,z)}(x, y) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa, aşağıdaki Sonuç 3.28 elde edilir:

Sonuç 3.28. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ olmak üzere,

$${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{0}, r, 1) = 2a_n^{(c,z)}(x, y) \quad (3.25)$$

dir.

Özel olarak (3.25) bağıntısında $y = 0$ alınırsa,

$${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, 0, z; \vec{0}, r, 1) = 2a_n^{(z)}(x)$$

elde edilir.

Ayrıca, (3.24) bağıntısı yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{0}, r, 1) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(z)}(x) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(yt)^{2n}}{(2n)!}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda seri çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{0}, r, 1) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} y^{2j} a_{n-2j}^{(z)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa, aşağıdaki Teorem 3.29 elde edilir:

Teorem 3.29. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ olmak üzere,

$${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{0}, r, 1) = 2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} y^{2j} a_{n-2j}^{(z)}(x)$$

dır.

(3.19) bağıntısında $b = 0$ ve

$$f(t, a) = \frac{2t}{a \exp(t) + 1}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, 0) \frac{t^n}{n!} \\ &= 2 \left(\frac{2t}{a \exp(t) + 1} \right)^z \exp(xt) \cos(yt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir. Bu polinom ailesine r -parametrelili Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Genocchi polinomları adı verilir ve aşağıdaki notasyon ile gösterilir:

$$\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, 0) := {}_G\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a).$$

Özel olarak, (3.26) bağıntısında $y = 0$ ve $r = 3$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ alınırsa, Özarslan (2013) tarafından verilen Hermite-tabanlı genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_G\mathfrak{h}_1(n, x, 0, z; \vec{u}, 3, a) \frac{t^n}{n!} = 2 \left(\frac{2t}{a \exp(t) + 1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2 + u_3 t^3).$$

Yani,

$${}_G\mathfrak{h}_1(n, x, 0, z; \vec{u}, 3, a) = {}_2H\mathcal{G}_n^{(z)}(x + u_1, u_2, u_3; a)$$

olur.

Ayrıca (3.26) bağıntısında $\vec{u} = \vec{0}$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_G\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{0}, r, a) \frac{t^n}{n!} = 2 \left(\frac{2t}{a \exp(t) + 1} \right)^z \exp(xt) \cos(yt) \quad (3.27)$$

elde edilir. Buradan (2.105) denkleminde verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_G\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{0}, r, a) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(C, z)}(x, y; a) \frac{t^n}{n!} \quad (3.28)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa, aşağıdaki Teorem 3.30 elde edilir:

Teorem 3.30. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ olmak üzere,

$${}_G\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{0}, r, a) = 2\mathcal{G}_n^{(C,z)}(x, y; a) \quad (3.29)$$

dır.

(3.29) bağıntısında özel olarak $a = 1$ ve $z = 1$ alınırsa, Masjed-Jamei vd. (2018) tarafından verilen iki parametrelili Genocchi polinomları ile ${}_G\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a)$ polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki sonuç ile verilir:

Sonuç 3.31. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ olmak üzere,

$${}_G\mathfrak{h}_1(n, x, y, 1; \vec{0}, r, 1) = 2\mathcal{G}_n^{(C)}(x, y) \quad (3.30)$$

dir.

Diğer yandan, (3.27) bağıntısı kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_G\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{0}, r, a) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(z)}(x; a) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(yt)^{2n}}{(2n)!}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda seri çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_G\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{0}, r, a) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} y^{2j} \mathcal{G}_{n-2j}^{(z)}(x; a) \frac{t^n}{n!}.$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa, aşağıdaki Teorem 3.32 elde edilir:

Teorem 3.32. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ olmak üzere,

$${}_G\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{0}, r, a) = 2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} y^{2j} \mathcal{G}_{n-2j}^{(z)}(x; a)$$

dır.

(3.19) bağıntısında $b = 0$ ve

$$f(t, a) = \frac{t}{a \exp(t) - 1}$$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, 0) \frac{t^n}{n!} = 2 \left(\frac{t}{a \exp(t) - 1} \right)^z \exp(xt) \cos(yt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \quad (3.31)$$

elde edilir. Bu polinom ailesine r -parametrelili Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli Apostol-Bernoulli polinomları adı verilir ve aşağıdaki notasyon ile gösterilir:

$$\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, 0) := {}_B\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a).$$

Özel olarak, (3.31) bağıntısında $y = 0$ ve $r = 3$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ alınırsa, Özarslan (2013) tarafından verilen Hermite-tabanlı genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_B\mathfrak{h}_1(n, x, 0, z; \vec{u}, 3, a) \frac{t^n}{n!} = 2 \left(\frac{t}{a \exp(t) - 1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2 + u_3 t^3).$$

Yani,

$${}_B\mathfrak{h}_1(n, x, 0, z; \vec{u}, 3, a) = {}_2H\mathcal{B}_n^{(z)}(x + u_1, u_2, u_3; a)$$

olur.

Özel olarak, (3.31) bağıntısında $y = 0$, $a = 1$ ve $r = 2$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ alınırsa, Dere ve Simsek (2015) tarafından verilen Hermite-tabanlı Bernoulli tipli polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_B\mathfrak{h}_1(n, x, 0, z; \vec{u}, 2, 1) \frac{t^n}{n!} = 2 \left(\frac{t}{\exp(t) - 1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2).$$

Yani,

$${}_B\mathfrak{h}_1(n, x, 0, z; \vec{u}, 2, 1) = 2\mathcal{B}_{H,n}^{(z)}(x + u_1, -2u_2)$$

olur.

(3.19) bağıntısında $b = 0$ ve

$$f(t, a) = \frac{2}{a \exp(t) + 1}$$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, 0) \frac{t^n}{n!} = 2 \left(\frac{2}{a \exp(t) + 1} \right)^z \exp(xt) \cos(yt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \quad (3.32)$$

elde edilir. Bu polinom ailesine r -parametrelili Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Euler polinomları adı verilir ve aşağıdaki notasyon ile gösterilir:

$$\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, 0) := {}_E\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a).$$

Özel olarak, (3.31) bağıntısında $y = 0$ ve $r = 3$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ alınırsa, Özarslan (2013) tarafından verilen Hermite-tabanlı genelleştirilmiş Apostol-Euler polinomlarının üreteç fonksiyonuna indirgenir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_E\mathfrak{h}_1(n, x, 0, z; \vec{u}, 3, a) \frac{t^n}{n!} = 2 \left(\frac{2}{a \exp(t) + 1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2 + u_3 t^3).$$

Yani,

$${}_E\mathfrak{h}_1(n, x, 0, z; \vec{u}, 3, a) = {}_2H\mathcal{E}_n^{(z)}(x + u_1, u_2, u_3; a)$$

olur.

(3.26), (3.31) ve (3.32) denklemleri yardımıyla, ${}_B\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a)$ polinomları, ${}_E\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a)$ polinomları ve ${}_G\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a)$ polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki teorem yardımıyla verilir:

Teorem 3.33. $n, z \in \mathbb{N}_0$ ve $0 \leq z \leq n$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} (-2)^z {}_B\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a) &= {}_G\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, -a) \\ &= \frac{n!}{(n-z)!} {}_E\mathfrak{h}_1(n-z, x, y, z; \vec{u}, r, -a) \end{aligned}$$

dır.

Şimdi de (3.19) bağıntısında tanımlanan $\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ polinomlarının üreteç fonksiyonlarının $f(t, a)$ fonksiyonu ve diğer özel durumlara göre aldığı bazı özel değerleri, Çizelge 3.3 - Çizelge 3.7 şeklinde aşağıda verilmektedir:

Çizelge 3.3. (3.19) denkleminin özel durumlarından elde edilen Bernoulli tipli polinomlar için bazı üretç fonksiyonları

$2 \left(b + \frac{t}{a \exp(t)-1} \right)^z \exp(xt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!}$		
$b = 0$	r -parametrelili Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları	$2 \left(\frac{t}{a \exp(t)-1} \right)^z \exp(xt) \cos(yt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_B \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a) \frac{t^n}{n!}$
$y = 0, r = 2,$ $\vec{u} = (u_1, u_2)$	Milne-Thomson tipli polinomlar (Simsek 2019)	$b + \left(\frac{t}{a \exp(t)-1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} y_6(n; x + u_1, y, z; a, b, u_2) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden iki parametrelili Apostol-Bernoulli tipli polinomlar (Srivastava ve Kızılateş 2019; Srivastava vd. 2019)	$\left(\frac{t}{a \exp(t)-1} \right)^z \exp(xt) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n^{(C,z)}(x, y; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0, a = z = 1,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	İki parametrelili Bernoulli polinomları (kosinüs-Bernoulli polinomları (Kim ve Ryoo 2018; Masjed-Jamei vd. 2019)	$\frac{t}{\exp(t)-1} \exp(xt) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(C)}(x, y) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, r = 3,$ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$	Hermite-tabanlı genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomları (Özarslan 2013)	$\left(\frac{t}{a \exp(t)-1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2 + u_3 t^3) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H B_n^{(z)}(x + u_1, u_2, u_3; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, r = 2,$ $\vec{u} = (u_1, u_2)$	Hermite tabanlı z . mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları (Lu 2011; Pathan ve Khan 2014)	$\left(\frac{t}{a \exp(t)-1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H B_n^{(z)}(x + u_1, u_2; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, r = 2,$ $\vec{u} = (u_1, u_2),$ $a = 1$	Hermite-tabanlı Bernoulli tipli polinomlar (Dere ve Simsek 2015)	$\left(\frac{t}{\exp(t)-1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{H,n}^{(z)}(x + u_1, -2u_2) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0, y = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları (Lou ve Srivastava 2005)	$\left(\frac{t}{a \exp(t)-1} \right)^z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n^{(z)}(x; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, a = 1,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden Bernoulli polinomları (Sándor ve Crstici 2004)	$\left(\frac{t}{a \exp(t)-1} \right)^z = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(z)}(x) \frac{t^n}{n!}$

Çizelge 3.4. (3.19) denkleminin özel durumlarından elde edilen Euler tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları

$2 \left(b + \frac{2}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp(xt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!}$		
$b = 0$	r -parametrelili Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mer- tebeden Apostol-Euler polinomları	$2 \left(\frac{2}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp(xt) \cos(yt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_E \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a) \frac{t^n}{n!}$
$y = 0, r = 2,$ $\vec{u} = (u_1, u_2)$	Milne-Thomson tipli polinomlar (Simsek 2019)	$b + \left(\frac{2}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} y_6(n; x + u_1, y, z; a, b, u_2) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden iki parametrelili Apostol-Euler tipli polinomlar (Sri- vastava ve Kızılateş 2019; Srivastava vd. 2019)	$\left(\frac{2}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp(xt) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(C, z)}(x, y; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0),$ $a = z = 1$	İki parametrelili Euler polinomları (kosinüs-Euler polinomları (Kim ve Ryoo 2018; Masjed-Jamei vd. 2018)	$\frac{2}{\exp(t)+1} \exp(xt) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(C)}(x, y) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, r = 3,$ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$	Hermite-tabanlı genelleştirilmiş Apostol-Euler polinomları (Özarslan 2013)	$\left(\frac{2}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2 + u_3 t^3) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H E_n^{(z)}(x + u_1, u_2, u_3; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, r = 2,$ $\vec{u} = (u_1, u_2)$	Hermite tabanlı z . mertebeden Apostol-Euler polinomları (Pathan ve Khan 2014)	$\left(\frac{2}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H E_n^{(z)}(x + u_1, u_2; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, r = 2,$ $\vec{u} = (u_1, u_2),$ $a = 1$	İki değişkenli z . mertebeden genelleştirilmiş Hermite-Euler poli- nomları (Pathan 2012)	$\left(\frac{2}{\exp(t)+1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H E_n^{(z)}(x + u_1, u_2) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0, y = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden Apostol-Euler polinomları (Lou ve Srivastava 2005)	$\left(\frac{t}{a \exp(t)-1} \right)^z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(z)}(x; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, a = 1,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden Euler polinomları (Sándor ve Crstici 2004)	$\left(\frac{t}{\exp(t)-1} \right)^z = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(z)}(x) \frac{t^n}{n!}$

Çizelge 3.5. (3.19) denkleminin özel durumlarından elde edilen Genocchi tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları

$2 \left(b + \frac{2t}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp(xt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!}$		
$b = 0$	r -parametrelili Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Genocchi polinomları	$2 \left(\frac{2t}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp(xt) \cos(yt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} G \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a) \frac{t^n}{n!}$
$y = 0, r = 2, \vec{u} = (u_1, u_2)$	Milne-Thomson tipli polinomlar (Simsek 2019)	$b + \left(\frac{2t}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} y_6(n; x + u_1, y, z; a, b, u_2) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0, \vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden iki parametrelili Apostol-Genocchi tipli polinomları (Srivastava ve Kızılateş 2019; Srivastava vd. 2019)	$\left(\frac{2t}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp(xt) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(C, z)}(x, y; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0, \vec{u} = (0, 0, \dots, 0), a = z = 1$	İki parametrelili Genocchi polinomları (Masjed-Jamei vd. 2018)	$\frac{2t}{\exp(t)+1} \exp(xt) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(C)}(x, y) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, r = 3, \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$	Hermite-tabanlı genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomları (Özarslan 2013)	$\left(\frac{2t}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2 + u_3 t^3) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H G_n^{(z)}(x + u_1, u_2, u_3; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, r = 2, \vec{u} = (u_1, u_2)$	Hermite tabanlı z . mertebeden Apostol-Genocchi polinomu (Kurt ve Simsek 2013b; Pathan ve Khan 2014)	$\left(\frac{2t}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H G_n^{(z)}(x + u_1, u_2; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, r = 2, \vec{u} = (u_1, u_2), a = 1$	Hermite tabanlı z . mertebeden Genocchi polinomu (Kurt ve Simsek 2013b)	$\left(\frac{2t}{\exp(t)+1} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H G_n^{(z)}(x + u_1, u_2) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, \vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden Apostol-Genocchi polinomları (Lou ve Srivastava 2005)	$\left(\frac{t}{a \exp(t)-1} \right)^z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(z)}(x; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, a = 1, \vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden Genocchi polinomları (Sándor ve Crstici 2004)	$\left(\frac{t}{\exp(t)-1} \right)^z = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(z)}(x) \frac{t^n}{n!}$

Çizelge 3.6. (3.19) denkleminin özel durumlarından elde edilen Frobenius-Euler tipli polinomlar için bazı üretic fonksiyonları

		$2 \left(b + \frac{1-v}{a \exp(t)-v} \right)^z \exp(xt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, \frac{a}{v}, b) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0$	r -parametrelili Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Frobenius-Euler polinomları	$2 \left(\frac{1-v}{a \exp(t)-v} \right)^z \exp(xt) \cos(yt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a; v) \frac{t^n}{n!}$
$y = 0, r = 2,$ $\vec{u} = (u_1, u_2)$	Milne-Thomson tipli polinomlar (Simsek 2019)	$b + \left(\frac{1-v}{a \exp(t)-v} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} y_6(n; x + u_1, y, z; \frac{a}{v}, b, u_2) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden iki parametrelili Eulerian tipli polinomlar (Kılar ve Simsek 2019b)	$\left(\frac{1-v}{a \exp(t)-v} \right)^z \exp(xt) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{(C, z)}(x, y; a, v) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, r = 3,$ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$	Üç değişkenli Hermite-Apostol-tipli Frobenius-Euler polinomları (Araci vd. 2018)	$\left(\frac{1-v}{a \exp(t)-v} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2 + u_3 t^3) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H \mathfrak{F}_n^{(z)}(x + u_1, u_2, u_3; v; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, r = 2,$ $\vec{u} = (u_1, u_2)$	İki değişkenli Hermite-Apostol-Frobenius-Euler polinomları (Araci vd. 2018)	$\left(\frac{1-v}{a \exp(t)-v} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H \mathfrak{F}_n^{(z)}(x + u_1, u_2; v; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden Apostol tipli Frobenius-Euler polinomları (Kim ve Kim 2012; Simsek 2013)	$\left(\frac{1-v}{a \exp(t)-v} \right)^z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{(z)}(x; a, v) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0, a = 1,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden Frobenius-Euler polinomları (Kim ve Kim 2012; Simsek 2013)	$\left(\frac{1-v}{\exp(t)-v} \right)^z = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(z)}(x; v) \frac{t^n}{n!}$

Çizelge 3.7. (3.19) denkleminin özel durumlarından elde edilen Fubini tipli polinomlar ve sayılar için bazı üreteç fonksiyonları

$2 \left(b + \frac{2}{(\exp(t)-2)^2} \right)^z \exp(xt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1, b) \frac{t^n}{n!}$		
$b = 0$	r -parametrelili Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Fubini polinomları	$2 \frac{2^z}{(\exp(t)-2)^{2z}} \exp(xt) \cos(yt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_F \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a) \frac{t^n}{n!}$
$y = 0, r = 2,$ $\vec{u} = (u_1, u_2)$	Milne-Thomson tipli polinomlar (Simsek 2019)	$\left(b + \frac{2}{(\exp(t)-2)^2} \right)^z \exp((x + u_1)t + u_2 t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} y_6(n; x + u_1, y, z; 1, b, u_2) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden iki parametrelili Fubini tipli polinomları (Srivastava ve Kızılateş 2019)	$\frac{2^z}{(\exp(t)-2)^{2z}} \exp(xt) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(c,z)}(x, y) \frac{t^n}{n!}$
$b = y = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden Fubini tipli polinomları (Kılar ve Simsek 2017)	$\frac{2^z}{(\exp(t)-2)^{2z}} \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(z)}(x) \frac{t^n}{n!}$
$b = x = y = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden Fubini tipli sayıları (Kılar ve Simsek 2017)	$\frac{2^z}{(\exp(t)-2)^{2z}} \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(z)} \frac{t^n}{n!}$
$b = x = y = 0,$ $z = 1,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	Fubini sayıları (Comtet 1974)	$\frac{1}{(2-\exp(t))} = \sum_{n=0}^{\infty} w_g(n) \frac{t^n}{n!}$

3.3.2. $\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ polinomları ve bu polinomların ilişkili olduğu bazı sayı aileleri

Bu alt bölümde, $\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu ve bu polinomların ilişkili olduğu bazı özel sayı ve polinom aileleri arasındaki bağıntılar verilecektir.

(2.6) bağıntısında verilen Euler formülü ve (3.14) bağıntısı kullanılarak, $\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ polinomları aşağıda verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\begin{aligned} B_1(t, x, y, z, \vec{u}, r, a, b) &= 2(b + f(t, a))^z \exp(xt) M_5(t, y, \vec{u}, r) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Burada

$$\begin{aligned} M_5(t, y, \vec{u}, r) &= \exp\left(\sum_{j=1}^r u_j t^j\right) \sin(yt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\vec{u}, y; r) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (3.34)$$

dir (Kilar ve Simsek 2021c).

Yukarıda verilen üreteç fonksiyonu için bazı özel sonuçlar aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Sonuç 3.34. (3.34) bağıntısında $r = 1$ alınırsa, (2.93) bağıntısında verilen polinomlara indirgenir. Yani,

$$S_n(u_1, y; 1) = S_n(u_1, y)$$

elde edilir (Kilar ve Simsek 2021c).

Teorem 3.35. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) = 2 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_6(n-j; x, z; a, b) S_j(\vec{u}, y; r) \quad (3.35)$$

dir (Kilar ve Simsek 2021c).

İspat (2.63), (3.33) ve (3.34) bağıntıları kullanılarak, aşağıda verilen fonksiyonel denklem elde edilir:

$$B_1(t, x, y, z, \vec{u}, r, a, b) = 2R(t, x, 0, z; a, b, v) M_5(t, y, \vec{u}, r).$$

Bu fonksiyonel denklem yardımıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} y_6(n; x, z; a, b) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\vec{u}, y; r) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_6(n-j; x, z; a, b) S_j(\vec{u}, y; r) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir (Kılar ve Simsek 2021c). $\square$

(3.35) bağıntısında $r = 1$ alınırsa,

$$\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; u_1, 1, a, b) = 2 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_6(n-j; x, z; a, b) S_j(u_1, y)$$

elde edilir.

(3.33) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak, bazı özel notlar ve örnekler aşağıdaki şekilde verilmiştir:

(3.33) bağıntısında $b = 0$ ve

$$f(t, 1) = \frac{2}{(\exp(t) - 2)^2}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1, 0) \frac{t^n}{n!} \\ = \frac{2^{z+1}}{(\exp(t) - 2)^{2z}} \exp(xt) \sin(yt) \exp\left(\sum_{j=1}^r u_j t^j\right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde edilir. Bu polinom ailesine r -parametrelili Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Fubini polinomları adı verilir ve aşağıdaki notasyon ile gösterilir:

$$\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1, 0) := {}_F \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1).$$

Buradan (2.70) ve (2.114) denklemlerinde verilen üreteç fonksiyonları kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_F \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(s,z)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\vec{u}, r) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j^{(s,z)}(x, y) H_{n-j}(\vec{u}, r) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa, aşağıdaki Teorem 3.36 elde edilir:

Teorem 3.36. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$${}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1) = 2 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j^{(s,z)}(x, y) H_{n-j}(\vec{u}, r) \quad (3.37)$$

dir.

(3.37) denklemi Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, ${}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının hesaplamaları Mathematica Uygulaması 32 ile birlikte bir sonraki bölümde verilecektir.

Diğer yandan, (3.36) bağıntısında $\vec{u} = \vec{0}$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{0}, r, 1) \frac{t^n}{n!} = \frac{2^{z+1}}{(\exp(t) - 2)^{2z}} \exp(xt) \sin(yt) \quad (3.38)$$

bulunur. Buradan (2.114) denklemde verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{0}, r, 1) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(s,z)}(x, y) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa, aşağıdaki Sonuç 3.37 elde edilir:

Sonuç 3.37. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ olmak üzere,

$${}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{0}, r, 1) = 2a_n^{(s,z)}(x, y) \quad (3.39)$$

dir.

Ayrıca, (3.38) bağıntısı kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{0}, r, 1) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(z)}(x) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(yt)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda seri çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{0}, r, 1) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j+1} y^{2j+1} a_{n-1-2j}^{(z)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa, aşağıdaki Teorem 3.38 elde edilir:

Teorem 3.38. $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ olmak üzere,

$${}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{0}, r, 1) = 2 \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j+1} y^{2j+1} a_{n-1-2j}^{(z)}(x)$$

dir.

(3.33) bağıntısında, $b = 0$ ve

$$f(t, a) = \frac{2t}{a \exp(t) + 1}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, 0) \frac{t^n}{n!} \\ = 2 \left(\frac{2t}{a \exp(t) + 1} \right)^z \exp(xt) \sin(yt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

elde edilir. Bu polinom ailesine r -parametrelili Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Genocchi polinomları adı verilir ve aşağıdaki notasyon ile gösterilir:

$$\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, 0) := {}_G\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a).$$

Ayrıca (3.40) bağıntıda $\vec{u} = \vec{0}$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_G\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{0}, r, a) \frac{t^n}{n!} = 2 \left(\frac{2t}{a \exp(t) + 1} \right)^z \exp(xt) \sin(yt) \quad (3.41)$$

olur. Buradan (2.106) denkleminde verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_G\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{0}, r, a) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(S, z)}(x, y; a) \frac{t^n}{n!} \quad (3.42)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa, aşağıdaki Teorem 3.39 elde edilir:

Teorem 3.39. $n, z \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ olmak üzere,

$${}_G\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{0}, r, a) = 2\mathcal{G}_n^{(S, z)}(x, y; a) \quad (3.43)$$

dir.

(3.43) bağıntısında özel olarak $a = 1$ ve $z = 1$ alınırsa, Masjed-Jamei vd. (2018) tarafından verilen iki parametrelili Genocchi polinomları ile ${}_G\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a)$ polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki sonuç ile verilir:

Sonuç 3.40. $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ olmak üzere,

$${}_G\mathfrak{h}_2(n, x, y, 1; \vec{0}, r, 1) = 2\mathcal{G}_n^{(S)}(x, y) \quad (3.44)$$

dir.

Ayrıca, (3.41) bağıntısı yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_G\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{0}, r, a) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(z)}(x; a) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(yt)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda seri çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_G\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{0}, r, a) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j+1} y^{2j+1} \mathcal{G}_{n-2j-1}^{(z)}(x; a) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa, aşağıdaki Teorem 3.41 elde edilir:

Teorem 3.41. $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ olmak üzere,

$${}_G\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{0}, r, a) = 2 \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j+1} y^{2j+1} \mathcal{G}_{n-2j-1}^{(z)}(x; a)$$

dır.

(3.33) bağıntısında $b = 0$ ve

$$f(t, a) = \frac{t}{a \exp(t) - 1}$$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, 0) \frac{t^n}{n!} = 2 \left(\frac{t}{a \exp(t) - 1} \right)^z \exp(xt) \sin(yt) \exp\left(\sum_{j=1}^r u_j t^j\right)$$

elde edilir. Bu polinom ailesine r -parametrelili Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları adı verilir ve aşağıdaki notasyon ile gösterilir:

$$\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, 0) := {}_B\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a).$$

(3.33) bağıntısında $b = 0$ ve

$$f(t, a) = \frac{2}{a \exp(t) + 1}$$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, 0) \frac{t^n}{n!} = 2 \left(\frac{2}{a \exp(t) + 1} \right)^z \exp(xt) \sin(yt) \exp\left(\sum_{j=1}^r u_j t^j\right)$$

elde edilir. Bu polinom ailesine r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli z . mertebeden sinüs-Apostol-Euler polinomları adı verilir ve aşağıdaki notasyon ile gösterilir:

$$\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, 0) := {}_E\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a).$$

Şimdi de (3.33) bağıntısında tanımlanan $\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ polinomlarının üreteç fonksiyonlarının $f(t, a)$ fonksiyonu ve diğer özel durumlara göre aldığı bazı özel değerleri, Çizelge 3.8 - Çizelge 3.12 şeklinde aşağıda verilmektedir:

Çizelge 3.8. (3.33) denkleminin özel durumlarından elde edilen Bernoulli tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları

$2 \left(b + \frac{t}{a \exp(t)-1} \right)^z \exp(xt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!}$		
$b = 0$	r -parametrelili Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları	$2 \left(\frac{t}{a \exp(t)-1} \right)^z \exp(xt) \sin(yt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_B \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden iki parametrelili Apostol-Bernoulli tipli polinomları (Srivastava ve Kızılateş 2019; Srivastava vd. 2019)	$\left(\frac{t}{a \exp(t)-1} \right)^z \exp(xt) \sin(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n^{(S,z)}(x, y; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0),$ $a = z = 1$	iki parametrelili Bernoulli polinomları (sinüs-Bernoulli polinomları) (Kim ve Ryoo 2018; Masjed-Jamei vd. 2019)	$\frac{t}{\exp(t)-1} \exp(xt) \sin(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(S)}(x, y) \frac{t^n}{n!}$

Çizelge 3.9. (3.33) denkleminin özel durumlarından elde edilen Euler tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları

$2 \left(b + \frac{2}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp(xt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!}$		
$b = 0$	r -parametrelili Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Euler polinomları	$2 \left(\frac{2}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp(xt) \sin(yt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_E \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden iki parametrelili Apostol-Euler tipli polinomları (Srivastava ve Kızılateş 2019; Srivastava vd. 2019)	$\left(\frac{2}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp(xt) \sin(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(S,z)}(x, y; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0),$ $a = z = 1$	İki parametrelili Euler polinomları (sinüs-Euler polinomları) (Kim ve Ryoo 2018; Masjed-Jamei vd. 2018)	$\frac{2}{\exp(t)+1} \exp(xt) \sin(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(S)}(x, y) \frac{t^n}{n!}$

Çizelge 3.10. (3.33) denkleminin özel durumlarından elde edilen Genocchi tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları

$2 \left(b + \frac{2t}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp(xt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!}$		
$b = 0$	r -parametrelili Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Apostol-Genocchi polinomları	$2 \left(\frac{2t}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp(xt) \sin(yt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_G \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden iki parametrelili Apostol-Genocchi tipli polinomları (Srivastava ve Kızılateş 2019; Srivastava vd. 2019)	$\left(\frac{2t}{a \exp(t)+1} \right)^z \exp(xt) \sin(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(S,z)}(x, y; a) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0, a = z = 1,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	iki parametrelili Genocchi polinomları (Masjed-Jamei vd. 2018)	$\frac{2t}{\exp(t)+1} \exp(xt) \sin(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(S)}(x, y) \frac{t^n}{n!}$

Çizelge 3.11. (3.33) denkleminin özel durumlarından elde edilen Frobenius-Euler tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları

$2 \left(b + \frac{1-v}{a \exp(t)-v} \right)^z \exp(xt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, \frac{a}{v}, b) \frac{t^n}{n!}$		
$b = 0$	r -parametrelili Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Frobenius-Euler polinomları	$2 \left(\frac{1-v}{a \exp(t)-v} \right)^z \exp(xt) \sin(yt) \exp \left(\sum_{j=1}^r u_j t^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a; v) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden iki parametrelili Eulerian tipli polinomlar (Kılar ve Simsek 2019b)	$\left(\frac{1-v}{a \exp(t)-v} \right)^z \exp(xt) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{(S,z)}(x, y; a, v) \frac{t^n}{n!}$

Çizelge 3.12. (3.33) denkleminin özel durumlarından elde edilen Fubini tipli polinomlar için bazı üreteç fonksiyonları

$\left(b + \frac{2}{(\exp(t)-2)^z}\right)^z \exp(xt) \exp\left(\sum_{j=1}^r u_j t^j\right) \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1, b) \frac{t^n}{n!}$		
$b = 0$	r -parametrelili Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Fubini polinomları	$\frac{2^{z+1}}{(\exp(t)-2)^{2z}} \exp(xt) \sin(yt) \exp\left(\sum_{j=1}^r u_j t^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a) \frac{t^n}{n!}$
$b = 0,$ $\vec{u} = (0, 0, \dots, 0)$	z . mertebeden iki parametrelili Fubini tipli polinomlar (Srivastava ve Kızılateş 2019)	$\frac{2^z}{(\exp(t)-2)^{2z}} \exp(xt) \sin(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(s,z)}(x, y) \frac{t^n}{n!}$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, bu tez çalışmasında elde edilen tüm sonuçlar verilecektir.

4.1. Chebyshev Polinomları, Dickson Polinomları ve Bazı Özel Polinomları İçeren Özdeşlikler

Bu alt bölümde, Chebyshev polinomları, Dickson polinomları, k . mertebeden iki parametrelili Apostol-Bernoulli tipli polinomları, k . mertebeden iki parametrelili Apostol-Euler tipli polinomları, k . mertebeden iki parametrelili Apostol- Genocchi tipli polinomları, $C_n(x, y)$ polinomları ve $S_n(x, y)$ polinomlarını içeren bağıntılar ve formüller verilecektir.

(2.94) ve (2.95) bağıntılarında $y = \sqrt{1 - x^2}$ alınırsa,

$$C_n(x, \sqrt{1 - x^2}) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j} x^{n-2j} (1 - x^2)^j$$

ve

$$S_n(x, \sqrt{1 - x^2}) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j+1} x^{n-2j-1} (1 - x^2)^j \sqrt{1 - x^2}$$

elde edilir. Elde edilen bu son denklemler (2.44) ve (2.49) bağıntıları ile birlikte düşünülürse, Chebyshev polinomları, $C_n(x, y)$ polinomları ve $S_n(x, y)$ polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi elde edilir:

$n \in \mathbb{N}_0$ ve $|x| \leq 1$ olmak üzere,

$$T_n(x) = C_n(x, \sqrt{1 - x^2}) \quad (4.1)$$

ve $n \in \mathbb{N}$, $|x| < 1$ olmak üzere,

$$U_{n-1}(x) = \frac{S_n(x, \sqrt{1 - x^2})}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (4.2)$$

dir (Kilar ve Simsek 2021c).

Teorem 4.42. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $|x| \leq 1$ olmak üzere,

$$D_n(2x, 1) = 2C_n(x, \sqrt{1 - x^2}) \quad (4.3)$$

dir.

İspat (2.52) ve (4.1) bağıntıları kullanılarak, istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Teorem 4.43. $n \in \mathbb{N}$ ve $|x| < 1$ olmak üzere,

$$\mathfrak{D}_{n-1}(2x, 1) = \frac{S_n(x, \sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}} \quad (4.4)$$

dir.

İspat (2.53) ve (4.2) bağıntıları kullanılarak, istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Teorem 4.44. $n \in \mathbb{N}$ ve $|x| \leq 1$ olmak üzere,

$$S_n(2x, 2\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \mathfrak{D}_{j-1}(2x, 1) D_{n-j}(2x, 1)$$

dir.

İspat (2.96) bağıntısında $y = \sqrt{1-x^2}$ alınırsa ve elde edilen son denklem (4.3) ve (4.4) bağıntıları ile birlikte düşünülürse, istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Teorem 4.45. $|x| \leq 1$ olsun. $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\mathcal{B}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{B}_{n-j}^{(k)}(\lambda) D_j(2x, 1)$$

ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\mathcal{B}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda) = \sqrt{1-x^2} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \mathcal{B}_{n-j}^{(k)}(\lambda) \mathfrak{D}_{j-1}(2x, 1)$$

dir.

İspat (2.99) ve (2.100) bağıntılarında $y = \sqrt{1-x^2}$ alınırsa ve elde edilen son denklemler (4.3) ve (4.4) bağıntıları ile birlikte düşünülürse, istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Benzer şekilde (2.103), (2.104), (2.107) ve (2.108) bağıntılarında $y = \sqrt{1-x^2}$ alınırsa ve elde edilen son denklemler (4.3) ve (4.4) bağıntıları ile birlikte düşünülürse aşağıdaki Teorem 4.46 ve Teorem 4.47 elde edilir:

Teorem 4.46. $|x| \leq 1$ olsun. $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\mathcal{E}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{E}_{n-j}^{(k)}(\lambda) D_j(2x, 1)$$

ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\mathcal{E}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda) = \sqrt{1-x^2} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \mathcal{E}_{n-j}^{(k)}(\lambda) \mathfrak{D}_{j-1}(2x, 1)$$

dir.

Teorem 4.47. $|x| \leq 1$ olsun. $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\mathcal{G}_n^{(C,k)}(x, y; \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{G}_{n-j}^{(k)}(\lambda) D_j(2x, 1)$$

ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\mathcal{G}_n^{(S,k)}(x, y; \lambda) = \sqrt{1-x^2} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \mathcal{G}_{n-j}^{(k)}(\lambda) \mathfrak{D}_{j-1}(2x, 1)$$

dir.

4.2. Trigonometrik Sayılar, $\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ ve $\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ Polinomları İçeren Özdeşlikler

Bu alt bölümde, (3.19) ve (3.33) bağıntılarında verilen üreteç fonksiyonları kullanılarak, $\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ ve $\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ polinomları ile ilişkili olan $\mathcal{T}_n$ tanjant sayıları, $\mathcal{C}_n$ kotanjant sayıları gibi bazı trigonometrik sayı aileleri, birinci tür Bernoulli sayıları ve birinci tür Euler sayılarını içeren bazı bağıntılar ve özdeşlikler verilecektir.

Teorem 4.48. $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} y^{2j+1} \mathfrak{h}_1(n-1-2j, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \mathcal{T}_{2j+1} \quad (4.5)$$

dir.

İspat (3.19) ve (3.33) bağıntıları kullanılarak, aşağıda verilen fonksiyonel denklem elde edilir:

$$B_1(t, x, y, z, \vec{u}, r, a, b) = \tan(yt) B(t, x, y, z, \vec{u}, r, a, b).$$

Elde edilen bu fonksiyonel denklem ve (2.30) bağıntısı kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_{2n+1} \frac{(yt)^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Bu son bağıntıda seri çarpımı yapıldıktan sonra gerekli düzenlemelerde yapılırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2j+1} y^{2j+1} \mathfrak{h}_1(n-1-2j, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \mathcal{T}_{2j+1} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir. $\square$

(2.31) bağıntısından elde edilen

$$\mathcal{T}_{2n-1} = (-1)^n \left(\frac{2^{2n-1} - 2^{4n-1}}{n} \right) B_{2n}$$

bağıntısı ile (4.5) bağıntısı kullanılarak, birinci tür Bernoulli sayıları, $\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ ve $\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki Sonuç 4.49 ile verilir:

Sonuç 4.49. $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^{j+1} \binom{n}{2j+1} \left(\frac{2^{2j+1} - 2^{4j+3}}{j+1} \right) y^{2j+1} \\ &\quad \times \mathfrak{h}_1(n-1-2j, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) B_{2j+2} \end{aligned}$$

dir.

(2.32) bağıntısından elde edilen

$$\mathcal{T}_{2n+1} = (-1)^{n+1} 2^{2n+1} E_{2n+1}$$

bağıntısı ile (4.5) bağıntısı kullanılarak, birinci tür Euler sayıları, $\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ ve $\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki Sonuç 4.50 ile verilir:

Sonuç 4.50. $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \\ &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^{j+1} \binom{n}{2j+1} (2y)^{2j+1} \mathfrak{h}_1(n-1-2j, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) E_{2j+1} \end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.51. $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$\mathfrak{h}_1(n-1, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (2y)^{2j} (2j)! \mathfrak{h}_2(n-2j, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) C_{2j} \quad (4.6)$$

dir.

İspat (3.19) ve (3.33) bağıntıları kullanılarak, aşağıda verilen fonksiyonel denklem elde edilir:

$$(yt) B(t, x, y, z, \vec{u}, r, a, b) = (yt) \cot(yt) B_1(t, x, y, z, \vec{u}, r, a, b).$$

Bu fonksiyonel denklem ve (2.33) bağıntısı kullanılarak,

$$(yt) \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} (2yt)^{2n} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda seri çarpımı yapılırsa,

$$\begin{aligned} & y \sum_{n=0}^{\infty} n \mathfrak{h}_1(n-1, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (2y)^{2j} (2j)! \mathfrak{h}_2(n-2j, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) C_{2j} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir. $\square$

(2.34) bağıntısından elde edilen

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n B_{2n}}{(2n)!},$$

bağıntısı ile (4.6) bağıntısı kullanılarak, birinci tür Bernoulli sayıları, $\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ ve $\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b)$ polinomları arasındaki bir diğer ilişki aşağıdaki Sonuç 4.52 ile verilir:

Sonuç 4.52. $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$\mathfrak{h}_1(n-1, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) = \frac{1}{ny} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} (2y)^{2j} \mathfrak{h}_2(n-2j, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) B_{2j} \quad (4.7)$$

dir.

(4.7) bağıntısında $b = 0$, $z = 1$, $\vec{u} = \vec{0}$, $f(t, a) = \frac{t}{a \exp(t)-1}$ alınırsa ve sırasıyla $a = 1$ ve $a = -1$ yazılırsa, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 4.53. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$B_{n-1}^{(C)}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} 4^j y^{2j-1} B_{n-2j}^{(S)}(x, y) B_{2j}$$

dir (Kilar ve Simsek 2019a).

Sonuç 4.54. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$E_{n-1}^{(C)}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} 4^j y^{2j-1} E_{n-2j}^{(S)}(x, y) B_{2j}$$

dir (Kilar ve Simsek 2019a).

4.3. r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson Tipli Polinomların Sağladığı Özel İntegral Formülleri ve Bazı Uygulamaları

Bu alt bölümde, (3.19) ve (3.33) bağıntıları kullanılarak, r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinomların sağladığı özel integral formülleri ve bazı uygulamaları verilecektir.

Teorem 4.55. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \int_c^d \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) dx &= \frac{1}{n+1} \mathfrak{h}_1(n+1, d, y, z; \vec{u}, r, a, b) \\ &\quad - \frac{1}{n+1} \mathfrak{h}_1(n+1, c, y, z; \vec{u}, r, a, b) \end{aligned} \quad (4.8)$$

dir.

İspat (3.19) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonunun x değişkenine göre c 'den d 'ye integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_c^d \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) dx \\ &= 2(b + f(t, a))^z \exp\left(\sum_{j=1}^r u_j t^j\right) \cos(yt) \int_c^d \exp(xt) dx \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} \int_c^d \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, d, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_1(n, c, y, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra, elde edilen son denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Teorem 4.56. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \int_c^d \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) dx &= \frac{1}{n+1} \mathfrak{h}_2(n+1, d, y, z; \vec{u}, r, a, b) \\ &\quad - \frac{1}{n+1} \mathfrak{h}_2(n+1, c, y, z; \vec{u}, r, a, b) \end{aligned} \quad (4.9)$$

dir.

İspat Bu teoremin ispatı, Teorem 4.55'de verilen ispata benzer bir şekilde yapıldığı açıktır. $\square$

(4.8) ve (4.9) bağıntılarında özel olarak $c = 0$, $d = 1$, $b = 0$, $z = 1$, $\vec{u} = \vec{0}$, ve $f(t, 1) = \frac{t}{\exp(t)-1}$ alınırsa, Masjed-Jamei vd. (2018c) tarafından verilen aşağıdaki Örnek 4.57 elde edilir:

Örnek 4.57. $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$\int_0^1 B_{2n}^{(C)}(x, y) dx = (-1)^n y^{2n},$$

$$\int_0^1 B_{2n+1}^{(C)}(x, y) dx = 0,$$

$$\int_0^1 B_{2n}^{(S)}(x, y) dx = 0$$

ve

$$\int_0^1 B_{2n+1}^{(S)}(x, y) dx = (-1)^n y^{2n+1}$$

elde edilir (Masjed-Jamei vd. 2018c).

Teorem 4.58. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$\int_c^d \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) dy = \frac{\mathfrak{h}_2(n+1, x, d, z; \vec{u}, r, a, b)}{n+1} - \frac{\mathfrak{h}_2(n+1, x, c, z; \vec{u}, r, a, b)}{n+1}$$

dir.

İspat (3.19) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonunun y değişkenine göre c 'den d 'ye integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_c^d \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) dy \\ &= 2(b + f(t, a))^z \exp\left(\sum_{j=1}^r u_j t^j\right) \exp(xt) \int_c^d \cos(yt) dy \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} \int_c^d \mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, d, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_2(n, x, c, z; \vec{u}, r, a, b) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra, elde edilen son denklemde $\frac{t^n}{n!}$ 'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Teorem 4.59. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ olmak üzere,

$$\int_c^d \mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, a, b) dy = \frac{\mathfrak{h}_1(n+1, x, c, z; \vec{u}, r, a, b)}{n+1} - \frac{\mathfrak{h}_1(n+1, x, d, z; \vec{u}, r, a, b)}{n+1}$$

dir.

İspat Bu teoremin ispatı, Teorem 4.58'de verilen ispata benzer bir şekilde yapıldığı açıktır. $\square$

4.4. Genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet Polinomları İçin Hesaplama Algoritmaları

Burada, (2.69) ve (2.72) bağıntıları ile verilen Hermite-Kampè de Fèriet polinomları ve genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet polinomlarının değerlerini hesaplayan algoritmalar verilmiştir.

Algoritma 1 $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, (2.69) bağıntısı ile verilen Hermite-Kampè de Fèriet polinomlarını $j = 2$ durumunda hesaplayan algoritma aşağıdaki gibidir:

```

procedure HERMITE_POLY( $n, u_1, u_2$ )
  Begin
  Local variable  $s$  : integer
  return  $sum (factorial(n) * power(u_1, n - 2 * s) * power(u_2, s)$ 
     $\hookrightarrow / (factorial(n - 2 * s) * factorial(s)), s, 0, floor(n/2))$ 
end procedure

```

Algoritma 2 $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, Algoritma 1 ile verilen HERMITE_POLY prosedür yardımıyla, (2.72) bağıntısında verilen genelleştirilmiş Hermite-Kampè de Fèriet polinomlarını hesaplayan algoritma aşağıdaki gibidir:

```

procedure GENERAL_HERMITE_POLY( $n, Uvect, r$ ),  $Uvect = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ 
  Begin
  Local variable  $j$  : integer
  if  $r = 2$  then
    return HERMITE_POLY( $n, u_1, u_2$ )
  else
    return  $sum (factorial(n) * power(u_r, j)$ 
       $\hookrightarrow *GENERAL\_HERMITE\_POLY (n - r * j, Uvect, r - 1)$ 
       $\hookrightarrow / (factorial(n - r * j) * factorial(j)), j, 0, floor(n/r))$ 
  end if
end procedure

```

4.5. r -parametrelili Hermite Tipli Polinomlar İçin Mathematica Kodları ve Bunların Uygulamaları

Bu bölümde, Algoritma 1 ve Algoritma 2 ile verilen algoritmalar Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, r -parametrelili Hermite tipli polinom ailelerinin hem değerleri hesaplanmış hem de grafiklerinin ve yüzeylerinin çizimleri verilmiştir. Bu bölümde yer alan ve Mathematica paket programında Wolfram programlama diliyle kodlanan kodların farklı uygulamaları Kılar ve Simsek (2021c) çalışmasında mevcuttur.

4.5.1. $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonları için Mathematica kodları ve uygulamaları

Bu alt bölümde, (3.4) ve (3.5) bağıntıları içerisinde tanımlanan $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonları Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, bazı uygulamaları verilmiştir.

Mathematica Uygulaması 1. (3.4) ve (3.5) bağıntıları yardımıyla, $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonlarının $r = 4$ durumunda, t parametresi için rastgele seçilmiş bir özel aralıkta parametrik eğrilerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

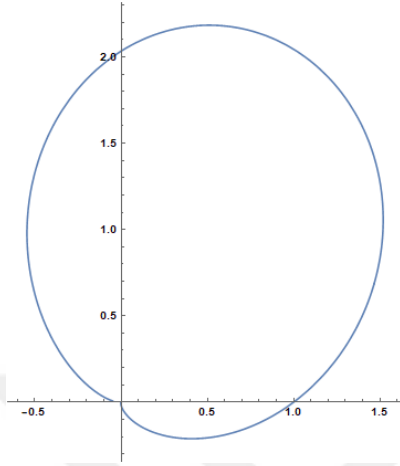
```

1 K1[t_,x_,y_, Uvect_,r_]:=Exp[x*t+(Sum[(Uvect[[j]]) (t^j) ,{ j ,1, r }])]*Cos[y*t];
2 K2[t_,x_,y_, Uvect_,r_]:=Exp[x*t+(Sum[(Uvect[[j]]) (t^j) ,{ j ,1, r }])]*Sin[y*t];
3 ParametricPlot[{K1[t,3,3,{1,-5,2,-4},4], K2[t ,3,3,{1,-5,2,-4},4]},{ t,-1,1},LabelStyle->
  Directive[Black,Bold]]
4 ParametricPlot[{K1[t,-3,3,{1,-5,2,-4},4], K2[t,-3,3,{1,-5,2,-4},4]},{ t,-1,1},LabelStyle->
  Directive[Black,Bold]]
5 ParametricPlot[{K1[t,3,-3,{1,-5,2,-4},4], K2[t,3,-3,{1,-5,2,-4},4]},{ t,-1,1},LabelStyle->
  Directive[Black,Bold]]
6 ParametricPlot[{K1[t,-3,-3,{1,-5,2,-4},4], K2[t,-3,-3,{1,-5,2,-4},4]},{ t,-1,1},LabelStyle->
  Directive[Black,Bold]]

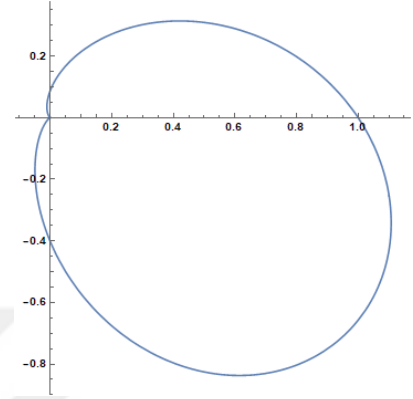
```

Mathematica Uygulaması 1 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (1, -5, 2, -4)$ ve $t \in [-1, 1]$ olmak üzere, x ve y değişkenlerine göre, $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonlarının parametrik eğrilerinin çizimleri Şekil 4.1 ile verilmiştir. Ayrıca, Şekil 4.1'den

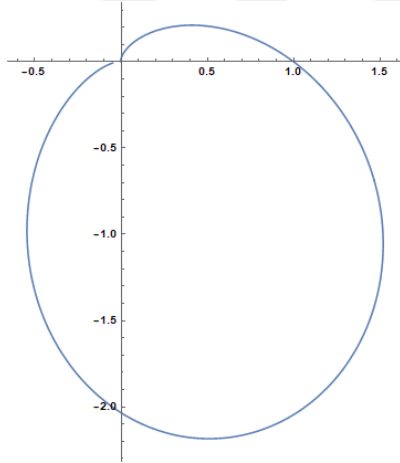
de görüleceği üzere, $K_1(t, x, y, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarında x ve y değişkenlerinin aldığı değerlere göre farklı bölgelerde bulunmaktadır ve bu değerler değiştikçe şekiller de değişmektedir.



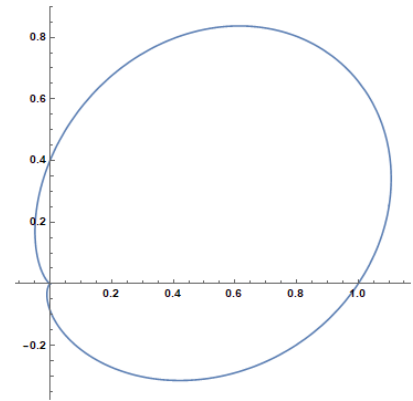
(a) $K_1(t, 3, 3, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, 3, 3, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarının parametrik olarak çizimi



(b) $K_1(t, -3, 3, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, -3, 3, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarının parametrik olarak çizimi



(c) $K_1(t, 3, -3, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, 3, -3, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarının parametrik olarak çizimi



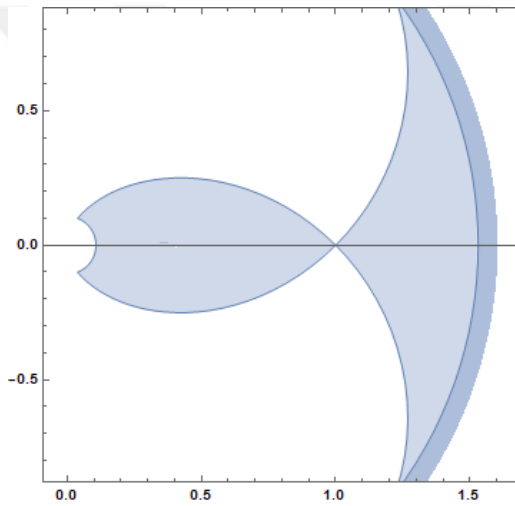
(d) $K_1(t, -3, -3, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, -3, -3, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarının parametrik olarak çizimi

Şekil 4.1. $K_1(t, x, y, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarının parametrik olarak çizimlerinden elde edilen parametrik eğriler

Mathematica Uygulaması 2. (3.4) ve (3.5) bağıntıları yardımıyla, $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonlarının $r = 4$ durumunda, t ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda parametrik bölgesini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
ParametricPlot[[K1[t, 2, y, {1,-5,2,-4}, 4], K2[t, 2, y, {1,-5,2,-4}, 4]], {t, -0.4, 0.4}, {y, -3, 3}, LabelStyle->Directive[Black, Bold]]
```

Mathematica Uygulaması 2 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (1, -5, 2, -4)$ olmak üzere, $t \in [-0.4, 0.4]$, $y \in [-3, 3]$ ve $x = 2$ değerleri için, $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonlarının parametrik bölge olarak çizimi Şekil 4.2 ile verilmiştir:



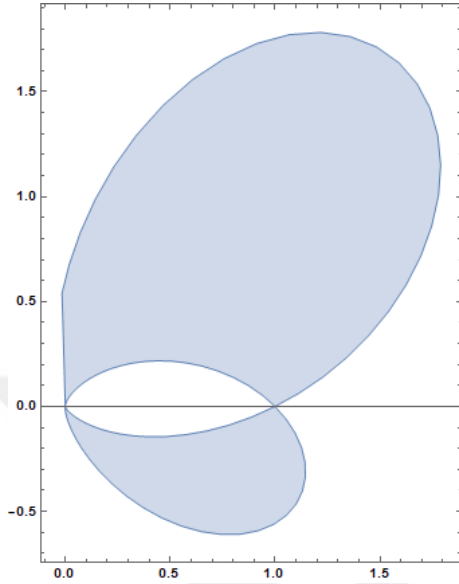
Şekil 4.2. $K_1(t, 2, y, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, 2, y, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarının parametrik çizimlerinden elde edilen parametrik bölge

Şekil 4.1'in yanı sıra Şekil 4.2 ile verilen parametrik çizim farklıdır. Şekil 4.2'de t ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda parametrik bölge çizimi verilmiştir.

Mathematica Uygulaması 3. (3.4) ve (3.5) bağıntıları yardımıyla, $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonlarının $r = 4$ durumunda, t ve x parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda parametrik bölgesini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
ParametricPlot[[K1[t,x,2,{1,-5,2,-4},4], K2[t,x,2,{1,-5,2,-4},4]], {t, -0.8, 0.8}, {x, -3, 3}, LabelStyle->Directive[Black, Bold]]
```

Mathematica Uygulaması 3 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (1, -5, 2, -4)$ olmak üzere, $t \in [-0.8, 0.8]$, $x \in [-3, 3]$ ve $y = 2$ değerleri için, $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonlarının parametrik bölge olarak çizimi Şekil 4.3 ile verilmiştir:



Şekil 4.3. $K_1(t, x, 2, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, x, 2, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarının parametrik çizimlerinden elde edilen parametrik bölge

Şekil 4.1'in yanı sıra Şekil 4.3 ile verilen parametrik çizim farklıdır. Şekil 4.3'te t ve x parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda parametrik bölge olarak çizimi verilmiştir.

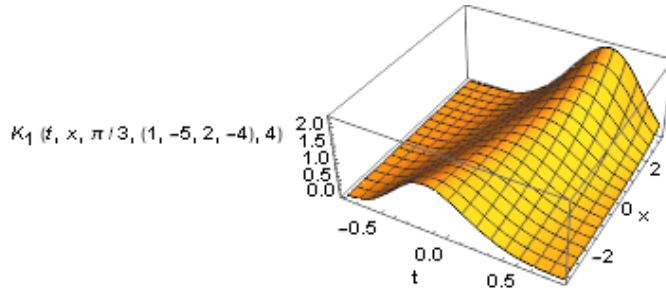
Mathematica Uygulaması 4. (3.4) bağıntısı yardımıyla, $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonunun $r = 4$ durumunda, t ve x parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeyini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 K1p1=Framed["\\(\\ast SubscriptBox[K,1](t,x,\\[Pi]/3,(1,-5,2,-4),4)\\)",FrameStyle->None,
  FrameMargins->9]
2 Plot3D[K1[t,x,Pi/3,{1,-5,2,-4},4],{t,-0.8,0.8},{x,-Pi,Pi},AxesLabel->{"t","x",K1p1},
  LabelStyle->Directive[Black,Bold]]

```

Mathematica Uygulaması 4 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (1, -5, 2, -4)$ olmak üzere, $t \in [-0.8, 0.8]$ ve $x \in [-\pi, \pi]$ ve $y = \frac{\pi}{3}$ değerleri için, $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonunun yüzeyinin çizimi Şekil 4.4 ile verilmiştir:

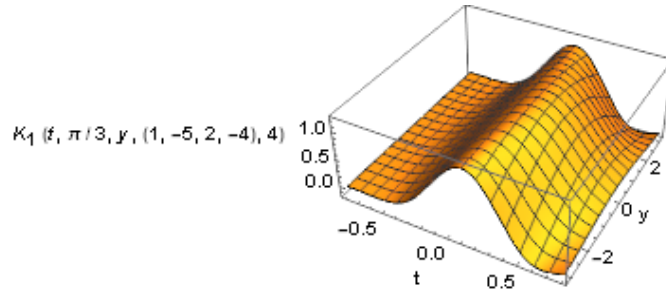


Şekil 4.4. $K_1(t, x, \frac{\pi}{3}, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonunun yüzeyinin çizimi

Mathematica Uygulaması 5. (3.4) bağıntısı yardımıyla, $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonunun $r = 4$ durumunda, t ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeyini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
1 K1p2=Framed["\\(\\ast SubscriptBox[K,1](t,[ Pi ]/3,y,(1,-5,2,-4),4)\\)",FrameStyle->None,
  FrameMargins->9]
2 Plot3D[K1[t,Pi/3,y,{1,-5,2,-4},4],{t,-0.8,0.8},{y,-Pi,Pi},AxesLabel->{"t","y",K1p2},
  LabelStyle->Directive[Black,Bold]]
```

Mathematica Uygulaması 5 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (1, -5, 2, -4)$ olmak üzere, $t \in [-0.8, 0.8]$, $y \in [-\pi, \pi]$ ve $x = \frac{\pi}{3}$ değerleri için, $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonunun yüzeyinin çizimi Şekil 4.5 ile verilmiştir:



Şekil 4.5. $K_1(t, \frac{\pi}{3}, y, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonunun yüzeyinin çizimi

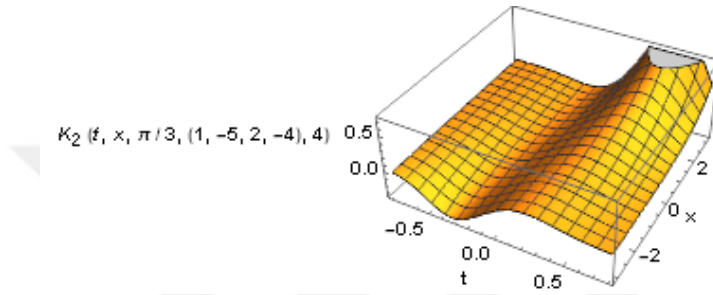
Mathematica Uygulaması 6. (3.5) bağıntısı yardımıyla, $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonunun $r = 4$ durumunda, t ve x parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeyini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 K2p1=Framed["\\(\\(*SubscriptBox[K,2](t,x,\\[Pi]/3,(1,-5,2,-4),4)\\)",FrameStyle->None,
  FrameMargins->9]
2 Plot3D[K2[t,x,Pi/3,{1,-5,2,-4},4], {t,-0.8,0.8}, {x,-Pi,Pi},AxesLabel->{"t","x",K2p1},
  LabelStyle->Directive[Black,Bold]]

```

Mathematica Uygulaması 6 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (1, -5, 2, -4)$ olmak üzere, $t \in [-0.8, 0.8]$, $x \in [-\pi, \pi]$ ve $y = \frac{\pi}{3}$ değerleri için, $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonunun yüzeyinin çizimi Şekil 4.6 ile verilmiştir:



Şekil 4.6. $K_2(t, x, \frac{\pi}{3}, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonunun yüzeyinin çizimi

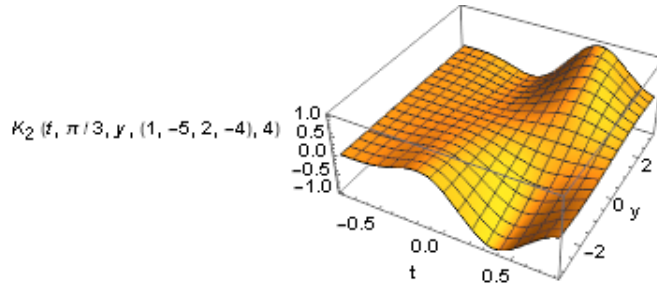
Mathematica Uygulaması 7. (3.5) bağıntısı yardımıyla, $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonunun $r = 4$ durumunda, t ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeyini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 K2p2=Framed["\\(\\(*SubscriptBox[K,2](t,\\[Pi]/3,y,(1,-5,2,-4),4)\\)",FrameStyle->None,
  FrameMargins->9]
2 Plot3D[K2[t,Pi/3,y,{1,-5,2,-4},4],{t,-0.8,0.8},{y,-Pi,Pi},AxesLabel->{"t","y",K2p2},
  LabelStyle->Directive[Black,Bold]]

```

Mathematica Uygulaması 7 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (1, -5, 2, -4)$ olmak üzere, $t \in [-0.8, 0.8]$, $y \in [-\pi, \pi]$ ve $x = \frac{\pi}{3}$ değerleri için, $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonunun yüzeyinin çizimi Şekil 4.7 ile verilmiştir:

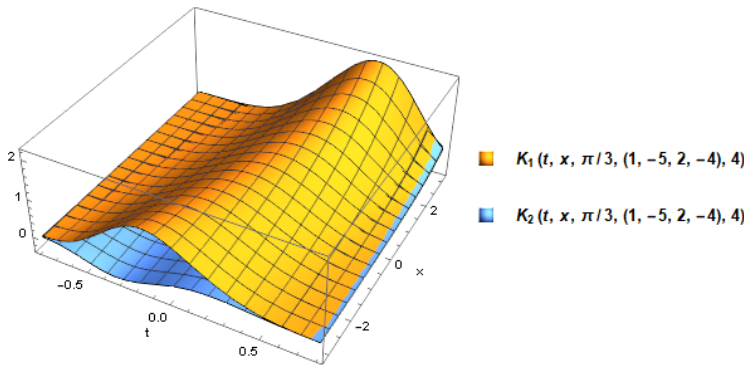


Şekil 4.7. $K_2(t, \frac{\pi}{3}, y, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonunun yüzeyinin çizimi

Mathematica Uygulaması 8. (3.4) ve (3.5) bağıntıları yardımıyla, $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonlarının $r = 4$ durumunda, t ve x parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda birlikte yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
Plot3D[{Legended[K1[t,x,Pi/3,{1,-5,2,-4},4],Framed["\\(\\ast SubscriptBox[K,1](t,x,[Pi
]/3,(1,-5,2,-4),4)\\)"],FrameStyle->None,FrameMargins->9]],Legended[K2[t,x,Pi
/3,{1,-5,2,-4},4],Framed["\\(\\ast SubscriptBox[K,2](t,x,[Pi]/3,(1,-5,2,-4),4)\\)"],FrameStyle->
None,FrameMargins->9]],{t,-0.8,0.8},{x,-Pi,Pi},AxesLabel->{"t","x",None},LabelStyle
->Directive[Black,Bold]]
```

Mathematica Uygulaması 8 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (1, -5, 2, -4)$ olmak üzere, $t \in [-0.8, 0.8]$, $x \in [-\pi, \pi]$ ve $y = \frac{\pi}{3}$ değerleri için, $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonlarının birlikte yüzeylerinin çizimi Şekil 4.8 ile verilmiştir:

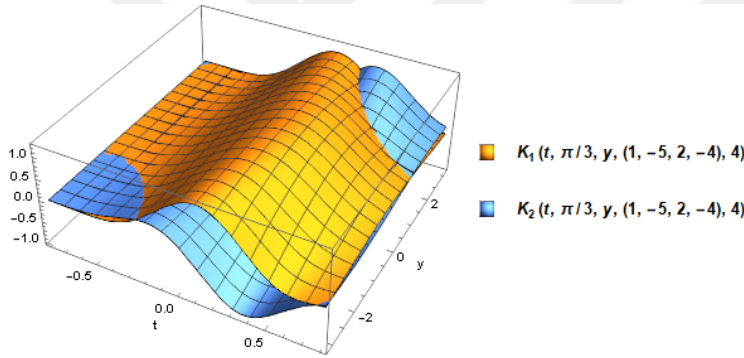


Şekil 4.8. $K_1(t, x, \frac{\pi}{3}, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, x, \frac{\pi}{3}, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarının birlikte yüzeylerinin çizimi

Mathematica Uygulaması 9. (3.4) ve (3.5) bağıntıları yardımıyla, $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonlarının $r = 4$ durumunda, t ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda birlikte yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
Plot3D[{Legended[K1[t,Pi/3,y,{1,-5,2,-4},4],Framed["\\(\\ast SubscriptBox[K,1](t,\\[Pi]/3,y,{1,-5,2,-4},4)\\)"],FrameStyle->None,FrameMargins->9]],Legended[K2[t,Pi/3,y,{1,-5,2,-4},4],Framed["\\(\\ast SubscriptBox[K,2](t,\\[Pi]/3,y,{1,-5,2,-4},4)\\)"],FrameStyle->None,FrameMargins->9]],{t,-0.8,0.8},{y,-Pi,Pi},AxesLabel->{"t","y",None},LabelStyle->Directive[Black,Bold]]
```

Mathematica Uygulaması 9 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (1, -5, 2, -4)$ olmak üzere, $t \in [-0.8, 0.8]$, $y \in [-\pi, \pi]$ ve $x = \frac{\pi}{3}$ değerleri için, $K_1(t, x, y, \vec{u}, r)$ ve $K_2(t, x, y, \vec{u}, r)$ üreteç fonksiyonlarının birlikte yüzeylerinin çizimi Şekil 4.9 ile verilmiştir:



Şekil 4.9. $K_1(t, \frac{\pi}{3}, y, \vec{u}, 4)$ ve $K_2(t, \frac{\pi}{3}, y, \vec{u}, 4)$ üreteç fonksiyonlarının birlikte yüzeylerinin çizimi

4.5.2. $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomları için Mathematica kodları ve uygulamaları

Bu alt bölümde, (3.7) denklemi Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının değerleri hesaplanmıştır. Ayrıca, Mathematica paket programı yardımıyla $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının bazı özel değerleri için grafikleri ve yüzeyleri çizilmiştir.

Mathematica Uygulaması 10. (3.7) denklemi yardımıyla, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 2$ ve $r = 3$ durumlarında, değerlerini hesaplayan Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 Unprotect[Power];
2 Power[0,0]=1;
3 Protect[Power];
4 g[n_,Uvect_]:=Return[Sum[Factorial[n]*((Uvect[[1]]^(n-2*s)*Uvect[[2]]^s)/(Factorial[s]*
    Factorial[n-2*s])],{s,0,Floor[n/2]}]];
5 H[n_,Uvect_,r_]:= (If[r==2,g[n,Uvect],If[r>2,Return[Factorial[n]*Sum[(((Uvect[[r]]^(j)))*(H[n
    -r*j,Uvect,r-1]))/(Factorial[j]*Factorial[n-r*j]),{j,0,Floor[n/r]}]]];
6 k1[n_,x_,y_,Uvect_,r_]:=ReplaceAll[Subscript[ToString[u],ToString[1]]->"x"+Subscript[
    ToString[u],ToString[1]][Sum[Binomial[n,2*j]*((-1)^j)*(y^(2*j))*H[n-(2*j),Uvect,r,{j,0,Floor
    [n/2]}]];
7 TableForm[Table[k1[n,x,y,Table[Subscript[ToString[u],ToString[i]],{i,1,2}],2],{n,0,5}],
    TableHeadings->{{ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(0;x,y,\vec{u},2\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(1;x,y,\vec{u},2\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(2;x,y,\vec{u},2\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(3;x,y,\vec{u},2\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(4;x,y,\vec{u},2\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(5;x,y,\vec{u},2\right)"]",TeXForm],TraditionalForm}}];
8 TableForm[Simplify[Table[k1[n,x,y,Table[Subscript[ToString[u],ToString[i]],{i,1,3}],3],{n,0,5}],TableHeadings->{{ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(0;x,y,\vec{u},3\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(1;x,y,\vec{u},3\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(2;x,y,\vec{u},3\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(3;x,y,\vec{u},3\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(4;x,y,\vec{u},3\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(5;x,y,\vec{u},3\right)"]",TeXForm],TraditionalForm}}];
9 TableForm[Simplify[Table[k1[n,x,y,Table[Subscript[ToString[u],ToString[i]],{i,1,4}],4],{n,0,5}],TableHeadings->{{ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(0;x,y,\vec{u},4\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(1;x,y,\vec{u},4\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(2;x,y,\vec{u},4\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(3;x,y,\vec{u},4\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(4;x,y,\vec{u},4\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_1}\left(5;x,y,\vec{u},4\right)"]",TeXForm],TraditionalForm}}];

```

Mathematica Uygulaması 10 yardımıyla, $r = 2$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ve $\vec{x} = (x + u_1, u_2)$ alınarak, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ değerleri için $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 k_1(0; x, y, \vec{u}, 2) &= 1, \\
 k_1(1; x, y, \vec{u}, 2) &= x + u_1, \\
 k_1(2; x, y, \vec{u}, 2) &= (x + u_1)^2 + 2u_2 - y^2, \\
 k_1(3; x, y, \vec{u}, 2) &= (x + u_1)^3 + 6(x + u_1)u_2 - 3y^2(x + u_1), \\
 k_1(4; x, y, \vec{u}, 2) &= (x + u_1)^4 + 12(x + u_1)^2u_2 + 12u_2^2 - 6y^2((x + u_1)^2 + 2u_2) + y^4 \\
 k_1(5; x, y, \vec{u}, 2) &= (x + u_1)^5 + 20(x + u_1)^3u_2 + 60(x + u_1)u_2^2 - 10y^2(x + u_1)^3 \\
 &\quad - 60y^2(x + u_1)u_2 + 5y^4(x + u_1).
 \end{aligned}$$

Mathematica Uygulaması 10 yardımıyla, $r = 3$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\vec{x} = (x + u_1, u_2, u_3)$ alınarak, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ değerleri için $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 k_1(0; x, y, \vec{u}, 3) &= 1, \\
 k_1(1; x, y, \vec{u}, 3) &= x + u_1, \\
 k_1(2; x, y, \vec{u}, 3) &= (x + u_1)^2 + 2u_2 - y^2, \\
 k_1(3; x, y, \vec{u}, 3) &= (x + u_1)^3 + 6(x + u_1)u_2 + 6u_3 - 3y^2(x + u_1), \\
 k_1(4; x, y, \vec{u}, 3) &= (x + u_1)^4 + 12(x + u_1)^2u_2 + 12u_2^2 + 24(x + u_1)u_3 \\
 &\quad - 6y^2((x + u_1)^2 + 2u_2) + y^4 \\
 k_1(5; x, y, \vec{u}, 3) &= (x + u_1)^5 + 20(x + u_1)^3u_2 + 60(x + u_1)u_2^2 - 10y^2(x + u_1)^3 \\
 &\quad - 60y^2((x + u_1)u_2 + u_3) + 5y^4(x + u_1) \\
 &\quad + 60((x + u_1)^2 + 2u_2)u_3.
 \end{aligned}$$

Mathematica Uygulaması 10 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ ve $\vec{x} = (x + u_1, u_2, u_3, u_4)$ alınarak, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ değerleri için $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$

polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$k_1(0; x, y, \vec{u}, 4) = 1,$$

$$k_1(1; x, y, \vec{u}, 4) = x + u_1,$$

$$k_1(2; x, y, \vec{u}, 4) = (x + u_1)^2 + 2u_2 - y^2,$$

$$k_1(3; x, y, \vec{u}, 4) = (x + u_1)^3 + 6(x + u_1)u_2 + 6u_3 - 3y^2(x + u_1),$$

$$k_1(4; x, y, \vec{u}, 4) = (x + u_1)^4 + 12(x + u_1)^2 u_2 + 12u_2^2 + 24(x + u_1)u_3 + 24u_4 - 6y^2((x + u_1)^2 + 2u_2) + y^4$$

$$k_1(5; x, y, \vec{u}, 4) = (x + u_1)^5 + 20(x + u_1)^3 u_2 + 60(x + u_1)u_2^2 - 10y^2(x + u_1)^3 - 60y^2((x + u_1)u_2 + u_3) + 5y^4(x + u_1) + 60((x + u_1)^2 + 2u_2)u_3 + 120(x + u_1)u_4 + 120u_5.$$

Mathematica Uygulaması 11. (3.7) denklemi yardımıyla, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 3, 4, 5$ ve $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ durumlarında, x parametresi için rastgele seçilmiş özel aralıkta grafiklerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

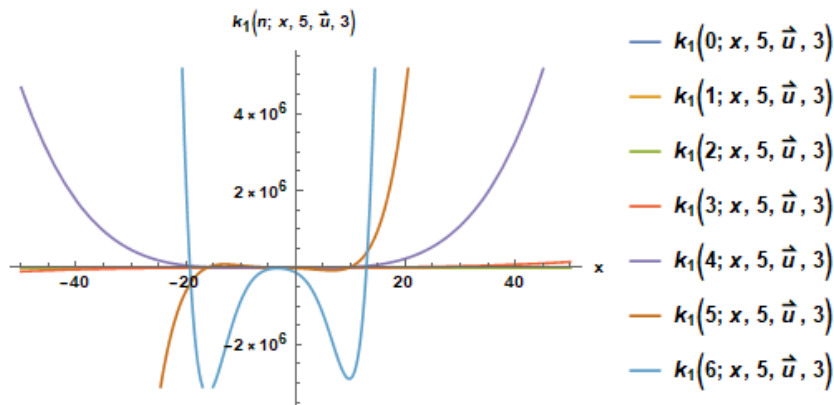
- 1 `Plot[Evaluate[Table[k1[n,x,5,{x+3,5,1},3],{n,0,6}],{x,-50,50},AxesLabel->{"x",ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(n;x,5,\vec{u},3\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm}],PlotLegends->{ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(0;x,5,\vec{u},3\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(1;x,5,\vec{u},3\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(2;x,5,\vec{u},3\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(3;x,5,\vec{u},3\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(4;x,5,\vec{u},3\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(5;x,5,\vec{u},3\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(6;x,5,\vec{u},3\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm}],LabelStyle->Directive[Black,Bold]]`
- 2 `Plot[Evaluate[Table[k1[n,x,5,{x+3,5,1,8},4],{n,0,6}],{x,-50,50},AxesLabel->{"x",ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(n;x,5,\vec{u},4\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm}],PlotLegends->{ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(0;x,5,\vec{u},4\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(1;x,5,\vec{u},4\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(2;x,5,\vec{u},4\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(3;x,5,\vec{u},4\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(4;x,5,\vec{u},4\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[`

```

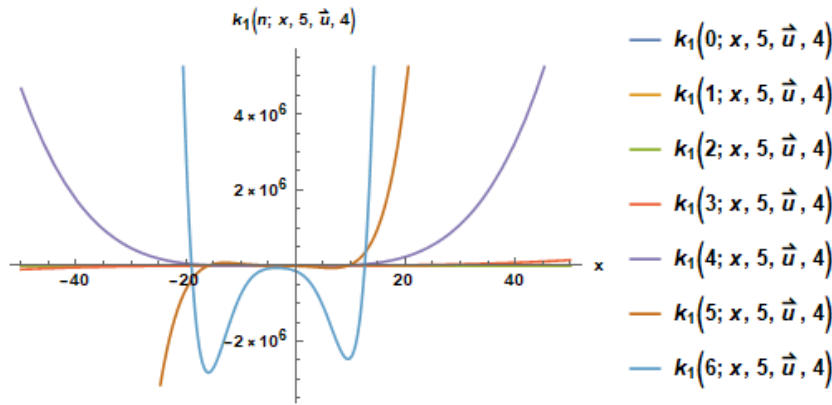
ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\\left(5;x,5,\\vec{u},4\\right)", TeXForm], TraditionalForm
], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\\left(6;x,5,\\vec{u},4\\right)", TeXForm],
TraditionalForm]], LabelStyle -> Directive[Black, Bold]]
3 Plot[Evaluate[Table[k1[n,x,5,{x +3,5,1,8,2},5],{ n ,0,6}],{ x,-50,50}, AxesLabel->{"x", ToString
[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\\left(n;x,5,\\vec{u},5\\right)", TeXForm],
TraditionalForm]], PlotLegends->{ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\\left(0;x,5,\\
vec{u},5\\right)", TeXForm], TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\\
left(1;x,5,\\vec{u},5\\right)", TeXForm], TraditionalForm], ToString[ToExpression["{
HoldForm}{{k}_{1}}\\left(2;x,5,\\vec{u},5\\right)", TeXForm], TraditionalForm], ToString[
ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\\left(3;x,5,\\vec{u},5\\right)", TeXForm], TraditionalForm
], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\\left(4;x,5,\\vec{u},5\\right)", TeXForm],
TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\\left(5;x,5,\\vec{u},5\\right)",
TeXForm], TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\\left(6;x,5,\\vec{u}
},5\\right)", TeXForm], TraditionalForm]], LabelStyle->Directive[Black, Bold]]

```

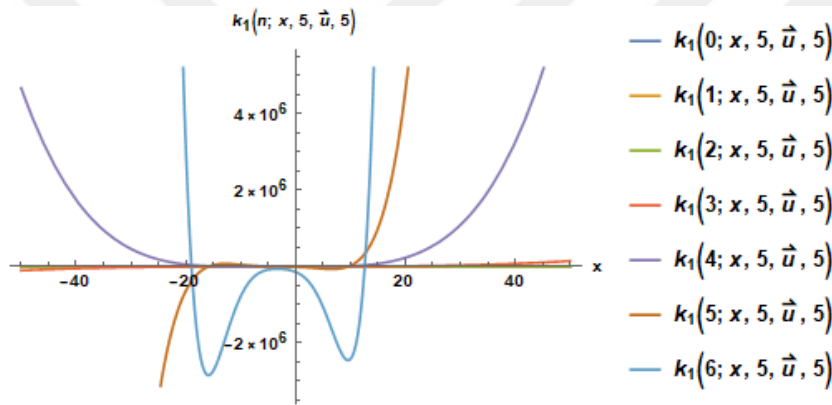
Mathematica Uygulaması 11 yardımıyla, sırasıyla $r = 3$, $\vec{u} = (3, 5, 1)$, $r = 4$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8)$ ve $r = 5$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8, 2)$ olmak üzere, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $x \in [-50, 50]$ ve $y = 5$ değerleri için, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının grafiklerinin çizimleri sırasıyla Şekil 4.10 - Şekil 4.12 ile verilmiştir:



Şekil 4.10. $k_1(n; x, 5, \vec{u}, 3)$ polinomlarının grafik çizimleri



Şekil 4.11. $k_1(n; x, 5, \vec{u}, 4)$ polinomlarının grafik çizimleri



Şekil 4.12. $k_1(n; x, 5, \vec{u}, 5)$ polinomlarının grafik çizimleri

Mathematica Uygulaması 12. (3.7) denklemi yardımıyla, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 4$ ve $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ durumlarında, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

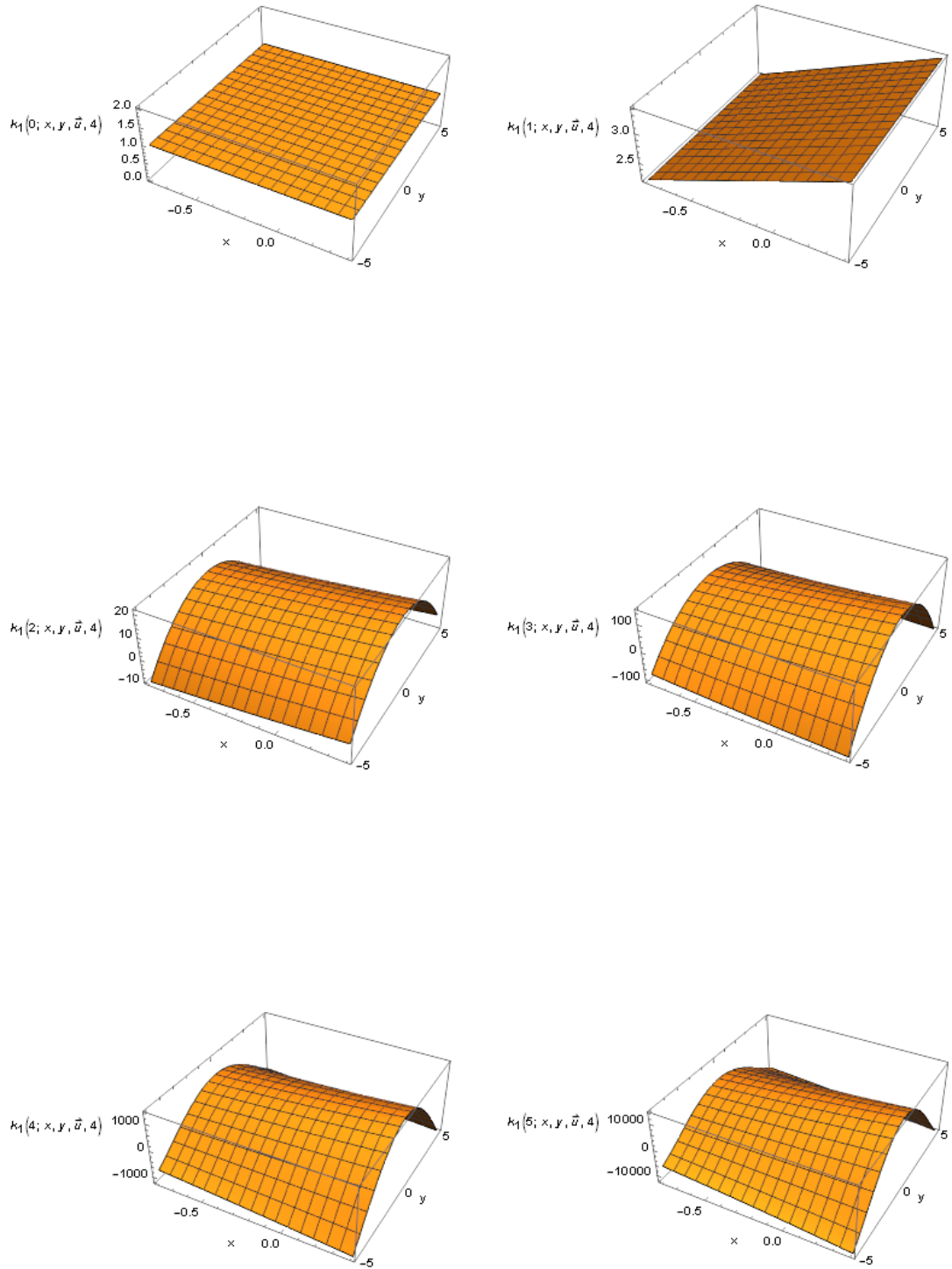
- 1 k1P40 = Famed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(0;x,y,\vec{u},4\right)"], TeXForm], TraditionalForm], FrameStyle -> None, FrameMargins -> 9]
- 2 k1P41 = Famed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(1;x,y,\vec{u},4\right)"], TeXForm], TraditionalForm], FrameStyle -> None, FrameMargins -> 9]
- 3 k1P42 = Famed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(2;x,y,\vec{u},4\right)"], TeXForm], TraditionalForm], FrameStyle -> None, FrameMargins -> 9]
- 4 k1P43 = Famed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\left(3;x,y,\vec{u},4\right)"], TeXForm], TraditionalForm], FrameStyle -> None, FrameMargins -> 9]

```

5 k1P44 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\\left(4;x,y,\\vec{u},4\\right)"]",
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
6 k1P45 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{1}}\\left(5;x,y,\\vec{u},4\\right)"]",
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
7 GraphicsGrid[{{Plot3D[k1[0,x,y,{x+3,5,1,8},4],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",
    k1P40},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],Plot3D[k1[1,x,y,{x+3,5,1,8},4],{x,-0.8,0.4},{y
    ,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k1P41},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],{Plot3D[k1[2,x,y
    ,{x+3,5,1,8},4],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k1P42},LabelStyle -> Directive[
    Black,Bold]],Plot3D[k1[3,x,y,{x+3,5,1,8},4],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",
    k1P43},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],{Plot3D[k1[4,x,y,{x+3,5,1,8},4],{x,-0.8,0.4},{
    y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k1P44},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],Plot3D[k1[5,x,y
    ,{x+3,5,1,8},4],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k1P45},LabelStyle ->Directive[
    Black,Bold]]}},ImageSize ->800]

```

Mathematica Uygulaması 12 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8)$ olmak üzere, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $x \in [-0.8, 0.4]$ ve $y \in [-5, 5]$ değerleri için, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri Şekil 4.13 ile verilmiştir:

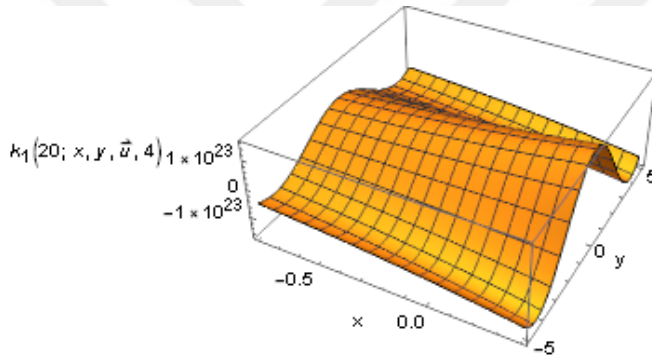


Şekil 4.13. $k_1(n; x, y, \vec{u}, 4)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri

Mathematica Uygulaması 13. (3.7) denklemi yardımıyla, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 4$ ve $n = 20$ durumunda, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeyini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
1 k1P420 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}[{k_1}\left(20;x,y,\vec{u},4\right)"]],
  TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
2 Plot3D[k1[20,x,y,{x +3,5,1,8},4],{ x,-0.8,0.4},{ y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k1P420},LabelStyle
  -> Directive[Black,Bold]]
```

Mathematica Uygulaması 13 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8)$ olmak üzere, $n = 20$, $x \in [-0.8, 0.4]$, $y \in [-5, 5]$ değerleri için, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi Şekil 4.14 ile verilmiştir. Ayrıca, Şekil 4.14'den de görüleceği üzere, n değeri arttıkça şeklin sağında ve solunda deformasyonlar oluşmaktadır.

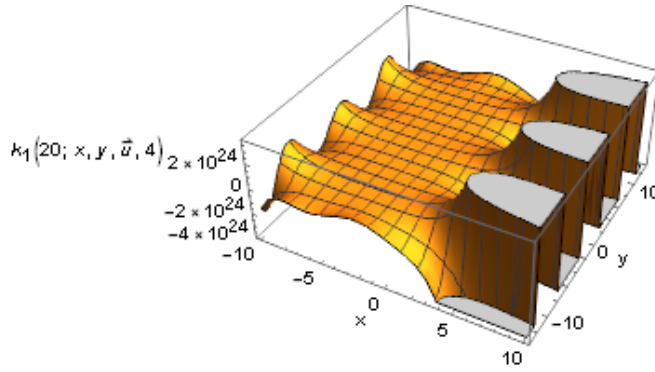


Şekil 4.14. $k_1(20; x, y, \vec{u}, 4)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi

Mathematica Uygulaması 14. (3.7) denklemi yardımıyla, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 4$ ve $n = 20$ durumunda, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeyini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
1 Plot3D[k1[20,x,y,{x +3,5,1,8},4],{ x,-10,10},{ y,-13,13},AxesLabel->{"x","y",k1P420},
  LabelStyle -> Directive[Black,Bold]]
```

Mathematica Uygulaması 14 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8)$ olmak üzere, $n = 20$, $x \in [-10, 10]$, $y \in [-13, 13]$ değerleri için, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi Şekil 4.15 ile verilmiştir:



Şekil 4.15. $k_1(20; x, y, \vec{u}, 4)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi

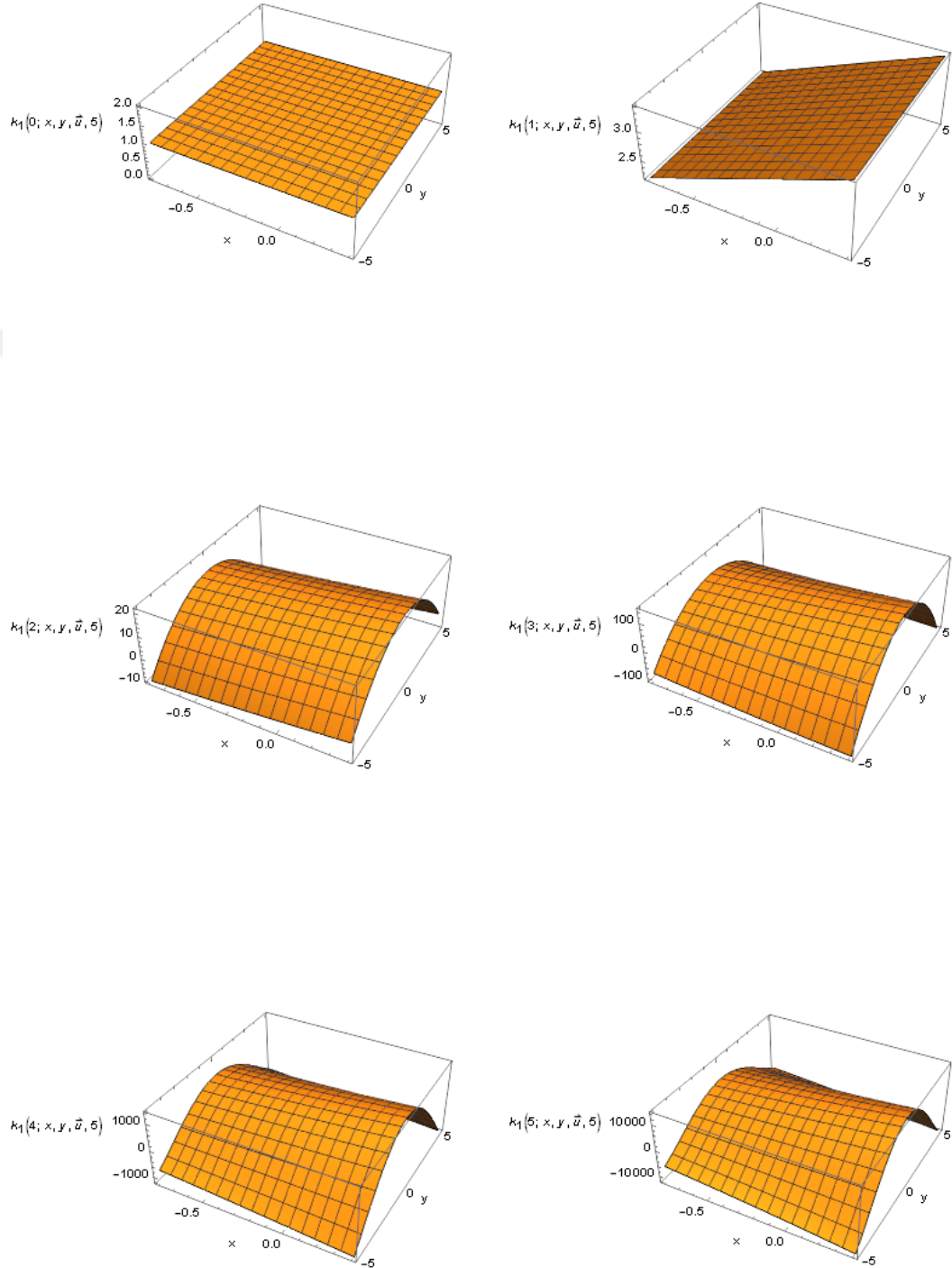
Mathematica Uygulaması 15. (3.7) denklemi yardımıyla, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 5$ ve $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ durumlarında, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 k1P50 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}[{k}_{1}\\left(0;x,y,\\vec{u},5\\right)"]],
   TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
2 k1P51 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}[{k}_{1}\\left(1;x,y,\\vec{u},5\\right)"]],
   TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
3 k1P52 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}[{k}_{1}\\left(2;x,y,\\vec{u},5\\right)"]],
   TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
4 k1P53 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}[{k}_{1}\\left(3;x,y,\\vec{u},5\\right)"]],
   TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
5 k1P54 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}[{k}_{1}\\left(4;x,y,\\vec{u},5\\right)"]],
   TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
6 k1P55 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}[{k}_{1}\\left(5;x,y,\\vec{u},5\\right)"]],
   TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
7 GraphicsGrid[{{Plot3D[k1[0,x,y,{x +3,5,1,8,2},5],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",
   k1P50},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],Plot3D[k1[1,x,y,{x+3,5,1,8,2},5],{x,-0.8,0.4},{
   y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k1P51},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],{Plot3D[k1[2,x,
   y,{x+3,5,1,8,2},5],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k1P52},LabelStyle ->
   Directive[Black,Bold]],Plot3D[k1[3,x,y,{x+3,5,1,8,2},5],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{
   "x","y",k1P53},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],{Plot3D[k1[4,x,y,{x+3,5,1,8,2},5],{x
   ,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k1P54},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],
   Plot3D[k1[5,x,y,{x+3,5,1,8,2},5],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k1P55},
   LabelStyle ->Directive[Black,Bold]]}],ImageSize ->800]

```

Mathematica Uygulaması 15 yardımıyla, $r = 5$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8, 2)$ olmak üzere, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $x \in [-0.8, 0.4]$ ve $y \in [-5, 5]$ değerleri için, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri Şekil 4.16 ile verilmiştir:

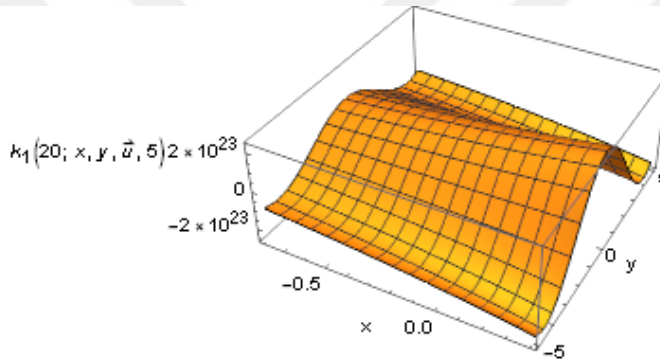


Şekil 4.16. $k_1(n; x, y, \vec{u}, 5)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri

Mathematica Uygulaması 16. (3.7) denklemi yardımıyla, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 5$ ve $n = 20$ durumunda, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
1 k1P520 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}[k_1]\left(20;x,y,\vec{u},5\right)"],
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins-> 9]
2 Plot3D[k1[20,x,y,{x +3,5,1,8,2},5],{ x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k1P520},
    LabelStyle -> Directive[Black,Bold]]
```

Mathematica Uygulaması 16 yardımıyla, $r = 5$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8, 2)$ olmak üzere, $n = 20$, $x \in [-0.8, 0.4]$, $y \in [-5, 5]$ değerleri için, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi Şekil 4.17 ile verilmiştir:

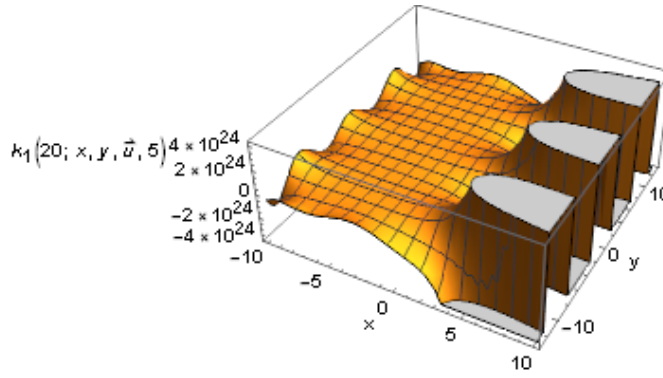


Şekil 4.17. $k_1(20; x, y, \vec{u}, 5)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi

Mathematica Uygulaması 17. (3.7) denklemi yardımıyla, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 5$ ve $n = 20$ durumunda, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
1 Plot3D[k1[20,x,y,{x +3,5,1,8,2},5],{ x,-10,10},{y,-13,13},AxesLabel->{"x","y",k1P520},
    LabelStyle -> Directive[Black,Bold]]
```

Mathematica Uygulaması 17 yardımıyla, $r = 5$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8, 2)$ olmak üzere, $n = 20$, $x \in [-10, 10]$, $y \in [-13, 13]$ değerleri için, $k_1(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi Şekil 4.18 ile verilmiştir:



Şekil 4.18. $k_1(20; x, y, \vec{u}, 5)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi

4.5.3. $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomları için Mathematica kodları ve uygulamaları

Bu alt bölümde, (3.8) denklemi Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının değerleri hesaplanmıştır. Ayrıca, Mathematica paket programı yardımıyla $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının bazı özel değerleri için grafikleri ve yüzeyleri çizilmiştir.

Mathematica Uygulaması 18. (3.8) denklemi yardımıyla, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 2$ ve $r = 3$ durumlarında, değerlerini hesaplayan Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

- 1 `k2[n_,x_,y_,Uvect_,r_]:=ReplaceAll[Subscript[ToString[u],ToString[1]]->"x"+Subscript[ToString[u], ToString[1]]][Sum[Binoial[n,2*j+1] ((-1)^j)*(y^(2*j+1))*H[n-1-(2*j),Uvect,r],{j,0,Floor[(n-1)/2]}]];`
- 2 `TableForm[Table[k2[n,x,y,Table[Subscript[ToString[u],ToString[i]],{i,1,2}],2,{n,0,5}],
TableHeadings->{ {ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\left(0;x,y,\vec{u},2\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\left(1;x,y,\vec{u},2\right)"]",TeXForm],TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\left(2;x,y,\vec{u},2\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\left(3;x,y,\vec{u},2\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\left(4;x,y,\vec{u},2\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\left(5;x,y,\vec{u},2\right)"]",TeXForm],TraditionalForm}}]`
- 3 `TableForm[Simplify[Table[k2[n,x,y,Table[Subscript[ToString[u],ToString[i]],{i,1,3}],3,{n,0,5}],
TableHeadings->{ {ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\left(0;x,y,\vec{u},3\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\left(1;x,y,\vec{u},3\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\left(2;x,y,\vec{u},3\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\left(3;x,y,\vec{u},3\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\left(4;x,y,\vec{u},3\right)"]",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\left(5;x,y,\vec{u},3\right)"]",TeXForm],TraditionalForm}}]`

```

(1;x,y,\vec{u},3\right)]", TeXForm], TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm
}{{k}_2}\left(2;x,y,\vec{u},3\right)"]", TeXForm], TraditionalForm], ToString[ToExpression[
"{{k}_2}\left(3;x,y,\vec{u},3\right)"]", TeXForm], TraditionalForm], ToString[
ToExpression["{HoldForm}{{k}_2}\left(4;x,y,\vec{u},3\right)"]", TeXForm], TraditionalForm
], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2}\left(5;x,y,\vec{u},3\right)"]", TeXForm],
TraditionalForm]]}]
4 TableForm[Simplify[Table[k2[n,x,y,Table[Subscript[ToString[u],ToString[i]],{i,1,4}],4,{n
,0,5}]], TableHeadings->{{ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2}\left(0;x,y,\vec{u}
},4\right)"]", TeXForm], TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2}\left
(1;x,y,\vec{u},4\right)"]", TeXForm], TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm
}{{k}_2}\left(2;x,y,\vec{u},4\right)"]", TeXForm], TraditionalForm], ToString[ToExpression[
"{{k}_2}\left(3;x,y,\vec{u},4\right)"]", TeXForm], TraditionalForm], ToString[
ToExpression["{HoldForm}{{k}_2}\left(4;x,y,\vec{u},4\right)"]", TeXForm], TraditionalForm
], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2}\left(5;x,y,\vec{u},4\right)"]", TeXForm],
TraditionalForm]]}]

```

Mathematica Uygulaması 18 yardımıyla, $r = 2$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ve $\vec{x} = (x + u_1, u_2)$ alınarak, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ değerleri için $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned}
k_2(0; x, y, \vec{u}, 2) &= 0, \\
k_2(1; x, y, \vec{u}, 2) &= y, \\
k_2(2; x, y, \vec{u}, 2) &= 2y(x + u_1), \\
k_2(3; x, y, \vec{u}, 2) &= 3y((x + u_1)^2 + 2u_2) - y^3, \\
k_2(4; x, y, \vec{u}, 2) &= 4y((x + u_1)^3 + 6(x + u_1)u_2) - 4y^3(x + u_1), \\
k_2(5; x, y, \vec{u}, 2) &= 5y((x + u_1)^4 + 12(x + u_1)^2 u_2 + 12u_2^2) \\
&\quad - 10y^3((x + u_1)^2 + 2u_2) + y^5.
\end{aligned}$$

Mathematica Uygulaması 18 yardımıyla, $r = 3$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\vec{x} = (x + u_1, u_2, u_3)$ alınarak, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ değerleri için $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının değerlerinin

hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$k_2(0; x, y, \vec{u}, 3) = 0,$$

$$k_2(1; x, y, \vec{u}, 3) = y,$$

$$k_2(2; x, y, \vec{u}, 3) = 2y(x + u_1),$$

$$k_2(3; x, y, \vec{u}, 3) = 3y((x + u_1)^2 + 2u_2) - y^3,$$

$$k_2(4; x, y, \vec{u}, 3) = 24y\left(\frac{1}{6}((x + u_1)^3 + 6(x + u_1)u_2) + u_3\right) - 4y^3(x + u_1),$$

$$k_2(5; x, y, \vec{u}, 3) = 120y\left(\frac{1}{24}((x + u_1)^4 + 12(x + u_1)^2 u_2 + 12u_2^2) + (x + u_1)u_3\right) - 10y^3((x + u_1)^2 + 2u_2) + y^5.$$

Mathematica Uygulaması 18 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ ve $\vec{x} = (x + u_1, u_2, u_3, u_4)$ alınarak, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ değerleri için $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$k_2(0; x, y, \vec{u}, 4) = 0,$$

$$k_2(1; x, y, \vec{u}, 4) = y,$$

$$k_2(2; x, y, \vec{u}, 4) = 2y(x + u_1),$$

$$k_2(3; x, y, \vec{u}, 4) = 3y((x + u_1)^2 + 2u_2) - y^3,$$

$$k_2(4; x, y, \vec{u}, 4) = 24y\left(\frac{1}{6}((x + u_1)^3 + 6(x + u_1)u_2) + u_3\right) - 4y^3(x + u_1),$$

$$k_2(5; x, y, \vec{u}, 4) = 120y\left(\frac{1}{24}((x + u_1)^4 + 12(x + u_1)^2 u_2 + 12u_2^2)\right) + 120y((x + u_1)u_3 + u_4) - 10y^3((x + u_1)^2 + 2u_2) + y^5.$$

Mathematica Uygulaması 19. (3.8) denklemi yardımıyla, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 3, 4, 5$ ve $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ durumlarında, x parametresi için rastgele seçilmiş özel aralıkta grafiklerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
Plot[Evaluate[Table[k2[n,x,5,{x+3,5,1},3],{n,0,6}]],{x,-50,50},AxesLabel->{"x",ToString[
  ToExpression["{HoldForm}{{k}_2\\left(n;x,5,\\vec{u},3\\right)"]},TeXForm],TraditionalForm
]],PlotLegends->{ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2\\left(0;x,5,\\vec{u},3\\right)"]},
  TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2\\left(1;x,5,\\vec{u},
  3\\right)"]},TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2\\left(2;
  x,5,\\vec{u},3\\right)"]},TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2\\left(3;x,5,\\vec{u},3\\right)"]},TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2\\left(4;x,5,\\vec{u},3\\right)"]},TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2\\left(5;x,5,\\vec{u},3\\right)"]},TeXForm],TraditionalForm]}
```

```

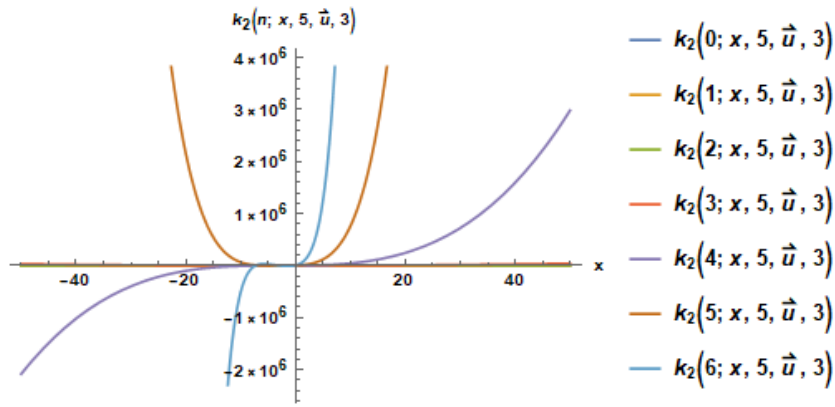
_{2}\left(3;x,5,\vec{u},3\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{
HoldForm}][{k}_{2}\left(4;x,5,\vec{u},3\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[
ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(5;x,5,\vec{u},3\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm
],ToString[ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(6;x,5,\vec{u},3\right)"] ,TeXForm],
TraditionalForm]],LabelStyle -> Directive[Black,Bold]]

2 Plot[Evaluate[Table[k2[n,x,5,{x +3,5,1,8},4],{ n ,0,6}]], {x,-50,50},AxesLabel->{"x",ToString[
ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(n;x,5,\vec{u},4\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm
]],PlotLegends->{ToString[ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(0;x,5,\vec{u},4\right)"] ,
TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(1;x,5,\vec{u}
},4\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(2;
x,5,\vec{u},4\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}][{k}
_{2}\left(3;x,5,\vec{u},4\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{
HoldForm}][{k}_{2}\left(4;x,5,\vec{u},4\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[
ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(5;x,5,\vec{u},4\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm
],ToString[ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(6;x,5,\vec{u},4\right)"] ,TeXForm],
TraditionalForm]],LabelStyle -> Directive[Black,Bold]]

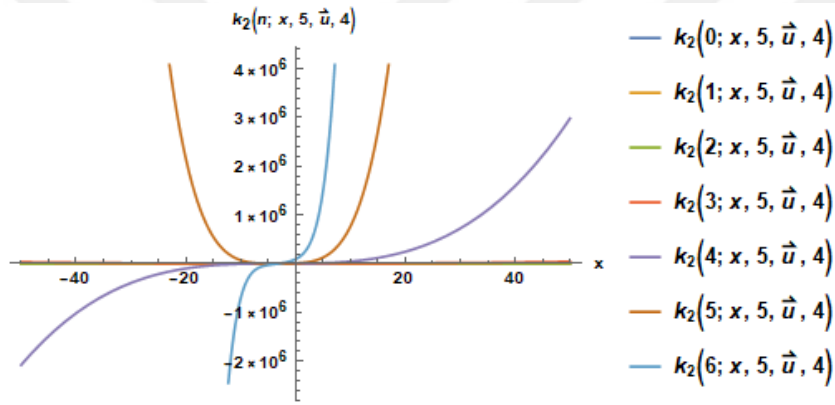
3 Plot[Evaluate[Table[k2[n,x,5,{x +3,5,1,8,2},5],{ n ,0,6}]], {x,-50,50},AxesLabel->{"x",
ToString[ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(n;x,5,\vec{u},5\right)"] ,TeXForm],
TraditionalForm]],PlotLegends->{ToString[ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(0;x,5,\vec{u},5\right)"] ,
TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(1;x,5,\vec{u},5\right)"] ,
TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{
HoldForm}][{k}_{2}\left(2;x,5,\vec{u},5\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm],ToString[
ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(3;x,5,\vec{u},5\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm
],ToString[ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(4;x,5,\vec{u},5\right)"] ,TeXForm],
TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(5;x,5,\vec{u},5\right)"] ,
TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}][{k}_{2}\left(6;x,5,\vec{u}
},5\right)"] ,TeXForm],TraditionalForm]],LabelStyle -> Directive[Black,Bold]]

```

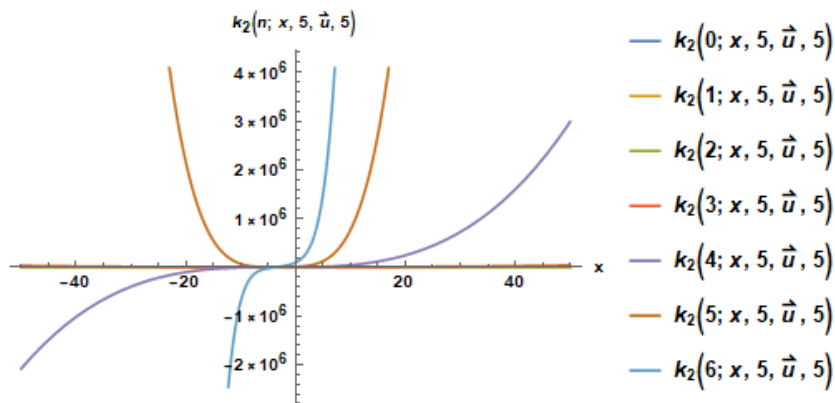
Mathematica Uygulaması 19 yardımıyla, $r = 3$, $\vec{u} = (3, 5, 1)$, $r = 4$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8)$ ve $r = 5$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8, 2)$ olmak üzere, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $x \in [-50, 50]$ ve $y = 5$ değerleri için, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının grafiklerinin çizimleri sırasıyla Şekil 4.19 - Şekil 4.21 ile verilmiştir:



Şekil 4.19. $k_2(n; x, y, \vec{u}, 3)$ polinomlarının grafik çizimleri



Şekil 4.20. $k_2(n; x, y, \vec{u}, 4)$ polinomlarının grafik çizimleri



Şekil 4.21. $k_2(n; x, y, \vec{u}, 5)$ polinomlarının grafik çizimleri

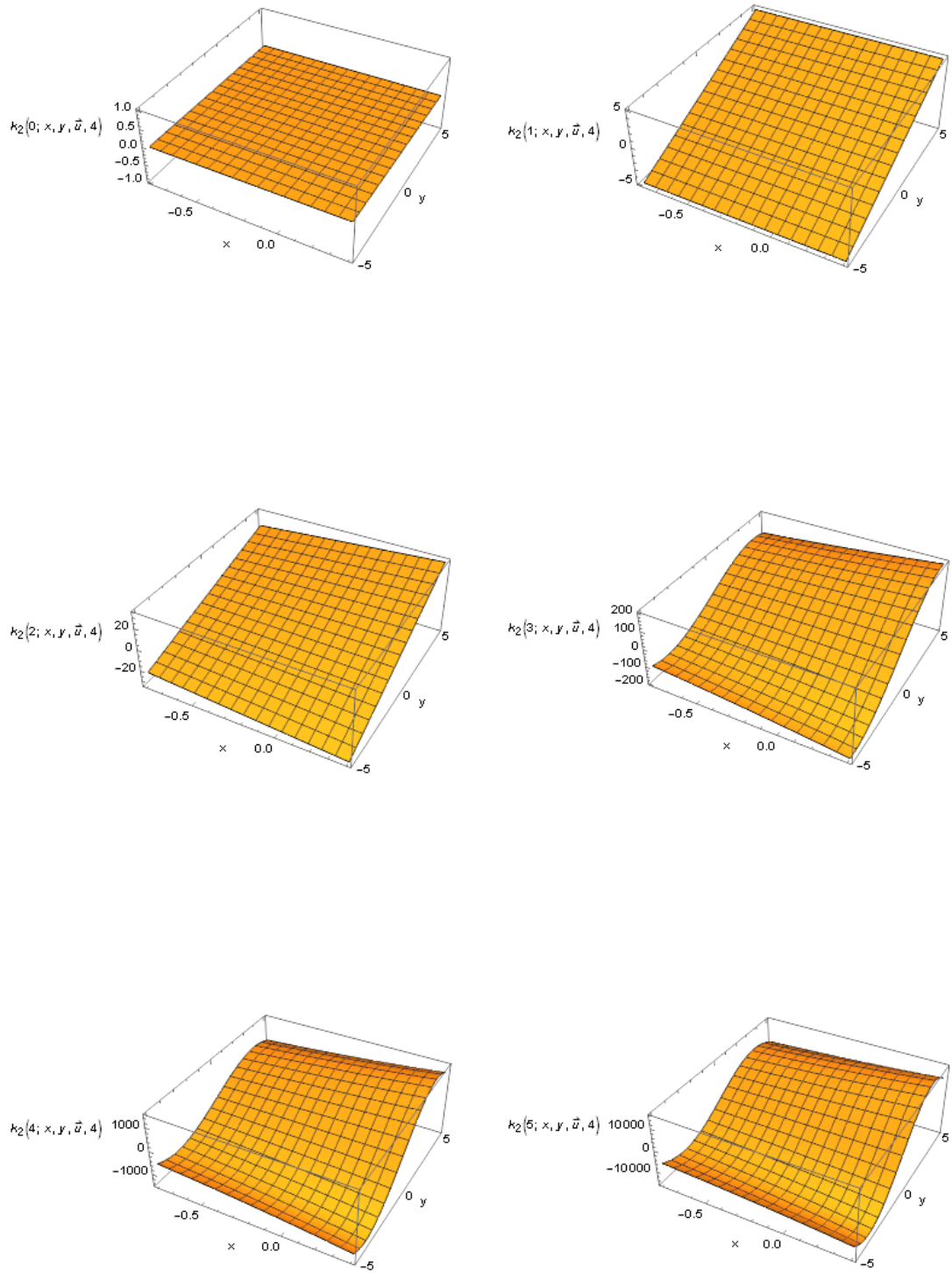
Mathematica Uygulaması 20. (3.8) denklemi yardımıyla, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 4$ ve $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ durumlarında, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 k2P40 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2}\\left(0;x,y,\\vec{u},4\\right)"]],
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
2 k2P41 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2}\\left(1;x,y,\\vec{u},4\\right)"]],
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
3 k2P42 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2}\\left(2;x,y,\\vec{u},4\\right)"]],
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
4 k2P43 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2}\\left(3;x,y,\\vec{u},4\\right)"]],
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
5 k2P44 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2}\\left(4;x,y,\\vec{u},4\\right)"]],
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
6 k2P45 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_2}\\left(5;x,y,\\vec{u},4\\right)"]],
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
7 GraphicsGrid[{{Plot3D[k2[0,x,y,{x+3,5,1,8},4],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",
    k2P40},LabelStyle->Directive[Black,Bold]],Plot3D[k2[1,x,y,{x+3,5,1,8},4],{x,-0.8,0.4},{y
    ,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k2P41},LabelStyle->Directive[Black,Bold]],{Plot3D[k2[2,x,y,{
    x+3,5,1,8},4],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k2P42},LabelStyle->Directive[
    Black,Bold]],Plot3D[k2[3,x,y,{x+3,5,1,8},4],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",
    k2P43},LabelStyle->Directive[Black,Bold]],{Plot3D[k2[4,x,y,{x+3,5,1,8},4],{x,-0.8,0.4},{y
    ,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k2P44},LabelStyle->Directive[Black,Bold]],Plot3D[k2[5,x,y,{x
    +3,5,1,8},4],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k2P45},LabelStyle ->Directive[
    Black,Bold]]}},ImageSize ->800]

```

Mathematica Uygulaması 20 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8)$ olmak üzere, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $x \in [-0.8, 0.4]$, $y \in [-5, 5]$ değerleri için, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri Şekil 4.22 ile verilmiştir:

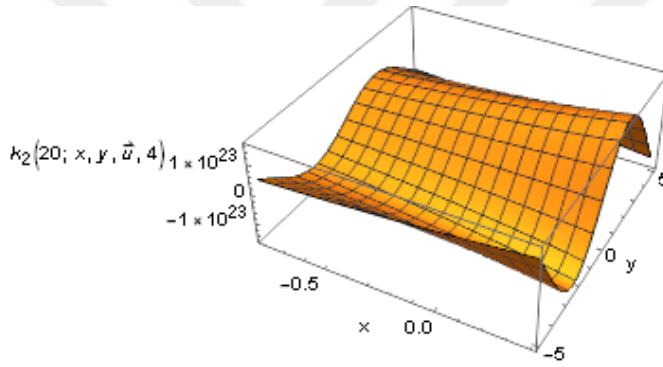


Şekil 4.22. $k_2(n; x, y, \vec{u}, 4)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri

Mathematica Uygulaması 21. (3.8) denklemi yardımıyla, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 4$ ve $n = 20$ durumunda, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
1 k2P420 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}[k_2\\left(20;x,y,\\vec{u},4\\right)"]],
  TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle->None,FrameMargins->9]
2 Plot3D[k2[20,x,y,{x +3,5,1,8},4],{ x,-0.8,0.4},{ y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k2P420},LabelStyle
  ->Directive[Black,Bold]]
```

Mathematica Uygulaması 21 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8)$ olmak üzere, $n = 20$, $x \in [-0.8, 0.4]$, $y \in [-5, 5]$ değerleri için, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi Şekil 4.23 ile verilmiştir. Ayrıca, Şekil 4.23'den de görüleceği üzere, n değeri arttıkça şekilde deformasyonlar oluşmaktadır.

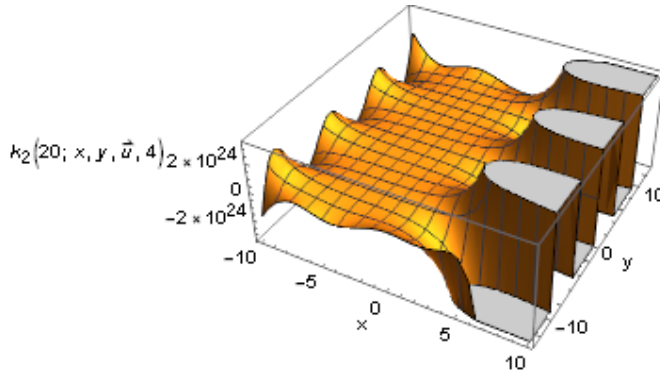


Şekil 4.23. $k_2(20; x, y, \vec{u}, 4)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi

Mathematica Uygulaması 22. (3.8) denklemi yardımıyla, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 4$ ve $n = 20$ durumunda, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
1 Plot3D[k2[20,x,y,{x +3,5,1,8},4],{ x,-10,10},{ y,-13,13},AxesLabel->{"x","y",k2P420},
  LabelStyle->Directive[Black,Bold]]
```

Mathematica Uygulaması 22 yardımıyla, $r = 4$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8)$ olmak üzere, $n = 20$, $x \in [-10, 10]$, $y \in [-13, 13]$ değerleri için, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi Şekil 4.24 ile verilmiştir:



Şekil 4.24. $k_2(20; x, y, \vec{u}, 4)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi

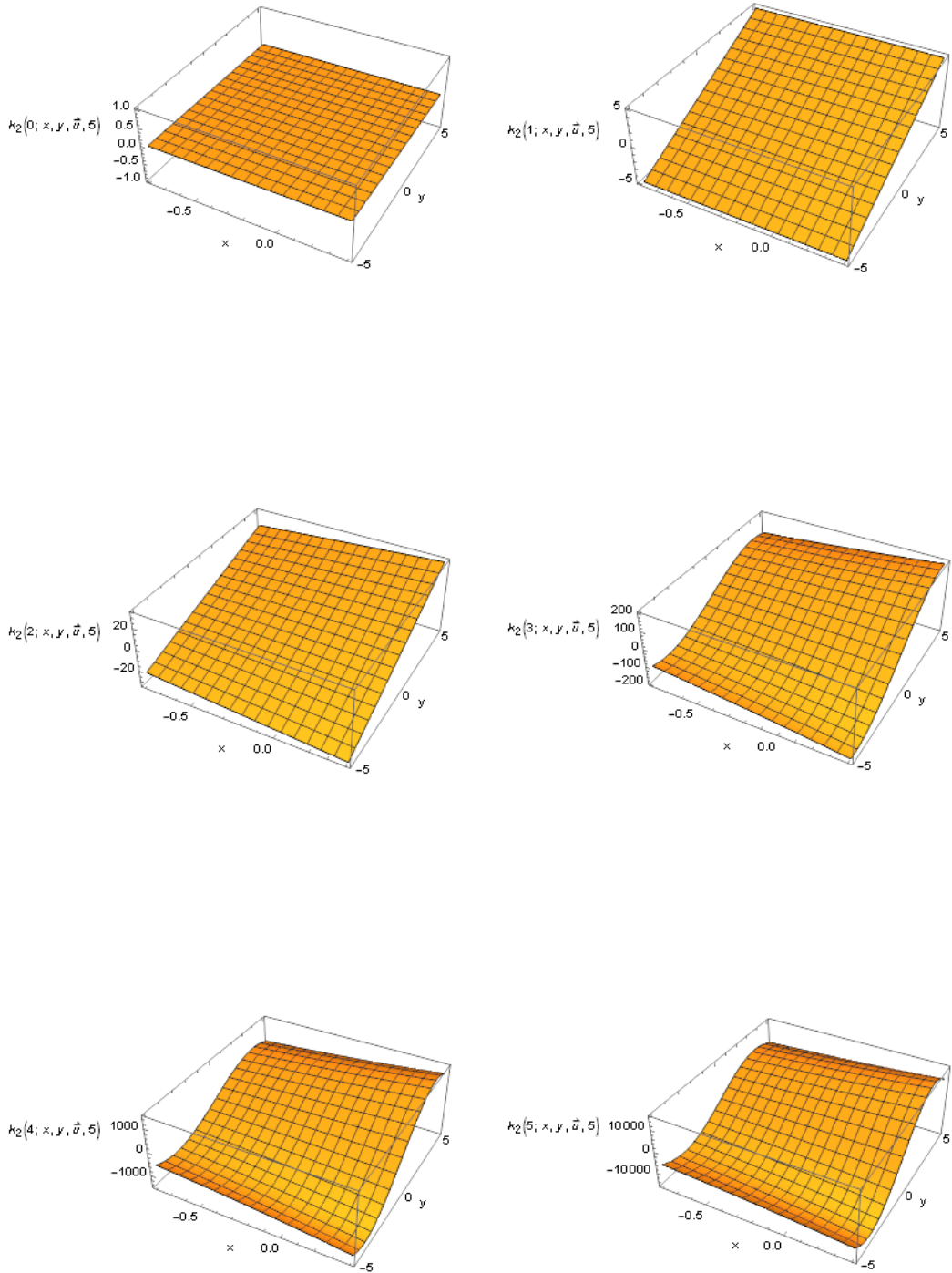
Mathematica Uygulaması 23. (3.8) denklemi yardımıyla, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 5$ ve $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ durumlarında, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 k2P50 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\\left(0;x,y,\\vec{u},5\\right)}"],
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
2 k2P51 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\\left(1;x,y,\\vec{u},5\\right)}"],
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
3 k2P52 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\\left(2;x,y,\\vec{u},5\\right)}"],
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
4 k2P53 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\\left(3;x,y,\\vec{u},5\\right)}"],
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
5 k2P54 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\\left(4;x,y,\\vec{u},5\\right)}"],
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
6 k2P55 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\\left(5;x,y,\\vec{u},5\\right)}"],
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
7 GraphicsGrid[{{Plot3D[k2[0,x,y,{x +3,5,1,8,2},5],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",
    k2P50},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],Plot3D[k2[1,x,y,{x+3,5,1,8,2},5],{x,-0.8,0.4},
    {y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k2P51},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],{Plot3D[k2[2,
    x,y,{x +3,5,1,8,2},5],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k2P52},LabelStyle ->
    Directive[Black,Bold]],Plot3D[k2[3,x,y,{x+3,5,1,8,2},5],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->
    {"x","y",k2P53},LabelStyle-> Directive[Black,Bold]],{Plot3D[k2[4,x,y,{x+3,5,1,8,2},5],{x
    ,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k2P54},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],
    Plot3D[k2[5,x,y,{x+3,5,1,8,2},5],{x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k2P55},
    LabelStyle ->Directive[Black,Bold]]}],ImageSize ->800]

```

Mathematica Uygulaması 20 yardımıyla, $r = 5$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8, 2)$ olmak üzere, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $x \in [-0.8, 0.4]$, $y \in [-5, 5]$ değerleri için, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri Şekil 4.25 ile verilmiştir:

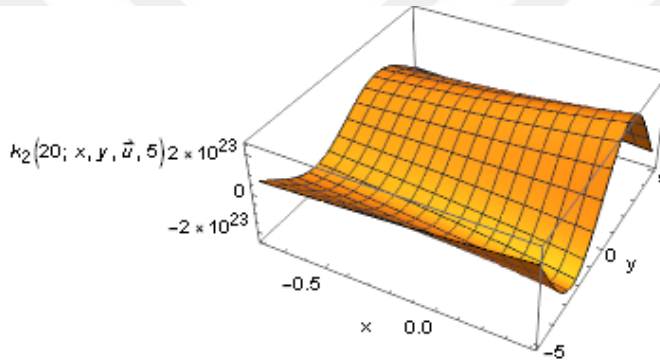


Şekil 4.25. $k_2(n; x, y, \vec{u}, 5)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri

Mathematica Uygulaması 24. (3.8) denklemi yardımıyla, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 5$ ve $n = 20$ durumunda, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
1 k2P520 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{k}_{2}\\left(20;x,y,\\vec{u},5\\right)"}],
    TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins-> 9]
2 Plot3D[k2[20,x,y,{x +3,5,1,8,2},5],{ x,-0.8,0.4},{y,-5,5},AxesLabel->{"x","y",k2P520},
    LabelStyle -> Directive[Black,Bold]]
```

Mathematica Uygulaması 24 yardımıyla, $r = 5$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8, 2)$ olmak üzere, $n = 20$, $x \in [-0.8, 0.4]$, $y \in [-5, 5]$ değerleri için, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi Şekil 4.26 ile verilmiştir:

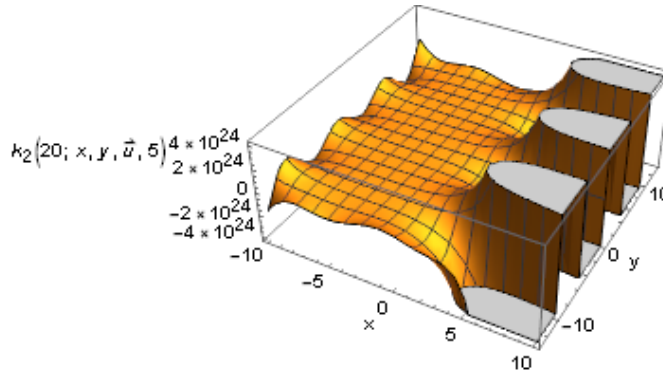


Şekil 4.26. $k_2(20; x, y, \vec{u}, 5)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi

Mathematica Uygulaması 25. (3.8) denklemi yardımıyla, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının $r = 5$ ve $n = 20$ durumunda, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
1 Plot3D[k2[20,x,y,{x +3,5,1,8,2},5],{ x,-10,10},{y,-13,13},AxesLabel->{"x","y",k2P520},
    LabelStyle->Directive[Black,Bold]]
```

Mathematica Uygulaması 25 yardımıyla, $r = 5$, $\vec{u} = (3, 5, 1, 8, 2)$ olmak üzere, $n = 20$, $x \in [-10, 10]$, $y \in [-13, 13]$ değerleri için, $k_2(n; x, y, \vec{u}, r)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi Şekil 4.27 ile verilmiştir:



Şekil 4.27. $k_2(20; x, y, \vec{u}, 5)$ polinomlarının yüzeyinin çizimi

4.6. r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson Tipli Yüksek Mertebeden Fubini Polinomları İçin Mathematica Kodları ve Bunların Uygulamaları

Bu bölümde, (3.19) ve (3.33) bağıntılarında tanımlanan r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinomlar ailesinin üreteç fonksiyonlarından yararlanarak, r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli yüksek mertebeden Fubini polinomlarının değerleri Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak hesaplanmıştır. Ayrıca, bu kodlar kullanılarak, bu polinom ailelerinin yüzeyleri çizilmiştir.

4.6.1. ${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomları için Mathematica kodları ve uygulamaları

Bu alt bölümde, (3.23) denklemi Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, r -parametrelili Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Fubini polinomlarının hem değerleri hesaplanmış hem de yüzeyleri çizilmiştir. Ayrıca, yüksek mertebeden iki parametrelili kosinüs-Fubini tipli polinomların ve yüksek mertebeden Fubini tipli sayıların değerlerini hesaplayan Mathematica kodları da verilmiştir.

Mathematica Uygulaması 26. (2.57), (2.61) ve (2.62) denklemleri yardımıyla, yüksek mertebeden Fubini tipli sayıların değerlerini hesaplayan Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```
1 Unprotect[Power];
```

```

2 Power[0,0] = 1;
3 Protect[Power];
4 w[n_]:=Sum[StirlingS2[n,j]*Factorial[j ],{ j ,0,n }];
5 a[n_]:=Return[2*Sum[Binomial[n,j]w[j]*w[n-j],{j,0,n }]];
6 a[n_,k_]:= ( If [k==1,a[n], If [k>1,Return[Sum[Binomial[n,j]*a[j]*a[n-j,k-1],{j,0,n }]]] ) ;
7 FubiniTypeS[m_] := Table[a[n,k], {n,0,m}, {k,1,m}]
8 TableForm[FubiniTypeS[5],TableHeadings \[RightArrow] {{Superscript["\[(*SubscriptBox[a,0])\"
", Row[{"(", "k", ")"} ]], Superscript["\[(* SubscriptBox[a,1])", Row[{"(", "k", ")"} ]],
Superscript["\[(* SubscriptBox[a,2])", Row[{"(", "k", ")"} ]], Superscript["\[(*
SubscriptBox[a,2])", Row[{"(", "k", ")"} ]], Superscript["\[(* SubscriptBox[a,3])", Row
[{"(", "k", ")"} ]], Superscript["\[(* SubscriptBox[a,4])", Row[{"(", "k", ")"} ]],
Superscript["\[(* SubscriptBox[a,5])", Row[{"(", "k", ")"} ]],{ "k=1", "k=2", "k=3", "k
=4", "k=5"}]}

```

Mathematica Uygulaması 26 yardımıyla, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ değerleri için yüksek mertebeden Fubini tipli sayıların değerlerinin hesaplamaları Çizelge 4.13 ile verilmiştir:

Çizelge 4.13. $a_n^{(k)}$ için bazı sayısal değerler

$n \setminus k$	1	2	3	4	5
0	2	4	8	16	32
1	4	16	48	128	320
2	16	96	384	1280	3840
3	88	736	3744	15104	53120
4	616	6816	42720	204032	827520
5	5224	73696	556128	3093248	14288000

Mathematica Uygulaması 27. (2.115) denklemi yardımıyla, yüksek mertebeden iki parametrelili Fubini tipli polinomların değerlerini hesaplayan Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 c[n_,x_,y_]:= Sum[(-1)^j*Binomial[n, 2*j]*x^(n-2*j)*y^(2*j), { j ,0,Floor[n /2]};
2 ac[n_,x_,y_,k_]:=Sum[Binomial[n,j]*a[j,k]*c[n-j,x,y ],{ j ,0,n }];
3 TableForm[Table[ac[n,x,y,1],{n,0,5}], TableHeadings->{{ToString[ToExpression["{HoldForm
{a}_{0}^{c,1}\left(x,y\right)"]],TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{

```


polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 a_0^{(c,2)}(x, y) &= 4, \\
 a_1^{(c,2)}(x, y) &= 16 + 4x, \\
 a_2^{(c,2)}(x, y) &= 96 + 32x + 4(x^2 - y^2), \\
 a_3^{(c,2)}(x, y) &= 736 + 288x + 48(x^2 - y^2) + 4(x^3 - 3xy^2), \\
 a_4^{(c,2)}(x, y) &= 6816 + 2944x + 576(x^2 - y^2) + 64(x^3 - 3xy^2) + 4(x^4 - 6x^2y^2 + y^4), \\
 a_5^{(c,2)}(x, y) &= 73696 + 34080x + 7360(x^2 - y^2) + 960(x^3 - 3xy^2) \\
 &\quad + 80(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + 4(x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4).
 \end{aligned}$$

Şimdi de, (3.19) bağıntısında $b = 0$ ve

$$f(t, 1) = \frac{2}{(\exp(t) - 2)^2}$$

alınarak, r -parametrelili Hermite-tabanlı kosinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Fubini polinomlar ailesi için aşağıdaki uygulamaları verelim:

Mathematica Uygulaması 28. (3.23) denklemi yardımıyla, ${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının $r = 2$ ve $r = 3$ durumlarında değerlerini hesaplayan Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 g[n_,Uvect_]:=Return[Sum[Factorial[n]*((Uvect[[1]]^(n-2*s)*Uvect[[2]]^s)/(Factorial[s]*
   Factorial[n-2*s])),{s,0,Floor[n/2]}]];
2 H[n_,Uvect_,r_]:= (If[r==2,g[n,Uvect],If[r>2,Return[Factorial[n]*Sum[(((Uvect[[r]]^(j)))*(H[n
   -r*j,Uvect,r-1]))/(Factorial[j]*Factorial[n-r*j]),{j,0,Floor[n/r]}]]];
3 HermiteFubini[n_,x_,y_,z_,Uvect_,r_]:=2*Sum[Binomial[n,j]*ac[j,x,y,z]*H[n-j,Uvect,r],{j,0,n}];
4 Simplify[Table[HermiteFubini[n,x,y,1,Table[Subscript[ToString[u],ToString[i]],{i,1,2}],2],{n
   ,0,5}]]
5 Simplify[Table[HermiteFubini[n,x,y,2,Table[Subscript[ToString[u],ToString[i]],{i,1,2}],2],{n
   ,0,5}]]
6 Simplify[Table[HermiteFubini[n,x,y,1,Table[Subscript[ToString[u],ToString[i]],{i,1,3}],3],{n
   ,0,5}]]
7 Simplify[Table[HermiteFubini[n,x,y,2,Table[Subscript[ToString[u],ToString[i]],{i,1,3}],3],{n
   ,0,5}]]

```

Mathematica Uygulaması 28 yardımıyla, $z = 1$, $r = 2$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ve $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere, ${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$${}_F\mathfrak{h}_1(0, x, y, 1; \vec{u}, 2, 1) = 4,$$

$${}_F\mathfrak{h}_1(1, x, y, 1; \vec{u}, 2, 1) = 4(2 + x + u_1),$$

$${}_F\mathfrak{h}_1(2, x, y, 1; \vec{u}, 2, 1) = 4(8 + 4x + x^2 - y^2 + 2(2 + x)u_1 + u_1^2 + 2u_2),$$

$$\begin{aligned} {}_F\mathfrak{h}_1(3, x, y, 1; \vec{u}, 2, 1) = & 4(44 + 24x + 6x^2 + x^3 - 6y^2 - 3xy^2 + 3(2 + x)u_1^2 \\ & + 4u_1^3 + 24(2 + x)u_2 + 12u_1(8 + 4x + x^2 - y^2 + 2u_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_F\mathfrak{h}_1(4, x, y, 1; \vec{u}, 2, 1) = & 4(308 + 176x + x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 48(x^2 - y^2)) \\ & + 32(x^3 - 3xy^2) + 4(u_1^4 + 12u_1^2u_2 + 12u_2^2) \\ & + 16(44 + 6x^2 + x^3 - 6y^2 - 3x(-8 + y^2))u_1 \\ & + 24(8 + 4x + x^2 - y^2)(u_1^2 + 2u_2) \\ & + 16(2 + x)(u_1^3 + 6u_1u_2), \\ {}_F\mathfrak{h}_1(5, x, y, 1; \vec{u}, 2, 1) = & 4(2612 + 1540x + x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + 440(x^2 - y^2)) \\ & + 320(x^3 - 3xy^2) + 40(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \\ & + 20(308 + x^3 + x^4 - 48^2 + y^4 - 6x^2(-8 + y^2))u_1 \\ & - 160x(-22 + 3y^2)u_1 + 4u_1^5 + 80u_1^3u_2 + 240u_1u_2^2 \\ & + 40(44 + 6x^2 + x^3 - 6y^2 - 3x(-8 + y^2))(u_1^2 + 2u_2) \\ & + 40(8 + 4x + x^2 - y^2)(u_1^3 + 6u_1u_2) \\ & + 20(2 + x)(u_1^4 + 12u_1^2u_2 + 12u_2^2). \end{aligned}$$

Mathematica Uygulaması 28 yardımıyla, $z = 2$, $r = 2$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ve $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere, ${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$${}_F\mathfrak{h}_1(0, x, y, 2; \vec{u}, 2, 1) = 8,$$

$${}_F\mathfrak{h}_1(1, x, y, 2; \vec{u}, 2, 1) = 8(4 + x + u_1),$$

$${}_F\mathfrak{h}_1(2, x, y, 2; \vec{u}, 2, 1) = 8(24 + 8x + x^2 - y^2 + 2(4 + x)u_1 + u_1^2 + 2u_2),$$

$$\begin{aligned} {}_F\mathfrak{h}_1(3, x, y, 2; \vec{u}, 2, 1) = & 8(184 + 72x + 12x^2 + x^3 - 12y^2 - 3xy^2 + 3(4 + x)u_1^2 \\ & + 8u_1^3 + 48(4 + x)u_2 + 24u_1(24 + 8x + x^2 - y^2 + 2u_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_F\mathfrak{h}_1(4, x, y, 2; \vec{u}, 2, 1) = & 8(1704 + 736x + x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 144(x^2 - y^2)) \\
& + 128(x^3 - 3xy^2) + 32(184 + 12x^2 + x^3 - 12y^2)u_1 \\
& - 96x(-24 + y^2)u_1 + 8(u_1^4 + 12u_1^2u_2 + 12u_2^2) \\
& + 48(24 + 8x + x^2 - y^2)(u_1^2 + 2u_2) \\
& + 32(4 + x)(u_1^3 + 6u_1u_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_F\mathfrak{h}_1(5, x, y, 2; \vec{u}, 2, 1) = & 8(18424 + 8520x + x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + 1840(x^2 - y^2)) \\
& + 1920(x^3 - 3xy^2) + 160(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \\
& + 40(1704 + 16x^3 + x^4 - 144y^2 + y^4)u_1 + 29440xu_1 \\
& - 1920xy^2u_1 - 240x^2(-24 + y^2)u_1 + 8u_1^5 + 160u_1^3u_2 \\
& + 80(184 + 12x^2 + x^3 - 12y^2 - 3x(-24 + y^2))(u_1^2 + 2u_2) \\
& + 80(24 + 8x + x^2 - y^2)(u_1^3 + 6u_1u_2) + 480u_1u_2^2 \\
& + 40(4 + x)(u_1^4 + 12u_1^2u_2 + 12u_2^2).
\end{aligned}$$

Mathematica Uygulaması 28 yardımıyla, $z = 1$, $r = 3$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere, ${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned}
{}_F\mathfrak{h}_1(0, x, y, 1; \vec{u}, 3, 1) &= 4, \\
{}_F\mathfrak{h}_1(1, x, y, 1; \vec{u}, 3, 1) &= 4(2 + x + u_1), \\
{}_F\mathfrak{h}_1(2, x, y, 1; \vec{u}, 3, 1) &= 4(8 + 4x + x^2 - y^2 + 2(2 + x)u_1 + u_1^2 + 2u_2), \\
{}_F\mathfrak{h}_1(3, x, y, 1; \vec{u}, 3, 1) &= 4(44 + 24x + 6x^2 + x^3 - 6y^2 - 3xy^2 + 3(2 + x)u_1^2 + u_1^3) \\
&+ 24(2 + x)u_2 + 12u_1(8 + 4x + x^2 - y^2 + 2u_2) + 24u_3, \\
{}_F\mathfrak{h}_1(4, x, y, 1; \vec{u}, 3, 1) &= 4(308 + 176x + x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 48(x^2 - y^2)) \\
&+ 32(x^3 - 3xy^2) + 16(44 + 6x^2 + x^3 - 6y^2)u_1 \\
&- 48x(-8 + y^2)u_1 + 4(u_1^4 + 12u_1^2u_2 + 12u_2^2) \\
&+ 24(8 + 4x + x^2 - y^2)(u_1^2 + 2u_2) + 96u_1u_3 \\
&+ 16(2 + x)(u_1^3 + 6u_1u_2 + 6u_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_F\mathfrak{h}_1(5, x, y, 1; \vec{u}, 3, 1) = & 4(2612 + 1540x + x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + 440(x^2 - y^2)) \\
& + 320(x^3 - 3y^2) + 40(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \\
& + 20(308 + 8x^3 + x^4 - 48y^2 + y^4 - 6x^2(-8 + y^2))u_1 \\
& - 160x(-22 + 3y^2)u_1 + 4u_1^5 + 80u_1^3u_2 + 240u_1u_2^2 \\
& + 40(44 + 6x^2 + x^3 - 6y^2 - 3x(-8 + y^2))(u_1^2 + 2u_2) \\
& + 240u_1^2u_3 + 480u_2u_3 \\
& + 40(8 + 4x + x^2 - y^2)(u_1^3 + 6u_1u_2 + 6u_3) \\
& + 20(2 + x)(u_1^4 + 12u_1^2u_2 + 12u_2^2 + 24u_1u_3).
\end{aligned}$$

Mathematica Uygulaması 28 yardımıyla, $z = 2$, $r = 3$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere, ${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$${}_F\mathfrak{h}_1(0, x, y, 2; \vec{u}, 3, 1) = 8,$$

$${}_F\mathfrak{h}_1(1, x, y, 2; \vec{u}, 3, 1) = 8(4 + x + u_1),$$

$${}_F\mathfrak{h}_1(2, x, y, 2; \vec{u}, 3, 1) = 8(24 + 8x + x^2 - y^2 + 2(4 + x)u_1 + u_1^2 + 2u_2),$$

$$\begin{aligned}
{}_F\mathfrak{h}_1(3, x, y, 2; \vec{u}, 3, 1) = & 8(184 + 72x + 12x^2 + x^3 - 12y^2 - 3xy^2 + 3(4 + x)u_1) \\
& + 8u_1^3 + 48(4 + x)u_2 + 24u_1(24 + 8x + x^2 - y^2 + 2u_2) \\
& + 48u_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_F\mathfrak{h}_1(4, x, y, 2; \vec{u}, 3, 1) = & 8(1704 + 736x + x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 144(x^2 - y^2)) \\
& + 128(x^3 - 3xy^2) + 32(184 + 12x^2 + x^3 - 12y^2)u_1 \\
& - 96x(-24 + y^2)u_1 + 8(u_1^4 + 12u_1^2u_2 + 12u_2^2) \\
& + 48(24 + 8x + x^2 - y^2)(u_1^2 + 2u_2) \\
& + 192u_1u_3 + 32(4 + x)(u_1^3 + 6u_1u_2 + 6u_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_F\mathfrak{h}_1(5, x, y, 2; \vec{u}, 3, 1) = & 8(18424 + 8520x + x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + 1840(x^2 - y^2)) \\
& + 1920(x^3 - 3y^2) + 160(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \\
& + 40(1704 + 16x^3 + x^4 - 144y^2 + y^4 + x(736 - 48y^2))u_1 \\
& - 240x^2(-24 + y^2)u_1 + 8u_1^5 + 160u_1^3u_2 + 480u_1u_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +80(184 + 12x^2 + x^3 - 12y^2 - 3x(-24 + y^2))(u_1^2 + 2u_2) \\
& +480u_1^2u_3 + 960u_2u_3 \\
& +80(24 + 8x + x^2 - y^2)(u_1^3 + 6u_1u_2 + 6u_3) \\
& +40(4 + x)(u_1^4 + 12u_1^2u_2 + 12u_2^2 + 24u_1u_3).
\end{aligned}$$

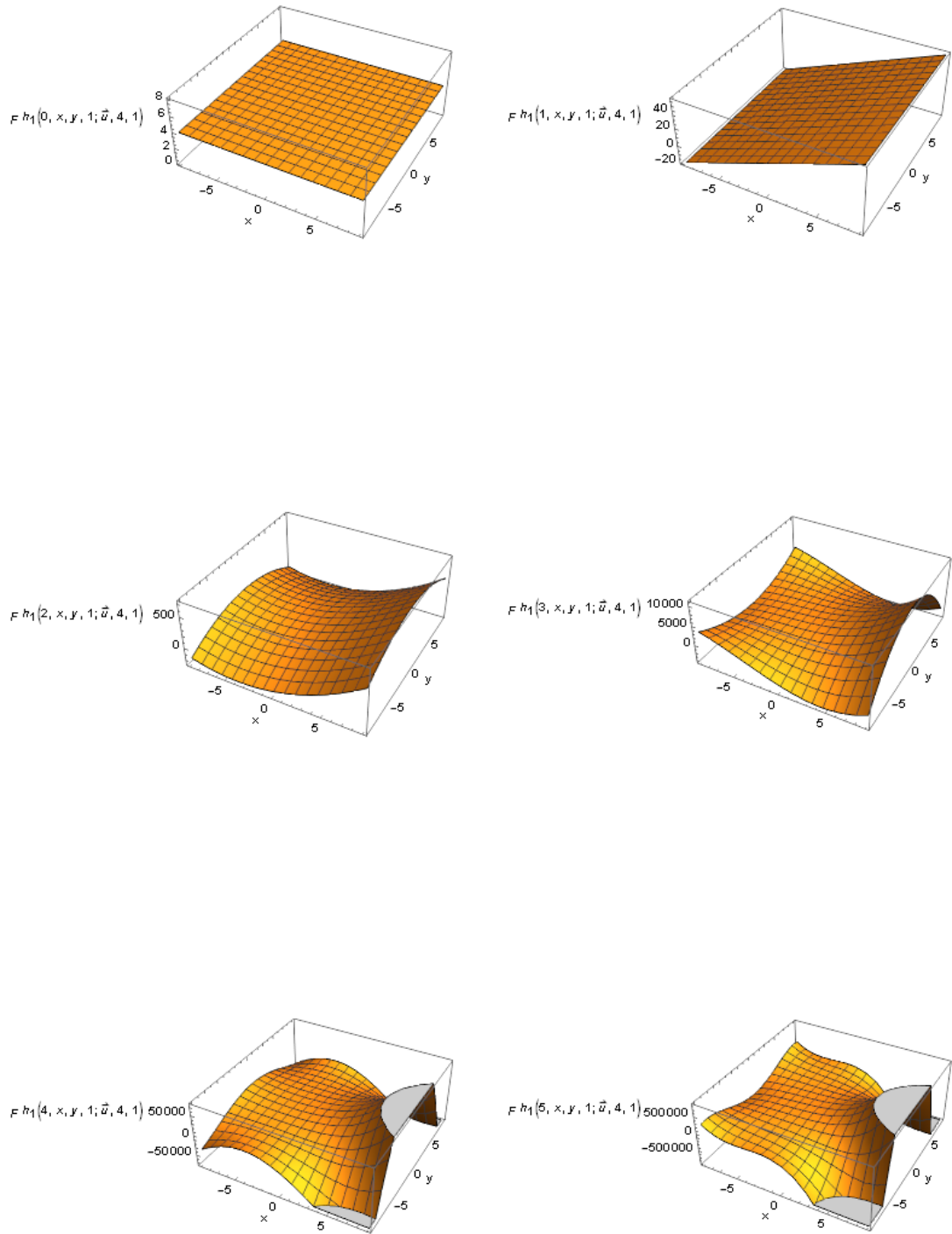
Mathematica Uygulaması 29. (3.23) denklemi yardımıyla, ${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının $r = 4$ ve $z = 1$ durumunda, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 hf1P40 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\mathfrak{h}_1\left(0,x,y,1;\vec{u}\right)"}],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins ->9]
2 hf1P41 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\mathfrak{h}_1\left(1,x,y,1;\vec{u}\right)"}],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins ->9]
3 hf1P42 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\mathfrak{h}_1\left(2,x,y,1;\vec{u}\right)"}],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins ->9]
4 hf1P43 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\mathfrak{h}_1\left(3,x,y,1;\vec{u}\right)"}],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins ->9]
5 hf1P44 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\mathfrak{h}_1\left(4,x,y,1;\vec{u}\right)"}],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins ->9]
6 hf1P45 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\mathfrak{h}_1\left(5,x,y,1;\vec{u}\right)"}],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins ->9]
7 GraphicsGrid[{{Plot3D[HermiteFubini[0,x,y,1,{2,5,-3,7},4],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x",
"y",hf1P40},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],Plot3D[HermiteFubini[1,x,y
,1,{2,5,-3,7},4],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf1P41},LabelStyle -> Directive[
Black,Bold]],{Plot3D[HermiteFubini[2,x,y,1,{2,5,-3,7},4],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"
x","y",hf1P42},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],Plot3D[HermiteFubini[3,x,y
,1,{2,5,-3,7},4],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf1P43},LabelStyle -> Directive[
Black,Bold]],{Plot3D[HermiteFubini[4,x,y,1,{2,5,-3,7},4],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"
x","y",hf1P44},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],Plot3D[HermiteFubini[5,x,y
,1,{2,5,-3,7},4],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf1P45},LabelStyle -> Directive[
Black,Bold]]}},ImageSize ->800]

```

Mathematica Uygulaması 29 yardımıyla, $z = 1$ ve $r = 4$, $\vec{u} = (2, 5, -3, 7)$ olmak üzere, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $x \in [-9, 9]$, $y \in [-9, 9]$ değerleri için, ${}_F\mathfrak{h}_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri Şekil 4.28 ile verilmiştir:



Şekil 4.28. $Fh_1(n, x, y, 1; \vec{u}, 4, 1)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri

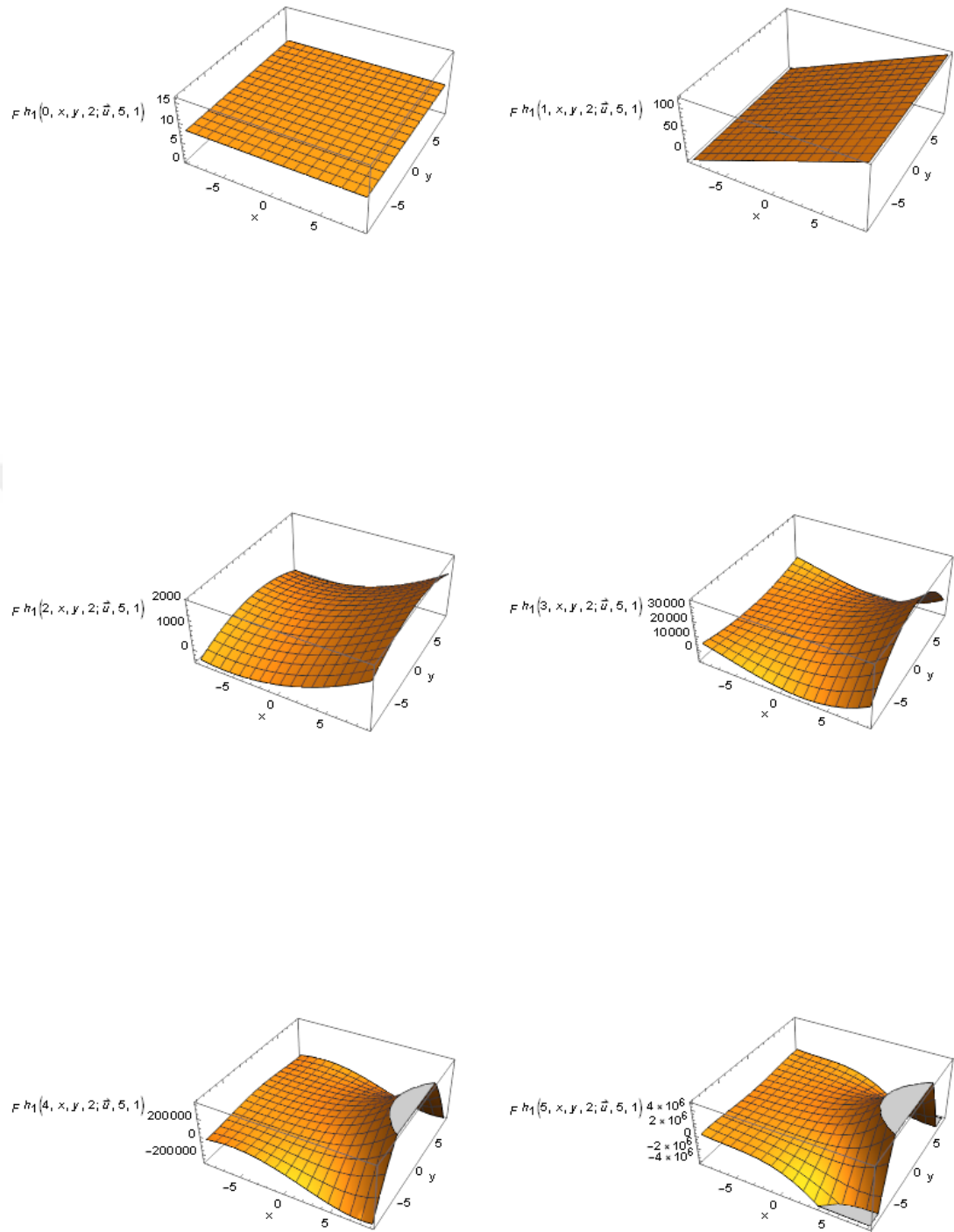
Mathematica Uygulaması 30. (3.23) denklemi yardımıyla, ${}_Fh_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının $r = 5$ ve $z = 2$ durumunda, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 hf1P50 =Framed[ToStringToExpression["{HoldForm}{{_F}\\mathfrak{h}_{1}\\left(0,x,y,2;\\vec{
    u\\right)}"] ,TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins ->9]
2 hf1P51 =Framed[ToStringToExpression["{HoldForm}{{_F}\\mathfrak{h}_{1}\\left(1,x,y,2;\\vec{
    u\\right)}"] ,TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
3 hf1P52 =Framed[ToStringToExpression["{HoldForm}{{_F}\\mathfrak{h}_{1}\\left(2,x,y,2;\\vec{
    u\\right)}"] ,TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
4 hf1P53 =Framed[ToStringToExpression["{HoldForm}{{_F}\\mathfrak{h}_{1}\\left(3,x,y,2;\\vec{
    u\\right)}"] ,TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
5 hf1P54 =Framed[ToStringToExpression["{HoldForm}{{_F}\\mathfrak{h}_{1}\\left(4,x,y,2;\\vec{
    u\\right)}"] ,TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
6 hf1P55 =Framed[ToStringToExpression["{HoldForm}{{_F}\\mathfrak{h}_{1}\\left(5,x,y,2;\\vec{
    u\\right)}"] ,TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
7 GraphicsGrid[{{Plot3D[HermiteFubini[0,x,y,2,{2,5,-3,7,8},5],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x
    ","y",hf1P50},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],Plot3D[HermiteFubini[1,x,y
    ,2,{2,5,-3,7,8},5],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf1P51},LabelStyle -> Directive[
    Black,Bold]],{Plot3D[HermiteFubini[2,x,y,2,{2,5,-3,7,8},5],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel
    ->{"x","y",hf1P52},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],Plot3D[HermiteFubini[3,x,y
    ,2,{2,5,-3,7,8},5],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf1P53},LabelStyle -> Directive[
    Black,Bold]],{Plot3D[HermiteFubini[4,x,y,2,{2,5,-3,7,8},5],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel
    ->{"x","y",hf1P54},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],Plot3D[HermiteFubini[5,x,y
    ,2,{2,5,-3,7,8},5],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf1P55},LabelStyle -> Directive[
    Black,Bold]]}},ImageSize ->800]

```

Mathematica Uygulaması 30 yardımıyla, $z = 2$ ve $r = 5$, $\vec{u} = (2, 5, -3, 7, 8)$ olmak üzere, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $x \in [-9, 9]$, $y \in [-9, 9]$ değerleri için, ${}_Fh_1(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri Şekil 4.29 ile verilmiştir:



Şekil 4.29. $Fh_1(n, x, y, 2; \vec{u}, 5, 1)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri

4.6.2. $Fh_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomları için Mathematica kodları ve uygulamaları

Bu alt bölümde, (3.37) denklemi Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanarak, r -parametrelili Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Fubini polinomlarının hem değerleri hesaplanmış hem de yüzeyleri çizilmiştir. Ayrıca, yüksek mertebeden iki parametrelili sinüs-Fubini tipli polinomların değerlerini hesaplayan Mathematica kodları da verilmiştir.

Mathematica Uygulaması 31. (2.116) denklemi yardımıyla, yüksek mertebeden iki parametrelili Fubini tipli polinomların değerlerini hesaplayan Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 s[n_,x_,y_]:=Sum[(-1)^j*Binomial[n,2*j+1]*x^(n-1-2*j)*y^(2*j+1),{j,0,Floor[(n-1)/2]];
2 as[n_,x_,y_,k_]:=Sum[Binomial[n,i]*a[j,k]*s[n-j,x,y],{j,0,n}];
3 TableForm[Table[as[n,x,y,1],{n,0,5}],TableHeadings->{{ToString[ToExpression["{HoldForm
  {{a}_{0}^{s,1}\\left(x,y\\right)"}",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{
  HoldForm}{{a}_{1}^{s,1}\\left(x,y\\right)"}",TeXForm],TraditionalForm],ToString[
  ToExpression["{HoldForm}{{a}_{2}^{s,1}\\left(x,y\\right)"}",TeXForm],TraditionalForm],
  ToString[ToExpression["{HoldForm}{{a}_{3}^{s,1}\\left(x,y\\right)"}",TeXForm],
  TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{a}_{4}^{s,1}\\left(x,y\\right)"}",
  TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{a}_{5}^{s,1}\\left(x,y\\
  right)"}",TeXForm],TraditionalForm]]}]
4 TableForm[Table[as[n,x,y,2],{n,0,5}],TableHeadings->{{ToString[ToExpression["{HoldForm
  {{a}_{0}^{s,2}\\left(x,y\\right)"}",TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{
  HoldForm}{{a}_{1}^{s,2}\\left(x,y\\right)"}",TeXForm],TraditionalForm],ToString[
  ToExpression["{HoldForm}{{a}_{2}^{s,2}\\left(x,y\\right)"}",TeXForm],TraditionalForm],
  ToString[ToExpression["{HoldForm}{{a}_{3}^{s,2}\\left(x,y\\right)"}",TeXForm],
  TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{a}_{4}^{s,2}\\left(x,y\\right)"}",
  TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{a}_{5}^{s,2}\\left(x,y\\
  right)"}",TeXForm],TraditionalForm]]}]

```

Mathematica Uygulaması 31 yardımıyla, $k = 1$ alınarak, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ değerleri için $a_n^{(s,k)}(x, y)$ ile gösterilen yüksek mertebeden iki parametrelili sinüs-Fubini tipli

polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 a_0^{(s,1)}(x, y) &= 0, \\
 a_1^{(s,1)}(x, y) &= 2y, \\
 a_2^{(s,1)}(x, y) &= 8y + 4xy, \\
 a_3^{(s,1)}(x, y) &= 48y + 24xy + 2(3x^2y - y^3), \\
 a_4^{(s,1)}(x, y) &= 352y + 192xy + 16(3x^2y - y^3) + 2(4x^3y - 4xy^3), \\
 a_5^{(s,1)}(x, y) &= 3080y + 1760xy + 160(3x^2y - y^3) + 20(4x^3y - 4xy^3) \\
 &\quad + 2(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5).
 \end{aligned}$$

Mathematica Uygulaması 31 yardımıyla, $k = 1$ alınarak, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ değerleri için $a_n^{(s,k)}(x, y)$ ile gösterilen yüksek mertebeden iki parametrelili sinüs-Fubini tipli polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 a_0^{(s,2)}(x, y) &= 0, \\
 a_1^{(s,2)}(x, y) &= 4y, \\
 a_2^{(s,2)}(x, y) &= 32y + 8xy, \\
 a_3^{(s,2)}(x, y) &= 288y + 96xy + 4(3x^2y - y^3), \\
 a_4^{(s,2)}(x, y) &= 2944y + 1152xy + 64(3x^2y - y^3) + 4(4x^3y - 4xy^3), \\
 a_5^{(s,2)}(x, y) &= 34080y + 14720xy + 960(3x^2y - y^3) + 80(4x^3y - 4xy^3) \\
 &\quad + 4(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5).
 \end{aligned}$$

Şimdi de, (3.33) bağıntısında $b = 0$ ve

$$f(t, 1) = \frac{2}{(\exp(t) - 2)^2}$$

alınarak, r -parametrelili Hermite-tabanlı sinüs-Milne-Thomson tipli z . mertebeden Fubini polinomlar ailesi için aşağıdaki uygulamaları verelim:

Mathematica Uygulaması 32. (3.37) denklemi yardımıyla, $r = 2$ ve $r = 3$ için ${}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının değerlerini hesaplayan Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 HermiteFubiniS[n_,x_,y_,z_,Uvect_,r_]:=2*Sum[Binomial[n,j]*as[j,x,y,z]*H[n-j,Uvect,r],{j,0,n}];

```

- 2 **Simplify**[Table[HermiteFubiniS[n,x,y,1,Table[Subscript[ToString[u],ToString[i]],{i,1,2}],2],{n,0,5}]]
- 3 **Simplify**[Table[HermiteFubiniS[n,x,y,2,Table[Subscript[ToString[u],ToString[i]],{i,1,2}],2],{n,0,5}]]
- 4 **Simplify**[Table[HermiteFubiniS[n,x,y,1,Table[Subscript[ToString[u],ToString[i]],{i,1,3}],3],{n,0,5}]]
- 5 **Simplify**[Table[HermiteFubiniS[n,x,y,2,Table[Subscript[ToString[u],ToString[i]],{i,1,3}],3],{n,0,5}]]

Mathematica Uygulaması 32 yardımıyla, $z = 1$, $r = 2$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ve $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere, ${}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned}
{}_F\mathfrak{h}_2(0, x, y, 1; \vec{u}, 2, 1) &= 0, \\
{}_F\mathfrak{h}_2(1, x, y, 1; \vec{u}, 2, 1) &= 4y, \\
{}_F\mathfrak{h}_2(2, x, y, 1; \vec{u}, 2, 1) &= 8y(2 + x + u_1), \\
{}_F\mathfrak{h}_2(3, x, y, 1; \vec{u}, 2, 1) &= -4y(-24 - 12x - 3x^2 + y^2 - 6(2 + x)u_1 - 3u_1^2 - 6u_2), \\
{}_F\mathfrak{h}_2(4, x, y, 1; \vec{u}, 2, 1) &= 16y(44 + 24x + 6x^2 + x^3 - 2y^2 - xy^2) \\
&\quad + 16y(3(2 + x)u_1^2 + u_1^3 + 6(2 + x)u_2) \\
&\quad + 16yu_1(24 + 12x + 3x^2 - y^2 + 6u_2), \\
{}_F\mathfrak{h}_2(5, x, y, 1; \vec{u}, 2, 1) &= 4(1540y + 880xy + 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 + 40xy(x^2 - y^2)) \\
&\quad + 320(3x^2y - y^3) - 80y(-6x^2 - x^3 + x(-24 + y^2))u_1 \\
&\quad - 160y(-22 + y^2)u_1 \\
&\quad - 40y(-24 - 12x - 3x^2 + y^2)(u_1^2 + 2u_2) \\
&\quad + 80(2 + x)y(u_1^3 + 6u_1u_2) + 20y(u_1^4 + 12u_1^2u_2 + 12u_2^2).
\end{aligned}$$

Mathematica Uygulaması 32 yardımıyla, $z = 2$, $r = 2$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ve $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere, ${}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının değerlerinin he-

saplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$${}_F\mathfrak{h}_2(0, x, y, 2; \vec{u}, 2, 1) = 0,$$

$${}_F\mathfrak{h}_2(1, x, y, 2; \vec{u}, 2, 1) = 8y,$$

$${}_F\mathfrak{h}_2(2, x, y, 2; \vec{u}, 2, 1) = 16y(4 + x + u_1),$$

$${}_F\mathfrak{h}_2(3, x, y, 2; \vec{u}, 2, 1) = -8y(-72 - 24x - 3x^2 + y^2 - 6(4 + x)u_1 - 3u_1^2 - 6u_2),$$

$${}_F\mathfrak{h}_2(4, x, y, 2; \vec{u}, 2, 1) = 32y(184 + 72x + 12x^2 + x^3 - 4y^2 - xy^2)$$

$$+ 32y(3(2 + x)u_1^2 + u_1^3 + 6(4 + x)u_2)$$

$$+ 32yu_1(72 + 24x + 3x^2 - y^2 + 6u_2),$$

$${}_F\mathfrak{h}_2(5, x, y, 2; \vec{u}, 2, 1) = 8(8520y + 3680xy + 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 + 80xy(x^2 - y^2))$$

$$+ 1920(3x^2y - y^3) - 160y(-12x^2 - x^3 + x(-72 + y^2))u_1$$

$$- 640y(-46 + y^2)u_1$$

$$- 80y(-72 - 24x - 3x^2 + y^2)(u_1^2 + 2u_2)$$

$$+ 160(4 + x)y(u_1^3 + 6u_1u_2) + 40y(u_1^4 + 12u_1^2u_2 + 12u_2^2).$$

Mathematica Uygulaması 32 yardımıyla, $z = 1$, $r = 3$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere, ${}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$${}_F\mathfrak{h}_2(0, x, y, 1; \vec{u}, 3, 1) = 0,$$

$${}_F\mathfrak{h}_2(1, x, y, 1; \vec{u}, 3, 1) = 4y,$$

$${}_F\mathfrak{h}_2(2, x, y, 1; \vec{u}, 3, 1) = 8y(2 + x + u_1),$$

$${}_F\mathfrak{h}_2(3, x, y, 1; \vec{u}, 3, 1) = -4y(-24 - 12x - 3x^2 + y^2 - 6(2 + x)u_1 - 3u_1^2 - 6u_2),$$

$${}_F\mathfrak{h}_2(4, x, y, 1; \vec{u}, 3, 1) = 16y(44 + 24x + 6x^2 + x^3 - 2y^2 - xy^2)$$

$$+ 16y(3(2 + x)u_1^2 + u_1^3 + 6(2 + x)u_2)$$

$$+ 16yu_1(24 + 12x + 3x^2 - y^2 + 6u_2) + 96yu_3,$$

$$\begin{aligned}
{}_F\mathfrak{h}_2(5, x, y, 1; \vec{u}, 3, 1) = & 4 (1540y + 880xy + 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 + 40xy (x^2 - y^2)) \\
& + 320 (3x^2y - y^3) - 80y (-6x^2 - x^3 + x(-24 + y^2)) u_1 \\
& - 160y(-22 + y^2)u_1 \\
& - 40y (-24 - 12x - 3x^2 + y^2) (u_1^2 + 2u_2) \\
& + 80 (2 + x) y (u_1^3 + 6u_1u_2 + 6u_3) \\
& + 20y (u_1^4 + 12u_1^2u_2 + 12u_2^2 + 24u_1u_3) .
\end{aligned}$$

Mathematica Uygulaması 32 yardımıyla, $z = 2$, $r = 3$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere, ${}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının değerlerinin hesaplamaları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned}
{}_F\mathfrak{h}_2(0, x, y, 2; \vec{u}, 3, 1) &= 0, \\
{}_F\mathfrak{h}_2(1, x, y, 2; \vec{u}, 3, 1) &= 8y, \\
{}_F\mathfrak{h}_2(2, x, y, 2; \vec{u}, 3, 1) &= 16y (4 + x + u_1) , \\
{}_F\mathfrak{h}_2(3, x, y, 2; \vec{u}, 3, 1) &= -8y (-72 - 24x - 3x^2 + y^2 - 6 (4 + x) u_1 - 3u_1^2 - 6u_2) , \\
{}_F\mathfrak{h}_2(4, x, y, 2; \vec{u}, 3, 1) &= -32y (-184 - 72x - 12x^2 - x^3 + 4y^2 + xy^2) \\
& - 32y (-3 (4 + x) u_1^2 - u_1^3 - 6 (4 + x) u_2) \\
& - 32yu_1 (-72 - 24x - 3x^2 + y^2 - 6u_2) + 192u_3, \\
{}_F\mathfrak{h}_2(5, x, y, 2; \vec{u}, 3, 1) &= 8 (8520y + 3680xy + 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 + 80xy (x^2 - y^2)) \\
& + 1920 (3x^2y - y^3) - 160y (-12x^2 - x^3 + x(-72 + y^2)) u_1 \\
& - 640y(-46 + y^2)u_1 \\
& - 80y (-72 - 24x - 3x^2 + y^2) (u_1^2 + 2u_2) \\
& + 160 (4 + x) y (u_1^3 + 6u_1u_2 + 6u_3) \\
& + 40y (u_1^4 + 12u_1^2u_2 + 12u_2^2 + 24u_1u_3) .
\end{aligned}$$

Mathematica Uygulaması 33. (3.37) denklemi yardımıyla, ${}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının $r = 4$ ve $z = 1$ durumunda, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 hf2P40 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\mathfrak{h}_{2}\left(0,x,y,1;\vec{u},4,1\right)"}],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins ->9]

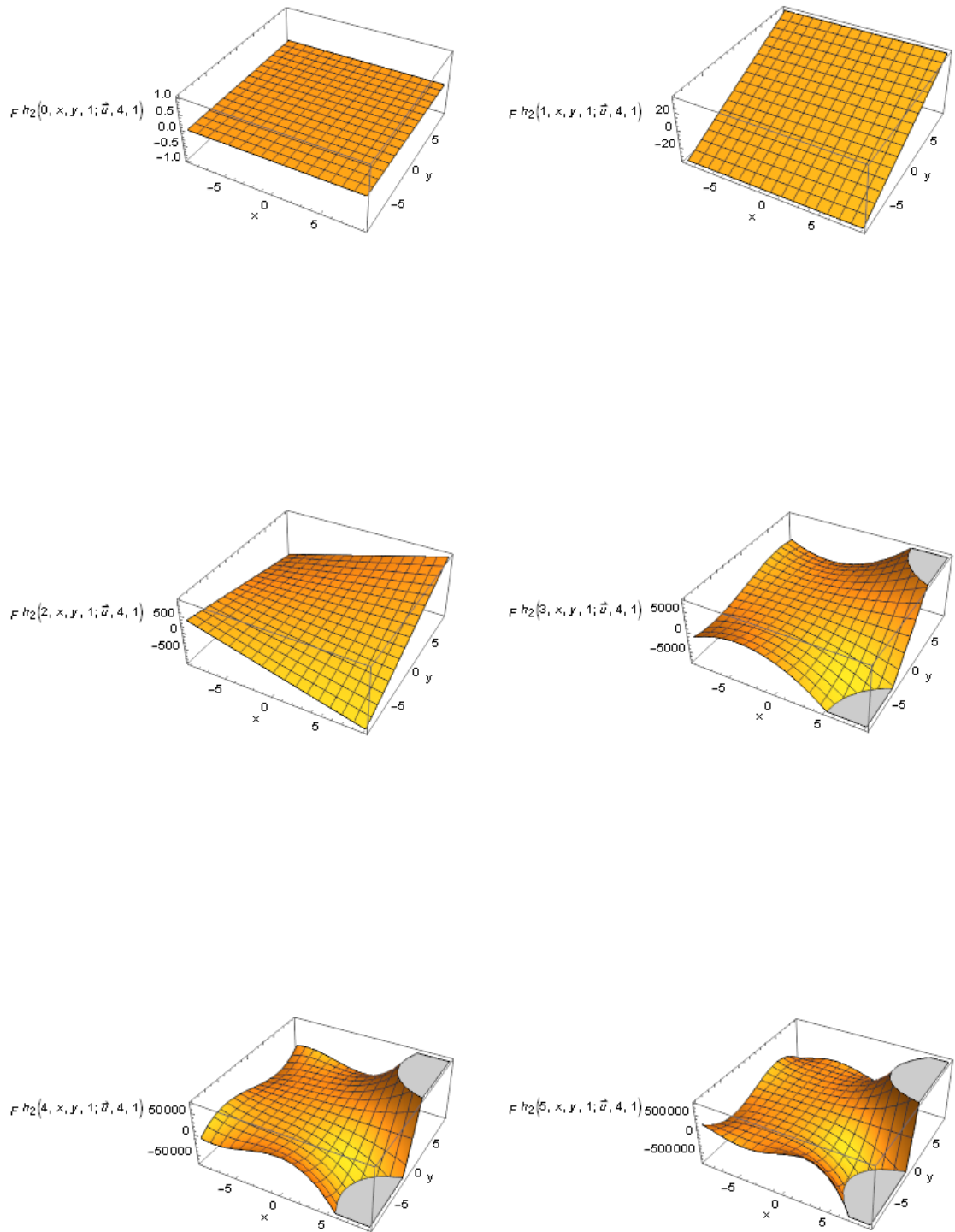
```

```

2 hf2P41 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\\mathfrak{h}_{2}\\left(1,x,y,1;\\vec{u},4,1\\right)}"],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
3 hf2P42=Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\\mathfrak{h}_{2}\\left(2,x,y,1;\\vec{u},4,1\\right)}"],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
4 hf2P43=Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\\mathfrak{h}_{2}\\left(3,x,y,1;\\vec{u},4,1\\right)}"],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
5 hf2P44=Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\\mathfrak{h}_{2}\\left(4,x,y,1;\\vec{u},4,1\\right)}"],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
6 hf2P45=Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\\mathfrak{h}_{2}\\left(5,x,y,1;\\vec{u},4,1\\right)}"],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle -> None,FrameMargins -> 9]
7 GraphicsGrid[{{Plot3D[HermiteFubiniS[0,x,y,1,{2,5,-3,7},4],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x",
"y",hf2P40},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],Plot3D[HermiteFubiniS[1,x,y
,1,{2,5,-3,7},4],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf2P41},LabelStyle -> Directive[
Black,Bold]],{Plot3D[HermiteFubiniS[2,x,y,1,{2,5,-3,7},4],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{
"x","y",hf2P42},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],Plot3D[HermiteFubiniS[3,x,y
,1,{2,5,-3,7},4],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf2P43},LabelStyle -> Directive[
Black,Bold]],{Plot3D[HermiteFubiniS[4,x,y,1,{2,5,-3,7},4],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{
"x","y",hf2P44},LabelStyle -> Directive[Black,Bold]],Plot3D[HermiteFubiniS[5,x,y
,1,{2,5,-3,7},4],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf2P45},LabelStyle -> Directive[
Black,Bold]]}},ImageSize -> 800]

```

Mathematica Uygulaması 33 yardımıyla, $z = 1$, $r = 4$, $\vec{u} = (2, 5, -3, 7)$ olmak üzere, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $x \in [-9, 9]$, $y \in [-9, 9]$ değerleri için, ${}_Fh_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri Şekil 4.30 ile verilmiştir:



Şekil 4.30. $Fh_2(n, x, y, 1; \vec{u}, 4, 1)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri

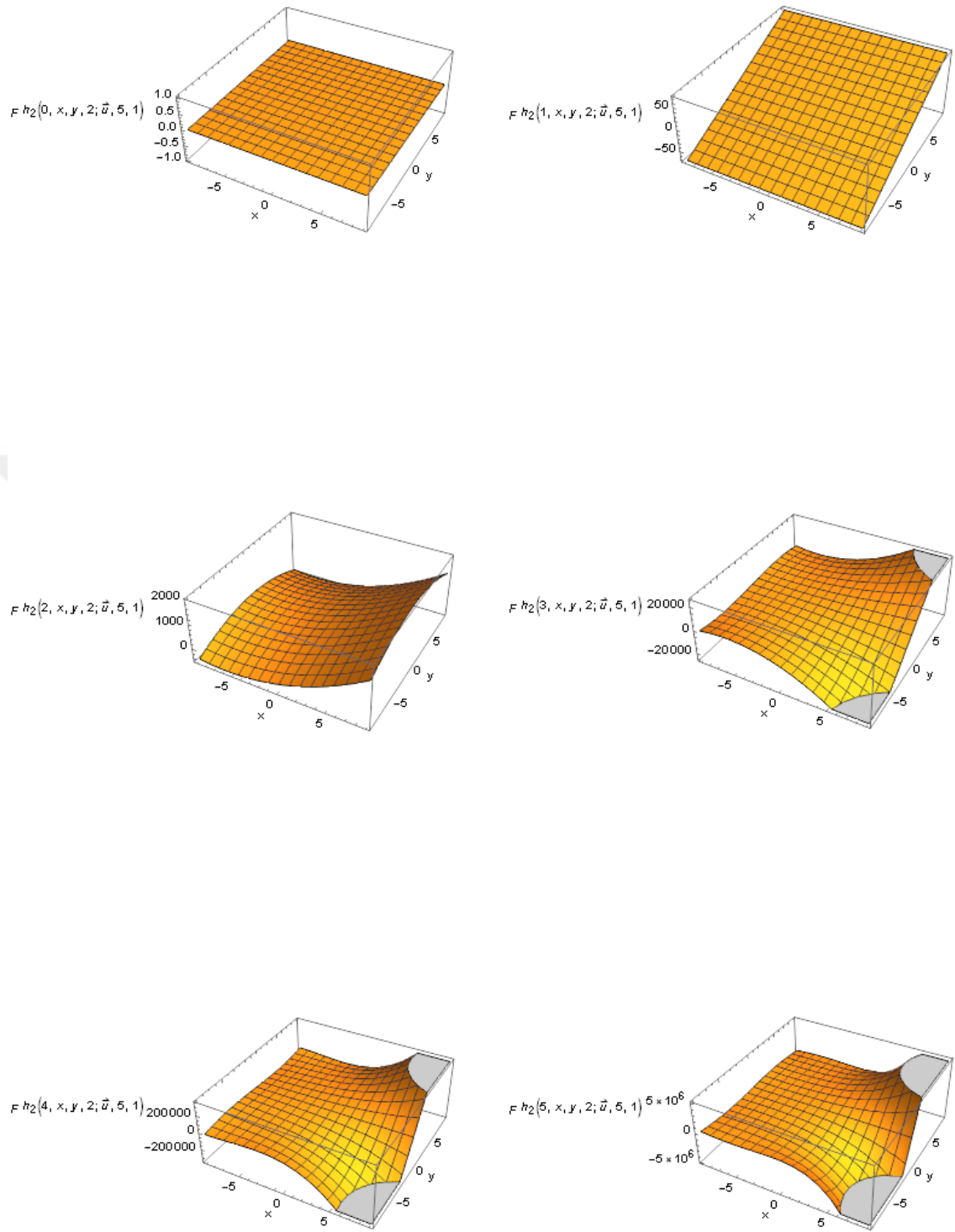
Mathematica Uygulaması 34. (3.23) denklemi yardımıyla, ${}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının $r = 5$ ve $z = 2$ durumunda, x ve y parametreleri için rastgele seçilmiş özel aralıklarda yüzeylerini çizen Mathematica Uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 hf2P50=Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\mathfrak{h}_2\left(0,x,y,2;\vec{u}\right)"}],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle->None,FrameMargins->9]
2 hf2P51=Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\mathfrak{h}_2\left(1,x,y,2;\vec{u}\right)"}],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle->None,FrameMargins->9]
3 hf2P52=Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\mathfrak{h}_2\left(2,x,y,2;\vec{u}\right)"}],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle->None,FrameMargins->9]
4 hf2P53=Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\mathfrak{h}_2\left(3,x,y,2;\vec{u}\right)"}],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle->None,FrameMargins->9]
5 hf2P54=Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\mathfrak{h}_2\left(4,x,y,2;\vec{u}\right)"}],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle->None,FrameMargins->9]
6 hf2P55 =Framed[ToString[ToExpression["{HoldForm}{{_F}\mathfrak{h}_2\left(5,x,y,2;\vec{u}\right)"}],TeXForm],TraditionalForm],FrameStyle->None,FrameMargins->9]
7 GraphicsGrid[{{Plot3D[HermiteFubiniS[0,x,y,2,{2,5,-3,7,8},5],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf2P50},LabelStyle->Directive[Black,Bold]],Plot3D[HermiteFubiniS[1,x,y,2,{2,5,-3,7,8},5],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf2P51},LabelStyle->Directive[Black,Bold]],{Plot3D[HermiteFubini[2,x,y,2,{2,5,-3,7,8},5],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf2P52},LabelStyle->Directive[Black,Bold]],Plot3D[HermiteFubini[3,x,y,2,{2,5,-3,7,8},5],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf2P53},LabelStyle->Directive[Black,Bold]],{Plot3D[HermiteFubiniS[4,x,y,2,{2,5,-3,7,8},5],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf2P54},LabelStyle->Directive[Black,Bold]],Plot3D[HermiteFubiniS[5,x,y,2,{2,5,-3,7,8},5],{x,-9,9},{y,-9,9},AxesLabel->{"x","y",hf2P55},LabelStyle->Directive[Black,Bold]]}],ImageSize->800]

```

Mathematica Uygulaması 34 yardımıyla, $z = 2$, $r = 5$, $\vec{u} = (2, 5, -3, 7, 8)$ olmak üzere, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $x \in [-9, 9]$, $y \in [-9, 9]$ değerleri için, ${}_F\mathfrak{h}_2(n, x, y, z; \vec{u}, r, 1)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri Şekil 4.31 ile verilmiştir:



Şekil 4.31. $Fh_2(n, x, y, 2; \vec{u}, 5, 1)$ polinomlarının yüzeylerinin çizimleri

5. SONUÇLAR

Bu tezde, r -parametrelili Hermite tipli polinomların ve r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinomların üreteç fonksiyonları ve bunların bazı temel özellikleri incelenmiştir. Euler formülü ve trigonometrik fonksiyonlar yardımıyla inşa edilen bu üreteç fonksiyonları ve bunların sağladığı fonksiyonel denklemler kullanılarak, Bernoulli tipli sayıları ve polinomları, Euler tipli sayıları ve polinomları, Genocchi tipli sayıları ve polinomları, tanjant sayıları, kotanjant sayıları, Chebyshev polinomları, Dickson polinomları, Fubini tipli polinomları, Hermite tipli polinomları, Milne-Thomson tipli polinomları, Apostol tipli sayı ve polinom aileleri, iki parametrelili Apostol tipli polinom aileleri başta olmak üzere, birçok özel sayı ve polinom ailelerini içeren yeni formüller, bağıntılar, özdeşlikler ve kombinatorik toplamalar Teorem 4.42 - Teorem 4.59 ile verilmiştir. Bu tez çalışmasında, r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinomlar ailesinin üreteç fonksiyonlarının bazı özel durumları Çizelge 3.3 - Çizelge 3.12 ile sunulmuştur. Bunlara ek olarak, Hermite tipli polinom aileleri için nümerik hesaplamalar yapan algoritmalar verilmiştir ve bu algoritmaların bazıları Mathematica paket programında Wolfram programlama dili yardımıyla kodlanmıştır ve bu kodlar Mathematica Uygulaması 1 - Mathematica Uygulaması 34 ile verilmiştir. Bu kodlar ile r -parametrelili Hermite tipli polinomlar ailesinin ve r -parametrelili Hermite-tabanlı Milne-Thomson tipli polinomlar ailesinin değerleri hesaplanmış, grafikleri ve yüzeylerinin çizimleri Şekil 4.1 - Şekil 4.31 ile sunulmuştur.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların ve algoritmaların, hesaplamalı bilim ve mühendislik alanlarıyla ilgili bazı uygulamaları verilmiştir. Çünkü hesaplamalı bilim ve mühendislik alanlarında bir gerçek dünya problemin çözülebilmesi veya matematiksel bir modelin geliştirilmesi ve bilgisayar ortamında çözülebilmesi için bir algoritmanın geliştirilmesi ve bu algoritmanın bilgisayar programları yardımıyla hesaplanan sonuçlarının sağlanması ve yorumlanması gerekmektedir. Ayrıca, bu sonuçlar için nümerik hesaplamaların yapılması, ilgili polinomların grafiklerinin ve bunların uygulamalarının verilmesi, analiz ve fonksiyonlar teorisi, analitik sayılar teorisi, kombinatorik analiz, bilgisayarda temel algoritmalar gibi matematik, fizik ve mühendislik alanları başta olmak üzere birçok bilim dallarına da katkılar sağlayacak potansiyele sahiptir.

6. KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. and Stegun, I.A. 1970. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publication, New York, 1045 p.
- Andrews, L.C. 1998. Special Functions of Mathematics for Engineers. 2nd ed. SPIE Press and Oxford University Press, Washington, 479 p.
- Apostol, T.M. 1951. On the Lerch zeta function. *Pac.-Asian J. Math.*, 1 (2): 161–167.
- Araci, S., Acikgoz, M. and Şen, E. 2014. Some new formulae for Genocchi numbers and polynomials involving Bernoulli and Euler polynomials. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2014: 1–7.
- Araci, S., Khan, W.A., Acikgoz, M., Özel, C. and Kumam, P. 2016. A new generalization of Apostol type Hermite–Genocchi polynomials and its applications. *SpringerPlus*, 5: 1–17.
- Araci, S., Riyasat, M. Wani, S.A. and Khan, S. 2018. A New Class of Hermite-Apostol type Frobenius-Euler polynomials and its applications. *Symmetry*, 10 (11): 1–16.
- Bayad, A. and Kim, T. 2016. Identities for Apostol-type Frobenius–Euler polynomials resulting from the study of a nonlinear operator. *Russ. J. Math. Phys.*, 23 (2): 164–171.
- Bayad, A. and Simsek, Y. 2014. Convolution identities on the Apostol–Hermite base of two variables polynomials. *Differ. Equ. Dyn. Syst.*, 22 (3): 309–318.
- Benjamin, A.T., Ericksen, L., Jayawant, P. and Shattuck, M. 2010. Combinatorial trigonometry with Chebyshev polynomials. *J. Stat. Plann. Inference*, 140 (8): 2157–2160.
- Boyadzhiev, K. 2012. Close encounters with the Stirling numbers of the second kind. *Math. Mag.*, 85 (4): 252–266.
- Bretti, G. and Ricci, P.E. 2004. Multidimensional extensions of the Bernoulli and Appell polynomials. *Taiwanese J. Math.*, 8 (3): 415–428.

- Carlitz, L. 1959. Eulerian numbers and polynomials. *Math. Mag.*, 32 (5): 247–260.
- Chang, C.H. and Ha, C.W. 2006. A multiplication theorem for the Lerch zeta function and explicit representations of the Bernoulli and Euler polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, 315: 758–767.
- Chebyshev, P.L. 1859. Sur le développement des fonctions à une seule variable. *Bull. Acad. Sci. St. Petersb.*, 1: 193–200.
- Conway, J.B. 1978. Functions of One Complex Variable. Graduate Texts in Mathematics 11, Springer-Verlag, New York, 2nd ed., 309 p.
- Comtet, L. 1974. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, Boston, 343 p.
- Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R. and Stein, C. 2009. Introduction to Algorithms. The MIT Press, United States of America, 3rd edition, 1292 p.
- Dattoli, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G. and Torre, A. 1994. Theory of generalized Hermite polynomials. *Computers Math. Applic.*, 28 (4): 71–83.
- Dattoli, G., Lorenzutta, S., Maino, G., Torre, A. and Cesarano, C. 1996. Generalized Hermite polynomials and supergaussian forms. *J. Math. Anal. Appl.*, 203: 597–609.
- Dere, R. and Simsek, Y. 2015. Hermite base Bernoulli type polynomials on the umbral algebra. *Russ. J. Math. Phys.*, 22 (1): 1–5.
- Djordjevic, G. B. 2009. Polynomials related to generalized Chebyshev polynomials. *Filomat*, 23 (3): 279–290.
- Dickson, L.E. 1897. The analytic representation of substitutions on a power of a prime number of letters with a discussion of the linear group I,II. *Ann. of Math.*, 11 (1/6): 65–120, 161–183.
- Erdelyi, A. 1953. Higher Transcendental Functions. The Bateman Manuscript Project, Vol. I-III. McGraw Hill Book Company, Inc., pp. 35–43, New York.

- Fox, L. and Parker, I.B. 1968. Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis. Oxford University Press, London, 197 p.
- Good, I.J. 1975. The number of ordering of n candidates when ties are permitted. *Fibonacci Quarterly*, 13 (1): 11–18.
- Gould, W. and Hopper, A.T. 1962. Operational formulas connected with two generalizations of Hermite polynomials. *Duke Math. J.*, 29: 51–62.
- Graham, R.L., Knuth, D.E. and Patashnik, O. 1994. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. 2nd ed. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 657 p.
- Hermite, C. 1864. Sur un nouveau développement en série de fonctions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 58: 93–100. Collected in *Œuvres II*, 293–303, doi:10.1017/cbo9780511702761.022.
- Horadam, A.F. 1991. Genocchi Polynomials. *Applications of Fibonacci Numbers*, 4: 145–166.
- Khan, N., Usman, T. and Choi, J. 2019. A new class of generalized polynomials associated with Laguerre and Bernoulli polynomials. *Turk. J. Math.*, 43 (1): 486–497.
- Khan, N., Usman, T. and Choi, J. 2021. A new class of generalized polynomials involving Laguerre and Euler polynomials. *Hacet. J. Math. Stat.*, 50 (1): 1–13.
- Khan, S. Yasmin, G., Khan, R. and Hassan, N.A.M. 2009. Hermite-based Appell polynomials: Properties and applications. *J. Math. Anal. Appl.* 351: 756–764.
- Kılar, N. 2017. Fubini Tipli Sayılar ve Bunların Üreteç Fonksiyonları. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 39 s.
- Kılar, N. and Simsek Y. 2017. A new family of Fubini numbers and polynomials associated with Apostol-Bernoulli numbers and polynomials. *J. Korean Math. Soc.*, 54 (5): 1605–1621.
- Kılar, N. and Simsek Y. 2019a. Relations on Bernoulli and Euler polynomials related to trigonometric functions. *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 29 (2): 191–198.

- Kilar, N. and Simsek Y. 2019b. Two parametric kinds of Eulerian-Type polynomials associated with Euler's Formula. *Symmetry*, 11 (9): 1097, 1–19.
- Kilar, N. and Simsek, Y. 2019c. Identities and relations for Fubini type numbers and polynomials via generating functions and p -adic integral approach. *Publ. Inst. Math., Nouv. S.* 106 (120): 113–123.
- Kilar, N. and Simsek, Y. 2020a. A note on Hermite-based Milne Thomson type polynomials involving Chebyshev polynomials and other polynomials. *Techno-Science*, 3 (1): 8–14.
- Kilar, N. and Simsek Y. 2020b. Identities and relations for special numbers and polynomials: An Approach to trigonometric functions. *Filomat*, 34 (2): 535–542.
- Kilar, N. and Simsek, Y. 2020c. Identities for special numbers and polynomials involving Fibonacci-type polynomials and Chebyshev polynomials. *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 30 (4): 493–502.
- Kilar, N. and Simsek, Y. 2020d. A special approach to derive new formulas for some special numbers and polynomials. *Turk. J. Math.*, 44: 2217–2240.
- Kilar, N. and Simsek, Y. 2021a. Combinatorial sums involving Fubini type numbers and other special numbers and polynomials: Approach trigonometric functions and p -adic integrals. *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 31 (1): 75–87.
- Kilar, N. and Simsek, Y. 2021b. Identities and relations for Hermite-based Milne-Thomson polynomials associated with Fibonacci and Chebyshev polynomials. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 115 (28): 1–20.
- Kilar, N. and Simsek, Y. 2021c. Computational formulas and identities for new classes of Hermite-based Milne–Thomson type polynomials: Analysis of generating functions with Euler's formula. *Math Meth Appl Sci.*, <https://doi.org/10.1002/mma.7220>.
- Kim, D.S. and Kim, T. 2012. Some new identities of Frobenius–Euler numbers and polynomials. *J. Inequal. Appl.*, 2012 (307): 1–10.

- Kim, D.S. and Kim, T. 2018. Some p -adic integrals on $\mathbb{Z}_p$ associated with trigonometric functions. *Russ. J. Math. Phys.*, 25 (3): 300–308.
- Kim, T. and Ryoo, C.S. 2018. Some identities for Euler and Bernoulli polynomials and their zeros. *Axioms*, 7 (3): 56.
- Kim, T., Rim, S.H., Simsek, Y. and Kim, D. 2008. On the analogs of Bernoulli and Euler numbers, related identities and zeta and L -functions. *J. Korean Math. Soc.*, 45: 435–453.
- Knuth, D.E. 1997. The Art of Computer Programming, Vol. 1: Fundamental Algorithms. Addison-Wesley Professional, United States of America, 652 p.
- Kucukoglu I. and Simsek, Y. 2019. Identities and relations on the q -Apostol type Frobenius-Euler numbers and polynomials. *J. Korean Math. Soc.*, 56 (1): 265–284.
- Kurt, B. 2013. Çok Değişkenli Hermite Tabanlı Appell Polinomları Üzerine. Doktora Tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 53 s.
- Kurt, B. and Simsek, Y. 2013a. On the generalized Apostol-type Frobenius–Euler polynomials. *Adv. Differ. Equ.*, 2013 (1): 1–9.
- Kurt, B. and Simsek, Y. 2013b. On the Hermite Based Genocchi polynomials. *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 23 (1): 13–17.
- Laplace, P.-S. (1812). Théorie Analytique Des Probabilités. Courcier, Paris, 464 p.
- Lidl, R., Mullen, G.L. and Turnwald, G. 1993. Dickson polynomials, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. 65. Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 207 p.
- Liu, S.-J. 2009. Bilateral generating functions for the Lagrange polynomials and the Lauricella functions. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 20 (7): 519–527.
- Lu, D.-Q. 2011. Some properties of Bernoulli polynomials and their generalizations. *Appl. Math. Lett.* 24: 746–751.

- Luo, Q.-M. 2004. On the Apostol-Bernoulli polynomials. *CEJM*, 2 (4): 509–515.
- Luo, Q.-M. 2006. Apostol-Euler polynomials of higher order and Gaussian hypergeometric functions. *Taiwanese J. Math.*, 10 (4): 917–925.
- Luo, Q.-M. and Srivastava, H.M. 2005. Some generalizations of the Apostol–Bernoulli and Apostol–Euler polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, 308: 290–302.
- Luo, Q.-M. and Srivastava, H.M. 2011. Some generalizations of the Apostol–Genocchi polynomials and the Stirling numbers of the second kind. *Appl. Math. Comput.*, 217 (12): 5702–5728.
- Masjed-Jamei, M. and Koepf, W. 2017. Symbolic computation of some power-trigonometric series. *J. Symb. Comput.*, 80 (2): 273–284.
- Masjed-Jamei, M., Beyki, M.R. and Koepf, W. 2018. A new type of Euler polynomials and numbers. *Mediterr. J. Math.*, 15 (138): 1–17.
- Masjed-Jamei, M., Beyki, M.R. and Omei, E. 2018. On a parametric kind of Genocchi polynomials. *J. Inequal. Spec. Funct.*, 9 (2): 68–81.
- Masjed-Jamei, M., Beyki, M.R. and Koepf, W. 2019. An extension of the Euler-Maclaurin quadrature formula using a parametric type of Bernoulli polynomials. *Bull. Sci. Math.*, 156, 102798: 1–26.
- Milne-Thomson, L.M. 1933. Two classes of generalized polynomials. *Proc. London Math. Soc.*, 35 (1): 514–522.
- Milne-Thomson, L.M. 1980. Calculus of Finite Differences. American Mathematical Society, 558 p.
- Norlund, N.E. 1954. Vorlesungen uber Differenzenrechnung. Chelsea Publishing Company, New York.
- Özarslan, M.A. 2013. Hermite-based unified Apostol-Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Adv. Difference Equ.*, 116: 1–13.

- Qi, F. 2015. Derivatives of tangent function and tangent numbers. *Appl. Math. Comput.*, 268: 844–858.
- Pathan, M.A. 2012. A new class of generalized Hermite-Bernoulli polynomials. *Georgian Math. J.*, 19: 559–573.
- Pathan, M.A. and Khan, W.A. 2014. Some implicit summation formulas and symmetric identities for the generalized Hermite-Based polynomials. *Acta Universitatis Apulensis*, 39: 113–136
- Rademacher, H. 1973. Topics in Analytic Number Theory. Grundlehren Math. Wiss. 169, Springer-Verlag, Berlin, 320 p.
- Rainville, E.D. 1960. Special Functions. The Macmillan Company, New York, 365 p.
- Rassias, Th.M., Srivastava, H.M. and Yanushauskas, A. 1991. Topics in Polynomials of One and Several Variables and Their Applications, World Scientific, Singapore, 821 p.
- Rim, S-H., Park, K.H. and Moon, E.J. 2008. On Genocchi numbers and polynomials. *Abstr. Appl. Anal.*, 2008: 1–7.
- Riordan, J. 1958. An Introduction to Combinatorial Analysis. John Wiley Sons Inc., New York, 244 p.
- Rivlin, T.J. 1974. The Chebyshev Polynomials, John Wiley & Sons Inc, New York, 1974.
- Roman, S. 1984. The Umbral Calculus. Academic Press, Inc., New York, 193 p.
- Rubinstein, B.Y. 2006. Extension of the Bernoulli and Eulerian polynomials of higher order and vector partition function. arXiv:math.0612076v1.
- Sándor, J. and Crstici, B. 2004. Handbook of Number Theory. Vol. II, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston and London, 637 p.
- Sharma, S.K., Khan, W.A. and Ryoo, C.S. 2020. A Parametric kind of Fubini polynomials of a complex variable. *Mathematics*, 8(4): 643, 1–16, doi:10.3390/math8040643.

- Simsek, Y. 2010. Special functions related to Dedekind-type DC-sums and their applications. *Russ. J. Math. Phys.*, 17 (4): 495–508.
- Simsek, Y. 2012. Generating functions for q -Apostol type Frobenius–Euler numbers and polynomials. *Axioms*, 1: 395–403.
- Simsek, Y. 2013. Generating functions for generalized Stirling type numbers, Array type polynomials, Eulerian type polynomials and their applications. *Fixed Point Theory Appl.*, 87: 1–28.
- Simsek, Y. 2018. Construction of some new families of Apostol-type numbers and polynomials via Dirichlet character and p -adic q -integrals. *Turk. J. Math.*, 42: 557–577.
- Simsek, Y. 2019. Formulas for Poisson–Charlier, Hermite, Milne–Thomson and other type polynomials by their generating functions and p -adic integral approach, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat.*, 113 (2): 931–948.
- Simsek, Y. and Cakic, N. 2018. Identities associated with Milne–Thomson type polynomials and special numbers. *J. Inequal. Appl.*, 2018 (84): 1–13.
- Simsek, Y. and Kucukoglu, I. 2020. Some Certain Classes of Combinatorial Numbers and Polynomials Attached to Dirichlet Characters: Their Construction by p -adic Integration and Applications to Probability Distribution Functions, A Chapter in the Book: Mathematical Analysis in Interdisciplinary Research, Th. M. Rassias, I.N. Parasidis and E.Providas (Eds.), Springer International Publishing, Springer Nature Switzerland AG, In press.
- Srivastava, H.M. 2011. Some generalizations and basic (or q -) extensions of the Bernoulli, Euler and Genocchi Polynomials. *Appl. Math. Inf. Sci.*, 5 (3): 390–444.
- Srivastava, H.M. and Choi, J. 2012. Zeta and q -Zeta Functions and Associated Series and Integrals. Elsevier, Amsterdam, 657 p.
- Srivastava, H.M. and Kızılateş, C. 2019. A parametric kind of the Fubini-type polynomials. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 113: 3253–3267.

- Srivastava, H.M., Ricci, P.E. and Natalini, P. 2019. A family of complex Appell polynomial sets. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 113: 2359–2371.
- Srivastava, H.M., Kurt, B. and Simsek, Y. 2012. Some families of Genocchi type polynomials and their interpolation functions. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 23 (12): 919–938.
- Srivastava, H.M., Masjed-Jamei, M. and Beyki, M.R. 2018. A parametric type of the Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler and Apostol-Genocchi polynomials. *Appl. Math. Inf. Sci.*, 12 (5): 907–916.
- Srivastava, H.M., Masjed-Jamei, M. and Beyki, M.R. 2019. Some new generalizations and applications of the Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler and Apostol-Genocchi polynomials. *Rocky Mt. J. Math.*, 49 (2): 681–697.
- Srivastava, H.M., Özarslan, M.A. and Kaanoğlu, C. 2010. Some families of generating functions for a certain class of three-variable polynomials. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 21 (12): 885–896.
- Srivastava, H.M. and Pinter, A. 2004. Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials. *Appl. Math. Lett.*, 17: 375–380.
- Temme, N.M. 1996. *Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*. John Wiley Sons Inc., New York, 374 p.
- Wolfram Research, Inc. 2019. *Mathematica*. Version 12.0, Champaign, Illinois.
- Zou, Q. 2017. Identities on Genocchi polynomials and Genocchi numbers concerning binomial coefficients, *Int. J. Anal. Appl.*, 14 (2): 140–146.

ÖZGEÇMİŞ

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora 2018-2021	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Yüksek Lisans 2015-2017	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2011-2015	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

ESERLER:

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

- 1- Kılar, N. and Simsek, Y. (2017). A new family of Fubini numbers and polynomials associated with Apostol-Bernoulli numbers and polynomials. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 54 (5), 1605–1621.
- 2- Kılar, N. and Simsek, Y. (2019). Relations on Bernoulli and Euler polynomials related to trigonometric functions. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 29 (2), 191–198.
- 3- Kılar, N. and Simsek, Y. (2019). Two parametric kinds of Eulerian-Type polynomials associated with Euler's Formula. *Symmetry*, 11 (9), 1097, 1–19.
- 4- Kılar, N. and Simsek, Y. (2019). Identities and relations for Fubini type numbers and polynomials via generating functions and p -adic integral approach. *Publications de l'Institut Mathématique*, 106 (120), 113–123.
- 5- Kılar, N. and Simsek, Y. (2019). Some relationships between Fubini type polynomials and other special numbers and polynomials. *American Institute of Physics (AIP) Conference Proceedings*, 2116, 100017-1–100017-4, <https://doi.org/10.1063/1.5114093>

- 6- Kilar, N. (2019). Formulas and combinatorial sums including special numbers on p -adic integrals. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1 (1), 129–139.
- 7- Kilar, N. and Simsek, Y. (2020). A note on Hermite-based Milne Thomson type polynomials involving Chebyshev polynomials and other polynomials. *Techno-Science*, 3 (1), 8–14.
- 8- Kilar, N. and Simsek, Y. (2020). Identities and relations for special numbers and polynomials: An Approach to trigonometric functions. *Filomat*, 34 (2), 535–542.
- 9- Kilar, N. and Simsek, Y. (2020). Identities for special numbers and polynomials involving Fibonacci-type polynomials and Chebyshev polynomials. *Advanced Studies in Contemporary Mathematic*, 30 (4), 493–502.
- 10- Kilar, N. and Simsek, Y. (2020). A special approach to derive new formulas for some special numbers and polynomials. *Turkish Journal of Mathematics*, 44, 2217–2240.
- 11- Kilar, N. and Simsek, Y. (2020). Formulas involving sums of powers, special numbers and polynomials arising from p -adic integrals, trigonometric and generating functions. *Publications de l'Institut Mathématique*, 108 (122), 103–120.
- 12- Kilar, N. and Simsek, Y. (2021). Combinatorial sums involving Fubini type numbers and other special numbers and polynomials: Approach trigonometric functions and p -adic integrals. *Advanced Studies in Contemporary Mathematic*, 31 (1), 75–87.
- 13- Kilar, N. and Simsek, Y. (2021). Identities and relations for Hermite-based Milne-Thomson polynomials associated with Fibonacci and Chebyshev polynomials. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A: Matemáticas. RACSAM*, 115 (28), 1–20.
- 14- Kilar, N. and Simsek, Y. (2020). Identities and relations associated with generating function for Apostol-Genocchi type polynomials and trigonometric functions. *American Institute of Physics (AIP) Conference Proceedings*, 2293, 180006-1–180006-4.

15- Kilar, N. and Simsek, Y. (2021). Formulas and relations of special numbers and polynomials arising from functional equations of generating functions. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3 (1), 106–123.

16- Kilar, N. and Simsek, Y. (2021). Computational formulas and identities for new classes of Hermite-based Milne–Thomson type polynomials: Analysis of generating functions with Euler’s formula. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*,
<https://doi.org/10.1002/mma.7220>

17- Kilar, N. and Simsek, Y. (2021). New computational formulas for special numbers and polynomials derived from applying trigonometric functions to generating functions. to appear in Milan Journal of Mathematics.

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Kilar, N. and Simsek, Y. (2018). Some relationships between Fubini type polynomials and other special numbers and polynomials. The 7th symposium on generating functions of special numbers and polynomials and their applications (GFSNP2018) within The 16th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2018 (ICNAAM 2018), September 13-18, Rhodes, GREECE.

2- Kilar, N. and Simsek, Y. (2018). Special numbers arised from trigonometric and hyperbolic functions. The Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2018), October 26-29, 2018, Antalya, TURKEY, Proceedings Book of MICOPAM2018, ISBN: 978-86-6016-036-4, 221–224.

3- Kilar, N. and Simsek, Y. (2019). Some formulas related to generating functions including trigonometric functions. International Symposium on Advanced Engineering Technologies (ISADET2019), May 2-4, 2019, Kahramanmaraş, TURKEY, Abstracts and Proceedings Book of ISADET2019, ISBN: 978-975-6497-38-8, 116–120.

4- Kilar, N. and Simsek, Y. (2019). A Note on two parametric Apostol type polynomials II. 6th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2019), June 12-15, 2019, Istanbul, TURKEY, ISBN: 987-605-68969-0-3.

5- Kilar, N. and Simsek, Y. (2019). A Note on two parametric Apostol type polynomials. 6th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2019), June 12-15, 2019, Istanbul, TURKEY, Abstract Book.

6- Kilar, N. and Simsek, Y. (2019). Relations between Apostol-type polynomials and combinatorial numbers. The Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2019), August 28 – 31, 2019, Paris-FRANCE, Proceedings Book of MICOPAM2019, ISBN: 978-2-491766-00-9.

7- Kilar, N. and Simsek, Y. (2019). Identities and relations associated with generating function for Apostol-Genocchi type polynomials and trigonometric functions II. The 8th symposium on generating functions of special numbers and polynomials and their applications (GFSNP2019) within The 16th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2019 (ICNAAM 2019), September 23-28, 2019, Rhodes, GREECE, ISBN 978-9925-7552-1-9.