

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Hg-KONVEKS FONKSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı SOYADI : Nagihan KURT GÜLSU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Prof. Dr. İmdat İŞCAN

**Ocak 2022
GİRESUN**

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Hg-KONVEKS FONKSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nagihan KURT GÜLSU

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 11/01/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

**Prof Dr.
Erhan SET
Jüri Başkanı**

**Prof Dr.
İmdat İŞCAN
Üye**

**Doç Dr.
Sercan TURHAN
Üye**

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Nagihan KURT GÜLSU

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tez çalışmalarım süresince, bilimsel ve manevi desteğini esirgemeyen, çalışmamın planlanması ve yürütülmesinde tecrübelerini, bilgilerini benimle paylaşan tez danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. İmdat İŞCAN'a en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Bunlarla birlikte tez çalışmamda katkılarından dolayı değerli hocalarım Prof. Dr. Mahir KADAKAL ve Doç. Dr. Sercan TURHAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazma aşamamda her anlamda yanımda olan, beni destekleyen ve tecrübelerini paylaşan sevgili eşim Sercan GÜLSU'ya, sabır ve sevgiyle her an yanımda olan canım kızım Ece Sena'ma ve desteğini her daim yanımda hissettiğim canım annem Sabiha KURT'a ve kıymetli babam İbrahim KURT'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	4
2.1. Ön Bilgiler	4
2.2. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler	4
2.3. HH-Konveks Fonksiyonlar.....	17
2.4 Ag-Konveks Fonksiyonlar	18
2.5 Bazı Önemli Eşitsizlikler	19
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	22
3.1. Ag-Konveks Fonksiyonlar	22
3.2. Ag-Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler	24
3.3.Harmonik Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler	29
BÖLÜM 4.ARAŞTIRMA BULGULARI	34

4.1. Hg-Konveks Fonksiyonlar	34
4.2. Hg-Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri	37
4.3. Hg-Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler .	46
 BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	 50
 KAYNAKLAR	 51
ÖZGEÇMİŞ	53



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
I	: $\mathbb{R}$ 'de bir aralık
I°	: I aralığının içi
$\subset$	: Alt küme
$\subseteq$	: Alt küme veya eşit
$L[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonların sınıfı
$\forall$	: Her
$\exists$	: En Az
$\ln$	: Doğal Logaritmik Fonksiyon
f'	: f fonksiyonunun birinci mertebeden Türevi
f''	: f fonksiyonunun ikinci mertebeden Türevi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Konveks Küme	5
Şekil 2.2. Konkav Küme	5
Şekil 2.3. Konveks Fonksiyon Şekli	6
Şekil 2.4. Konkav Fonksiyon Şekli	6

Hg-KONVEKS FONKSİYONLAR

ÖZET

Bu tezde Hg-Konveks fonksiyonu adı verilen yeni bir fonksiyon sınıfı tanımlanmıştır. Bazı yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir.

Tezin birinci bölümünde sırasıyla eşitsizlik teorisi, konveks fonksiyonların tarihçesi ve konvekslik hakkında giriş niteliğinde bilgiler yer almaktadır.

İkinci bölümde tezin kuramsal temelleri için gerekli temel kavramlar, tanımlar, teoremler verilmiş ve ayrıca Ag-konveks fonksiyon sınıfı literatür çalışmasıyla da desteklenerek aktarılmıştır.

Üçüncü bölümde tez çalışmasında kullanılan klasik eşitsizlikleri içeren teoremler, ispatları ve bu çalışmaya kuramsal temel teşkil eden bazı eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise Hg-Konveks fonksiyon isminde yeni bir fonksiyon sınıfı tanımıyla, fonksiyon sınıfının literatürle olan ilişkisi verilmiş, fonksiyonların bu sınıfının bazı cebirsel özellikleri incelenmiş ve daha sonra yine literatürde olan bir özdeşlik yardımı ile Hg-Konveks fonksiyonlar sınıfı için Hermite-Hadamard tipli bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Konveks Fonksiyon, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, İntegral Eşitsizlikleri, Ag-Konveks Fonksiyonlar, Hg-konveks fonksiyonlar.

Hg-CONVEX FUNCTIONS

SUMMARY

In this thesis, a new function class, named Hg-convex function is identified. Some new Hermite-Hadamard typed simple inequalities are given.

In the first part of the thesis, introductory informations about inequality theory, history of convex functions and convexity take part respectively.

In the second part of the thesis basic notions, definitions and theorems necessary for theoretical foundations of the thesis are given and also the relations of Ag-convex function classes with each are transferred by the literature study.

In the third part, theorems that include classic inequalities used in thesis study, their proofs and some inequalities that constitute that theoretical basic of this study are included.

In the forth part, with the definition of a new function class named Hg-convex function, the relation of the function class with the literature is given, some algebraic properties of this class of function are examined. And then Hermite-Hadamard type for the class of Hg-convex functions with the help of identity in the literature, some new inequalities have been achieved.

Keywords: Convexity, Hermite-Hadamard Inequality, Integral Inequalities, Harmonic Convex Functions, Hg-convex functions

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Konvekslik, tarihi M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Bu kavram fizik, endüstri, tıp, mühendislik, veri analizi, bankacılık, sanat gibi bilim dallarının nümerik uygulamalarında da kullanılmaktadır. Günümüzde gelişen disiplini ve artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak yerini almıştır. Konvekslik kavramı matematiğin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılır ve sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi (lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar.

Konvekslik teorisinin matematiksel finans, ekonomi, mühendislik, işletme bilimleri ve optimizasyon teorisi alanlarında merkezi ve temel bir rol oynadığı iyi bilinmektedir. Son yıllarda, konvekslik kavramı, yeni ve yenilikçi fikirler kullanılarak çeşitli yönlerde genişletilmiş ve genelleştirilmiştir (Dragomir and Pearce , 2000; Chen, 2002; Cristescu and Lupşa, 2002; Niculescu and Persson, 2006).

“Konvekslik” kavramı ilk olarak 1883 yılında Charles Hermite tarafından dile getirilmiştir (Hermite, 1883). Daha sonra Hadamard'ın çalışmasında (Hadamard, 1983) konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması 1905- 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen ile başlamıştır. 19.-20.yy'da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Konveks fonksiyonlar daha kapsamlı bir şekilde A. W. Roberts ve D. E. Varberg tarafından "Convex Functions" adlı eserde kaleme alınmıştır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler hakkında ise Pecaric 1987 yılında "Convex Functions: Inequalities" adlı eseri yayınlamıştır.

Eşitsizlikler, matematiğin tüm dallarında geniş çalışma alanı olan, sürekli gelişmekte olan bir konudur. Köklü bir tarihe sahip olup, 19. yüzyıldan beri bütün alanlarda

kullanılmıştır. Bu konu, son yıllarda çok sayıda araştırmacının dikkatini çekmektedir. Jensen, Hadamard, Hilbert, Hardy, Opial, Levin ve Lyapunov isimleriyle özdeşleşmiş birçok eşitsizlik tipi arasında derin kökler vardır ve bu eşitsizlik tipleri matematiğin farklı alanlarında kullanılmaktadır.

Eşitsizlikler teorisi içerisinde ön plana çıkmış birçok eşitsizlik vardır. Bunlardan biri de eşitsizlikler teorisinin gelişmesinde önemli rol oynayan konveks fonksiyonlar ile ilişkili olan Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik ilk olarak 1881’de Ch. Hermite’nin Mathesis dergisine gönderdiği bir mektupta elde edilmesine karşın uzun yıllar bu durum anlaşılmamıştır. Fakat bu durum daha sonraki yıllarda ortaya çıkmış ve bu eşitsizlik literatüre ya Hadamard eşitsizliği ya da daha çok Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak girmiştir.

Hermite (1822-1901), Ekim 1881’de, Journal Mathesis dergisine yazdığı mektup Mathesis 3 de (1883, p.82) aşağıdaki gibi basılmıştır.

“Sur deux limites d’une integrale definie. Soit $\xi(x)$ une Fonction qui varie toujours dans le même sens de $u = a$; au ; $= b$. On aura les relations

$$(b - a)\xi\left(\frac{a + b}{2}\right) < \int_a^b \xi(u)du < (b - a)\frac{\xi(a) + \xi(b)}{2}$$

ou bien

$$(b - a)\xi\left(\frac{a + b}{2}\right) > \int_a^b \xi(u)du > (b - a)\frac{\xi(a) + \xi(b)}{2}$$

Suivant que la courbe $v = \xi(u)$ tourne sa convexité o usa concavite vers l’axe des abcisses

1883 yılında Hermite tarafından elde edilen bu eşitsizlik bundan on yıl sonra Hadamard tarafından yeniden ele alınarak bu çalışma şimdi günümüzde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen aşağıdaki

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği vermiştir.

Bu önemli eşitsizlikler, integraller için ortalama değer teoreminin fonksiyon ve görüntülerinin ortalama değerlerine ilişkin bir eşitsizlik olup fonksiyonun konkav veya konvekslik durumuna göre değişmektedir. Çeşitli konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin detaylı anlatımı S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından yazılan "Selected Topics on Hermite Hadamard Inequalities and Applications" adlı eserde bulunabilir.

Son yıllarda, çoğu araştırmacılar tarafından özellikle çeşitli ortalamalar ve çeşitli parametreler yardımıyla birçok konvekslik sınıfları tanımlanmış olup, bu fonksiyon sınıflarının cebirsel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca elde edilen yeni fonksiyon sınıfları için farklı çeşit integral eşitsizliklerine ait yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu fonksiyon sınıflarından biri de Ag-konveksliktir (Kadakal ve İşcan, 2019). Kadakal ve İşcan'ın yaptığı çalışmadan yola çıkılarak bu tezde, aritmetik ortalama yerine Harmonik ortalama alınarak Hg-konvekslik adında yeni bir konvekslik sınıfı tanımlanmış ve bu fonksiyon sınıfının özellikleri incelenerek, fonksiyonların bu sınıfı için bazı yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Ön Bilgiler

Bu bölümde gerekli olan bazı temel kavramlar, tanımlar, teoremler ve eşitsizliklere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer

$$|u - u_0| < \delta \text{ olan } \forall u \in S \text{ için } |f(u) - f(u_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , u_0 da süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.2 (Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$|u_1 - u_2| < \delta \text{ şartını sağlayan } \forall u_1, u_2 \in S \text{ için } |f(u_1) - f(u_2)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , S de düzgün süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.3 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f , I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $u_1 < u_2$ olan $\forall u_1, u_2 \in I$ için

- i. $f(u_2) > f(u_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,
- ii. $f(u_2) < f(u_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,
- iii. $f(u_2) \geq f(u_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
- iv. $f(u_2) \leq f(u_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır,

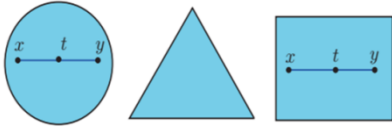
denir(Adams and Essex, 2010).

2.2. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

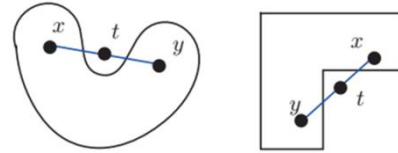
Tanım 2.2.1. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere;

$$B = \{z \in L : z = tx + (1 - t)y, 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, (1 - \alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar, 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konkav küme

Tanım 2.2.2. (Konveks Fonksiyon): $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall u, v \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tu + (1 - t)v) \leq tf(u) + (1 - t)f(v) \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna I üzerinde konveks fonksiyon denir.

Yukarıdaki formüle eş değer olarak aşağıdaki gerek ve yeter koşulu verebiliriz:

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvekstir $\Leftrightarrow x < y < z$ olan $\forall x, y, z \in I$ için,

$$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ y & f(y) & 1 \\ z & f(z) & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$

Eğer (2.1) eşitsizliği $u \neq v$ ve $t \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir (Pečarić, 1992).

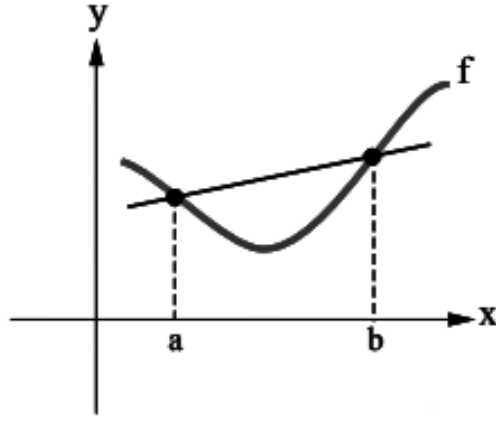
$$f(tu + (1 - t)v) < tf(u) + (1 - t)f(v)$$

olur. Bu durumda bu fonksiyona kesin konvektir denir.

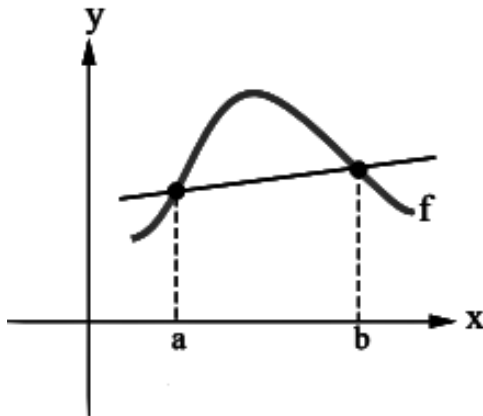
Eşitsizlikte " $\geq$ " olması durumunda ise

$$f(tu + (1 - t)v) \geq tf(u) + (1 - t)f(v)$$

f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.



Şekil 2.3. Konveks fonksiyon şekli



Şekil 2.4. Konkav fonksiyon şekli

Konveks fonksiyon için bazı gereklilikler aşağıda sıralanmıştır.

1. f' 'nin I aralığı üzerinde konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart seçilen herhangi bir $c \in I$ noktası için $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, nin I aralığında artan bir fonksiyon olmasıdır.
2. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart her $c, x \in (a, b)$ için,

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$$

olacak şekilde $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ artan fonksiyon olmasıdır.

3. f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f' 'nin konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır.
4. $f'', (a, b)$ aralığında mevcut olsun. Bu durumda f' 'nin konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \geq 0$ olmasıdır.
5. $f: (a, b) \rightarrow R$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in (a, b)$ için f fonksiyonunun en az bir destek doğruya sahip olmasıdır. Yani

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0) \quad \forall x \in (a, b)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ , x_0 'a bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman

$$\lambda = f'(x_0) \text{ ya da } f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) \text{ ise } \lambda \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)] \text{ dir.}$$

6. $f: (a, b) \rightarrow R$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart P, Q ve R noktaları f fonksiyonunun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere,

$$eğimPQ \leq eğimPR \leq eğimQR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Pečarić, 1992).

Aşağıda konveks fonksiyonun bazı özellikleri verilmiştir:

- i. Kapalı aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.
- ii. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise, I° (I nin içi) inde süreklidir.
- iii. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I° de $f'_-(u)$ ve $f'_+(u)$ türevleri vardır ve artandır.
- iv. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu I açık aralığında konveks ise, sayılabilir bir E kümesi haricinde f' mevcuttur ve süreklidir.
- v. $f_j: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3 \dots k$ tane konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(u) = \sum_{j=1}^k \alpha_j f_j(u), \quad \alpha_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, k)$$

fonksiyonu da konvektir.

- vi. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan konveks fonksiyon ve $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(u) = (goh)(u)$ bileşke fonksiyonu da konvektir (Dragomir ve Pearce, 2000).

Teorem 2.2.1. (Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Her $a, b \in I$ ve $a < b$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.2)$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Eğer bu eşitsizlikte f fonksiyonu konkav ise eşitsizlik tersine döner (Hadamard, 1893, Hermite, 1883).

İspat: f fonksiyonu I 'da konveks olduğundan $A = \frac{a+b}{2}$ noktasında en az bir destek doğrusuna sahiptir. Yani

$$f(x) \geq f(A) + m(x - A)$$

olacak şekilde A noktasına bağlı en az bir $m \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Yukarıdaki eşitsizlikte x 'e göre $[a, b]$ üzerinden integral alınırsa

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\geq f(A)(b-a) + m \int_a^b (x-A) dx \\ &= f(A)(b-a) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$f(A) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

elde edilir ki, bu da (2.2)'nin sol tarafındaki eşitsizliği verir.

Diğer taraftan, f 'in I 'da konveksliği kullanılırsa $\forall x \in [a, b]$ için,

$$f(x) = f\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right)$$

$$\leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

olur. Bu eşitsizlikte, tekrar x 'e göre $[a, b]$ üzerinden integral alınırsa,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

elde edilir. Bu ise (2.2)'deki eşitsizliğin sağ tarafını verir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.2. f ve g fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığında gerçekteğerli, negatif olmayan ve konveks fonksiyonlar olduğunu varsayalım.

O halde

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b \int_0^1 f(tx + (1-t)y)g(f(tx + (1-t)y))dt dy dx \\ & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_0^1 f(x)g(x)dx + \frac{1}{8} [M(a, b) + N(a, b)] \end{aligned} \quad (2.3)$$

ve

$$\frac{3}{b-a} \int_a^b \int_0^1 f\left(tx + (1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) dt dx$$

$$\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx + \frac{1}{2}[M(a,b) + N(a,b)] \quad (2.4)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada

$$M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$$

$$N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$$

gösterimleri kullanılmıştır(Cristescu ve Lupsa, 2002).

Tanım 2.2.3. (Harmonik Konvekslik): $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ reel sayılarda bir aralık olmak üzere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \quad (2.5)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir. Eğer eşitsizlikte “ $\leq$ ” yerine “ $\geq$ ” kullanılırsa, bu durumda f ’ye harmonik konkav denir (İşcan, 2014).

Tanım 2.2.4. $[a,b] \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in [a,b]$ için

$$f(x) = f([a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}]^{-1}) = f\left(\frac{abx}{(a+b)x - ab}\right)$$

eşitliği sağlanıyorsa f ’ye $2ab / (a+b)$ noktasına göre harmonik simetrik fonksiyon denir (Latif ve ark., 2017).

Önerme 2.2.1. $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gerçekte (reel) bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

i) $I \subseteq (0, \infty)$, f konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise bu takdirde f fonksiyonu harmonik konvekstir.

ii) $I \subseteq (0, \infty)$, f harmonik konveks ve artmayan bir fonksiyon ise bu taktirde f fonksiyonu konvektir.

iii) $I \subseteq (-\infty, 0)$, f harmonik konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise bu taktirde f fonksiyonu konvektir.

iv) $I \subseteq (-\infty, 0)$, f konveks ve artmayan bir fonksiyon ise bu taktirde f fonksiyonu harmonik konvektir (İşcan, 2014).

Teorem 2.2.3. (Harmonik Konveks Fonksiyonlarda H-H Eşitsizliği): Harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

$a, b \in I$ öyle ki $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ bir harmonik konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \in L[a, b]$ ise bu taktirde,

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \quad (2.6)$$

eşitsizliği sağlanır (İşcan, 2014).

İspat: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks olduğundan dolayı $\forall x, y \in I$ için ve $t = \frac{1}{2}$ için harmonik konveksliğin $f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$ şeklindeki tanımı yardımıyla

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \leq \frac{f(y) + f(x)}{2}$$

yazılır. Eğer bu eşitsizlikte $x = \frac{ab}{ta+(1-t)b}$, $y = \frac{ab}{tb+(1-t)a}$ olarak alınırsa

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) + f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2}$$

olur. Daha sonra eşitsizliğin t değişkenine göre $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right) dt + \int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta + (1-t)b}\right) dt \right]$$

elde edilir. Köşeli parantezin içindeki her bir integral $\frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx$ ifadesine eşit olduğundan, eşitsizliğin sol tarafı ispatlanmış olur.

f, I da harmonik konveks olduğundan; $a < b$ olan $\forall a, b \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

yazılır. $t \in [0,1]$ için integral alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta + (1-t)b}\right) dt &= \frac{ab}{(b-a)} \int_a^b \frac{f(u)}{u^2} du \\ &= \frac{ab}{(b-a)} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

olur. Şimdi $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = 1$ biçiminde tanımlansın. Böylece her $x, y \in (0, \infty)$ ve $t \in [0,1]$ için

$$1 = f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) = tf(y) + (1-t)f(x) = 1$$

olur. f fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında harmonik konveks olduğundan

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = 1, \quad \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx = 1 \text{ ve } \frac{f(a) + f(b)}{2} = 1$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 2.2.2. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık, $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ verilen bir fonksiyon olsun ve $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ olsun.

f, I da harmonik konvektir $\Leftrightarrow f \circ g^{-1}, g(I)$ alt kümesinde konvektir.

İspat : $\Rightarrow u, v \in g(I)$ ve $t \in [0,1]$ keyfi alınan noktalar olsun. Bu durumda

$$(f \circ g)(tu + (1-t)v) \leq t(f \circ g)(u) + (1-t)(f \circ g)(v)$$

$$g(I) = \left\{ g(x) = \frac{1}{x}, x \in I \right\}$$

olduğu gösterilmelidir.

$u, v \in g(I)$ olduğunda $\exists a, b \in I: u = \frac{1}{a}, v = \frac{1}{b}$ dir. Dolayısıyla

$$(f \circ g^{-1})(tu + (1-t)v) = (f \circ g^{-1})\left(\frac{t}{a} + \frac{(1-t)}{b}\right)$$

$$= (f \circ g^{-1})\left(\frac{tb + (1-t)a}{ab}\right)$$

$$= f\left(g^{-1}\left(\frac{tb + (1-t)a}{ab}\right)\right) = f\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

$$= t(f \circ g^{-1})(u) + (1-t)(f \circ g^{-1})(v)$$

olur.

" $\Leftarrow$ " $a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere

$f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$ olduğu gösterilmelidir.

$a, b \in I$, $g(a) = \frac{1}{a}$ ve $g(b) = \frac{1}{b} \in g(I)$ ve $f \circ g^{-1}, g(I)$ 'da konveks olduğundan;
 $t \in [0,1]$ olmak üzere,

$$(f \circ g^{-1})\left(t\frac{1}{a} + (1-t)\frac{1}{b}\right) \leq t(f \circ g^{-1})\left(\frac{1}{a}\right) + (1-t)(f \circ g^{-1})\left(\frac{1}{b}\right)$$

dir. Dolayısıyla

$$f\left(g^{-1}\left(\frac{tb + (1-t)a}{ab}\right)\right) \leq tf\left(g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\right) + (1-t)f\left(g^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

olur ve ispat tamamlanır.

Uyarı 2.2.1. Yukarıdaki önermeyi kullanarak harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibi kolayca ispatlanabilir.

$f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks bir fonksiyon ise $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ olmak üzere yukarıdaki önermeye göre $f \circ g^{-1}, g(I)$ 'da konveks bir fonksiyondur. $u > v$ olan $\forall u, v \in g(I)$ için,

$$(f \circ g^{-1})\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{u-v} \int_v^u (f \circ g^{-1})(x) dx \leq \frac{(f \circ g^{-1})(u) + (f \circ g^{-1})(v)}{2}$$

olur. $u, v \in g(I)$ olduğu $\exists a, b \in I: u = g(a) = \frac{1}{a}, v = g(b) = \frac{1}{b}$ dir.

$$\left[u > v \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow a < b \right]$$

Böylece

$$(f \circ g^{-1})\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right) \leq \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f(g^{-1}(x)) dx \leq \frac{(f \circ g^{-1})\left(\frac{1}{a}\right) + (f \circ g^{-1})\left(\frac{1}{b}\right)}{2}$$

olup

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{(b-a)} \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f(g^{-1}(x)) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

yazılırsa

$$u = g(x) = \frac{1}{x}, du = -\frac{1}{x^2} dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{u^2}$$

olduğundan

$$\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f(g^{-1}(x)) dx = \int_a^b \frac{f(u)}{u^2} du$$

olur.

Uyarı 2.2.2. $a, b \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ olsun.

Harmonik ortalama: $H = H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$

Geometrik ortalama: $G = G(a, b) = \sqrt{ab}$

Aritmetik ortalama: $A = A(a, b) = \frac{a+b}{2}$ olmak üzere $H \leq G \leq A$ dır.

Önerme 2.2.3. $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $t \in [0, 1]$ olsun .

Ağırlıklı (genelleştirilmiş) Harmonik Ortalama: $H_t = H_t(a, b) = \frac{ab}{tb + (1-t)a}$

Ağırlıklı Geometrik ortalama: $G_t = G_t(a, b) = a^t b^{1-t}$

Ağırlıklı Aritmetik ortalama: $A_t = A_t(a, b) = ta + (1-t)b$ ise $H_t \leq G_t \leq A_t$ dir (İşcan, 2022).

İspat:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ \hline \end{array} \\ H_t \leq G_t \leq A_t \\ \hline 2 \end{array}$$

yazılırsa,

(1) için;

$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln x$ fonksiyonu $(0, \infty)$ da konvektir (Çünkü $f(x) = -\ln x$ fonsiyonunun ikinci türevi pozitiftir). Yani $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \quad (2.7)$$

$$-\ln(ta + (1-t)b) \leq -t \ln a - (1-t) \ln b = -\ln(a^t b^{1-t})$$

$$\ln A_t \geq \ln G_t \geq e^{\ln A_t} \geq e^{\ln G_t}$$

$$G_t \leq A_t \text{ olur.}$$

(2) için ; $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ konveks olup $\forall (a, b) \in [0, \infty)$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için (2.7)'den

$$\frac{1}{ta + (1-t)b} = \frac{1}{A_t} \leq \frac{t}{a} + \frac{1-t}{b} = \frac{tb + (1-t)a}{ab} = \frac{1}{H_t}$$

$$\Rightarrow H_t \leq A_t$$

olur.

(3) için; kabul edelim ki $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^+$ ve $\exists t \in [0, 1]$ için öyle ki $H_t > G_t$ olsun.

$$\ln H_t > \ln G_t$$

$$\ln(a, b) - \ln(tb + (1-t)a) > \ln(a^t b^{1-t}) = t \ln a + (1-t) \ln b$$

yazılırsa

$$-\ln(tb + (1-t)a) > t \ln a + (1-t) \ln b - \ln ab$$

$$= -(1-t) \ln a - t \ln b$$

$$= -\ln(a^{1-t} b^t)$$

$$\Rightarrow -\ln(A_{1-t}) > -\ln G_{1-t}$$

$$\Rightarrow A_{1-t} < G_{1-t}$$

olur ki bu çelişkidir. Yani $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için $H_t \leq G_t$ dir. Sonuç olarak $H_t \leq G_t \leq A_t$ ispatlanmış olur.

Önerme 2.2.4. $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, verilen bir fonksiyon olsun.

i) f azalmayan ve konveks ise f harmonik konvektir.

ii) f artmayan ve harmonik konveks ise f konvektir.

İspat: Bilindiği üzere; $\forall a, b \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için

$$H_t = \frac{ab}{tb + (1-t)a} \leq A_t = ta + (1-t)b$$

dir.

i) f azalmayan bir fonksiyon ise yukarıdaki eşitsizlikten

$$f(H_t) \leq f(A_t) = f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

yazılır.

ii) f artmayan bir fonksiyon ise yukarıdaki eşitsizlikten

$$f(A_t) \leq f(H_t) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

yazılır.

2.3. HH-Konveks Fonksiyonlar

Tanım 2.3.1. $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$ olsun. $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq \frac{f(x)f(y)}{(1-t)f(y) + tf(x)} \quad (2.8)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye I üzerinde HH-konveks (Harmonik-Harmonik-konveks) fonksiyon denir. Yukarıdaki eşitsizlik ters yönde sağlanırsa f fonksiyonu HH-konkavdır, denir (Anderson ve ark.,2007).

(2.8) eşitsizliğinin $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$(1-t) \frac{1}{f(x)} + t \frac{1}{f(y)} \leq \frac{1}{f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right)} \quad (2.9)$$

eşitsizliğine denk olduğu açıkça görülür.

Lemma 2.3.1. $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu I 'da HH-konveks (konkav) ve $g: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$ olsun. $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, I 'da HA-konkav (konveks) tir (Dragomir, 2018).

Yukarıdaki eşitsizlikleri dikkate alarak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Önerme 2.3.1. $f: [a, b] \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ olsun,
 $P_f: \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right] \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $P_f(x) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$ ve $Q_f: [a, b] \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $Q_f(x) = \frac{x}{f(x)}$ fonksiyonları verilsin. Bu taktirde,

- (i) f fonksiyonu $[a, b]$ 'da HH-konveks(konkav),
- (ii) P_f fonksiyonu $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ 'da konkav(konveks),
- (iii) Q_f fonksiyonu $[a, b]$ 'da konkav(konveks)

ifadelerine denk olduğu görülür (Dragomir, 2018).

2.4. Ag- Konveks Fonksiyonlar

Bu kısımda ilk kez tanımlanan Ag-konvekslik (Kadakal ve İşcan, 2019) ile ilgili bazı tanım ve ön bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 2.4.1. $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I)$ fonksiyonlar olsun.. Eğer,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tg(f(x)) + (1 - t)g(f(y)) \quad (2.10)$$

eşitsizliği her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için geçerli ise f fonksiyonuna Ag-konveks denir. I aralığı üzerindeki Ag-konveks fonksiyonların kümesi $AgC(I)$ ile gösterilir.

g fonksiyonu $g(x) \leq x$, $x \in f(I)$ şartını sağlıyorsa, o zaman f fonksiyonu aynı zamanda konvektir.

Önerme 2.4.1. $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ ve $J \supset f(I)$ olsun. Eğer f fonksiyonu Ag-konveks ise, o zaman her $y \in f(I)$ için $y \leq g(y)$ sağlanır.

İspat: Keyfi $y \in f(I)$ alalım. O halde, $y = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in I$ vardır. $a \in I \setminus \{x\}$ sabit olarak alırsak, o zaman her $t \in [0,1]$ için f fonksiyonu Ag -konveks olduğundan

$$f(tx + (1-t)a) \leq t(g \circ f)(x) + (1-t)(g \circ f)(a)$$

dır. $t = 1$ için $f(x) \leq g(f(x))$, yani $y \leq g(y)$ dir. Bu bize, her $y \in f(I)$ için $y \leq g(y)$ olduğunu gösterir.

Sonuç 2.4.1. i) Önerme 2.4.1'e göre her konveks fonksiyon Ag -konveks fonksiyondur. Gerçekten, her $t \in [0,1]$ ve her $a, b \in I$ için

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b) &\leq t f(a) + (1-t) f(b) \leq t g(f(a)) + (1-t) g(f(b)) \\ &\leq t(g \circ f)(a) + (1-t)(g \circ f)(b) \end{aligned}$$

dır. Bu eşitsizlikler $C(I) \subseteq AgC(I)$ olduğunu gösterir.

ii) Ancak, yukarıdaki ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Yani, her Ag -konveks fonksiyon, konveks fonksiyon olmayabilir.

Örneğin, $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x$ olsun. Her $x, y \in (-\infty, 0)$ için,

$$\frac{1}{tx + (1-t)y} \leq -t \frac{1}{x} - (1-t) \frac{1}{y}$$

olduğundan, f fonksiyonu Ag -konvekstir. Ama bu fonksiyon $(-\infty, 0)$ aralığında konveks değildir.

iii) $AgC(I) = C(I) \Leftrightarrow g(x) = x$ olduğu açıktır.

2.5. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem 2.5.1. (Üçgen Eşitsizliği) Herhangi u, v reel sayıları için

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

$$||u| - |v|| \leq |u - v|$$

$$||u| - |v|| \leq |u + v|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|u_1 + \dots + u_n| \leq |u_1| + \dots + |u_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović ve ark.,1993).

Teorem 2.5.2. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) f , $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(u) du \right| \leq \int_a^b |f(u)| du \quad (a < b) \quad (2.11)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović ve ark.,1993).

Teorem 2.5.3. (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar aynı zamanda $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović ve ark.,1993).

Tanım 2.5.1. (Power mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar aynı zamanda $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-1/q} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović ve ark.,1993).

İspat: $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise Hölder eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)g(x)|dx &= \int_a^b |f(x)|^{1/p} [|f(x)|^{1/q} |g(x)|] dx \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |f(x)| |g(x)|^q dx \right)^{1/q}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikte $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$ yazılırsa, $q = 1$ için de bu eşitsizlik sağlanır ve böylece istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.



BÖLÜM 3. MATERİYAL VE YÖNTEM

3.1. *Ag*-Konveks Fonksiyonlar

Bu bölümde, *Ag*-konveks fonksiyon (Kadakal ve İşcan, 2019) olarak adlandırılan konveks fonksiyon sınıfı için hem Hermite-Hadamard tipi integral eşitsizlikleri hem de *Ag*-konveks fonksiyonlar ile ilgili yeni eşitsizliklere yer verilmiştir.

Teorem 3.1.1. $c \in [0, \infty)$ olsun. Eğer f fonksiyonu *Ag*-konveks fonksiyon ve g lineer ise, cf fonksiyonu *Ag*-konveks fonksiyondur.

İspat: $c \in [0, \infty)$ için,

$$\begin{aligned}(cf)(tx + (1-t)y) &\leq c [t g(f(x)) + (1-t) g(f(y))] \\ &= t g(cf(x)) + (1-t) g(cf(y)) \\ &= t(g \circ (cf))(x) + (1-t)(g \circ (cf))(y)\end{aligned}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2. f, h fonksiyonları *Ag*-konveks ve g lineer ise, $f + h$ fonksiyonu *Ag*-konveks fonksiyondur.

İspat: $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$\begin{aligned}(f + h)(tx + (1-t)y) &= f((tx + (1-t)y)) + h((tx + (1-t)y)) \\ &\leq [t g(f(x)) + (1-t) g(f(y))] + [t g(h(x)) + (1-t) g(h(y))] \\ &= t[g(f(x)) + g(h(x))] + (1-t)[g(f(y)) + g(h(y))] \\ &= t g(f(x) + h(x)) + (1-t) g(f(y) + h(y)) \\ &= t(g \circ (f + h))(x) + (1-t)(g \circ (f + h))(y).\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.3. f fonksiyonu *Ag*-konveks ve azalmayan ve h konveks fonksiyon ise, $f \circ h$ *Ag*-konvekstir.

İspat: $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned}(f \circ h)(tx + (1-t)y) &= f(h(tx + (1-t)y)) \leq f(th(x) + (1-t)h(y)) \\ &\leq tg(f(h(x))) + (1-t)g(f(h(y))) \\ &\leq t(g \circ (f(h)))(x) + (1-t)(g \circ (f(h)))(y)\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır

Teorem 3.1.4. $f, h: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının her ikisi de negatif olmayan, monoton (artan veya azalan) ve $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I)$ fonksiyonu monoton (artan veya azalan) ve $g(u)g(v) \leq g(uv)$ şartını sağlasın. Eğer f, h Ag -konveks fonksiyon ise, o zaman fh fonksiyonu Ag -konveks fonksiyondur.

İspat: $f, h: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının her ikisi de negatif olmayan, monoton (artan veya azalan) ve $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I)$ fonksiyonu monoton (artan veya azalan) ve $g(u)g(v) \leq g(uv)$ şartını sağlasın. Eğer $x \leq y$ ise ($y \leq x$ durumu benzer şekilde yapılır) o zaman

$$[g(f(x)) - g(f(y))][g(h(y)) - g(h(x))] \leq 0$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}g(f(x))g(h(y)) + g(f(y))g(h(x)) \\ \leq g(f(x))g(h(x)) + g(f(y))g(h(y))\end{aligned} \tag{3.1}$$

elde edilir. Diğer yandan $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}(fh)(tx + (1-t)y) &= f(tx + (1-t)y)h(tx + (1-t)y) \\ &\leq [tg(f(x)) + (1-t)g(f(y))][tg(h(x)) + (1-t)g(h(y))] \\ &= t^2g(f(x))g(h(x)) + t(1-t)g(f(x))g(h(y)) \\ &\quad + t(1-t)g(f(y))g(h(x)) + (1-t)^2g(f(y))g(h(y)).\end{aligned}$$

yazılır. Daha sonra (3.1) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}(fh)(tx + (1-t)y) &\leq t^2g(f(x))g(h(x)) + (1-t)^2g(f(y))g(h(y)) \\ &\quad + t(1-t)[g(f(x))g(h(x)) + g(f(y))g(h(y))]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq t[t + (1 - t)]g(f(x))g(h(x)) + (1 - t)[t + (1 - t)]g(f(y))g(h(y)) \\
&= tg(f(x))g(h(x)) + (1 - t)g(f(y))g(h(y)) \\
&\leq tg(fh)(x) + (1 - t)g(fh)(y)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.2. *Ag*-Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Teorem 3.2.1 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ *Ag*-konveks fonksiyon, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I)$, $a < b$ olacak şekilde $a, b \in I$ ve $g \circ f \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (g \circ f)(u) du$$

eşitsizliği geçerlidir (Kadakal ve İşcan, 2019).

İspat: f fonksiyonunu *Ag*-konveks olduğundan,

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{[ta + (1-t)b] + [(1-t)a + tb]}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}(g \circ f)(ta + (1-t)b) + \frac{1}{2}(g \circ f)((1-t)a + tb).
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra, son eşitsizlikte $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integral alınırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (g \circ f)(u) du$$

olur ve ispat tamamlanır.

Uyarı 3.2.1. Eğer Teorem 3.2.1 de $g(x) = x$ alınırsa, konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafını elde edilir.

Teorem 3.2.2. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Ag -konveks fonksiyon, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I)$, $a < b$ olmak üzere $a, b \in I$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{(g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: f fonksiyonunun Ag -konveksliğini kullanarak ve $x = ta + (1-t)b$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &\leq \int_0^1 [tg(f(a)) + (1-t)g(f(b))] dt \\ &= \frac{(g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.1. Eğer teorem 3.2.2 de $g(x) = x$ alınırsa, konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir.

Teorem 3.2.3. f ve h reel değerli, negatif olmayan ve $[a, b]$ aralığında Ag -konveks fonksiyonlar olsun. Bu taktirde

$$\int_a^b \int_a^b \int_0^1 f(tx + (1-t)y) h(tx + (1-t)y) dt dy dx \quad (3.1)$$

$$\leq \frac{2(b-a)}{3} \int_a^b (g \circ f)(x) (g \circ h)(x) dx$$

$$+ \frac{1}{3} \left(\int_a^b (g \circ f)(x) dx \right) \left(\int_a^b (g \circ h)(y) dy \right) \quad (3.2)$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \int_0^1 f\left(tx + (1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) h\left(tx + (1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) dt dx \\
& \leq \frac{1}{3} \int_a^b (g \circ f)(x)(g \circ h)(x) dx + \frac{b-a}{3} (g \circ f)\left(\frac{a+b}{2}\right) (g \circ h)\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& + \frac{1}{6} (g \circ h)\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b (g \circ f)(x) dx + \frac{1}{6} (g \circ f)\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b (g \circ h)(x) dx
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

İspat: f ve g fonksiyonları Ag -konveks olduğundan, her $x, y \in [a, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq t(g \circ f)(x) + (1-t)(g \circ f)(y)$$

$$h(tx + (1-t)y) \leq t(g \circ h)(x) + (1-t)(g \circ h)(y)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& f(tx + (1-t)y)h(tx + (1-t)y) \\
& \leq t^2(g \circ f)(x)(g \circ h)(x) + (1-t)^2(g \circ f)(y)(g \circ h)(y) \\
& + t(1-t)[(g \circ f)(x)(g \circ h)(y) + (g \circ f)(y)(g \circ h)(x)].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. Ag -konveks fonksiyonun özelliğinden yararlanılarak eşitsizliğin her iki tarafının $[0, 1]$ aralığında integrali alınır

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \int_a^b \int_0^1 f(tx + (1-t)y)h(tx + (1-t)y) dt dy dx \\
& \leq \frac{2(b-a)}{3} \int_a^b (g \circ f)(x)(g \circ h)(x)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3} \left(\int_a^b (g \circ f)(x) dx \right) \left(\int_a^b (g \circ h)(y) dy \right) \quad (3.4)$$

elde edilir. Buradan f ve g fonksiyonları konveks olduğundan

$$f \left(tx + (1-t) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) \leq t (g \circ f)(x) + (1-t) (g \circ f) \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

$$h \left(tx + (1-t) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) \leq t (g \circ h)(x) + (1-t) (g \circ h) \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned} & f \left(tx + (1-t) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) h \left(tx + (1-t) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) \\ & \leq t^2 (g \circ f)(x) (g \circ h)(x) + (1-t)^2 (g \circ f) \left(\frac{a+b}{2} \right) (g \circ h) \left(\frac{a+b}{2} \right) \\ & + t(1-t) \left[(g \circ f)(x) (g \circ h) \left(\frac{a+b}{2} \right) + (g \circ f) \left(\frac{a+b}{2} \right) (g \circ h)(x) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. İlk eşitsizliğin ispatına benzer şekilde, (3.5)'in her iki tarafının $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^1 f \left(tx + (1-t) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) h \left(tx + (1-t) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) dt \quad (3.6)$$

$$\leq \frac{1}{3} \left[(g \circ f)(x) (g \circ h)(x) + (g \circ f) \left(\frac{a+b}{2} \right) (g \circ h) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{6} \left[(g \circ f)(x)(g \circ h) \left(\frac{a+b}{2} \right) + (g \circ f) \left(\frac{a+b}{2} \right) (g \circ h)(x) \right]$$

olur. f ve h fonksiyonları Ag -konveks olduğundan (3.6)'nın her iki tarafının $[a, b]$ üzerinden integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_0^1 f \left(tx + (1-t) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) h \left(tx + (1-t) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) dt dx \\ & \leq \frac{1}{3} \int_a^b (g \circ f)(x)(g \circ h)(x) dx + \frac{b-a}{3} (g \circ f) \left(\frac{a+b}{2} \right) (g \circ h) \left(\frac{a+b}{2} \right) \\ & + \frac{1}{6} (g \circ h) \left(\frac{a+b}{2} \right) \int_a^b (g \circ f)(x) dx + \frac{1}{6} (g \circ f) \left(\frac{a+b}{2} \right) \int_a^b (g \circ h)(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 3.2.2. Eğer Teorem 3.2.3'deki $g \circ f$ fonksiyonu konveks ise, bu durumda

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b \int_0^1 f(tx + (1-t)y) h(tx + (1-t)y) dt dy dx \\ & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (g \circ f)(x)(g \circ h)(x) dx + \frac{1}{8} [M(a, b) + N(a, b)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{3}{b-a} \int_a^b \int_0^1 f \left(tx + (1-t) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) h \left(tx + (1-t) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) dt dx \\ & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (g \circ f)(x)(g \circ h)(x) dx + \frac{1}{2} [M(a, b) + N(a, b)] \end{aligned} \quad (3.8)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned} M(a, b) &= (g \circ f)(a)(g \circ h)(a) + (g \circ f)(b)(g \circ h)(b) \\ N(a, b) &= (g \circ f)(a)(g \circ h)(a) + (g \circ f)(b)(g \circ h)(b) \end{aligned}$$

dir.

3.3. Harmonik Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımda (İşcan, 2014)'de Harmonik konveks fonksiyonlar için elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklere yer verilmiştir.

Lemma 3.3.1. $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ I^o da türevlenebilir bir fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun . $f' \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \\ &= \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)^2} f' \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) dt \end{aligned} \quad (3.9)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ I^o da türevlenebilir bir fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun .

$$I^* = \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)^2} f' \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) dt$$

olsun.

Kısmi integrasyon metodu ile

$$I^* = \frac{2t-1}{2} f \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) I_0^1 - \int_0^1 f \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) dt$$

elde edilir.

Son integralde

$$x = \frac{ab}{tb+(1-t)a}, \quad dx = \frac{-ab(b-a)}{(tb+(1-t)a)^2} dt = \frac{-x^2(b-a)}{ab} dt \text{ dönüşümleri yerine yazılırsa}$$

$$I^* = \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.1. $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. $q \geq 1$ için $|f'|^q$, $[a, b]$ 'de harmonik konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{ab} - \frac{2}{(b-a)^2} \ln \left(\frac{(a+b)^2}{4ab} \right) \\ \lambda_2 &= \frac{-1}{b(b-a)} + \frac{3a+b}{(b-a)^3} \ln \left(\frac{(a+b)^2}{4ab} \right) \\ \lambda_3 &= \frac{1}{a(b-a)} - \frac{3b+a}{(b-a)^3} \ln \left(\frac{(a+b)^2}{4ab} \right) = \lambda_1 - \lambda_2 \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\ & \leq \frac{ab(b-a)}{2} \lambda_1^{1-\frac{1}{q}} [\lambda_2 |f'(a)|^q + \lambda_3 |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir.

İspat: $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Lemma 3.3.1.'de Power mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\
& \leq \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)^2} \right| \left| f' \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) \right| dt \\
& \leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)^2} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)^2} \right| \left| f' \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan $|f'|^q$, $[a, b]$ 'de harmonik konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\
& \leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)^2} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{|1-2t| [t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q]}{(tb + (1-t)a)^2} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{ab(b-a)}{2} \lambda_1^{1-\frac{1}{q}} [\lambda_2 |f'(a)|^q + \lambda_3 |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{|1-2t|}{(tb + (1-t)a)^2} dt \\
& = \frac{1}{ab} - \frac{2}{(b-a)^2} \ln \left(\frac{(a+b)^2}{4ab} \right), \\
& \int_0^1 \frac{|1-2t|(1-t)}{(tb + (1-t)a)^2} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a(b-a)} - \frac{3b+a}{(b-a)^3} \ln \left(\frac{(a+b)^2}{4ab} \right), \\
&\quad \int_0^1 \frac{|1-2t| t}{(tb+(1-t)a)^2} dt \\
&= \frac{-1}{b(b-a)} + \frac{3a+b}{(b-a)^3} \ln \left(\frac{(a+b)^2}{4ab} \right)
\end{aligned}$$

hesaplamaları dikkate alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.2. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I^o da türevlenebilir bir fonksiyon $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a, b]$ 'de harmonik konveks fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \quad (3.11)$$

$$\leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} (\mu_1 |f'(a)|^q + \mu_2 |f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$\mu_1 = \frac{[a^{2-2q} + b^{1-2q}[(b-a)(1-2q) - a]]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)}$$

$$\mu_2 = \frac{[b^{2-2q} + a^{1-2q}[(b-a)(1-2q) - b]]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I^o da türevlenebilir bir fonksiyon $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Lemma 3.3.1.'de, Hölder eşitsizliği uygulanıp $|f'|^q$ 'nin $[a, b]$ 'de harmonik konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\
& \leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\int_0^1 |1-2t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{1}{(tb + (1-t)a)^{2q}} \left| f' \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{t |f'(a)|^q + (1-t) |f'(b)|^q}{(tb + (1-t)a)^{2q}} dt \right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\int_0^1 \frac{t}{(tb + (1-t)a)^{2q}} dt = \frac{[a^{2-2q} + b^{1-q}[(b-a)(1-2q) - a]]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)} \quad (3.12)$$

ve

$$\int_0^1 \frac{t}{(tb + (1-t)a)^{2q}} dt = \frac{[b^{2-2q} + a^{1-q}[(b-a)(1-2q) + b]]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)} \quad (3.13)$$

eşitliklerinden (3.11) eşitsizliğinin ispatı tamamlanmış olur.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümün temel amacı, Hg-konveks fonksiyon olarak adlandırılan yeni bir konveks fonksiyon sınıfı vermek ve hem Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri hem de Hg-konveks fonksiyonlar ile ilgili yeni eşitsizlikleri oluşturmaktadır. Özel durumlarda elde edilen sonuçlar literatürde elde edilen sonuçlarla çakışmaktadır.

4.1. Hg-Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.1.1. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I)$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Eğer,

$$f\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) \leq t[g(f(x))] + (1-t)[g(f(y))] \quad (4.1)$$

eşitsizliği her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için geçerli ise f fonksiyonuna Hg-konveks (veya (Harmonik ,g) –konveks) fonksiyon denir. Eğer (4.1) eşitsizliği tersine ise f fonksiyonu Hg-konkav olarak adlandırılır. I aralığı üzerindeki Hg- konveks fonksiyonların kümesi $HgC(I)$ ile gösterilir.

Yukarıdaki eşitsizliği $\varphi(x) = 1/x$, $x \neq 0$ olmak üzere

$$(f \circ \varphi^{-1})(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)) \leq t[g(f(x))] + (1-t)[g(f(y))]$$

yazmak mümkündür. Burdan yola çıkarak aşağıdaki önermeyi yazmak mümkündür. Ayrıca $g(x) = x$ alınırsa Hg-konveks fonksiyon tanımı harmonik konveks fonksiyon tanımına indirgenmiş olur.

Önerme 4.1.1. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I)$ olsun. Eğer f fonksiyonu I üzerinde Hg-konveks fonksiyondur ancak ve ancak $f \circ \varphi^{-1}$ fonksiyonu $\varphi(I) = \{\varphi(x) = 1/x : x \in I\}$ üzerinde Ag-konvekstir.

Önerme 4.1.2. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I)$ olsun. Eğer f fonksiyonu Hg-konveks ise, her $y \in f(I)$ için $y \leq g(y)$ sağlanır.

İspat: Keyfi $y \in f(I)$ alalım. O halde, $y = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in I$ vardır. $a \in I \setminus \{x\}$ sabit olarak alırsak, her $t \in [0,1]$ için f fonksiyonu Hg-konveks olduğundan

$$f\left(\frac{xa}{ta + (1-t)x}\right) \leq t [g(f(x))] + (1-t) [g(f(a))]$$

dır. $t = 1$ için $f(x) \leq g(f(x))$, yani $y \leq g(y)$ dir. Bu bize, her $y \in f(I)$ için $y \leq g(y)$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.1. $c \in [0, \infty)$ olsun. Eğer f Hg-konveks fonksiyon ve g lineer ise, cf fonksiyonu Hg-konveks fonksiyondur.

İspat: $c \in [0, \infty)$ için, f Hg-konveks fonksiyon ve g lineer olduğundan

$$\begin{aligned} (cf)\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) &\leq c [tg(f(x)) + (1-t) g(f(y))] \\ &= tg(cf(x)) + (1-t)g(cf(y)) \\ &= t(g \circ (cf))(x) + (1-t)(g \circ (cf))(y) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. $f, h \in Hg C(I)$ ve g lineer ise, $f + h \in Hg C(I)$ 'dir.

İspat: $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için, $f, h \in Hg C(I)$ ve g lineer olduğundan

$$\begin{aligned} (f + h)\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) &= f\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) + h\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) \\ &\leq [tg(f(x)) + (1-t) g(f(y))] + [tg(h(x)) + (1-t) g(h(y))] \\ &= t[g(f(x)) + g(h(x))] + (1-t)[g(f(y)) + g(h(y))] \\ &= tg(f(x) + h(x)) + (1-t)g(f(y) + h(y)) \\ &= t(g \circ (f + h))(x) + (1-t)(g \circ (f + h))(y) \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $h: I \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ HH konveks fonksiyon ve $J \supset I$ olmak üzere $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ Hg -konveks ve azalmayan ise $f \circ h$ Hg -konveks fonksiyondur.

İspat: $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için , $h: I \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ HH konveks fonksiyon ve $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ Hg -konveks ve azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} (f \circ h) \left(\frac{xy}{ty + (1-t)x} \right) &= f \left(h \left(\frac{xy}{ty + (1-t)x} \right) \right) \leq f \left(\frac{h(x)h(y)}{th(y) + (1-t)h(x)} \right) \\ &\leq tg(f(h(x))) + (1-t)g(f(h(y))) \\ &\leq t(g \circ (f(h)))(x) + (1-t)(g \circ (f(h)))(y) \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4. $f, h: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının her ikisi de negatif olmayan , aynı monotonluğa (artan veya azalan) sahip fonksiyonlar ve $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I) \cup h(I)$ fonksiyonu monoton (artan veya azalan) ve $g(u)g(v) \leq g(uv)$ şartını sağlasın. Eğer f, h Hg -konveks fonksiyon ise, o zaman fh fonksiyonu Hg -konveks fonksiyondur.

İspat: Eğer $x \leq y$ ise ($y \leq x$ durumu benzer şekilde yapılır) f, h ve g aynı monotonluğa sahip fonksiyonlar olduklarından

$$[g(f(x)) - g(f(y))][g(h(y)) - g(h(x))] \leq 0$$

dır. Bu da

$$\begin{aligned} g(f(x))g(h(y)) + g(f(y))g(h(x)) \\ \leq g(f(x))g(h(x)) + g(f(y))g(h(y)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

olduğunu gösterir. Diğer yandan $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} (fh) \left(\frac{xy}{ty + (1-t)x} \right) &= f \left(\frac{xy}{ty + (1-t)x} \right) h \left(\frac{xy}{ty + (1-t)x} \right) \\ &\leq [tg(f(x)) + (1-t)g(f(y))][tg(h(x)) + (1-t)g(h(y))] \\ &= t^2g(f(x))g(h(x)) + t(1-t)g(f(x))g(h(y)) \\ &\quad + t(1-t)g(f(y))g(h(x)) + (1-t)^2g(f(y))g(h(y)) \end{aligned}$$

yazılır. Şimdi (4.2) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(fh)(tx + (1-t)y) &\leq t^2 g(f(x))g(h(x)) + (1-t)^2 g(f(y))g(h(y)) \\
&\quad + t(1-t)[g(f(x))g(h(x)) + g(f(y))g(h(y))] \\
&= t[t + (1-t)] g(f(x))g(h(x)) + (1-t)[t + (1-t)] g(f(y))g(h(y)) \\
&= tg(f(x))g(h(x)) + (1-t) g(f(y))g(h(y)) \\
&= tg(fh)(x) + (1-t)g(fh)(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2. Hg -Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 4.2.1. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ Hg -konveks fonksiyon, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I)$, bir fonksiyon öyle ki $a < b$ olan $a, b \in I$ için $g \circ f \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{(g \circ f)(u)}{u^2} du$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonunun Hg -konveksliğine göre, $H_t = \frac{ab}{tb+(1-t)a}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) &= f\left(\frac{2H_t H_{1-t}}{H_t + H_{1-t}}\right) \\
&\leq \frac{1}{2} (g \circ f)(H_t) + \frac{1}{2} (g \circ f)(H_{1-t})
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, $t \in [0,1]$ ye göre son eşitsizlikte integral alınırsa

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{(g \circ f)(u)}{u^2} du$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 4.2.1. Eğer Teorem 4.2.1 de $g(x) = x$ alınırsa , o zaman harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir.

Teorem 4.2.2. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Hg -konveks fonksiyon, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I)$ bir fonksiyon öyle ki $a < b$ olan $a, b \in I$ için $f \in L[a, b]$ ise

$$\frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq \frac{(g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)}{2} \quad (4.3)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: f fonksiyonunun Hg -konveksliği kullanılır ve $x = \frac{ab}{tb+(1-t)a}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt &= \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq \int_0^1 [tg(f(a)) + (1-t)(f(b))] dt \\ &= \frac{(g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)}{2} \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Uyarı 4.2.2. Eğer Teorem 4.2.2 de $g(x) = x$ alınırsa, harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını elde edilir.

Teorem 4.2.3. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Hg -konveks fonksiyon, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I)$ ve $a < b$ olan $a, b \in I$ için $f \in L[a, b]$ olsun. Bu taktirde , f , $2ab / (a + b)$ noktasına göre harmonik simetrik ise her $x \in [a, b]$ için

$$f(x) \leq \frac{(g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)}{2} \quad (4.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $x \in [a, b]$ bir nokta olsun. Bu taktirde en az bir $t \in [0, 1]$ sayısı vardır öyle ki

$$x = \frac{ab}{tb + (1-t)a}$$

ve bu durumda

$$\frac{abx}{(a+b)x - ab} = \frac{ab}{ta + (1-t)b}$$

olup, bu iki eşitlikte, f' nin $2ab / (a + b)$ noktasına göre harmonik simetrik ve Hg -konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2f(x) &= f(x) + f\left(\frac{abx}{(a+b)x - ab}\right) \\ &= f\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right) + f\left(\frac{ab}{ta + (1-t)b}\right) \\ &\leq t[g(f(a))] + (1-t)[g(f(b))] + t[g(f(b))] + (1-t)[g(f(a))] \\ &= g(f(a)) + g(f(b)). \end{aligned}$$

olur. Böylece istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Yukarıdaki teoremin yardımıyla $2ab / (a + b)$ noktasına göre harmonik simetrik olan iki Hg -konveks fonksiyon için aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.4. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık, $f, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ Hg -konveks fonksiyonlar, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I) \cup h(I)$ ve $a < b$ olan $a, b \in I$ için $f, h \in L[a, b]$ olsun. Bu taktirde, f , $2ab / (a + b)$ noktasına göre harmonik simetrik ise

$$\begin{aligned} &\left| \frac{(g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)}{2} \right| \left| \frac{(g \circ h)(a) + (g \circ h)(b)}{2} \right| + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)h(x) dx \\ &\geq \frac{(g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)}{2} \frac{1}{b-a} \int_a^b h(x) dx \\ &\quad + \frac{(g \circ h)(a) + (g \circ h)(b)}{2} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $f, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ Hg -konveks fonksiyonlar olduğundan (4.4) eşitsizliğinden her $x \in [a, b]$ için,

$$\frac{(g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)}{2} - f(x) \geq 0$$

ve

$$\frac{(g \circ h)(a) + (g \circ h)(b)}{2} - h(x) \geq 0$$

yazılır. Böylece her $x \in [a, b]$ için

$$\left[\frac{(g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)}{2} - f(x) \right] \left[\frac{(g \circ h)(a) + (g \circ h)(b)}{2} - h(x) \right] \geq 0$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)}{2} \right] \left[\frac{(g \circ h)(a) + (g \circ h)(b)}{2} \right] + f(x)h(x) \\ & \geq \frac{(g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)}{2} h(x) + \frac{(g \circ h)(a) + (g \circ h)(b)}{2} f(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafında $[a, b]$ üzerinde integrali alınırsa

$$\left[\frac{(g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)}{2} \right] \left[\frac{(g \circ h)(a) + (g \circ h)(b)}{2} \right] + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)h(x) dx$$

$$\geq \frac{(g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)}{2} \frac{1}{b-a} \int_a^b h(x) dx \\ + \frac{(g \circ h)(a) + (g \circ h)(b)}{2} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.5. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Hg -konveks fonksiyon, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I)$ ve $a, b \in I$ öyle ki $a < b$ olsun. Bu taktirde, f , $2ab / (a + b)$ noktasına göre harmonik simetrik ise her $x \in [a, b]$ için

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq (g \circ f)(x) \quad (4.5)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $x \in [a, b]$ keyfi alınan bir nokta olsun. Bu taktirde en az bir $t \in [0, 1]$ sayısı vardır öyle ki

$$x = \frac{ab}{tb + (1-t)a} = H_t$$

şeklindedir. f fonksiyonunun Hg -konveksliği göz önüne alınırsa

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = f\left(\frac{2H_t H_{1-t}}{H_t + H_{1-t}}\right) \\ \leq \frac{1}{2} (g \circ f)(H_t) + \frac{1}{2} (g \circ f)(H_{1-t}).$$

elde edilir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikte, f fonksiyonu $2ab / (a + b)$ noktasına göre harmonik simetrik olduğundan

$$f(x) = f(H_t) = f(H_{1-t})$$

yazılır. Böylece istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Yukarıdaki teoremin yardımıyla $2ab / (a + b)$ noktasına göre harmonik simetrik olan iki Hg -konveks fonksiyon için aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.6. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık, $f, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ Hg -konveks fonksiyonlar, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I) \cup h(I)$ ve $a < b$ olan $a, b \in I$ için $f, h \in L[a, b]$ olsun. Bu taktirde, f , $2ab / (a + b)$ noktasına göre harmonik simetrik ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \int_a^b (g \circ f)(x)(g \circ h)(x) dx + f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) h\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \\ & \geq h\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \frac{1}{b-a} \int_a^b (g \circ f)(x) dx + f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \frac{1}{b-a} \int_a^b (g \circ h)(x) dx \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $f, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ Hg -konveks fonksiyonlar olduklarından (4.4) eşitsizliğinden her $x \in [a, b]$ için

$$(g \circ f)(x) - f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \geq 0$$

ve

$$(g \circ h)(x) - h\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \geq 0$$

yazılır. Böylece her $x \in [a, b]$ için

$$\left[(g \circ f)(x) - f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \right] \left[(g \circ h)(x) - h\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \right] \geq 0$$

olup, buradan

$$(g \circ f)(x) (g \circ h)(x) + f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) h\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$$

$$\geq (g \circ f)(x) h\left(\frac{2ab}{a+b}\right) + (g \circ h)(x) f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafında $[a, b]$ üzerinde x e göre integral alınırsa

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b (g \circ f)(x) (g \circ h)(x) dx + f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) h\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$$

$$\geq h\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \frac{1}{b-a} \int_a^b (g \circ f)(x) dx + f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \frac{1}{b-a} \int_a^b (g \circ h)(x) dx$$

elde edilir.

Teorem 4.2.7. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık, $f: I \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Hg -konveks fonksiyon, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I)$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. Bu taktirde $a < b$ olan her $a, b \in I$ için

$$\frac{ab}{b-a} \int_a^b f(x) f\left(\frac{abx}{(a+b)x - ab}\right) \frac{1}{x^2} dx \quad (4.6)$$

$$\leq \frac{2}{3} [g(f(a)) - g(f(b))] + \frac{1}{6} [g^2(f(a)) + g^2(f(b))]$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.6) eşitsizliğinin sol tarafındaki integralde $x = \frac{ab}{tb + (1-t)a}$ değişken değiştirmesi yapılırsa ve f fonksiyonunun Hg -konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{ab}{b-a} \int_a^b f(x) f\left(\frac{abx}{(a+b)x - ab}\right) \frac{1}{x^2} dx \\ &= \int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right) f\left(\frac{ab}{ta + (1-t)b}\right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \{t[g(f(a))] + (1-t)[g(f(b))]\} \{t[g(f(b))] + (1-t)[g(f(a))]\} dt \\
&= \frac{2}{3} [g(f(a))g(f(b))] + \frac{1}{6} [g^2(f(a)) + g^2(f(b))]
\end{aligned}$$

olur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Uyarı 4.2.4. Eğer yukarıdaki teoremden f fonksiyonu $2ab/(a+b)$ noktasına göre harmonik simetrik alınırsa

$$\frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq g^2(f(a)) = g^2(f(b))$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.8. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık, $f, h : I \rightarrow [0, \infty)$ Hg -konveks fonksiyonlar, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset f(I) \cup h(I)$ öyle ki $a < b$ olan $a, b \in I$ için $f, h \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{ab}{b-a} \int_a^b f(x)h(x) \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{1}{3} M_{g,f,h}(a, b) + \frac{1}{6} N_{g,f,h}(a, b) \quad (4.7)$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $M_{g,f,h}(a, b) = g(f(a))g(h(a)) + g(f(b))g(h(b))$ ve $N_{g,f,h}(a, b) = g(f(a))g(h(b)) + g(f(b))g(h(a))$ olur.

İspat: (4.7) eşitsizliğinin sol tarafındaki integralde $x = \frac{ab}{tb+(1-t)a}$ değişken değiştirmesi yapılırsa ve f fonksiyonunun Hg -konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{ab}{b-a} \int_a^b f(x)h(x) \frac{1}{x^2} dx \\
&= \int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) h\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \{t[g(f(a))] + (1-t)[g(f(b))]\} \{t[g(h(a))] + (1-t)[g(h(b))]\} dt \\
&= \frac{1}{3} [g(f(a))g(h(a)) + g(f(b))g(h(b))] \\
&\quad + \frac{1}{6} [g(f(a))g(h(b)) + g(f(b))g(h(a))]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 4.2.9. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık, $f, h : I \rightarrow [0, \infty)$ ve $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar, öyle ki $p, q > 1$ ve $1/p + 1/q = 1$ olmak üzere $a < b$ olan $a, b \in I$ için $f^p, h^q \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde f^p ve h^q $[a, b]$ üzerinde Hg -konveks fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned}
&\frac{ab}{b-a} \int_a^b f(x) h(x) \frac{1}{x^2} dx \\
&\leq \left(\frac{(g \circ f)^p(a) + (g \circ f)^p(b)}{2} \right)^{1/p} \left(\frac{(g \circ h)^q(a) + (g \circ h)^q(b)}{2} \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.7) eşitsizliğinin sol tarafındaki integralde önce Hölder integral eşitsizliği uygulanır, sonra f fonksiyonunun Hg -konveksliği kullanılırsa, (4.3) eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\frac{ab}{b-a} \int_a^b f(x) h(x) \frac{1}{x^2} dx \\
&\leq \left(\frac{ab}{b-a} \int_a^b f^p(x) \frac{1}{x^2} dx \right)^{1/p} \left(\frac{ab}{b-a} \int_a^b h^q(x) \frac{1}{x^2} dx \right)^{1/q} \\
&\leq \left(\frac{(g \circ f^p)(a) + (g \circ f^p)(b)}{2} \right)^{1/p} \left(\frac{(g \circ h^q)(a) + (g \circ h^q)(b)}{2} \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4.3. Hg-Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımda elde edilen sonuçlar sırasıyla Teorem 3.3.1. ve Teorem 3.3.2’de elde edilen sonuçların bir genellemesi olup, $g(x) = x$ koşulu altında aynı sonuçlara inmektedir.

Teorem 4.3.1. $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 ’da türevlenebilir bir fonksiyon, $q \geq 1$ olmak üzere $J \supset |f'|^q \in (I^0)$, $g: J \rightarrow (0, \infty)$ verilen bir fonksiyon, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olsun. $f' \in L[a, b]$ ve $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde Hg-konveks bir fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{ab} - \frac{2}{(b-a)^2} \ln \left(\frac{(a+b)^2}{4ab} \right) \\ \lambda_2 &= \frac{-1}{b(b-a)} + \frac{3a+b}{(b-a)^3} \ln \left(\frac{(a+b)^2}{4ab} \right) \\ \lambda_3 &= \frac{1}{a(b-a)} - \frac{3b+a}{(b-a)^3} \ln \left(\frac{(a+b)^2}{4ab} \right) = \lambda_1 - \lambda_2\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\ & \leq \frac{ab(b-a)}{2} \lambda_1^{1-\frac{1}{q}} [\lambda_2 (g \circ |f'|^q)(a) \\ & \quad + \lambda_3 (g \circ |f'|^q)(b)]^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{4.8}$$

dir.

İspat: Lemma 3.3.1.’den yararlanarak Power mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2} \right| \left| f' \left(\frac{ab}{tb+(1-t)a} \right) \right| dt \\
&\leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2} \right| \left| f' \left(\frac{ab}{tb+(1-t)a} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $[a,b]$ de $|f'|^q$, nun Hg- konveksliği ile

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\
&\leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \frac{|1-2t| [t(g \circ |f'|^q)(a) + (1-t)(g \circ |f'|^q)(b)]}{(tb+(1-t)a)^2} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{ab(b-a)}{2} \lambda_1^{1-\frac{1}{q}} [\lambda_2 (g \circ |f'|^q)(a) + \lambda_3 (g \circ |f'|^q)(b)]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.2. $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir bir fonksiyon, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $J \supset |f'|^q \in (I^0)$, $g: J \rightarrow (0, \infty)$ verilen bir fonksiyon, $a, b \in I^o$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, Hg-konveks bir fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\
& \leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\mu_1 (g \circ |f'|^q)(a) + \mu_2 (g \circ |f'|^q)(b) \right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\mu_1 = \frac{[a^{2-2q} + b^{1-2q}[(b-a)(1-2q) - a]]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)},$$

$$\mu_2 = \frac{[b^{2-2q} + a^{1-2q}[(b-a)(1-2q) - b]]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)},$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 3.3.1., Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$ 'nun Hg- konveksliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\
& \leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\int_0^1 |1-2t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{1}{(tb + (1-t)a)^{2q}} \left| f' \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{t(g \circ |f'|^q)(a) + (1-t)(g \circ |f'|^q)(b)}{(tb + (1-t)a)^{2q}} dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\int_0^1 \frac{t}{(tb + (1-t)a)^{2q}} = \frac{[a^{2-2q} + b^{1-q}[(b-a)(1-2q) - a]]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)} \quad (4.10)$$

ve

$$\int_0^1 \frac{t}{(tb + (1-t)a)^{2q}} = \frac{[b^{2-2q} + a^{1-q}[(b-a)(1-2q) + b]]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)} \quad (4.11)$$

eşitliklerinden (4.9) eşitsizliğinin ispatı tamamlanmış olur.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasının araştırma bulgular bölümünde Hg-konveks fonksiyon olarak adlandırılan yeni bir fonksiyon sınıfı tanımlanmış, bu fonksiyon sınıfına bazı örnekler verilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Daha sonra Hg-konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri elde edilip, daha önce literatürde mevcut olan bir özdeşlik yardımı ile Hg-konveks fonksiyonlar için bazı yeni Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Böylece literatüre yeni bir fonksiyon sınıfı ve Hg-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler kazandırılmış, fonksiyonların bu sınıfı için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Kullanılan ispat yöntemi konveks fonksiyonlarla ilgili daha önceki çalışmalara benzer olarak yapılmıştır. Bulgular kısmında elde edilen sonuçlar yeni olup özel durumlarda harmonik konveks fonksiyonlarla ilgili sonuçlara inmektedir. Bu anlamda da bu alanda çalışan araştırmacılar için yeni bir kaynak oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

- Adams, R. A., Essex, C. 2010. Calculus A Complete Course, Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario, pp 934.
- Anderson G.D., Vamanamurthy M.K. and Vuorinen M. 2007. Generalized convexity and inequalities, J.Math. Anal. Appl., 335, pp. 1294-1308.
- Bayraktar, M. 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.
- Bayraktar, M. 2010. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.
- Chen, X 2002. Some properties of semi-E-convex functions. J. Math. Anal. Appl. 275, 251-262.
- Cristescu, G, Lupsa, L 2002. Non-Connected Convexities and Applications. Kluwer Academic, Dordrecht
- Dragomir S.S., 2018. Inequalities of Hermite-Hadamard type for HH-convex functions. Acta Comm. Univ. Tortuensis Math., Volume 22, Number 2, pp. 179-190. Preprint RGMIA Res. Rep. Coll., 18 (2015), Art 80. <https://rgmia.org/papers/v18/v18a80.pdf>.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M. 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, RGMIA Monographs, Victoria University.
- Hadamard, J. 1893. Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, Journal De Mathématiques Pures Et Appliquées, 58, 171-215.
- Hermite, C. 1883. Sur deux limites d'une integrale, Mathesis, 3, 82-83.
- İşcan, İ., 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 43 (6), 935-942.
- İşcan İ. 2022. On weighted means and MN-convex functions, Turkish Journal of Inequalities, 5(2), 70-81.
- Kadakal H., İşcan İ. 2019. Ag-Convex Functions, Journal of Abstract and Computational Mathematics 4, No.1, 11-17.
- Latif, M.A., Dragomir S.S., Momoniat, E. 2017. Some Fejer type inequalities for harmonically convex functions with applications to special means, International Journal of Analysis and Applications, 13(1), 1-14.

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740 pp, Dordrecht/Boston/London.

Niculescu, C., Persson, L.E. 2006. Convex Functions and Their Applications. CMS Books in Mathematics. Springer, New York.

Pečarić, J., Proschan, F. And Tong, Y.L. 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press, Inc., Boston.



ÖZ GEÇMİŞ

Nagihan KURT GÜLSU İlk ve orta eğitimini Samsun'da tamamladı. 2001 yılında Samsun Atatürk Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2002 yılında başladığı Ondokuz Mayıs Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü 2006 yılında bitirdi. Aynı yıl İstanbul ilinin Küçükçekmece ilçesinde bir devlet okuluna atanarak öğretmenliğe başladı. Daha sonra Rize- Ardeşen'de doğu görevini tamamladı. Son olarak 2011 yılında Giresun iline atandı. Giresun Üniversitesi'nde Matematik bölümünü tamamladı ve Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitime başladı. Halen Giresun'da bir devlet okulunda öğretmenlik yapmaktadır. Bir kız çocuğu annesidir.