

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



HİBRİT SAYILAR VE BAZI GEOMETRİK UYGULAMALARI

İskender ÖZTÜRK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2023

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



HİBRİT SAYILAR VE BAZI GEOMETRİK UYGULAMALARI

İskender ÖZTÜRK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2023

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİBRİT SAYILAR VE BAZI GEOMETRİK UYGULAMALARI

İskender ÖZTÜRK

MATEMATİK

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2023

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİBRİT SAYILAR VE BAZI GEOMETRİK UYGULAMALARI

İskender ÖZTÜRK

MATEMATİK

DOKTORA TEZİ

Bu tez/...../20..... tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Danışman)

Doç. Dr. Ayhan DİL

Doç. Dr. Semail ÜLGİN

Dr. Öğr. Üyesi Ayşe YILMAZ CEYLAN

Doç. Dr. Melek ERDOĞDU

ÖZET

HİBRİT SAYILAR VE BAZI GEOMETRİK UYGULAMALARI

İskender ÖZTÜRK

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Haziran 2023, 109 sayfa

Bu tezde hibrit sayıların bazı geometrik uygulamaları incelenmiştir. Birinci bölümde kompleks sayılardan kuaterniyonlara kadar olan sayıların tarihi ve özellikleri hakkında kısa bir bilgi ve tezin ana hatları verilmiştir. İkinci bölümde, 2 boyutlu sayı sistemleri olan kompleks, hiperbolik ve dual sayıların genel özellikleri ve hibrit sayıların özellikleri verilmiştir. 4 boyutlu sayı sistemleri olan kuaterniyonlar ve split kuaterniyonların geometrik yorumları, $\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}_1^3$ uzayında dönme dönüşümü matrisleri verilmiştir. Ayrıca bu bölümde bir koniğe göre bir noktanın inversiyonu ve Möbius dönüşümü tanıtılmıştır. Son bölümde hibrit sayıların geometrisi tanıtılmıştır. 3 boyutlu hibrit uzay, vektörel çarpım ve düzlem tanımı verilmiştir. Eliptik, hiperbolik ve parabolik dönme dönüşümleri incelenmiştir. Ayrıca Rodrigues formülü ve Cayley dönüşümü yardımıyla dönme matrisleri elde edilmiştir. Hibrit sayılar yardımıyla bir noktanın bir koniğe göre inversi, bir koniğin bir koniğe göre inversi incelenmiştir. Son olarak hibrit sayı elemanlı 2×2 matrislerin determinantı ve hibrit sayılar üzerinde Möbius dönüşümü incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELE: Hibrit sayılar, kuaterniyonlar, split kuaterniyonlar, dönme dönüşümü, inversiyon dönüşümü, Möbius dönüşümü.

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Doç. Dr. Ayhan DİL

Doç. Dr. Semail Ülgen

Dr. Öğr. Üyesi Ayşe YILMAZ CEYLAN

Doç. Dr. Melek ERDOĞDU

ABSTRACT

HYBRID NUMBERS AND THEIR SOME GEOMETRIC APPLICATIONS

İskender ÖZTÜRK

PhD Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

June 2023, 109 pages

In this thesis, some geometric applications of hybrid numbers are investigated. In the first chapter, a brief information about the history and properties of numbers from complex numbers to quaternions and the outline of the thesis are given. In the second chapter, the general properties of complex, hyperbolic and dual numbers, which are 2-dimensional number systems, and the properties of hybrid numbers are given. Geometric interpretations of quaternions and split quaternions, which are 4-dimensional number systems, and rotation transformation matrices in the space $\mathbb{E}^3$ and $\mathbb{E}_1^3$ are given. Also in this section, the inversion of a point with respect to a conic and the Möbius transform are introduced. In the last section, the geometry of hybrid numbers is introduced. 3D hybrid space, vector product and plane definitions are given. Elliptic, hyperbolic and parabolic rotation transformations are studied. In addition, rotation matrices are obtained with the help of Rodrigues formula and Cayley transform. With the help of hybrid numbers, the inversion of a point with respect to a conic and the inversion of a conic with respect to a conic were examined. Finally, the determinant of 2×2 matrices with hybrid number elements and the Möbius transform on hybrid numbers are examined.

KEYWORDS: Hybrid numbers, quaterniyonlar, split quaterniyonlar, rotation map, inversion map, Möbius map.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Assoc. Prof. Dr. Ayhan DİL

Assoc. Prof. Dr. Semail Ülgen

Asst. Prof. Dr. Ayşe YILMAZ CEYLAN

Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

ÖNSÖZ

Bu çalışma esnasında kuaterniyon ve split kuaterniyonların geometrik özellikleri, bir koniğe göre inversiyon ve Möbius dönüşümü incelenmiştir. Hibrit sayılar split kuaterniyonlara izomorf olduğu için split kuaterniyonlar yardımıyla elde edilen geometrik sonuçların bazıları hibrit sayılar yardımıyla elde edilmiştir. Hibrit sayıların birimleri eliptik, hiperbolik ve parabolik birimlerden oluştuğundan bu birimler yardımıyla eliptik, hiperbolik ve dual düzlemler elde edilmiştir. Bu sayede bu düzlemler üzerindeki bir noktanın bir elips, hiperbol veya dual çembere, parabole göre inversi alınmıştır. Son olarak hibrit sayılar üzerinde Möbius dönüşümü incelenmiştir.

Bu tezin hazırlanması esnasında, her türlü yardım ve fedakarlığı esirgemeyen, bilgisi, tecrübesi ve destekleri ile çalışmalarımda bana yol gösteren değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR'e en içten duygularla teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu çalışmamı, hayatım boyunca beni maddi ve manevi anlamda destekleyip cesaretlendiren, başaracağıma her zaman inanan aileme ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	ii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	5
2.1. Hiper-Kompleks Sayılar ve Dönme Dönüşümü	5
2.2. Kompleks Sayıların Genelleştirmesi	9
2.3. Hibrit Sayılar	12
2.3.1. Hibrit Sayılardaki İşlemler	13
2.3.2. Hibrit Sayıların Normu ve Sınıflandırılması	14
2.3.3. Hibrit Sayılar için Skaler ve Vektör Çarpımı	16
2.4. Hibrit Sayıların Temsilleri	17
2.4.1. Hibrit Sayıların Matris Temsilleri	17
2.4.2. Hibrit Sayıların Kutupsal Gösterimleri	20
2.5. Kuaterniyonlar ve 3-Boyutlu Uzayda Dönme Dönüşümü	22
2.5.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Dönme Matrisleri	23
2.6. Split Kuaterniyonlar ve 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Dönme	25
2.6.1. Timelike Split Kuaterniyonlarla Hiperboloid Üzerindeki Dönme	28
2.7. Bir Koniğe Göre Bir Noktanın İnversonu	30
2.8. Möbius Dönüşümü	33
3. MATERYAL VE METOT	36

4. BULGULAR VE TARTIŞMA	37
4.1. Hibrit Sayıların Geometrisine Giriş	37
4.1.1. Üç Boyutlu Hibrit Uzay	37
4.1.2. Hibrit Sayılarla Eliptik Dönme Dönüşümleri	42
4.1.3. Düzlemde Eliptik Dönme Dönüşümü	45
4.1.4. Karşılıklı Olarak Ortogonal Düzlemlerde Eliptik Dönme	47
4.1.5. Hibridyen Dönme Dönüşümünün Matris Temsili	50
4.1.6. Hiperbolik Hibrit Sayıların Geometrisi	54
4.1.7. Düzlemde Hiperbolik Dönme Dönüşümü	57
4.1.8. Karşılıklı Olarak Ortogonal Düzlemlerde Hiperbolik Dönme	59
4.1.9. Hiperbolik Dönme Dönüşümünün Matris Temsili	62
4.1.10. Parabolik Hibrit Sayıların Geometrisi	64
4.1.11. Düzlemde Parabolik Dönme Dönüşümü	66
4.1.12. Karşılıklı Olarak Ortogonal Düzlemlerde Parabolik Dönme	67
4.1.13. Parabolik Dönme Dönüşümünün Matris Temsili	71
4.2. Hibrit sayılar ve İnversiyon Dönüşümü	72
4.3. Hibrit sayılar ve Möbius Dönüşümü	83
4.3.1. 2×2 Hibrit Elemanlı Matrislerin Determinantı	83
4.3.2. Hibrit sayılarla Möbius Dönüşümü	86
5. SONUÇLAR	98
6. KAYNAKLAR	102
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum “HİBRİT SAYILAR VE BAZI GEOMETRİK UYGULAMALARI” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

...../...../20.....

İskender ÖZTÜRK

İmza



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\hat{\mathbb{R}}$	: $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\hat{\mathbb{C}}$	: $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$\mathbb{H}$	Kuaterniyonlar kümesi
$\hat{\mathbb{H}}$	Split kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{K}$	: Hibrit sayılar kümesi
$\mathbb{TK}$	: Timelike hibrit sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{TK}}$	: $\mathbb{TK} \cup \{\infty\}$
$\langle, \rangle$	: Skaler çarpım
$\times$	: Vektörel çarpım
I_2	: 2×2 birim matris
$\ker \Psi$	: Ψ dönüşümünün çekirdeği
$GL_2(R)$	: R üzerinde genel lineer grup
$SL_2(R)$	: R üzerinde özel lineer grup
$Möb(R)$	: R üzerinde Möbius dönüşümlerinin grubu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	Hibridyen koordinatlar	16
Şekil 2.2.	A noktasının ℓ doğrusuna göre noktasına simetriği olan B noktası	29
Şekil 2.3.	A noktasının O merkezli $\mathcal{C}$ çemberine simetriği olan B noktası	30
Şekil 2.4.	P noktasının $\mathcal{E}$ elipsine göre inversiyonu olan P' noktası	31
Şekil 2.5.	P noktasının inversi P' ve polar doğrusu (kırmızı)	31
Şekil 4.1.	$\mathbb{P}_v$ düzlemi üzerindeki herhangi bir hibrit sayının bir $q \in \mathbb{P}_v$ birim hibrit sayı ile soldan çarpımının etkisi	45
Şekil 4.2.	$\mathbb{P}_v$ eliptik düzlemindeki bir q hibrit sayısı ile $\mathbb{P}_v^\perp$ düzlemindeki bir w hibrit sayısının soldan çarpımının etkisi	47
Şekil 4.3.	$\mathbb{P}_v^\perp$ üzerinde eliptik dönme	48
Şekil 4.4.	$\mathbb{P}_v$ ve $\mathbb{P}_v^\perp$ düzlemlerinin yönlendirilmesi	54
Şekil 4.5.	$\mathbb{P}_v$ düzleminde alınan bir q sayısı ile $\mathbb{P}_v$ düzleminde alınan bir p hibrit sayının soldan çarpımının etkisi	56
Şekil 4.6.	$\mathbb{P}_v$ hiperbolik düzleminde alınan bir q hibrit sayısı ile $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminde alınan pür hibrit sayısının soldan çarpımının etkisi	58
Şekil 4.7.	Bir $q \in \mathbb{P}_v$ hibrit sayısı ile soldan çarpımın bir $p \in \mathbb{P}_v$ sayısı üzerindeki etkisi	65
Şekil 4.8.	$w \in \mathbb{P}_v^\perp$ pür hibrit sayısı üzerinde $q \in \mathbb{P}_v$ birim timelike parabolik hibrit sayısının soldan çarpımının etkisi	66
Şekil 4.9.	Soldan sağa sırasıyla eliptik düzlem, hiperbolik düzlem ve dual düzlemin çemberine göre bir doğrunun inversiyonu	75
Şekil 4.10.	Kırmızı renkli C' , mavi renkli C koniğinin siyah renkli $\mathcal{C}$ koniğine göre inversiyonu	78
Şekil 4.11.	$F(z)$ Möbius dönüşümünün görüntüleri	
Şekil 4.12.	$x = a$ ve $y = b$ doğrularının bulundukları düzlemin türüne göre Möbius dönüşümü altındaki görüntüleri	90

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1.	Kompleks, hiperbolik ve dual sayıların özellikleri	8
Çizelge 2.2.	Dejenere, dejenere pseudo, iki kat dejenere kuaterniyonların çarpım tablosu	10
Çizelge 2.3.	Hibrit birimlerin çarpım	13
Çizelge 2.4.	Hibrit sayıların Lorentziyen karakterleri	15
Çizelge 2.5.	İki hibrit sayının çarpımının Lorentziyen karakterleri	15
Çizelge 2.6.	Hibrit birimlerin vektörel çarpımı	17
Çizelge 4.1.	v eliptik vektörü iken $\mathbb{P}_v$ ve $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminin karakteri	42
Çizelge 4.2.	v hiperbolik vektörü iken $\mathbb{P}_v$ ve $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminin karakteri	54
Çizelge 4.3.	v parabolik vektörü iken $\mathbb{P}_v$ ve $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminin karakteri	63
Çizelge 4.4.	İnversiyon koniği ile homotetik olmayan ve orijinden geçen C koniğinin inversiyonu	79
Çizelge 4.5.	İnversiyon koniği ile homotetik olmayan ve orijinden geçmeyen C koniğinin inversiyonu	80
Çizelge 4.6.	Möbius dönüşümü altında eksenlere paralel doğruların görüntüleri	89

1. GİRİŞ

Pisagor'un öğrencisinin $x^2 = 2$ denklemi ile karşılaştığı o günden beridir matematikçiler farklı sayı kümeleri tanımlamaya devam etmektedirler. Bu sayı kümelerinden biri de kompleks sayılar kümesidir. Bu sayı kümesinin tanımlanma ihtiyacı 2. ve 3. dereceden denklemlerin çözümlerinde ortaya çıkan ve o günkü matematikçileri şaşırtan bazı denklemlerin köklerinde karekökün içinde negatif bir sayının var olmasıdır. Girolamo Cardano (1501-1576) $x^3 = px + q$ biçimindeki bir denkleme Cardano formülü olarak bilinen

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

çözümünü vermiştir. Bu formülün keşfinden sonra Rafael Bombelli (1526-1572) Cardano formülünde bazı paradoksal durumlar olduğunu fark etmiştir. Örneğin, $x^3 = 15x + 4$, denkleminin çözümünde $x = 4$ kök olmasına rağmen Cardano formülünden

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

kökü elde edilmiştir. Burada sorun $\sqrt{-121}$ gibi bir ifadenin varlığıydı. Bombelli tıpkı Pisagor'un öğrencisinin karşılaştığı gibi bir durumla karşılaşmıştır. Daha sonra Bombelli bu denklemin çözümünü

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121} \text{ ve } (2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$x = (2 - \sqrt{-121}) + (2 + \sqrt{-121}) = 4$$

olduğunu göstermiştir. Böylece reel sayıların kompleks sayıların toplamı ile ifade edilebil-

diğini göstermiştir. Cardano ve Bombelli'den sonra birçok matematikçi kompleks sayılara önemli katkıda bulunmuşlardır. René Descartes (1596-1650) La Géométrie adlı eserinde sanal (imaginary) terimini "Ne doğru ne de yanlış (negatif) kökler her zaman gerçek değildir; ama bazen sadece sanal." (Descartes 1637) cümlesiyle ifade etmiştir (Burton 2011).

John Wallis (1616-1703) reel katsayılı ikinci dereceden bir denklemin kompleks köklerinin geometrik olarak nasıl temsil edileceğini, Caspar Wessel (1745-1818) ve Jean-Robert Argan (1768-1822) bir kompleks sayının geometrik temsiline vektör olduğunu göstermiştir. Leonard Euler (1707-1783) $i = \sqrt{-1}$ gösterimini standartlaştırmış ve bunu 2. ve 3. dereceden denklemlerin çözümlerinde kullanmıştır. Bu sayıların sanal ve akla yakın görünmemesine rağmen hesaplamalarda kullanılmasını hiçbir şeyin alıkoyamayacağını ifade etmiştir (Euler 1972). Carl Friedrich Gauss (1777-1855) kompleks sayı terimini $a + bi$ biçiminde tanıtmıştır. Gauss doktora tezinde *cebirin temel teoreminin* ispatını verirken bu sayıları kullanmış ve böylece kompleks sayıların tanınmasına ve kompleks sayı fikrinin sağlamlaşmasına katkıda bulunmuştur (Gonzalez-Velasco 2011). Böylece aslında $x^2 = -1$ gibi reel kökü olmayan bir denklemin kompleks köklerinin olduğu gösterilmiştir. Aslında bu Pisagor'un öğrencisinin karşılaştığı problemin benzeri bir problemdir ve yeni bir sayı sistemi ile çözüme kavuşmuştur. Kompleks sayıların ilk cebirsel tanımı William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından verilmiştir. $a + bi$ biçimindeki bir kompleks sayının (a, b) çifti olarak düşünülmesini, toplama ve çarpma işleminin sırasıyla

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \text{ ve } (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

biçiminde olmasını önermiştir. Hamilton aynı zamanda 3 boyutlu bir sayı sistemi üzerinde de çalışmış fakat bunun mümkün olmadığını görmüştür. Bunun yerine dört boyutlu bir sayı sistemi tanımlamak gerektiğinin farkına varmış ve kuaterniyonları tanımlamıştır. Kuaterniyonlar

$$a + bi + cj + dk, a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } i^2 = j^2 = k^2 = -1, ijk = -1$$

biçiminde tanımlanmış 4 boyutlu bir sayı sistemidir. Kuaterniyonların 3 boyutlu uzayda öteleme, yansıma ve dönme gibi dönüşümlerin ifade edilmesinde kullanılması ve küresel geometriyle bağlantısının olması kuaterniyonların kullanım alanını genişletmiştir. Kuaterniyonlar özellikle geometri, fizik, vektörel analiz, mekanik, kinematik, robot teknolojisi gibi birçok alanda kullanılan bir sayı sistemidir (Özdemir 2020).

1848'de tessarine sayılar

$$a + bi + cj + dk, a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } i^2 = -1, j^2 = k^2 = 1, ijk = 1$$

James Cockle tarafından tanıtıldı. Daha sonra tessarine sayıların bir alt cebri olarak hiperbolik sayılar kümesi tanıtıldı (Savić vd. 2022). $x^2 - 1 = 0$ denkleminin reel kökleri olmasına rağmen, bu denklemi sağlayan $\mathbf{h}^2 = 1$, $\mathbf{h} \neq \pm 1$ özelliğine sahip bir birimin varlığı kabul edilebilir. Böylece reel sayıların kompleks sayılar gibi bir genişlemesi olan hiperbolik sayılar kümesi elde edilmiştir. Herhangi bir hiperbolik sayı

$$w = a + b\mathbf{h}, a, b \in \mathbb{R}, \mathbf{h}^2 = 1$$

biçiminde yazılabilmektedir. Böylece hiperbolik sayılar $\mathbb{P} \equiv \mathbb{R}[\mathbf{h}]$ aynı kompleks sayılar da ($\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}[\mathbf{i}]$) olduğu gibi reel sayıların bir genişlemesi olmaktadır (Sobczyk 1995).

Dual sayılar 1873’de W.K. Clifford tarafından tanıtılmıştır. E. Study tarafından mekaniğe uygulamaları verilmiştir. Bu sayıların n-boyutlu genelleştirilmesi H. Grassman tarafından verilmiştir. Bu n boyutlu sayılara Grassmann sayıları denilmektedir. Kompleks ve hiperbolik sayılar gibi dual sayılarda reel sayıların bir genişlemesidir. Bu sayı sisteminde $\epsilon^2 = 0$, $\epsilon \neq 0$ özelliğine sahip bir birim yardımıyla dual sayılar kümesi tanımlanır. Herhangi bir dual sayı

$$w = a + b\epsilon, a, b \in \mathbb{R}, \epsilon^2 = 0$$

biçiminde yazılabilir (Özdemir 2020).

Bu tezin konusunu oluşturan hibrit sayılar M. Özdemir tarafından 2018 yılında tanıtılmıştır. Bu sayı sistemi kompleks, hiperbolik ve dual sayı sistemlerini kapsayan bir sayı sistemidir. Hibrit sayılar

$$\mathbb{K} = \{\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\epsilon + d\mathbf{h} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = -1, \epsilon^2 = 0, \mathbf{h}^2 = 1, \\ \mathbf{i}\mathbf{h} = -\mathbf{h}\mathbf{i} = \epsilon + \mathbf{i}\}$$

kümesi ile tanımlanır. Bir $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\epsilon + d\mathbf{h}$ hibrit sayısının normu

$$\|\mathbf{Z}\| = \sqrt{\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}}} = \sqrt{|\mathcal{C}(\mathbf{Z})|} = \sqrt{|a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2|}$$

dir. Bu normun kompleks, hiperbolik ve dual sayıların norm tanımını kapsayan genel bir norm olduğu görülebilir. Gerçekten hibridyen normdan

1. $\mathbf{Z}$ kompleks sayı ($c = d = 0$) ise $\|\mathbf{Z}\| = \sqrt{\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}}} = \sqrt{|\mathcal{C}(\mathbf{Z})|} = \sqrt{a^2 + b^2}$,
2. $\mathbf{Z}$ hiperbolik sayı ($b = c = 0$) ise $\|\mathbf{Z}\| = \sqrt{\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}}} = \sqrt{|\mathcal{C}(\mathbf{Z})|} = \sqrt{a^2 - d^2}$,
3. $\mathbf{Z}$ dual sayı ($b = d = 0$) ise $\|\mathbf{Z}\| = \sqrt{\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}}} = \sqrt{|\mathcal{C}(\mathbf{Z})|} = \sqrt{a^2} = |a|$

yazılabilir (Özdemir 2018).

Bu çalışmada, hibrit sayıların bazı geometrik uygulamaları verilmesi amaçlanmaktadır. Bu doğrultuda

1. 3 boyutlu hibrit uzay, üç boyutlu hibrit uzayda vektörel çarpım, bu uzaydaki düzlemlerin özellikleri, düzlemler üzerindeki vektörlerin Lorenziyen karakterleri belirlenmiştir.

2. Bir $\mathcal{P}$ düzlemi üzerinde bulunan bir $\mathbf{q}$ birim timelike hibrit sayısı $\mathcal{P}$ düzlemi üzerinde veya $\mathcal{P}$ düzlemine pseudo-ortogonal olan bir düzlem üzerinde bulunan bir $\mathbf{p}$ hibrit sayısı ile çarpıldığında $\mathbf{p}$ hibrit sayısı düzlemin orijini etrafında dönmektedir. Aynı zamanda $\mathbf{qp}\bar{\mathbf{q}}$ çarpımı ile $\mathbb{R}_1^3$ uzayında dönme dönüşümü gerçekleştirilebilir. Timelike hibrit sayılar eliptik, hiperbolik veya parabolik karakterde olabileceğinden bu üç tipteki dönme dönüşümü bu çalışmada incelenmiştir.

3. Hibrit sayıların bir koniğe göre bir noktanın inversinin alınmasında kullanılabileceği gösterilmiştir. Eliptik bir düzlemde elipse göre inversiyon, hiperbolik düzlemde hiperbole göre inversiyon ve dual düzlemde bir dual çembere ve bir parabole göre inversiyon dönüşümü incelenmiştir.

4. Hibrit sayı katsayılı Möbius dönüşümleri incelenmiştir. $SL(2, \mathbb{K})$ ile $Möb(\mathbb{K})$ arasında grup homomorfizmi vardır. Bundan dolayı hibrit sayı elemanlı 2×2 matrislerin determinantları incelenmiştir. Hibrit sayılarla Möbius dönüşümü incelenirken 2×2 matrisler çarpanlarına ayrılmıştır. Möbius dönüşümünün bir hibrit sayı üzerindeki etkisi incelenmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Hiper-Kompleks Sayılar ve Dönme Dönüşümü

Kompleks, hiperbolik ve dual sayılar iyi bilinen iki boyutlu sayı sistemleridir. Özellikle son yüzyılda birçok araştırmacı bu sayıların geometrik ve fiziksel uygulamalarıyla ilgilenmektedir. Öklid düzleminin geometrisi kompleks sayılarla tanımlanabildiği gibi, Minkowski düzleminin ve Galile düzleminin geometrisi de sırasıyla hiperbolik sayılar ve dual sayılar ile tanımlanabilir (Yaglom 1979). Kompleks, dual ve hiperbolik sayılara basitçe hiper-kompleks sayılar denir (Brewer 2012). Kompleks sayıların bazı geometrik uygulamaları Ahlfors (1981) ve Yaglom ve Shenitzer (2009)'da bulunabilir. Kompleks sayılar kümesi

$$\mathbb{C} = \{x + y\mathbf{i} : x, y \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = -1\}$$

ile tanımlanır. Bir kompleks sayı, $\mathbb{R}^2$ uzayında bir nokta ile eşlenir. Kompleks sayılar üzerinde tanımlanan iç çarpım işlemi, $\mathbf{z} = z_1 + z_2\mathbf{i}$ ve $\mathbf{u} = u_1 + u_2\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{C}} = \text{Re}(\bar{\mathbf{z}}\mathbf{u}) = z_1u_1 + z_2u_2$$

biçiminde tanımlanır. $\mathbf{z} = z_1 + z_2\mathbf{i}$ kompleks sayısının modülü

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}}} = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

şeklinde tanımlanır. Bir $\mathbf{z}$ kompleks sayısı ve birim uzunluktaki bir $\mathbf{w}$ kompleks sayısı için bu iki sayının çarpımı olan $\mathbf{zw}$ sayısı, $\mathbf{z}$ sayısını orijin etrafında $\arg \mathbf{w}$ kadar döndürülmesi ile elde edilebildiğinden dolayı çarpma işlemi geometrik olarak dönme dönüşümü olarak düşünülebilir. Başka bir deyişle $|\mathbf{z}| = |\mathbf{zw}|$ olduğu için $\mathbf{z}$ noktasının $|\mathbf{z}|$ yarıçaplı çember üzerinde hareket ettiği görülebilir. $SO(2)$ Öklidyen dönmelerin grubu

$$e^{i\theta} = \cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta$$

birim kompleks sayıların $U(1)$ grubuna izomorf olur (Yaglom 1968).

Hiperbolik sayılar kümesi

$$\mathbb{P} = \{x + y\mathbf{h} : x, y \in \mathbb{R}, \mathbf{h}^2 = 1\}$$

ile tanımlanır. Bir hiperbolik sayı, $\mathbb{R}_1^2$ uzayında bir nokta ile eşlenir. Hiperbolik sayılar üzerinde tanımlanan skaler çarpım işlemi, $\mathbf{u} = u_1 + u_2\mathbf{h}$ ve $\mathbf{w} = w_1 + w_2\mathbf{h} \in \mathbb{P}$ olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{L}} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbb{L}} = \text{Re}(\bar{\mathbf{u}}\mathbf{w}) = w_1u_1 - w_2u_2$$

biçiminde tanımlanır. Bu skaler çarpım bir non-dejenere, simetrik biliner formdur. Bu skaler çarpım Lorentziyen düzlemde skaler çarpım olarak bilinir. Bu skaler çarpım pozitif tanımlı olmadığı için hiperbolik sayılar Lorentziyen düzlemdeki gibi sınıflandırılabilir. Böylece $\mathbf{w} = x + y\mathbf{h} \in \mathbb{P}$ hiperbolik sayısı $|x| > |y|$, $|x| < |y|$ ya da $x = \pm y$ olmasına göre sırasıyla spacelike, timelike ya da lightlike olarak sınıflandırılabilir. $\mathbf{w} \in \mathbb{P}$ sayısının işareti

$$\varepsilon_{\mathbf{w}} = \text{sign}(\bar{\mathbf{w}}\mathbf{w}) = \text{sign}(x^2 - y^2)$$

ile gösterilecektir. Null hiperbolik sayıların kümesini $\mathbb{P}_0$ ile gösterilir. $\mathbf{w} = x + y\mathbf{h}$ hiperbolik sayısının modülü

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{\mathbf{w}\bar{\mathbf{w}}} = \sqrt{|x^2 - y^2|}$$

şeklinde tanımlanır. Bir hiperbolik sayının Lorentziyen normu onun modülüdür. Hiperbolik sayılar kümesi üzerindeki çarpma işlemi hiperbolik düzlem üzerinde alınan bir noktanın orijin etrafında dönmesi için gerekli olan dönme dönüşüme karşılık gelir. Fakat dönme çemberi $x^2 - y^2 = \pm 1$ ya da $x = \pm y$ dir. Aynı kompleks sayılarda olduğu gibi birim hiperbolik $\mathbf{w}$ sayısı ile çarpılan bir hiperbolik $\mathbf{z}$ sayısı $\mathbf{w}$ sayının argümeti kadar, orijin etrafında ve $x^2 - y^2 = |\mathbf{z}|$ hiperbolü üzerinde $\mathbf{z}$ noktasını dönmektedir. Lorentziyen dönmelerin grubu $SO(1, 1)$

$$e^{\mathbf{h}\theta} = \cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta$$

birim spacelike hiperbolik sayıların grubuna izomorftur (Catoni vd. 2004; Catoni vd. 2005; Catoni 2008; Rooney 1978; Rooney 2014).

Dual sayılar kümesi

$$\mathbb{D} = \{x + y\mathbf{h} : x, y \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$$

biçiminde tanımlanır. Bir dual sayı, Galile düzleminde bir nokta ile eşleşir. Dual sayılar üzerinde tanımlanan skaler çarpım işlemi, $\mathbf{a} = a_1 + a_2\epsilon$ ve $\mathbf{b} = b_1 + b_2\epsilon \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\langle , \rangle_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{D}} = \text{Re}(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = a_1b_1.$$

$\mathbf{a} = a_1 + a_2\epsilon$ dual sayısının modülü

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}} = |a_1|$$

formülü ile verilir ve dual çember $x = \pm |a_1|$ olur. Bir birim dual $\mathbf{w}$ sayısı ile çarpılan bir dual $\mathbf{z}$ sayısı $\mathbf{w}$ sayının argumeti kadar, orijin etrafında ve $x^2 = |\mathbf{z}|$ dual çemberi üzerinde hareket etmiş olur. Bu çarpımın sonucunun dönme dönüşümü olarak yorumlanmasının sebebi çarpma işlemi sonucunda $|\mathbf{z}| = |\mathbf{z}\mathbf{w}|$ olması, noktanın orijine uzaklığının değişmemiş olmasıdır. Bu dönme parabolik dönme olarak adlandırılır (Kisil 2009; Kisil 2010). Rooney (1978)'de kompleks, dual ve hiperbolik sayıların cebirsel özellikleri ve düzlemsel dönüşümleri gibi geometrik yorumlar açısından karşılaştırılması bulunabilir.

Dual sayılar 1873'te William Clifford tarafından tanıtıldı. 1903 yılında E. Study, Öklid uzayındaki iki doğru arasındaki ilişkiyi belirtmek için dual sayıları dual açılar olarak tanımlamış ve dual birim kürenin noktaları ile üç boyutlu Öklid uzayının yönlendirilmiş doğruları arasında birebir eşleme olduğunu kanıtlamıştır (Study 1904). Dual sayılar kuantum mekaniğinde (Gromova 2010; Gromov ve Kuratov 2005; Gromov ve Kuratov 2006; Hudson 1966; Hudson 2004) ve vidaların klasik mekaniğinde (Dimentberg 1978; Veldkamp 1976) yaygın olarak kullanılmaktadır.

Kompleks, hiperbolik ve dual sayıların matris temsili, sırasıyla, aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{z} = x + y\mathbf{i} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}, \mathbf{w} = x + y\mathbf{h} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{a} = x + y\epsilon \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}.$$

Kompleks, hiperbolik ve dual birimlerin matris temsili, sırasıyla, aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{i} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{h} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \epsilon \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Buradaki toplama ve çarpma işlemleri matris toplama ve çarpma işlemine karşılık geldiği için her bir dönüşüm izomorfizm olur (Lavrentiev ve Shabat 1973). Böylece kompleks,

hiperbolik ve dual sayıların için Euler formüllerinin matris formları sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$1 + \epsilon \theta = \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bu matrisler sırasıyla, Öklid, Lorentz ve Galile düzleminde dönme matrisleridir.

Soyut cebirde, kompleks, hiperbolik ve dual sayılar, sırasıyla $x^2 + 1$, $x^2 - 1$ ve x^2 polinomları tarafından üretilen ideal tarafından $\mathbb{R}[x]$ polinom halkasının bölümü olarak tanımlanabilir. Şöyle ki bu bölümler

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x] / \langle x^2 + 1 \rangle, \quad \mathbb{P} = \mathbb{R}[x] / \langle x^2 - 1 \rangle, \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}[x] / \langle x^2 \rangle$$

dir. Kompleks sayılar kümesi bir cisim olmasına rağmen, hiperbolik ve dual sayılar kümesi bir halka olur. Bu üç sayı sisteminin özellikleri aşağıda özetlenmiştir (Özdemir 2018).

Çizelge 2.1. Kompleks, hiperbolik ve dual sayıların özellikleri

	Kompleks sayılar	Hiperbolik sayılar	Dual sayılar
Özellik	$\mathbf{i}^2 = -1$	$\mathbf{h}^2 = 1$	$\epsilon^2 = 0$
Eşlenik	$\bar{z} = x - y\mathbf{i}$	$\bar{w} = x - y\mathbf{h}$	$\bar{a} = x - y\epsilon$
Norm	$ z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$ w = \sqrt{ x^2 - y^2 }$	$ a = x $
Geometri	Öklid geo.	Lorentziyen geo.	Galile geo.
Çember	$x^2 + y^2 = r^2$	$x^2 - y^2 = \pm r^2$	$ x = r$
Dönme tipi	Elipitik	Hiperbolik	Parabolik
Euler form.	$e^{i\theta} = \cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta$	$e^{\mathbf{h}\theta} = \cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta$	$e^{\epsilon\theta} = 1 + \epsilon\theta$
Argüment	$\arg z = \arctan \frac{y}{x}$	$\arg w = \ln \frac{ x + y }{\sqrt{ x^2 - y^2 }}$	$\arg a = \frac{y}{x}$

Dual ve hiperbolik sayılar hakkında ayrıntılı bilgi için Yaglom (1979), Kisil (2012), Catoni (2008) ve Fischer (1998) başvurulabilir. Ayrıca, bu sayıların cebirsel özellikleri ve geometrik uygulamaları Erlangen Programı araştırma makalelerinde bulunabilir

(Kisil 2006; Kisil 2012; Kisil 2009; Kisil 2010; Kisil 2010). Ayrıca Brewer, projektif geometriye dayalı yeni bir hiper-kompleks sayıların çapraz oranı (cross-ratio) incelemiştir (Brewer 2012). Hiperbolik sayılar lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulanabilir (Pilipchuck 2010; Pilipchuck 2011). Hiper-kompleks sayıların bazı geometrik, fiziksel ve cebirsel özellikleri ve uygulamaları vardır (Babusci vd. 2011; Borata vd. 2000; Borata ve Osler 2002; Brodsky ve Shoham 1999; Erdoğan ve Özdemir 2016; Fischer 1998; Gargoubi ve Kossentini 2016; Gürses ve Yüce 2015; Miller ve Boehning 1968; Motter ve Rosa 1998; Sobczyk 1995; Ulyrch 2000; Ulyrch 2007; Ulyrch 2010). Öklidyen diferansiyel geometride kompleks yapı kavramı kullanılırken, hiperbolik sayılarla elde edilen hiperbolik yapı kavramı Lorentziyen diferansiyel geometride kullanılabilir (Şimşek ve Özdemir 2016; Şimşek ve Özdemir 2017).

Kompleks, hiperbolik ve dual sayılar sırasıyla eliptik, hiperbolik ve parabolik bilineer formlar yardımıyla Clifford cebirleri olarak tanımlanabilir. Aşağıdaki özdeşliklerle tanımlanan değişme özelliğine sahip olmayan $1, e_0, e_1, e_0e_1$ tarafından gerilen dört boyutlu uzay bir Clifford cebridir.

$$e_0^2 = -1, e_1^2 = \sigma = \begin{cases} -1 & , C\ell(e) - \text{eliptik durum} \\ 0 & , C\ell(p) - \text{parabolik durum} \\ 1 & , C\ell(h) - \text{hiperbolik durum} \end{cases}, e_0e_1 + e_1e_0 = 0.$$

$\sigma = -1, 0, 1$ varsayıp, bu üç cebirin herhangi biri için $C\ell(\sigma)$ gösterimini kullanabiliriz. $C\ell^+(\sigma)$ nın bir alt cebiri σ nın $-1, 0, 1$ değerleri için sırasıyla kompleks, dual ve hiperbolik sayılara izomorftur. Örneğin, iki boyutlu $C\ell^+(-1)$ alt cebri $\{1, e_0e_1\}$ ile gerilir ve kompleks sayılara izomorftur. Çünkü, $e_0e_1 = i$ alındığında kompleks sayıların $i^2 = -1$ özdeşliği

$$i^2 = (e_0e_1)^2 = (e_0e_1)(e_0e_1) = -(e_0e_1)(e_1e_0) = -e_0^2e_1^2 = -1$$

şeklinde elde edilebilir. Benzer şekilde $C\ell^+(0) \cong \mathbb{D}$, $C\ell^+(1) \cong \mathbb{P}$ olduğu görülebilir (Kisil 2010).

2.2. Kompleks Sayıların Genelleştirmesi

Kompleks sayılar düzlemdeki hareketleri tanımlamada geniş bir kullanım alanına sahiptir, benzer olarak kompleks sayıların genelleştirilmesi de yüksek boyutlu uzaylardaki hareket-

leri incelemek için faydalı olmuştur. Kompleks sayıların en ünlü genellemesi kuaterniyonlardır. 1843'te W. R. Hamilton tarafından

$$\mathbb{H} = \{\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k} : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1\}$$

ile gösterilen kuaterniyonlar kümesi tanımlandı. 1849'da J. Cockle tarafından

$$\hat{\mathbb{H}} = \{\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k} : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = -1, \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = 1\}$$

ile gösterilen split kuaterniyonlar kümesi tanımlamıştır (Cockle 1849). Kuaterniyonlar ve split kuaterniyonlar sırasıyla 3 boyutlu Öklid ve Lorentz uzayındaki dönme dönüşümlerini tanımlamak için kullanılmıştır (Özdemir ve Ergin 2006; Özdemir, Erdoğan ve Şimşek 2014). Kuaterniyonların ve split kuaterniyonların geometrik uygulamaları ile genelleştirilmiş biçimleri Özdemir (2015), Şimşek ve Özdemir (2016), Özdemir (2020)'de bulunabilir. Bu makalelerde eliptik ve hiperbolik kuaterniyonlar tanımlanmıştır.

Yaglom (1963) dejenere kuaterniyonlar, dejenere pseudokuaterniyonlar ve iki kat (double) dejenere kuaterniyonlar olarak adlandırdığı bazı özel kuaterniyonları tanımlamıştır. Bu özel kuaterniyonların çarpım tabloları Çizelge 2.2'de verilmiştir (Özdemir 2018, Yaglom 1968).

Çizelge 2.2. Dejenere, dejenere pseudo, iki kat dejenere kuaterniyonların çarpım tablosu

	$\mathbf{i}$	ε_1	ε_2
$\mathbf{i}$	-1	ε_2	$-\varepsilon_1$
ε_1	$-\varepsilon_2$	0	0
ε_2	ε_1	0	0
Dejenere kuaterniyonlar			

	$\mathbf{h}$	ε_1	ε_2
$\mathbf{h}$	1	ε_2	ε_1
ε_1	$-\varepsilon_2$	0	0
ε_2	$-\varepsilon_1$	0	0
Dejenere pseudo kuaterniyonlar			

	ε_1	ε_2	ε_3
ε_1	0	ε_3	0
ε_2	$-\varepsilon_3$	0	0
ε_3	0	0	0
İki kat dejenere pseudo kuaterniyonlar			

Fjelstad ve Gal (1998), 2 boyutlu sayı sistemlerini daha yüksek boyutlara genelleştirdiler. Bazı cebirsel özelliklere sahip olan n -boyutlu dual ve hiperbolik sayıları tanımladılar. Örneğin, n -boyutlu hiperbolik sayı sistemini, $\mathbf{h}_i^2 = 1$, $\mathbf{h}_i \notin \mathbb{R}$ olmak üzere her i için 1 , $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{n-1}$ birimlerini oluşturulmuştur (Fjelstad 1986; Fjelstad ve Gal 1998; Fjelstad ve Gal 1998; Fjelstad ve Gal 2001).

2000 yılında, Olariu n -boyutlu kompleks sayıların farklı bir genellemesini tanımlamış ve bunlara iki-kompleks (twocomplex) sayı, üç-kompleks (threecomplex) sayı adını vermiştir. Olariu, hiperbolik sayılar için iki-kompleks sayı adını kullanmıştır. Bu sayıların geometrik ve cebirsel özelliklerini incelemiştir (Olariu 2000; Olariu 2000; Olariu 2002).

Üç-kompleks sayıların kümesini

$$\mathbb{C}_3 = \{z = a + b\mathbf{h} + c\mathbf{k} : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ ve } \mathbf{h}^2 = \mathbf{k}, \mathbf{k}^2 = \mathbf{h}, \mathbf{hk} = \mathbf{1}\}$$

olarak tanımlamıştır.

A. Harkin ve J. Harkin (2004) iki boyutlu kompleks sayıları

$$\mathbb{C}_p = \{z = x + y\mathbf{i} : \mathbf{i}^2 = p, x, y \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlamış ve bu genellemeler için bazı trigonometrik eşitlikler vermişlerdir. Daha sonra iki boyutlu hiper-kompleks sayılar

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} = \{z = x + y\mathbf{i} : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = \alpha + \beta\mathbf{i}, x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathbf{i} \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlanmıştır. Bu sayede Öklidyen ve semi-Öklidyen geometri ile bu sayılar arasındaki ilişkiyi farklı halkalar üstüne taşınmıştır. Bu genelleştirme

$$\mathbb{R}[x] / \langle x^2 - \alpha x - \beta \rangle$$

bölüm halkası olarak ifade edebilmiştir (Catoni vd. 2004). Zaripov (2017) hiperbolik sayılar teorisinin bir genellemesi olarak değişmeli iki boyutlu konformal (açıyı koruyan) hiperbolik sayılar teorisini sunmuştur.

Daha önce bahsedilen genellemelerden farklı olarak kompleks, hiperbolik ve dual sayıların bir genellemesi Özdemir (2018) tarafından hibrit sayılar olarak tanımlanmıştır. Hibrit sayılar bu üç sayı sistemini birleştirmiştir. Hibrit sayı sistemi dört boyutlu gibi görünse de, $\mathbb{R}^4$ uzayında hibrit düzlem olarak adlandırılan iki boyutlu bir düzlemde temsil edilen iki boyutlu bir sayı kümesidir. Bu sayı sisteminin birimleri de kompleks, hiperbolik ve dual sayılarda olduğu gibi 2×2 reel matrislerle temsil edilebilmiştir. (2.1)'de verilen $\mathbf{i}, \mathbf{h}, \epsilon$ birimlerinin matris gösterimi hibrit sayılarla tutarlı olmamaktadır. Bu nedenle dual birimin matrisi literatürdekinden farklı olarak alınmıştır. Fakat literatürde sıklıkla kullanılan kompleks ve hiperbolik sayıların matris gösterimleri değiştirilmemiştir. Çünkü

bu tercih edilen matris temsilleri, Öklid ve Lorentz düzleminde (2.2), (2.3) dönme matrislerine karşılık gelmektedir. Değişiklik yapılmasının sebeplerinden biri de $\mathbf{i}$, $\mathbf{h}$ ve ϵ birimlerine karşılık gelen matrisler (2.1) ve 2×2 birim matris lineer bağımlı olmasıdır. Bu nedenle hibrit sayılar kümesinde ϵ biriminin matris temsili olarak

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi alınmıştır. Çünkü bu matris temsili diğer üç matrisle birlikte 2×2 matrislerin bir bazını oluşturmaktadır. Bu baz matrisler

$$1 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \epsilon \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{h} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri olarak alınmıştır. Hibrit sayı sistemi, matris temsillerini temel alan bir sayı sistemi olarak kurulmuştur (Özdemir 2018).

2.3. Hibrit Sayılar

Hibrit sayılar kümesi kompleks, dual ve hiperbolik sayıların özelliklerinin birlikte incelenmesi sağlamaktadır. Hibrit sayıları kullanmak suretiyle Öklid, Lorentz ve Galile düzlem geometrileri incelenebilir. Hibrit sayılara karşılık gelen geometri hibrit düzlem geometrisi olarak adlandırılmaktadır. Bu düzlem, $\mathbb{R}^4$ 'ün iki boyutlu bir alt uzayıdır. Hibrit geometri hibrit metriğin doğası gereği eliptik, hiperbolik veya parabolik olarak sınıflandırılmaktadır. Bir düzlemin üzerindeki geometri düzlemin Lorentziyen karakterine göre belirlenmektedir. Hibrit sayılar kümesi, 1 ve $b\mathbf{i} + c\epsilon + d\mathbf{h}$ ile gerilen iki boyutlu değişmeli bir cebirdir. Bu nedenle bu hibrit sayı kompleks, dual veya hiperbolik sayılardan birine izomorf olur (Özdemir 2018).

Tanım 2.1. *Hibrit sayılar kümesi,*

$$\mathbb{K} = \{\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\epsilon + d\mathbf{h} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = -1, \epsilon^2 = 0, \mathbf{h}^2 = 1, \\ \mathbf{ih} = -\mathbf{hi} = \epsilon + \mathbf{i}\}$$

kümesidir (Özdemir 2018).

Bu sayılar kümesi bir sıralı dördü kümesi olarak düşünülebilir. Reel, kompleks, dual ve hiperbolik birimler sırasıyla

$$1 \leftrightarrow (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{i} \leftrightarrow (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon \leftrightarrow (0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{h} \leftrightarrow (0, 0, 0, 1)$$

olarak tanımlanır. Bunlar hibrit birimlerdir. $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\epsilon + d\mathbf{h}$ hibrit sayısı için, a gerçekte sayısına skaler kısım denir ve $S(\mathbf{Z})$ ile gösterilir. $b\mathbf{i} + c\epsilon + d\mathbf{h}$ kısmına vektör kısmı denir ve $V(\mathbf{Z})$ ile gösterilir.

2.3.1. Hibrit Sayılardaki İşlemler

İki hibrit sayının tüm bileşenleri karşılıklı olarak eşitse bu iki hibrit sayı eşittir. İki hibrit sayının toplamı, bileşenlerinin toplanmasıyla tanımlanır. Hibrit sayılarda toplama işlemi hem birleşmeli hem de değişmelidir. Sıfır, null elemandır. Bir $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\epsilon + d\mathbf{h}$ hibrit sayısının toplama işlemine göre tersi, $-\mathbf{Z} = -a - b\mathbf{i} - c\epsilon - d\mathbf{h}$ dir. Buna göre, hibrit sayılar kümesi üzerinde tanımlanan toplama işlemi ile birlikte bir Abelian grup oluşturur.

Hibrit sayılar kümesi üzerindeki çarpma işlemi değişme özelliğine sahip değildir. Bu nedenle aşağıdaki çarpma işlemi

$$\mathbf{ZW} = (a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\epsilon + d_1\mathbf{h})(a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\epsilon + d_2\mathbf{h})$$

dağılma özelliği ve çarpılan birimlerin sırası değiştirilmeden yapılır. Hibrit birimlerin çarpım tablosu Çizelge 2.3’de verilmiştir.

Çizelge 2.3. Hibrit birimlerin çarpım

$\cdot$	1	$\mathbf{i}$	ϵ	$\mathbf{h}$
1	1	$\mathbf{i}$	ϵ	$\mathbf{h}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	-1	$1 - \mathbf{h}$	$\mathbf{i} + \epsilon$
ϵ	ϵ	$1 + \mathbf{h}$	0	$-\epsilon$
$\mathbf{h}$	$\mathbf{h}$	$-\mathbf{i} - \epsilon$	ϵ	1

Tablodan görüldüğü gibi hibrit sayılar üzerinde tanımlanan çarpma işlemi değişme özelliğine sahip değildir (Özdemir 2018).

2.3.2. Hibrit Sayıların Normu ve Sınıflandırılması

Tanım 2.2. Bir $Z = a + bi + c\varepsilon + d\mathbf{h}$ hibrit sayının eşleniği, $\bar{Z}$ ile gösterilir ve

$$\bar{Z} = a - bi - c\varepsilon - d\mathbf{h}$$

olarak tanımlanır. Hibrit sayıların toplamının eşleniği, eşleniklerinin toplamına eşittir. Ayrıca hibrit çarpıma göre $Z\bar{Z} = \bar{Z}Z$ dir.

$$C(Z) = Z\bar{Z} = \bar{Z}Z = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2$$

reel sayısı Z hibrit sayısının karakteri olarak adlandırılır (Özdemir 2018).

Tanım 2.3. Bir $Z = a + bi + c\varepsilon + d\mathbf{h}$ hibrit sayısı için

$$\mathcal{V}_Z = (a, (b - c), c, d)$$

vektörü Z sayısının vektör temsili olarak adlandırılır. Aynı zamanda, $\mathbb{E}_2^4$ uzayında $(-, -, +, +)$ işaretine sahip olacak şekilde

$$C(Z) = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 = -\langle \mathcal{V}_Z, \mathcal{V}_Z \rangle_{\mathbb{E}_2^4}$$

yazılabilir. Böylece eğer $C(Z) < 0$, $C(Z) > 0$ ya da $C(Z) = 0$ olası durumuna göre, bir Z hibrit sayısının Lorentziyen karakteri sırasıyla spacelike, timelike ya da lightlike olarak adlandırılır. $\sqrt{|C(Z)|}$ reel sayısı Z hibrit sayısının normu olarak adlandırılır ve $\|Z\|$ ile gösterilir (Özdemir 2018).

Tanım 2.4. Bir $Z = a + bi + c\varepsilon + d\mathbf{h}$ hibrit sayısı için

$$\mathcal{E}_Z = ((b - c), c, d)$$

vektörü Z sayısının hibrit vektörü olarak adlandırılır. Bu vektör 3 boyutlu Lorentz (Minkowski) uzayında ($\mathbb{E}_1^3$ de) bir vektör olarak alınabilir. Aynı zamanda, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $(-, +, +)$ işaretli olarak

$$C_{\mathcal{E}}(Z) = -(b - c)^2 + c^2 + d^2 = \langle \mathcal{E}_Z, \mathcal{E}_Z \rangle_{\mathbb{E}_1^3}$$

biçimde yazılabilir. Böylece eğer $C_{\mathcal{E}}(Z) < 0$, $C_{\mathcal{E}}(Z) > 0$ veya $C_{\mathcal{E}}(Z) = 0$ ise, sırasıyla, Z hibrit sayısının eliptik, hiperbolik veya parabolik olduğunu söylenebilir. Bunlara Z hibrit sayısının tipleri denir. $\sqrt{|C_{\mathcal{E}}(Z)|}$ reel sayısı Z hibrit sayısının normu olarak adlandırılır ve $\mathcal{N}(Z)$ ile gösterilir (Özdemir 2018).

Split kuaterniyonlarda olduğu gibi bir hibrit sayı timelike, spacelike veya lightlike olabilir. Ayrıca, spacelike bir hibrit sayının hibrit vektörü kesinlikle hiperbolik olduğu

$$\mathcal{C}(\mathbf{Z}) < 0 \implies a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 < 0 \implies 0 < a^2 < -(b - c)^2 + c^2 + d^2$$

eşitsizliğin sonucu olarak

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}}(\mathbf{Z}) = \langle \mathcal{E}_{\mathbf{Z}}, \mathcal{E}_{\mathbf{Z}} \rangle_{\mathbb{E}_1^3} = -(b - c)^2 + c^2 + d^2 > 0$$

eşitsizliğinden görülmektedir. Böylece, spacelike bir hibrit sayının tipinin kesinlikle hiperbolik olduğu söylenebilir. Benzer şekilde, lightlike bir hibrit sayının hibrit vektörü, skaler kısmı sıfır değilse kesinlikle hiperbolik bir vektör ve skaler kısmı sıfır ise parabolik bir vektör olur. Yani, bir lightlike hibrit sayının tipi ya hiperbolik ya da parabolik olur. Hibrit sayıların Lorentziyen karakterleri ile ilgili bulgular Çizelge 2.4’de olduğu gibi özetlenebilir.

Çizelge 2.4. Hibrit sayıların Lorentziyen karakterleri

Spacelike	Lightlike	Timelike
Hiperbolik (Hiperlike)	Hiperbolik	Hiperbolik
	Parabolik (Duallylike)	Parabolik
		Eliptik (Kompleks)

Bu tabloya göre, eğer bir hibrit sayı eliptik ise, karakteri de mutlaka timelike olur. Hibrit sayılar üzerinde tanımlanan çarpma işleminin,

$$\mathcal{C}(\mathbf{pq}) = \mathcal{C}(\mathbf{p})\mathcal{C}(\mathbf{q})$$

eşitliğini sağladığı gösterilebilir. Bu nedenle timelike hibrit sayılar çarpma işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup

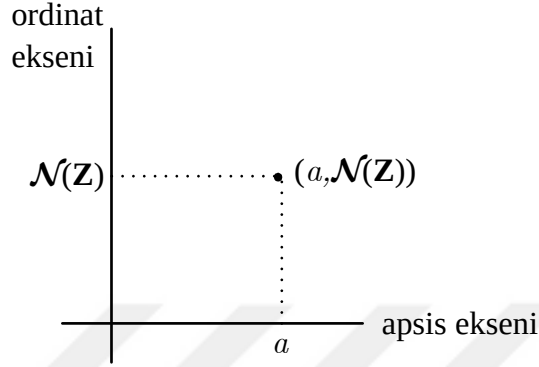
$$\mathbb{TK} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{K} : \mathcal{C}(\mathbf{q}) > 0\}$$

ile gösterilir. Bu çarpma işleminine göre Çizelge 2.5’deki tablo oluşturulabilir.

Çizelge 2.5. İki hibrit sayının çarpımının Lorentziyen karakterleri

.	Spacelike	Timelike	Lightlike
Spacelike	Timelike	Spacelike	Lightlike
Timelike	Spacelike	Timelike	Lightlike
Lightlike	Lightlike	Lightlike	Lightlike

Bir hibrit sayı, iki boyutlu bir koordinat düzleminde gösterilebilir. Bu, $(1, 0, 0, 0)$ vektörü doğrultusu koordinat ekseninin apsisi ve hibrit vektör doğrultusu koordinat ekseninin ordinatı olarak alınıp bir koordinat düzlemi inşa edilebilir. Bu koordinat çatısında $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\epsilon + d\mathbf{h}$ hibrit sayısı $(a, \mathcal{N}(\mathbf{Z}))$ noktası ile belirtilir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Hibridyen koordinatlar

Tanım 2.5. *Lightlike olmayan bir $\mathbf{Z}$ hibrit sayısının tersi*

$$\mathbf{Z}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{Z}}}{\mathcal{C}(\mathbf{Z})}$$

olarak tanımlanır. Buna göre, bir lightlike hibrit sayının tersi yoktur (Özdemir 2018).

Teorem 2.6. *Hibrit sayılar kümesi toplama ve çarpma işlemine göre değişme özelliği olmayan bir halkadır (Özdemir 2018).*

2.3.3. Hibrit Sayılar için Skaler ve Vektör Çarpımı

Tanım 2.7. $\mathbf{Z}_1 = (a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\epsilon + d_1\mathbf{h})$ ve $\mathbf{Z}_2 = (a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\epsilon + d_2\mathbf{h})$ hibrit sayılarının skaler çarpımı

$$\begin{aligned} g(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) &: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) &= \frac{\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}\bar{\mathbf{p}}}{2} \\ &= a_1a_2 + b_1b_2 - b_1c_2 - b_2c_1 - d_1d_2 \end{aligned}$$

dır. Bu skaler çarpım non-dejenere simetrik bilineer formdur. Hibrit skaler çarpım, kompleks, hiperbolik ve dual sayı sistemlerinin bir genelleştirmesidir. Aşağıdaki tabloda $\mathbf{Z}_1$

ve $\mathbf{Z}_2$ hibrit sayılarının çarpımı görülmektedir (Özdemir 2018).

$g(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)$	Kompleks $\mathbf{Z}_2$	Hiperbolik $\mathbf{Z}_2$	Dual $\mathbf{Z}_2$
Kompleks $\mathbf{Z}_1$	$a_1a_2 + b_1b_2$	a_1a_2	$a_1a_2 - b_1c_2$
Hiperbolik $\mathbf{Z}_1$	a_1a_2	$a_1a_2 - d_1d_2$	a_1a_2
Dual $\mathbf{Z}_1$	$a_1a_2 - b_1c_2$	a_1a_2	a_1a_2

Tanım 2.8. $\mathbf{Z}_1 = (a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\epsilon + d_1\mathbf{h})$ ve $\mathbf{Z}_2 = (a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\epsilon + d_2\mathbf{h})$ hibrit sayılarının vektörel çarpımı

$$\times : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{q}\bar{\mathbf{p}}}{2}$$

dır. Bu tanıma göre, $\mathbf{Z}_1$ ve $\mathbf{Z}_2$ sayılarının hermityen çarpımı

$$\mathbf{Z}_1 \bar{\mathbf{Z}}_2 = g(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) + \mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2$$

eşitliği ile verilir. Böylece hibrit birimler için vektörel çarpım tablosu Çizelge 2.6'da verilmiştir (Özdemir 2018).

Çizelge 2.6. Hibrit birimlerin vektörel çarpımı

$\times$	1	$\mathbf{i}$	ϵ	$\mathbf{h}$
1	0	$-\mathbf{i}$	$-\epsilon$	$-\mathbf{h}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	0	$\mathbf{h}$	$-\epsilon - \mathbf{i}$
ϵ	ϵ	$-\mathbf{h}$	0	ϵ
$\mathbf{h}$	$\mathbf{h}$	$\epsilon + \mathbf{i}$	$-\epsilon$	0

2.4. Hibrit Sayıların Temsilleri

Bu bölümde hibrit sayıların karakter ve tiplerine göre matris, kutupsal ve üstel gösterimleri ifade edilecektir.

2.4.1. Hibrit Sayıların Matris Temsilleri

Teorem 2.9. Hibrit sayılar halkası $\mathbb{K}$, $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ reel matrisler halkasına izomorftir (Özdemir 2018).

İspat $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{M}_{2 \times 2}$ dönüşümü $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ sayısı için

$$\varphi(a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} a + c & b - c + d \\ c - b + d & a - c \end{bmatrix}$$

olsun. Bu dönüşümün bir halka izomorfizmidir. Bu

$$\varphi(\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2) = \varphi(\mathbf{Z}_1) \varphi(\mathbf{Z}_2)$$

$$\varphi(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) = \varphi(\mathbf{Z}_1) + \varphi(\mathbf{Z}_2)$$

eşitliklerinden görülebilir. $\mathbf{Z}_1 = (a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\boldsymbol{\varepsilon} + d_1\mathbf{h})$ ve $\mathbf{Z}_2 = (a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\boldsymbol{\varepsilon} + d_2\mathbf{h})$ hibrit sayıları için

$$\varphi(\mathbf{Z}_1) = \varphi(\mathbf{Z}_2)$$

ise $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2$ olduğu matrislerin eşitliğiden görülebilir. Bu nedenle, φ birebir bir dönüşümdür. Herhangi

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

2×2 reel matrisi için

$$\mathbf{Z} = \left(\frac{a+d}{2}\right) + \left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{a-d}{4}\right)\boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{b+c}{2}\right)\mathbf{h}$$

hibrit sayısı vardır. Burada $\varphi(\mathbf{Z}) = A$ dır. Bu nedenle, φ örten bir dönüşümdür. Bu nedenle, φ bir halka izomorfizmidir. $\square$

Tanım 2.10. $\varphi(\mathbf{Z}) \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ matrisi $\mathbf{Z}$ hibrit sayısına karşılık gelen hibrit matris olarak adlandırılır (Özdemir 2018; Özdemir 2018).

Verilen matris izomorfizmine göre hibrit birimlerin matris temsilleri aşağıdaki gibi olur.

$$\varphi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \varphi(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \varphi(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bu matrisler 2×2 matris uzayı için bir baz oluştururlar. $\boldsymbol{\varepsilon}$ için (2.1) verilen matris yerine

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi kullanılmıştır. Çünkü bu matris diğer birimlerin matrisleri ile bir baz oluşturmuştur. Bu matrisler sayesinde hibrit birimlerin çarpımı bulunabilmektedir. Örneğin,

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{i}\epsilon) &= \varphi(\mathbf{i})\varphi(\epsilon) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \varphi(1) - \varphi(\mathbf{h}) = \varphi(1 - \mathbf{h})\end{aligned}$$

olduğu görülebilir (Özdemir 2018).

Teorem 2.11. *Bir $\mathbf{Z}$ hibrit sayısına karşılık gelen hibrit matris A olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\mathbf{Z}) &= \det A \text{ ve } \|\mathbf{Z}\| = \sqrt{|\det A|}; \\ \mathcal{C}_{\mathcal{E}}(\mathbf{Z}) &= \frac{(tr A)^2 - 4 \det A}{4}\end{aligned}$$

(Özdemir 2018).

İspat $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\epsilon + d\mathbf{h}$ hibrit sayısına karşılık gelen hibrit matris A aşağıdaki gibidir.

$$A = \begin{bmatrix} a + c & b - c + d \\ c - b + d & a - c \end{bmatrix}$$

Doğrudan hesaplama yapıldığında, birinci eşitliğin doğruluğu görülebilir.

$$\begin{aligned}\det A &= \left| \begin{bmatrix} a + c & b - c + d \\ c - b + d & a - c \end{bmatrix} \right| \\ &= a^2 + b^2 - 2cb - d^2 \\ &= |\mathbf{Z}\bar{\mathbf{Z}}| = \|\mathbf{Z}\|^2.\end{aligned}$$

İkinci eşitliğin doğruluğu da aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned}\frac{(tr A)^2 - 4 \det A}{4} &= \frac{(a + c + a - c)^2 - 4(a^2 + b^2 - 2cb - d^2)}{4} \\ &= -b^2 + 2cb + d^2 = \mathcal{C}_{\mathcal{E}}(\mathbf{Z})\end{aligned}$$

□

Sonuç 2.12. Bir $\mathbf{Z}$ hibrit sayısının tersinin olması için gerek ve yeter şart $\det \varphi(A)$ değerinin sıfırdan farklı olmasıdır (Özdemir 2018).

Sonuç 2.13. Bir 2×2 reel A matrisinin karakteristik polinomunun diskriminantı

$$\Delta_A = (\text{tr} A)^2 - 4 \det A$$

olduğu için $C_{\mathcal{E}}(\mathbf{Z}) = \frac{\Delta_A}{4}$ (Özdemir 2018).

Sonuç 2.14. Hibrit sayıların sınıflandırılması, karşılık gelen 2×2 matrisin izi ve determinantına bağlıdır (Özdemir 2018).

2.4.2. Hibrit Sayıların Kutupsal Gösterimleri

Teorem 2.15. Herhangi bir eliptik hibrit sayının kutupsal gösterimi $\mathbf{V}_0 = \frac{V(\mathbf{Z})}{\mathcal{N}(\mathbf{Z})}$ ve $\mathbf{V}_0^2 = -1$ olmak üzere

$$\mathbf{Z} = \|\mathbf{Z}\| (\cos \theta + \mathbf{V}_0 \sin \theta)$$

şeklinde yazılabilir (Özdemir 2018).

İspat $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ hibrit sayısı eliptik ise, $\mathcal{E}_{\mathbf{Z}} = ((b-c), c, d)$ vektörü bir timelike vektör olur. Her eliptik hibrit sayı timelike olduğu için $C_{\mathcal{E}}(\mathbf{Z}) = -(b-c)^2 + c^2 + d^2 < 0$ ve $\mathcal{C}(\mathbf{Z}) = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 > 0$ olur. Böylece,

$$\|\mathbf{Z}\| = \sqrt{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2} \text{ ve } \mathcal{N}(\mathbf{Z}) = \sqrt{(b-c)^2 - c^2 - d^2}$$

yazılabilir. Eğer $\cos \theta = \frac{a}{\|\mathbf{Z}\|}$, $\sin \theta = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{Z})}{\|\mathbf{Z}\|}$ ve $\mathbf{V}_0 = \frac{b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}}{\mathcal{N}(\mathbf{Z})}$ alındığında kutupsal gösterim

$$\mathbf{Z} = \|\mathbf{Z}\| (\cos \theta + \mathbf{V}_0 \sin \theta)$$

olur. □

Teorem 2.16. Herhangi bir $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ hiperbolik hibrit sayının kutupsal gösterimi $\mathbf{V}_0 = \frac{V(\mathbf{Z})}{\mathcal{N}(\mathbf{Z})}$ ve $\mathbf{V}_0^2 = 1$ olmak üzere

$$(1) \mathbf{Z} \text{ spacelike ise, } \mathbf{Z} = \|\mathbf{Z}\| (\sinh \theta + \mathbf{V}_0 \cosh \theta)$$

$$(2) \mathbf{Z} \text{ timelike ise, } \mathbf{Z} = \pm \|\mathbf{Z}\| (\cosh \theta + \mathbf{V}_0 \sinh \theta)$$

$$(3) \mathbf{Z} \text{ lightlike ise, } \mathbf{Z} = a(1 + \mathbf{V}_0)$$

şeklinde yazılabilir (Özdemir 2018).

İspat $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ hibrit sayısı hiperbolik ise, $\mathcal{E}_{\mathbf{Z}} = ((b - c), c, d)$ vektörü bir spacelike vektör olur. Bu nedenle, $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}(\mathbf{Z}) > 0$ dır. Bir hiperbolik hibrit sayının karakteri spacelike, timelike ya da lightlike olabilir.

(1) Eğer $\mathbf{Z}$ bir spacelike hiperbolik hibrit sayı ise, o zaman $\mathcal{C}(\mathbf{Z}) < 0$ ve $\|\mathbf{Z}\| = \sqrt{-a^2 - (b - c)^2 + c^2 + d^2}$ olur. Böylece, $\sinh \theta = \frac{a}{\|\mathbf{Z}\|}$, $\cosh \theta = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{Z})}{\|\mathbf{Z}\|}$ ve $\mathbf{V}_0 = \frac{b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}}{\mathcal{N}(\mathbf{Z})}$ alınabilir. Bu nedenle kutupsal gösterim

$$\mathbf{Z} = \|\mathbf{Z}\| (\sinh \theta + \mathbf{V}_0 \cosh \theta)$$

olur.

(2) Eğer $\mathbf{Z}$ bir timelike hiperbolik hibrit sayı ise, o zaman $\mathcal{C}(\mathbf{Z}) > 0$ ve $\|\mathbf{Z}\| = \sqrt{a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2}$ olur. Böylece, $\cosh \theta = \frac{|a|}{\|\mathbf{Z}\|}$, $\sinh \theta = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{Z})}{\|\mathbf{Z}\|}$ ve $\mathbf{V}_0 = \frac{b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}}{\mathcal{N}(\mathbf{Z})}$ alınabilir. Bu nedenle alındığında kutupsal gösterim

$$\mathbf{Z} = \|\mathbf{Z}\| (\pm \cosh \theta + \mathbf{V}_0 \sinh \theta)$$

olur.

(3) Eğer $\mathbf{Z}$ bir lightlike hiperbolik hibrit sayı ise, o zaman $\mathcal{C}(\mathbf{Z}) = 0$ ve $\|\mathbf{Z}\| = 0$ olur. Böylece, $\mathcal{N}(\mathbf{Z}) = a$ ve $\mathbf{V}_0 = \frac{b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}}{\mathcal{N}(\mathbf{Z})} = \frac{b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}}{a}$ alınabilir. Bu nedenle alındığında kutupsal gösterim

$$\mathbf{Z} = a(1 + \mathbf{V}_0)$$

olur. □

Sonuç 2.17. Herhangi lightlike olmayan hiperbolik hibrit sayı $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$

$$\rho = \|\mathbf{Z}\|, \theta = \left| \frac{a + \mathcal{N}(\mathbf{Z})}{\rho} \right|, \text{ ve } \mathbf{V} = \frac{b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}}{\mathcal{N}(\mathbf{Z})},$$

$$k = \begin{cases} \mathbf{Z} \text{ timelike ve } a > 0 \text{ ise, } 1 \\ \mathbf{Z} \text{ timelike ve } a < 0 \text{ ise, } -1 \\ \mathbf{Z} \text{ timelike ve } a > 0 \text{ ise, } \mathbf{V} \\ \mathbf{Z} \text{ timelike ve } a < 0 \text{ ise, } -\mathbf{V} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{Z} = k\rho (\cosh \theta + \mathbf{V} \sinh \theta)$$

biçiminde kutupsal formda yazılabilir (Özdemir 2018).

Teorem 2.18. *Herhangi bir parabolik hibrit sayının kutupsal gösterimi $\mathbf{V}_0 = \frac{V(\mathbf{Z})}{\|\mathbf{Z}\|}$, $\epsilon = \text{sgn}(S(\mathbf{Z}))$ ve $\mathbf{V}_0^2 = 0$ olmak üzere*

$$\mathbf{Z} = \|\mathbf{Z}\| (\epsilon + \mathbf{V}_0)$$

şeklinde yazılabilir (Özdemir 2018).

İspat $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\epsilon + d\mathbf{h}$ hibrit sayısı parabolik ise, $\mathcal{E}_{\mathbf{Z}} = ((b - c), c, d)$ vektörü bir lightlike vektör olur. Bu $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}(\mathbf{Z}) = 0$ ve $\|\mathbf{Z}\| = |a|$ olduğu anlamına gelir. Böylece, a sayısının işaretine bağlı olarak

$$\mathbf{Z} = \|\mathbf{Z}\| (\epsilon + \mathbf{V}_0)$$

yazılabilir. □

2.5. Kuaterniyonlar ve 3-Boyutlu Uzayda Dönme Dönüşümü

3-boyutlu Öklid uzayındaki dönme dönüşümlerini ifade etmek için kullanılan sayı sistemi kuaterniyonlardır. Kuaterniyon kümesi

$$\mathbb{H} = \{\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k} : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bir $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ kuaterniyonu skaler kısım ve vektörel kısım olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Skaler kısım $S(\mathbf{q}) = q_1$ ve vektörel kısım $\mathbf{V}(\mathbf{q}) = q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ ile gösterilebilir. Skaler kısmı sıfır olan kuaterniyonlara pür kuaterniyon denilmektedir. $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ kuaterniyonlarının çarpımı

$$\mathbf{pq} = S(\mathbf{p})S(\mathbf{q}) - \langle \mathbf{V}(\mathbf{p}), \mathbf{V}(\mathbf{q}) \rangle + S(\mathbf{p})\mathbf{V}(\mathbf{q}) + S(\mathbf{q})\mathbf{V}(\mathbf{p}) + \mathbf{V}(\mathbf{p}) \times \mathbf{V}(\mathbf{q})$$

biçimde yazılabilir. Eğer bu kuaterniyonlar pür kuaterniyon ise bu çarpım,

$$\mathbf{pq} = -\langle \mathbf{V}(\mathbf{p}), \mathbf{V}(\mathbf{q}) \rangle + \mathbf{V}(\mathbf{p}) \times \mathbf{V}(\mathbf{q})$$

biçiminde olur. Herhangi bir $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ kuaterniyonunun normu,

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ \mathbf{q} &\longrightarrow \|\mathbf{q}\| = \sqrt{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}} = \sqrt{\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Her $\mathbf{q}$ kuaterniyonu

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{q})}{\|\mathbf{V}(\mathbf{q})\|}, \quad \cos \theta = \frac{S(\mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|}, \quad \text{ve} \quad \sin \theta = \frac{\|\mathbf{V}(\mathbf{q})\|}{\|\mathbf{q}\|}$$

olmak üzere

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| (\cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta)$$

formunda yazılabilir. Bu eşitlikteki θ açısına $\mathbf{q}$ kuaterniyonunun argümenti denir. Argüment

$$\theta = \begin{cases} \pi - \arctan \frac{\|\mathbf{V}(\mathbf{q})\|}{|S(\mathbf{q})|}, & S(\mathbf{q}) < 0 \\ \arctan \frac{\|\mathbf{V}(\mathbf{q})\|}{|S(\mathbf{q})|}, & S(\mathbf{q}) > 0 \end{cases}$$

şekilde ifade edilir. Her $\mathbf{q} = (\cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta)$ birim kuaterniyonu, birim küre üzerindeki bir büyük çember yayına karşılık gelmektedir (Özdemir 2020).

2.5.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Dönme Matrisleri

İç çarpımı, dolayısıyla da uzunluğu ve açıyı koruyan lineer dönüşüme, ortogonal dönüşüm denir. Bir $R : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\langle R(\mathbf{u}), R(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

eşitliğini sağlıyorsa, bu dönüşüme ortogonal dönüşüm denir. Buna göre

$$\begin{aligned} \langle R(\mathbf{u}), R(\mathbf{v}) \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ (R\mathbf{u})^T R\mathbf{v} &= \mathbf{u}^T R^T R\mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} \end{aligned}$$

eşitliğinde

$$R^T R = I$$

olduğu görülebilir. Böylece, Öklid uzayında bir $R \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ matrisi için,

$$R^T R = I \text{ veya } R^T = R^{-1}$$

eşitliği sağlanıyorsa, R matrisine ortogonal matris denir. n -boyutlu Öklid uzayında ortogonal matrislerin kümesi

$$O(\mathbb{R}^n) = O(n) = \{R \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : R^T = R^{-1}\}$$

ile gösterilmektedir. Bir ortogonal R matrisi $R^T R = I$ özelliğini sağladığı için $\det R = \pm 1$ olur. Determinantı 1 olan ortogonal matrislere dönme matrisi; -1 olan ortogonal matrislere de yansıma matrisi denir. 3-boyutlu Öklid uzayında dönme matrislerinin kümesini,

$$SO(\mathbb{E}^3) = \{R \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : R^T R = I \text{ ve } \det R = 1\}$$

ile gösterilir. $SO(\mathbb{E}^3)$ çarpma işlemine göre bir grup belirtir. $\mathbb{R}^3$ de her dönme matrisi, bir dönme eksenini etrafında θ açısı kadar dönmeyi ifade etmektedir. θ açısına dönme açısı denir (Özdemir 2020).

Teorem 2.19. $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k} = \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta \in \mathbb{H}$ birim kuaterniyonu için, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$R_{\mathbf{q}}(\mathbf{u}) = \mathbf{q}\mathbf{u}\bar{\mathbf{q}}$$

dönüşümü, $\mathbf{v}$ dönme eksenini etrafında 2θ açısı kadar dönmeyi ifade eder. Bu dönme dönüşümüne karşılık gelen matris:

$$R_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & -2q_1q_4 + 2q_2q_3 & 2q_1q_3 + 2q_2q_4 \\ 2q_1q_4 + 2q_2q_3 & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & -2q_1q_2 + 2q_3q_4 \\ -2q_1q_3 + 2q_2q_4 & 2q_1q_2 + 2q_3q_4 & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}.$$

Bu matris $\det R_{\mathbf{q}} = 1$ olduğundan ortogonal bir matris olur (Özdemir 2020).

Bu teoreme göre her birim kuaterniyon bir dönme matrisine karşılık gelmektedir. Böylece $\mathbb{H}_1$ birim kuaterniyonların kümesini göstermek üzere, $\mathbb{H}_1$ ile $SO(3)$ arasında bir grup homomorfizması olduğu görülebilir. Şöyle ki

$$f : S^2 \simeq \mathbb{H}_1 \longrightarrow SO(3), \mathbf{q} \longrightarrow f(\mathbf{q}) = R_{\mathbf{q}}$$

fonksiyonu tanımlandığında,

$$f(\mathbf{qp}) = f(\mathbf{q})f(\mathbf{p})$$

eşitliği sağlanmaktadır. Bu fonksiyon bir homomorfizmadır ve çekirdeği $\{\pm 1\}$ olur. O halde her dönme matrisine karşılık gelen iki birim kuaterniyon vardır ve bunlar $\mathbf{q}$ ve $-\mathbf{q}$ kuaterniyonlarıdır. Ayrıca $SO(3)$ grubu $\mathbb{H}_1/\{\pm 1\}$ grubuna izomorf olur (Özdemir 2020). Şöyle ki,

$$\tilde{f} : \mathbb{H}_1/\{\pm 1\} \longrightarrow SO(3), \mathbf{q} \longrightarrow \tilde{f}(\mathbf{q}(\pm 1)) = f(\mathbf{q})$$

fonksiyonu tanımlandığında, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}_1$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\pm 1) &= \mathbf{q}(\pm 1) \implies \mathbf{q}^{-1}\mathbf{p} \in \ker f \implies f(\mathbf{q}^{-1}\mathbf{p}) = I \\ \implies f(\mathbf{p}) &= f(\mathbf{q}) \implies \tilde{f}(\mathbf{p}(\pm 1)) = \tilde{f}(\mathbf{q}(\pm 1)) \end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{f}$ fonksiyonu iyi tanımlı olur. Buna ek olarak $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}_1$ için

$$\begin{aligned} \tilde{f}((\mathbf{p}(\pm 1))(\mathbf{q}(\pm 1))) &= \tilde{f}((\mathbf{pq})(\pm 1)) = f(\mathbf{pq}) = f(\mathbf{q})f(\mathbf{p}) \\ &= \tilde{f}(\mathbf{q}(\pm 1))\tilde{f}(\mathbf{p}(\pm 1)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathbf{p}(\pm 1)) &= \tilde{f}(\mathbf{q}(\pm 1)) \implies f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{q}) \implies (f(\mathbf{q}))^{-1}f(\mathbf{p}) = I \\ \implies f(\mathbf{q}^{-1})f(\mathbf{p}) &= I \implies f(\mathbf{q}^{-1}\mathbf{p}) = I \implies \mathbf{q}^{-1}\mathbf{p} \in \ker f \\ \implies \mathbf{p}(\pm 1) &= \mathbf{q}(\pm 1) \end{aligned}$$

olur. Bunlar, $\tilde{f}$ fonksiyonunun bire-bir homomorfizma olduğunu kanıtlar. $\tilde{f}$ fonksiyonunun örten olduğu açıktır.

2.6. Split Kuaterniyonlar ve 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Dönme

3-boyutlu Minkowski uzayındaki dönmeleri ifade etmek için kullanılan sayı sistemi split kuaterniyonlardır. Split kuaterniyon kümesi

$$\mathbb{H} = \{ \mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k} : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = -1, \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = 1 \}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bir $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ split kuaterniyonu skaler kısım ve vektörel kısım olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Skaler kısım $S(\mathbf{q}) = q_1$ ve vektörel kısım $\mathbf{V}(\mathbf{q}) = q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ ile gösterilebilir. Skaler kısmı sıfır olan split kuaterniyonlara pür split kuaterniyon denir. $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ split kuaterniyonlarının çarpımı

$$\mathbf{pq} = S(\mathbf{p})S(\mathbf{q}) + \langle \mathbf{V}(\mathbf{p}), \mathbf{V}(\mathbf{q}) \rangle + S(\mathbf{p})\mathbf{V}(\mathbf{q}) + S(\mathbf{q})\mathbf{V}(\mathbf{p}) + \mathbf{V}(\mathbf{p}) \times \mathbf{V}(\mathbf{q})$$

biçiminde yazılabilir. Eğer $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ split kuaterniyonları pür quaterniyon ise bu çarpım,

$$\mathbf{pq} = \langle \mathbf{V}(\mathbf{p}), \mathbf{V}(\mathbf{q}) \rangle + \mathbf{V}(\mathbf{p}) \times \mathbf{V}(\mathbf{q})$$

biçiminde yazılabilir. Bir $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ split kuaterniyonunun normu,

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: \widehat{\mathbb{H}} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ \mathbf{q} &\longrightarrow \|\mathbf{q}\| = \sqrt{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}} = \sqrt{\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}} = \sqrt{|q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2|} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Split kuaterniyonlarda,

$$I_{\mathbf{q}} = \mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2$$

değeri negatif, sıfır ve pozitif olabilir. $(\mathbb{R}^4, -, -, +, +) \cong \mathbb{E}_2^4$ uzayı gösterilirse, $\mathbf{q}$ split kuaterniyonu 4-boyutlu bir vektör gibi düşünülerek,

$$-I_{\mathbf{q}} = -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{E}_2^4}$$

şeklinde ifade edilebilir. Yani, her split kuaterniyon $\mathbb{E}_2^4$ uzayının bir elemanı olarak kabul edilebilir. Buna göre bir $\mathbf{q}$ split kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{q}} &> 0 \text{ ise } \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{E}_2^4} < 0 \text{ olacağından } \mathbf{q} \text{ timelike split quaterniyon,} \\ I_{\mathbf{q}} &< 0 \text{ ise } \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{E}_2^4} > 0 \text{ olacağından } \mathbf{q} \text{ spacelike split quaterniyon,} \\ I_{\mathbf{q}} &= 0 \text{ ise } \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{E}_2^4} = 0 \text{ olacağından } \mathbf{q} \text{ lightlike split quaterniyon} \end{aligned}$$

olarak adlandırılmaktadır. Timelike, spacelike ve lightlike split quaterniyon kümeleri sırasıyla, $\widehat{\mathbb{T}\mathbb{H}}, \widehat{\mathbb{S}\mathbb{H}}, \widehat{\mathbb{L}\mathbb{H}}$ ile gösterilmektedir.

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ için,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{L}} = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

ve

$$\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} -\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

biçiminde tanımlanan

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{L}} : \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \cdot \times_{\mathbb{L}} \cdot : \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \longrightarrow \mathbb{R}_1^3,$$

fonksiyonlarına, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında, $(-, +, +)$ işaretine göre tanımlanmış Lorentziyen skaler ve vektörel çarpım fonksiyonları denir. Bu skaler çarpımla birlikte $\mathbb{R}^3$ uzayına, Lorentz

uzayı veya 3-boyutlu Minkowski uzayı denir. Bu uzay kısaca $\mathbb{R}_1^3$ veya $\mathbb{E}_1^3$ ile gösterilir. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{L}} = 0$ ise $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerine pseudo ortogonaldır denir. Herhangi bir $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_1^3$ için, bu vektörün Lorentz uzayındaki karakteri

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L}} = 0 \text{ ise } \mathbf{u} \text{ vektörüne lightlike,}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L}} < 0 \text{ ise } \mathbf{u} \text{ vektörüne timelike,}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L}} > 0 \text{ ise } \mathbf{u} \text{ vektörüne spacelike}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu vektörün normu

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}} = \sqrt{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L}}|}$$

şeklde tanımlanmaktadır. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L}} = \pm 1$ ise $\mathbf{u}$ vektörüne birim vektör denir. Bu uzaydaki

$$\mathbb{S}_1^2 = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}_1^3 : \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L}} = 1 \} \text{ kümesine birim pseudo küre,}$$

$$\mathbb{H}_0^2 = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}_1^3 : \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L}} = -1 \} \cup \{0\} \text{ kümesine birim hiperbolik küre,}$$

$$\mathbb{L} = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}_1^3 : \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L}} = 0 \} - \{0\} \text{ kümesine ışık konisi veya null koni denir.}$$

Bir $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ split kuaterniyonun kutupsal gösterimi split kuaterniyonun Lorentz uzayındaki karakterine göre değişir. Buna göre,

$$\mathbf{q} \in \widehat{\mathbb{SH}} \text{ ise } \mathbf{v} = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{q})}{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}, \cosh \theta = \frac{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{\|\mathbf{q}\|}, \text{ ve } \sinh \theta = \frac{q_1}{\|\mathbf{q}\|} \text{ için}$$

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| (\sinh \theta + \mathbf{v} \cosh \theta),$$

$$\mathbf{q} \in \widehat{\mathbb{TH}} \text{ ve } \mathbf{V}(\mathbf{q}) \text{ spacelike ise } \mathbf{v} = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{q})}{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}, \cosh \theta = \frac{|q_1|}{\|\mathbf{q}\|}, \text{ ve}$$

$$\sinh \theta = \frac{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{\|\mathbf{q}\|} \text{ için}$$

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| (\pm \cosh \theta + \mathbf{v} \sinh \theta)$$

$$\mathbf{q} \in \widehat{\mathbb{TH}} \text{ ve } \mathbf{V}(\mathbf{q}) \text{ timelike ise } \mathbf{v} = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{q})}{\sqrt{q_2^2 - q_3^2 - q_4^2}}, \cos \theta = \frac{q_1}{\|\mathbf{q}\|}, \text{ ve}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{q_2^2 - q_3^2 - q_4^2}}{\|\mathbf{q}\|} \text{ için}$$

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| (\cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta)$$

formunda yazılabilir (Özdemir 2020).

2.6.1. Timelike Split Kuaterniyonlarla Hiperboloid Üzerindeki Dönme

Timelike split kuaterniyonlar çarpma işlemine göre ve Lorentziyen dönme matrisleri matris çarpımına göre birer grup oluşturduklarından Lorentziyen dönmeler timelike split kuaterniyonlar ile ifade edilebilir. Lorentz uzayında ortogonal matrislerin kümesi

$$O(\mathbb{E}_1^3) = O(3, 1) = \{R \in \mathbb{M}_{3 \times 3} : R^T R = I^*\}$$

kümesidir. Buradaki I^* matrisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisidir. R matrisi $O(3, 1)$ kümesine ait ise R matrisine Lorentziyen ortogonal matris denir.

Teorem 2.20. $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{p} \in \widehat{\mathbb{TH}}$ olsun.

$$\widehat{R}_{\mathbf{q}} : \widehat{\mathbb{TH}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{TH}}, \quad \widehat{R}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}}$$

şekilinde tanımlanan $\widehat{R}_{\mathbf{q}}$ dönüşümü, normu normu ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyonun skaler kısmını koruyan bir lineer dönüşümdür (Özdemir 2020).

Teorem 2.21. $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k} = \cosh \theta + \mathbf{v} \sinh \theta \in \widehat{\mathbb{TH}}$ birim split kuaterniyonu için, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\widehat{R}_{\mathbf{q}}(\mathbf{u}) = \mathbf{q}\mathbf{u}\bar{\mathbf{q}}$$

dönüşümü, $\mathbf{v}$ dönme eksenini etrafında 2θ açısı kadar hiperbolik dönmeyi ifade eder. Bu dönme dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\widehat{R}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 & 2q_1q_4 - 2q_2q_3 & -2q_1q_3 - 2q_2q_4 \\ 2q_2q_3 + 2q_4q_1 & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & -2q_3q_4 - 2q_2q_1 \\ -2q_1q_3 + 2q_2q_4 & 2q_1q_2 - 2q_3q_4 & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 \end{bmatrix}.$$

şeklindedir. Bu matris ortogonal matris özelliklerini sağladığından 3-boyutlu Lorentz uzayında bir dönme matrisidir. Ayrıca,

$$\text{eğer } \mathbf{v}^2 = 1 \text{ ise } \widehat{R}_{\mathbf{q}} \text{ hiperbol üzerindeki dönmeyi,}$$

$$\text{eğer } \mathbf{v}^2 = -1 \text{ ise } \widehat{R}_{\mathbf{q}} \text{ elips üzerindeki dönmeyi}$$

ifade eder (Özdemir vd. 2014; Özdemir 2020).

$\mathbb{TH}_1$ birim timelike split kuaterniyonların kümesini göstermek üzere, $\mathbb{TH}_1$ ile $SO(1, 2)$ arasında bir grup homomorfizması olduğu görülebilir. Şöyle ki

$$f : \mathbb{TH}_1 \longrightarrow SO(1, 2), \mathbf{q} \longrightarrow f(\mathbf{q}) = \hat{R}_{\mathbf{q}}$$

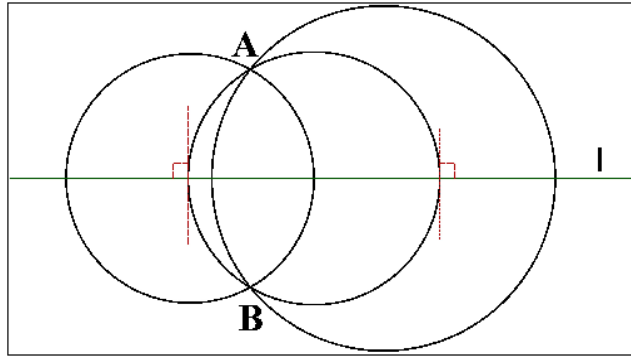
fonksiyonu tanımlandığında,

$$f(\mathbf{qp}) = f(\mathbf{q})f(\mathbf{p})$$

eşitliği sağlanmaktadır. Bu fonksiyon bir homomorfizmadır ve çekirdeği $\{\pm 1\}$ olur. Ayrıca $SO(1, 2)$ grubu $\mathbb{TH}_1 / \{\pm 1\}$ grubuna izomorf olur. O halde her dönme matrisine karşılık gelen iki birim timelike split kuaterniyon vardır ve bunlar $\mathbf{q}$ ve $-\mathbf{q}$ timelike split kuaterniyonları olur (Özdemir 2020).

2.7. Bir Koniğe Göre Bir Noktanın İncersiyonu

Geometrik olarak klasik incersiyon dönüşümleri, Yaglom (2009) tarafından kapsamlı bir şekilde tartışılmıştır. Bir çembere göre bir noktanın incersiyonu (simetriği), bir noktanın bir doğruya göre simetriği fikrine benzer şekilde düşünülebilir. A noktasının ℓ doğrusuna göre simetriği olan B noktası, merkezleri ℓ üzerinde olan ve A noktasından geçen iki çemberin kesiştiği ikinci nokta olur (Şekil 2.2).

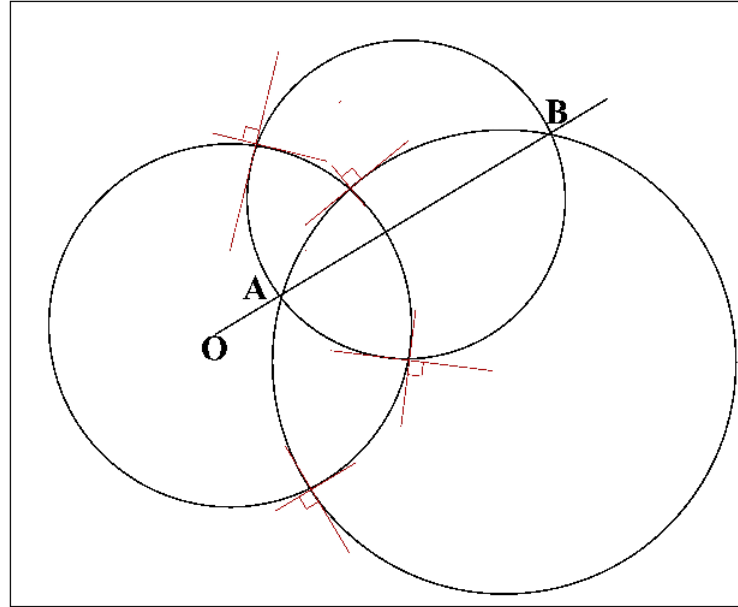


Şekil 2.2. A noktasının ℓ doğrusuna göre simetriği olan B noktası.

Aslında bu iki noktadan geçen sonsuz sayıda çember vardır. Özetle, doğruya göre simetrik olan iki noktadan geçen doğru, simetri eksenini olan ℓ doğrusuna diktir. Buradan hareketle noktanın çembere göre simetrisi fikrinde de benzer bir düşünceden yararlanılabilir. Böylece A ve B noktalarından geçen çemberlere dik olan çember (bu özellikte iki çember çizilebilir) incersiyon çemberidir. $\mathcal{C}$ incersiyon çemberinin merkezi AB doğrusu üzerindeki A noktasının soluna alınabilir (Şekil 2.3). Yaglom (2009) çalışmasında görebilir ki, O merkezli r yarıçaplı $\mathcal{C}$ çemberine göre simetrik olan A ve B noktaları arasında

$$|OA| |OB| = r^2$$

eşitliği bulunur. Böylece aşağıdaki önermeler verilebilir.



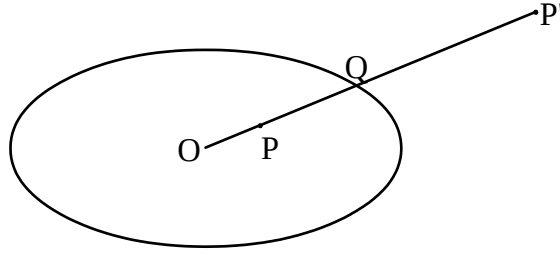
Şekil 2.3. **A** noktasının **O** merkezli $\mathcal{C}$ çemberine göre simetriği olan **B** noktası.

Önerme 2.22. *A noktasından geçen ve $\mathcal{C}$ dairesine ortogonal olan tüm çemberler ikinci bir B noktasından geçer. B noktası, A noktasının $\mathcal{C}$ çemberine göre çembersel inversiyonudur (Yaglom 2009).*

Tanım 2.23. $\mathbb{R}^2$ düzleminde $\mathcal{E}$ O merkezli bir elips olsun. Q noktası OP ışını ile elipsin kesim noktası ve P' noktası OP ışını üzerinde $|OP| |OP'| = |OQ|^2$ eşitliğini sağlayan nokta olmak üzere $\mathcal{E}$ elipsinde inversiyon,

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{R}^2 - \{O\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 - \{O\} \\ P & \longrightarrow & \varphi(P) = P' \end{array}$$

dönüşümüdür (Şekil 2.4) (Ramirez 2014).



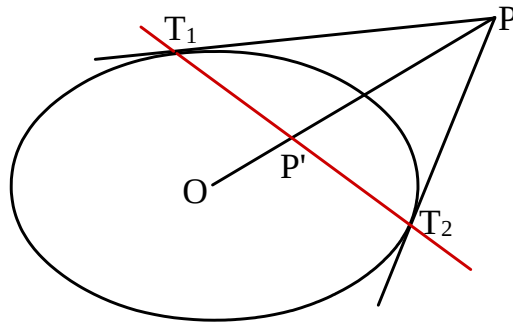
Şekil 2.4. P noktasının $\mathcal{E}$ elipsine göre inversiyonu olan P' noktası.

Tanım 2.24. Bir elipse dışındaki bir P noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları T_1 ve T_2 olsun. T_1 ve T_2 noktalarından geçen doğruya, P noktasının kutup doğrusu denir (Özdemir 2021).

Önerme 2.25. Bir $\mathcal{E}$ elipsinde P noktasının inversiyonu OP ışını ile P noktasının polar doğrusunun kesişim noktası olur. Dahası, elipsin denklemi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ise o zaman $P = (x_0, y_0)$ noktasının inversiyonu

$$P' = \left(\frac{a^2 b^2 x_0}{a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2}, \frac{a^2 b^2 y_0}{a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2} \right)$$

noktası olur (Şekil 2.5) (Ramirez 2014).



Şekil 2.5. P noktasının inversi P' ve polar doğrusu (kırmızı)

Analitik yöntemler kullanılarak merkezi bir elipse ve merkezi bir hiperbole göre inversiyon incelenmiştir (Ramirez 2014; Ramirez ve Rubiano 2014; Childress 1965). Bir elipsin (veya hiperbolün) kendisi ile homotetik olmayan bir elipse (veya hiperbole) göre

inversiyonunun 3. ve 4. dereceden bir eğri olduğu belirtilmektedir (Childress 1965). Ayrıca, kompleks sayılar kullanılarak bir noktanın birim çembere göre inversiyonu ve Clifford sayıları kullanılarak bir noktanın bir koniye göre inversiyonu incelenmiştir (Casanova 2001; Casanova 2008; Klawitter 2014; Neas 2017).

Kompleks, hiperbolik ve dual sayıları birleştiren hibrit sayıların yapısı, burada üç sayı sistemi için inversiyon dönüşümünün birlikte ele alınmasını sağlamıştır. Yani, bir hibrit birim i , ε , h ve reel sayı eksenini bir düzlem oluşturduğundan, koniklerin inversiyonu bu düzlemin Lorentziyen karakterine göre incelenebilir. $Span\{1, i\}$ düzlemi eliptik bir düzlem olacağından bu düzlemde eliptik inversiyon; $Span\{1, h\}$ düzlemi hiperbolik bir düzlem olacağından, bu düzlemde hiperbolik inversiyon; $Span\{1, \varepsilon\}$ düzlemi dual bir düzlem olacağından, bu düzlem üzerinde dual (parabolik) inversiyon yapılabilir.

2.8. Möbius Dönüşümü

Tanım 2.26. $f : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}, f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ bağıntısı ile tanımlanan bir fonksiyon Möbius dönüşümü olarak adlandırılır (Ahlfors 1981).

Bir Möbius dönüşümü aşağıdaki temel özelliklere sahiptir.

Teorem 2.27. f bir Möbius dönüşümü olsun. O zaman

- i. f afın dönüşümlerin ve inversiyonların bileşkesi olarak ifade edilebilir.
- ii. f dönüşümü bir homeomorfizmdir.
- iii. f çemberi veya doğruyu çembere veya doğruya dönüştürür.
- iv. f açığı koruyan bir dönüşümdür (Ahlfors 1981; Kisil 2012; Zill 2006).

İspat i. f fonksiyonunun ifadesi $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}$ biçiminde yazılabilir. Buradan $f_1(z) = cz+d, f_2(z) = \frac{1}{f_1}$ ve $f_3(z) = (b - \frac{ad}{c})f_2(z) + \frac{a}{c}$ alındığında $f(z) = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ olur. Dikkat edilirse, $c = 0$ olduğunda bileşke fonksiyonlar arasında inversiyon yoktur.

ii. Eğer $cz + d \neq 0$ ve $w = \frac{az+b}{cz+d}$ ise $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$ olarak bulunur. Her $z \in \mathbb{C}$ sayısı için $cz + d \neq 0$ olduğundan f iyi tanımlı, birebir, örten ve süreklidir. $c = 0$ ise $f(\infty) = \infty$ veya $c \neq 0$ ise $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ olur. Bu f fonksiyonunu sürekli olduğunu gösterir. Benzer şekilde $f^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$ fonksiyonu için $c = 0$ ise $f^{-1}(\infty) = \infty$ veya $c \neq 0$ ise $f^{-1}(\frac{a}{c}) = \infty$ olur. Bu f^{-1} fonksiyonunun sürekli bir fonksiyon olduğunu gösterir ki bu nedenle f dönüşümü homeomorfizmdir.

iii. Afin dönüşüm ve inversiyon çember veya doğruyu yine çember veya doğruya dönüştürdüğünden bunların bileşkesi olan Möbius dönüşümü de çemberi veya doğruyu çembere veya doğruya dönüştürür.

iv. Afin dönüşüm ve inversiyon açığı koruyan dönüşümler olduğundan Möbius dönüşümü açığı koruyan bir dönüşümdür. $\square$

Tanım 2.28. Möbius dönüşümlerinin kümesi $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ ile gösterilsin. O zaman bu küme

$$\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} : f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

ile tanımlanabilir (Ahlfors 1981; Kisil 2012; Zill 2006).

Teorem 2.29. $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ kümesi fonksiyonların bileşkesi işlemi altında bir gruptur.

$$\begin{aligned} \Psi : GL_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &\longrightarrow \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

dönüşümü bir örten grup homomorfizmi ve $\ker \Psi = \{aI_2 : a \in \mathbb{R}\}$ olur (Ahlfors 1981; Kisil 2012; Zill 2006).

İspat $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ kümesinin bileşke işlemi altında grup olduğu açıktır. Ψ dönüşümü

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

bağıntısı ile verildiği için Ψ dönüşümü birim matrisi $f(z) = z$ Möbius dönüşümüne resmetmektedir. $f(z) = z$ dönüşümü de $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ grubunun birim elemanıdır. $GL_2(\mathbb{C})$ kümesindeki iki matrisin çarpımının iki Möbius dönüşümünün çarpımına eşit olduğu

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + c_2d_1 & b_2c_1 + d_1d_2 \end{bmatrix}$$

ve

$$\frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + a_1b_2 + b_1d_2}{(a_2c_1 + c_2d_1)z + b_2c_1 + d_1d_2} = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2} \circ \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$$

eşitliklerinden görülebilir. Bu nedenle Ψ bir grup homeomorfizmi olur. Ψ örtendir çünkü her Möbius dönüşümüne karşılık $GL_2(\mathbb{C})$ kümesinde en az bir matris vardır. $\ker(\Psi)$

$GL_2(\mathbb{C})$ grubunun bir alt grubudur. $f(z) = z$ Möbius dönüşümü $f(z) = \frac{az + 0}{0z + a}$ eşitliği ile de yazılabilir. Bu da elemanları aynı olan köşegen matrislerin görüntüsü olur. $\square$

Sonuç 2.30. $\lambda \in \mathbb{C}$ ve I_2 birim matris olmak üzere $\ker(\Psi) = \lambda I_2$ olduğu için $\Psi : GL_2(\mathbb{C})/\lambda I_2 \longrightarrow \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ bir grup izomorfizmi olur. $GL_2(\mathbb{C})/\lambda I_2$ grubu $PGL_2(\mathbb{C})$ ile gösterilir. $GL_2(\mathbb{C})$ yerine determinantı 1 olan matrislerin grubu olan $SL_2(\mathbb{C})$ alındığında $\Psi : SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ dönüşümünün örten ve çekirdeğinin $\pm I_2$ olduğu ve $\Psi : SL_2(\mathbb{C})/\pm I_2 \longrightarrow \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ dönüşümünün izomorfizm olduğu gösterilebilir (Ahlfors 1981; Kisil 2012; Zill 2006).

Möbius dönüşümü kompleks sayılar dışında hiperbolik ve dual sayılar ve bikompleks sayılar ve quaterniyonlar üzerinde de tanımlanmıştır (Kisil 2012; Mustafa 2018; Mustafa 2018; Cao 2007; Cao vd. 2004; Parker ve Short 2009; Ghosh 2017).

3. MATERYAL VE METOT

Bu tezde matematiksel yöntemler ve kanıtlar yardımıyla, hibrit sayıların bazı geometrik uygulamaları verilmiştir. Kuaterniyon ve split kuaterniyonların geometrik özellikleri incelenirken kullanılan metodlara benzer bir yol izlenmiştir. $\mathbb{E}_1^3$ uzayındaki bir düzlem, normalinin Lorentziyen karakterinin eliptik, hiperbolik veya parabolik olmasına göre eliptik, hiperbolik ve parabolik olarak adlandırılmıştır. $\mathbb{E}_2^4$ uzayının karşılıklı olarak pseudo-ortogonal olan düzlemleri yardımıyla $\mathbb{E}_2^4$ uzayındaki dönme dönüşümleri incelenmiştir. Ayrıca hibridyen ters simetrik matris ve Rodrigues formülü ve Cayley dönüşümü yardımıyla dönme matrisleri elde edilmiştir.

$\mathbb{P}_v$ düzlemi üzerindeki koniklerin inversiyonu hibrit sayılar yardımıyla incelenmiştir. Möbius dönüşümünün katsayıları hibrit sayı olduğu durumda Möbius dönüşümü incelenmiştir. Bir $SL(2, \mathbb{K})$ ile $Möb(\mathbb{K})$ arasında grup homomorfizmi olduğundan hibrit sayı elemanlı 2×2 matrislerin determinantları belirlenmiştir. Hibrit sayılarla Möbius dönüşümü incelenirken 2×2 matrisler çarpanlarına ayrılmıştır. Möbius dönüşümünün bir hibrit sayı üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Bu tez çalışmasının ana kaynağı Özdemir (2018) çalışması olup diğer kaynakların başlıcaları Lorentz geometri için (O'Neill 1983), inversiyon için (Childress 1965, Ramirez 2014) Möbius dönüşümü için (Ahlfors 1981; Ahlfors 1985; Kisil 2012) olmuştur.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Hibrit Sayıların Geometrisine Giriş

Bu kısımda eliptik, hiperbolik ve dual sayıları birleştiren hibrit sayıların bazı geometrik yorumları ve uygulamaları verilmiştir. Öncelikle 3 boyutlu hibrit uzay tanımı, vektörel çarpım ve hibrit uzaydaki pseudo-ortogonal vektörlerin birbiri ile olan bağlantısı verilmiştir. Eliptik (kompleks), parabolik (dual) ve hiperbolik düzlem tanımları verilmiş ve bu düzlemler üzerinde dönme dönüşümleri incelenmiştir. Ayrıca, dört boyutlu uzayda karşılıklı olarak birbirine pseudo-ortogonal düzlemler üzerinde alınan hibrit sayıların çarpımı ile oluşturulan eliptik, parabolik ve hiperbolik dönme dönüşümü incelenmiştir. Herhangi bir birim timelike hibrit sayı için, dönme dönüşümünün matris formları ifade edilmiş ve Rodrigues ve Cayley dönme formülleri kanıtlanmıştır.

4.1.1. Üç Boyutlu Hibrit Uzay

Üç boyutlu hibrit uzay, eliptik, hiperbolik ve parabolik karakterdeki vektörlerden oluşan vektör uzayıdır. Böylece $\mathbb{R}^3$ uzayındaki eliptik, hiperbolik ve parabolik dönme dönüşümleri bu uzaydaki düzlemler üzerinde incelenebilir. Üç boyutlu hibrit uzay tanımı ve bu uzaydaki vektörlerin sınıflandırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

Tanım 4.1. Üç boyutlu hibrit uzay, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri için

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{K}} = -(v_1 - v_2)(u_1 - u_2) + v_2 u_2 + v_3 u_3,$$

belirsiz bilinear simetrik form ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayıdır. Bir pür hibrit sayı üç boyutlu hibrit uzayda bir vektör olarak alınabilir. Üç boyutlu hibrit uzayda bir vektör $\Delta(\mathbf{u}) = -(u_1 - u_2)^2 + u_2^2 + u_3^2$ olmak üzere

$$\begin{cases} \Delta(\mathbf{u}) < 0 \text{ ise } & \mathbf{u} \text{ eliptik} \\ \Delta(\mathbf{u}) > 0 \text{ ise } & \mathbf{u} \text{ hiperbolik} \\ \Delta(\mathbf{u}) = 0 \text{ ise } & \mathbf{u} \text{ parabolik} \end{cases}$$

şeklinde sınıflandırılabilir. Eğer $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{K}} = 0$ ise o zaman $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ pseudo ortogonal olarak adlandırılır. Bu kısımdan sonra $\mathbf{v}^\perp$ vektörü ile $\mathbf{v}$ vektörüne pseudo ortogonal olan vektör gösterilecektir (Özdemir 2018, Öztürk ve Özdemir 2022).

Tanım 4.2. Üç boyutlu hibrit uzayda vektörel çarpım $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri için

$$\mathbf{u} \times_{\mathbb{K}} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & -\epsilon & -\mathbf{h} \\ u_1 - u_2 & u_1 & u_3 \\ v_1 - v_2 & v_1 & v_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, bu vektörel çarpım

$$\mathbf{u} \times_{\mathbb{K}} (\mathbf{v} \times_{\mathbb{K}} \mathbf{w}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{K}} \mathbf{w} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbb{K}} \mathbf{v} \quad (4.1)$$

özellikliğini sağlamaktadır. Böylece, $\mathbf{q} = S_{\mathbf{q}} + \mathbf{v}_{\mathbf{q}}$ ve $\mathbf{p} = S_{\mathbf{p}} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ sayılarının hibridyen çarpımı

$$\mathbf{qp} = S_{\mathbf{q}}S_{\mathbf{p}} + S_{\mathbf{q}}\mathbf{v}_{\mathbf{p}} + S_{\mathbf{p}}\mathbf{v}_{\mathbf{q}} + \langle \mathbf{v}_{\mathbf{q}}, \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \rangle + \mathbf{v}_{\mathbf{q}} \times \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir (Öztürk ve Özdemir 2022).

Bundan böyle tez boyunca, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ hibrit vektörlerinin skaler ve vektörel çarpımı $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{K}}$ ve $\mathbf{u} \times_{\mathbb{K}} \mathbf{v}$ sırasıyla $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ve $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 4.3. $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\epsilon + q_4\mathbf{h}$ hibrit sayısı için, $\mathcal{V}_{\mathbf{q}} = (a, (b - c), c, d)$ vektörü $(-, -, +, +)$ işaretli $\mathbb{E}_2^4$ uzayında bir vektördür. $\mathcal{C}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 = -\langle \mathcal{V}_{\mathbf{q}}, \mathcal{V}_{\mathbf{q}} \rangle_{\mathbb{E}_2^4}$ olmak üzere $\mathbf{q}$ hibrit sayısı

$$\begin{cases} \mathcal{C}(\mathbf{q}) < 0 \text{ ise } & \mathbf{q} \text{ spacelike} \\ \mathcal{C}(\mathbf{q}) > 0 \text{ ise } & \mathbf{q} \text{ timelike} \\ \mathcal{C}(\mathbf{q}) = 0 \text{ ise } & \mathbf{q} \text{ lightlike} \end{cases}$$

şeklinde sınıflandırılabilir. Ayrıca, $\mathbf{q}$ sayısının normu

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{|\mathcal{C}(\mathbf{q})|} = \sqrt{|a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2|},$$

şeklinde tanımlanır ve bu norm $\|\mathbf{qp}\| = \|\mathbf{q}\| \|\mathbf{p}\|$ özelliğini sağlar. Bu norm tanımı aynı zamanda kompleks, dual ve hiperbolik sayıların normunu içerir (Özdemir 2018, Öztürk ve Özdemir 2020).

Tanım 4.4. $\mathbb{R}^3$ uzayının bütün parabolik vektörlerinin kümesi

$$\mathbf{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -(x - y)^2 + y^2 + z^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}$$

parabolik konisidir. $\mathbb{R}^3$ uzayının bütün eliptik vektörlerinin kümesi

$$\mathbf{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -(x - y)^2 + y^2 + z^2 < 0\}$$

eliptik küresidir. $\mathbb{R}^3$ uzayının bütün hiperbolik vektörlerinin kümesi

$$\mathbf{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -(x - y)^2 + y^2 + z^2 > 0\} \cup \{(0, 0, 0)\}$$

hiperbolik küresidir (Öztürk ve Özdemir 2022).

Tanım 4.5. $R \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ matrisi, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ için

$$\langle R\mathbf{u}, R\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

skalar çarpımı koruyorsa, R matrisi hibridyen ortogonal matris olarak adlandırılır (Öztürk ve Özdemir 2022).

Böylece

$$I^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $R \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ matrisinin hibridyen ortogonal matris olması için gerek ve yeter şart $R^T I^* R = I^*$ olmasıdır.

Ayrıca, bir M matrisi $M^T = -I^* M I^*$ eşitliğini sağlıyorsa M matrisinin semi ters simetrik matris olduğu söylenir. 3×3 tipindeki özel hibridyen ortogonal matrislerin kümesi

$$SO(3, \mathbb{K}) = \{R \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : R^T I^* R = I^* \text{ ve } \det R = 1\}$$

ile ifade edilir. $SO(3, \mathbb{K})$ bir gruptur. Bu grup hibridyen dönme grubu olarak adlandırılır. Her bir $R \in SO(3, \mathbb{K})$ üç boyutlu hibridyen uzayda bir dönme dönüşümünü temsil eder (Öztürk ve Özdemir 2022).

Önerme 4.6. $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ iki pür hibrit sayı olsun. Buna göre, aşağıdakiler sağlanır.

- i. $\mathbf{vw}$ hem $\mathbf{v}$ hem de $\mathbf{w}$ sayısına pseudo ortogonal,
- ii. $\mathbf{v}^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$,
- iii. Eğer O ve $\mathbf{vw}$ birbirine pseudo ortogonalse, o zaman $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ sayıları da pseudo ortogonaldır (Öztürk ve Özdemir 2022).

İspat i. (4.2) eşitliğine göre $\mathbf{vw}$ çarpımı $\mathbf{vw} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ şeklinde yazılabilir. Bu nedenle, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{vw}$ hibrit sayılarının skaler çarpımı sıfıra eşittir:

$$\langle \mathbf{vw}, \mathbf{v} \rangle = \langle \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

ii. (4.2) eşitliğinden kolaylıkla görülebilir.

iii. Eğer O ve $\mathbf{vw}$ sayılarının skaler çarpımı,

$$\langle O, \mathbf{vw} \rangle = \langle O, \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle O + \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \langle O, O \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

olur. Bunun anlamı, O ve $\mathbf{vw}$ birbirine pseudo ortogonalse, o zaman $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ sayıları da pseudo-ortogonal olur. $\square$

Teorem 4.7. $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{e} + z\mathbf{h}$ ve $\mathbf{v}^\perp = a\mathbf{i} + b\mathbf{e} + c\mathbf{h} \neq 0$ sıfırdan farklı hibrit vektörler olsun.

i. $\mathbf{v}$ eliptik vektör ise $\mathbf{v}^\perp$ hiperbolik vektör,

ii. $\mathbf{v}$ hiperbolik vektör ise $\mathbf{v}^\perp$ eliptik, hiperbolik ya da bir parabolik vektör,

iii. $\mathbf{v}$ parabolik vektör ise, $\mathbf{v}^\perp$ hiperbolik ya da parabolik vektördür (Öztürk ve Özdemir 2022).

İspat $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}^\perp$ olduğu için, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$-(x - y)(a - b) + yb + zc = 0.$$

Bu eşitlikten

$$b = \frac{ax - ay - cz}{x}, \quad x \neq 0 \quad (4.3)$$

elde edilir. Böylece, bir hibrit sayının Lorentziyen karakterinin belirlemek için, $\Delta(\mathbf{v}^\perp)$ eşitliğinde b yerine (4.3) eşitliği yazıldığında

$$\Delta(\mathbf{v}^\perp) = \frac{1}{x} (a^2x - 2a^2y + c^2x - 2acz) \quad (4.4)$$

elde edilir. Son eşitlik c ye göre çözümlerse, aşağıdaki kökler elde edilir:

$$c_1 = \frac{a}{x} \left(z - \sqrt{\Delta(\mathbf{v})} \right), \quad c_2 = \frac{a}{x} \left(z + \sqrt{\Delta(\mathbf{v})} \right).$$

Kökler incelendiğinde, köklerin varlığının $\Delta(\mathbf{v})$ sayısına bağlı olduğu görülebilir. (4.4) ikinci dereceden denkleminin işaret analizi yapıldığında hipotezin doğru olduğu görülebilir. $x = 0$ durumu benzer şekilde hesaplanabilir. $\square$

Teorem 4.8. $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\boldsymbol{\varepsilon} + z\mathbf{h}$ ve $\mathbf{v}^\perp = a\mathbf{i} + b\boldsymbol{\varepsilon} + c\mathbf{h}$ sıfırdan farklı vektörler olsun.

- i. $\mathbf{v}$ eliptik vektör ise, $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ hiperbolik vektör,
- ii. $\mathbf{v}$ hiperbolik vektör ise, $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ hiperbolik, eliptik ya da bir parabolik vektör,
- iii. $\mathbf{v}$ parabolik vektör ise, $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ parabolik vektör ya da sıfırdır (Öztürk ve Özdemir 2022).

İspat $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}^\perp$ olduğu için, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}^\perp \rangle = -(x - y)(a - b) + yb + zc = 0$ yazılabilir. Bu eşitlikten b çekildiğinde

$$b = \left(\frac{ax - ay - cz}{x} \right), x \neq 0 \quad (4.5)$$

eşitliği elde edilir. $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}^\perp$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp = (cx - az)\mathbf{i} + (cx - cy + bz - az)\boldsymbol{\varepsilon} + (ay - bx)\mathbf{h}$$

şeklinde. Şimdi, $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ hibrit vektörlerinin Lorentziyen karakterinin bulmak için, $\Delta(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)$ eşitliğinde b nin yerine (4.5) yazıldığında:

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) &= -(cx - az)^2 + (cx - cy + bz - az)^2 + (ay - bx)^2 \\ &= -\left(cy - \left(\frac{ax - ay - cz}{x}\right)z\right)^2 + \left(cx - cy + \left(\frac{ax - ay - cz}{x}\right)z - az\right)^2 + \\ &\quad + \left(ay - \left(\frac{ax - ay - cz}{x}\right)x\right)^2 \\ &= -\frac{1}{x}(-x^2 + 2yx + z^2)(a^2x - 2a^2y + c^2x - 2acz) \\ \Delta(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) &= -\frac{1}{x}\Delta(\mathbf{v})(a^2x - 2a^2y + c^2x - 2acz) \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir. $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ hibrit vektörünün Lorentziyen karakterini belirlemek için, $\Delta(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)$ sayısının işaretini belirlemek gerekir. (4.6) eşitliğinden görülebileceği gibi, eğer $\mathbf{v}$ parabolik ise, o zaman $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ parabolik ya da sıfır olur. Diğer durumlarda, c ye göre (4.6) ikinci dereceden denkleminin kökleri

$$c_1 = -\frac{a}{x} \left(\sqrt{\Delta(\mathbf{v})} - z \right), c_2 = \frac{a}{x} \left(z + \sqrt{\Delta(\mathbf{v})} \right)$$

olduğu görülür. Denklemin işaret analizi yapıldığında hipotezin doğruluğu görülebilir. $x = 0$ durumu benzer şekilde hesaplanabilir. $\square$

4.1.2. Hibrit Sayılarla Eliptik Dönme Dönüşümleri

Bir önceki bölümde hibrit sayıların geometrisi ile ilgili kavramlar tanıtılmıştır. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki vektörler hibrit metrik ile ele alınmış ve vektörleri ve düzlemleri Lorentz-Minkowski uzayında olduğu gibi hibrit metrik ile eliptik, hiperbolik ve parabolik olarak sınıflandırılmıştır. Bu şekilde düzlemler aşağıdaki gibi inşa edilebilir:

Kompleks düzlem $a1 + bi$

Hiperbolik düzlem $a1 + d\mathbf{h}$

Dual düzlem $a1 + c\epsilon$

Bu düzlemler $1 = O$ reel eksenini paylaşır. O'Neill (1983)'de verilen düzlem tanımı üç boyutlu hibridyen uzaya uyarlanabilir. Buna göre aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 4.9. Verilen bir $\mathbb{P}_{\mathbf{v}} \subset \mathbb{R}^3$ alt uzayı, $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ üzerine indirgenmiş $\langle, \rangle$ hibridyen metrikle, $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

- i. Hibridyen metrik pozitif tanımlıdır. O zaman $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ eliptik düzlem olarak adlandırılır.
- ii. Hibridyen metrik 1 indexlidir. O zaman $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ hiperbolik düzlem olarak adlandırılır.
- iii. Hibridyen metrik dejeneredir. O zaman $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ parabolik düzlem olarak adlandırılır (Öztürk ve Özdemir 2022).

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}^\perp \neq 0$ ve $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{v}^\perp$ için $Span\{O, \mathbf{v}\}$ düzlemi ve $Span\{\mathbf{v}^\perp, \mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp\}$ düzlemi birbirine pseudo-ortogonaldır. Bundan sonraki kısımda bu düzlemler $Span\{O, \mathbf{v}\} = \mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ ve $Span\{\mathbf{v}^\perp, \mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp\} = \mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ şeklinde gösterilecektir. $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ düzlemi, $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemine karşılıklı pseudo-ortogonal düzlem olarak adlandırılacaktır. Her $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ birim eliptik vektörü için, $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemi kompleks düzleme izomorftur. Çünkü, $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzleminde $\mathbf{v}^2 = -1$ olduğu için $\mathbf{v}$ vektörü i gibi ve O reel eksen gibi hareket eder. Bu düzlemin karşılıklı pseudo ortogonal sıfırdan farklı $\mathbf{v}^\perp, \mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ hiperbolik vektörleri tarafından gerilir ve $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ düzlemi de eliptik bir düzlemdir. $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ düzlemi de kompleks düzleme izomorftur (Catoni vd. 2005; Catoni 2008; Harkin ve Harkin 2004; Kisil 2012; Miller ve Boehning 1968; Özdemir 2018; Rooney 1978; Rooney 2014; Sobczyk 1995; Şimşek ve Özdemir 2016; Ulrych 2000).

Teorem 4.10. $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^3$ bir düzlem ve $\mathbf{N}$ bu düzleme pseudo-ortogonal vektör olsun. O zaman $\mathbb{P}$ eliptik (hiperbolik, parabolik) düzlem olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{N}$ eliptik

(hiperbolik, parabolik) vektör olmasıdır (Öztürk ve Özdemir 2022).

İspat $\mathbb{P}$ bir eliptik düzlem olsun. O zaman bu düzlemin hibridyen metriği pozitif tanımlıdır. Böylece, $\mathbb{P}$ düzlemi üzerindeki vektörler hiperbolik vektördür. Teorem 4.7 ve 4.8'e göre, $\mathbb{P}$ düzlemi üzerindeki pseudo-ortogonal olan iki hiperbolik vektörün vektörel çarpımı eliptik vektördür. Bu da düzlemin normali $\mathbf{N}$ vektörünün eliptik olması demektir. Diğer yandan, $\mathbf{N}$ eliptik vektör olsun. Teorem 4.7 ve 4.8'e göre, $\mathbb{P}$ düzlemi üzerindeki vektörler hiperboliktir. Bu nedenle $\mathbb{P}$ düzlemi üzerindeki hibridyen skaler çarpım pozitif tanımlıdır ve $\mathbb{P}$ düzlemi eliptik bir düzlemdir. Benzer bir kanıt diğer durumlar için yapılabilir. $\square$

Teorem 4.11. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\mathbf{v}$ bir birim eliptik vektör olsun. O zaman $\mathbf{v}^\perp \neq 0$ bir hiperbolik vektördür. Bu nedenle $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ ile pseudo-ortogonal olan $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ her zaman inşa edilebilir (Öztürk ve Özdemir 2022).

İspat Eğer $\mathbf{v}$ eliptik ise, o zaman $\mathbf{v}^\perp$ ve $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ lineer bağımsız hiperbolik vektördür. Bu vektörler yardımıyla, $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ düzlemi inşa edilebilir. $\square$

$\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ iki dejenere olmayan vektör ise $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v}\} \mathbb{E}_1^3$ uzayının bir bazıdır. Bu bazın pozitif mi ya da negatif mi yönlendirilmiş baz olduğu $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin Lorentziyen karakterine bakılarak anlaşılabilir. Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ spacelike ise $\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v}$ timelike olur. Bu nedenle

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v}, \mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v} \rangle < 0$$

olacağı için B negatif yönlendirilmiştir. Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ farklı Lorentziyen karaktere sahip ise $\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v}$ spacelike olur. Bu nedenle

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v}, \mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v} \rangle > 0$$

olacağı için B pozitif yönlendirilmiştir (Lopez 2014). Ayrıca bir eliptik vektör için Tanım 4.9, Teorem 4.7, 4.8, 4.10, 4.11'den elde edilen bilgi Çizelge 4.1'de özetlenmiştir:

Çizelge 4.1. $\mathbf{v}$ eliptik vektörü iken $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ ve $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ düzleminin karakteri

$\mathbf{v}$ eliptik ise, Tipi	$\mathbf{v}^\perp$ Hiperbolik	$\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ Hiperbolik	$\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemi Eliptik	$\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ düzlemi Eliptik
-----------------------------------	----------------------------------	--	--	--

Bir hibrit sayı ile çarpma doğrusal bir dönüşümdür, bu nedenle bir birim hibrit sayı ile çarpma, tıpkı split kuaterniyonlarda olduğu gibi $\mathbb{E}_2^4$ uzayında 4 boyutlu bir lineer dönüşüm temsil eder. Hibrit sayılar, split kuaterniyonlar ile izomorf ve aynı zamanda, bu iki sayı kümesindeki iki sayının çarpımı da (4.2)'den görüldüğü gibi aynı olur.

Teorem 4.12. $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{\varepsilon} + q_4\mathbf{h}$ eliptik hibrit sayısının polar formu, $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{q})}{\|\mathbf{\varepsilon}_\mathbf{q}\|}$, $\mathbf{V}^2 = -1$ olmak üzere

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| (\cos \theta + \mathbf{V} \sin \theta)$$

şeklinde ifade edilebilir. $\mathbf{q}$ sayısının argümeti θ

$$\theta = \begin{cases} \pi - \arctan \frac{\|\mathbf{\varepsilon}_\mathbf{q}\|}{|q_1|} & , q_1 < 0; \\ \arctan \frac{\|\mathbf{\varepsilon}_\mathbf{q}\|}{|q_1|} & , q_1 > 0; \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Özdemir 2018).

Tanım 4.13. Sol ve sağ hibrit çarpım dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$L_\mathbf{q}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}\mathbf{p} \quad \text{ve} \quad R_\mathbf{q}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{q}. \quad (4.7)$$

Bir $\mathbf{q}$ hibrit sayısı için, bu dönüşümlerin bileşkesi olan dönüşüm,

$$S_\mathbf{q}(\mathbf{p}) = L_\mathbf{q}(R_{\bar{\mathbf{q}}}(\mathbf{p})) = \mathbf{q}\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}} \quad \text{ve} \quad T_\mathbf{q}(\mathbf{p}) = L_\mathbf{q}(R_\mathbf{q}(\mathbf{p})) = \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q} \quad (4.8)$$

sandviç dönüşümü olarak adlandırılır (Öztürk ve Özdemir 2022).

Bu tanımın ışığında, aşağıdaki önermeler verilebilir.

Önerme 4.14. $L_\mathbf{q}$ ve $R_\mathbf{q}$ sırasıyla sol ve sağ hibrit çarpım dönüşümleri olsun. Eğer $\mathbf{v}$ bir birim eliptik vektör ise, aşağıdakiler sağlanır (Öztürk ve Özdemir 2022).

- i. $L_\mathbf{v}(O) = R_\mathbf{v}(O) = \mathbf{v}$,
- ii. $L_\mathbf{v}(\mathbf{v}) = R_\mathbf{v}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = -1$,
- iii. $L_\mathbf{v}(\mathbf{v}^\perp) = \mathbf{v}\mathbf{v}^\perp = \mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp = -R_\mathbf{v}(\mathbf{v}^\perp)$,
- iv. $L_\mathbf{v}(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}^\perp = -\mathbf{v}^\perp = -R_\mathbf{v}(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)$.

İspat Kanıt (4.7) ve hibrit sayı çarpımı yardımıyla kolaylıkla görülebilir. □

Önerme 4.15. $\mathbf{v}$ eliptik bir vektör ve $T_{\mathbf{v}}$ ve $S_{\mathbf{v}}$ sandviç dönüşümü olsun. Buna göre, aşağıdaki ifadeler doğrudur (Öztürk ve Özdemir 2022).

- i. $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}^{\perp}) = \mathbf{v}^{\perp}$,
- ii. $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}) = \mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}$,
- iii. $S_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}^{\perp}) = -\mathbf{v}^{\perp}$,
- iv. $S_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}) = -\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}$.

İspat i. (4.1) eşitliğinden,

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}^{\perp}) = \mathbf{v}\mathbf{v}^{\perp}\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{v}^{\perp}\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (\mathbf{v}^{\perp} \times \mathbf{v}) = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}^{\perp} = \mathbf{v}^{\perp}.$$

sonucunun doğru olduğu görülebilir. ii., iii., iv. benzer şekilde gösterilebilir. $\square$

4.1.3. Düzlemde Eliptik Dönme Dönüşümü

Hibrit düzlemde eliptik dönme dönüşümünü incelemek için gerekli olan tanımlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.16. $\mathbb{E}_2^4$ uzayında, $O = (1, 0, 0, 0)$ ve $\mathbf{v}$ eliptik vektörü ile gerilen düzlem $\mathbf{v}$ vektörünün eliptik düzlemi olarak adlandırılır (Öztürk ve Özdemir 2022).

Eliptik bir düzlemdeki (x, y) noktası $x + \mathbf{v}y$, $x, y \in \mathbb{R}$ şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.17. $\mathbf{v}$ eliptik vektörü için $\mathbf{q} = \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta \in \mathbb{K}$ herhangi bir birim timelike hibrit sayı olsun.

$$L_{\mathbf{q}} : \mathbb{P}_{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{p} \rightarrow L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}\mathbf{p}$$

lineer dönüşümü orijin etrafında eliptik θ açısı kadar eliptik dönme belirtir. Bu lineer dönüşümün matris temsili aşağıdaki gibidir:

$$L_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

(Öztürk ve Özdemir 2022).

İspat $\mathbb{P}_v$ düzleminde $\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\| (\cos \alpha + \mathbf{v} \sin \alpha)$ eliptik timelike sayısı için $(\|\mathbf{p}\| \cos \alpha, \|\mathbf{p}\| \sin \alpha)^T$ vektörü $\mathbf{p}$ sayısının vektör temsili olmak üzere L_q dönüşümü matris yardımıyla

$$\begin{aligned} L_q(\mathbf{p}) &= (\cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta) \|\mathbf{p}\| (\cos \alpha + \mathbf{v} \sin \alpha) \\ &= \|\mathbf{p}\| ((\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) + (\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha) \mathbf{v}) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\mathbf{p}\| \cos \alpha \\ \|\mathbf{p}\| \sin \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

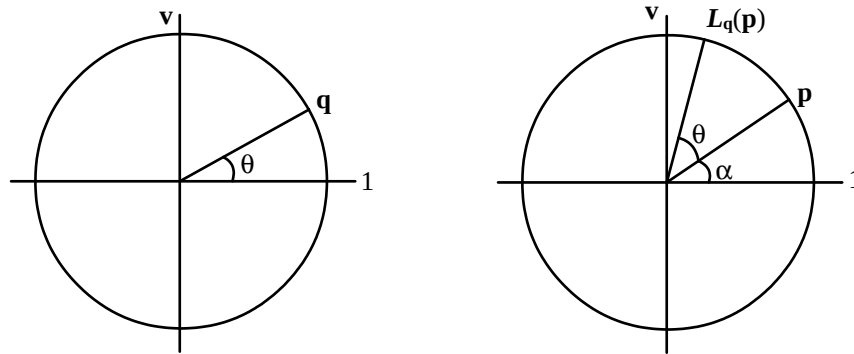
şeklinde ifade edilebilir. Bu nedenle L_q dönüşümünün matrisi

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

olur. O zaman

$$L_q(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{p}\| (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) \\ \|\mathbf{p}\| (\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{p}\| \cos (\alpha + \theta) \\ \|\mathbf{p}\| \sin (\alpha + \theta) \end{bmatrix}$$

yazılabilir. $\|L_q(\mathbf{p})\| = \|\mathbf{p}\|$ olduğu için, dönüşüm normu korur. Böylece $L_q(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p}\| (\cos (\alpha + \theta) + \mathbf{v} \sin (\alpha + \theta))$ olduğundan L_q dönüşümü $\mathbf{p}$ sayısını θ eliptik açısı kadar orijin etrafında $x^2 + y^2 = C(\mathbf{p})$ çemberi üzerinde döndürmüştür (Şekil 4.1). $\square$



Şekil 4.1. $\mathbb{P}_v$ düzlemi üzerindeki herhangi bir hibrit sayının bir $\mathbf{q} \in \mathbb{P}_v$ birim hibrit sayı ile soldan çarpımının etkisi.

Örnek 4.18. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\epsilon + 2\mathbf{h}$ eliptik vektörü ile oluşturulan $\mathbb{P}_v$ düzlemindeki $\mathbf{p} = 5 + 12\mathbf{v} \in \mathbb{P}_v$ ve,

$$\mathbf{q} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathbf{v} \quad \text{ve} \quad \theta = \arg(\mathbf{q}) = \arctan(4/3)$$

eliptik hibrit sayısı verilsin. Doğrudan hesaplama yapıldığında

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33/5 \\ 56/5 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{33}{5} + \frac{56}{5} \mathbf{v} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, görülebilir ki $\|L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\| = \|\mathbf{p}\|$, ve $L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})$ sayısının argümenti $\arctan(-56/33)$ dür. Gerçekten $\mathbf{p}$ sayısının normu 13 ve argümenti $\alpha = \arctan(12/5)$ olduğu için, $L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})$ sayısının argümenti trigonometrik olarak hesaplandığında

$$\tan(\theta + \alpha) = \frac{\tan \theta + \tan \alpha}{1 - \tan \theta \tan \alpha} = \frac{(4/3) + (12/5)}{1 - (4/3)(12/5)} = -\frac{56}{33}$$

olarak bulunur. Böylece $\theta + \alpha = \arctan(-56/33)$ elde edilir. Bu $\mathbf{p}$ sayının pozitif yönde θ kadar dönmesi anlamına gelir.

4.1.4. Karşılıklı Olarak Ortogonal Düzlemlerde Eliptik Dönme

$\mathbb{E}_2^4$ uzayında bulunan bütün hibrit sayıları $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemi üzerinde ifade edemeyiz. Bütün hibrit sayıları ifade etmek için, $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemine pseudo-ortogonal olan $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzlemine ihtiyaç vardır. $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemindeki her bir hibrit sayı $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzlemindeki sıfırdan farklı ve $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{v}^{\perp}$ olan her pür hibrit sayıya pseudo-ortogonaldır. Herhangi $\mathbf{v}$ pür eliptik sayısı için $\mathbf{v}^{\perp} \neq 0$ ve $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{v}^{\perp}$ olacak şekilde $\{O, \mathbf{v}, \mathbf{v}^{\perp}, \mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}\}$ tabanı seçilebilir. Böylece, $\mathbb{P}_{\mathbf{v}} \cap \mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp} = \{0\}$ olduğu için

$$\mathbb{P}_{\mathbf{v}} \oplus \mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp} = \mathbb{E}_2^4$$

yazılabilir.

Herhangi bir birim timelike sayı ile çarpma işlemi $\mathbb{E}_2^4$ uzayında bir lineer izometri olduğu için, $\mathbf{q} = S_{\mathbf{q}} + \mathbf{v}_{\mathbf{q}}$ birim timelike hibrit sayısı $\mathbb{E}_2^4$ uzayında bir dönme dönüşümü temsil eder. Burada, bunu tam olarak gösterebilmek için bu hibridyen çarpma işleminin $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzlemindeki pür hibrit sayılar üzerindeki etkisi incelenmiştir (Öztürk ve Özdemir 2022).

Teorem 4.19. $\mathbf{v}$ birim eliptik vektör ve $\mathbf{v}^{\perp} \neq 0$ olsun. $\theta, \alpha \in [0, 2\pi)$ için,

$$\mathbf{w} = (\cos \alpha) \mathbf{v}^{\perp} + (\sin \alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}) \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp} \text{ pür hibrit sayısının, } \mathbf{q} = (\cos \theta) O + (\sin \theta) \mathbf{v} \in$$

$\mathbb{P}_v$ hibrit sayısıyla çarpımının etkisi, çarpma işleminin sağdan veya soldan yapılmasına göre, aşağıdaki gibidir:

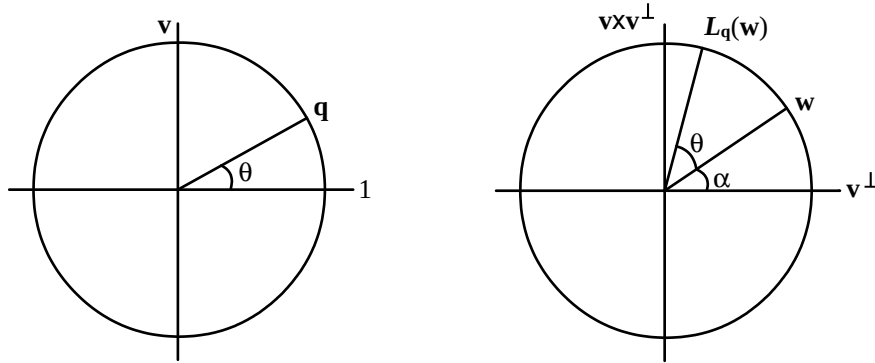
- i. L_q, w vektörünü $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminde θ açısı kadar pozitif yönde döndürür.
- ii. R_q, w vektörünü $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminde θ açısı kadar negatif yönde döndürür (Öztürk ve Özdemir 2022).

İspat i. $L_q(w) = qw$ doğrudan hesaplandığında

$$\begin{aligned}
 L_q(w) &= qw \\
 &= ((\cos \theta) O + (\sin \theta) v) ((\cos \alpha) v^\perp + (\sin \alpha) (v \times v^\perp)) \\
 &= (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) v^\perp + (\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha) (v \times v^\perp) \\
 &= \cos(\alpha + \theta) v^\perp + \sin(\alpha + \theta) (v \times v^\perp).
 \end{aligned}$$

elde edilir. $L_q(w)$ sayısı $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminde. Böylece, L_q soldan çarpma işlemi $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminde w sayısını θ eliptik açısı kadar pozitif yönde döndürür (Şekil 2.5).

ii. i.'e benzer şekilde gösterilebilir. □



Şekil 4.2. $\mathbb{P}_v$ eliptik düzlemindeki bir q hibrit sayısıyla $\mathbb{P}_v^\perp$ düzlemindeki bir w hibrit sayısının soldan çarpımının etkisi.

Teorem 4.20. v birim eliptik vektör ve $v^\perp \neq 0$ olsun. w birim eliptik vektörü ve $\theta \in (0, \pi)$ için,

$$S_q : \mathbb{P}_v^\perp \rightarrow \mathbb{P}_v^\perp, \quad w \rightarrow S_q(w) = qw\bar{q}$$

dönüşümü w vektörünü v vektörü etrafında 2θ açısı kadar pozitif yönde döndürür (Öztürk ve Özdemir 2022).

İspat $\mathbf{q} \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ ve $\mathbf{w} \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ olduğu için, bu sayılar kutupsal formda $\mathbf{q} = (\cos \theta) O + (\sin \theta) \mathbf{v}$ ve $\mathbf{w} = (\cos \alpha) \mathbf{v}^{\perp} + (\sin \alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp})$ şeklinde yazılabilir. $\alpha \in [0, 2\pi)$ için, doğrudan hesaplama yapıldığında,

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{q}}(\mathbf{w}) &= \mathbf{q} \mathbf{w} \bar{\mathbf{q}} \\ &= [(\cos \theta) O + (\sin \theta) \mathbf{v}] [(\cos \alpha) \mathbf{v}^{\perp} + (\sin \alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp})] [(\cos \theta) O - (\sin \theta) \mathbf{v}] \\ &= [\cos(\alpha + \theta) \mathbf{v}^{\perp} + \sin(\alpha + \theta) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp})] [(\cos \theta) O - (\sin \theta) \mathbf{v}] \\ &= \cos(\alpha + 2\theta) \mathbf{v}^{\perp} + \sin(\alpha + 2\theta) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu, $S_{\mathbf{q}}$ dönüşümünün, $\mathbf{w}$ vektörünü $\mathbf{v}$ vektörü etrafında pozitif yönde 2θ kadar döndürmüş olması anlamına gelir. $\square$

Örnek 4.21. $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ ve $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzlemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} & \text{Span} \{O, \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\boldsymbol{\varepsilon} + 2\mathbf{h}\}, \\ & \text{Span} \{\mathbf{v}^{\perp} = 3\mathbf{i}/5 + \boldsymbol{\varepsilon} - 2\mathbf{h}/5, \mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp} = -4\mathbf{i}/5 + 2\boldsymbol{\varepsilon} + 11\mathbf{h}/5\} \end{aligned}$$

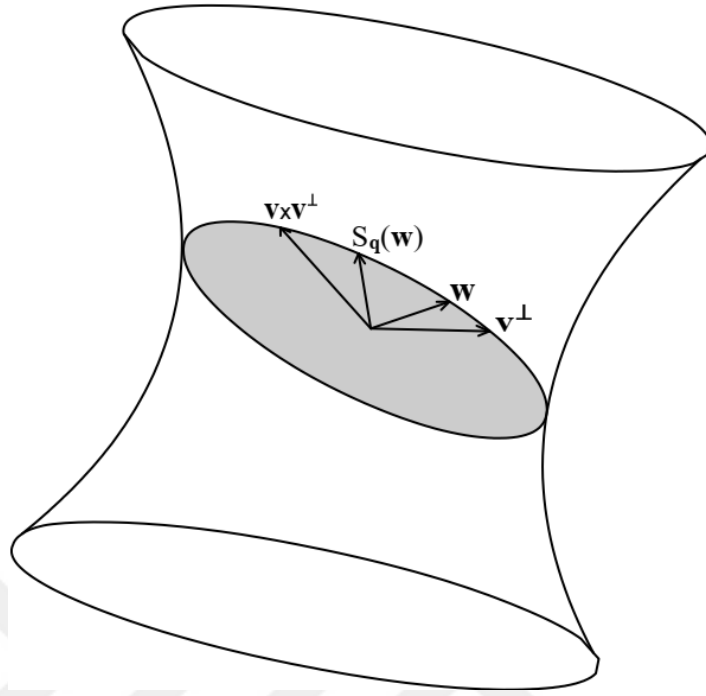
olsun. $\mathbf{q} = (\cos \frac{\pi}{12}) O + (\sin \frac{\pi}{12}) \mathbf{v}$ ve $\mathbf{w} = (\cos \frac{\pi}{8}) \mathbf{v}^{\perp} + (\sin \frac{\pi}{8}) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp})$ hibrit sayıları için, $S_{\mathbf{q}}(\mathbf{w})$ sayısı,

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{q}}(\mathbf{w}) &= [(\cos \frac{\pi}{8}) O + (\sin \frac{\pi}{8}) \mathbf{v}] [(\cos \frac{\pi}{12}) \mathbf{v}^{\perp} + (\sin \frac{\pi}{12}) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp})] [(\cos \frac{\pi}{8}) O - (\sin \frac{\pi}{8}) \mathbf{v}] \\ &= (\cos \frac{\pi}{3}) \mathbf{v}^{\perp} + (\sin \frac{\pi}{3}) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}) \\ &= (\cos \frac{\pi}{3}) (\frac{3}{5} \mathbf{i} + \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{2}{5} \mathbf{h}) + (\sin \frac{\pi}{3}) (-\frac{4}{5} \mathbf{i} + 2\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{11}{5} \mathbf{h}) \\ S_{\mathbf{q}}(\mathbf{w}) &= \left(-\frac{2}{5} \sqrt{3} + \frac{3}{10}\right) \mathbf{i} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{11}{10} \sqrt{3}\right) \mathbf{h} + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca,

$$S_{\mathbf{q}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^{\perp} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}$$

yazılabilir. Böylece, $\mathbf{w}$ sayısı, $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzleminde $\mathbf{v}$ eliptik vektörü etrafında $\pi/4$ eliptik açısı kadar dönmüştür (Şekil 4.3).



Şekil 4.3. $\mathbb{P}_v^\perp$ üzerinde eliptik dönme.

4.1.5. Hibridyen Dönme Dönüşümünün Matris Temsili

$S_q(\mathbf{x}) = \mathbf{q}\mathbf{x}\bar{\mathbf{q}}$ dönüşümü $\mathbf{x}$ vektörünü $\mathbf{v}_q$ eliptik vektörü eksenini etrafında θ açısı kadar döndürmektedir. Bu dönüşüm sağ ve sol çarpım matrisleri yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir: $\mathbf{x} \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}_q}^\perp$ olmak üzere

$$S_q(\mathbf{x}) = \mathbf{q}\mathbf{x}\bar{\mathbf{q}} = L(\mathbf{q})R(\bar{\mathbf{q}})\mathbf{x}.$$

$$S_q(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} q_1 & q_3 - q_2 & q_2 & q_4 \\ q_2 & q_1 - q_4 & 0 & q_2 \\ q_3 & -q_4 & q_1 + q_4 & q_2 - q_3 \\ q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & -q_3 + q_2 & -q_2 & -q_4 \\ -q_2 & q_1 - q_4 & 0 & q_2 \\ -q_3 & -q_4 & q_1 + q_4 & -q_3 + q_2 \\ -q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \end{bmatrix}.$$

Böylece bir birim timelike hibrit sayı için standart dönme matrisi R aşağıdaki gibidir:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (q_1 - q_4)^2 + q_2^2 & -2q_2^2 & 2q_2(q_1 - q_4) \\ 0 & -2q_3^2 + 2q_2q_3 - 2q_1q_4 & (q_1 + q_4)^2 - q_2^2 & 2q_1q_2 - 2q_1q_3 - 2q_3q_4 \\ 0 & 2q_1q_3 + 2q_2q_4 - 2q_3q_4 & -2q_2(q_1 + q_4) & q_1^2 - q_2^2 + 2q_3q_2 - q_4^2 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Herhangi bir birim timelike $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\epsilon + q_4\mathbf{h}$ hibrit sayısı için, (4.10) matrisinin 1 özdeğerine karşılık gelen özvektör $q_2\mathbf{i} + q_3\epsilon + q_4\mathbf{h}$ olur. Ayrıca, R matrisi $R^T I^* R = I^*$ ve $\det R = 1$ eşitliklerini sağlamaktadır (Öztürk ve Özdemir 2022).

Özellikle kompleks, hiperbolik ve dual sayılara karşılık gelen eliptik, hiperbolik ve parabolik 3×3 dönme matrisleri aşağıdaki gibidir:

- $\mathbf{q}_i = \cos(\theta/2) + \mathbf{i} \sin(\theta/2)$ birim kompleks sayısına karşılık gelen 3×3 dönme matrisi aşağıdaki gibidir.

$$R_i^\theta = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta - 1 & \sin \theta \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

- $\mathbf{q}_h = \cosh(\theta/2) + \mathbf{h} \sinh(\theta/2)$ birim hiperbolik sayısına karşılık gelen 3×3 dönme matrisi aşağıdaki gibidir.

$$R_h^\theta = \begin{bmatrix} \cosh \theta - \sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta + \sinh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{q}_\epsilon = 1 + \epsilon\theta$ birim dual sayısına karşılık gelen 3×3 dönme matrisi aşağıdaki gibidir.

$$R_\epsilon^\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2\theta^2 & 1 & -2\theta \\ 2\theta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aynı zamanda, R matrisinin elemanları R_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$ olmak üzere, R matrisine karşılık gelen $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\epsilon + q_4\mathbf{h}$ hibrit sayısı aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} q_1 &= \pm \frac{\sqrt{1 + R_{22} + R_{33} + R_{44}}}{2}, \\ q_2 &= \frac{R_{24} - R_{43}}{4q_1}, \\ q_3 &= \frac{R_{42} - R_{34} + R_{24}}{4q_1}, \\ q_4 &= \frac{R_{33} - R_{22} - R_{23}}{4q_1}. \end{aligned}$$

Eliptik Rodrigues Dönme Formülü Üstel dönüşüm, e^M matris üstel serisi tarafından tanımlanmaktadır. Herhangi bir M (semi) ters-simetrik matrisi için, e^M üstel matris dönüşümü her zaman bir dönme matrisi vermektedir. Bu metod, Rodrigues formülü olarak da bilinir. Rodrigues dönme formülü dönme matrisi üretmek için faydalı bir metod olarak kullanılmaktadır (Özdemir 2015; Nešović 2016; Erdoğan ve Özdemir 2020). Bu formül, üç boyutlu hibridyen uzayda dönme matrisi elde etmek için kullanılmıştır. Bunun için, dönme eksenini üzerinde uzanan $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{e} + v_3\mathbf{h}$ vektörü için M semi ters-simetrik matris aşağıdaki gibidir:

$$M = \begin{bmatrix} -v_3 & 0 & v_1 \\ -v_3 & v_3 & v_1 - v_2 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Teorem 4.22. M matrisi (4.11) şeklinde bir semi ters-simetrik matris ve $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{e} + v_3\mathbf{h}$ bir birim eliptik vektör olsun. Rodrigues dönme formülü yardımıyla dönme matrisi, $\theta \in [0, 2\pi)$ eliptik açısı, $\mathbf{q} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{v} \sin \frac{\theta}{2}$ ve I_3 3×3 birim matris olmak üzere,

$$R_{\mathbf{q}}^\theta = e^{\theta M} = I_3 + (\sin \theta) M + (1 - \cos \theta) M^2$$

olarak bulunabilir. $R_{\mathbf{q}}^\theta$ matrisi $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ düzleminde $\mathbf{v}$ vektörü etrafında bir dönme dönüşümünü ifade eder. $R_{\mathbf{q}}^\theta$ matrisi $v_1^2 - v_3^2 - v_1v_2 = \lambda$, $1 - \cos \theta = c$ olmak üzere aşağıda verilmiştir:

$$\begin{bmatrix} c(v_3^2 + v_1v_2) - v_3 \sin \theta + 1 & -v_1^2 c & v_1 \sin \theta - cv_1v_3 \\ -(v_2^2 - v_1v_2)c - v_3 \sin \theta & -c\lambda + v_3 \sin \theta + 1 & (v_1 - v_2) \sin \theta - cv_2v_3 \\ v_2 \sin \theta - (v_3v_2 - v_3v_1)c & -cv_1v_3 - v_1 \sin \theta & -c(v_1^2 - 2v_1v_2) + 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

(Öztürk ve Özdemir 2022).

İspat M matrisinin karakteristik polinomu $X^3 - \Delta(\mathbf{q})X = 0$ dir. Bu nedenle, $M^3 = \Delta(\mathbf{q})M$ ve M matrisinin kuvvetleri için

$$M^{2n} = (\Delta(\mathbf{q}))^{n-1} M^2, M^{2n-1} = (\Delta(\mathbf{q}))^{n-1} M \quad (4.13)$$

eşitlikleri yazılabilir. Böylece, $\mathbf{v}$ birim eliptik hibrit sayısı için Rodrigues formülü yardı-

mıyla R_q^θ matrisi aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}
 R_q^\theta &= e^{\theta M} = I_3 + \theta M + \frac{\theta^2 M^2}{2!} + \frac{\theta^3 M^3}{3!} + \frac{\theta^4 M^4}{4!} + \dots \\
 &= I_3 + \theta M + \frac{\theta^2 M^2}{2!} - \frac{\theta^3 M}{3!} - \frac{\theta^4 M^2}{4!} + \dots \\
 &= I_3 + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) M + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \dots \right) M^2 \\
 R_q^\theta &= I_3 + (\sin \theta) M + (1 - \cos \theta) M^2.
 \end{aligned}$$

M matrisi yardımıyla (4.12) matrisi son eşitlikten hesaplanabilir. (4.12) matrisi $\det R_q^\theta = 1$ ve $(R_q^\theta)^T I^* R_q^\theta = I^*$ eşitliklerini sağlar. Bu nedenle, R_q^θ bir dönme matrisidir. R_q^θ matrisinin 1 özdeğerine karşılık gelen özvektörü v dir. Buna göre v eliptik hibrit vektörü dönme eksenini üzerinde yer almaktadır. $\square$

Eliptik Cayley Dönüşümü (4.11) şeklindeki semi ters simetrik M matrisi için, $(I_3 + M)$ matrisinin tersi vardır. Fakat M matrisinin elemanlarını oluşturan v vektörü hiperbolik ise birimden farklı olmalıdır. Cayley dönüşümü aşağıdaki eşitlikle verilebilir:

$$Cay(M) = (I_3 - M)(I_3 + M)^{-1} = (I_3 + M)^{-1}(I_3 - M)$$

(Özdemir 2015; Nešović 2016; Erdoğan ve Özdemir 2020).

Teorem 4.23. v eliptik vektör ve M (4.11) şeklindeki v vektörüne karşılık gelen semi ters-simetrik matris olmak üzere

$$R = Cay(M) = (I_3 - M)(I_3 + M)^{-1} \quad (4.14)$$

bir eliptik dönme matrisidir. Bu matris aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\frac{1}{1 - \langle v, v \rangle} \begin{bmatrix} (v_1^2 + v_3^2 + 2v_3 + 1) & -2v_1^2 & -2v_1(v_3 + 1) \\ 2(-v_2^2 + v_1v_2 + v_3) & -(v_1^2 - v_3^2 + 2v_3 - 1) & -2(v_1 - v_2 + v_2v_3) \\ -2(v_2 - v_1v_3 + v_2v_3) & -2v_1(v_3 - 1) & -(v_1^2 - 2v_2v_1 + v_3^2 - 1) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

(Öztürk ve Özdemir 2022).

İspat $(I_3 + M)^T I^* = I^* (I_3 - M)$ ve $(I_3 - M)^T I^* = I^* (I_3 + M)$ eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler kullanıldığında

$$R^T I^* R = ((I_3 - M)(I_3 + M)^{-1})^T I^* (I_3 - M)(I_3 + M)^{-1} = I^*$$

eşitliği görülebilir. Aynı zamanda, $\det R = \det ((I_3 - M)(I_3 + M)^{-1}) = 1$. Böylece $R = Cay(M)$ eliptik dönme matrisidir. Doğrudan hesaplama ile (4.15) bulunabilir. $\square$

Sonuç 4.24. (4.15) matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 = \frac{1+\|\mathbf{v}\|}{1-\|\mathbf{v}\|}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\|\mathbf{v}\|}{1+\|\mathbf{v}\|}, \quad \lambda_3 = 1$$

dir. $\mathbf{v}$ eliptik vektörü için

$$\cos \theta = \frac{1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}{1 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

formülü ile dönme açısı hesaplanabilir (Öztürk ve Özdemir 2022).

4.1.6. Hiperbolik Hibrit Sayıların Geometrisi

Bu bölümde hiperbolik hibrit sayıların geometrik özellikleri üzerinde durulmuştur.

Teorem 4.25. $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\boldsymbol{\varepsilon} + q_4\mathbf{h}$ hiperbolik hibrit sayısının polar formu, $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{q})}{\|\mathcal{E}_{\mathbf{q}}\|}$, $\mathbf{V}^2 = 1$, ve θ hiperbolik açısı $\mathbf{q}$ hibrit sayısının argumenti olmak üzere,

$$\mathbf{q} = \mp \|\mathbf{q}\| (\cosh \theta + \mathbf{v} \sinh \theta)$$

dur. $\mathbf{q}$ hibrit sayısının argümenti θ aşağıdaki eşitlikten elde edilebilir:

$$\theta = \ln \frac{q_1 + \|\mathcal{E}_{\mathbf{q}}\|}{\|\mathbf{q}\|}.$$

Teorem 4.26. $P \subset \mathbb{R}^3$ bir düzlem ve $\mathbf{N}$ vektörü bir bu düzleme pseudo-ortogonal olsun. O zaman P düzlemi hiperbolik (sırasıyla, eliptik, parabolik) tir ancak ve ancak $\mathbf{N}$ vektörü hiperbolik (sırasıyla, eliptik, parabolik) tir.

İspat P hiperbolik düzlem olsun. O zaman bu düzlem üzerindeki hibridyen metrik 1 indeksli olur. Böylece, P düzlemi üzerindeki vektörler hiperbolik ve eliptik karakterli vektörler olur. Teorem 4.26'ya göre bir eliptik ve bir hiperbolik vektörün vektör çarpımı, P düzlemine dik olan başka bir hiperbolik vektör olur. Böylece, $\mathbf{N}$ hiperbolik olur. Diğer taraftan, $\mathbf{N}$ hiperbolik vektör olsun. Teorem 4.7 ve 4.8'e göre, P düzlemi üzerindeki birbirine dik olan vektörlerden biri hiperbolik diğeri eliptik bir vektör olmaktadır. Bu nedenle, P düzlemi üzerindeki hibridyen skaler çarpım 1 indekli olur. Böylece, P düzlemi hiperbolik karakterli olur. $\square$

Teorem 4.27. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\mathbf{v}$ sıfırdan farklı bir birim hiperbolik vektör olsun.

- i) Eğer $\mathbf{v}^\perp$ hiperbolik (ya da eliptik) vektörse, o zaman $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemi ile karşılıklı olarak pseudo-ortogonal olan bir $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ düzlemi oluşturulabilir.
- ii) Eğer $\mathbf{v}_1^\perp$ ve $\mathbf{v}_2^\perp$ vektörleri $\mathbf{v}$ vektörüne pseudo-ortogonal ve parabolik vektörler ise o zaman $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemi ile karşılıklı olarak pseudo-ortogonal olan bir $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp = \text{Span} \left\{ \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_2^\perp + \mathbf{v}_3^\perp}{2}, \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{v}_2^\perp - \mathbf{v}_3^\perp}{2} \right\}$ düzlemi oluşturulabilir.

İspat Teorem 4.7 ve 4.8 yardımıyla, teorem ispatlanabilir.

i) Eğer $\mathbf{v}^\perp$ hiperbolik (ya da eliptik) vektörse, o zaman $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ vektörü parabolik olmayan ve $\mathbf{v}^\perp$ ile lineer bağımsız olan bir birim vektördür. Bu nedenle $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ düzlemi inşa edilebilir.

ii) Eğer $\mathbf{v}^\perp$ parabolikse o zaman $\mathbf{v}^\perp$ ve $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ vektörleri paraleldir. Bu aşağıdaki eşitlikten görülebilir:

$$\mathbf{v}^\perp \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = \mathbf{v}^\perp (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = -\mathbf{v}^\perp (\mathbf{v}^\perp \times \mathbf{v}) = -(\mathbf{v}^\perp \mathbf{v}^\perp) \mathbf{v} = 0$$

Fakat, $\mathbf{v}$ vektörüne pseudo-ortogonal ve birbiri ile lineer bağımsız olan $\mathbf{v}_1^\perp$ ve $\mathbf{v}_2^\perp$ parabolik vektörleri bulunabilir. Böylece, $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ düzlemi $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_1^\perp + \mathbf{v}_2^\perp}{2}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{v}_1^\perp - \mathbf{v}_2^\perp}{2}$ gibi eliptik ve hiperbolik olan iki vektörle inşa edilebilir. $\square$

Her $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ birim hiperbolik vektörü için, $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemi hiperbolik düzleme izomorf olur. Çünkü $\mathbf{v}^2 = 1$ olduğundan $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzleminde $\mathbf{v}$ vektörü hiperbolik sayılar kümesinin $\mathbf{h}$ birim gibi and O reel eksen gibi davranır ve (4.7), (4.8), (4.27) gereği sıfırdan farklı $\mathbf{v}^\perp$, $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ vektörleri tarafından gerilen $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ düzlemi de hiperbolik düzleme izomorf olur (Miller ve Boehning 1968; Rooney 1978; Sobczyk 1995; Harkin ve Harkin 2004; Catoni vd. 2005; Catoni 2008; Kisil 2012; Rooney 2014; Özdemir 2018; Şimşek ve Özdemir 2016; Ulrych 2000).

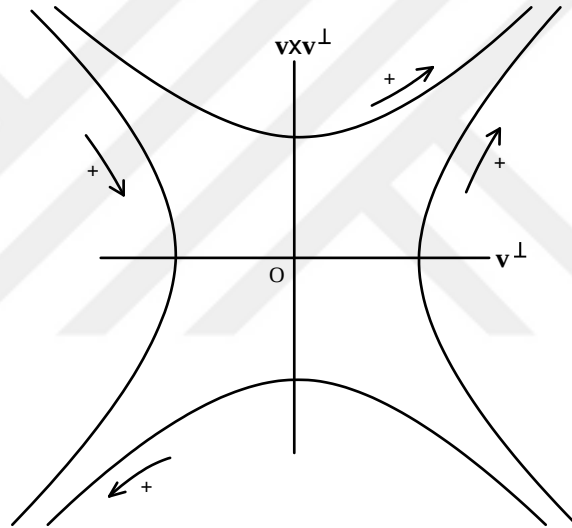
Eliptik vektörlerde olduğu gibi bir $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ hiperbolik vektörü için Tanım 4.9,

Teorem 4.7, 4.8, 4.26, 4.27'den faydalanıldığında Çizelge 4.2'deki tablo oluşturulabilir:

Çizelge 4.2. $\mathbf{v}$ hiperbolik vektörü iken $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ ve $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzleminin karakteri

$\mathbf{v}$ hiperbolikse,	$\mathbf{v}^{\perp}$	$\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}$	$\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemi	$\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzlemi
Tipi	Eliptik	Hiperbolik	Hiperbolik	Hiperbolik
	Hiperbolik	Eliptik	Hiperbolik	Hiperbolik
	Parabolik	Parabolik	Hiperbolik	Doğru

$\mathbb{E}_1^2$ uzayındaki düzlemler için Verstraeten (2018)'de düzlemlerin yönlendirmesi ile ilgili verilen bilgi 3 boyutlu hibridyen uzaydaki $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ ve $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzlemlerine uyarlanmıştır. Böylece hiperbolik bir düzlemde dönme dönüşümü pozitif yönü gösterilmiştir (Şekil 4.4).



Şekil 4.4. $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ ve $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzlemlerinin yönlendirilmesi

Önerme 4.28. $L_{\mathbf{v}}$ ve $R_{\mathbf{v}}$ sırasıyla, sol ve sağ hibrit çarpım dönüşümleri olsun. Bir $\mathbf{v}$ hiperbolik vektörü için aşağıdakiler sağlanır:

- i. $L_{\mathbf{v}}(O) = R_{\mathbf{v}}(O) = \mathbf{v}$,
- ii. $L_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = R_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$,
- iii. $L_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}^{\perp}) = \mathbf{v} \mathbf{v}^{\perp} = \mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp} = -R_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}^{\perp})$,
- iv. $L_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}^{\perp} = \mathbf{v}^{\perp} = -R_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp})$.

Önerme 4.29. $T_{\mathbf{v}}$ ve $S_{\mathbf{v}}$ sandviç dönüşümü olsun. Bir $\mathbf{v}$ hiperbolik vektörü için aşağıdakiler sağlanır:

- i. $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}^{\perp}) = -\mathbf{v}^{\perp}$,

$$\text{ii. } T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = -\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp,$$

$$\text{iii. } S_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}^\perp) = \mathbf{v}^\perp,$$

$$\text{iv. } S_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = \mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp.$$

İspat i. (4.1) eşitliğinden,

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}^\perp) = \mathbf{v}\mathbf{v}^\perp\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{v}^\perp\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (\mathbf{v}^\perp \times \mathbf{v}) = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}^\perp = \mathbf{v}^\perp$$

olduğu görülebilir.

ii., iii., iv. benzer şekilde ispatlanabilir. $\square$

$\mathbf{v} \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ ve $\mathbf{v} \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$ olduğu için, benzer hesaplamalar $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$ için de geçerli olur.

4.1.7. Düzlemde Hiperbolik Dönme Dönüşümü

Tanım 4.30. $\mathbb{E}_2^4$ uzayında, bir birim hiperbolik hibrit vektörü $\mathbf{v}$ ve $O = (1, 0, 0, 0)$ vektörünün gerdiği düzlem bir hiperbolik düzlem olarak isimlendirilir.

$\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemi üzerindeki $x, y \in \mathbb{R}$ reel sayı olmak üzere (x, y) noktası $x + \mathbf{v}y$ olarak yazılabilir.

Teorem 4.31. $\mathbf{v}$ bir birim hiperbolik vektör olmak üzere, $\mathbf{q} = \cosh \theta + \mathbf{v} \sinh \theta$ herhangi birim timelike sayı olsun.

$$L_{\mathbf{q}} : \mathbb{P}_{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{p} \longrightarrow L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}\mathbf{p}$$

lineer dönüşümü orijin etrafında θ hiperbolik açısı kadar bir hiperbolik dönme belirtir. Bu lineer dönüşümün matris temsili

$$L_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}$$

olur.

İspat $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzleminde $\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\|(\cosh \alpha + \mathbf{v} \sinh \alpha)$ hiperbolik timelike sayısı için $(\|\mathbf{p}\| \cosh \alpha, \|\mathbf{p}\| \sinh \alpha)^T$ vektörü $\mathbf{p}$ sayısının vektör temsili olmak üzere $L_{\mathbf{q}}$ dönüşümü

matris yardımıyla

$$\begin{aligned}
 L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) &= (\cosh \theta + \mathbf{v} \sinh \theta) \|\mathbf{p}\| (\cosh \alpha + \mathbf{v} \sinh \alpha) \\
 &= \|\mathbf{p}\| ((\cosh \theta \cosh \alpha + \sinh \theta \sinh \alpha) + (\cosh \theta \sinh \alpha + \sinh \theta \cosh \alpha) \mathbf{v}) \\
 &= \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\mathbf{p}\| \cosh \alpha \\ \|\mathbf{p}\| \sinh \alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

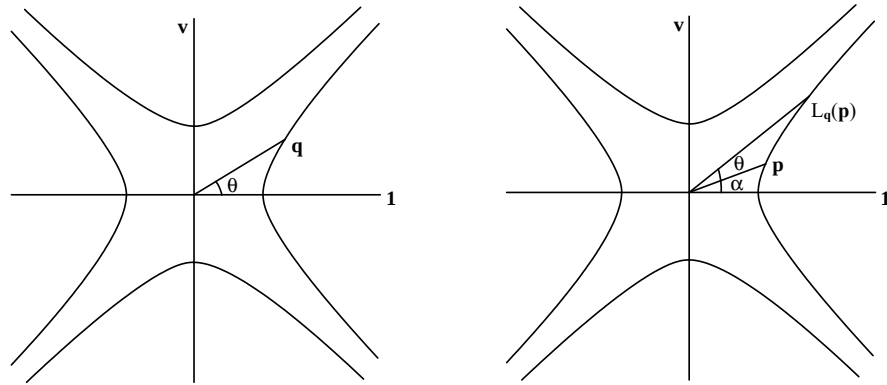
şeklinde ifade edilebilir. Bu nedenle $L_{\mathbf{q}}$ dönüşümünün matrisi

$$\begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}$$

olur. O zaman

$$L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{p}\| (\cosh \theta \cosh \alpha + \sinh \theta \sinh \alpha) \\ \|\mathbf{p}\| (\cosh \theta \sinh \alpha + \sinh \theta \cosh \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{p}\| \cosh (\alpha + \theta) \\ \|\mathbf{p}\| \sinh (\alpha + \theta) \end{bmatrix}$$

yazılabilir. $\|L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\| = \|\mathbf{p}\|$ olduğu için, dönüşüm normu korur. Böylece $L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p}\| (\cosh (\alpha + \theta) + \mathbf{v} \sinh (\alpha + \theta))$ olduğundan $L_{\mathbf{q}}$ dönüşümü $\mathbf{p}$ sayısını θ hiperbolik açısı kadar orijin etrafında $x^2 - y^2 = |\mathcal{C}(\mathbf{p})|$ hiperbolü üzerinde döndürmüştür (Şekil 4.5).



Şekil 4.5. $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ hiperbolik düzleminde alınan bir $\mathbf{q}$ sayısı ile $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemin de alınan bir $\mathbf{p}$ hibrit sayının soldan çarpımının etkisi.

□

Örnek 4.32. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{h}$ hiperbolik vektörü ve $O = (1, 0, 0, 0)$ vektörü ile $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemin inşa edilebilir. Bu düzlemde alınan

$$\mathbf{q} = \sqrt{2} + 2\mathbf{i} + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{h} = \sqrt{2} + \mathbf{v}$$

sayısının argümenti

$$\theta = \arg(\mathbf{q}) = \ln(\sqrt{2} + 1)$$

dir. $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzleminde argümenti $\ln \sqrt{5}$ olan $\mathbf{p} = 3 + 2\mathbf{v}$ hiperbolik hibrit sayısına $L_{\mathbf{q}}$ dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) &= \begin{bmatrix} \cosh(\ln(\sqrt{2} + 1)) & \sinh(\ln(\sqrt{2} + 1)) \\ \sinh(\ln(\sqrt{2} + 1)) & \cosh(\ln(\sqrt{2} + 1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} \cosh(\ln \sqrt{5}) \\ \sqrt{5} \sinh(\ln \sqrt{5}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} + 2 \\ 2\sqrt{2} + 3 \end{bmatrix} = (3\sqrt{2} + 2) + \mathbf{v}(2\sqrt{2} + 3) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $\|L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\| = \|\mathbf{p}\| = \sqrt{5}$ olduğu görülebilir. Ayrıca,

$\arg L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \ln(\sqrt{5} + \sqrt{10})$. Gerçekten, $\arg L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})$ aşağıdaki gibi hesaplandığında

$$\begin{aligned} \theta + \alpha &= \ln(\sqrt{2} + 1) + \ln \sqrt{5} \\ &= \ln(\sqrt{5} + \sqrt{10}) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu yüzden, $\mathbf{p}$ sayısı $x^2 - y^2 = 5$ hiperbolü üzerinde pozitif yönde θ pseudo açısı kadar dönmüştür.

4.1.8. Karşılıklı Olarak Ortogonal Düzlemlerde Hiperbolik Dönme

Teorem 4.33. $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}^{\perp}$ sırasıyla, birim hiperbolik ve birim eliptik vektör olsun. $\mathbf{w} = (\cosh \alpha) \mathbf{v}^{\perp} + (\sinh \alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}) \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ hiperbolik hibrit sayısının bir $\mathbf{q} = (\cosh \theta) O + (\sinh \theta) \mathbf{v} \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ birim hibrit sayısı ile çarpımı aşağıdaki iki dönüşümü tanımlar:

i. $L_{\mathbf{q}}$ dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörünü $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzleminde pozitif yönde $\theta > 0$ hiperbolik açısı kadar döndürür.

ii. $R_{\mathbf{q}}$ dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörünü $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzleminde negatif yönde $\theta > 0$ hiperbolik açısı kadar döndürür.

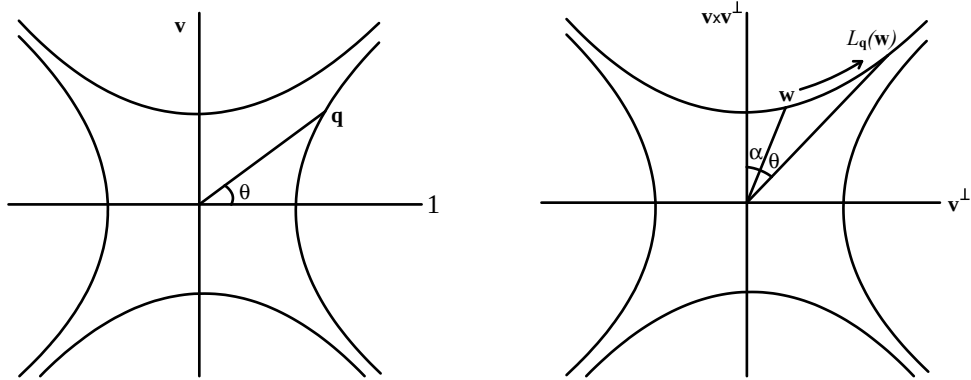
İspat i. $\mathbf{q} = (\cosh \theta) O + (\sinh \theta) \mathbf{v}$ ve $\mathbf{w} = (\cosh \alpha) \mathbf{v}^\perp + (\sinh \alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)$ sayıları için, $L_{\mathbf{q}}(\mathbf{w}) = \mathbf{q}\mathbf{w}$ çarpımı

$$\begin{aligned}
 L_{\mathbf{q}}\mathbf{w} &= \mathbf{q}\mathbf{w} \\
 &= [(\cosh \theta) O + (\sinh \theta) \mathbf{v}] [(\cosh \alpha) \mathbf{v}^\perp + (\sinh \alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)] \\
 &= (\cosh \theta \cosh \alpha + \sinh \theta \sinh \alpha) \mathbf{v}^\perp + \\
 &\quad + (\cosh \theta \sinh \alpha + \sinh \theta \cosh \alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) \\
 &= \cosh(\alpha + \theta) \mathbf{v}^\perp + \sinh(\alpha + \theta) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\|\mathbf{q}\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w}\|, \quad \arg(\mathbf{q}\mathbf{w}) = \alpha + \theta$$

olduğu görülebilir. Ayrıca, $L_{\mathbf{q}}(\mathbf{w}) = \mathbf{q}\mathbf{w}$ sayısının $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ düzleminde olduğu görülmektedir. Bu nedenle, $L_{\mathbf{q}}$ dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörünü hiperbolik θ açısı kadar pozitif yönde $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ düzleminde döndürür (Şekil 4.6). $\square$



Şekil 4.6. $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ hiperbolik düzleminde alınan bir $\mathbf{q}$ hibrit sayısı ile $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ düzleminde alınan pure hibrit sayısının soldan çarpımının etkisi.

Teorem 4.34. $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}^\perp$ birim hiperbolik vektörler olsun.

$\mathbf{w} = (\sinh \alpha) \mathbf{v}^\perp + (\cosh \alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}^\perp$ hiperbolik hibrit sayısının bir

$\mathbf{q} = (\cosh \theta) O + (\sinh \theta) \mathbf{v} \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ birim hibrit sayısı ile çarpımı aşağıdaki iki dönüşümü tanımlar:

i. L_q dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörünü $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminde pozitif yönde $\theta > 0$ hiperbolik açısı kadar döndürür.

ii. R_q dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörünü $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminde negatif yönde $\theta > 0$ hiperbolik açısı kadar döndürür.

İspat Teorem 4.33'e benzer şekilde ispatlanabilir. □

Teorem 4.35. $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^\perp$ vektörleri sırasıyla birim hiperbolik ve birim eliptik vektörler olsun. Bir $\mathbf{w}$ birim hiperbolik vektörü için

$$S : \mathbb{P}_v^\perp \rightarrow \mathbb{P}_v^\perp, \quad \mathbf{w} \longrightarrow S_q(\mathbf{w}) = \mathbf{q}\mathbf{w}\overline{\mathbf{q}}$$

dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörünü $\mathbf{v}$ vektörü etrafında pozitif yönde 2θ hiperbolik açısı kadar döndürür.

İspat $\mathbf{q} \in \mathbb{P}_v$ ve $\mathbf{w} \in \mathbb{P}_v^\perp$ olduğu için, $\mathbf{q} = (\cosh \theta) O + (\sinh \theta) \mathbf{v}$ ve $\mathbf{w} = (\cosh \alpha) \mathbf{v}^\perp + (\sinh \alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)$ yazılabilir. Buna göre, $S_q(\mathbf{w})$ doğrudan hesaplama yapıldığında

$$\begin{aligned} S_q(\mathbf{w}) &= \mathbf{q}\mathbf{w}\overline{\mathbf{q}} \\ &= [\cosh(\alpha + \theta) \mathbf{v}^\perp + \sinh(\alpha + \theta) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)] [(\cosh \theta) O - (\sinh \theta) \mathbf{v}] \\ &= \cosh(\alpha + 2\theta) \mathbf{v}^\perp + \sinh(\alpha + 2\theta) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\|S_q(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{w}\|$$

ve $S_q(\mathbf{w})$ vektörü $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminde. Bunun anlamı, S_q dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörünü $\mathbf{v}$ vektörü etrafında 2θ hiperbolik açısı kadar döndürür. □

Teorem 4.36. $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}^\perp$ vektörleri birim hiperbolik vektör olsun. Bir $\mathbf{w}$ hiperbolik vektörü için

$$S : \mathbb{P}_v^\perp \longrightarrow \mathbb{P}_v^\perp, \quad \mathbf{q} \longrightarrow S_q(\mathbf{w}) = \mathbf{q}\mathbf{w}\overline{\mathbf{q}}$$

dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörünü $\mathbf{v}$ vektörü etrafında pozitif yönde 2θ hiperbolik açısı kadar döndürür.

İspat $\mathbf{q} \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ ve $\mathbf{w} \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ olduğu için, $\mathbf{q} = (\cosh \theta) O + (\sinh \theta) \mathbf{v}$ ve $\mathbf{w} = (\cosh \alpha) \mathbf{v}^{\perp} + (\sinh \alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp})$ yazılabilir. Buna göre, $S_{\mathbf{q}}(\mathbf{w})$ doğrudan hesaplama yapıldığında

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{q}}(\mathbf{w}) &= \mathbf{q} \mathbf{w} \bar{\mathbf{q}} \\ &= [\sinh(\alpha + \theta) \mathbf{v}^{\perp} + \cosh(\alpha + \theta) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp})] [(\cosh \theta) O - (\sinh \theta) \mathbf{v}] \\ &= \sinh(\alpha + 2\theta) \mathbf{v}^{\perp} + \cosh(\alpha + 2\theta) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\|S_{\mathbf{q}}(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{w}\|$$

ve $S_{\mathbf{q}}(\mathbf{w})$ vektörü $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzleminde. Bunun anlamı, $S_{\mathbf{q}}$ dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörünü $\mathbf{v}$ vektörü etrafında 2θ hiperbolik açısı kadar döndürür. $\square$

4.1.9. Hiperbolik Dönme Dönüşümünün Matris Temsili

Hiperbolik Rodrigues Dönme Formülü

Teorem 4.37. M matrisi (4.11) şeklinde elemanları $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{e} + v_3 \mathbf{h}$ bir birim hiperbolik vektörünün bileşenleri olan bir hibridyen semi ters-simetrik matris olsun. O zaman Rodrigues dönme formülü yardımıyla, θ hiperbolik açı, $\mathbf{q} = \cosh \frac{\theta}{2} + \mathbf{v} \sinh \frac{\theta}{2}$ ve I_3 3×3 birim matris olmak üzere, dönme matrisi

$$R_{\mathbf{q}}^{\theta} = e^{\theta M} = I_3 + (\sinh \theta) M - (1 - \cosh \theta) M^2$$

şeklindedir. $R_{\mathbf{q}}^{\theta}$ matrisi $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzleminde $\mathbf{v}$ vektörü etrafında θ hiperbolik açısı kadar bir dönme dönüşümünü ifade eder. $R_{\mathbf{q}}^{\theta}$ matrisi $(v_1^2 - v_3^2 - v_1 v_2) = \lambda$, $(\cosh \theta - 1) = \rho$ olmak üzere aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{bmatrix} \rho(v_3^2 + v_1 v_2) - v_3 \sinh \theta + 1 & -v_1^2 \rho & -\rho v_1 v_3 + v_1 \sinh \theta \\ v_2(v_1 - v_2) \rho - v_3 \sinh \theta & v_3 \sinh \theta - \rho \lambda + 1 & -\rho v_2 v_3 + (v_1 - v_2) \sinh \theta \\ v_3(v_1 - v_2) \rho + v_2 \sinh \theta & -\rho v_1 v_3 - v_1 \sinh \theta & -\rho v_1(v_1 - 2v_2) + 1 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

İspat M matrisine karşılık gelen Rodrigues dönüşümünden elde edilen dönme matrisi $R_{\mathbf{q}}^{\theta} = e^{\theta M}$ ve M matrisinin karakteristik matrisi

$$X^3 - \Delta(\mathbf{q}) X = 0$$

dır. Cayley-Hamilton teoremine göre,

$$X^3 = \Delta(\mathbf{q}) X$$

olduğu görülebilir. M matrisinin 2'den büyük kuvvetleri için aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$M^4 = \Delta(\mathbf{q}) M^2, \quad M^5 = \Delta(\mathbf{q}) M^3, \quad M^6 = (\Delta(\mathbf{q}))^2 M^2, \quad M^7 = (\Delta(\mathbf{q}))^3 M \quad \dots$$

ve $\mathbf{v}$ vektörü hiperbolik olduğu için bu eşitlikler aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$M^{2n} = M^2, \quad M^{2n-1} = M \quad (4.18)$$

$\mathbf{v}$ hiperbolik sayısı için Rodrigues formülü, (4.18) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{q}}^{\theta} &= e^{\theta M} = I_3 + \theta M + \frac{\theta^2 M^2}{2!} + \frac{\theta^3 M^3}{3!} + \frac{\theta^4 M^4}{4!} + \dots \\ &= I_3 + \theta M + \frac{\theta^2 M^2}{2!} + \frac{\theta^3 M}{3!} + \frac{\theta^4 M^2}{4!} + \dots \\ &= I_3 + \left(\theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right) M + \left(\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \dots \right) M^2 \\ &= I_3 + (\sinh \theta) M - (1 - \cosh \theta) M^2. \end{aligned}$$

Son eşitlikte M matrisi yerine yazıldığında (4.17) matrisi elde edilir. $\square$

Hiperbolik Cayley Dönüşümü

Teorem 4.38. M matrisi (4.11) şeklinde elemanları bir $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ birim olmayan bir hiperbolik vektörünün bileşenleri olan bir hibriden semi ters simetrik matris olsun. O zaman, bir hiperbolik θ açısı için,

$$R = (I_3 - M) (I_3 + M)^{-1} \quad (4.19)$$

bir dönme matrisidir. R dönme dönüşümünün matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{1}{1 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \begin{bmatrix} (v_1^2 + v_3^2 + 2v_3 + 1) & -2v_1^2 & -2v_1(v_3 + 1) \\ 2(-v_2^2 + v_1v_2 + v_3) & -(v_1^2 - v_3^2 + 2v_3 - 1) & -2(v_1 - v_2 + v_2v_3) \\ -2(v_2 - v_1v_3 + v_2v_3) & -2v_1(v_3 - 1) & -(v_1^2 - 2v_1v_2 + v_3^2 - 1) \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

İspat

$$(I + M)^T I^* = I^* (I - M) \quad \text{ve} \quad (I - M)^T I^* = I^* (I + M)$$

olduğu görülebilir. Bu eşitlikler yardımıyla,

$$R^T I^* R = ((I_3 - M)(I_3 + M)^{-1})^T I^* (I_3 - M)(I_3 + M)^{-1} = I^*$$

olduğu gösterilebilir. Bunun yanında, $\det(I_3 - M) = 1 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ ve

$\det(I_3 + M)^{-1} = \frac{1}{1 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ olduğu için, $\det R = 1$ dir. (4.19) hesaplandığında, (4.20) matrisi elde edilir. $\square$

Sonuç 4.39. (4.11) matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}}{1 + \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}}{1 - \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}} \quad \text{ve} \quad \lambda_3 = 1$$

olur. Ayrıca, $\mathbf{v}$ dönme eksenine karşılık gelen özdeğer 1 dir. θ hiperbolik dönme açısı

$$\cosh \theta = \left| \frac{1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}{1 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \right|$$

formülü ile bulunabilir.

4.1.10. Parabolik Hibrit Sayıların Geometrisi

Sıfırdan farklı bir parabolik $\mathbf{v}$ vektörü yardımıyla $\mathbb{P}_{\mathbf{v}} = \text{span}\{O, \mathbf{v}\}$ düzlemi ve $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp} = \text{span}\{\mathbf{v}^{\perp}, \mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}\}$ düzlemi inşa edilebilir. Böylece $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ ve $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzlemi dual düzleme izomorf olur. Sıfırdan farklı hiperbolik $\mathbf{v}^{\perp}$ ve parabolik $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}$ vektörlerinin lineer birleşimi olan $a\mathbf{v}^{\perp} + b\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}$ vektörünün normunun karesi

$$\langle a\mathbf{v}^{\perp} + b\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp}, a\mathbf{v}^{\perp} + b\mathbf{v} \times \mathbf{v}^{\perp} \rangle = a^2$$

olur. Bu normun dual norm olduğu görülmektedir (Fischer 1998; Harkin ve Harkin 2004; Kisil 2012; Miller ve Boehning 1968; Özdemir 2018; Rooney 1978; Rooney 2014; Sobczyk 1995; Yaglom 1968).

Teorem 4.40. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\mathbf{v}$ pür parabolik hibrit sayı olsun. O zaman

- i) $\mathbf{v}^{\perp}$ hiperbolik vektör ise $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemi ile karşılıklı olarak pseudo-ortogonal olan $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzlemi inşa edilebilir.
- ii) $\mathbf{v}^{\perp}$ vektörü $\mathbf{v}$ ile paralel olmayan parabolik vektör ise $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemi ile karşılıklı olarak pseudo-ortogonal olan $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}^{\perp}$ düzlemi inşa edilemez.

İspat Teorem 4.7 ve 4.8 yardımıyla, teorem kanıtlanabilir.

i) Eğer $\mathbf{v}^\perp$ hiperbolik ise aşağıdaki

$$\mathbf{v}^\perp \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = \mathbf{v}^\perp (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = -\mathbf{v}^\perp (\mathbf{v}^\perp \times \mathbf{v}) = -(\mathbf{v}^\perp \mathbf{v}^\perp) \mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

eşitliğinden görülebilir ki $\mathbf{v}^\perp$ ve $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ vektörleri paralel değildir. $\mathbf{v}^\perp$ ve $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ vektörleri yardımıyla $\mathbb{P}_\mathbf{v}^\perp$ düzlemi inşa edilebilir.

ii) Eğer $\mathbf{v}^\perp$ parabolik vektörse

$$\mathbf{v}^\perp \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = \mathbf{v}^\perp (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = -\mathbf{v}^\perp (\mathbf{v}^\perp \times \mathbf{v}) = -(\mathbf{v}^\perp \mathbf{v}^\perp) \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = \mathbf{v} (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = (\mathbf{v} \mathbf{v}) \mathbf{v}^\perp = 0$$

eşitliklerinden görülebilir ki $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ vektörü $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}^\perp$ ile paralel olur. Bu durumda $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp = 0$ olur. Bu nedenle $\mathbf{v}^\perp$ ve $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$ vektörleri yardımıyla $\mathbb{P}_\mathbf{v}^\perp$ düzlemi inşa edilemez. $\square$

Eliptik ve hiperbolik durumdaki gibi parabolik durumda Tanım 4.9, Teorem 4.7, 4.8, 4.10 ve 4.40 yardımıyla Çizelge 4.3'deki tablo oluşturulabilir.

Çizelge 4.3. $\mathbf{v}$ parabolik vektörü iken $\mathbb{P}_\mathbf{v}$ ve $\mathbb{P}_\mathbf{v}^\perp$ düzleminin karakteri

Eğer $\mathbf{v}$ parabolik,	$\mathbf{v}^\perp$	$\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp$	$\mathbb{P}_\mathbf{v}$ düzlemi	$\mathbb{P}_\mathbf{v}^\perp$ düzlemi
Tip	Hiperbolik	Parabolik	Parabolik	Parabolik
	Parabolik	Sıfır vektörü	Parabolik	Doğru

Önerme 4.41. $L_\mathbf{q}$ ve $R_\mathbf{q}$ sırasıyla sol ve sağ hibrit çarpım dönüşümleri olsun. Eğer bir $\mathbf{v}$ parabolik vektör ise, o zaman aşağıdakiler sağlanır.

- i. $L_\mathbf{v}(O) = R_\mathbf{v}(O) = \mathbf{v}$,
- ii. $L_\mathbf{v}(\mathbf{v}) = R_\mathbf{v}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$,
- iii. $L_\mathbf{v}(\mathbf{v}^\perp) = \mathbf{v} \mathbf{v}^\perp = \mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp = -R_\mathbf{v}(\mathbf{v}^\perp)$,
- iv. $L_\mathbf{v}(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}^\perp = -R_\mathbf{v}(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = 0$,
- v. $T_\mathbf{v}(\mathbf{v}^\perp) = T_\mathbf{v}(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = S_\mathbf{v}(\mathbf{v}^\perp) = S_\mathbf{v}(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) = 0$.

İspat $\mathbf{v}$. ifadenin kanıtı aşağıdaki gibi verilebilir:

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}^{\perp}) = \mathbf{v}\mathbf{v}^{\perp}\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{v}^{\perp}\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (\mathbf{v}^{\perp} \times \mathbf{v}) = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}^{\perp} = 0.$$

diğerleri benzer biçimde kanıtlanabilir. $\square$

4.1.11. Düzlemde Parabolik Dönme Dönüşümü

Tanım 4.42. $\mathbb{E}_2^4$ uzayında bir parabolik $\mathbf{v}$ vektörü ve $\mathbf{O}=(1,0,0,0)$ vektörü tarafından gerilen düzlem parabolik düzlem olarak adlandırılır.

Teorem 4.43. $\mathbf{q} = 1 + \theta\mathbf{v}$, $\theta > 0$ herhangi bir timelike parabolik hibrit sayı olsun. $\mathbf{O}$ zaman

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{q}} &: \mathbb{P}_{\mathbf{v}} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{v}} \\ \mathbf{p} &\longrightarrow L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}\mathbf{p} \end{aligned}$$

lineer dönüşümü orijin etrafında parabolik θ açısı kadar parabolik dönme belirtir. $L_{\mathbf{q}}$ lineer dönüşümünün matris temsili aşağıdaki gibidir:

$$L_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{bmatrix}.$$

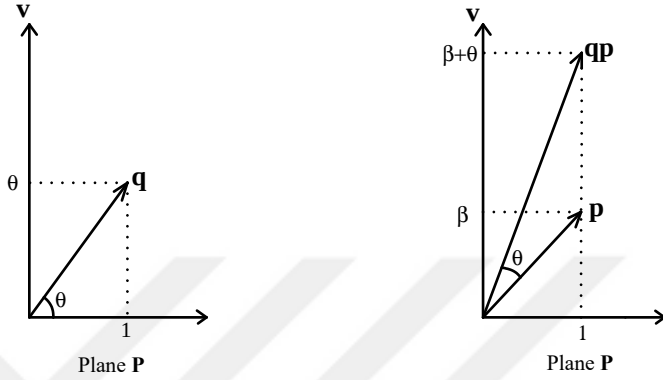
İspat $\mathbf{p} = 1 + \beta\mathbf{v}$ parabolik hibrit sayısı ve $(1, \beta)^T$ $\mathbf{p}$ sayısının $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ düzlemindeki vektör gösterimi olmak üzere, $L_{\mathbf{q}}$ dönüşümünün matrisi hibrit çarpımı yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) &= (1 + \theta\mathbf{v})(1 + \beta\mathbf{v}) \\ &= 1 + (\theta + \beta)\mathbf{v} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Böylece $L_{\mathbf{q}}$ dönüşümünün matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{bmatrix}$$

olur. $\|L_q(\mathbf{p})\| = \|\mathbf{p}\|$ olduğu için L_q normu korur. Görüldüğü gibi L_q matrisi $\mathbf{p}$ sayısını orijin etrafında parabolik θ açısı boyunca $x = |\mathcal{C}(\mathbf{p})|$ doğrusu üzerinde döndürür (Şekil 4.7). $\square$



Şekil 4.7. Bir $\mathbf{q} \in \mathbb{P}_v$ hibrit sayısı ile soldan çarpımın bir $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_v$ sayısı üzerindeki etkisi

4.1.12. Karşılıklı Olarak Ortogonal Düzlemlerde Parabolik Dönme

Teorem 4.44. $\mathbf{v}$ parabolik bir vektör ve sıfırdan farklı $\mathbf{v}^\perp$ bir birim hiperbolik vektör olsun. Eğer bir $\mathbf{q} = 1 + \theta\mathbf{v}$ hibrit sayısı ile $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}^\perp + \beta(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp) \in \mathbb{P}_v^\perp$ pür hibrit sayısı çarpımı aşağıdaki iki dönüşümü tanımlar:

- i. $L_q \mathbf{w}$ vektörünü $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminde pozitif yönde $\theta > 0$ parabolik açısı kadar döndürür.
- ii. $R_q \mathbf{w}$ vektörünü $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminde negatif yönde $\theta > 0$ parabolik açısı kadar döndürür.

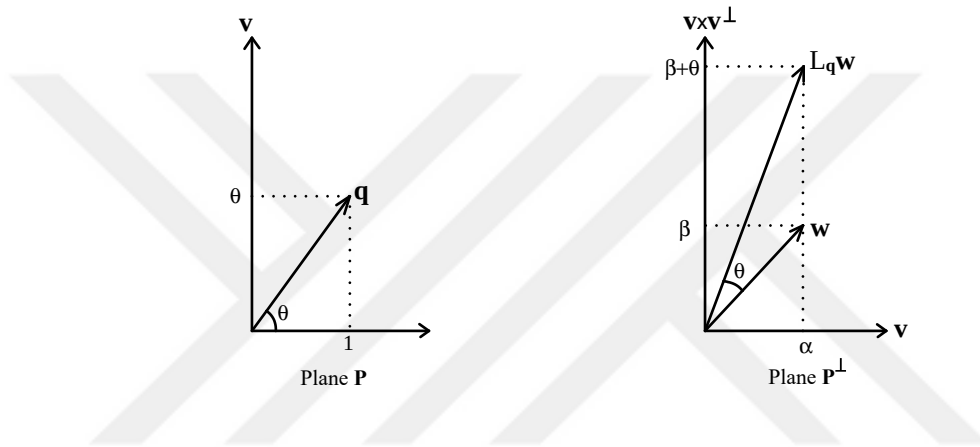
$L_q \mathbf{w}$ vektörünü $\alpha\mathbf{v}^\perp + (\beta + t\alpha)(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)$, $t \in \mathbb{R}$ doğrusu üzerinde ve $R_q \mathbf{w}$ vektörünü $\alpha\mathbf{v}^\perp + (\beta - t\alpha)(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)$, $t \in \mathbb{R}$ doğrusu üzerinde döndürür.

İspat i. $\mathbf{q} = 1 + \theta\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}^\perp + \beta(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)$, $\arg \mathbf{w} = \frac{\beta}{\alpha}$ olduğu için L_q dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörüne uygulandığında

$$\begin{aligned}
 L_q \mathbf{w} &= \mathbf{q} \mathbf{w} \\
 &= (1 + \theta\mathbf{v})(\alpha\mathbf{v}^\perp + \beta(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)) \\
 &= \alpha\mathbf{v}^\perp + (\beta + \theta\alpha)(\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.21) eşitliğinden görüldüğü gibi, $L_q \mathbf{w} = \mathbf{q} \mathbf{w}$ vektörü $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminde dir. $\mathbb{P}_v^\perp$ düzlemi dual sayı düzlemine izomorfik olduğundan $L_q \mathbf{w}$ argumenti $\frac{\beta + \theta \alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} + \theta$ olur ki bu L dönüşümünün $\mathbf{w}$ vektörünü pozitif yönde θ parabolik açısı kadar döndürdüğü gösterir. L_q dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörüne uygulandığında elde edilen noktalar $\alpha \mathbf{v}^\perp + (\beta + t\alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)$, $t \in \mathbb{R}$ doğrusu üzerinde olur (Şekil 4.8).

ii. Benzer biçimde kanıtlanabilir. □



Şekil 4.8. $\mathbf{w} \in \mathbb{P}_v^\perp$ pür parabolik hibrit sayısı üzerinde $\mathbf{q} \in \mathbb{P}_v$

birim timelike parabolik hibrit sayısının soldan çarpımının etkisi.

Teorem 4.45. $\mathbf{v}, \mathbf{v}^\perp$ sırasıyla sıfırdan farklı parabolik ve birim hiperbolik vektörler olsun. $\mathbf{q} \in \mathbb{P}_v$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S_q : \mathbb{P}_v^\perp &\longrightarrow \mathbb{P}_v^\perp \\ \mathbf{w} &\longrightarrow S_q(\mathbf{w}) = \mathbf{q} \mathbf{w} \bar{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörünü $\mathbf{v}$ etrafında pozitif yönde 2θ , $\theta > 0$ kadar döndürür. S_q dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörünü $\alpha \mathbf{v}^\perp + (\beta + t\alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)$, $t \in \mathbb{R}$ üzerinde döndürür.

İspat $\mathbf{q} \in \mathbb{P}_v$ olduğu için, $\mathbf{q} = 1 + \theta \mathbf{v}$ yazılabilir. S_q dönüşümü altında $\mathbf{w}$ vektörünün

görüntüsü

$$\begin{aligned}
 S_q(\mathbf{w}) &= \mathbf{q}\mathbf{w}\bar{\mathbf{q}} \\
 &= (1 + \theta\mathbf{v}) (\alpha\mathbf{v}^\perp + \beta (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)) (1 - \theta\mathbf{v}) \\
 &= (\alpha\mathbf{v}^\perp + (\beta + \theta\alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)) (1 - \theta\mathbf{v}) \\
 &= \alpha\mathbf{v}^\perp + (\beta + 2\theta\alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp).
 \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $S_q(\mathbf{w}) \in \mathbb{P}^\perp$ ve $S_q(\mathbf{w})$ argumenti $\frac{\beta + 2\theta\alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} + 2\theta$ olur. Bu S_q dönüşümünün $\mathbf{w}$ vektörünü $\mathbf{v}$ etrafında pozitif yönde 2θ , $\theta > 0$ kadar döndürdüğü anlamına gelir. S_q dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörünü $\alpha\mathbf{v}^\perp + (\beta + t\alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp)$, $t \in \mathbb{R}$ doğrusu üzerinde döndürmüştür. $\square$

Teorem 4.46. $\mathbf{q} = 1 - \frac{\theta}{2}\mathbf{v}$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{v}^2 = 0$ ve $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \neq 0$ olmak üzere

$$S_q : \mathbb{K} - \mathbb{P}_\mathbf{v}^\perp \longrightarrow \mathbb{K} - \mathbb{P}_\mathbf{v}^\perp, \quad \mathbf{q} \longrightarrow S_q(\mathbf{w}) = \mathbf{q}\mathbf{w}\bar{\mathbf{q}}$$

dönüşümü $\mathbf{w}$ vektörünü $\mathbf{v}$ etrafında θ , $\theta > 0$ parabolik açısı kadar döndürür. S_q lineer dönüşümünün matrisi

$$\begin{aligned}
 S_q(\mathbf{w}) &= \mathbf{R}_\mathbf{v}^\theta \mathbf{w} \tag{4.22} \\
 \mathbf{R}_\mathbf{v}^\theta &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}\theta^2 v_1^2 - \frac{1}{2}\theta^2 v_1 v_2 + \theta v_3 & -\frac{1}{2}\theta^2 v_1^2 & -\frac{1}{2}\theta^2 v_1 v_3 - \theta v_1 \\ \theta v_3 - \frac{1}{2}\theta^2 v_2^2 + \frac{1}{2}\theta^2 v_1 v_2 & 1 - \theta v_3 - \frac{1}{2}\theta^2 v_1 v_2 & -\frac{1}{2}\theta^2 v_2 v_3 - \theta v_1 + \theta v_2 \\ -\theta v_2 + \frac{1}{2}\theta^2 v_1 v_3 - \frac{1}{2}\theta^2 v_2 v_3 & -\frac{1}{2}\theta^2 v_1 v_3 + \theta v_1 & 1 - \frac{1}{2}\theta^2 v_3^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

olur. Aynı zamanda bu dönüşümün tekrarlı olarak $\mathbf{w}$ vektörüne uygulanması ile elde edilen noktalar

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= \left(-\frac{1}{2}t^2 v_1 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - t v_1 w_3 + t v_3 w_1 + w_1, \right. \\
 &\quad \left. -\frac{1}{2}t^2 v_2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + t (v_2 w_3 - v_3 w_2 + v_3 w_1) - t v_1 w_3 + w_2, \right. \\
 &\quad \left. -\frac{1}{2}t^2 v_3 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - t v_2 w_1 + t v_1 w_2 + w_3 \right)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

parabolü üzerindedir.

İspat S_q dönüşümü doğrudan hesaplandığında I birim matris ve M hibridyen semi ters-

simetrik matris olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 S_{\mathbf{q}}(\mathbf{w}) &= \mathbf{q}\mathbf{w}\bar{\mathbf{q}} \\
 &= \left(1 - \frac{\theta}{2}\mathbf{v}\right) \mathbf{w} \left(1 + \frac{\theta}{2}\mathbf{v}\right) \\
 &= \mathbf{w} - \theta\mathbf{v} \times \mathbf{w} - \frac{\theta^2}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} \\
 &= \mathbf{w} - \theta\mathbf{v} \times \mathbf{w} + \frac{\theta^2}{2} (\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})) \\
 &= \mathbf{w} - \theta\mathbf{M}\mathbf{w} + \frac{\theta^2}{2}\mathbf{M}^2\mathbf{w} \\
 &= \left(I - \theta\mathbf{M} + \frac{\theta^2}{2}\mathbf{M}^2\right) \mathbf{w}
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir. Böylece, (4.24) yardımıyla (4.22) matrisi elde edilir. Aynı zamanda, $\det R_{\mathbf{v}}^{\theta} = 1$, $R^T I^* R = I^*$ ve $R_{\mathbf{v}}^{\theta}$ matrisinin 1 özdeğerine karşılık gelen vektör $\mathbf{v}$ vektörüdür. Bu nedenle, $S_{\mathbf{q}} \mathbf{w}$ vektörünü $\mathbf{v}$ etrafında θ , $\theta > 0$ parabolik açısı kadar döndürmüş olur. Aynı zamanda $S_{\mathbf{q}}$ dönüşümünün $\mathbf{w}$ vektörüne ardışık olarak uygulanması sonucunda elde edilen noktalar

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= \left(-\frac{1}{2}t^2 v_1 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - t v_1 w_3 + t v_3 w_1 + w_1, \right. \\
 &\quad \left.-\frac{1}{2}t^2 v_2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + t (v_2 w_3 - v_3 w_2 + v_3 w_1) - t v_1 w_3 + w_2, \right. \\
 &\quad \left.-\frac{1}{2}t^2 v_3 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - t v_2 w_1 + t v_1 w_2 + w_3, \right)
 \end{aligned}$$

eğrisi üzerinde olur. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \neq 0$ olduğu için $\alpha(t)$ bir paraboldir. $\square$

Tanım 4.47. Herhangi bir $\alpha(t)$ parabolünün pseudo-merkezi

$$C = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}$$

ve C vektörü $\alpha(t)$ parabolünün dönme ekseninde yer alır.

Örnek 4.48. $2y - x + 1 = 0$ düzlemi ve $\mathbf{L}$ konisinin kesişimi olan $\alpha(t) = (t^2, \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}, t)$ parabolünü ele alalım. Düzlemin normali $\mathbf{N} = (2, 1, 0)$ ve parabolün pseudo-merkezi $C = (-2, -1, 0)$ noktasıdır. $\alpha(2) = (4, \frac{3}{2}, 2)$ noktasını $\alpha(8) = (64, \frac{63}{2}, 8)$ noktasına dönüştüren dönüşümün matrisi $\theta = 8 - 2 = 6$ ve $\mathbf{q} = 1 - 3\mathbf{v}$, $\mathbf{v} = C$ olmak üzere

$$R_{\mathbf{v}}^6 = \begin{bmatrix} 37 & -72 & 12 \\ 18 & -35 & 6 \\ 6 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisidir. Buradan görülebilir ki $S_{\mathbf{q}}(\alpha(2)) = R_{\mathbf{v}}^6 \alpha(2) = \alpha(8)$ olur.

4.1.13. Parabolik Dönme Dönüşümünün Matris Temsili

Parabolik Rodrigues Dönme Formülü

Teorem 4.49. $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{e} + v_3\mathbf{h}$ parabolik bir vektör ve $\mathbf{v}$ vektörüne karşılık gelen semi ters simetrik matris M matrisi olsun. $\mathbf{q} = 1 + \frac{\theta}{2}\mathbf{v}$ olmak üzere Rodrigues dönme formülünden elde edilen

$$R_{\mathbf{q}}^{\theta} = e^{\theta M} = I_3 + \theta M + \frac{\theta^2 M^2}{2!}$$

matrisi bir dönme matrisi olur. Burada $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{e} + v_3\mathbf{h}$ dönme ekseninde, θ bir parabolik açı ve I_3 birim matristir. Aynı zamanda $\lambda = (v_1^2 - v_3^2 - v_1v_2)$ olmak üzere

$$R_{\mathbf{q}}^{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\theta^2(v_3^2 + v_1v_2) - \theta v_3 + 1 & -\frac{1}{2}\theta^2 v_1^2 & -\frac{1}{2}\theta v_1(\theta v_3 - 2) \\ -\frac{1}{2}\theta(\theta v_2^2 - \theta v_1v_2 + 2v_3) & -\frac{1}{2}\theta^2\lambda + \theta v_3 + 1 & -\frac{1}{2}\theta(2v_2 - 2v_1 + \theta v_2v_3) \\ \frac{1}{2}\theta(2v_2 + \theta v_1v_3 - \theta v_2v_3) & -\frac{1}{2}\theta v_1(\theta v_3 + 2) & (-\frac{1}{2}v_1^2 + v_2v_1)\theta^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

olur.

İspat M matrisinin karakteristik polinomu

$$X^3 - \Delta(\mathbf{q})X = 0$$

olur. Cayley-Hamilton teoremine göre

$$M^3 = \Delta(\mathbf{q})M$$

yazılabilir. Böylece

$$M^{2n} = 0, M^{2n-1} = 0, n > 2$$

olur. $\mathbf{v}$ pür parabolik hibrit sayı olduğundan dönme matrisi

$$R_{\mathbf{q}}^{\theta} = e^{\theta M} = I_3 + \theta M + \frac{\theta^2 M^2}{2!} \quad (4.26)$$

olur. $\det R_{\mathbf{q}}^{\theta} = 1$ ve $(R_{\mathbf{q}}^{\theta})^T I^* R_{\mathbf{q}}^{\theta} = I^*$ olduğu görülebilir. Bu nedenle, $R_{\mathbf{q}}^{\theta}$ dönme matrisidir. R matrisinin 1 özdeğerine karşılık gelen vektör $\mathbf{v}$ vektörüdür ve $\mathbf{v}$ vektörü dönme ekseninde yer alır. (4.26) hesaplandığında matrisin (4.25) olduğu bulunur. $\square$

Parabolik Cayley Dönüşümü

Teorem 4.50. M semi ters-simetrik matrisi ve $\mathbf{v}$ parabolik vektörü için

$$R = (I_3 - M)(I_3 + M)^{-1} \quad (4.27)$$

bir dönme matrisisidir ve $\eta = v_1^2 - v_3^2 + 2v_3$ olmak üzere

$$R = \begin{bmatrix} (v_1^2 + v_3^2 + 2v_3 + 1) & -2v_1^2 & -2v_1(v_3 + 1) \\ 2(-v_2^2 + v_1v_2 + v_3) & -(\eta - 1) & -2(v_1 - v_2 + v_2v_3) \\ -2(v_2 - v_1v_3 + v_2v_3) & -2v_1(v_3 - 1) & -(v_1^2 - 2v_2v_1 + v_3^2 - 1) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

olur.

İspat M matrisi için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$(I + M)^T I^* = I^* (I - M) \quad \text{and} \quad (I - M)^T I^* = I^* (I + M) .$$

Bu eşitlikler yardımıyla

$$R^T I^* R = ((I_3 - M)(I_3 + M)^{-1})^T I^* (I_3 - M)(I_3 + M)^{-1} = I^*$$

olduğu görülebilir. Ayrıca $\det(I_3 - M) = 1$ ve $\det(I_3 + M)^{-1} = 1$ olduğu için $\det R = 1$ olur. (4.27) hesaplandığında (4.28) matrisi elde edilir. $\square$

Sonuç 4.51. $\mathbf{v}$ parabolik vektörü için, (4.11) matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

olur. Aynı zamanda, 1 özdeğerine karşılık gelen vektör dönme ekseninde yer alan $\mathbf{v}$ vektörüdür.

4.2. Hibrit sayılar ve İncersiyon Dönüşümü

Bir $\mathbb{P}_v$ düzlemindeki koniklerin genel denklemi $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{e} + v_3\mathbf{h}$ sıfırdan farklı bir pür hibrit sayı ve $\Delta = -v_1^2 + 2v_1v_2 + v_3^2$, parabolik ve eliptik düzlem için $r = -1$; hiperbolik düzlem için $r = +1$ ya da $r = -1$ olmak üzere

$$-A^2(x - h)^2 + \Delta B^2(y - s)^2 = r, \quad r \in \{-1, 1\} \quad (4.29)$$

olur. Buna göre (h, s) merkezli konikler hibrid düzlemin tipine göre

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_v \text{ eliptik} &\Rightarrow v \text{ birim eliptik.} \Rightarrow -A^2(x-h)^2 - B^2(y-s)^2 = -1 \\
 &\Rightarrow \text{parametrik eş.:} \left(\frac{\cos \theta}{A} + h, \frac{\sin \theta}{B} + s \right), \\
 \mathbb{P}_v \text{ hiperbolik} &\Rightarrow v \text{ birim hiperbolik.} \Rightarrow -A^2(x-h)^2 + B^2(y-s)^2 = \pm 1 \\
 &\Rightarrow \text{parametrik eş.:} \left(\frac{\cosh \theta}{A} + h, \frac{\sinh \theta}{B} + s \right), \\
 \mathbb{P}_v \text{ dual} &\Rightarrow v \text{ parabolik.} \Rightarrow -A^2(x-h)^2 = -1 \\
 &\Rightarrow \text{parametrik eş.:} \left(\frac{1}{A}(Ah \pm 1), t \right)
 \end{aligned}$$

denklemlerinden birine sahip olur. $C, \mathbb{P}_v$ düzleminin herhangi bir noktası ve k bir pozitif reel sayı olsun. O zaman C merkezli ve katsayısı k olan homoteti dönüşümü, C noktasını sabit bırakan ve diğer tüm P noktalarını C, P noktaları ile doğrudan olan ve $CQ = kCP$ olacak şekilde bir Q noktasına dönüştüren bir dönüşümdür (Modenov vd. 1965). C merkezli ve katsayısı k olan homoteti dönüşüm

$$Q = C + kCP$$

eşitliği ile temsil edilebilir. Bu dönüşüm $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$ ve $C = (h, s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 F : \mathbb{R}^2 \cup \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{1\}, \quad P \longrightarrow F(P) = Q \\
 F(P) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k & 0 & (1-k)h \\ 0 & k & (1-k)s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

ile tanımlanabilir (Modenov vd. 1965). Böylece, genel konik denklemi (4.29) homoteti dönüşümü altında

$$-A^2k^2(x-h)^2 + \Delta B^2k^2(x-s)^2 = r$$

koniğine dönüşür. Genel konik denkleminin (4.29) eksentiriği e homoteti dönüşümü altında

$$e = \sqrt{1 + \Delta \left(\frac{Ak}{Bk} \right)^2} = \sqrt{1 + \Delta \frac{A^2}{B^2}}$$

olduğu için değişmez kalır.

Tanım 4.52. İki konik paralel eksenlere ve eşit eksantriğe sahipse, o zaman aynı yarı formda (same semi-form) oldukları söylenir. Ayrıca, bu koniklerin asal eksenleri paralel ise, homotetik olarak adlandırılır (Childress 1965; Ramirez 2014, Ramirez 2014).

Tanım 4.53. Eğer C' , C koniğinin noktalarının orijin merkezli $\mathfrak{C}$ koniğine göre inversiyonu olan noktaların toplamından oluşuyorsa, C' koniğine $\mathfrak{C}$ koniğine göre C koniğinin inversiyonu denir (Childress 1965; Ramirez 2014; Ramirez 2014).

Buna göre hibrit sayılar yardımıyla bir noktanın bir koniğe göre inversiyon dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 4.54. $\mathbb{P}_{\mathbf{v}} = \text{span}\{1, \mathbf{v}\}$ düzleminde bir $\mathfrak{C}$ koniğinin merkezi C , Q noktası $\overrightarrow{CP}$ ile $\mathfrak{C}$ koniğinin keşimi ve C, P, P' doğrudan üç nokta olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi &: \mathbb{P}_{\mathbf{v}} - \{C\} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{v}} - \{C\} \\ \phi(P) &= P' \text{ ve } |CP| |CP'| = |CQ|^2\end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşüm $\mathfrak{C}$ koniğine göre inversiyon dönüşümü ve P' noktası P noktasının $\mathfrak{C}$ koniğine göre inversiyonu olan nokta olarak adlandırılır.

Teorem 4.55. P' noktası, $C = (h, s)$ merkezli bir

$$\mathfrak{C}: -A^2(x-h)^2 + B^2(y-s)^2 \Delta = r, \quad r \in \{-1, 1\}$$

koniğine göre $P = (x_0, y_0)$ noktasının inversiyonu olsun. P' noktası CP doğrusu ile P noktasının polar doğrusunun kesişim noktasıdır. O zaman $\Delta = -v_1^2 + 2v_1v_2 + v_3^2$, $\rho_P = -A^2(x_0-h)^2 + B^2(y_0-s)^2 \Delta$ olmak üzere

$$P' = \left(\frac{r(x_0-h)}{\rho_P} + h, \frac{r(y_0-s)}{\rho_P} + s \right) \quad (4.31)$$

olur.

İspat $\overrightarrow{CP} = (x_0-h, y_0-s)$ ışını ile $\mathfrak{C}$ koniği $Q = (\eta(x_0-h) + h, \eta(y_0-s) + s)$, $\eta > 0$ noktasında kesişsin. $Q \in \mathfrak{C}$ olduğu için

$$\begin{aligned}-A^2(\eta(x_0-h))^2 + B^2(\eta(y_0-s))^2 \Delta &= r, \\ \eta^2(-A^2(x_0-h)^2 + B^2(y_0-s)^2 \Delta) &= r.\end{aligned} \quad (4.32)$$

P noktasının polar doğrusu

$$l_P : -A^2 (x - h) (x_0 - h) + B^2 (y - s) (y_0 - s) \Delta = r.$$

Bu doğru, $\overrightarrow{CP}$ ışını $P' = (\xi (x_0 - h) + h, \xi (y_0 - s) + s)$, $\xi > 0$ noktasında keser.

$P' \in l_P$ olduğu için

$$\begin{aligned} -A^2 (\xi (x_0 - h)) (x_0 - h) + B^2 (\xi (y_0 - s)) (y_0 - s) \Delta &= r \\ \xi (-A^2 (x_0 - h)^2 + B^2 (y_0 - s)^2 \Delta) &= r. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Böylece, (4.32) ve (4.33)'dan $\xi = \eta^2$ olur. O zaman, aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} |CP| &= \sqrt{|-(x_0 - h)^2 - (y_0 - s)^2 \Delta|} \\ |CP'| &= \xi \sqrt{|-(x_0 - h)^2 - (y_0 - s)^2 \Delta|} \\ |CQ| &= \eta \sqrt{|-(x_0 - h)^2 - (y_0 - s)^2 \Delta|}. \end{aligned}$$

Bu nedenle, $|CP| |CP'| = |CQ|^2$ olur. $\mathfrak{C}$ koniğinin P noktasının polar doğrusunun denklemi ve CP doğrusunun denklemi

$$\frac{y - s}{x - h} = \frac{y_0 - s}{x_0 - h},$$

yardımla P' noktası (4.31) şeklinde bulunabilir. □

Sonuç 4.56. $P = (x_0, y_0)$ noktasının $\mathfrak{C} : -A^2 (x - h)^2 + B^2 (y - s)^2 \Delta = r$ koniğine göre inversi olan nokta $P' = (x_1, y_1)$ olsun. Teorem 4.55'de bulunan P' noktası, $\rho_P = -A^2 (x_0 - h)^2 + B^2 (y_0 - s)^2 \Delta$ olmak üzere (4.30) dönüşümü yardımıyla

$$P' = F(P) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{\rho_P} & 0 & \left(1 - \frac{r}{\rho_P}\right) h \\ 0 & \frac{r}{\rho_P} & \left(1 - \frac{r}{\rho_P}\right) s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

formülüyle de bulunabilir.

Teorem 4.57. *İnversiyon merkezinden geçen bir doğrunun inversiyonu doğrunun kendisi olur.*

Teorem 4.58. $\mathcal{C}$ koniği $\mathbb{P}_v$ düzleminde merkezli bir konik olsun. Orijinden geçmeyen geçmeyen bir ℓ doğrusunun $\mathcal{C}$ koniğine göre inversi, bir $\mathcal{C}$ koniği olur. $\mathcal{C}$ koniğinin türü $\mathbb{P}_v$ düzlemine göre aşağıdaki gibi verilebilir:

$\mathbb{P}_v$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$
<i>Eliptik</i>	<i>Elips</i>	<i>Elips</i>
<i>Hiperbolik</i>	<i>Hiperbol</i>	<i>Hiperbol</i>
<i>Parabolik</i>	<i>Dual çember</i>	$x = c$ için doğru
<i>Parabolik</i>	<i>Dual çember</i>	$y = ax + b$ için parabol

Bu ifadenin karşısı da doğrudur.

İspat İncersiyonu alınan doğrunun denklemi $y = ax + b$ olsun. Parabolik ve eliptik düzlemde $r = -1$ ve hiperbolik düzlemde $r = 1$ ya da $r = -1$ olmak üzere $P = (x, y) = (x, ax + b)$ noktasının incersiyon altındaki görüntüsü

$$P' = r \left(\frac{x}{\rho_P}, \frac{y}{\rho_P} \right) = r \left(\frac{x}{\rho_P}, \frac{ax + b}{\rho_P} \right) \quad (4.35)$$

olur. P' noktasının aşağıdaki denklemi sağladığı görülebilir:

$$-A^2 x^2 + \Delta B^2 y^2 = r \left(\frac{ax - y}{b} \right).$$

(4.35) eşitliği yardımıyla son denklem düzenlendiğinde, $y = ax + b$ doğrusunun incersiyonu olan koniğin denklemi

$$\begin{aligned} -A^2 \left(x + \frac{ra}{2A^2b} \right)^2 + \Delta B^2 \left(y + \frac{\Delta r}{2B^2b} \right)^2 &= - \left(\frac{a}{2Ab} \right)^2 + \Delta \left(\frac{1}{2Bb} \right)^2, \text{ for } \Delta \neq 0, \\ -A^2 \left(x - \frac{a}{2A^2b} \right)^2 &= - \left(\frac{a}{2Ab} \right)^2 + \frac{y}{b}, \text{ for } \Delta = 0, \end{aligned}$$

biçiminde olur. Eğer doğrunun denklemi $x = c$ ise bu doğrunun incersiyonu

$$-A^2 x^2 + \Delta B^2 y^2 = \frac{rx}{c}$$

olur. Dual düzlemde $\Delta = 0$ olduğu için $x = c$ doğrusunun incersiyonun denklemi

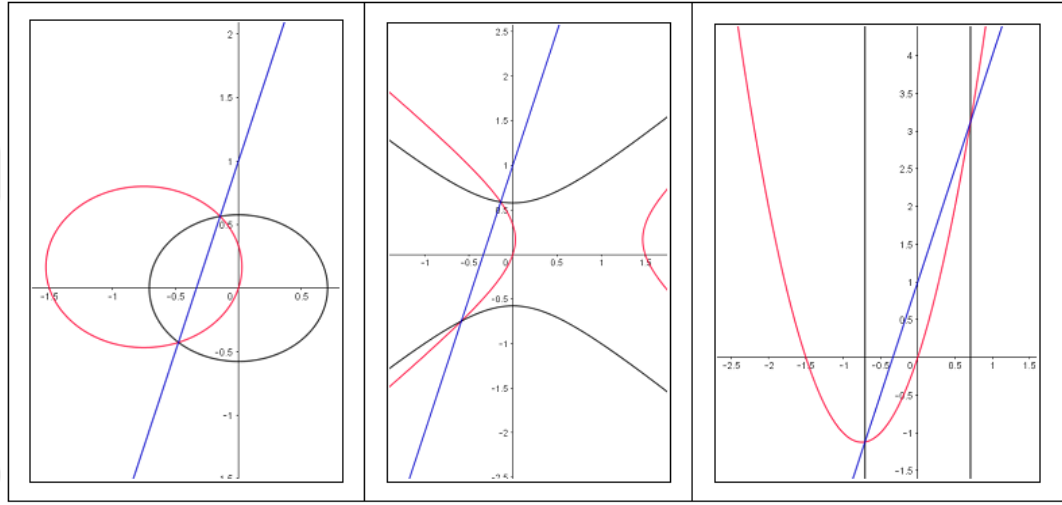
$$x = 0 \text{ veya } x = \frac{1}{A^2c}$$

olur. Aynı koşullarda, teoremin karşısının da doğru olduğu gösterilebilir. $\square$

Örnek 4.59. $y = 3x + 1$ (mavi) doğrusunun $\mathfrak{C}$ (siyah) koniğine göre inversiyonu olan $\mathcal{C}'$ (kırmızı) koniğinin denklemi

$\mathfrak{C}$	$\mathcal{C}'$
$2x^2 + 3y^2 = 1$	$2x^2 + 3x + 3y^2 - y = 0$
$-2x^2 + 3y^2 = 1$	$2x^2 - 3x - 3y^2 + y = 0$
$-2x^2 = -1$	$\frac{1}{8}(4x + 3)^2 = y + \frac{9}{8}$

olur (Şekil 4.9).



Şekil 4.9. Soldan sağa sırasıyla elips, hiperbol ve dual çembere göre inversiyon merkezinden bir doğrunun inversiyonu.

Teorem 4.60. $\mathfrak{C}$, $\mathcal{C}$ homotetik iki konik ve $\mathfrak{C}$ koniği $\mathbb{P}_v$ düzleminde merkezli bir konik olsun. Eğer $\mathcal{C}$ koniği orijinden geçmiyorsa, o zaman $\mathcal{C}$ koniğinin $\mathfrak{C}$ koniğine göre inversi olan koniğin denklemi $\rho_{(h,s)} = -A^2h^2 + B^2s^2\Delta$ olmak üzere

$$-A^2 \left(x - \frac{hr}{\frac{r}{k^2} - \rho_{(h,s)}} \right)^2 + \Delta B^2 \left(y - \frac{k^2rs}{\frac{r}{k^2} - \rho_{(h,s)}} \right)^2 = \frac{-r^2\rho_{(h,s)}}{\left(\frac{r}{k^2} - \rho_{(h,s)} \right)^2}$$

olur. Bu konik $\mathcal{C}$ koniği ile homotetik olur.

İspat $\mathfrak{C}$, $\mathcal{C}$ konikleri

$$\mathfrak{C} : -A^2x^2 + \Delta B^2y^2 = r$$

$$\mathcal{C} : -A_0^2(x-h)^2 + \Delta B_0^2(y-s)^2 = r \quad (4.36)$$

$$A_0 = kA, \quad B_0 = kB \quad (4.37)$$

eşitlikleri ile verilsin. $P = (x, y)$ noktasının $\mathfrak{C}$ koniğine göre inversiyonu $P' = \left(\frac{rx}{\rho_P}, \frac{ry}{\rho_P}\right)$ noktası, (4.37) ve $\rho_P = -A^2x^2 + B^2y^2\Delta$ eşitlikleri (4.36) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
-A_0^2(x-h)^2 + \Delta B_0^2(y-s)^2 &= r \\
-(Ak)^2 \left(\frac{rx}{\rho_P} - h\right)^2 + \Delta(Bk)^2 \left(\frac{ry}{\rho_P} - s\right)^2 &= r \\
-A^2 \left(\frac{rx}{\rho_P} - h\right)^2 + \Delta B^2 \left(\frac{ry}{\rho_P} - s\right)^2 &= \frac{r}{k^2} \\
-A^2 \left(\frac{rx}{\rho_P} - h\right)^2 + \Delta B^2 \left(\frac{ry}{\rho_P} - s\right)^2 &= \frac{r}{k^2} \\
\frac{1}{\rho_P} + \frac{-2r(-A^2hx + \Delta B^2sy)}{\rho_P} - A^2h^2 + \Delta B^2s^2 &= \frac{r}{k^2} \\
-A^2x^2 + \Delta B^2y^2 &= \frac{1 - 2r(-A^2xh + \Delta B^2ys)}{\frac{r}{k^2} - (-A^2h^2 + \Delta B^2s^2)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlendiğinde koniğinin denklemi

$$-A^2 \left(x - \frac{hr}{\frac{r}{k^2} - \rho_{(h,s)}}\right)^2 + \Delta B^2 \left(y - \frac{sr}{\frac{r}{k^2} - \rho_{(h,s)}}\right)^2 = \frac{-\rho_{(h,s)}}{\left(\frac{r}{k^2} - \rho_{(h,s)}\right)^2}$$

olur. □

Teorem 4.61. $\mathcal{P} : -A_0^2(x-h)^2 = a + y$ ve $\mathcal{C} : -A^2x^2 = r$ sırasıyla bir parabol ve dual çember olsun. Eğer $\mathcal{P}$ parabolü inversiyonun merkezinden geçiyorsa $\mathcal{C}$ dual çemberine göre inversi bir doğru, inversiyonun merkezinden geçmiyorsa $\mathcal{C}$ dual çemberine göre inversi bir paraboldür.

İspat $P = (x, y)$ noktasının $\mathcal{C} : -A^2x^2 = r$ dual çemberine göre inversi $P' = \left(\frac{rx}{\rho_P}, \frac{ry}{\rho_P}\right)$ noktası ve $\rho_P = -A^2x^2$ değeri

$$-A_0^2(x-h)^2 = a + y$$

eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
 -A_0^2 \left(\frac{-rx}{A^2 x^2} - h \right)^2 &= a + \frac{ry}{-A^2 x^2} \\
 \left(\frac{x - A^2 x^2 h}{A^2 x^2} \right)^2 &= \frac{-y - a A^2 x^2}{A_0^2 A^2 x^2} \\
 \frac{(x - A^2 x^2 h)^2}{A^2 x^2} &= \frac{-y - a A^2 x^2}{A_0^2} \\
 A_0^2 (x - A^2 x^2 h)^2 - A^2 x^2 (-y - a A^2 x^2) &= 0 \\
 A^4 A_0^2 x^4 h^2 + A^4 a x^4 - 2 A^2 A_0^2 h x^3 + A^2 x^2 y + A_0^2 x^2 &= 0 \\
 A^4 (A_0^2 h^2 + a) x^2 - 2 A^2 A_0^2 h x + A_0^2 + A^2 y &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\mathcal{P}$ inversiyonun merkezinden geçiyorsa o zaman $-A_0^2 h^2 = a$ olur. Böylece $\mathcal{P}$ inversiyonu

$$y = 2A_0^2 h x - \left(\frac{A_0}{A} \right)^2$$

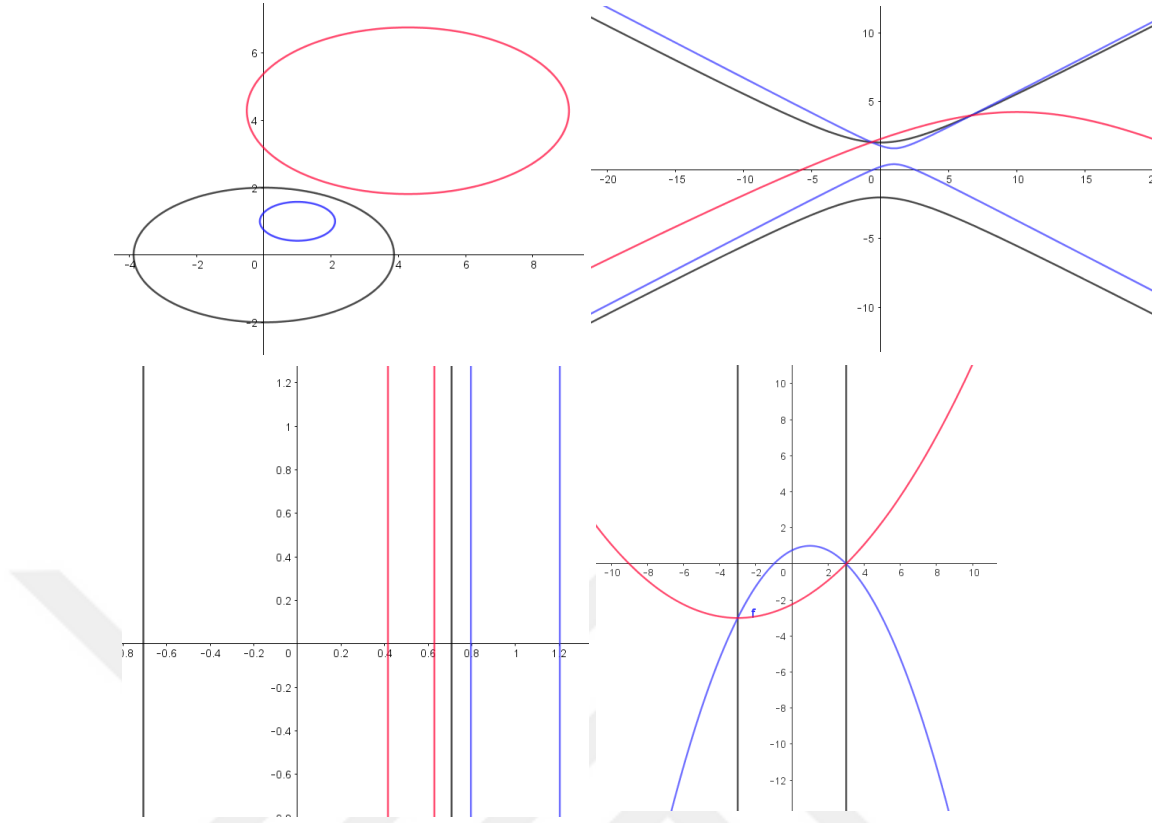
doğrusu olur. Eğer $\mathcal{P}$ inversiyonun merkezinden geçiyorsa o zaman $\mathcal{P}$ inversiyonu

$$y = A^2 (A_0^2 h^2 + a) x^2 + 2A_0^2 h x - \left(\frac{A_0}{A} \right)^2$$

parabolü olur. □

Örnek 4.62. Şekil 4.10’da kırmızı renkli $\mathcal{C}'$, mavi renkli $\mathcal{C}$ koniklerinin siyah renkli $\mathfrak{C}$ merkezli koniğine göre inversiyonu görülmektedir.

$\mathfrak{C}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}'$
$\frac{1}{15}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$	$\frac{12}{15}(x-1)^2 + 3(y-1)^2 = 1$	$-\frac{7}{15}x^2 - \frac{7}{4}y^2 =$ $= 15(2-y) - 4x$
$-\frac{1}{15}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$	$-\frac{12}{15}(x-1)^2 + 3(y-1)^2 = 1$	$\frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{15}x^2 =$ $= 15(y-2) - 4x$
$-2x^2 = -1$	$-24(x-1)^2 = -1$	$-2x^2 = \frac{12}{23} - \frac{48}{23}x$
$-\frac{1}{9}x^2 = -1$	$y = 1 - \frac{1}{4}(x-1)^2$	$y = \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{9}{4}$



Şekil 4.10. Kırmızı renkli C' , mavi renkli C koniğinin siyah renkli $\mathfrak{C}$ koniğine göre inversiyonu.

Teorem 4.63. C ve $\mathfrak{C} : -A^2x^2 + \Delta B^2y^2 = r$ homotetik olmayan iki konik olsun. Eğer C koniği orijinden geçiyorsa o zaman C koniğinin inversiyonu olan eğri

- i. $\mathbb{P}_v$ düzlemi parabolik değilse üçüncü dereceden bir eğri olur.
- ii. $\mathbb{P}_v$ düzlemi parabolikse bir doğru olur.

İspat C ve $\mathfrak{C}$ homotetik olmayan konikleri için

$$C : -A_1^2(x-h)^2 + \Delta B_1^2(y-s)^2 = r \quad (4.38)$$

$$A_1 \neq kA, \quad B_1 \neq kB, \quad k \in \mathbb{R}$$

ifadeleri yazılabilir. $P = (x, y)$ noktasının $\mathfrak{C}$ koniğine göre inversi $P' = \left(\frac{rx}{\rho_P}, \frac{ry}{\rho_P}\right)$ noktası ve $\rho_P = -A^2x^2 + B^2y^2\Delta$ eşitlikleri (4.38) eşitliğinde yerine yazıldığında ve konik inversiyonun merkezinden geçtiği için

$$-A_1^2h^2 + \Delta B_1^2s^2 = r$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & -A_1^2 \left(\frac{rx}{\rho_P} - h \right)^2 + \Delta B_1^2 \left(\frac{ry}{\rho_P} - s \right)^2 = -A_1^2 h^2 + \Delta B_1^2 s^2, \\ & 2(A^2 A_1^2 h) x^3 - 2(A^2 B_1^2 s) \Delta x^2 y - 2(B^2 A_1^2 h) \Delta x y^2 + \\ & + 2(B^2 B_1^2 s) \Delta^2 y^3 + (r A_1^2) x^2 - (r B_1^2) \Delta y^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

elde edilir. Eğer düzlem parabolik değilse $\mathcal{C}$ koniğinin inversi olan (4.39) üçüncü dereceden bir eğri olur. Eğer düzlem parabolikse $\mathcal{C}$ koniğinin inversi $x = 0$ veya $h \neq 0$ iken $x = \frac{1}{2A^2 h}$ olur. $\square$

Teorem 4.63’de elde edilen bilgiler Çizelge 4.4’deki gibi özetlenebilir.

Çizelge 4.4. İncersiyon koniği ile homotetik olmayan ve orinden geçen $\mathcal{C}$ koniğinin incersiyonu

$\mathcal{C}$ koniği	$\mathcal{C}$ koniğinin tersi
Elipse	$2A^2 A_1^2 h x^3 + 2A^2 B_1^2 s x^2 y + 2B^2 A_1^2 h x y^2 + 2B^2 B_1^2 s y^3 - A_1^2 x^2 - B_1^2 y^2 = 0$
Hiperbol	$2A^2 A_1^2 h x^3 - 2A^2 B_1^2 s x^2 y - 2B^2 A_1^2 h x y^2 + 2B^2 B_1^2 s y^3 + r A_1^2 x^2 - r B_1^2 y^2 = 0$
Dual çember	$x = 0$ veya $h \neq 0$ iken $x = \frac{1}{2A^2 h}$

Teorem 4.64. $\mathcal{C}$ ve $\mathfrak{C} : -A^2 x^2 + \Delta B^2 y^2 = r$ homotetik olmayan iki konik olsun. Eğer $\mathcal{C}$ koniği orijinden geçmiyorsa o zaman $\mathcal{C}$ koniğinin inversi olan eğri

i. $\mathbb{P}_v$ düzlemi parabolik değilse dördüncü dereceden bir eğri olur.

ii. $\mathbb{P}_v$ düzlemi parabolikse bir doğru olur.

İspat $\mathcal{C}$ ve $\mathfrak{C}$ homotetik olmayan konikleri için

$$\mathcal{C} : -A_1^2 (x - h)^2 + \Delta B_1^2 (y - s)^2 = r \quad (4.40)$$

$$A_1 \neq kA, \quad B_1 \neq kB, \quad k \in \mathbb{R}$$

ifadeleri yazılabilir. $P = (x, y)$ noktasının $\mathfrak{C}$ koniğine göre inversi olan $P' = \left(\frac{rx}{\rho_P}, \frac{ry}{\rho_P} \right)$ noktası ve $\rho_P = -A^2 x^2 + B^2 y^2 \Delta$ eşitlikleri (4.40) eşitliğinde yerine yazıldığında ve konik incersiyonun merkezinden geçmediği için

$$-A_1^2 h^2 + \Delta B_1^2 s^2 \neq r$$

olduğundan

$$\begin{aligned} -A_1^2 \left(\frac{rx}{\rho_P} - h \right)^2 + \Delta B_1^2 \left(\frac{ry}{\rho_P} - s \right)^2 &= r \\ -A_1^2 \left(\frac{rx}{-A^2x^2 + B^2y^2\Delta} - h \right)^2 + \Delta B_1^2 \left(\frac{ry}{-A^2x^2 + B^2y^2\Delta} - s \right)^2 &= r \end{aligned}$$

olur. Son eşitlik düzenlendiğinde aşağıdaki dördüncü dereceden denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} &A^4 (h^2 A_1^2 - B_1^2 s^2 \Delta + r) x^4 + 2r (AA_1)^2 h x^3 + B^4 (A_1^2 h^2 - B_1^2 s^2 \Delta + r) \Delta^2 y^4 + \\ &+ x^2 A_1^2 + 2\Delta (AB)^2 (\Delta (B_1 s)^2 - (A_1 h)^2 - r) x^2 y^2 - \Delta 2r (AB_1)^2 s x^2 y + \\ &+ 2r (BB_1 \Delta)^2 s y^3 - 2r (BA_1)^2 h \Delta x y^2 - B_1^2 \Delta y^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Eğer düzlem parabolik değilse $\mathcal{C}$ koniğinin inversi olan (4.41) dördüncü dereceden bir eğri olur. Eğer düzlem parabolikse $\mathcal{C}$ koniğinin inversi eğer $h \neq \pm \frac{1}{A_1}$ ise $x = 0$ veya $x = \pm \frac{A_1}{A^2 - A^2 h A_1}$; eğer $h = -\frac{1}{A_1}$ ise $x = 0$ veya $x = -\frac{A_1}{A^2 - A^2 h A_1}$; eğer $h = \frac{1}{A_1}$ ise $x = 0$ veya $x = \frac{A_1}{A^2 + A^2 h A_1}$ olur. $\square$

Teorem 4.64'de elde edilen bilgiler Çizelge 4.5'deki gibi özetlenebilir.

Çizelge 4.5. İnversiyon koniği ile homotetik olmayan ve orinden geçmeyen

$\mathcal{C}$ koniğinin inversiyonu

$\mathcal{C}$ koniği	$\mathcal{C}$ koniğini inversi
Elips	$(A_1^2 h^2 + B_1^2 s^2 - 1) (A^4 x^4 + B^4 y^4) - 2 ((AA_1)^2 h x^3 + (BB_1)^2 s y^3) \\ 2 (AB)^2 (A_1^2 h^2 + B_1^2 s^2 - 1) x^2 y^2 - 2 (AB_1)^2 s x^2 y + \\ -2 (BA_1)^2 h x y^2 + B_1^2 y^2 + A_1^2 x^2 = 0$
Hiperbol	$(A_1^2 h^2 - B_1^2 s^2 + r) (A^4 x^4 + B^4 y^4) + 2r ((AA_1)^2 h x^3 + (BB_1)^2 s y^3) \\ 2 (AB)^2 (A_1^2 h^2 - B_1^2 s^2 + r) x^2 y^2 - 2r (AB_1)^2 s x^2 y + \\ -2r (BA_1)^2 h x y^2 + A_1^2 x^2 - B_1^2 y^2 = 0$
Dual çember	$x = 0 \text{ veya } \left(h \neq \pm \frac{1}{A_1} \text{ ise } x = \pm \frac{A_1}{A^2 - A^2 h A_1} \right) \text{ veya } \left(h = -\frac{1}{A_1} \text{ ise } \right. \\ \left. x = -\frac{A_1}{A^2 - A^2 h A_1} \right) \text{ veya } \left(h = \frac{1}{A_1} \text{ ise } x = \frac{A_1}{A^2 + A^2 h A_1} \right)$

4.3. Hibrit sayılar ve Möbius Dönüşümü

4.3.1. 2×2 Hibrit Elemanlı Matrislerin Determinantı

$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ elemanları hibrit sayı olan 2×2 matris olsun. Hibrit sayılar çarpma işlemine göre değişme özelliğine sahip olmamasına rağmen elemanları hibrit sayı olan iki matrisin çarpımı

$$M_2 M_1 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{bmatrix}$$

iyi tanımlı olur.

Önerme 4.65. $z = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h} \in \mathbb{K}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{M}_{2 \times 2}$

$$\varphi(a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} a + c & b - c + d \\ c - b + d & a - c \end{bmatrix}$$

dönüşümü hibrit sayılar kümesinden 2×2 reel matrisler kümesine bir halka izomorfizmidir (Özdemir 2018).

Hibrit sayılar kümesi 2×2 reel matrisler kümesine izomorfik olduğu için elemanları hibrit sayı olan 2×2 bir matris 4×4 reel matris olarak yazılabilir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2\mathbf{i} + a_3\boldsymbol{\varepsilon} + a_4\mathbf{h} & b_1 + b_2\mathbf{i} + b_3\boldsymbol{\varepsilon} + b_4\mathbf{h} \\ c_1 + c_2\mathbf{i} + c_3\boldsymbol{\varepsilon} + c_4\mathbf{h} & d_1 + d_2\mathbf{i} + d_3\boldsymbol{\varepsilon} + d_4\mathbf{h} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + a_3 & a_2 - a_3 + a_4 & b_1 + b_3 & b_2 - b_3 + b_4 \\ a_3 - a_2 + a_4 & a_1 - a_3 & b_3 - b_2 + b_4 & b_1 - b_3 \\ c_1 + c_3 & c_2 - c_3 + c_4 & d_1 + d_3 & d_2 - d_3 + d_4 \\ c_3 - c_2 + c_4 & c_1 - c_3 & d_3 - d_2 + d_4 & d_1 - d_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bu tip matrislerin determinantı aşağıdaki gibi hesaplanabilir. M herhangi bir cisim üzerinde 4×4 bir matris olsun. Bu matris 2×2 reel matrislerden dört bölüme ayrılabilir. Eğer $C = 0$ ise o zaman determinant

$$\det M = \det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A \det D = \det(AD)$$

olur. Eğer $C \neq 0$ ve A terslenebilir bir matris ise, o zaman M matrisi elementer satır operasyonları ile aşağıdaki gibi üçgensel hale getirilebilir:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \xrightarrow{-CA^{-1}S_1 + S_2 \rightarrow S_2} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

ve

$$\det M = \det (AD - ACA^{-1}B)$$

olur. İlaveten, eğer $A = 0$ o zaman

$$\det \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} = (-1)^2 \det \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det (CB) = \det (-CB)$$

olur. Böylece eğer $\|a\| \neq 0$ ise o zaman M matrisinin determinanı

$$\det (AD - ACA^{-1}B) = \|a(d - ca^{-1}b)\|^2$$

olur. Eğer $\|a\| = 0$ ise o zaman M matrisinin determinanı $\det (CB) = \|b\|^2 \|c\|^2$ olur.

Benzer biçimde aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da determinant hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= d(a - bd^{-1}c) & \sigma_{12} &= b(db^{-1}a - c) & \sigma_{21} &= c(ac^{-1}d - b) & \sigma_{22} &= a(d - ca^{-1}b) \\ \eta_{11} &= (a - bd^{-1}c)d & \eta_{12} &= (db^{-1}a - c)b & \eta_{21} &= (ac^{-1}d - b)c & \eta_{22} &= (d - ca^{-1}b)a \end{aligned} \quad (4.42)$$

Böylece determinant $\det M = \|\sigma_{ij}\|^2 = \|\eta_{ik}\|^2 = \delta^2$, $ij = 1, 2$ olur.

Aynı zamanda, bu tip matrislerin determinanı Dieudonne determinanı olarak adlandırılan aşağıdaki formülle de hesaplanabilir (Aslaksen 1996):

$$\begin{aligned} \delta^2 &= (ad - aca^{-1}b) \overline{(ad - aca^{-1}b)} = (ad - aca^{-1}b) (\bar{d}\bar{a} - \bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{c}\bar{a}) \\ &= ad\bar{d}\bar{a} + aca^{-1}b\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{c}\bar{a} - ad\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{c}\bar{a} - aca^{-1}b\bar{d}\bar{a} \\ &= \|ad\|^2 + \|cb\|^2 - \left((ad) \overline{(aca^{-1}b)} + (aca^{-1}b) \overline{(ad)} \right) \\ &= \|ad\|^2 + \|cb\|^2 - 2S(ad\bar{c}\bar{b}). \end{aligned}$$

Örnek 4.66. Hibrit sayı elemanlı M matrisinin 4×4 reel matris temsili $\widetilde{M}$ aşağıda

verilmiştir:

$$M = \begin{bmatrix} 2 - 2\mathbf{i} + \epsilon + \mathbf{h} & 4 + \mathbf{i} - \epsilon + \mathbf{h} \\ 1 + 2\mathbf{i} - \epsilon & 6 + \mathbf{i} + 5\epsilon + \mathbf{h} \end{bmatrix}, \widetilde{M} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 11 & -3 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\det M = \det \widetilde{M} = 1000$ olur ve aynı zamanda bu değer aşağıdaki gibi de hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \det M &= \det (AD - ACA^{-1}B) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \right) \\ &= 1000 \end{aligned}$$

Teorem 4.67. $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ bir 2×2 hibrit sayı matrisi olsun. Eğer $\sigma_{ij}, \eta_{ik}, i, j = 1, 2$ eşitliklerinden biri sıfır ya da lightlike değilse o zaman M matrisinin tersi

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{-1}d & -\sigma_{12}^{-1}b \\ -\sigma_{21}^{-1}c & \sigma_{22}^{-1}a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\eta_{11}^{-1} & -b\eta_{12}^{-1} \\ -c\eta_{21}^{-1} & a\eta_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

olur.

İspat MM^{-1} çarpımı σ_{ij}^{-1} sayılarını içeren matris yardımıyla hesaplandığında $MM^{-1} = I$ olduğu görülebilir. Aşağıda görüldüğü gibi bu çarpımdan elde edilen iki eleman $(MM^{-1})_{11}$ ve $(MM^{-1})_{12}$ sırasıyla 1 ve 0 olur:

$$\begin{aligned} (MM^{-1})_{11} &= a\sigma_{11}^{-1}d - b\sigma_{21}^{-1}c = a(d(a - bd^{-1}c))^{-1}d - b(c(ac^{-1}d - b))^{-1}c \\ &= (1 - bd^{-1}ca^{-1})^{-1}(ac^{-1}db^{-1})^{-1}(ac^{-1}db^{-1}) - (ac^{-1}db^{-1} - 1)^{-1} \\ &= (ac^{-1}db^{-1} - 1)^{-1}(ac^{-1}db^{-1}) - (ac^{-1}db^{-1} - 1)^{-1} \\ &= (ac^{-1}db^{-1} - 1)^{-1}(ac^{-1}db^{-1} - 1) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (MM^{-1})_{12} &= -a\sigma_{12}^{-1}b + b\sigma_{22}^{-1}a = -a(b(db^{-1}a - c))^{-1}b + b(a(d - ca^{-1}b))^{-1}a \\ &= -(db^{-1} - ca^{-1})^{-1} + (db^{-1} - ca^{-1})^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Benzer işlemlerle, $(MM^{-1})_{21} = 0$, $(MM^{-1})_{22} = 1$ olduğu bulunabilir. $MM^{-1} = I$ olduğu η_{ik}^{-1} sayılarını içeren matris yardımıyla da hesaplanabilir. $\square$

4.3.2. Hibrit sayılarla Möbius Dönüşümü

Tanım 4.68. $SL_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{K}, \delta = 1 \right\}.$

Ahlfors (1985)'de 2×2 matrisler için verilen çarpanlara ayırma metodu aşağıdaki gibi hibrit sayı elemanlı 2×2 matrislere uygulanabilir.

Teorem 4.69. $a, b \in \mathbb{K}$ olmak üzere $SL_2(\mathbb{K})$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

tarafından üretilir.

İspat $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{K})$ ve $c \neq 0$ olsun. M matrisinin çarpanlara ayrılmış hali aşağıdaki gibi alınsın:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & ac^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c^{-1}d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & ac^{-1}d - c^{-1} \\ c & d \end{bmatrix}.$$

O zaman $b = ac^{-1}d - c^{-1}$ olduğu için $\|c(ac^{-1}d - b)\| = 1$ olur. $c = 0$ olsun. Bu durumda M matrisinin çarpanlara ayrılmış hali aşağıdaki gibi olur:

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$$

$d = a^{-1}$ olduğu için $\|ad\| = 1$ olur. □

$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{K})$ matrisi $\mathbb{K}^2$ üstünde soldan çarpımla hareket etmektedir.

$$P : \mathbb{TK}^2 \longrightarrow \widehat{\mathbb{TK}} = \mathbb{TK} \cup \{\infty\}$$

$$P : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} xy^{-1} & \text{if } y \neq 0 \\ \infty & \text{if } y = 0 \end{cases}$$

dönüşümü bir sağ projeksiyon dönüşümü olur. $z \in \widehat{\mathbb{TK}}$ noktalarının $\mathbb{TK}^2$ noktalarına standart bağıntı

$$\infty \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } z \in \mathbb{TK}, z \longrightarrow z = \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$$

bağıntısıyla tanımlanır. Herhangi bir $z \in \mathbb{TK}$ noktası

$$\begin{aligned} M(z) = PMz &= P \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= P \begin{bmatrix} az + b \\ cz + d \end{bmatrix} = (az + b)(cz + d)^{-1}, \\ M(\infty) &= P \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = ac^{-1} \end{aligned}$$

olduğu için $M \in SL_2(\mathbb{K})$ matrisi $\widehat{\mathbb{TK}}$ üzerinde hareket etmektedir.

Tanım 4.70. $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{K})$ olmak üzere $F_M : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$

$$F_M(z) = M(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}$$

fonksiyonu Möbius dönüşümü olarak adlandırılır.

$\mathbb{K}$ üzerinde tanımlanan bütün Möbius dönüşümlerinin kümesi $Möb(\mathbb{K})$ ile gösterilmiştir. M terslenebilir bir matris olduğundan,

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{K}) &\longrightarrow Möb(\mathbb{K}) \\ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &\longrightarrow M(z) = (az + b)(cz + d)^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü örten bir homomorfizm olur. Bu grubun çekirdeğinde $rI_{2 \times 2}$, $r \in \mathbb{R}$ vardır. Eğer $M \in SL_2(\mathbb{K})$ ise o zaman $r = \pm 1$ olur. Böylece çekirdek $\mathbb{C}$ ile gösterilirse $\mathbb{C} = \{\pm I\}$ olur. $Möb(\mathbb{K})$ ile $SL_2(\mathbb{K})/\mathbb{C}$ arasındaki homomorfizm aşağıdaki gibi gösterilebilir. Şöyle ki

$$\begin{aligned} f : SL_2(\mathbb{K}) &\longrightarrow Möb(\mathbb{K}) \\ M &\longrightarrow f(M) = (az + b)(cz + d)^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlandığında,

$$f(MN) = f(M) \circ f(N)$$

eşitliği sağlanmaktadır. Bu fonksiyon bir homomorfizmadır ve çekirdeği $\mathbb{C} = \{\pm I\}$ olur. O halde her $F \in Möb(\mathbb{K})$ fonksiyonuna karşılık gelen iki tane matris vardır ve bunlar M ,

$-M$ matrisleri olur. Ayrıca $\text{Möb}(\mathbb{K})$ ile $SL_2(\mathbb{K})/\zeta$ arasındaki izomorfizmi göstermek için

$$\tilde{f} : SL_2(\mathbb{K})/\zeta \longrightarrow \text{Möb}(\mathbb{K}), M \longrightarrow \tilde{f}(M\zeta) = f(M)$$

fonksiyonu tanımlandığında $M, N \in SL_2(\mathbb{K})$ için

$$\begin{aligned} M\zeta &= N\zeta \implies (N^{-1}M)\zeta \in \ker f \implies f(N^{-1}M) = I \\ \implies f(M) &= f(N) \implies \tilde{f}(M\zeta) = \tilde{f}(N\zeta) \end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{f}$ fonksiyonu iyi tanımlı olur. Buna ek olarak $M, N \in SL_2(\mathbb{K})$ için

$$\begin{aligned} \tilde{f}((M\zeta)(N\zeta)) &= \tilde{f}((MN)\zeta) = f(MN) = f(M) \circ f(N) \\ &= \tilde{f}(M\zeta) \circ \tilde{f}(N\zeta) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{f}(M\zeta) &= \tilde{f}(N\zeta) \implies f(M) = f(N) \implies (f(N))^{-1} \circ f(M) = I \\ \implies f(N^{-1}) \circ f(M) &= I \implies f(N^{-1}M) = I \implies N^{-1}M \in \ker f \\ \implies M\zeta &= N\zeta \end{aligned}$$

olur. $\tilde{f}$ fonksiyonunun örten olduğu açıktır. Bunlar, $\tilde{f}$ fonksiyonunun izomorfizma olduğu-

nu kanıtlar.

Teorem 4.71. $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ bir birim timelike hibrit sayı, $\mathbf{b} \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}$, $\arg \mathbf{a} = \theta/2$ olmak üzere Möbius dönüşümü

$$\begin{aligned} F_M : \mathbb{P}_{\mathbf{v}} &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{v}} \\ \mathbf{z} &\longrightarrow F_M(\mathbf{z}) = M(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix}, \|\mathbf{z}\| \neq 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{z}$ noktasını düzlemde θ kadar döndürür ve $\mathbf{b}$ yönünde öteler.

İspat Eğer $\mathbf{a}$ sayısı $\mathbb{P}_{\mathbf{i}}$ üzerinde bir birim eliptik hibrit sayı ise o zaman $\mathbf{a} = \cos(\theta/2) + \mathbf{i} \sin(\theta/2)$ yazılabilir. $\|\mathbf{z}\| \neq 0$ olmak üzere M dönüşümü altında $\mathbf{z}$ sayısının görüntüsü

aşağıdaki iki aşamada bulunabilir. İlk olarak $\begin{bmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{a}} \end{bmatrix}$ matrisi ile çarpımın sonucu

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{i} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\theta}{2}) \mathbf{z} \\ \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{i} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\theta}{2}) \mathbf{z} \\ \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{i} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow (\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta) \mathbf{z}$$

noktası olur. Sonuç olarak $\mathbf{z}$ sayısı $x^2 + y^2 = \|\mathbf{z}\|^2$ çemberi üzerinde orijin etrafında θ kadar dönmüş olur. İkinci olarak $\mathbf{b} = b_1 + b_2 \mathbf{i}$ olmak üzere $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ile $(\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta) \mathbf{z}$ sayısının çarpımın sonucu

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 + b_2 \mathbf{i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta) \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta) \mathbf{z} + (b_1 + b_2 \mathbf{i}) \\ 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu $(\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta) \mathbf{z}$ noktasının $\mathbb{P}_i$ düzlemi üzerinde $\mathbf{b}$ vektörü ile ötelendiğini gösterir.

Benzer şekilde, eğer $\mathbf{a}$ sayısı $\mathbb{P}_h$ düzlemi üzerinde birim timelike hiperbolik hibrit sayı ise o zaman $\mathbf{a} = (\cosh(\theta/2) + \mathbf{h} \sinh(\theta/2))$ yazılabilir. $\|\mathbf{z}\| \neq 0$ olmak üzere M dönüşümü altında $\mathbf{z}$ sayısının görüntüsü aşağıdaki iki aşamada ele alınabilir. İlk olarak $\begin{bmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{a}} \end{bmatrix}$ matrisi ile çarpımın sonucu

$$\begin{bmatrix} \cosh \frac{\theta}{2} + \mathbf{h} \sinh \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cosh \frac{\theta}{2} - \mathbf{h} \sinh \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cosh \frac{\theta}{2} + \mathbf{h} \sinh \frac{\theta}{2}) \mathbf{z} \\ \cosh \frac{\theta}{2} - \mathbf{h} \sinh \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\cosh \frac{\theta}{2} + \mathbf{h} \sinh \frac{\theta}{2}) \mathbf{z} \\ \cosh \frac{\theta}{2} - \mathbf{h} \sinh \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow (\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) \mathbf{z}$$

olur. Sonuç olarak $\mathbf{z}$ sayısı $x^2 - y^2 = \|\mathbf{z}\|^2$ hiperbolü üzerinde orijin etrafında θ kadar dönmüş olur. İkinci olarak $\mathbf{b} = b_1 + b_2 \mathbf{h}$ olmak üzere $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ile $(\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) \mathbf{z}$ sayısının çarpımın sonucu

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 + b_2 \mathbf{h} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) \mathbf{z} + (b_1 + b_2 \mathbf{h}) \\ 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu $(\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) \mathbf{z}$ noktasının $\mathbb{P}_{\mathbf{h}}$ düzlemi üzerinde $\mathbf{b}$ vektörü ile ötelendiğini gösterir.

Eğer $\mathbf{a}$ sayısı $\mathbb{P}_{\varepsilon}$ düzlemi üzerinde bir birim timelike parabolik sayı ise o zaman $\mathbf{a} = 1 + (\theta/2) \varepsilon$ yazılabilir. $\|\mathbf{z}\| \neq 0$ olmak üzere M dönüşümü altında $\mathbf{z}$ sayısının görüntüsü aşağıdaki iki aşamada ele alınabilir. İlk olarak $\begin{bmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{a}} \end{bmatrix}$ matrisi ile çarpımın sonucu

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\theta}{2} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\theta}{2} \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \frac{\theta}{2} \varepsilon) \mathbf{z} \\ 1 - \frac{\theta}{2} \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1 + \frac{\theta}{2} \varepsilon) \mathbf{z} \\ 1 - \frac{\theta}{2} \varepsilon \end{bmatrix} \longrightarrow (1 + \frac{\theta}{2} \varepsilon) \mathbf{z} (1 + \frac{\theta}{2} \varepsilon) = (1 + \theta \varepsilon) \mathbf{z}$$

olur. Sonuç olarak $\mathbf{z}$ sayısı $x^2 = \|\mathbf{z}\|^2$ dual çemberi üzerinde orijin etrafında θ kadar dönmüş olur. İkinci olarak $\mathbf{b} = b_1 + b_2 \varepsilon$ olmak üzere $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ile $(1 + \theta \varepsilon) \mathbf{z}$ sayısının çarpımın sonucu

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 + b_2 \varepsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 + \theta \varepsilon) \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \theta \varepsilon) \mathbf{z} + b_1 + b_2 \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu $(1 + \theta \varepsilon) \mathbf{z}$ noktasının $\mathbb{P}_{\varepsilon}$ düzlemi üzerinde $\mathbf{b}$ vektörü ile ötelendiğini gösterir. $\square$

Sonuç 4.72. *Teorem 4.71’de belirtilen dönüşüm altında elde edilen ardışık üç nokta $A = a_1 + a_2 \mathbf{v}$, $B = b_1 + b_2 \mathbf{v}$, $C = c_1 + c_2 \mathbf{v}$ olsun. Başka bir ifade ile $B = F(A)$ ve $C = F(B)$ olsun. Bu üç nokta aşağıdaki konikler üzerinde yer alır: Eğer $\mathbf{v}$ eliptik veya hiperbolik ise*

$$x_0 = \frac{\frac{\|A\|_{\mathbf{v}}^2 - \|B\|_{\mathbf{v}}^2}{2a_2 - 2b_2} - \frac{\|B\|_{\mathbf{v}}^2 - \|C\|_{\mathbf{v}}^2}{2b_2 - 2c_2}}{\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} - \frac{b_1 - c_1}{b_2 - c_2}}, y_0 = \mathbf{v}^2 \left(\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} \right) x_0 + \frac{\|A\|_{\mathbf{v}}^2 - \|B\|_{\mathbf{v}}^2}{2(a_2 - b_2)}$$

$$R = \left| \frac{\|AB\|_{\mathbf{v}} \|AC\|_{\mathbf{v}} \|BC\|_{\mathbf{v}}}{2 \det(A, B, C)} \right|$$

ve eğer $\mathbf{v}$ parabolik ise

$$t_1 = \frac{a_2 - 2b_2 + c_2}{2(b_1 - a_1)^2}, t_2 = \frac{a_1 a_2 - 3a_2 b_1 - a_1 c_2 + 4b_1 b_2 - b_1 c_2}{2(a_1 - b_1)^2}$$

olmak üzere A, B, C

$$(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = R^2 \quad , \text{v eliptik ise}$$

$$(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2 = R^2 \quad , \text{v hiperbolik ise}$$

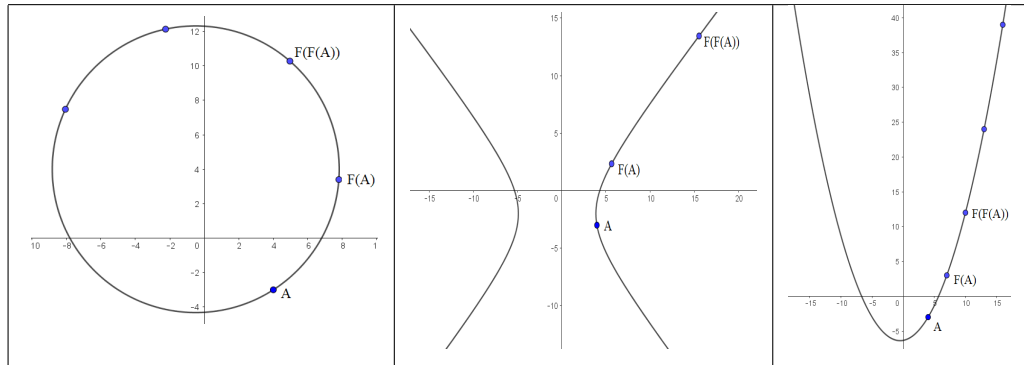
$$Y - a_2 = t_1 (X^2 - a_1^2) + t_2 (X - a_1) \quad , \text{v parabolik ise}$$

konikleri üzerinde bulunur.

Örnek 4.73. Teorem 4.71 için aşağıdaki örneklendirme yapılabilir:

Dönüşüm	A	$F(A)$	$F^2(A)$	Denklem
$F(z) = \begin{bmatrix} 2+i & 8+i \\ 0 & 2-i \end{bmatrix}$	$4-3i$	$\frac{39+17i}{5}$	$\frac{124+257i}{25}$	$(x+\frac{1}{2})^2 + (y-4)^2 = \frac{277}{4},$
$F(z) = \begin{bmatrix} \varepsilon+2 & \varepsilon+6 \\ 0 & 2-\varepsilon \end{bmatrix}$	$4-3\varepsilon$	$7+3\varepsilon$	$10+12\varepsilon$	$y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{19}{3},$
$F(z) = \begin{bmatrix} h+2 & h+4 \\ 0 & 2-h \end{bmatrix}$	$4-3h$	$\frac{17+7h}{3}$	$\frac{140+121h}{9}$	$(x+\frac{1}{2})^2 - (y+2)^2 = \frac{77}{4}.$

Ayrıca $F^3(A)$ ve $F^4(A)$ noktalarının da belirtilen denklemi sağladığı görülebilir. Konikler aşağıda Şekil 4.11’de gösterilmiştir.



Şekil 4.11. $F(z)$ Möbius dönüşümünün görüntüleri

Önerme 4.74.

$$\begin{aligned}
 G : \mathbb{P}_{\mathbf{v}} &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{v}} \\
 \mathbf{z} &\longrightarrow G(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{d} \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}, \|\mathbf{z}\| \neq 0 \\
 &= -\frac{\bar{\mathbf{z}}}{\|\mathbf{z}\|^2} + \mathbf{d}
 \end{aligned}$$

olmak üzere $G \circ F_M$ dönüşümü bir Möbius dönüşümüdür.

Cayley Dönüşümü Kompleks sayılarda üst yarı düzlemi birim diske

($\mathbb{D} = \{z : \|z\| < 1\}$) dönüştüren Cayley dönüşümü

$$\begin{aligned} C : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longrightarrow C(z) = \frac{z - i}{z + i} \end{aligned}$$

ile tanımlanır. Aynı zamanda, o bir Möbius dönüşümüdür ve dönüşüme karşılık gelen matris $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ olur. Benzer bir tanım hibrit sayılarda da verilebilir.

Tanım 4.75. v pür hibrit sayı ve $\|v + z\| \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} C : \mathbb{P}_v &\longrightarrow \mathbb{P}_v \\ z &\longrightarrow C(z) = (z - v)(z + v)^{-1} \end{aligned} \quad (4.44)$$

şeklinde tanımlanan C fonksiyonuna Cayley dönüşümü adı verilir.

Eğer $z \in \mathbb{R}$ ise o zaman v vektörünün Lorentziyen karakterine göre Cayley dönüşümü

$$C(z) = \frac{(z - v)^2}{z^2 - v^2} = \begin{cases} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} - \frac{2zi}{z^2 + 1}, & v = i \\ \frac{z^2 - 2z\varepsilon}{z^2 + 1} = 1 - \frac{2}{z}\varepsilon, & v = \varepsilon, z \neq 0 \\ \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} - \frac{2zh}{z^2 - 1}, & v = h, z \neq 1 \end{cases}$$

olur. Böylece, v eliptik ise $C(z)$ noktaları birim çember üzerindedir, v parabolik ise $C(z)$ noktaları birim dual çember üzerindedir, v hiperbolik ise $C(z)$ noktaları birim hiperbol üzerindedir. Sonuç olarak, bu Cayley dönüşümleri reel ekseni düzlemin birim çemberine dönüştürür.

Sonuç 4.76. (4.44) dönüşümü bir Möbius dönüşümüdür ve bu dönüşüme karşılık gelen matris $\begin{bmatrix} 1 & -v \\ 1 & v \end{bmatrix}$ olur. Ayrıca parabolik timelike hibrit sayılar için Kisil (2012)'de olduğu gibi

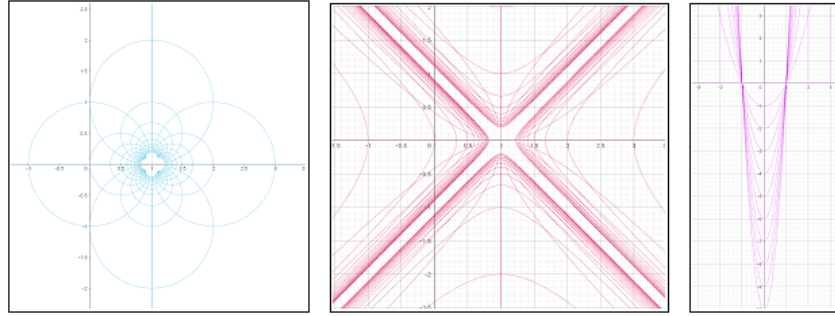
$$\begin{aligned} C_\varepsilon : \mathbb{P}_\varepsilon &\longrightarrow \mathbb{P}_\varepsilon \\ z &\longrightarrow C(z) = (z - \varepsilon)(-\varepsilon z + 1)^{-1} \end{aligned}$$

Cayley dönüşümü de verilebilir. C_ε dönüşümü reel ekseni $(x, -1 + x^2)$ parabolüne resmeder. Bu Möbius dönüşümüne karşılık gelen matris $\begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{bmatrix}$ olur. Aynı zamanda

Möbius dönüşümü altında $x = a$ ve $y = b$ doğrularının görüntüleri Çizelge 4.6 ve Şekil 4.11’de verilmiştir.

Çizelge 4.6. Möbius dönüşümü altında eksenlere paralel doğruların görüntüleri

(x, y) noktasının görüntüsü	Düzlem
$\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1}, \frac{-2x}{x^2 + y^2 + 2y + 1} \right)$	Eliptik
$(x, -1 + y + x^2)$	Parabolik
$\left(\frac{y^2 - x^2 - 1}{-x^2 + y^2 + 2y + 1}, \frac{2x}{-x^2 + y^2 + 2y + 1} \right)$	Hiperbolik



Şekil 4.12. $x = a$ ve $y = b$ doğrularının bulundukları düzlemin türüne göre Möbius dönüşümü altındaki görüntüleri.

Teorem 4.77. $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_i$ bir birim eliptik hibrit sayı, $\arg \mathbf{a} = \theta/2$ ve $\mathbf{b} \in \mathbb{P}_h$ bir pür hiperbolik vektör olsun.

$$N_i^h : \mathbb{P}_i \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\mathbf{z} \longrightarrow N_i^h(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Möbius dönüşümü $\mathbf{z}$ sayısını θ açısı kadar döndürür ve $\mathbf{b}$ vektörü ile öteler. $\mathbf{z}$ noktası bir helis üzerinde hareket eder.

İspat $\mathbf{a}$ sayısı $\mathbb{P}_i$ üzerinde olduğu için, $\mathbf{a} = \cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)$ yazılabilir. N_i^h dönüşümünde ilk matris çarpımı Teorem 4.71’de olduğu gibi $(\cos \theta + i \sin \theta) \mathbf{z}$ sayısı olur.

Buna göre z sayısı $x^2 + y^2 = \|z\|^2$ çemberi üzerinde orijin etrafında θ açısı kadar döner. $(\cos \theta + i \sin \theta) z$ noktası b vektörü ile ötelendiğinde

$$\begin{bmatrix} 1 & b\mathbf{h} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\cos \theta + i \sin \theta) z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos \theta + i \sin \theta) z + b\mathbf{h} \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece, $N_i^h(z) = (\cos \theta + i \sin \theta) z + b\mathbf{h}$ olur. Şimdi $(N_i^h)^n(z)$ $n \in \mathbb{Z}^+$ noktalarının bir helis üzerinde olduğu gösterilmelidir. $i\mathbf{h} = \varepsilon + i$, $i\mathbf{h}i = \mathbf{h}$ olduğu için

$$\begin{aligned} (N_i^h)^2(z) &= (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) z + 2b\mathbf{h}, \\ (N_i^h)^3(z) &= (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) z + 3b\mathbf{h} \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle, $\arg z = \alpha$ olmak üzere $(N_i^h)^n(z)$ $n \in \mathbb{Z}$ noktaları

$$\varphi(t) = (\cos(\alpha + t\theta), \sin(\alpha + t\theta), 0, bt)$$

eğrisi üzerinde olur. Bu eğirinin bir helis olduğu açıktır. $\square$

Teorem 4.78. $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_h$ bir birim timelike hiperbolik sayı, $\arg \mathbf{a} = \theta/2$ ve $\mathbf{b}$ bir pür eliptik vektör olsun.

$$\begin{aligned} N_h^i : \mathbb{P}_h &\longrightarrow \mathbb{K} \\ z &\longrightarrow N_h^i(z) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Möbius dönüşümü z sayısını θ açısı kadar döndürür ve $\mathbf{b}$ vektörü ile öteler. z noktası bir helis üzerinde hareket eder.

İspat $\mathbf{a}$ bir birim timelike hiperbolik sayı olduğu için $\mathbf{a} = \cosh(\theta/2) + \mathbf{h} \sinh(\theta/2)$ yazılabilir. N_h^i dönüşümünde ilk matris çarpımı Teorem 4.71'de olduğu gibi $(\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) z$ sayısı olur. Buna göre z sayısı $x^2 - y^2 = \|z\|^2$ hiperbolü üzerinde orijin etrafında θ açısı kadar döner. $(\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) z$ noktası $\mathbf{b}$ vektörü ile ötelendiğinde

$$\begin{bmatrix} 1 & b\mathbf{i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) z + b\mathbf{i} \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece, $N_{\mathbf{h}}^{\mathbf{i}}(\mathbf{z}) = (\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) \mathbf{z} + b\mathbf{i}$ olur. Şimdi $(N_{\mathbf{h}}^{\mathbf{i}})^n(\mathbf{z})$ $n \in \mathbb{Z}$ noktalarının bir helis üzerinde olduğu gösterilmelidir. $\mathbf{i}\mathbf{h} = \varepsilon + \mathbf{i}$, $\mathbf{h}\mathbf{i}\mathbf{h} = -\mathbf{i}$ olduğu için

$$\begin{aligned} (N_{\mathbf{h}}^{\mathbf{i}})^2(\mathbf{z}) &= (\cosh 2\theta + \mathbf{h} \sinh 2\theta) \mathbf{z} + 2b\mathbf{i}, \\ (N_{\mathbf{h}}^{\mathbf{i}})^3(\mathbf{z}) &= (\cosh 3\theta + \mathbf{h} \sinh 3\theta) \mathbf{z} + 3b\mathbf{i} \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle, $\arg \mathbf{z} = \alpha$ olmak üzere $(N_{\mathbf{h}}^{\mathbf{i}})^n(\mathbf{z})$ $n \in \mathbb{Z}$ noktaları

$$\varphi(t) = (\cosh(\alpha + t\theta), bt, 0, \sinh(\alpha + t\theta))$$

eğrisi üzerinde olur. Bu eğrinin bir helis olduğu açıktır. □

Teorem 4.79. $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_{\mathbf{h}}$ bir birim timelike hiperbolik sayı $\arg \mathbf{a} = \theta$ ve $\mathbf{b}$ bir pür parabolik sayı olsun.

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{h}}^{\varepsilon} : \mathbb{P}_{\mathbf{h}} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{z} &\longrightarrow N_{\mathbf{h}}^{\varepsilon}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Möbius dönüşümü $\mathbf{z}$ sayısını θ açısı kadar döndürür ve $\mathbf{b}$ vektörü ile öteler. $\mathbf{z}$ noktası bir helis üzerinde hareket eder.

İspat $\mathbf{a}$ bir birim timelike hiperbolik sayı olduğu için $\mathbf{a} = \cosh(\theta/2) + \mathbf{h} \sinh(\theta/2)$ yazılabilir. $N_{\mathbf{h}}^{\varepsilon}(\mathbf{z})$ dönüşümünde ilk matris Teorem 4.71’de olduğu gibi $(\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) \mathbf{z}$ sayısı olur. Buna göre $\mathbf{z}$ sayısı $x^2 - y^2 = \|\mathbf{z}\|^2$ hiperbolü üzerinde orijin etrafında θ açısı kadar döner. $(\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) \mathbf{z}$ noktası $\mathbf{b}$ vektörü ile ötelendiğinde

$$\begin{bmatrix} 1 & b\varepsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) \mathbf{z} + b\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece, $N_{\mathbf{h}}^{\varepsilon}(\mathbf{z}) = (\cosh \theta + \mathbf{h} \sinh \theta) \mathbf{z} + b\varepsilon$ olur. Şimdi $(N_{\mathbf{h}}^{\varepsilon})^n(\mathbf{z})$ $n \in \mathbb{Z}$ noktalarının bir helis üzerinde olduğu gösterilmelidir. $\mathbf{h}\varepsilon = \varepsilon$, $\mathbf{h}\varepsilon\mathbf{h} = -\mathbf{h}$ olduğu için

$$\begin{aligned} (N_{\mathbf{h}}^{\varepsilon})^2(\mathbf{z}) &= (\cosh 2\theta + \mathbf{h} \sinh 2\theta) \mathbf{z} + 2b\varepsilon, \\ (N_{\mathbf{h}}^{\varepsilon})^3(\mathbf{z}) &= (\cosh 3\theta + \mathbf{h} \sinh 3\theta) \mathbf{z} + 3b\varepsilon \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle, $\arg \mathbf{z} = \alpha$ olmak üzere $(N_{\mathbf{h}}^{\epsilon})^n(\mathbf{z})$ $n \in \mathbb{Z}$ noktaları

$$\varphi(t) = (\cosh(\alpha + t\theta), 0, bt, \sinh(\alpha + t\theta))$$

eğrisi üzerinde olur. Bu eğrinin bir helis olduğu açıktır. $\square$

Teorem 4.80. $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_{\epsilon}$ bir birim timelike parabolik hibrit sayı, $\arg \mathbf{a} = \theta$, $\mathbf{b} \in \mathbb{P}_{\epsilon}$ ve $\mathbf{c} = c\mathbf{h}$ bir pür hiperbolik sayı olsun.

$$N_{\epsilon}^{\mathbf{h}} : \mathbb{P}_{\epsilon} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\mathbf{z} \longrightarrow N_{\epsilon}^{\mathbf{h}}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Möbius dönüşümü $\mathbf{z}$ sayısını θ açısı kadar Sonuç 4.72’de belirtilen parabol döndürür ve $\mathbf{c}$ vektörü ile öteler. $\mathbf{z}$ noktası bir helis üzerinde hareket eder.

İspat $\mathbf{a}$ bir birim timelike parabolik sayı olduğu için $\mathbf{a} = (1 + (\theta/2)\epsilon)$ yazılabilir. $N_{\epsilon}^{\mathbf{h}}(\mathbf{z})$ dönüşümünde ilk iki matris çarpımı Teorem 4.71’den

$$\begin{aligned} (1 + \theta\epsilon)\mathbf{z} + b_1 + b_2\epsilon &= (1 + \theta\epsilon)(x + y\epsilon) + b_1 + b_2\epsilon \\ &= x + b_1 + (b_2 + y + x\theta)\epsilon \end{aligned}$$

olduğu görülür. $x + b_1 + (b_2 + y + x\theta)\epsilon$ sayısı $\mathbf{c} = c\mathbf{h}$ vektörü ile ötelendiğinde

$$\begin{bmatrix} 1 & c\mathbf{h} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + b_1 + (b_2 + y + x\theta)\epsilon \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + b_1 + (b_2 + y + x\theta)\epsilon + c\mathbf{h} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

elde edilir. Böylece, $N_{\epsilon}^{\mathbf{h}}(\mathbf{z}) = x + b_1 + (b_2 + y + x\theta)\epsilon + c\mathbf{h}$ olur. Şimdi $(N_{\epsilon}^{\mathbf{h}})^n(\mathbf{z})$ $n \in \mathbb{Z}$ noktalarının bir helis üzerinde olduğu gösterilmelidir. $\mathbf{h}\epsilon = \epsilon$, $\mathbf{h}\epsilon\mathbf{h} = -\mathbf{h}$ olduğu için

$$\begin{aligned} (N_{\epsilon}^{\mathbf{h}})^2(\mathbf{z}) &= (1 + \theta\epsilon)(x + b_1 + (b_2 + y + x\theta)\epsilon) + (b_1 + b_2\epsilon) + 2c\mathbf{h} \\ &= x + 2b_1 + (2b_2 + y + \theta b_1 + 2x\theta)\epsilon + 2c\mathbf{h}, \\ (N_{\epsilon}^{\mathbf{h}})^3(\mathbf{z}) &= (1 + \theta\epsilon)(x + 2b_1 + (2b_2 + y + \theta b_1 + 2x\theta)\epsilon) + (b_1 + b_2\epsilon) + 3c\mathbf{h} \\ &= (x + 3b_1 + (3b_2 + y + 3\theta b_1 + 3\theta x)\epsilon) + 3c\mathbf{h} \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle, $\arg \mathbf{z} = \alpha$ olmak üzere $(N_{\epsilon}^{\mathbf{h}})^n(\mathbf{z})$ $n \in \mathbb{Z}$ noktaları

$$\varphi(t) = \left(x + tb_1, 0, y + (b_2 + x\theta)t + b_1\theta \frac{t(t-1)}{2}, ct \right)$$

eğrisi üzerinde olur. Bu eğirinin bir helis olduğu açıktır. □

Önerme 4.81. $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \{\mathbf{i}, \epsilon, \mathbf{h}\}$

$$\begin{aligned} H : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{z} \longrightarrow H(\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{d} \in \mathbb{K}, \|\mathbf{z}\| \neq 0 \\ &= -\frac{\bar{\mathbf{z}}}{\|\mathbf{z}\|} + \mathbf{d} \end{aligned}$$

olmak üzere $H \circ N_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}}$ dönüşümü bir Möbius dönüşümüdür.

5. SONUÇLAR

Bu tezde aşağıdaki sonuçlar ortaya konmuştur.

1. 3 boyutlu hibrit uzay ve bu uzaydaki vektörel çarpım verilmiştir.
2. Hibrit uzaydaki vektörlerin Lorentziyen karakterleri arasındaki ilişki Teorem 4.7, 4.8'de belirlenmiştir.
3. Hibrit uzaydaki düzlemlerin Lorentziyen karakterleri, düzlem üzerindeki vektörlerin karakterleri arasındaki ilişki Tanım 4.9, Teorem 4.10'da belirlenmiştir.
4. $L_q(\mathbf{w}) = \mathbf{q}\mathbf{w}$ dönüşümünün $\mathbb{P}_v$ düzleminde $\mathbf{w}$ hibrit sayısını $\arg \mathbf{q}$ kadar orijin etrafında pozitif yönde döndürdüğü, $S_q(\mathbf{w}) = \mathbf{q}\mathbf{w}\bar{\mathbf{q}}$ dönüşümünün $\mathbb{P}_v^\perp$ düzleminde $\mathbf{w}$ hibrit sayısını $2 \arg \mathbf{q}$ kadar $\mathbf{v}_q$ etrafında pozitif yönde döndürdüğü belirlenmiştir.
5. Herhangi bir birim timelike $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\boldsymbol{\varepsilon} + q_4\mathbf{h}$ hibrit sayısı için S_q dönüşümünün matris temsili

$$R = \begin{bmatrix} (q_1 - q_4)^2 + q_2^2 & -2q_2^2 & 2q_2(q_1 - q_4) \\ -2q_3^2 + 2q_2q_3 - 2q_1q_4 & (q_1 + q_4)^2 - q_2^2 & 2q_1q_2 - 2q_1q_3 - 2q_3q_4 \\ 2q_1q_3 + 2q_2q_4 - 2q_3q_4 & -2q_2(q_1 + q_4) & q_1^2 - q_2^2 + 2q_3q_2 - q_4^2 \end{bmatrix}$$

matrisi olur.

6. $v_1^2 - v_3^2 - v_1v_2 = \lambda$, $1 - \cos \theta = c$, $\cosh \theta - 1 = ch$, $\sinh \theta = sh\theta$ olmak üzere Rodrigues dönme formülü yardımıyla sırasıyla eliptik, hiperbolik ve parabolik dönme matrisleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{bmatrix} c(v_3^2 + v_1v_2) - v_3 \sin \theta + 1 & -v_1^2 c & v_1 \sin \theta - cv_1v_3 \\ -(v_2^2 - v_1v_2)c - v_3 \sin \theta & -c\lambda + v_3 \sin \theta + 1 & (v_1 - v_2) \sin \theta - cv_2v_3 \\ v_2 \sin \theta - (v_3v_2 - v_3v_1)c & -cv_1v_3 - v_1 \sin \theta & -c(v_1^2 - 2v_1v_2) + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (v_3^2 + v_1v_2)ch - v_3sh\theta + 1 & -v_1^2\rho & -v_1v_3ch + v_1sh\theta \\ v_2(v_1 - v_2)ch - v_3sh\theta & v_3sh\theta - \lambda ch + 1 & -v_2v_3ch + (v_1 - v_2)sh\theta \\ v_3(v_1 - v_2)ch + v_2sh\theta & -v_1v_3ch - v_1sh\theta & -v_1(v_1 - 2v_2)ch + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\theta^2(v_3^2 + v_1v_2) - \theta v_3 + 1 & -\frac{1}{2}\theta^2 v_1^2 & -\frac{1}{2}\theta v_1(\theta v_3 - 2) \\ -\frac{1}{2}\theta(\theta v_2^2 - \theta v_1v_2 + 2v_3) & -\frac{1}{2}\theta^2\lambda + \theta v_3 + 1 & -\frac{1}{2}\theta(2v_2 - 2v_1 + \theta v_2v_3) \\ \frac{1}{2}\theta(2v_2 + \theta v_1v_3 - \theta v_2v_3) & -\frac{1}{2}\theta v_1(\theta v_3 + 2) & (-\frac{1}{2}v_1^2 + v_2v_1)\theta^2 + 1 \end{bmatrix}$$

7. $\mathbf{v}$ vektörü birim hiperbolik vektör olmadığı durumda, Cayley dönüşümü yardı-

miyla dönme matrisi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\frac{1}{1 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \begin{bmatrix} (v_1^2 + v_3^2 + 2v_3 + 1) & -2v_1^2 & -2v_1(v_3 + 1) \\ 2(-v_2^2 + v_1v_2 + v_3) & -(v_1^2 - v_3^2 + 2v_3 - 1) & -2(v_1 - v_2 + v_2v_3) \\ -2(v_2 - v_1v_3 + v_2v_3) & -2v_1(v_3 - 1) & -(v_1^2 - 2v_2v_1 + v_3^2 - 1) \end{bmatrix}$$

8. Bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının $C = (h, s)$ merkezli bir

$$\mathfrak{C} : -A^2(x - h)^2 + B^2(y - s)^2 \Delta = r, \quad r \in \{-1, 1\}$$

koniğine göre inversiyonu olan nokta $\Delta = -v_1^2 + 2v_1v_2 + v_3^2$, $\rho_P = -A^2(x_0 - h)^2 + B^2(y_0 - s)^2 \Delta$ olmak üzere

$$P' = \left(\frac{r(x_0 - h)}{\rho_P} + h, \frac{r(y_0 - s)}{\rho_P} + s \right)$$

olur.

9. Denklemi $\mathcal{C} : -A_0^2(x - h)^2 + \Delta B_0^2(y - s)^2 = r$ olan bir koniğin bir $\mathfrak{C} : -A^2x^2 + \Delta B^2y^2 = r$ koniğine göre inversiyonu olan koniğin denklemi, $\mathcal{C}$ ile $\mathfrak{C}$ homotetik ve $\rho_{(h,s)} = -A^2h^2 + B^2s^2\Delta$ olmak üzere

$$-A^2 \left(x - \frac{hr}{\frac{r}{k^2} - \rho_{(h,s)}} \right)^2 + \Delta B^2 \left(y - \frac{k^2rs}{\frac{r}{k^2} - \rho_{(h,s)}} \right)^2 = \frac{-r^2\rho_{(h,s)}}{\left(\frac{r}{k^2} - \rho_{(h,s)} \right)^2}$$

olur.

10. $\mathcal{P} : -A_0^2(x - h)^2 = a + y$ ve $\mathcal{C} : -A^2x^2 = r$ sırasıyla bir parabol ve dual çember olsun. Eğer $\mathcal{P}$ parabolü inversiyonun merkezinden geçiyorsa $\mathcal{C}$ dual çemberine göre inversiyonu olan doğrunun denklemi

$$y = 2A_0^2hx - \left(\frac{A_0}{A} \right)^2,$$

inversiyonun merkezinden geçmiyorsa $\mathcal{C}$ dual çemberine göre inversiyonu olan parabolün denklemi

$$y = A^2(A_0^2h^2 + a)x^2 + 2A_0^2hx - \left(\frac{A_0}{A} \right)^2$$

olur.

11. $\mathcal{C}$ ve $\mathfrak{C}$ homotetik olmayan iki konik ise $\mathcal{C}$ koniği inversiyonun merkezinden geçiyorsa o zaman $\mathcal{C}$ koniğinin inversinin 3. dereceden bir eğri, $\mathcal{C}$ koniği inversiyonun

merkezinden geçmiyorsa o zaman $\mathcal{C}$ koniği inversinin 4. dereceden bir eğri olduğu belirlenmiştir.

12. Elemanları hibrit sayı olan 2×2 hibrit matrislerin determinantlarını veren eşitlikler elde edilmiştir.

13. Hibrit sayılar üzerinde Möbius dönüşümü tanımlanmıştır.

14. $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ bir birim timelike hibrit sayı, $\mathbf{b} \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ ve $\arg \mathbf{a} = \theta/2$ olmak üzere Möbius dönüşümü

$$F_M : \mathbb{P}_{\mathbf{v}} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{z} \longrightarrow M(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix}, \|\mathbf{z}\| \neq 0$$

$\mathbf{z}$ noktasını düzlemde θ kadar döndürür ve $\mathbf{b}$ yönünde öteler. Bu dönüşüm sonucunda $\mathbf{z}$ noktası aşağıda belirtilen konikler üzerinde hareket eder. Teorem 4.71 de belirtilen dönüşüm altında elde edilen ardışık üç nokta $A = a_1 + a_2\mathbf{v}$, $B = b_1 + b_2\mathbf{v}$, $C = c_1 + c_2\mathbf{v}$ olsun. Eğer $\mathbf{v}$ eliptik veya hiperbolik ise

$$x_0 = \frac{\frac{\|A\|_{\mathbf{v}}^2 - \|B\|_{\mathbf{v}}^2}{2a_2 - 2b_2} - \frac{\|B\|_{\mathbf{v}}^2 - \|C\|_{\mathbf{v}}^2}{2b_2 - 2c_2}}{\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} - \frac{b_1 - c_1}{b_2 - c_2}}, y_0 = \mathbf{v}^2 \left(\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} \right) x_0 + \frac{\|A\|_{\mathbf{v}}^2 - \|B\|_{\mathbf{v}}^2}{2(a_2 - b_2)}$$

$$R = \left| \frac{\|AB\|_{\mathbf{v}} \|AC\|_{\mathbf{v}} \|BC\|_{\mathbf{v}}}{2 \det(A, B, C)} \right|$$

ve eğer $\mathbf{v}$ parabolikse

$$t_1 = \frac{a_2 - 2b_2 + c_2}{2(b_1 - a_1)^2}, t_2 = \frac{a_1 a_2 - 3a_2 b_1 - a_1 c_2 + 4b_1 b_2 - b_1 c_2}{2(a_1 - b_1)^2}.$$

olmak üzere A, B, C

$$(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = R^2 \quad , \mathbf{v} \text{ eliptik ise}$$

$$(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2 = R^2 \quad , \mathbf{v} \text{ hiperbolik ise}$$

$$Y - a_2 = t_1 (X^2 - a_1^2) + t_2 (X - a_1) \quad , \mathbf{v} \text{ parabolik ise}$$

konikleri üzerinde olur.

15. $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ bir birim timelike hibrit sayı, $\arg \mathbf{a} = \theta/2$ ve $\mathbf{b} \in \mathbb{P}_{\mathbf{w}}$ bir pür hiperbolik vektör ve $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ vektörleri aynı Lorentziyen karakterde olmasın

$$N_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}} : \mathbb{P}_{\mathbf{v}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\mathbf{z} \longrightarrow N_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Möbius dönüşümünün z sayısını θ açısı kadar döndürdüğü ve b vektörü ile ötelediği görülmüştür. Ayrıca z noktasının bu hareketi bir helis üzerinde olmuştur.



6. KAYNAKLAR

Ahlfors, L.V. (1981). Möbius transformations in several dimensions.

Ahlfors, L.V. (1985). Möbius Transformations and Clifford Numbers.

Aslaksen, H. (1996). Quaternionic determinants. The Mathematical Intelligencer, 18, 57-65.

Babusci, D., Dattoli, G., Di Palma, E. and Sabia, E. (2011). Complex-Type Numbers and Generalizations of the Euler Identity. Advances in Applied Clifford Algebras, 22, 271-281.

Brewer, S. (2012). Projective Cross-ratio on Hypercomplex Numbers. Advances in Applied Clifford Algebras, 23, 1 - 14.

Borota, N.A., Flores, E.V. and Osler, T.J. (2000). Spacetime numbers the easy way. Mathematics and Computer Education, 34, 159-168.

Borota, N.A. and Osler, T.J. (2002). Functions of a spacetime variable. Mathematics and Computer Education, 36, 231.

Brodsky, V. and Shoham, M. (1999). Dual numbers representation of rigid body dynamics. Mechanism and Machine Theory, 34, 693-71.

Burton, D. (2011). The History of Mathematics: An Introduction. Birleşik Krallık: McGraw-Hill Education.

Casanova, G. (2008). Conjugated of Conics. Advances in Applied Clifford Algebras, 18, 143-146.

Casanova, G. (2001). Complement on elliptic and hyperbolic inversions. Advances in Applied Clifford Algebras, 11, 293-295.

Cao, W. (2007). On the classification of four-dimensional Möbius transformations. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 50, 49 - 62.

- Cao, W., Parker, J.R. and Wang, X. (2004). On the classification of quaternionic Möbius transformations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 137, 349 - 361.
- Catoni, F., Cannata, R., Catoni, V. and Zampetti, P. (2004). Two-dimensional hypercomplex numbers and related trigonometries and geometries. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 14, 47-68.
- Catoni, F. (2008). *The Mathematics of Minkowski Space-Time: With an Introduction to Commutative Hypercomplex Numbers*.
- Catoni, F., Cannata, R., Catoni, V. and Zampetti, P. (2005). Hyperbolic trigonometry in two-dimensional space-time geometry. *arXiv: Mathematical Physics*.
- Childress, N.A. (1965). Inversion with Respect to the Central Conics. *Mathematics Magazine*, 38, 147-149.
- Cockle, J. (1849). On a new imaginary in algebra 34:37–47. *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag.* 3(33), 435–9
- Descartes, R. (1637). *La Géométrie*. Paris: A. Herman, Librairie Scientifique.
- Dimentberg, F.M. (1978). The method of screws and calculus of screws applied to the theory of three dimensional mechanisms. *Adv. Mech.* 3–4, 91–106.
- Erdoğan, M. and Özdemir, M. (2016). Matrices over Hyperbolic Split Quaternions. *Filomat*, 30, 913-920.
- Erdoğan, M. & Özdemir, M. (2020). Simple, Double and Isoclinic Rotations with a Viable Algorithm . *Mathematical Sciences and Applications E-Notes* , 8 (1) , 11-24.
- Euler, L. (1972). *Elements of Algebra*. (Rev. John Hewlett, B.D. F.A.S. &c, Trans.). Springer-Verlag. (Original work published 1770).
- Fjelstad, P. and Gal, S.G. (2001). Two-dimensional geometries, topologies, trigonometries and physics generated by complex-type numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 11, 81-107.

- Fjelstad, P. (1986). Extending special relativity via the perplex numbers. *American Journal of Physics*, 54, 416-422.
- Fjelstad, P. and Gal, S.G. (1998). n-Dimensional dual complex numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 8, 309-322.
- Fjelstad, P. and Gal, S.G. (1998). n-Dimensional hyperbolic complex numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 8, 47-68.
- Fischer, I.S. (1998). *Dual-Number Methods in Kinematics, Statics and Dynamics*.
- Gargoubi, H. and Kossentini, S. (2016). f -Algebra Structure on Hyperbolic Numbers.
- González-Velasco, A. E. (2011) *Journey through Mathematics*. Springer Science+Business Media.
- Ghosh, C. (2017). Bicomplex Mobius Transformation. arXiv: Complex Variables.
- Gromova, N.A. (2010). Possible quantum kinematics. II. Nonminimal case.
- Gromov, N.A. and Kuratov, V.V. (2006). Possible quantum kinematics. *Journal of Mathematical Physics*, 47, 013502.
- Gromov, N.A. and Kuratov, V.V. (2005). All possible Cayley-Klein contractions of quantum orthogonal groups. *Physics of Atomic Nuclei*, 68, 1689-1699.
- Gürses, N. and Yüce, S. (2015). One-Parameter Planar Motions in Generalized Complex Number Plane CJ. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25, 889-903.
- Harkin, A. and Harkin, J.B. (2004). *Geometry of Generalized Complex Numbers*. *Mathematics Magazine*, 77, 118 - 129.
- Hudson, R. (1966). *Generalised translation-invariant mechanics*. D. Phil. thesis, Bodleian Library, Oxford.
- Hudson, R. (2004). Translation invariant phase space mechanics. *Quantum Theory Reconsid. Found.* 2, 301–314.

- Kisil, V.V. (2012). Geometry of möbius transformations : elliptic, parabolic and hyperbolic actions of $SL[2](\mathbb{R})$.
- Kisil, V.V. (2009). Induced Representations and Hypercomplex Numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23, 417-440.
- Kisil, V.V. (2006). Two-dimensional conformal models of space-time and their compactification. *Journal of Mathematical Physics*, 48, 073506-073506.
- Kisil, V.V. (2010). Erlangen program at large-2: inventing a wheel. The parabolic one. *Trans. Inst. Math. NAS Ukr.* 7(2), 89–98.
- Kisil, V.V. (2010) Erlangen program at large-1: geometry of invariants. *SIGMA Symmetry Integr. Geom. Methods Appl.* 6(076), 45.
- Klawitter, D. (2014). Reflections in conics, quadrics and hyperquadrics via Clifford algebra. *Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry*, 57, 221-242.
- Lavrentiev, M.A. Shabat, B.V. (1973). *Problems of Hydrodynamics and Their Mathematical Models*. Nauka, Moscow.
- López, R . (2014). Differential Geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *International Electro*
- Mustafa, K.A. (2018). One-parameter Groups of Möbius Maps in Two-Dimensional Real Commutative Algebra.
- Mustafa, K.A. (2018). The Groups of Two by Two Matrices in Double and Dual Numbers, and Associated Möbius Transformations. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 28.nic *Journal of Geometry*, 7 (1) , 44-107.
- Miller, W.A. and Boehning, R.L. (1968). Gaussian, Parabolic, and Hyperbolic Numbers. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK–12*, 61, 377-382.
- Modenov, P.S., Parkhomenko, A.S., & Slater, M.B. (1965). Euclidean and affine transformations.

- Motter, A.E. and Rosa, M. (1998). Hyperbolic Calculus. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 8, 109-128.
- Neas, S. (2017). Anallagmatic Curves and Inversion About the Unit Hyperbola. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, 18, 6.
- Nešović, E. (2016). On Rotation About Lightlike Axis in Three-Dimensional Minkowski Space. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26, 237-251.
- Olariu, S. (2000). Hyperbolic complex numbers in two dimensions. *arXiv: Complex Variables*.
- Olariu, S. (2002). *Complex Numbers in n Dimensions*, North Holland, Series: North-Holland Mathematics Studies, vol. 190. *arXiv:math/0011044*.
- Olariu, S. (2000). Commutative complex numbers in four dimensions. *arXiv:math/0008121v1*.
- O’neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press.
- Özdemir, M. and Ergin, A.A. (2006). Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space. *Journal of Geometry and Physics*, 56, 322-336.
- Özdemir, M. (2009). The roots of a split quaternion. *Appl. Math. Lett.*, 22, 258-263.
- Özdemir, M. (2015). An Alternative Approach to Elliptical Motion. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26, 279-304.
- Özdemir, M. (2018). Finding n-th Roots of a 2×2 Real Matrix Using De Moivre’s Formula. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 29, 1-25.
- Özdemir, M., Erdoğan, M. and Şimşek, H. (2014). On the eigenvalues and eigenvectors of a lorentzian rotation matrix by using split quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 24, 179-192.
- Özdemir, M. (2018). Introduction to Hybrid Numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 28, 1-32.

- Öztürk, İ. and Özdemir, M. (2020). Similarity of hybrid numbers. *Math. Methods Appl. Sci.*, 15, 8867–8881.
- Öztürk, İ., and Özdemir, M. (2022). Elliptical rotations with hybrid numbers. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*.
- Özdemir, M. (2020). *Kuaterniyonlar ve Geometri*. Altın Nokta Yayınevi, İzmir, 304 s.
- Özdemir, M. (2021). *Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler*. Altın Nokta Yayınevi, İzmir, 304 s.
- Parker, J.R. and Short, I. (2009). Conjugacy Classification of Quaternionic Möbius Transformations. *Computational Methods and Function Theory*, 9, 13-25.
- Pilipchuk, V. N. (2010). *Nonlinear dynamics: between linear and impact limits* (Vol. 52). Springer Science & Business Media.
- Pilipchuk, V. N. (2011). Non-smooth spatio-temporal coordinates in nonlinear dynamics. *arXiv preprint arXiv:1101.4597*.
- Ramírez, J. L. (2014). Inversions in an ellipse. In *Forum Geometricorum* Vol. 14, pp. 107-115.
- Ramírez, J. and Rubiano, G. (2014). Elliptic inversion of two-dimensional objects.[A graphical point of view with Mathematica]. *Int J Geom*, 3(1), 12-27.
- Rochon, D. and Shapiro, M. (2004). On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers. *Anal. Univ. Oradea Fasc. Math.* 11, 71–110.
- Rooney, J. (1978). On the Three Types of Complex Number and Planar Transformations. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 5, 89 - 99.
- Rooney, J. (2014). Generalised complex numbers in mechanics. *Adv. Theory Pract. Robots Manip. Mech. Machine Sci. Book Series*, vol. 22, pp. 55–62.
- Savić, A., Bilgin, M., Ersoy, S., & Paunović, M. (2022). Topologies of Bihyperbolic Numbers. *Mathematics*, 10(22), 4224.

- Study, E. (1904). Geometrie der Dynamen: die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. *The Mathematical Gazette*, 3, 15.
- Şimşek, H. and Özdemir, M. (2016). Generating hyperbolical rotation matrix for a given hyperboloid. *Linear Algebra and its Applications*, 496, 221-245.
- Şimşek, H. and Ozdemir, M. (2017). Shape curvatures of the Lorentzian plane curves. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1* 66(2), 276–288.
- Sobczyk, G. (1995). The Hyperbolic Number Plane. *College Mathematics Journal*, 26, 268-280.
- Ulrych, S. (2007). Representations of Clifford Algebras with Hyperbolic Numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 18, 93-114.
- Ulrych, S. (2000). Relativistic quantum physics with hyperbolic numbers. *Physics Letters B*, 625, 313-323.
- Ulrych, S. (2010). Considerations on the hyperbolic complex Klein–Gordon equation. *Journal of Mathematical Physics*, 51, 063510.
- Veldkamp, G.G. (1976). On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous, spatial kinematics. *Mechanism and Machine Theory*, 11, 141-156.
- Verstraelen, L. (2018). On Angles and Pseudo-Angles in Minkowskian Planes. *Mathematics*, 6(4), 52.
- Yaglom, I.M. (1979). A simple non-Euclidean geometry and its physical basis : an elementary account of Galilean geometry and the Galilean principle of relativity.
- Yaglom, I.M. (1968). *Complex Numbers in Geometry*.
- Yaglom, I.M., & Shenitzer, A. (2009). Geometric Transformations IV: Axial circular transformations.
- Zaripov, R.G. (2017). Conformal Hyperbolic Numbers and Two-dimensional Finsler Geometry. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27, 1741-1760.

Zill, D.G. and Shanahan, P.D. (2006). A First Course in Complex Analysis With Applications.



ÖZGEÇMİŞ

İSKENDER ÖZTÜRK

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora	Akdeniz Üniversitesi
2019 - 2023	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Antalya
Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2017 - 2019	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Antalya
Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2012 - 2016	Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya
Lisans	Gazi Üniversitesi
2000 - 2004	Gazi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Bölümü, Ankara

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen	Kepez BİLSEM
2005 - Devam Ediyor	MEB öğretmen.

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

- Öztürk, İ., & Özdemir, M. (2020). Similarity of hybrid numbers. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 43, 8867 - 8881.
- Öztürk, İ., & Özdemir, M. (2022). On geometric interpretations of split quaternions. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 46, 408 - 422.
- Öztürk, İ., & Özdemir, M. (2022). Elliptical rotations with hybrid numbers. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics.

4. Öztürk, İ. (2022). Introduction to Cartan numbers and some geometric applications. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46, 7514 - 7542.
5. Çolakoğlu, H.B., Öztürk, İ., & Özdemir, M. (2022). Non-parabolic conical rotations. *J. Comput. Appl. Math.*, 420, 114766.
6. Öztürk, İ., & Özdemir, M. (2022). Affine transformations of hyperbolic number plane. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 28.

