

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYLARINDA VE HİLBERT C^* -MODÜLLERİNDE BESSEL
DİZİLERİ, RİESZ BAZLARI VE FRAME'LER

Sümeyye ÇAKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA

Ocak 2012

Tezin Başlığı: Hilbert Uzaylarında ve Hilbert C^* -Modüllerinde Bessel
dizileri, Riesz Bazları ve Frame'ler

Tezi Hazırlayan: Sümeyye ÇAKAN

Sınav Tarihi: Ocak 2012

Yukarıda adı geçen tez, J rimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi  yeleri (ilk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof. Dr. Bilal ALTAY ( n n  Üniv.) _____

Doç. Dr. Yılmaz YILMAZ ( n n  Üniv.) _____

Yrd. Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR ( n n  Üniv.) _____

 n n  Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Asım KÜNKÜL
Enstitü Müdürü

Canım anneme, babama, kardeşlerime ve eşime ...

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "*Hilbert Uzaylarında ve Hilbert C^* -Modüllerinde Bessel dizileri, Riesz Bazları ve Frame'ler*" başlıklı bu çalışmamın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Sümeyye ÇAKAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HİLBERT UZAYLARINDA VE HİLBERT C^* -MODÜLLERİNDE BESSEL
DİZİLERİ, RİESZ BAZLARI VE FRAME'LER

Sümeyye ÇAKAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

102+v sayfa

2012

Danışman: Doç. Dr. Yılmaz YILMAZ

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın giriş bölümünde; Hilbert uzaylarında ve Hilbert C^* -modüllerinde frame teorisinin gelişim süreci özetlendi.

İkinci bölümde; diğer bölümlerde geçen temel tanım, kavram ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde; Hilbert uzaylarında Bessel dizisi, ortonormal baz ve Riesz bazı kavramları tanıtılıp, bunlarla ilgili temel teorem ve sonuçlar verildi. Hilbert uzayların- da ortonormal bazların güncel bir uygulamasından bahsedildi.

Dördüncü bölümde; Hilbert uzaylarında frame'lerin genel teorisi sunuldu ve ikinci bölümde bahsedilen uygulamanın bir değerlendirmesi yapıldı.

Beşinci ve son bölümde ise Hilbert C^* -modüllerinde frame'ler, Bessel dizileri ve Riesz bazlarının genel teorisi verilerek, bu teorilerde Hilbert C^* -modüllerinde Hilbert uzaylarındaki durumdan farklı sonuçların geldiği vurgulandı.

ANAHTAR KELİMELEER: Hilbert Uzayları, Hilbert C^* -modülleri, Bessel dizileri, Ortonormal bazlar, Riesz bazları, Frame'ler, Sinyal işleme, Örnekleme.

ABSTRACT

MSc Thesis

THE BESSEL SEQUENCES, RIESZ BASES AND FRAMES IN HILBERT
SPACES AND HILBERT C^* -MODULES

Sümeyye ÇAKAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

102+v pages

2012

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

This thesis consist of five chapters. In the introduction development process of theory of frames in Hilbert spaces and Hilbert C^* -modules were summarized.

In the second chapter the basic definitions, concepts, theorems and examples which will be useful in the next chapters have been given.

In the third chapter some basic results and theorems about Bessel sequences, orthonormal bases and Riesz bases in Hilbert spaces have been given. Further, an actual application of orthonormal bases in Hilbert spaces have been stated.

In the fourth chapter a general theory of frames have been presented and the application was mentioned in the second chapter were assessed in the light of frames.

In the five and final chapter a general theory of frames, Bessel sequences and Riesz bases in Hilbert C^* -modules have been given. In these theories, its emphasized that Hilbert C^* -modules contain some results which are quite different from the theories of Hilbert spaces.

KEY WORDS: Hilbert Spaces, Hilbert C^* -Modules, Bessel sequences, Orthonormal Bases, Riesz Bases, Frames, Signal Processing , Sampling

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren ve çalışmalarımın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Yılmaz YILMAZ'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür ederim.

Ayrıca; lisansüstü eğitimim boyunca beni yönlendiren bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e;

Bu tezi yazdığım matematik programlarını kullanmamda bana yardımcı olan Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR ve Arş. Gör. Fulya ŞAHİN'e;

ve bu tezin hazırlanması sürecinde yardımlarını ve manevi desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen değerli arkadaşlarım Şahika AYTEKİN'e ve Arş. Gör. Hatice TAŞBOZAN'a teşekkür ederim.

Haklarımı asla ödeyemeyeceğim sevgili anneme, babama, ablama ve ailesine, erkek kardeşime ve eşim Arş. Gör. Ümit ÇAKAN'a maddi ve manevi her türlü destekleri için minnettarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	7
2.1 Normlu Uzay ve Banach Uzayları	9
2.1.1 Banach Uzayları Üzerindeki Operatörler	9
2.2 İç Çarpım Uzayları ve Hilbert Uzayları	11
2.2.1 Hilbert Uzayları Üzerindeki Operatörler	13
2.3 $L^p(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $l^2(I)$ Uzayları	15
2.4 Bir Serinin Şartsız ve Mutlak Yakınsaklığı Kavramı	16
3 HİLBERT UZAYLARINDA BESSEL DİZİLERİ, ORTONORMAL BAZLAR VE RİESZ BAZLARI	18
3.1 Hilbert Uzaylarında Bessel Dizileri	19
3.2 Ortonormal Bazlar ve Ortonormal Bazlar İçin Bazı Karakterizasyonlar	24
3.3 Riesz Bazları, Dualleri ve Riesz Bazları İçin Bazı Karakterizasyonlar	31
3.4 Ortonormal Bazlar ve Sinyal İşleme Üzerine Bir Uygulama	39
3.4.1 Sinyal ve Sinyal İşleme	39
3.4.2 Sinyal İletiminde Sampling (Sinyalin Örneklenmesi) ve Analog-Digital Dönüşüm	39

4	HİLBERT UZAYLARINDA FRAME'LER	46
4.1	Frame'ler İle İlgili Temel Kavramlar ve Özellikler	46
4.1.1	Frame'ler ve Dualleri	62
4.1.2	Frame'ler ve Riesz Bazları	68
4.1.3	Frame'ler İçin Bazı Karakterizasyonlar	70
4.1.4	Hilbert Uzaylarında Frame'ler ve Sinyal İşleme	71
4.1.5	Sampling Problemi	75
5	HİLBERT C^*-MODÜLLERİNDE BESSEL DİZİLERİ, RİESZ BAZLARI VE FRAME'LER	78
5.1	Temel Kavramlar	78
5.2	Hilbert C^* -Modülleri	81
5.2.1	Hilbert C^* -Modülleri'nde Operatörler	83
5.2.2	Hilbert C^* -Modülleri'nde Bessel Dizileri ve Frame'ler	84
5.2.3	Bessel Dizileri ve Frame'ler İçin Bir Denk Tanım	86
5.2.4	Bessel Dizileri ve Frame'ler İçin Bazı Karakterizasyonlar	89
5.2.5	Hilbert C^* -Modülleri'nde Riesz Bazları ve Dualleri	92
5.2.6	Hilbert C^* -Modüllerinde Riesz Bazlarının Dualleri	93
5.3	Hilbert C^* -Modülleri'nde Frame'ler ve Sinyal İşleme	97
	KAYNAKLAR	99
	ÖZGEÇMİŞ	102

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bazlar, Banach ve Hilbert uzaylarının incelenmesinde temel araçlardır. Uzayların ayrılabilirliği, yansımalık özelliğine sahip olup olmadığı gibi yapısal özelliklerinin yanısıra, söz konusu uzayların elemanlarının ve bu uzaylar üzerindeki operatörlerin temsillerinin verilmesi gibi problemlerde önemli rol oynamaktadır. Bu temel kavramlarla ilgili detaylı bilgi kaynağı [1] ve [2] ile verilen eserlerdir. Bu kavramın bazı genişletmeleri de son zamanlarda ilgi kaynağı olmuştur. Bunlardan bir tanesi de [3] numaralı çalışmada verilmiştir.

Son yıllarda, özellikle uygulama alanlarının zenginliği itibariyle yoğun ilgi gören kavramlardan biri de Hilbert uzaylarındaki baz kavramının genelleştirilmesi olan "frame" kavramıdır. Bu kavram geçtiğimiz yirmi yıllık süre içerisinde analiz alanında en çok ilgi gören konulardan biridir.

Hilbert uzaylarıyla ilgili birçok problem (ortonormal) baz kavramına dayanmaktadır. Fakat problemdeki amaca en uygun bazları inşaa etme işi genelde zordur.

Bir $\{f_k\}$ dizisinin baz olması, H bir Hilbert uzayı olmak üzere her $f \in H$ elemanının

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

şeklinde tek türlü temsil edilmesi, yani skaler dizisinin tek türlü olması ile tanımlanır.

Fakat bu temsilin tek türlü olması şartı oldukça ağır bir şarttır. Bunun yerine tek türlü olmasa da her $f \in H$ elemanının $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ temsili vereni $\{f_k\}$ dizisi ihtiyaca daha uygun olabilir. Böyle rahat temsilleri veren diziler frame'lerdir ve bu esnek yapıları, onları bazlara nazaran daha çekici kılmaktadır.

Fourier dönüşümü, bir yüzyılı aşkın süredir analizde önemli bir araç olarak kullanılmasına rağmen, sinyal analizi ile ilgili hususta bir sinyalin iletimi ve devamlılığı süresine ilişkin bilgi fourier dönüşümünün aşamalarında gizli kaldığı için ciddi eksiklikleri barındırmaktaydı. Literatürde ihtiyaç duyulan şey, fourier dönüşümünde kodlama-

şı yapılacak olan bu bilgiyi içeren lokalize edilmiş bir zaman-sıklık temsiliydi.

1946 'da D. Gabor, basit sinyaller vasıtasıyla sinyali analiz etmede temel teşkil eden bir yaklaşım formulize etti ve bu eksikliği gidermiş oldu. Daha sonra, Gabor'un yaklaşımı zaman-sıklık metotlarıyla alakalı bulunan spektral analiz için bir paradigma oldu. Gabor, bilim dünyasına kazandırdığı bu önemli çalışmalarıyla 1971 'de Nobel Fizik ödülünü almaya hak kazandı. Bugün Gabor'un bu fikri hala Gabor (W-H) frame'lerin temelinde yatan birçok uygulama için esas teşkil etmektedir.

Frame'ler, resmi olarak 1952 'de Duffin ve Schaeffer tarafından [4] numaralı kaynakta ilk olarak tanımlanmış olup, Duffin ve Schaeffer burada frame'leri, harmonik olmayan fourier serileri ile ilgili çalışmalarında bir araç olarak kullanmışlardır. Aslında temel olarak Duffin ve Schaeffer, sinyal işleme çalışmalarında Gabor'un temel fikrini özetlemişlerdir.

Duffin ve Schaeffer'in sunduğu bu fikrin, 1986 'da Daubechies, Grossmann ve Meyer 'in dönüm noktası niteliğindeki makalelerinin yayınlanmasına kadar, harmonik olmayan fourier serileriyle ilgilenenler için çok da büyük ilgi oluşturduğu söylenemezdi. Daubechies, Grossmann ve Meyer frame'lerin wavelet teoride çok faydalı araçlar olduğunu fark etti. Bunu [5] numaralı kaynakta bir örnek olarak görmek mümkündür.

Wavelet çağının başladığı 1985 'de, Daubechies, Grossmann ve Meyer, ortonormal bazın kullanıldığı açılımlara çok benzeyen $L_2(\mathbb{R})$ 'deki fonksiyonların seri açılımlarını bulmada, frame'lerin kullanılabileceğini düşündüler. Bu, çoğu matematikçinin konunun niteliğini yeni yeni fark etmeye başladığı zamanlardı. Wavelet'lar henüz çok fazla gelişme göstermemiş olmasına rağmen, bu çıkış açan çalışmadan sonra frame'lerin teorisi ile ilgili çok zengin ve oldukça önemli çalışmalar ortaya konmaya başlanmıştır. Frame'ler ve bazlarla ilgili teori, son yirmi yılı aşkın süredir hızlı ve verimli bir şekilde gelişmektedir. Özellikle de Wavelet ve Gabor sistemler ile ilgili hususlar epey ilerleme kaydetmiştir. Bundan sonrasında ise çabaların çoğu amaca uygun frame'lerin inşaa edilmesine ayrılmıştır. Bunun bir örneği [6] numaralı kaynakta görülebilir. Ayrıca [7], [8], [9], [10] numaralı kaynaklar da konunun temellerini ve güncel gelişmelerini ortaya koyan ve bu tezin derlenmesinde en çok başvurduğumuz temel nitelikteki önemli eserlerdir.

Frame teorisi hakkında söylenebilecek şeylerden biri de, teorisinin çok önemli ve

öngörülen belki çok daha büyük kısımlarının hala az gelişmiş durumda olmasıdır. Ayrıca kapsamlı olarak geliştiği düşünülen bazı konular hala pek çok temel açık problem barındırmaktadır.

Genel olarak bir Hilbert uzayı için verilen frame teorisi, soyut matematikteki araştırma alanlarında oldukça işe yarar olmasının yanısıra, sinyal işleme, görüntü işleme, dağıtım işleme, bilgi depolama, kablosuz iletişim, wavelet teorisi, örnekleme teorisi, optik, hatalı bilgi taşınması, filterbank, sinyal tespiti, jeofizik, kuantum tekniği ve gelişen teknolojiye bağlı olarak her geçen yıl yeni pekçok uygulamayı içeren çok geniş çaplı alanlarıyla mühendislikte ve matematikteki uygulamalarıyla gündeme gelmektedir. Frame'ler, Banach uzay teorisinde, Besov uzaylarındaki çalışmalarda kullanılmasının yanısıra, operatör teorisi, harmonik analiz ile ilgili teorilerin kurulmasında da kullanılmaktadır. Ayrıca, operatör teori ve Banach uzayları teorisinde geçen pekçok önemli araçlar ve derin sonuçlar da frame teorisinde kullanılmaktadır.

Bu alandaki diğer bir özellik de, bu çalışma alanının, biyologlar, mühendisler, matematikçiler (özellikle de, fonksiyonel ve harmonik analiz, Banach uzay teorisi, operatör teorisi... vb. alanlarda çalışanlar), fizikçiler ve daha pekçok dalda çalışanları da kapsayan farklı alanlardaki, pekçok insanın çalışabildiği çok geniş bir çevrede daha da değer kazanmasıdır. Her bir grup kendi alanında çalışmasına rağmen, ortaya çıkan ürünler farklı bakış açılarıyla gözlemlenmiştir. Ayrı alanlara hitap ediyor gibi görünmesine karşın durum hiç de öyle olmayıp, tam aksine bu, alana zenginlik ve çeşitlilik katmakla birlikte bu geniş spektrum ile ilgilenenleri birbirlerinden etkilemektedir.

Hilbert C^* -modülleri, (bir cisim üzerindeki) bir vektör uzayı yerine, (bir halka üzerindeki) bir A -modülün düşünüldüğü ve kompleks sayılar cismi yerine C^* -cebirinde değerler alan iç çarpıma izin veren yapıdaki Hilbert uzaylarının bir genelleştirmesidir. Dolayısıyla Hilbert uzayları için frame düşüncesinin bir benzerinin Hilbert C^* -modülleri için verilebileceği fikri doğaldır. İşte Hilbert C^* -modül frame'leri, tanımı ilk olarak nonharmonik fourier analizindeki bazı problemlere cevap arayan Duffin ve Schaeffer tarafından verilen Hilbert uzaylarında frame'lerin bir genelleştirmesidir. Böyle frame'ler **Hilbert C^* -modüler frame'ler** veya daha kısa olarak **modüler**

frame'ler olarak adlandırılır. Son yıllarda pekçok matematikçi, Hilbert uzaylarındaki klasik frame teorisinin Hilbert C^* -modüllerine uyarlamasına katkıda bulunarak böyle bir genelleştirme ile frame teorisinin zenginleşmesini sağlayan önemli sonuçlar elde etti.

Frank ve Larson 1998 de Hilbert C^* -modüllerinde standart bazları ve birimli C^* -cebiri üzerindeki sayılabilir veya sonlu üreteçli Hilbert C^* -modüllerinde standart frame'leri tanımlayarak Hilbert C^* -modülleri için frame'ler (moduler frame'ler) ile ilgili bazı temel özellikler verdiler. [11], [12], [13].

Frame teorisinin uygulamalarına bakıldığında, Hilbert C^* -modüllerine genelleştirilmiş yapının avantajı, katsayıların bir C^* -cebirinden geliyor oluşundan ve Hilbert uzaylarındaki davranışın benzeri olarak genelleştirilmiş temel niteliklerinin ele alınmasıyla birlikte Hilbert C^* -modüllerinin özel iç yapısından ileri gelmektedir.

İlk bakıldığında Hilbert C^* -modülleri için frame kavramının Hilbert uzaylarındaki içeriğe çok benzemiş gibi görünüyor olmasına rağmen, Hilbert C^* -modüllerinin temelindeki C^* -cebirlere karmaşık yapısı ve Hilbert uzaylarında mevcut pekçok temel nitelikteki tekniklerin Hilbert C^* -modüllerinde bilineme ya da elde edilememe şeklindeki eksikliklerden dolayı Hilbert uzayları için frame teorisinin direkt sonuçları olarak gelmediğini, dolayısıyla basit bir genelleştirme yapılabiliyor olmadığını burada belirtmek gerekir.

Hilbert C^* -modüllerinin teorisi Hilbert uzaylarından oldukça farklıdır. Örneğin, bir Hilbert uzayının herhangi bir kapalı alt uzayı bir ortogonal tümleyene sahiptir. Fakat bu durum bir Hilbert C^* -modülünün herhangi bir kapalı alt modülü direkt toplam özelliğinden yoksun oluşu nedeniyle Hilbert C^* -modüllerinde artık geçerli olamamaktadır. Yine, Hilbert uzaylarında sürekli fonksiyoneller için verilen Riesz temsil teoremi Hilbert C^* -modüllerinde geçerli değildir, bu durum Hilbert C^* -modülleri üzerindeki tüm sınırlı lineer operatörlerin bir adjoint operatöre sahip olmak durumunda olmayışından kaynaklanmaktadır.

Bu tür yapı farklılıklarından dolayı Hilbert uzay teorisindeki sonuçların tümü Hilbert C^* -modüllerine kolay bir şekilde genelleştirilemez. Örneğin her Hilbert uzayı bir ortonormal baza sahiptir. Hilbert uzayındaki lineer bağımsız, üreten bir küme Gram-Schmidt ortonormalleştirme sürecinden geçirilerek bir ortonormal baz olarak

kolaylıkla elde edilebilecektir. Fakat her Hilbert C^* -modülü bir "ortonormal baz" 'a sahip değildir. Bu husus Hilbert C^* -modüllerindeki çalışmalarda daha ziyade frame teorisinin irdelenmesine bir sebep teşkil etmektedir. Her Hilbert C^* -modülünün bir ortonormal baza sahip olması gerekmediği gibi, ayrıca standart bir frame barındırmasına rağmen ortonormal baz hatta ortogonal Riesz bazına bile sahip olmayan sayılabilir üreteçli Hilbert C^* -modülleri vardır.

Hilbert uzay frame'leri ve Hilbert C^* -modül frame'leri arasında pek çok temel farklılıklar vardır. Bunlardan birkaçı sıralanacak olursa, her Hilbert uzayının bir frame'e sahip olmasına rağmen Li, [17]'da her Hilbert C^* -modülünün bir frame barındırmak zorunda olmadığını gösterdi. Hilbert C^* -modüllerindeki Riesz bazlarının tümü bir tek duale sahip olmak zorunda değildir (bkz. [14]), fakat Hilbert uzaylarında her Riesz bazı bir tek duale sahiptir ve bu dual de bir Riesz bazıdır. Hilbert uzay frame'leri ve Hilbert C^* -modül frame'leri arasındaki temel bazı farklılıklar ile ilgili daha geniş bilgi için [12], [13], [14], [15], [16], [17] yayınları incelenebilir. Ancak Hilbert uzaylarındaki frame'lerin bazı özellikleri Hilbert C^* -modülleri için de sağlanır ve genellikle oldukça farklı ispatları gerektirir. Örneğin, birimli C^* -cebiri üzerindeki her sayılabilir üreteçli Hilbert modülü bir frame'ye sahiptir. Hilbert uzaylarında aşikar olarak var olan bu durumun ifade ve ispatı için Frank ve Larson [13]'deki makalelerinde Hilbert C^* -modüllerinde çok derin bir sonuç olan "**Kasparov's Stabilization Theorem**" 'ini kullandılar.

Kasparov's Stabilisation Teoremi, her sonlu ve sayılabilir üreteçli Hilbert C^* -modülünün bir frame'ye sahip olduğunu ifade etmektedir. Ayrıca C^* -cebirinin birimli ve komutatif yapıda olması da özellikle uygulamalar için çalışmalarda oldukça avantajlı olmaktadır. Yukarıda da bahsedildiği gibi, bir C^* -cebiri üzerindeki sayılabilir üreteçli bir Hilbert C^* -modülünde standart frame'ler her zaman mevcuttur. Bu nedenle genellikle çalışmaların çoğunda temel olarak bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerindeki sonlu veya sayılabilir üreteçli H Hilbert C^* -modülleri üzerinde çalışılmıştır. Biz de işte bu sebepten dolayı bu tezde bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerindeki sonlu veya sayılabilir üreteçli H Hilbert C^* -modülleri ile ilgileneceğiz.

Hazırlanacak olan bu tez, bazlar ile frame'ler arasındaki ilişkileri detaylı bir şekilde ortaya koymayı ve Hilbert uzaylarında ve Hilbert C^* modüllerinde frame'lerin,

Riesz bazları ve Bessel dizilerinin genel teorisini sunmayı amaçlamaktadır. Ülkemizde bu alanda fazla çalışma olmaması nedeniyle alanın temellerini ve mevcut bazı uygulamalarını ortaya koyan ve bu alanda çalışacakların faydalanabileceği bir eser derlenmiş olacaktır.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde konuyla ilgili daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.0.1. [18] X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{K}$ bir cisim olsun. X üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri

$$+ : X \times X \rightarrow X, (x, y) \rightarrow x + y$$

ve

$$. : \mathcal{K} \times X \rightarrow X, (\alpha, x) \rightarrow \alpha.x$$

şeklinde tanımlı olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ için,

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x + y = y + x$$

$$x + \theta = x \text{ olacak şekilde } \theta \in X$$

$$\text{Her } x \in X \text{ için } x + x' = \theta \text{ olacak şekilde } x' \in X \text{ vardır.}$$

$$\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$\alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x$$

$$1.x = x$$

şartları sağlanıyorsa $(X, +, .)$ yapısına $\mathcal{K}$ cismi üzerinde bir **vektör uzayı** denir. $\mathcal{K}$ 'ya X vektör uzayının skaler cismi denir. $\mathcal{K}$ cisminin $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ya da $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olup olmadığına bağlı olarak X uzayına **reel** ya da **kompleks vektör uzayı** denir.

Tanım 2.0.2. [18] X ve Y bir $\mathcal{K}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $U : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathcal{K}$ için

$$U(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha U(x_1) + \beta U(x_2)$$

sağlanıyorsa U 'ya X 'den Y 'ye bir **lineer dönüşüm** veya **lineer operatör** denir.

Tanım 2.0.3. [18] X bir $\mathcal{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $U : X \rightarrow \mathcal{K}$ dönüşümü lineer ise U 'ya **lineer fonksiyonel** denir.

Tanım 2.0.4. [18] X boştan farklı bir küme olmak üzere,

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} , \quad (x, y) \rightarrow d(x, y)$$

dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şartlarını sağlıyorsa, d 'ye X üzerinde bir **metrik**, (X, d) ikilisine de **metrik uzay** denir.

Tanım 2.0.5. [18] Bir X metrik uzayında bir (x_n) dizisini ele alalım. Eğer;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisi **yakınsaktır** ya da x noktasına yakınsar denir. x noktasına, (x_n) dizisinin limiti adı verilir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ya da kısaca $x_n \rightarrow x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.0.6. [18] X bir metrik uzay ve (x_n) , X 'de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n, m > N$ olduğunda,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine, X 'te bir **Cauchy dizisi** denir.

Tanım 2.0.7. [18] X bir metrik uzay olmak üzere X 'deki her Cauchy dizisi, yakınsak ise yani; X 'de bulunan bir limit noktasına sahip ise X uzayı **tamdır** denir.

2.1 Normlu Uzay ve Banach Uzayları

Tanım 2.1.1. [18] Bir X vektör uzayı üzerinde bir **norm**, aşağıdaki üç şartı sağlayan, $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$ şeklinde bir fonksiyondur:

- (i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, her $x \in X, \alpha \in \mathbb{C}$ için
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, her $x, y \in X$ için

$\|\cdot\|$ ile birlikte, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine **normlu uzay** denir.

Tanım 2.1.2. [18] Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

ile verilen $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ metriği ile bir metrik uzaydır. Bu metriğe $\|\cdot\|$ **normundan türetilen metrik** veya **norm metriği** denir.

Tanım 2.1.3. [18] X bir normlu vektör uzayı ve $S \subseteq X$ olsun. $\overline{S} = X$ ise S 'ye X 'de **yoğundur** denir.

Tanım 2.1.4. [18] Bir normlu vektör uzayı sayılabilir ve yoğun bir alt kümeye sahipse **ayrılabilir**dir denir.

Tanım 2.1.5. [18] $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Eğer $X, d(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğiyle tam ise $(X, \|\cdot\|)$ ye bir **Banach uzayı** denir.

Bir Banach uzayının cismi $\mathbb{R}$ ise **reel Banach uzayı**, cismi $\mathbb{C}$ ise **kompleks Banach uzayı** olarak adlandırılır.

2.1.1 Banach Uzayları Üzerindeki Operatörler

Tanım 2.1.6. [9] X ve Y Banach uzayı olsun. $U : X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. U, X 'deki her sınırlı kümeyi, Y 'de sınırlı bir kümeye dönüştürüyorsa U 'ya **sınırlı** (veya **sürekli**) **operatör** denir.

Diğer bir ifade ile eğer her $x \in X$ için

$$\|U(x)\| \leq K \cdot \|x\| \quad (2.1.1)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ sayısı bulunabiliyor ise U 'ya **sınırlı operatör** denir.

Tanım 2.1.7. [9] U **operatörünün normu**, $\|U\|$ ile tanımlanan ve (2.1.1) eşitsizliğini sağlayan en küçük K sabitidir. Başka bir deyişle,

$$\|U\| = \sup \{\|Ux\| : x \in X, \|x\| = 1\}$$

dir.

Tanım 2.1.8. [9] X, Y, Z Banach uzayları ve $U_1 : Y \rightarrow Z$, $U_2 : X \rightarrow Y$ iki operatör olmak üzere $U_1 U_2 : X \rightarrow Z$ operatörüne U_1 ve U_2 'nin **bileşke operatörü** denir. Eğer U_1 ve U_2 sınırlı ise $U_1 U_2$ de sınırlıdır ve

$$\|U_1 U_2\| \leq \|U_1\| \|U_2\|$$

'dir.

Teorem 2.1.1. [9] (**Düzgün Sınırlılık Prensibi**) $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ bir X Banach uzayından normlu bir Y uzayı içine olan sınırlı lineer $U_n : X \rightarrow Y$ operatörlerinin bir dizisi olsun. Her $x \in X$ için $(\|U_n(x)\|)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin sınırlı olduğunu varsayalım. Bu durumda $(\|U_n\|)_{n=1}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır.

Teorem 2.1.2. [9] (**Banach-Steinhaus Teoremi**) X ve Y Banach uzayları ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere her bir $U_n : X \rightarrow Y$, bir $U : X \rightarrow Y$ dönüşümüne noktasal yakınsayan, sınırlı lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda U lineer ve sınırlıdır. Ayrıca $\|U_n\|$ normlarının dizisi sınırlıdır ve $\|U\| \leq \liminf \|U_n\|$ dir.

Tanım 2.1.9. [9] Bir $U : X \rightarrow Y$ dönüşümü birebir ve örten ise tersi mevcuttur. Bu durumda U operatörüne **tersinirdir** denir.

Teorem 2.1.3. [9] Banach uzayları arasındaki sınırlı, birebir ve örten bir operatör sınırlı bir inverse (terse) sahiptir.

Teorem 2.1.4. [9] (*Neumann Teoremi*) X bir Banach uzayı olmak üzere, $U : X \rightarrow X$ sınırlı ve $\|I - U\| < 1$ ise bu durumda U tersinirdir ve

$$U^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - U)^k$$

'dir. Ayrıca

$$\|U^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - U\|}$$

olur.

2.2 İç Çarpım Uzayları ve Hilbert Uzayları

Tanım 2.2.1. [18] $X, \mathcal{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathcal{K}, \quad (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

fonksiyonu, her her $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ için,

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

şartlarını sağlıyorsa X üzerinde bir **iç çarpım** adını alır. $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de **iç çarpım uzayı** denir.

Bir $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpımıyla bir X uzayı $x \in X$ olmak üzere

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

normuyla bir normlu uzaydır.

Tanım 2.2.2. [18] X bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $X, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ normuna göre tam ise, **Hilbert uzayı** adını alır.

Hilbert uzayları için temsili olarak belirlediğimiz X uzayı için notasyon olarak bu tezde H yazılımını kullanacağız.

Herhangi bir H Hilbert uzayı, her $x, y \in H$ için

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini sağlar.

Tanım 2.2.3. [9] Bir H Hilbert uzayında

$$\langle x, y \rangle = 0$$

ise $x, y \in H$ elamanları **ortogonal**dir denir. H 'nın bir V alt uzayının **ortogonal tümleyeni**

$$V^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in V\}$$

kümesidir.

Şimdi bu tez boyunca da sıkça kullanılacak olan birkaç temel tanım ve sonucu ifade edelim:

Tanım 2.2.4. [9] H bir Hilbert uzayı olmak üzere H 'da bir $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ dizisi

$$\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^\infty = H$$

özelliğine sahipse **total**dir denir.

Lemma 2.2.1. [9] Bir H Hilbert uzayındaki bir $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ dizisi için aşağıdakiler denktir:

(i) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ totaldir.

(ii) Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $\langle f, f_k \rangle = 0$ ise bu durumda $f = 0$ 'dır.

Bir Hilbert uzayı üzerindeki lineer operatörler arasında, **fonksiyonel** olarak adlandırılan $U : H \rightarrow \mathbb{C}$ operatörlerinden sürekli lineer olanlar önemli yer tutar ve **Riesz Temsil Teoremi** ile karakterize edilebilirler:

Teorem 2.2.1. [19] (**Riesz Temsil Teoremi**) $U : H \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli lineer bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x \in H$ için

$$Ux = \langle x, y \rangle$$

olacak şekilde bir tek $y \in H$ vardır.

Bir fonksiyonele temsil veren $y \in H$ elemanının tekliği aşağıdaki önemli sonuç ile verilmiştir:

Sonuç 2.2.1. [9] H bir Hilbert uzayı olsun. Her $z \in H$ için $x, y \in H$ 'nın

$$\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$$

eşitliğini sağladığını kabul edelim. Bu durumda $x = y$ 'dir.

Son olarak herhangi bir $x \in H$ elemanının normunun, H 'nın birim küresi üzerindeki elemanlar ve x arasındaki iç çarpıma dayanarak yazılabileceğini de belirte-
lim:

Lemma 2.2.2. [9] H bir Hilbert uzayı olsun. Her $x \in H$ için

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y \rangle| \quad (2.2.1)$$

dir.

2.2.1 Hilbert Uzayları Üzerindeki Operatörler

Tanım 2.2.5. [9] U , bir K Hilbert uzayından, bir H Hilbert uzayına sınırlı bir operatör olsun. U -nin **adjoint operatörü**, her $x \in H$ ve her $y \in K$ için,

$$\langle x, Uy \rangle = \langle U^*x, y \rangle$$

eşitliğini sağlayan bir tek $U^* : H \rightarrow K$ operatördür.

Lemma 2.2.3. [9] $U : K \rightarrow H$ sınırlı bir operatör olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

(i) $\|U\| = \|U^*\|$ ve $\|UU^*\| = \|U\|^2$ dir.

(ii) U örtendir ancak ve ancak her $y \in H$ için $\|U^*y\| \geq C \|y\|$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır.

Bu çalışmada, daha ziyade $K = H$ olduğu durumlar düşünülecektir.

Tanım 2.2.6. [9] Bir $U : H \rightarrow H$ sınırlı lineer operatörü eğer $UU^* = U^*U = I$ ($U^* = U^{-1}$) ise **üniter**dir denir. U üniter ise, bu durumda her $x, y \in H$ için, $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ sağlanır. Eğer $U = U^*$ ise U ya **self-adjoint** denir. $UU^* = U^*U$ ise U **normal operatör** olarak adlandırılır.

U self-adjoint olduğunda

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ux, x \rangle| \quad (2.2.2)$$

'dır.

Self-adjoint operatörlerin kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı, her $x \in H$ için

$$U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow \langle U_1 x, x \rangle \leq \langle U_2 x, x \rangle$$

şeklinde verilir.

Teorem 2.2.2. [9] U_1, U_2, U_3 self-adjoint operatörler olsun. Eğer $U_1 \leq U_2$ ve $U_3 \geq 0$ ise $U_1 U_3 \leq U_2 U_3$ 'dir.

Self-adjoint operatörlerinin önemli bir sınıfını ortogonal projeksiyonlar oluşturur:

Tanım 2.2.7. [9] H 'nın bir V kapalı alt uzayı verilsin. H 'nın V üzerine **ortogonal projeksiyonu** $P : H \rightarrow H$ olmak üzere

$$Px = x, \quad x \in V$$

$$Px = 0, \quad x \in V^\perp$$

şeklinde tanımlanan P operatörüdür.

Lemma 2.2.4. [9] $U : H \rightarrow H$ sınırlı bir operatör olsun. Her $x \in H$ için, $\langle Ux, x \rangle = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(i) H kompleks bir Hilbert uzayı ise bu durumda $U = 0$ 'dır.

(ii) H reel bir Hilbert uzayı ve U self-adjoint ise bu durumda $U = 0$ 'dır.

Tanım 2.2.8. [9] Eğer her $x \in H$ için $\langle Ux, x \rangle \geq 0$ ise $U : H \rightarrow H$ sınırlı operatörüne **pozitif** denir.

2.3 $L^p(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $l^2(I)$ Uzayları

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p(\mathbb{R})$ uzayları Banach uzaylarının çok önemli bir sınıfını oluşturur.

Tanım 2.3.1. [20]

$$L^p(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ölçülebilir ve } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır. Burada $|f|^p$ nin integrali Lebesgue ölçüsüne göre alınmaktadır.

$L^p(\mathbb{R})$

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu ile bir normlu uzaydır.

$p = 2$ durumu önemlidir. Çünkü $L^2(\mathbb{R})$ uzayı

$$L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ölçülebilir ve } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

iç çarpımla donatılabilen $L^p(\mathbb{R})$ uzaylarından sadece biridir. Gerçekten de $L^2(\mathbb{R})$, $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

iç çarpımıyla bir Hilbert uzayıdır.

$L^2(\mathbb{R})$ 'de her $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ için

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.3.2. [20] $l^2(I)$ uzayı I sayılabilir bir indeks kümesi olmak üzere

$$l^2(I) := \left\{ \{x_k\}_{k \in I} : x_k \in \mathbb{C}, \sum_{k \in I} |x_k|^2 < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu uzay

$$\langle \{x_k\}, \{y_k\} \rangle = \sum_{k \in I} x_k \overline{y_k}$$

iç çarpımıyla bir Hilbert uzayıdır.

$l^2(I)$ 'da her $\{x_k\}_{k \in I}, \{y_k\}_{k \in I}$ için

$$\left| \sum_{k \in I} x_k \overline{y_k} \right|^2 \leq \sum_{k \in I} |x_k|^2 \sum_{k \in I} |y_k|^2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği sağlanır.

2.4 Bir Serinin Şartsız ve Mutlak Yakınsaklığı Kavramı

Bu çalışmanın temel amaçlarından biri de X bir vektör uzayı olmak üzere, her $f \in X$ 'in $\{f_k\}$ vektörlerinin lineer kombinasyonu şeklinde, yani bazı $c_k \in \mathbb{C}$ katsayıları için,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \quad (2.4.1)$$

şeklinde bir temsile sahip olduğunu ve bu $\{f_k\}$ dizilerinin çeşitli formlarının olduğunu bilmek, ayrıca böyle bir temsili verecek olan $\{f_k\}$ vektörlerinin üzerindeki şartları bulmaktır. Bu, fonksiyonel analizde gözlemlediğimiz pekçok uzayda, sonlu bir $\{f_k\}$ dizisiyle yapılamaz. Burada $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'lar aracılığıyla f 'nin temsili sonsuz bir seri verecektir. Bu sebeple sonsuz serilerin yakınsaklığı ile neyi kastettiğimizi açıklayarak başlayabiliriz:

Tanım 2.4.1. [10] $\{f_k\}$ bir X normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $\left\| f - \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\| \rightarrow 0$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ serisinin $f \in X$ 'e toplandığı (yakınsadığı) söylenir.

Tanımdaki bu şart sağlanıyorsa $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ yazarız. Bu tanımda $\{f_k\}$ dizisi belirlenmiş bir sırada oluşturulmuştur. Ancak burada, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ serisinin yakınsama özelliğinin sadece $\{f_k\}$ dizisi ve $\{c_k\}$ katsayılarına bağlı olmadığını, aynı zamanda sıralamanın da önemli olduğunu belirtmekte fayda vardır.

Örneğin, en çok bilinen bir Banach uzayı örneği olan $\mathbb{R}$ uzayında bir $\{\alpha_k\}$ dizisi için $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ serisi yakınsak olabilir, fakat doğal sayıların belli herhangi bir σ permütasyonu için $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{\sigma(k)}$ ıraksak olabilmektedir. İşte bu gözlem şu ikinci yakınsama çeşidini vermemize ihtiyaç olduğunu göstermektedir:

Tanım 2.4.2. [10] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ X normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} f_{\sigma(k)}$ serisi $\mathbb{N}$ 'nin bütün σ permütasyonları için yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisine **şartsız yakınsaktır** (*unconditionally convergent*) denir.

Bu durumda serinin limiti toplamın sırasına bakılmaksızın aynı kalır.

Tanım 2.4.3. [10] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir X normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi **mutlak yakınsaktır** denir.

Teorem 2.4.1. [10] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir X Banach uzayında bir dizi olsun. Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi mutlak yakınsak ise şartsız yakınsaktır.

Herhangi bir Banach uzayında bir $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisinin mutlak yakınsak olması şartsız yakınsak olmasını gerektirir. Fakat bu durumun tersi sonsuz boyutlu uzaylarda sağlanmayabilir. Sonsuz boyutlu uzaylarda şartsız yakınsak olup mutlak yakınsak olmayan seriler olabilir. **Örneğin;** c_0 'da $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n -yinci koordinatı 1, diğer koordinatları 0 olan $\{e_n\}$ dizisini alalım. $x_n = \frac{1}{n}e_n$ olarak tanımlansın. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi $(\frac{1}{n}) \in c_0$ elemanına şartsız yakınsaktır, ancak bu seri mutlak yakınsak değildir.

Sonlu boyutlu uzaylarda ise her iki yakınsaklık çeşidi aynı manaya gelir:

Teorem 2.4.2. [10] (Dvoretzky-Rogers Teoremi) Bir X Banach uzayında şartsız yakınsak her seri mutlak yakınsak ise X sonlu boyutludur.

BÖLÜM 3

HİLBERT UZAYLARINDA BESSEL DİZİLERİ, ORTONORMAL BAZLAR VE RİESZ BAZLARI

Bazlar sonlu boyutlu vektör uzaylarının yanısıra sonsuz boyutlu vektör uzaylarının analizinde de önemli bir rol oynar. Fikir her iki durumda da aynıdır: Düşünülen uzaydaki bütün elemanlar bu uzaydaki elemanların oluşturduğu bir ailenin elemanlarının lineer kombinasyonu şeklinde tek türlü ifade edilebilir.

Fakat sonsuz boyutlu uzaylarda bu durum daha karmaşıktır: Sonsuz serilerle çalışmakta zorlanırsınız ve istenilen yakınsama özelliğinde serilere bağlı olan farklı türden bazlar oluşturabiliriz.

Uygulamalar, bazlarla ilgilenmeyi daha kolay kılabilen özel özelliklere sahip türden bazlar arz edebilir. Örneğin; (2.4.1) serisi şartsız yakınsak ise, yani eğer indeks kümesinin her $\sigma(n)$ permütasyonu için $\sum_n c_{\sigma(n)} f_{\sigma(n)}$ serisi f 'ye yakınsıyor ise, bu durumda $\{f_k\}$ **şartsız (unconditional) bazdır**.

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere H 'da sıralı bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi dendiğinde, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{f_1, f_2, \dots\}$ şeklinde sıralı bir kümeden bahsedilmektedir. Uygunluk açısından, indeksleme yaparken doğal sayılar seçilmiştir. Daha sonra tüm sonuçların keyfi bir yolla sıralanmış f_k elemanlarıyla da (keyfi sayılabilir indeks kümeleriyle de) sağlandığı görülecektir.

Hilbert uzaylarında şartsız yakınsaklık Bessel dizileri ile özdeşleşmiştir. Bu nedenle bu bölümde öncelikle Bessel dizilerinin tanımı ve Bessel dizileri ile ilgili bazı teorem ve sonuçlara yer verilecektir. Daha sonra Hilbert uzaylarında ortonormal bazlar ve ortonormal bazlar ile ilgili bazı karakterizasyonlar ele alınacak, ayrıca Riesz bazlarının tanımı verildikten sonra dualleri incelenecek ve Riesz bazları için bazı karakterizasyonlar verilecektir. Son olarak ortonormal bazlar ile ilgili sinyal işleme üzerine bir uygulamadan bahsedilerek, sinyal iletiminde sampling problemine değinilecektir.

3.1 Hilbert Uzaylarında Bessel Dizileri

Lemma 3.1.1. [9] H Hilbert uzayında bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisini alalım ve $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ serisinin tüm $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N})$ için yakınsak olduğunu farzedelim. Bu durumda;

$$T : l_2(\mathbb{N}) \rightarrow H$$

$$T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

sınırlı-linear bir operatör tanımlar. Bu T operatörüne **sentez operatörü** denir. T 'nin adjoint operatörü,

$$T^* : H \rightarrow l_2(\mathbb{N})$$

$$T^* f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$$

ile verilir ve bu T^* operatörü **analiz operatörü** olarak adlandırılır.

Ayrıca her $f \in H$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq \|T\|^2 \|f\|^2 \quad (3.1.1)$$

dir.

İspat. Sınırlı-linear operatörlerin

$$T_n : l_2(\mathbb{N}) \rightarrow H$$

$$T_n\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \sum_{k=1}^n c_k f_k$$

şeklindeki dizisi göz önüne alınırsa, $n \rightarrow \infty$ için $T_n \rightarrow T$ (noktasal) olur.

Banach-Steinhaus teoremi gereğince, T dönüşümü sınırlı linear bir operatör tanımlar.

T^* ifadesini elde etmek için, $f \in H$ ve $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N})$ alalım. Bu durumda

$$\langle f, T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \rangle = \left\langle f, \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle \overline{c_k} \quad (3.1.2)$$

dir.

Şimdi $T^* f$ 'yi bulalım:

$T : l_2(\mathbb{N}) \rightarrow H$ sınırlı bir operatör ise, $T^* : H \rightarrow l_2(\mathbb{N})$ sınırlı bir operatör olduğundan, H 'dan $\mathbb{C}$ 'ye k -yıncı koordinat fonksiyonu sınırlıdır ve Riesz temsil teoremi gereğince T^* , H 'daki bir $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ için

$$T^* f = \{\langle f, g_k \rangle\}_{k=1}^\infty$$

formuna sahiptir. T^* 'ın tanımı gereğince, (3.1.2) eşitliği; her $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in l_2(\mathbb{N})$ ve $f \in H$ için,

$$\sum_{k=1}^\infty \langle f, g_k \rangle \overline{c_k} = \sum_{k=1}^\infty \langle f, f_k \rangle \overline{c_k}$$

olduğunu gösterir. Buradan $g_k = f_k$ olur.

Bir T sınırlı operatörünün adjointi de sınırlıdır ve $\|T\| = \|T^*\|$ dır. Lemmanın ifadesindeki varsayımlar altında her $f \in H$ için,

$$\|T^* f\|^2 \leq \|T\|^2 \|f\|^2$$

'dir. Gerçekten de, $T^* f = \{\langle f, g_k \rangle\}_{k=1}^\infty$ ve $T^* f \in l_2(\mathbb{N})$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|T^* f\|^2 &= \langle T^* f, T^* f \rangle \\ &= \langle \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^\infty, \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^\infty \rangle \\ &= \sum_{k=1}^\infty \langle f, f_k \rangle \overline{\langle f, f_k \rangle} \\ &= \sum_{k=1}^\infty |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq \|T^*\|^2 \|f\|^2 = \|T\|^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

olup (3.1.1) sağlanır. □

Tanım 3.1.1. [9] H bir Hilbert uzayı olmak üzere her $f \in H$ için,

$$\sum_{k=1}^\infty |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \tag{3.1.3}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $B > 0$ sabiti var ise $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ dizisine **Bessel dizisi** denir.

(3.1.3) eşitsizliğini sağlayan herhangi bir B sayısına $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ için bir **Bessel sınırı** denir.

Verilen bir $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ dizisi için **optimal sınır**, (3.1.3) eşitsizliğini sağlayan en küçük $B > 0$ değeridir.

Örnek 3.1.1. $e_1 = \{1, 0, 0, \dots\}$, $e_2 = \{0, 1, 0, \dots\}$, $e_3 = \{0, 0, 1, \dots\}$, şeklinde tanımlanan $\{e_k\}_{k=1}^\infty \in l_2(\mathbb{N})$ bazını düşünelim. $\{f_k\}_{k=1}^\infty = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ dizisi $B = 1$ Bessel sınırı ile bir Bessel dizisidir:

Her $f \in l_2(\mathbb{N})$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \\ &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &= \|f\|^2 \end{aligned}$$

olup, $B = 1$ Bessel sınırı ile $\{f_k\}$ bir Bessel dizisidir.

Teorem 3.1.1. [9] Bir H Hilbert uzayında bir $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ dizisi alalım ve $B > 0$ verilsin. Bu durumda $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ B Bessel sınırı ile bir Bessel dizisidir ancak ve ancak $T : l_2(\mathbb{N}) \rightarrow H$, $T\{c_k\}_{k=1}^\infty := \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ dönüşümü sınırlı bir operatör tanımlar ve $\|T\| \leq \sqrt{B}$ 'dir.

İspat. $(\Rightarrow)$ $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ dizisinin B Bessel sınırı ile bir Bessel dizisi olduğunu kabul edelim. $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in l_2(\mathbb{N})$ alalım.

$T\{c_k\}_{k=1}^\infty$ iyi tanımlıdır:

$m, n \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k=1}^n c_k f_k - \sum_{k=1}^m c_k f_k = \sum_{k=m+1}^n c_k f_k$$

dır. Lemma 2.2.1 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n c_k f_k - \sum_{k=1}^m c_k f_k \right\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n c_k f_k \right\| \\ &= \sup_{\|g\|=1} \left| \left\langle \sum_{k=m+1}^n c_k f_k, g \right\rangle \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|=1} \sum_{k=m+1}^n |c_k \langle f_k, g \rangle| \\ &\leq \sup_{\|g\|=1} \left\{ \left(\sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=m+1}^n |\langle f_k, g \rangle|^2 \right)^{1/2} \right\} \\ &\leq \left(\sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \right)^{1/2} \cdot \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{k=m+1}^n |\langle f_k, g \rangle|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

bulunur.

$$B = \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{k=m+1}^n |\langle f_k, g \rangle|^2 \right) \text{ denirse,}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k f_k - \sum_{k=1}^m c_k f_k \right\| \leq \sqrt{B} \cdot \left(\sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \right)^{1/2}$$

elde edilir. $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in l_2(\mathbb{N})$ olduğundan, $\left\{ \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right\}_{n=1}^\infty$, $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir.

Yukarıdaki hesaplamalar $\left\{ \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\}_{n=1}^\infty$ nın H da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Böylelikle $\left\{ \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\}_{n=1}^\infty$ yakınsak olup $T\{c_k\}_{k=1}^\infty$ iyi tanımlıdır.

T 'nin lineerliği açıktır.

Ayrıca T sınırlıdır. Çünkü,

$$\begin{aligned} \|T\{c_k\}_{k=1}^\infty\| &= \sup_{\|g\|=1} |\langle T\{c_k\}_{k=1}^\infty, g \rangle| \\ &= \sup_{\|g\|=1} \left| \left\langle \sum_{k=1}^\infty c_k f_k, g \right\rangle \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|=1} \sum_{k=1}^\infty |c_k \langle f_k, g \rangle| \\ &\leq \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{k=1}^\infty |\langle f_k, g \rangle|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{B} \cdot \left(\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{B} \cdot \|\{c_k\}_{k=1}^\infty\| \end{aligned}$$

olup, $\|T\| \leq \sqrt{B}$ elde edilir.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki, T , $\|T\| \leq \sqrt{B}$ ile, sınırlı bir operatör olsun. Bu durumda Lemma 3.1.1, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 'nın B sınırı ile bir Bessel dizisi olduğunu gösterir. $\square$

$\{f_k\}_{k=1}^\infty$ dizisinin Bessel dizisi olduğunu kontrol etmek için Bessel sınırını bulmaya çalışmak yerine, T operatorünün iyi tanımlı olup olmadığını kontrol etmek yeterlidir:

Sonuç 3.1.1. [9] Eğer $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ H 'da bir dizi ve $\sum_{k=1}^\infty c_k f_k$ tüm $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in l_2(\mathbb{N})$ için yakınsak ise, bu durumda $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ bir Bessel dizisidir.

(3.1.3) ile verilen Bessel şartı, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ elemanlarının nasıl sıralandığına bakılmaksızın aynı kalır. Bu, Teorem 3.1.1 'in çok önemli bir sonucunu ortaya koyar:

Sonuç 3.1.2. [9] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}, H$ 'da bir Bessel dizisi ise bu durumda $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ serisi tüm $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N})$ için şartsız (unconditional) yakınsaktır.

Böylece $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'daki elemanların yerlerinin yeniden düzenlenmesi $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ serisinin yakınsaklığını etkilemeyecektir. Seri yine aynı elemana yakınsayacaktır.

İşte bu sebeple, Bessel dizisinde elemanların keyfi bir indekslemesini seçebiliriz. Yani özellikle tüm bu sonuçları, indeks kümesi olarak doğal sayıları seçerek vermek gibi bir kısıtlama yoktur.

İleride göreceğimiz gibi, tüm ortonormal bazlar, Riesz bazları ve frame'ler birer Bessel dizisidir.

Burada belirtelim ki; bir H Hilbert uzayında bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin Bessel dizisi olduğunu görmek için H 'nın yoğun bir alt kümesi üzerinde (3.1.3) ile verilen Bessel şartının sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmek yeterlidir:

Lemma 3.1.2. [8] H bir Hilbert uzay, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}, H$ 'daki elemanların bir dizisi olsun. H 'nın yoğun bir V alt kümesindeki tüm f 'ler için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$$

eşitsizliğini sağlayan bir $B > 0$ sabiti bulunabiliyorsa bu durumda $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}, B$ Bessel sınırı ile bir Bessel dizisidir.

İspat. Bessel şartının H 'daki elemanların tümü için sağlandığını ispatlamamız gerekmektedir. Bunun için bir $g \in H$ elemanı alalım ve Bessel şartının sağlanmadığını kabul edelim. Yani H 'daki bir g elemanı için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle g, f_k \rangle|^2 > B \|g\|^2$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda sonlu bir $F \subset \mathbb{N}$ kümesi vardır, öyle ki

$$\sum_{k \in F} |\langle g, f_k \rangle|^2 > B \|g\|^2$$

'dir. V H 'da yoğun olduğundan bu ifade

$$\sum_{k \in F} |\langle h, f_k \rangle|^2 > B \|h\|^2$$

olacak şekilde bir $h \in V$ 'nin varlığını da gerektirir. Oysa bu bir çelişkidir. O halde her $g \in H$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle g, f_k \rangle|^2 \leq B \|g\|^2$$

sağlanır. □

3.2 Ortonormal Bazlar ve Ortonormal Bazlar İçin Bazı Karakterizasyonlar

Tanım 3.2.1. [10] Bir H Hilbert uzayında vektörlerin bir $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisini düşünelim.

(i) Her bir $f \in H$ için

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) e_k \quad (3.2.1)$$

olacak şekilde bir tek $\{c_k(f)\}_{k=1}^{\infty}$ skaler katsayıları var ise $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine H için bir **(Schauder) bazdır** denir.

(ii) Eğer (3.2.1)'de verilen seri her bir $f \in H$ için şartsız yakınsak ise $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bazına **şartsız bazdır** denir.

(iii) Eğer $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir ortonormal sistem ise, yani eğer $\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}$ oluyor ise $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bazına **ortonormal bazdır** denir.

Tanım 3.2.2. [10] Bir $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bazı verilsin. $\{c_k(f)\}_{k=1}^{\infty}$ katsayıları f 'nin bir lineer fonksiyonudur. $f \rightarrow c_k(f)$ dönüşümlerine **katsayı fonksiyonelleri** denir.

Katsayı fonksiyonellerinin sürekli olduğunu da belirtelim. Üstelik $c_k(f)$ 'ler baz tarafından tek türlü tanımlanır. Yani bir $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bazı, $c_k : H \rightarrow \mathcal{K}$ lineer fonksiyonellerinin tek türlü bir dizisini tanımlar. Bu nedenle $\{c_k\}$ 'ya **katsayı fonksiyonelleri dizisi** denir.

Tanım 3.2.3. [10] Bir Hilbert uzayında eğer $\langle f_k, g_j \rangle = \delta_{k,j}$ ise $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ ve $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ dizilerine **biortogonal** denir. $(\{f_k\}_{k=1}^\infty, \{g_k\}_{k=1}^\infty)$ ikilisine de **biortogonal sistem** denir.

Sonuç 3.2.1. [10] $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ 'nın H Hilbert uzayı için bir baz olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ ve $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ katsayı fonksiyonelleri biortogonal bir sistem oluştururlar.

Teorem 3.2.1. [9] $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ 'nın H Hilbert uzayı için bir baz olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $f \in H$ için

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle e_k \quad (3.2.2)$$

olacak şekilde bir tek $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ ailesi vardır, $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ H için bir bazdır ve $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ ile $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ biortogonaldır.

İspat. $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ 'larla eşleşen $\{c_k\}$ katsayı fonksiyonelleri sürekli olduğundan Riesz Temsil Teoremi gereğince her $f \in H$ için

$$c_k(f) = \langle f, g_k \rangle$$

olacak şekilde H 'da bir tek $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ ailesi vardır. Böylece her $f \in H$ için

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle e_k$$

yazılabilir. (3.2.2) eşitliğini sağlayan $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ ile $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ 'nın biortogonal olduğu görülebilir. $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ 'nın H için baz olduğu gerçeği ise bir Hilbert uzayının yansımali oluşundan gelmektedir. $\square$

(3.2.2) eşitliğini sağlayan $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ bazı **dual baz** veya $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ 'lar ile eşleşen **biortogonal baz** olarak adlandırılır.

Ortonormal baz için bazı denk tanımlar vermeden önce her ortonormal sistemin bir Bessel dizisi olduğunu belirtelim. Teorem 3.1.1 'in ispatındaki basamaklara benzer işlemler yapılır ve Lemma 3.1.1 gözönüne alınırsa H için bir $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ ortonormal sisteminin H 'da bir Bessel dizisi olduğu görülür. Gerçekten de;

$m, n \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k=1}^n c_k e_k - \sum_{k=1}^m c_k e_k = \sum_{k=m+1}^n c_k e_k$$

dır. Lemma 2.2.1 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n c_k e_k - \sum_{k=1}^m c_k e_k \right\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n c_k e_k \right\| \\ &= \sup_{\|g\|=1} \left| \left\langle \sum_{k=m+1}^n c_k e_k, g \right\rangle \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|=1} \sum_{k=m+1}^n |c_k \langle e_k, g \rangle| \\ &\leq \sup_{\|g\|=1} \left\{ \left(\sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=m+1}^n |\langle e_k, g \rangle|^2 \right)^{1/2} \right\} \\ &\leq \left(\sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \right)^{1/2} \cdot \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{k=m+1}^n |\langle e_k, g \rangle|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

olur.

$$B = \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{k=m+1}^n |\langle f_k, g \rangle|^2 \right) \text{ denirse,}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k e_k - \sum_{k=1}^m c_k e_k \right\| \leq \sqrt{B} \cdot \left(\sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \right)^{1/2}$$

elde edilir. $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in l_2(\mathbb{N})$ olduğundan, $\left\{ \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right\}_{n=1}^\infty$, $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir.

O halde $\left\{ \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\}_{n=1}^\infty$ da H 'da bir Cauchy dizisidir ve H Hilbert uzayı tam olduğundan $\left\{ \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\}_{n=1}^\infty$ yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum_{k=1}^\infty c_k e_k$ serisi yakınsak ve Sonuç 3.1.1 gereğince $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ ortonormal sistemi H 'da, bir Bessel dizisidir.

Şimdi vereceğimiz teorem, ortonormal baz olan bir $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ ortonormal sistemi için denk şartları verir:

Teorem 3.2.2. *[9] $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ ortonormal sistemi için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ bir ortonormal bazdır.

(ii) Her $f \in H$ için $f = \sum_{k=1}^\infty \langle f, e_k \rangle e_k$ temsili vardır.

(iii) Her $f, g \in H$, $\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, g \rangle$ özelliğini sağlar.

(iv) Her $f \in H$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2$ 'dir.

(v) $\overline{\text{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = H$ 'dir.

(vi) Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için, $\langle f, e_k \rangle = 0$ ise, bu durumda $f = 0$ 'dır.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) : $f \in H$ alalım. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir ortonormal baz olsun. Bu durumda $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ katsayıları var, öyle ki

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$$

olur. Her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\langle f, e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle \delta_{k,j} \rangle = c_j$$

olup (ii) sağlanır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Her $f \in H$ için

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$$

olsun. Her $g \in H$ için

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k, g \right\rangle \\ &= \langle \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_2 + \langle f, e_3 \rangle e_3 + \dots, g \rangle \\ &= \langle f, e_1 \rangle \langle e_1, g \rangle + \langle f, e_2 \rangle \langle e_2, g \rangle + \langle f, e_3 \rangle \langle e_3, g \rangle + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, g \rangle \end{aligned}$$

olur.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal baz iken

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k \quad \text{ve} \quad \langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, g \rangle$$

özellikleri sağlanır. (iii) de $f = g$ alınırsa

$$\begin{aligned}\langle f, f \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, f \rangle \\ \|f\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \overline{\langle f, e_k \rangle} = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2\end{aligned}$$

olur.

(iv) $\Rightarrow$ (v) : Her $f \in H$ için

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2$$

olsun. $\overline{\text{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = H$ olduğunu yani $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın total olduğunu göstermeliyiz:

Lemma 2.2.1 den, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f \in H$ tüm e_k 'lara dik ise, yani $\langle f, e_k \rangle = 0$ ise (iv) 'den

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2 = 0$$

olup $f = 0$ elde edilir. Böylelikle $\{e_k\}$ total olup $\overline{\text{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = H$ 'dır.

(v) $\Rightarrow$ (vi) : Lemma 2.2.1 'nin direkt sonucudur.

(vi) $\Rightarrow$ (i) : $f \in H$ alalım. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal sistem olduğundan bir Bessel dizisidir.

$$g := \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$$

iyi tanımlıdır. Gerçekten de; $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$ serisi şartsız yakınsaktır: $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ Bessel dizisi olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$$

olup $\{\langle f, e_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N})$ dir. Sonuç 3.1.2 gereğince $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$ serisi yakınsak ve

$g := \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$ iyi tanımlıdır. g bu şekilde tanımlanmak üzere tüm $j \in \mathbb{N}$ ler için

$$\begin{aligned}\langle f - g, e_k \rangle &= \left\langle f - \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j, e_k \right\rangle \\ &= \langle f, e_k \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j, e_k \right\rangle \\ &= \langle f, e_k \rangle - \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle - \langle f, e_k \rangle = 0\end{aligned}$$

olup

$$\langle f - g, e_k \rangle = 0$$

olur. (vi) 'den

$$f = g = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$$

sonucuna varılır. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın bir baz olduğunu ispat etmek için sadece bu temsildeki $\{\langle f, e_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın tek türlü olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Bu ise (i) $\Rightarrow$ (ii) ispatında kullanılan yolla sağlanır. $\square$

(iv) ile verilen bağıntı, **Parseval eşitliği (Plancherel denklemi)** olarak bilinir. Daha sonra bu eşitliği sağlayan $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'ların Hilbert uzaylarında frame'lerden bahsedilirken parseval frame oldukları gerçeğiyle karşılaşılacaktır.

Sonuç 3.1.2 'den Teorem 3.2.2 'in aşağıdaki önemli sonucu elde edilir:

Sonuç 3.2.2. [9] Eğer $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir ortonormal baz ise bu durumda her bir $f \in H$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k \quad (3.2.3)$$

şeklinde şartsız (unconditional) yakınsak bir açılıma sahiptir.

İşte bu yakınsama özelliğindeki (3.2.3) açılımı, ortonormal bazları tercih etmemizin temel sebebidir.

Her ayrılabilir Hilbert uzayında bu açılımın yapılabilmesi imkanı oldukça avantajlı bir durumdur.

Teorem 3.2.3. [9] Her ayrılabilir Hilbert uzayı bir ortonormal baza sahiptir.

İspat. Bakınız [9], Sayfa 57. $\square$

NOT: Pratikte kullanım açısından, en uygun bazlar ortonormal olanlarıdır. Zaten ileride de bazların diğer tipleri için (3.2.3) eşitliğinin daha karmaşık bir ifade ile yer değiştirdiğini göreceğiz. Ayrıca belirtelim ki; herhangi bir $\{e_k\}$ dizisinin, bir ortonormal baz olması şartı oldukça ağırdır, ancak ortonormal bazların mevcut

olması da yeterli değildir. Bu ortonormal bazları inşaa etme kabiliyetine de sahip olmamız gerekir. Ancak, extra bazı şartları sağlatarak ortonormal baz inşaa etmenin kolay bir iş olmadığını söyleyelim. Burada, verilen bir bazdan bir ortonormal baz inşaa etmek için Gram-Schmidt ortonormalleştirmesini kullanmak akla ilk olarak gelebilir ve ortonormal baz inşaa işinin aslında oldukça kolay olduğu düşünülebilir. Ama bu düşünce sonuçları açısından daima iyi bir fikir değildir. Bu işlem bazların özel özelliklerine zarar verebilmektedir. Örneğin Gabor ve Wavelet bazların özel yapıları bu işlem neticesinde kaybolmaktadır.

Teorem 3.2.4. [9] Her ayrılabilir sonsuz boyutlu H Hilbert uzayı $l_2(\mathbb{N})$ 'ye izometrik izomorfiktir.

İspat. Bakınız [9], Sayfa 57. □

Örnek 3.2.1. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere k -yıncı koordinatı 1, diğer koordinatları 0 olan $\{e_k\}$ dizisini alalım. Bu durumda $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $l_2(\mathbb{N})$ için bir ortonormal bazdır.

Teorem 3.2.5. [9] $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, H için bir ortonormal baz olsun. Bu durumda H için bütün ortonormal bazlar, $U : H \rightarrow H$ üniter bir operatör olmak üzere $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ şeklindeki dizilerdir.

İspat. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, H için bir ortonormal baz olsun. $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N})$ olmak üzere $U : H \rightarrow H$,

$$U \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

operatörünü tanımlayalım. U , H 'dan H 'ya sınırlı, birebir ve örten bir dönüşüm olup

$$f_k = Ue_k$$

dır.

$$f, g \in H \text{ için } f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k \text{ ve } g = \sum_{k=1}^{\infty} \langle g, e_k \rangle e_k \text{ yazılabilir.}$$

U dönüşümünün tanımı ve Teorem 3.2.2 'den,

$$\begin{aligned}
\langle U^*Uf, g \rangle &= \langle Uf, Ug \rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle f_k, \sum_{k=1}^{\infty} \langle g, e_k \rangle f_k \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \overline{\langle g, e_k \rangle} \\
&= \langle f, g \rangle
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $U^*U = I$ olması anlamına gelir ki, bu sonuç, U örten olduğundan U 'nun üniter operatör olması demektir. Diğer taraftan U bir üniter operatör ise bu durumda

$$\langle Ue_k, Ue_j \rangle = \langle U^*Ue_k, e_j \rangle = \langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}$$

yani $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir ortonormal sistemdir. $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın bir baz olduğu ise Teorem 3.2.2 'den elde edilir. $\square$

H 'da bir $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi normleştirilmiş vektörlerin bir dizisi ise ve Teorem 3.2.2 'de (iv) ile verilen Parseval denklemini sağlıyorsa $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ H için bir ortonormal bazdır:

Önerme 3.2.1. *[9] $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ H 'da normleştirilmiş vektörlerin bir dizisi olsun ve her $f \in H$ için*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2$$

sağlansın. Bu durumda $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ H için bir ortonormal bazdır.

3.3 Riesz Bazları, Dualleri ve Riesz Bazları İçin

Bazı Karakterizasyonlar

Teorem 3.2.5 'de bir tek ortonormal baz üzerinden hareketle üniter operatörler vasıtasıyla tüm ortonormal bazları karakterize ettik. Şimdi de bir tek ortonormal baz üzerinden hareketle sınırlı, bire-bir ve örten operatörler vasıtasıyla bütün Riesz bazlarının karakterize edilebileceğini söyleyeceğiz:

Tanım 3.3.1. [9] H için bir Riesz bazı, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, H için bir ortonormal baz ve $U : H \rightarrow H$ sınırlı-bijektif bir operatör olmak üzere $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ formunda bir dizidir.

Bir Riesz bazı aracılığıyla $f \in H$ elemanın (3.3.1) şeklindeki açılımı, ortonormal bazlar aracılığıyla elde ettiğimiz (3.2.3) ifadesinden daha detaylıdır:

Teorem 3.3.1. [9] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ H için bir Riesz bazı ise bu durumda, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir Bessel dizisidir. Bunun yanısıra, H 'da bir tek $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi vardır öyle ki; her $f \in H$ için

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k \quad (3.3.1)$$

dır. Ayrıca $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi de bir Riesz bazıdır ve (3.3.1) serisi her $f \in H$ için şartsız yakınsaktır.

İspat. $f \in H$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, Ue_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle U^*f, e_k \rangle|^2 = \|U^*f\|^2 \\ &\leq \|U^*\|^2 \|f\|^2 \\ &= \|U\|^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

olup, $B = \|U\|^2$ olmak üzere, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir Bessel dizisidir. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ Riesz bazı ise, Riesz baz tanımı gereğince, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir ortonormal baz ve U sınırlı, bijektif (birebir ve örten) bir operatör olmak üzere, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ yazılabilir. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal baz iken, her $f \in H$ elemanı $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$ şeklinde bir açılıma sahipti. Bunu kullanarak; $U^{-1}f$ 'nin açılımına bakalım;

$$U^{-1}f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle U^{-1}f, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, (U^{-1})^* e_k \rangle e_k$$

olur.

$$g_k := (U^{-1})^* e_k$$

olarak tanımlarsak, f 'nin temsili;

$$\begin{aligned} f &= UU^{-1}f = U \left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, (U^{-1})^* e_k \rangle e_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, (U^{-1})^* e_k \rangle Ue_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır.

(3.3.1) eşitliğini sağlayan ispat içinde inşaa edilen bu $\{g_k\}$ dizisinin tek olduğunu görelim:

İlk olarak, eğer bazı $c_k(f)$ ve $d_k(f)$ katsayıları için,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) f_k = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(f) f_k \quad (3.3.2)$$

sağlanıyor ise, (3.3.2) eşitliklerinin her ikisine de U^{-1} operatörü uygulanarak ve $\{e_k\}$ 'nın baz olduğu bilgisi kullanılarak her $k \in \mathbb{N}$ için $c_k(f) = d_k(f)$ olduğu görülür. Bu sonuç, her Riesz bazının bir baz olduğu anlamını da içinde barındırır. Şimdi, $\{g_k\}$ ve $\{h_k\}$, her $f \in H$ için

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, h_k \rangle f_k \quad (3.3.3)$$

eşitliklerini sağlayan H 'da iki dizi ise her $k \in \mathbb{N}$ için $g_k = h_k$ olduğunu göstermemiz gerekir. Yukarıdaki bilgiler ışığında (3.3.3) 'den, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\langle f, g_k \rangle = \langle f, h_k \rangle$$

eşitliği elde edilir ve Sonuç 2.2.1 'den $g_k = h_k$ istenen eşitliğine ulaşılır.

Şimdi de $\{g_k\}$ 'nın da Riesz bazı olduğunu gösterelim:

U sınırlı, biyektif bir operatör idi. $(U^{-1})^*$ da sınırlı ve biyektif bir operatör olduğundan $g_k := (U^{-1})^* e_k$ tanımlanışı ve Riesz bazı tanımı gereğince, $\{g_k\}$ da Riesz bazıdır.

Son olarak;

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ Riesz bazı Bessel dizisi olduğundan, (3.3.1) ile verilen seri unconditional (şartsız) yakınsaktır. $\square$

Tanım 3.3.2. [9] (3.3.1) eşitliğini sağlayan bir tek $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin **dual Riesz bazı** denir.

Ayrıca $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın duali de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'dır. Birbirlerinin duali olan $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'ya bir **dual Riesz bazı çifti** denir.

(3.3.1) 'un simetrik versiyonu mümkün olup, ayrıca bir Riesz bazı ve onun dual Riesz bazı, önemli bir ortogonalite ilişkisi sağlar:

Sonuç 3.3.1. [9] Bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ dual Riesz bazı çifti için aşağıdakiler sağlanır:

(i) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ biortogonaldır.

(ii) Her $f \in H$ için,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle g_k \quad (3.3.4)$$

dir.

Bir Riesz bazı, "**karşıt eşitlik (opposite equality)**" diye isimlendirilen aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

Önerme 3.3.1. [9] Eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$, H için bir Riesz bazı ise bu durumda, $A, B > 0$ sabitleri vardır, öyleki; her $f \in H$ için,

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (3.3.5)$$

dir. A sabiti için mümkün en büyük değer $\frac{1}{\|U^{-1}\|^2}$ ve B için mümkün en küçük değer $\|U\|^2$ 'dir.

İspat. $f \in H$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, Ue_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle U^*f, e_k \rangle|^2 \\ &= \|U^*f\|^2 \leq \|U^*\|^2 \|f\|^2 = \|U\|^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

olup $B = \|U\|^2$ bulunur.

$$\begin{aligned} \|f\| &= \|(U^*)^{-1}U^*f\| \leq \|(U^*)^{-1}\| \cdot \|U^*f\| = \|U^{-1}\| \cdot \|U^*f\| \\ &\Rightarrow \frac{1}{\|U^{-1}\|} \|f\| \leq \|U^*f\| \\ &\Rightarrow \frac{1}{\|U^{-1}\|^2} \|f\|^2 \leq \|U^*f\|^2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\|U^{-1}\|^2} \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

olup $A = \frac{1}{\|U^{-1}\|^2}$ elde edilir. □

Şimdi vereceğimiz teorem, Riesz bazı olan bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için denk bir şart verir. Teoremdeki (3.3.6) şartı, bazı yazarlar tarafından Riesz bazının tanımı olarak verilmektedir.

Teorem 3.3.2. [9] H 'da $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi için aşağıdaki şartlar denktir:

(i) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ H için bir Riesz bazıdır.

(ii) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ H 'da totaldir ve $A, B > 0$ sabitleri vardır, öyleki; her sonlu $\{c_k\}$ skaler dizisi için

$$A \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2 \leq B \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad (3.3.6)$$

sağlanır.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) : $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın Riesz bazı olduğunu kabul edelim ve tanımdaki gibi $\{Ue_k\}$ formunda yazalım. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\langle f, f_k \rangle = 0$ olsun. Buradan $\langle f, Ue_k \rangle = 0$ olup $f = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ H 'da tamdır.

Bir sonlu $\{c_k\}$ skaler dizisi verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2 &= \left\| U \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right\|^2 \\ &\leq \|U\|^2 \cdot \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right\|^2 \\ &= \|U\|^2 \cdot \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right\rangle \\ &= \|U\|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{c_k} \langle e_k, e_k \rangle \\ &= \|U\|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

ve

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2 &= \left\| U^{-1} U \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right) \right\|^2 \leq \|U^{-1}\|^2 \cdot \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\|U^{-1}\|^2} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right\|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2 \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

(3.3.7) ve (3.3.8) 'dan

$$\frac{1}{\|U^{-1}\|^2} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2 \leq \|U\|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

dır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Bakınız: [9], sayfa: 62. □

Eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir Riesz bazı ise, (3.3.6) eşitsizliğini sağlayan $A, B > 0$ sayıları sırasıyla **alt-Riesz sınırı** ve **üst-Riesz sınırı** olarak adlandırılır. Bu sınırlar tek değildir. A için mümkün olan en büyük değer ve B için mümkün olan en küçük değere **optimal Riesz sınırları** denir.

Örnek 3.3.1. $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ olmak üzere $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesi $l_2(\mathbb{N})$ Hilbert uzayı için bir ortonormal baz olup, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{2e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesi $l_2(\mathbb{N})$ Hilbert uzayında bir Riesz bazıdır.

Bunu göstermek için Teorem 3.3.2 'i kullanalım:

Öncelikle; $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{2e_k\}_{k=1}^{\infty}$ totaldir:

$k \in \mathbb{N}$ için $\langle f, f_k \rangle = 0$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \langle f, f_k \rangle &= 2 \langle f, e_k \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle f, e_k \rangle &= 0 \\ \Rightarrow f &= 0 \quad (e_k \text{ total olduğundan}) \end{aligned}$$

olduğundan, $\{f_k\}$ totaldir.

Şimdi $\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2$ değerine bakalım:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2 &= \|c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + \dots + c_n f_n + \dots\|^2 \\ &= \|(2c_1, 2c_2, 2c_3, \dots, 2c_n, 2c_{n+1}, \dots)\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |2c_k|^2 \\ &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \end{aligned}$$

olup, $A = 4, B = 4$ Riesz sınırları ile $\{f_k\}$ bir Riesz bazıdır.

Tüm sonlu $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizileri için (3.3.6) eşitsizliğini sağlayan bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine bir **Riesz dizisi** denir.

Aşıkardır ki; eğer (3.3.6) şartı bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesi için sağlanıyorsa, bu durumda, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın her bir alt dizisi için de sağlanır:

Sonuç 3.3.2. [9] Bir Riesz dizisinin her alt ailesi de bir Riesz dizisidir.

Tanım 3.3.3. [9] (3.3.6) şartı, $A = B = 1$ ile sağlanırsa, $\{f_k\}$ dizisi ortonormaldir.

Teorem 3.3.3. [10] H 'da bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi için aşağıdakiler denktir:

- (i) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ H için bir Riesz bazıdır.
- (ii) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ total bir Bessel dizisidir ve biortogonal olan total bir $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ Bessel dizisine sahiptir.

İspat. Bakınız [10], sayfa: 67,68. □

Önerme 3.3.2. [9] $\overline{\text{Span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}} = H$ ve tüm sonlu $\{c_k\}$ skaler dizileri için

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad (3.3.9)$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ H için bir ortonormal bazdır.

İspat. Önermedeki varsayımlar, Teorem 3.3.2 gereğince, $\{f_k\}$ 'nın H için bir Riesz bazı olduğunu söyler. Bu durumda H için $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal bazını alarak, uygun bir sınırlı-tersinir U operatörü için $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ yazabiliriz.

Buradan, tüm $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N})$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2 = \left\| U \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right) \right\|^2$$

olduğundan (3.3.6) eşitsizliğindeki $A = B = 1$ Riesz sınırları olup Teorem 3.3.2 'nin ispatındaki açılımlarla, $B = \|U\|^2 = 1$ ve $A = \frac{1}{\|U^{-1}\|^2} = 1 \Rightarrow \|U^{-1}\| = 1$ olduğu açıktır.

Önerme 3.3.1 gereğince, her $f \in H$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = \|f\|^2$ sonucuna ulaşılır. (3.3.9) varsayımı her $k \in \mathbb{N}$ için $\|f_k\| = 1$ olduğu anlamını taşımaktadır. Dolayısıyla Önerme 3.2.1 'den $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ H için bir ortonormal bazdır. □

Sonuç olarak her Riesz bazı, ortonormal baz değildir. Bir Riesz bazının ortonormal baz olması için A, B Riesz sınırlarının 1 olması gerekir.

Aşağıda verilen teorem bazların topolojik izomorfizmalar altında korunduğunu ifade etmektedir. Bu teoreme dayanarak, bu bölümde ele aldığımız ortonormal bazlar ve Riesz bazlarının da topolojik izomorfizmalar altında korunduğu elbette söylenebilir. Bu ifadelerin ispatları [10] numaralı kaynakta mevcuttur.

Teorem 3.3.4. [10] *Bazlar topolojik izomorfizmalar altında korunurlar. Yani eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ X Hilbert uzayı için bir baz ve $S: X \rightarrow Y$ bir topolojik izomorfizma ise, $\{Sf_k\}_{k=1}^{\infty}$ da Y Hilbert uzayı için bir bazdır.*

İspat. Eğer y , Y 'nin herhangi bir elemanı ise $S^{-1}y \in X$ 'dir. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ X için bir baz olduğundan X 'in her bir elemanı için

$$S^{-1}y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

olacak şekilde bir tek $\{c_k\}$ skalerlerin dizisi mevcuttur. S sürekli olduğundan

$$S(S^{-1}y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k Sf_k$$

yazılır. Şimdi y 'nin

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k Sf_k$$

şeklinde bir başka temsiliinin olduğunu kabul edelim. Bu durumda S^{-1} sürekli olduğundan

$$S^{-1}y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k f_k$$

sonucu elde edilir ki, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ baz olduğundan her k için

$$b_k = c_k$$

olur. Dolayısıyla $\{Sf_k\}_{k=1}^{\infty}$, Y için bir bazdır. □

3.4 Ortonormal Bazlar ve Sinyal İşleme Üzerine Bir Uygulama

3.4.1 Sinyal ve Sinyal İşleme

Sinyal, bilgi içeren fiziksel niceliklerdir. Bu fiziksel nicelikleri yazınsal olarak belirtmek için, sinyalleri matematiksel şekilde ifade ederiz. Matematik diliyle, bir f **sinyali** dendiğinde, X bir Banach uzayı veya Hilbert uzayı ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olmak üzere, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ bir kompleks değerli fonksiyonel kastedilmektedir. Burada, X uzayının farklı seçilişleri ile, değişik türden sinyaller elde edilir. Örneğin;

- $X = \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, bir sürekli-zaman sinyali,
- $X = \mathbb{Z}$ veya $X = \mathbb{N}$ olmak üzere, f , ayrık zamanlı sinyali,
- $X = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$ alındığında f sınırlı zaman sinyali olmaktadır.

Böyle sinyaller arasında, aşağıdaki sınıflandırmalar da yapılabilir:

- $f(t) = f(t + kt)$, $t \in \mathbb{R}^+$ ve $k \in \mathbb{Z}$ ise f 'ye t -periyodik sinyal
- $f \in L_2(\mathbb{R})$ veya $f \in l_2(\mathbb{Z})$ ise f 'ye sonlu enerji sinyali
- $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ veya $f \in l_\infty(\mathbb{Z})$ ise f 'ye sınırlı sinyal
- $f \in L_1(\mathbb{R})$ ise f 'ye integtallenebilir sinyal
- $f \in l_1(\mathbb{Z})$ ise f 'ye toplanabilir sinyal denir.

Sinyallere örnek olarak, insan sesi, elektromagnetik dalgalar, lazer ve kızıl ötesi dalgalar, devrelerde gözlemlenebilen akım ve potansiyel fark, ... vs. verilebilir.

3.4.2 Sinyal İletiminde Sampling (Sinyalin Örneklenmesi) ve Analog-Digital Dönüşüm

Sinyal dediğimiz bilgi taşıyan fiziksel nicelikleri temsilde kullandığımız matematiksel fonksiyonları iki geniş sınıfa ayırabiliriz:

- Sürekli değişkenli matematiksel fonksiyonlar ($\leadsto$ sürekli değişkenli sinyaller)

- Ayırık değişkenli matematiksel fonksiyonlar ($\leadsto$ ayırık değişkenli sinyaller)

Sinyallerde değişken parametresi genelde zaman ya da frekans olmaktadır. Zaman değişkeni olarak düşünöldüğünde, sinyaller; sürekli zaman sinyalleri ve ayırık zamanlı sinyaller şeklinde gruplandırılır.

Sürekli zaman sinyalleri **analog sinyaller**dir. Zamanın her anı için sinyalin belli bir değeri vardır ve sinyalin t_i^- ve t_i^+ anındaki aldığı değeler aynıdır. Hız, müzik sinyali, ... analog sinyallerdir.

Ayrık zamanlı sinyaller **dijital sinyal** olarak adlandırılır. Zamanın belli anlarında değeler alan yani sürekli olmayan sinyallerdir.

Dış dünyadaki fiziksel büyüklüklerin çok büyük bir kısmı analog değelerdir. Örneğin; ısı, sıcaklık, ağırlık, nem oranı, ışık şiddeti, ses şiddeti, vs. gibi büyüklükler analog olarak değişirler. Dış dünyanın daha çok analog değelerden oluşmasına karşılık, bilgi işleyen cihazlar (dijital sistemler, mikroişlemciler, bilgisayarlar, radyo, tv, ses sistemleri, ...) dijitaldir. Bunun nedeni, dijital sinyal işlemenin paraziti azaltması ve sinyali işleme esnekliğine (sinyali kaydetmek, iletmek, saklayıp yeniden üretebilmek, sinyale düzenleme ve değişiklik katabilmek, ... vs.) sahip olmasıdır. Dijital sistemler bilgiyi daha güvenli, daha hızlı işler ve değerlendirir.

Dijital sistemlerin dış dünya ile bağlantılarını sağlamak için, ölçölen fiziksel büyüklüklerin dijital/analog ve analog/dijital dönüşömlerinin yapılması gerekir. Bu işlemler **ADC** (analog-dijital convertor) ve **DAC** (dijital-analog convertor) 'ler sayesinde gerçekleşir. ADC analogdan dijitale, DAC ise dijitalden analoga dönüşüm yapan devreleri ifade eder.

Örneğin bilgisayarlardaki ses kartları, hem analogdan dijitale, hem de dijitalden analoga dönüşüm yaparlar. Mesela, bilgisayara ses kaydetmek istiyoruz. Bu ses ilk önce mikrofon sayesinde analog sinyal olarak bilgisayara iletilir. Bilgisayarda ise, analog sinyal, dijital bilgiye çevrilir ve harddiskte depolanır. Daha sonra bu sesi dinlemek istediğimizde dijital bilgi, tekrar analog sinyale çevrilir ve hoparlörde ses olarak duyulur.

Bu dönüştürücülerin gerçekleştirdiğı her dönüşümde veri üzerinde belli bir kayıp olduğunun unutulmaması gerekir.

Sonuç olarak; teknolojik gelişmeler, dijital bilginin kullanım alanını hızla artırmak-

tadır. Hayatımızın her alanında (haberleşme, akıllı ev teknolojileri vs.) dijital bilgiyi kullanan gereçler bulunmaktadır. Dolayısıyla dış dünyadaki analog bilgilerin dijital bilgiye, dijital bilgilerin de analog bilgiye dönüşümlerini sağlayan çeviricilerin önemi artmaktadır.

Analog - Dijital Sinyal Dönüşümü ve Örnekleme (Sampling)

Bilgisayarlar analog sinyaller üzerinde direkt olarak işlem yapamazlar. Dijital sinyal işlemenin birçok avantajından dolayı, analog siyaller üzerinde işlem yapmak gerektiğinde bu analog sinyal bir bilgisayar tarafından işlenmeden önce, dijital forma dönüştürülür:

Yaygın bir örnek, sürekli bir zaman sinyali olan ses dalgalarını, bir diskrete (süreksiz) zaman sinyali olan örneklerin bir dizisine dönüştürme işi, bir örnekleme (sampling) dir.

Bir analog sinyalin dijital karşılığının alınmasında iki önemli kriter vardır; örnekleme ve her örnek için kaç bit kullanılacağı. Ne kadar sık örnekleme yapılmışsa ve bunun için ne kadar çok bit kullanılmışsa tekrar üretim o kadar kaliteli olur. Bit derinliği ise ne kadar büyükse, o kadar çok ses karakteristiği saklanabilir ve yeniden oluşturulabilir demektir. Örnekleme oranı saniyede kaç bin kez tekrarlandığıyla ölçülür ve kHz (kilohertz) ile ifade edilir. Sinyal hangi sıklıkta örneklenirse, o kadar iyi kaydedilmiş olur.

Dijital sinyalin, analog sinyale dönüştürülmesinde, örneklerin alındığı bu noktaların birleştirilmesi gerektiğinden noktaların sıklığı önemlidir. Yani örnekleme sıklığının uygun seçilmesi gerekir. Aksi halde orijinal sinyal, tekrar elde edilemez. Çok fazla örnek göndermek de, hem zaman ve enerji israfı, hem de elektronik devrelerin ihtiyacından fazla çalıştırılması anlamına gelir.

Örnekleme işlemi için ise, öncelikle sinyalin band-sınırlı (band-limited) olması gerekecektir. Böyle bir band sınırının, örneğin B Hz olduğunu kabul edelim. Bu koşul sağlandıktan sonra örneklerin zamanda eşit aralıklarla alınması gerekecektir. Bu homogen aralığı sağlayan kavram, "örnekleme frekansı" olarak anılmaktadır ve

F_s ile gösterilmektedir. Örnekleme frekansı F_s , band-sınırlı sinyalin (maksimum B frekanslı) frekansının en az iki katı kadar olmalıdır koşulunu sağlamalıdır. ($F_s \geq 2B$)

Nyquist kuralı olarak anılan bu prensibin garanti edilebilmesi durumunda ancak band-sınırlı analog sinyal, tekrar örneklerinden elde edilebilmektedir. Bunun sağlanmaması durumunda tekrar elde etme (reconstruction) mümkün olmayacaktır.

Band dışında Fourier dönüşümü sıfır olan sinyal, **band-sınırlı**dır.

Sinyalin sonsuz büyüklükteki $((-\infty, \infty))$ band genişliğine sahip olması durumunda, sinyalin enerjisinden, dolayısıyla da band genişliğinden bahsetmek mümkün olmaz. Bu yüzden örneklemeye dahil olacak sinyalin band-sınırlı ve Fourier dönüşümünün mevcut olması gerekir.

Dijital - Analog Dönüşüm ve Shannon's Sampling Teoremi

Analog kaynaktan alınan ses, dijitalde istenilen değişiklikler yapıldıktan sonra, tekrar kulağın yapısına uyması için, analoga çevrilir, ya da dijital üretilmiş bir ses kulağın yapısına uyması için analoğa çevrilir.

Sampling problemine geçmeden önce fourier dönüşümü ve bir fonksiyonun desteği tanımını verelim.

Uygulamada, sinyaller çoğunlukla, zaman-değişiklik sürecinde sinyali izleme ve düzenleme (değişiklik katma) veya şiddetine müdahale etme ve böylelikle sinyali temin de edebilme olanaklarının mümkünatı için, ölçülebilirdir. Ölçülebilir bu sinyallerin, hızlı ve etkili bir değerlendirme ve yorumlamaya izin veren bir formda oluşturulması gerekir. Bunu yapabilmek için, f sinyalinin dönüşüm altındaki $\tilde{f}$ görüntüsü daha kolay yorumlanabilir ve analiz edilebilir olduğu için, f sinyaline dönüşüm uygulanır:

Tanım 3.4.1. $[9]$ $f \in L_1(\mathbb{R})$ için, $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ **fourier dönüşümü**;

$$\hat{f}(\gamma) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \gamma} d(x) \quad , \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.4.2. $[9]$ Bir f fonksiyonunun desteği (support), f altındaki görüntüsü sıfır olmayan elemanların kümesidir.

Örnekleme problemini kısaca şu şekilde ifade edebiliriz:

" I sayılabilir bir indis kümesi olmak üzere, eğer sadece $\{f(\lambda_k)\}_{k \in I}$ fonksiyon değerlerinin sayılabilir bir kümesini biliyorsak, bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunu nasıl inşaa edebiliriz?"

Verilen sayılabilir bir küme üzerinde aynı değer alan sonsuz çoklukta fonksiyon vardır. Bu nedenle problemi daha iyi ortaya koymak için f fonksiyonu üzerinde ekstra şartlar koymamız gerekir. Genelde, bu, f 'nin belli bir fonksiyon uzayına ait olma zorunluluğu koşularak yapılır. Klasik olarak, Fourier dönüşümünün kompakt desteğe sahip olan fonksiyonların (band-sınırlı fonksiyonlar) bir uzayı seçilir. Bu uzay,

$$PW := \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) \quad : \quad \text{supp } \hat{f} \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\}$$

şeklinde tanımlanan **Paley-Wiener uzayı**dır.

L_2 'deki fonksiyonlar ele alındığından, Paley-Wiener uzayı, fonksiyonların denklik sınıfından oluşur, ancak bu fonksiyonların fourier dönüşümleri kompakt desteğe sahip olduğundan, bu denklik sınıflarının herbiri, sürekli bir fonksiyon içerir.

Şimdi Paley-Wiener uzayının, bir tek fonksiyonun ötelemelerinden oluşan bir ortonormal baza sahip olduğunu söyleyeceğiz:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan *sinc* fonksiyonunu tanımlayalım.

Shannon's Sampling teoremi, Paley-Wiener uzayında, herhangi bir sürekli fonksiyonun, tamsayılarındaki örneklerinden, yeniden tamamen inşaa edilebileceğini söylemektedir:

Teorem 3.4.1. [9] (*Shannon-Sampling Teoremi*) $\{\text{sinc}(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ fonksiyonları, PW uzayı için bir ortonormal baz oluşturur. Eğer, $f \in PW$ sürekli ise, bu durumda,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \text{sinc}(x - k)$$

$L_2(\mathbb{R})$ 'deki simetrik kısmi toplam ile yakınsak ve tüm $x \in \mathbb{R}$ 'ler için noktasal yakınsaktır.

Burada $L_2(\mathbb{R})$ 'deki simetrik kısmi toplam ile yakınsamasından,

$$\begin{aligned} S_0(x) &= f(0)\text{sinc}(x) \\ S_1(x) &= f(-1)\text{sinc}(x+1) + S_0(x) + f(1)\text{sinc}(x-1) \\ S_2(x) &= f(-2)\text{sinc}(x+2) + S_1(x) + f(2)\text{sinc}(x-2) \\ &\dots \\ S_n(x) &= f(-n)\text{sinc}(x+n) + S_{n-1}(x) + f(n)\text{sinc}(x-n) \\ &\dots \end{aligned}$$

olmak üzere, bir $s \in L_2(\mathbb{R})$ için

$$\|s - S_n\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |s(x) - S_n(x)|^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olması kastedilmektedir.

Her $x \in \mathbb{R}$ için noktasal yakınsamadan kasıt ise

$$U_n(x) = \sum_{k=-n}^n f(k)\text{sinc}(x-k)$$

olmak üzere $\{U_n(x)\}$ dizisinin $f(x)$ 'e $\mathbb{C}$ 'de yakınsak olmasıdır.

Burada belirtelim ki; uygun ayarlama yapmak kaydıyla, Teorem 3.4.1 'deki sonuç, Fourier dönüşümü keyfi belirlenmiş bir aralıkta desteğe sahip olan fonksiyonlar için de pekala verilebilir. Örneğin; $f \in L_2(\mathbb{R})$, bazı $\alpha > 0$ skalerleri için, $\text{supp } \hat{f} \subseteq [-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ olan, sürekli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{\alpha}\right)\text{sinc}(\alpha x - k) \quad (3.4.1)$$

şeklinde, f 'nin örneklerinden yeniden inşaa edilebilir.

Shannon's Sampling teoremindeki prensip, modern iletişimin temelini oluşturur. Pratikte gözlemlenebilen çoğu sinyal, sürekli bir değişkene (genelde de zaman değişkenine) bağlıdır. Böyle bir sinyalin işlenmesi yapılırken, örneklemelerin bir dizisi kullanılabilir ve sinyal depolanabilirse, sinyal işleme işi kolaylaşır. Teorem 3.4.1 'deki varsayımlar altında bu mümkündür: Bir $f \in PW$ fonksiyonu ile ilgili tüm bilgiler $\{f(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ skaler dizilerinde barındırılır.

Somut bir durum olarak, bir müzik parçasını düşünelim. Temelde, bütün frekanslar gözlemlenebilir, ancak insan kulağı, sadece belli bir oran aralığına ait frekansları işitebilir. (En fazla 20.000 Hz. 'e kadar) Böylece bizim duyabileceğimiz frekansın üstündeki sinyalleri düşünmeyiz ve

$$\text{supp} \hat{f} \subseteq \left[-\frac{40000}{2}, \frac{40000}{2}\right] = [-20000, 20000]$$

olacak şekilde band-sınırlı olan sinyalleri ve sonuçlarını gözlemlemeye çalışırız. Teorem 3.4.1, band-sınırlı olan bu sinyalin, yeterince yoğun, eşit mesafeli zaman aralıklarında, bu sinyalin kendi örneklerinden, yeniden inşaa edilebileceğini göstermektedir. Yani (3.4.1) 'daki şekilde uygun bir değerlendirme yoluyla bu sinyal $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere sinyalden alınan $\frac{k}{40000}$ birim aralıklardaki örneklerinden yeniden oluşturulabilir. Bu prensip, CD-player'lerde ve bir analog sinyalin digital bir sinyale dönüştürülmesinin ihtiyaç arz ettiği diğer başka yerlerde de kullanılır.

Böylece bir Hilbert uzayı olan PW uzayının bir ortonormal bazının, band-sınırlı analog bir sinyali, örnekleri olan dijital bir sinyalden (3.4.1) temsili yardımıyla nasıl inşaa edilebileceğini görmüş oluruz. Band-sınırlı olmayan sinyallerin benzer inşaa metotları olup olmadığı, yani Shannon Sampling Teoreminin genelleştirmelerinin olup olmadığı güncel araştırma konularındandır. Ortonormal bazların bu uygulaması aslında ağır şartlar istemektedir. Bu yüzden daha hafif şartları isteyen temsiller farklı uygulamalar için talep edilen bir durumdur. Bu sebeple diğer bölümlerde bu husustaki bir uygulamadan kısaca bahsedilecektir.

BÖLÜM 4

HİLBERT UZAYLARINDA FRAME'LER

Bu bölümde Hilbert uzaylarında frame'lerin genel tanımından ve özelliklerinden bahsedilecek ve bazı frame örnekleri de verilerek frame'lere ilişkin bir teori sunulacaktır. Sonrasında frame'lerin kanonik ve alterne dualleri tanıtılıp, frame'lerin, Riesz bazları ile olan ilişkisine değinilecek ve frame'ler için bazı karakterizasyonlar verilecektir. Ve son olarak 3. Bölümde bahsi geçen ortonormal bazlara ilişkin uygulamaya, bu bölümde benzer bir içerikle frame'ler ışığında yer verilecektir.

4.1 Frame'ler İle İlgili Temel Kavramlar ve Özellikler

Bir H Hilbert uzayında bir $\{f_k\}$ bazının temel özelliği, her $f \in H$ 'nın bazdaki f_k elemanlarının bir sonsuz lineer kombinasyonu olarak,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) f_k \quad (4.1.1)$$

şeklinde temsil edilebilmesidir. Burada $c_k(f)$ katsayıları tektir. Bir frame de, her $f \in H$ için; (4.1.1) 'deki temsile imkan sağlayan H 'da $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ elemanlarının bir dizisidir. Ancak bu temsilde gelecek $c_k(f)$ katsayılarının tek türlü olması gerekmez. Böylece bir frame baz olmayabilir.

Şimdi bu bölümde kullanacağımız temel kavramlara değineceğiz:

$H \neq \{0\}$ ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun.

Tanım 4.1.1. [9] Bir H Hilbert uzayındaki elemanların bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($\{f_k\}_{k \in I}$ elemanların sayılabilir bir ailesi) * dizisine, her $f \in H$ için

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (4.1.2)$$

eşitsizliğini sağlayan $0 < A \leq B < \infty$ katsayıları bulunabiliyor ise bir **frame** denir.

* **NOT:** Eğer $\{f_k\}$ bir frame ise $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2$ serisi non-negatif sayıların mutlak yakınsak bir serisidir. Böylece Teorem 2.4.1 gereğince bu serinin yakınsaması şartsız-

dır. Bu nedenle $\mathbb{N}$ 'nin her bir σ permütasyonu için

$$\sum_n |\langle f, f_{\sigma(n)} \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 < \infty$$

olur. Bu nedenle bir frame'in elemanlarının yeniden düzenlenmesi (sıralarının değiştirilmesi) de bir frame'dir. Bu nedenle, istendiğinde bir frame'yi indekslemede herhangi bir sayılabilir küme kullanılabilir.

Tanımdaki eşitsizliği sağlayan A, B sayıları, sırasıyla, **alt ve üst frame sınırları** olarak adlandırılır. Her $f \in H$ için frame eşitsizliğini sağlayan en büyük $A > 0$ ve en küçük $B > 0$ sayıları **optimal frame sınırları** olarak adlandırılır.

Bir $\{f_k\}_{k \in I}$ frame'i Bessel dizisi olduğundan,

$$T : l_2(\mathbb{N}) \rightarrow H \quad (4.1.3)$$

$$T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

sınırlı-linear bir operatör tanımlar. Bu T operatörüne **sentez (pre-frame) operatörü** denir. T 'nin adjoint operatörü,

$$T^* : H \rightarrow l_2(\mathbb{N}) \quad (4.1.4)$$

$$T^* f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$$

dir ve bu T^* operatörü **analiz operatörü** olarak adlandırılır.

Eğer $\{f_k\}_{k \in I}$ H için bir frame ise bu durumda, **frame operatörü** olarak adlandırılan $S = TT^*$ operatörü,

$$S : H \rightarrow H, \quad Sf = TT^* f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k \quad (4.1.5)$$

şeklinde tanımlıdır ve H üzerinde tersinir bir operatördür.

Her $f \in H$ için,

$$\langle Sf, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \quad (4.1.6)$$

olur. Gerçekten de;

$$\begin{aligned}
\langle Sf, f \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k, f \right\rangle \\
&= \langle \langle f, f_1 \rangle f_1 + \langle f, f_2 \rangle f_2 + \langle f, f_3 \rangle f_3 + \dots, f \rangle \\
&= \langle f, f_1 \rangle \overline{\langle f, f_1 \rangle} + \langle f, f_2 \rangle \overline{\langle f, f_2 \rangle} + \langle f, f_3 \rangle \overline{\langle f, f_3 \rangle} + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2
\end{aligned}$$

dir.

Aşağıdaki lemma, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi için frame olma şartlarının sadece H 'da yoğun bir küme üzerinde sağlandığını kontrol etmenin yeterli geldiğini göstermektedir:

Lemma 4.1.1. [9] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, H 'daki elemanların bir dizisi ve H 'nın yoğun bir V alt kümesindeki tüm f 'ler için $A, B > 0$ sabitleri var, öyleki;

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (4.1.7)$$

şartı sağlansın. Bu durumda $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, A, B sınırları ile H için bir frame'dir.

İspat. (4.1.7) eşitsizliğinin sağlanması durumunda $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın B sınırı ile bir Bessel dizisi olduğu Lemma 3.1.2 'de ispatlanmıştı. Şimdi (4.1.7) eşitsizliğinin sağlanması durumunda alt frame sınırının H 'nın her elemanı için sağlandığını göstereceğiz. T sentez operatörü vasıtasıyla, (4.1.7) ile verilen kabul, her $f \in V$ için

$$A \|f\|^2 \leq \|T^* f\|^2 \quad (4.1.8)$$

anlamına gelir. T^* sınırlı ve V H 'da yoğun olduğundan (4.1.8) 'nin her $f \in H$ için sağlandığı görülür. $\square$

Tanım 4.1.2. [9] H için bir frame, eğer

- Her $k \in I$ için $\|f_k\| = 1$ ise, **normalleştirilmiş frame**
- $A = B$ ise, **tight frame**
- $A = B = 1$ ise, **parseval frame**

- Her $i, j \in \mathbf{I}$ için $\|f_i\| = \|f_j\|$ ise, **uniform frame**
- Uniform frame şartına ek olarak bir de $A = B (= 1)$ şartı sağlanıyor ise, **uniform (parseval) tight frame**
- Frame'deki elemanlardan herhangi biri kaldırıldığında frame olma durumu bozuluyorsa, frame'e **exact frame**
- Eğer frame'den en az bir tane eleman kaldırılabilir ve bu elemanı kaldırma işleminden sonra, frame teşkil eden vektörlerin kümesi hala H için frame olarak kalıyorsa (belki farklı bir frame sınırı ile) **overcomplete**

olarak adlandırılır.

Eğer $\{f_k\}$, H için bir frame ise bu durumda $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = H$ 'dır. Yani eğer, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $f \in H$ bütün f_k 'lara dik ise, bu durumda frame eşitsizliği olarak adlandırılan (4.1.2) eşitsizliği $f = 0$ olduğunu gösterir.

Sık sık H 'da total olmayan dizilerle uğraştığımız olur. Total olmayan bu diziler, H için bir frame oluşturmazlar, fakat, bu dizilerin elemanlarının kapalı lineer gereni için bir frame oluştururlar:

Tanım 4.1.3. *[9] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, H 'da bir dizi olsun. Eğer, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için bir frame ise $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'ya bir **frame dizisi** denir.*

NOT: Burada, $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = H$ özelliğinin sağlayan her $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin frame oluşturmayacağını belirtmekte yarar vardır. H sonlu boyutlu bir Hilbert uzayı iken, H 'da bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = H$ özelliğini sağlıyorsa bu durumda her $f \in H$, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ belirli skaler katsayıları olmak üzere

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

şeklinde bir açılıma sahiptir. Fakat sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayında bunun sağlanması gerekmez. Aşağıda böyle özellikte bir örnek verilecektir. Örneğin çözümü ile ilgili detaylar [8], sf. 98-99 ve [9], sf. 104-105 'de mevcuttur.

Örnek 4.1.1. $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, H için bir ortonormal baz ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$f_k := e_k + e_{k+1}$$

şeklinde $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ dizisini tanımlayalım. Bu durumda

$$(i) \quad \overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^\infty = H;$$

$$(ii) \quad \{f_k\}_{k=1}^\infty \text{ Bessel dizisidir fakat bir frame değildir.}$$

$$(iii) \quad c_k \text{ katsayılarının belirli bir seçilişi için } \sum_{k=1}^\infty c_k f_k \text{ formunda yazılamayan } f \in H \text{ eleman(lar)ı mevcuttur.}$$

Bu çalışmada frameler ile ilgili bahsedeceğimiz teorik bilgilere geçmeden önce, bir kaç frame örneği verelim:

Örnek 4.1.2. $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{i}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{i}{2})\}$ vektörlerinin ailesi $\mathbb{C}^2$ için tight bir frame oluşturur:

Her $f = (g_1, g_2) \in \mathbb{C}^2$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 \\ &= \left| \left\langle (g_1, g_2), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle (g_1, g_2), \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) \right\rangle \right|^2 \\ &\quad + \left| \left\langle (g_1, g_2), \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right) \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle (g_1, g_2), \left(\frac{1}{2}, \frac{-i}{2}\right) \right\rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{g_1 + g_2}{2} \right|^2 + \left| \frac{g_1 - ig_2}{2} \right|^2 + \left| \frac{g_1 - g_2}{2} \right|^2 + \left| \frac{g_1 + ig_2}{2} \right|^2 \\ &= \left(\frac{g_1 + g_2}{2} \right) \overline{\left(\frac{g_1 + g_2}{2} \right)} + \left(\frac{g_1 - ig_2}{2} \right) \overline{\left(\frac{g_1 - ig_2}{2} \right)} \\ &\quad + \left(\frac{g_1 - g_2}{2} \right) \overline{\left(\frac{g_1 - g_2}{2} \right)} + \left(\frac{g_1 + ig_2}{2} \right) \overline{\left(\frac{g_1 + ig_2}{2} \right)} \\ &= |g_1|^2 + |g_2|^2 \\ &= \|f\|^2 \end{aligned}$$

Örnek 4.1.3. Önceki örnekteki vektörlerin uzunluğu

$$\|f_k\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

idi. Bu vektörlerin uzunluğunun değiştirilmesiyle elde edilen; $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}})\}$ vektörlerinin ailesi normalleştirilmiş vektörlerin oluşturduğu, frame sınırı 2 olan bir tight frame'dir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 \\ &= \left| \left\langle (g_1, g_2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle (g_1, g_2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \right|^2 \\ &\quad + \left| \left\langle (g_1, g_2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle (g_1, g_2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{g_1 + g_2}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{g_1 - ig_2}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{g_1 - g_2}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{g_1 + ig_2}{\sqrt{2}} \right|^2 \\ &= \left(\frac{g_1 + g_2}{\sqrt{2}} \right) \overline{\left(\frac{g_1 + g_2}{\sqrt{2}} \right)} + \left(\frac{g_1 - ig_2}{\sqrt{2}} \right) \overline{\left(\frac{g_1 - ig_2}{\sqrt{2}} \right)} \\ &\quad + \left(\frac{g_1 - g_2}{\sqrt{2}} \right) \overline{\left(\frac{g_1 - g_2}{\sqrt{2}} \right)} + \left(\frac{g_1 + ig_2}{\sqrt{2}} \right) \overline{\left(\frac{g_1 + ig_2}{\sqrt{2}} \right)} \\ &= 2|g_1|^2 + 2|g_2|^2 = 2(g_1 \overline{g_1} + g_2 \overline{g_2}) \\ &= 2 \langle f, f \rangle = 2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

Örnek 4.1.4. $\{f_k\}_{k=1}^5 = \{(0, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}), (0, -\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}), (0, 1, 0), (\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, \sqrt{\frac{1}{6}}), (-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, \sqrt{\frac{1}{6}})\}$ cümlesi $\mathbb{C}^3$ için tight bir frame'dir:

Her $f = (g_1, g_2, g_3) \in \mathbb{C}^3$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^5 |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 + |\langle f, f_5 \rangle|^2 \\
&= \left| \left\langle (g_1, g_2, g_3), (0, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}) \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle (g_1, g_2, g_3), (0, -\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}) \right\rangle \right|^2 \\
&\quad + |\langle (g_1, g_2, g_3), (0, 1, 0) \rangle|^2 + \left| \left\langle (g_1, g_2, g_3), (\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, \sqrt{\frac{1}{6}}) \right\rangle \right|^2 \\
&\quad + \left| \left\langle (g_1, g_2, g_3), (-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, \sqrt{\frac{1}{6}}) \right\rangle \right|^2 \\
&= \left| \sqrt{\frac{1}{3}}g_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}g_3 \right|^2 + \left| -\sqrt{\frac{1}{3}}g_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}g_3 \right|^2 + |g_2|^2 \\
&\quad + \left| \sqrt{\frac{5}{6}}g_1 + \sqrt{\frac{1}{6}}g_3 \right|^2 + \left| -\sqrt{\frac{5}{6}}g_1 + \sqrt{\frac{1}{6}}g_3 \right|^2 \\
&= \left(\sqrt{\frac{1}{3}}g_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}g_3 \right) \overline{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}g_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}g_3 \right)} \\
&\quad + \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}g_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}g_3 \right) \overline{\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}g_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}g_3 \right)} + g_2 \overline{g_2} \\
&\quad + \left(\sqrt{\frac{5}{6}}g_1 + \sqrt{\frac{1}{6}}g_3 \right) \overline{\left(\sqrt{\frac{5}{6}}g_1 + \sqrt{\frac{1}{6}}g_3 \right)} \\
&\quad + \left(-\sqrt{\frac{5}{6}}g_1 + \sqrt{\frac{1}{6}}g_3 \right) \overline{\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}g_1 + \sqrt{\frac{1}{6}}g_3 \right)} \\
&= \frac{5}{3} |g_1|^2 + \frac{5}{3} |g_2|^2 + \frac{5}{3} |g_3|^2 \\
&= \frac{5}{3} \|f\|^2.
\end{aligned}$$

Örnek 4.1.5. $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ H için bir ortonormal baz olmak üzere,

(i) $\{e_k\}$ ortonormal bazı, $A = B = 1$ ile bir tight frame-dir. Ayrıca $\{e_k\}$ exact frame'dir:

$\{e_k\} = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ ailesi ortonormal baz olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2$$

Parseval eşitliğini sağlar ve $A = B = 1$ frame sınırı ile tight bir frame'dir. $\{e_k\}$ exact bir frame'dir: Çünkü $\{e_k\}$ ailesinden $k \neq m$ olmak üzere herhangi bir e_m elemanı çıkarıldığı taktirde belirli bir $f \in H$ için $\sum_{k \neq m} |\langle f, e_k \rangle|^2 = 0$ olup, buradan $\{e_k\}$ ailesinin bir frame teşkil etmediği sonucuna varılır.

(ii) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'daki her bir elemanın tekrarlanmasıyla oluşan $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} := \{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \dots\}$ ailesi $A = B = 2$ sınırları ile tight, inexact bir frame'dir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 + \dots \\ &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + \dots \\ &= 2 |\langle f, e_1 \rangle|^2 + 2 |\langle f, e_2 \rangle|^2 + \dots \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

olup, $\{e_k\} = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ ailesi ortonormal baz olduğundan Parseval eşitliğini sağlar.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = 2 \|f\|^2$$

olup, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \dots\}$ ailesi $A = B = 2$ sınırları ile tight bir frame'dir.

Bu aile aynı zamanda inexact bir framedir:

Çünkü $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesinden herhangi bir eleman kaldırıldığında dizinin frame olma durumu bozulmayacaktır. Sözelimi kaldırılan böyle bir eleman f_3 olsun.

Yeni $\{f_k\}_{k=1, k \neq 3}^{\infty}$ dizisi $\{e_1, e_1, e_2, e_3, e_3, \dots\}$ şeklinde olacaktır.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &= 2 |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + 2 |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \\ &= 2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

olup $B = 2$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için bir üst sınırdır. Yine,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= 2 |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + 2 |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\
&\geq |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \\
&= \|f\|^2
\end{aligned}$$

olup $B = 1$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için bir alt sınırdır. f_3 elemanının kaldırılmasıyla yeniden oluşturulan $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi H için bir frame oluşturduğundan, örnekte verilen $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \dots\}$ ailesi inexact bir frame'dir. Bu şekilde davranarak, hangi eleman kaldırılırsa kaldırılsın bu dizinin frame olma durumunun bozulmayacağı görülür.

(iii) Yine sadece e_1 tekrar edilmek üzere, $A = 1$, $B = 2$ sınırları ile,

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} := \{e_1, e_1, e_2, e_3, \dots\}$ frame'si elde edilir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 + \dots \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 \dots \\
&= 2 |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\
&\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \\
&= 2 \|f\|^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 + \dots \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 \dots \\
&= 2 |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \\
&= \|f\|^2
\end{aligned}$$

olup $A = 1$ ve $B = 2$ dir.

(iv) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} := \{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \dots\}$ diyelim. Yani $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $l \in \mathbb{N}$ olmak üzere, her bir vektörü l kez tekrarlayarak, $\frac{1}{\sqrt{l}}e_l$ şeklinde yazılan bir dizi olsun. Bu durumda $A = B = 1$ sınırlarıyla, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ tight, inexact bir frame'dir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 + \dots \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_2}{\sqrt{2}} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_2}{\sqrt{2}} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_3}{\sqrt{3}} \right\rangle \right|^2 \\
&\quad + \left| \left\langle f, \frac{e_3}{\sqrt{3}} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_3}{\sqrt{3}} \right\rangle \right|^2 + \dots \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle f, e_2 \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle f, e_2 \rangle|^2 \\
&\quad + \frac{1}{3} |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \frac{1}{3} |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \frac{1}{3} |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \left| \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{k}} e_k \right\rangle \right|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \\
&= \|f\|^2
\end{aligned}$$

olup $A = B = 1$ frame sınırı ile $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ tight bir frame'dir. Exact değildir, çünkü bu aileden herhangi bir eleman çıkarıldığında bu dizinin frame olma

durumu bozulmamaktadır. Sözelimi $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesinden f_3 elemanı çıkarıldığında $\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \dots\}$ dizisi elde edilir.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &\leq |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &\geq \frac{1}{2} |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle f, e_2 \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \frac{1}{2} \|f\|^2\end{aligned}$$

olup $A = \frac{1}{2}$ ve $B = 1$ frame sınırları ile $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinden f_3 elemanı çıkarılarak elde edilen yeni dizi bir frame'dir.

(v) $\{e_1, \frac{e_2}{2}, \frac{e_3}{3}, \dots\}$ ailesi total ortogonal bir dizi ve H için bir bazdır. Ancak alt frame sınırına sahip olmadığı için frame değildir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + \dots \\ &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_2}{2} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_3}{3} \right\rangle \right|^2 + \dots \\ &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \left| \frac{1}{2} \right|^2 |\langle f, e_2 \rangle|^2 + \left| \frac{1}{3} \right|^2 |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k} \right|^2 |\langle f, e_k \rangle|^2 \\ &= K \cdot \|f\|^2\end{aligned}$$

olup üst frame sınırı mevcuttur. Fakat alt frame sınırı bulunamayacaktır:

Kabul edelim ki her $f \in H$ için bir $D > 0$ sayısı var, öyle ki,

$$|\langle f, e_1 \rangle|^2 + \left| \frac{1}{2} \right|^2 |\langle f, e_2 \rangle|^2 + \left| \frac{1}{3} \right|^2 |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
&\geq D \|f\|^2 \\
&= D (|\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots) \\
&= D |\langle f, e_1 \rangle|^2 + D |\langle f, e_2 \rangle|^2 + D |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots
\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $m = m(D) \in \mathbb{N}$ vardır, öyle ki; her $n > m$ için $\frac{1}{n^2} \leq D$ olur. Fakat $f = e_{m+1} \in H$ elemanı için $\frac{1}{(m+1)^2} \geq D$ olmaktadır. Bu ise bir çelişkidir. O halde bu aile için frame eşitsizliği sağlanmaz Alt frame sınırı mevcut olmadığı için bu aile H için bir frame oluşturamaz.

Örnek 4.1.6. $\{e_k\}_{k=1}^2$, üzerinde bir iç çarpım tanımlı, iki boyutlu V vektör uzayı için bir ortonormal baz olsun. $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = e_1 + e_2$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\{f_k\}_{k=1}^3$, V için bir frame'dir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^3 |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 - e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 + e_2 \rangle|^2 \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle - \langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle + \langle f, e_2 \rangle|^2 \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 \\
&\leq 3 |\langle f, e_1 \rangle|^2 + 3 |\langle f, e_2 \rangle|^2 \\
&= 3 \|f\|^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^3 |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 - e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 + e_2 \rangle|^2 \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle - \langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle + \langle f, e_2 \rangle|^2 \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 \\
&\geq 2 |\langle f, e_1 \rangle|^2 + 2 |\langle f, e_2 \rangle|^2 \\
&= 2 \|f\|^2
\end{aligned}$$

olup $A = 2$ ve $B = 3$ frame sınırları ile $\{f_k\}_{k=1}^3$, V için bir frame'dir.

Lemma 4.1.2. [9] $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, S frame operatörü ve A, B sınırları ile bir frame olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır:

(i) $Sf = \sum_{k=1}^\infty \langle f, f_k \rangle f_k$ ile tanımlanan $S : H \rightarrow H$ operatörü, $A.I \leq S \leq B.I$ özelliğini sağlayan ve H üzerinde sınırlı, tersinir, self adjoint ve pozitif olan bir operatördür.

(ii) $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^\infty$, S^{-1} frame operatörü ve B^{-1}, A^{-1} sınırları ile bir frame'dir.

(iii) Eğer A ve B , $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ için optimal frame sınırları ise, B^{-1} ve A^{-1} sınırları da $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^\infty$ için optimaldir.

İspat. (i) : S 'nin sınırlı olduğunu gösterelim. S frame operatörü iki sınırlı operatörün (analiz ve sentez operatörleri) bileşkesi olduğundan,

$$\|S\| = \|TT^*\| = \|T\| \|T^*\| = \|T\|^2 \leq B$$

olup S sınırlıdır.

$$S^* = (TT^*)^* = TT^* = S$$

olup, S , self-adjointtir.

(4.1.2) eşitsizliğinde (4.1.6) eşitliği kullanılırsa,

$$A\|f\|^2 \leq \langle Sf, f \rangle \leq B\|f\|^2$$

olup $A, B, \|f\|^2 \geq 0$ olduğundan $\langle Sf, f \rangle \geq 0$ 'dır. Sonuç olarak S pozitif operatördür.

Bu eşitsizliği kullanarak

$$AI \leq S \leq BI$$

$$-BI \leq -S \leq -AI$$

$$0 \leq BI - S \leq BI - AI$$

$$0 \leq I - B^{-1}S \leq \frac{B-A}{B}I$$

olup, buradan

$$\begin{aligned}
\|I - B^{-1}S\| &= \sup_{\|f\|=1} |\langle (I - B^{-1}S)f, f \rangle| \\
&\leq \sup_{\|f\|=1} \left| \left\langle \left(\frac{B-A}{B} I \right) f, f \right\rangle \right| \\
&= \frac{B-A}{B} \sup_{\|f\|=1} |\langle f, f \rangle| \\
&= \frac{B-A}{B} \sup_{\|f\|=1} \|f\|^2 \\
&= \frac{B-A}{B} = 1 - \frac{A}{B} < 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.1.4 gereğince, bu S 'nin tersinir olduğu söylemektedir.

(ii) : S , self-adjoint olduğundan, S^{-1} de self-adjointtir. Her $f \in H$ için,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1}f_k \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle S^{-1}f, f_k \rangle|^2 \\
&\leq B \|S^{-1}f\|^2 \\
&\leq B \|S^{-1}\|^2 \|f\|^2
\end{aligned}$$

olup, bu ise $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın bir Bessel dizisi olduğunu gösterir. Yani $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi için frame operatörü iyi tanımlıdır. Şimdi S^{-1} frame sınırı ile $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın bir frame olduğunu göstereceğiz. Bunun için,

$$S : H \rightarrow H$$

$$Sf = TT^*f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k$$

tanımını kullanacağız:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle S^{-1}f_k &= S^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k \\
&= S^{-1}SS^{-1}f \\
&= S^{-1}f
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Bu, $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi için, frame operatörünün S^{-1} olduğunu göstermektedir.

$$AI \leq S \leq BI$$

eşitsizliğini S^{-1} operatörü ile göz önüne alırsak, Teorem 2.2.2, (ii) 'de kullanılarak, her $f \in H$ için,

$$B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$$

ve buradan

$$B^{-1} \|f\|^2 \leq \langle S^{-1}f, f \rangle \leq A^{-1} \|f\|^2$$

yazılabilir. (4.1.9) eşitliğini de göz önünde bulundurursak, her $f \in H$ için,

$$\begin{aligned} B^{-1} \|f\|^2 &\leq \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle S^{-1}f_k, f \right\rangle \leq A^{-1} \|f\|^2 \\ \Rightarrow B^{-1} \|f\|^2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle \langle S^{-1}f_k, f \rangle \leq A^{-1} \|f\|^2 \\ \Rightarrow B^{-1} \|f\|^2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1}f_k \rangle|^2 \leq A^{-1} \|f\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$, B^{-1}, A^{-1} frame sınırları ile bir frame'dir.

(iii) : $A, \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için optimal alt sınır olsun ve $\{S^{-1}f_k\}$ için optimal üst sınırın, $C < A^{-1}$ olduğunu kabul edelim. $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ frame'si için (ii) 'yi uygulayarak $\{f_k\} = \{(S^{-1})^{-1}S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın, $C^{-1} > A$ alt sınırına sahip olduğunu buluruz. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$, A^{-1} optimal üst frame sınırına sahiptir. $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın optimal alt sınırının B^{-1} olduğu da benzer şekilde gösterilir. $\square$

Şimdi frame'lerin topolojik izomorfizmalar altında korunduğunu ifade edeceğiz:

Teorem 4.1.1. [10] *Frame'ler topolojik izomorfizmalar altında korunur.*

Yani $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ H Hilbert uzayı için bir frame ve $T : H \rightarrow K$ bir topolojik izomorfizm ise $\{Tf_k\}_{k=1}^{\infty}$, K Hilbert uzayı için bir frame'dir. Bu durumda aşağıdaki ifadeler verilebilir:

- (i) *Eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ A ve B frame sınırlarına sahip ise $\{Tf_k\}_{k=1}^{\infty}$, $A \|T^{-1}\|^2$ ve $B \|T\|^2$ frame sınırlarına sahiptir.*
- (ii) *Eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ S frame operatörüne sahip ise $\{Tf_k\}_{k=1}^{\infty}$, TST^* frame operatörüne sahiptir.*

İspat. Her $f \in K$ için

$$TST^*f = T \left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle T^*f, f_k \rangle f_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, Tf_k \rangle Tf_k$$

olduğunu biliyoruz. Lemma 4.1.2 gereğince, eğer

$$A \|T^{-1}\|^{-2} I \leq TST^* \leq B \|T\|^2 I$$

olduğu gösterilirse $\{Tf_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın hem (i) hem de (ii) özelliklerini sağlayan bir frame olduğu sonucuna ulaşılabacaktır.

Eğer $f \in H$ ise bu durumda

$$\langle TST^*f, f \rangle = \langle S(T^*f), (T^*f) \rangle$$

dir. Sonuç olarak

$$A.I \leq S \leq B.I$$

gerçeğinden

$$A \langle IT^*f, T^*f \rangle \leq \langle ST^*f, T^*f \rangle \leq B \langle IT^*f, T^*f \rangle$$

ve buradan

$$A \|T^*f\|^2 \leq \langle TST^*f, f \rangle \leq B \|T^*f\|^2 \quad (4.1.10)$$

elde edilir. Ayrıca T topolojik izomorfizm olduğundan,

$$\frac{\|f\|}{\|T^{-1}\|} = \frac{\|f\|}{\|(T^*)^{-1}\|} \leq \|T^*f\| \leq \|T^*\| \|f\| = \|T\| \|f\| \quad (4.1.11)$$

(4.1.10) ve (4.1.11) eşitsizlikleri birlikte düşünülürse,

$$A \frac{\|f\|^2}{\|T^{-1}\|^2} \leq \langle TST^*f, f \rangle \leq B \|T\|^2 \|f\|^2$$

ve buna denk olan

$$A \|T^{-1}\|^2 I \leq TST^* \leq B \|T\|^2 I$$

istenilen ifadesine ulaşılır. Buradan Lemma 4.1.2 gereğince (i) ve (ii) sağlanır. $\square$

4.1.1 Frame'ler ve Dualleri

Bu bölümde bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ frame'inin dualleri tanıtıldıktan sonra $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ frame'si ile bağlantılı tüm $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ dual frameler'i için bir karakterizasyon verilecektir.

Tanım 4.1.4. [9] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, S frame operatörü ile bir H Hilbert uzayı için bir frame olsun. $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın **kanonik dual frame**'si olarak adlandırılır. Bu durumda her $f \in H$ için

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k$$

dır.

Aşağıdaki (4.1.12) ile verilen **frame ayrışımı (frame decomposition)**, frame'ler için çok önemli bir sonuçtur. Bu ifade, eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, H için bir frame ise, bu durumda, H 'daki her bir elemanın, frame elemanlarının sonsuz lineer kombinasyonu şeklinde bir temsile sahip olduğunu söyler. Böylece bir frame'ye, bazların genelleştirilmiş bir türü olarak bakılabilir.

Teorem 4.1.2. [9] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, S frame operatörü ile bir frame olsun. Bu durumda;

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k \quad , \quad \text{her } f \in H \text{ için} \quad (4.1.12)$$

ve

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle S^{-1}f_k \quad , \quad \text{her } f \in H \text{ için} \quad (4.1.13)$$

olup, bütün $f \in H$ 'lar için, her iki seri de şartsız yakınsaktır.

İspat. $f \in H$ alalım. Lemma 4.1.2 'de verilen frame operatörünün özellikleri kullanılırsa

$$f = SS^{-1}f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-1}f, f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k$$

elde edilir. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir Bessel dizisi ve $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N})$ olduğundan Sonuç 3.1.2 gereğince bu seri her $f \in H$ için şartsız yakınsaktır. Benzer şekilde ve benzer sebeplerden her $f \in H$ için

$$f = S^{-1}Sf = S^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle S^{-1}f_k$$

olup bu seri de şartsız yakınsaktır. □

Bu teoremden geçen $f \in H$ vektörü ile ilgili tüm bilgiler, $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$, dizisinde barındırılır. $\langle f, S^{-1}f_k \rangle$ sayıları, **frame katsayıları** olarak adlandırılır.

Örnek 4.1.7. $\{e_k\}_{k=1}^2$, iki boyutlu bir V vektör uzayı için ortonormal baz olsun.

$f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = e_1 + e_2$ şeklinde tanımlayalım. $\{f_k\}_{k=1}^3$, V için bir frame'dir:

$$Sf = \sum_{k=1}^3 \langle f, f_k \rangle f_k$$

frame operatörü tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned} Se_1 &= \sum_{k=1}^3 \langle e_1, f_k \rangle f_k \\ &= \langle e_1, f_1 \rangle f_1 + \langle e_1, f_2 \rangle f_2 + \langle e_1, f_3 \rangle f_3 \\ &= \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_1 - e_2 \rangle (e_1 - e_2) + \langle e_1, e_1 + e_2 \rangle (e_1 + e_2) \\ &= \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_1 \rangle (e_1 - e_2) - \langle e_1, e_2 \rangle (e_1 - e_2) \\ &\quad + \langle e_1, e_1 \rangle (e_1 + e_2) + \langle e_1, e_2 \rangle (e_1 + e_2) \\ &= e_1 + e_1 - e_2 + e_1 + e_2 \\ &= 3e_1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Se_2 &= \sum_{k=1}^3 \langle e_2, f_k \rangle f_k \\ &= \langle e_2, f_1 \rangle f_1 + \langle e_2, f_2 \rangle f_2 + \langle e_2, f_3 \rangle f_3 \\ &= \langle e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, e_1 - e_2 \rangle (e_1 - e_2) + \langle e_2, e_1 + e_2 \rangle (e_1 + e_2) \\ &= \langle e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, e_1 \rangle (e_1 - e_2) - \langle e_2, e_2 \rangle (e_1 - e_2) \\ &\quad + \langle e_2, e_1 \rangle (e_1 + e_2) + \langle e_2, e_2 \rangle (e_1 + e_2) \\ &= -(e_1 - e_2) + e_1 + e_2 \\ &= -e_1 + e_2 + e_1 + e_2 \\ &= 2e_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$S^{-1}e_1 = \frac{1}{3}e_1, \quad S^{-1}e_2 = \frac{1}{2}e_2$$

olur. Kanonik dual frame ise

$$\begin{aligned}\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^3 &= \{S^{-1}f_1, S^{-1}f_2, S^{-1}f_3, \dots\} \\ &= \{S^{-1}e_1, S^{-1}e_1 - S^{-1}e_2, S^{-1}e_1 + S^{-1}e_2\} \\ &= \left\{\frac{1}{3}e_1, \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2\right\}\end{aligned}$$

şeklindedir. Her $f \in H$ nın frame tarafından temsili

$$\begin{aligned}f &= \sum_{k=1}^3 \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k \\ &= \frac{1}{3} \langle f, e_1 \rangle e_1 + \left\langle f, \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{2}e_2 \right\rangle (e_1 - e_2) + \left\langle f, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \right\rangle (e_1 + e_2)\end{aligned}$$

'dir.

Örnek 4.1.8. $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, H için bir ortonormal baz olsun. frame sınırı $A = 2$ olan $\{f_k\}_{k=1}^\infty := \{e_1, e_1, e_2, e_3, \dots\}$ frame'ini düşünelim. $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 'nın kanonik dual frame'si

$$Sf = \sum_{k=1}^\infty \langle f, f_k \rangle f_k$$

idi. Frame operatörü tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned}Sf_1 &= \sum_{k=1}^\infty \langle e_1, f_k \rangle f_k \\ &= \langle e_1, f_1 \rangle f_1 + \langle e_1, f_2 \rangle f_2 + \langle e_1, f_3 \rangle f_3 + \langle e_1, f_4 \rangle f_4 + \dots \\ &= \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_2 \rangle e_2 + \langle e_1, e_3 \rangle e_3 + \dots \\ &= 2e_1\end{aligned}$$

den

$$\begin{aligned}Sf_1 = 2e_1 &\Rightarrow S^{-1}f_1 = \frac{1}{2}e_1 \\ Sf_2 = 2e_1 &\Rightarrow S^{-1}f_2 = \frac{1}{2}e_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Sf_3 &= \sum_{k=1}^\infty \langle e_2, f_k \rangle f_k \\ &= \langle e_2, f_1 \rangle f_1 + \langle e_2, f_2 \rangle f_2 + \langle e_2, f_3 \rangle f_3 + \dots \\ &= \langle e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, e_2 \rangle e_2 + \langle e_2, e_3 \rangle e_3 + \dots \\ &= e_2\end{aligned}$$

den

$$Sf_3 = e_2 \Rightarrow S^{-1}f_3 = e_2$$

$$\begin{aligned} Sf_4 &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_3, f_k \rangle f_k \\ &= \langle e_3, f_1 \rangle f_1 + \langle e_3, f_2 \rangle f_2 + \langle e_3, f_3 \rangle f_3 + \dots \\ &= \langle e_3, e_1 \rangle e_1 + \langle e_3, e_1 \rangle e_1 + \langle e_3, e_2 \rangle e_2 + \langle e_3, e_3 \rangle e_3 + \dots \\ &= e_3 \end{aligned}$$

den

$$Sf_4 = e_3 \Rightarrow S^{-1}f_4 = e_3$$

...

elde edilir. Kanonik dual frame ise

$$\begin{aligned} \{S^{-1}f_k\}_{k=1}^3 &= \{S^{-1}f_1, S^{-1}f_2, S^{-1}f_3, \dots\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_1, e_2, e_3, \dots \right\} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Her $f \in H$ 'nın frame yardımıyla temsili

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k \\ &= \frac{1}{2} \langle f, e_1 \rangle e_1 + \frac{1}{2} \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_2 + \langle f, e_3 \rangle e_3 + \dots \end{aligned}$$

'dir.

Uyarı: Bu teorem, frame teorisindeki temel zorluklardan birini açığa çıkarır. Aslında (4.1.12) ve (4.1.13) açılımları pratikte uygulanabilir oldukları için, S^{-1} frame operatörünü bulmak veya S^{-1} 'in, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere bütün f_k 'lar üzerinde etkisini hesaplamak gerekir. Ancak genelde bu (frame elemanları sonsuz olduğunda) büyük bir problemdir. Bu problemlerde frame olarak sadece tight olanları göz önüne almak, böyle bir problemi hafifletecektir:

Sonuç 4.1.1. [9] Eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, A frame sınırı ile tight bir frame ise, bu durumda kanonik dual frame $\{A^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ olup,

$$f = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k \quad , \quad \text{her } f \in H \text{ için} \quad (4.1.14)$$

olur.

İspat. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, A frame sınırı ve S frame operatörü ile tight bir frame ise, her $f \in H$ için

$$\langle Sf, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = A \|f\|^2 = \langle Af, f \rangle$$

olacaktır. Buradan

$$\langle Sf - Af, f \rangle = 0 \Rightarrow \langle (S - A)f, f \rangle = 0$$

yazılabilir. $S = AI$ ve $S^{-1} = \frac{1}{A}$ olup (4.1.12) 'den, istenen (4.1.14) eşitliği elde edilmiş olur. $\square$

Uyarı: Burada şu iki özelliği de belirtmeden geçmeyelim:

1. Her frame bir (normalized) tight frame'ye denktir.
2. Her tight frame için de frame'deki f_k elemanlarının yeniden düzenlenmesiyle $A = 1$ elde edilebilir.

Tight frame'ler ile elde edilen (4.1.14) 'deki $f \in H$ için temsil, ortonormal baz yardımıyla (3.2.3) ile verilen temsildeki gibi bir forma sahiptir. Sadece açılımı $\frac{1}{A}$ çarpanı gelmektedir, bu çarpan ise tight frame parseval iken kalkmaktadır. Bu nedenle böyle frame'ler ((parseval) tight frame'ler) şartları elbetteki daha ağır olan ortonormal bazların kullanımıyla karşılaştırıldığında herhangi bir extradan hesaplama da olmaksızın, uzaydaki elemanları temsil etmede kullanılabilir.

Tight frame'ler başka avantajlara da sahiptir. İstenen özelliklerde frame'lerin inşası için kanonik dual frame'nin davranışını kontrol etmek esastır. Fakat frame operatörünün karmaşık yapısı ve onun tersi bu kontrolü güçleştirebilir. Ancak frame tight iken bu işin zor olmadığını da ifade edelim.

Kanonik dual frame'nin, frame'den H 'nın elemanlarını yeniden inşaa etmede kullanılabileceğini görmüş olduk.

Fakat, böyle bir yeniden inşaayı verecek olan, H 'da başka dizilerin mevcut olabileceğini de belirtelim. Bu, S frame operatörünün tersini alma probleminden kaçındığımız durumlar için bir alternatif olacaktır:

Tanım 4.1.5. [9] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, bir H Hilbert uzayı için bir frame olsun. Her $f \in H$ için

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k \quad (4.1.15)$$

eşitliğini sağlayan $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'dan farklı $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesi mevcuttur. Böyle bir ailenin varlığı Teorem 4.1.5 'de ifade edilmiştir. $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesine $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için bir (**alterne**) **dual frame** denir.

Örnek 4.1.9. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ H için bir ortonormal baz olmak üzere

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \dots\}$$

frame'sini tekrar göz önüne alalım. Kanonik dual frame

$$\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_1, e_2, e_3, \dots\right\}$$

şeklindedir. Bu frame için

$$\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \{0, e_1, e_2, e_3, \dots\}$$

ve

$$\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{3}e_1, \frac{2}{3}e_1, e_2, e_3, \dots\right\}$$

dizileri $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın kanonik olmayan dual frame'leridir.

Uyarı:

1. Verilen bir frame için pekçok alterne dual frame vardır.

Ayrıca şu sonuçlar [21] ve [29] 'de gözlemlenmiştir:

2. Eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ H için bir parseval frame ise, bu durumda $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için, bir tek parseval alterne dual frame, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın kendisidir.

3. Bir frame, bir tek alterne dual frame'ye yani kanonik dual frame'ye sahiptir
 $\Leftrightarrow$ Frame, Riesz bazıdır.

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın Bessel dizileri olduğunu kabul edelim. Bu durumda onlara karşılık gelecek sentez (pre-frame) operatörlerinin varlığını düşünebiliriz. Genelde T ile $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için sentez (pre-frame) operatörünü ve U ile $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ için pre-frame operatörünü tanımlayacağız. Tanım 4.1.5 'de (4.1.15) eşitliğini sağlayan $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ Bessel dizileri birbirlerinin dual frame'leridir. Böyle $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizilerine bir **dual frame çifti** denir. Şimdi (4.1.15) eşitliğinde $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın rollerinin değiştirilebileceği ve eğer (4.1.15) 'in sağlanması durumunda $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ Bessel dizileri için alt frame şartının otomatik olarak sağladığını ifade eden bir lemma vereceğiz:

Lemma 4.1.3. [8] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın H 'da Bessel dizileri olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $f \in H$ için aşağıdakiler denktir:

$$(i) \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k$$

$$(ii) \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle g_k$$

$$(iii) \quad \langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle \langle g_k, g \rangle$$

Bu denk şartların sağlanması durumunda $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ H için dual frame'lerdir.

İspat. Bakınız [8], Sf. 112. □

4.1.2 Frame'ler ve Riesz Bazları

Bilindiği gibi, H Hilbert uzayında bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ frame'si, bir bazın temel özelliklerinden birine sahiptir: Verilen bir $f \in H$ için $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ olacak şekilde $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N})$ katsayıları vardır. Bu nedenle frame'ler ve bazlar arasındaki mevcut ilişkileri değerlendirmeye çalışmak doğaldır. Bu alt başlıkta tüm Riesz bazlarının birer frame olduklarını ve frame'lerin Riesz bazları yardımıyla da karakterize edilebileceğini ifade edeceğiz.

Teorem 4.1.3. [9] H için bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ Riesz bazı H için bir frame'dir ve Riesz bazı sınırları frame sınırları ile çakışır. Dual Riesz bazı $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ kanonikal dual frame'sine denktir.

İspat. Önerme 3.3.1 gereğince H için bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ Riesz bazı H için bir frame olup, frame sınırlarına ilişkin ifadeler de aynı önerme içinde Riesz sınırları olarak görülmektedir. Teorem 4.1.16'deki $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ dual Riesz bazının tekliği ile Teorem 4.1.2'deki (4.1.12) eşitliği ile verilen frame ayrışımı birlikte göz önünde bulundurulduğunda dual Riesz bazının da $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ kanonik dual frame'si olduğunu görürüz. $\square$

Riesz bazı olmayan bir frame **overcomplete** olarak adlandırılır. Literatürde bu tür frameler için **redundant frame** terimi de kullanılmaktadır. Teorem 4.1.4'de "overcomplete" kelimesinin kullanılmasının nedeni biraz daha açığa kavuşacaktır. Frame'leri çok kullanışlı kılan onların temel özelliği redundant oluşlarıdır. Yani, uzaydaki vektörler frame'ler yardımıyla sonsuz çoklukta temsillere sahiptir ancak her bir vektör frame katsayıları ile verilen bir tek doğal temsile sahiptir. Frame'lerin redundant oluşlarının onlara kattığı bu özellik özel uygulamalarda kendini hissettirir. Örneğin vektörlerin daha geniş bir oranı üzerinden bilgi yayımına izin vererek hatalar daha çok hafifletilebilir ve yeniden inşaa oldukça iyi yapılabilir. Bu, örneğin internet kodlamada, verinin dağıtım sürecinde, beyinin modellenmesinde ve daha pekçok uygulamada kendini gösterir. Daha geniş bir oran üzerinden bilgiyi yaymak istememizin bir diğer avantajı ise sinyaldeki parazitin etkilerini oldukça aza indirmek ve daha sağlıklı bir sinyal veya görüntü işleme sürecinin gerçekleşmesine imkan sağlamaktır. Frame'lerin redundant oluşlarının başka bir avantajı, kuantum tomografi alanında da karşımıza çıkar. Bu hususla ilgili teknik ve matematiksel bilgiler bu alan üzerine yazılmış ilgili kaynaklardan edinilebilir.

Gerçekte eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ Riesz bazı olmayan bir frame yani overcomplete ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0 \quad (4.1.16)$$

olacak şekilde $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$ katsayıları vardır. Yani böyle frame'ler için frame elemanları arasında bazı bağılıklar vardır.

Teorem 4.1.4. [9] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ H için bir frame olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ H için bir Riesz bazıdır.

(ii) Eğer bazı $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N})$ katsayıları için $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$ ise bu durumda her bir $c_k = 0$ olur.

Frame'ler ve Riesz bazları arasındaki ilişkiler ile ilgili pek çok detay için [8] ve [9] incelenebilir.

Eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir overcomplete frame ise bu durumda verilen bir $f \in H$ elemanı, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere f_k frame elemanları yardımıyla pekçok temsile sahiptir. Ayrıca (4.1.16) eşitliğini sağlayan herhangi bir $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$ dizisi için frame ayrışımı

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\langle f, S^{-1} f_k \rangle + c_k) f_k$$

şeklinde dir.

Şimdi önceki kısımlarda da anlatıldığı gibi her overcomplete frame'in kanonikalden başka dual frame'lere sahip olduğunu ifade eden bir teoremi ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 4.1.5. [9] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nın overcomplete bir frame olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $f \in H$ için

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k$$

eşitliğini sağlayan $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \neq \{S^{-1} f_k\}_{k=1}^{\infty}$ frame'leri vardır.

4.1.3 Frame'ler İçin Bazı Karakterizasyonlar

Şimdi sentez (pre-frame) operatörleri vasıtasıyla frame'lerin bir karakterizasyonunu vereceğiz. Bu karakterizasyon frame sınırı ile ilgili herhangi bir bilgiyi içermemektedir.

Teorem 4.1.6. [9] H 'da bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi H için bir frame'dir ancak ve ancak

$$T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

$$T : l_2(\mathbb{N}) \rightarrow H$$

iyi tanımlı bir dönüşümdür.

H için Riesz bazları, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, H için bir ortonormal baz ve $U : H \rightarrow H$ sınırlı-bijektif (birebir ve örten) bir operatör olmak üzere, $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ aileleri şeklinde karakterize edilmekteydi. Frame'ler için benzer bir karakterizasyon aşağıdadır:

Teorem 4.1.7. *[9] $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, H için keyfi bir ortonormal baz olsun. H için frame'ler, $U : H \rightarrow H$ sınırlı ve surjektif bir operatör olmak üzere, $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ şeklindeki dizilerdir.*

Şimdi frame sınırları ile ilgili bilgileri de içerebilecek frame'lerin bir karakterizasyonunu vereceğiz. Elde edilecek sonuç teorik açıdan oldukça kullanışlıdır.

Lemma 4.1.4. *[9] H 'da bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi A ve B frame sınırları ile H için bir frame'dir ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanır:*

(i) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ H 'da totaldir.

(ii) T sentez (pre-frame) operatörü $l_2(\mathbb{N})$ üzerinde iyi tanımlıdır ve her $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in N_T^{\perp}$ için

$$A \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|T\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\|^2 \leq B \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

dir.

4.1.4 Hilbert Uzaylarında Frame'ler ve Sinyal İşleme

Bölüm 3.4 'de sinyal ve sinyal işleme ile ilgili temel bazı bilgiler aktarıldı.

Bilindiği gibi bir f **sinyali** dendiğinde, X bir Banach uzayı veya Hilbert uzayı ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olmak üzere, X üzerinde kompleks değerli bir f fonksiyoneli kastedilmektedir.

Şimdi bir sinyalin işlemesi sürecini sözlü olarak ifade etmeye çalışalım:

Modern iletişim ağları, bir kaynaktan, bir alıcıya bilgi paketlerini taşıyarak çalışır. Her paket, kontrol parametrelerinin bir koleksiyonu şeklinde, temel bilgiyi, yani bizim taşımak istediğimiz bilgiyi içerir. Bu kontrol parametreleri, paketteki verinin hatasız dağıtılmasına olanak kılan, hata kontrol, adresleme ve zamanlama bilgisi bakımından donatılmış belli uzunluktaki bilgi parçalarının dizileridir. Eğer bu diziler

kendi içinde hatalar içeriyorsa, paket daha dağıtılmadan hatalar düzeltilir. Buradaki hatalar kayıp paketleri yeniden taşıyan kullanıcının göremediği (farkedemeyeceği) bir öncelikten kaynaklanmaktadır. Bu nedenle pek çok kullanıcı için bir paket network'un davranışı rastgele eksiltişlerle belirlenemez. Hatta paketlerin yeniden taşınması, orijinal taşınmasından daha uzun sürer. Bu gibi nedenlerden dolayı birçok uygulamada kayıp paketlerin yeniden taşınması kullanışlı değildir ve ayrıca büyük zaman kayıpları (gecikmeler) gibi, barındırdığı potansiyel risk kabul edilemez.

Anlaşıldığı üzere bir hata oluşması durumunda, paketin tümü birden dağıtılmayacaktır. Eğer kayıp bir paket, taşınan diğer bilgilerden bağımsız ise, bu durumda; bilgi alıcı için gerçekten kayıptır. Yani çeşitli paketler arasında ilişki yoksa, eksilen, kayıp pakete ait olan bilgi geri alınamaz. Fakat, taşınan paketler arasında ilişki (bağılıklar) var ise; paketteki bilginin en azından kaybolan kısmının telafisi mümkündür, yani paketin içeriğinin bir kısmı veya tamamı geri alınabilip, eksiklikler (hatalar) telafi edilebilir.

Matematiksel olarak, bir frame'in overcomplete olması durumu, bazdan daha kullanışlı bir konsept oluşturur. Özelliklerini istediğimiz gibi belirleyebileceğimiz sistemler inşaa edebilme şansımızı artırarak bizi daha özgür kılar. Şimdi overcomplete'in sinyal iletiminin temelinde ne gibi yararları olduğunu açıklamaya çalışacağız:

Frame'ler, uzaydaki her bir vektör için doğal bir temsil veren, bir Hilbert uzayındaki vektörlerin (çok elemanlı) kümeleridir. Frame'ler taşınacak olan sinyallerin özelliklerini belirlemede, kişiyi daha fazla esnek bırakması ve bir sinyalin yeniden inşaaındaki sayısal kararlılıklarının yanısıra; eleman sayısı miktarlarındaki esneklik ve sinyale, frame katsayıları vasıtasıyla parazit ekleme (veya tersi olarak, paraziti minimum yapma) manalarındaki özelliklerinden dolayı sinyal işlemede kullanılmaktadır.

İşte yukarıda bahsi geçen taşınacak olan bu paketler, frame katsayıları yardımıyla modellenenbilmektedir. Peki, kişinin bu kodlamaları yaparken, bu amaç doğrultusunda kullanacağı en iyi (işine en yarayacak) formdaki frame modelleri nelerdir? Son yıllarda (uniform tight) frame'ler için, birkaç yeni uygulama geliştirilmiştir. Bunlardan ilki; paket kaynaklı iletişim sistemlerindeki kayıpların etkilerini azaltmada bir frame'in elemanlarının çokluğunu kullanan Goyal, Kovacevic ve Vetterli tarafından geliştirildi.

Biz burada öncelikli olarak frame'in overcomplete'liğinin ne gibi artılarının olduğunu

dan bahsedelim:

Taşımacak paketler, frame katsayıları ile modellendiğinden, dağıtılmayacak bir paket frameden bir elemanın kaldırılması anlamına gelecektir. Eğer frame overcomplete olmasaydı bir eleman kaldırıldıktan sonra, artık baz olmayacaktı. Fakat frame overcomplete ise bir eleman silindikten sonra yine frame olarak kalması mümkündür. Ancak; uygulamada bir paketten daha fazlası yani bir frame elemanından daha fazlası kaybedilebilir. Böylelikle bir eleman- dan daha fazlasının kaldırılmasına karşı dayanıklı olan frameleri nasıl inşaa edeceğiz sorusuyla karşılaşyoruz. Bir frame için, alt frame sınırı ve frame elemanlarının normu hakkında bilgiye sahipsek; en az sayıda kaç elemanı kaldırabileceğimiz hususunda bir kriter sağlayabiliriz. Bkz: ([9], proposition 1.5.2)

Sinyal işlemenin temelinde, frame'lerin overcomplete oluşu parazit bastırma etkisinde çok önemli bir yarara sahiptir. Şimdi bunu sezgisel bir açıklamayla bir miktar ifade edeceğiz. Ancak biz bu çalışmada sadece frame'lerin uygulamada böyle bir yararının olduğuna değineceğiz, [9] veya [21] 'den bu bilgilerin detaylarına ulaşılabilir.

Bir $\mathcal{A}$ yayıcısından, bir $\mathcal{R}$ alıcısına, bir V vektör uzayına ait f sinyalinin taşımak istediğimizi kabul edelim. Eğer hem $\mathcal{A}$ hem de $\mathcal{R}$, V için bir $\{f_k\}_{k=1}^m$ -nın, frame olduğu bilgisine sahip ise bu işlem yapılabilir. Eğer $\mathcal{A}$, bu sayıların bilgisi temelinde, $\{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^m$ katsayılarını taşıyorsa; $\mathcal{R}$ alıcısı, frame ayrışımını kullanarak; f sinyalinin,

$$f = \sum_{k=1}^m \langle f, f_k \rangle S^{-1} f_k$$

şeklinde yeniden düzenler.

Şimdi $\mathcal{R}$ 'nin parazitli bir sinyal aldığını, yani doğru katsayıların bir

$$\{\langle f, f_k \rangle + c_k\}_{k=1}^m$$

parazitli sinyalini aldığını kabul edelim. Alınan katsayılara baktığında, $\mathcal{R}$; taşınan sinyalin,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (\langle f, f_k \rangle + c_k) S^{-1} f_k &= \sum_{k=1}^m \langle f, f_k \rangle S^{-1} f_k + S^{-1} \sum_{k=1}^m c_k f_k \\ &= f + S^{-1} \sum_{k=1}^m c_k f_k \end{aligned}$$

olduğunu söyleyecektir. Bu, $S^{-1} \sum_{k=1}^m c_k f_k$ ifadesinin varlığı sebebiyle, doğru olan f sinyalinin elbette farklıdır.

Eğer $\{f_k\}_{k=1}^m$ overcomplete ise,

$$T\{c_k\}_{k=1}^m = \sum_{k=1}^m c_k f_k$$

sentez (pre-frame) operatörü aşıkâr olmayan bir çekirdeğe sahiptir, bu hepsi birden sıfır olmayan $\{c_k\}_{k=1}^m$ katsayıları için de $\sum_{k=1}^m c_k f_k = 0$ olacağı anlamına gelir. Bu durum ise sinyalin parazit katkısı olan $S^{-1} \sum_{k=1}^m c_k f_k$ değerinin sıfıra toplanabilmesi durumunun mevcut olduğunu söyler. Zira eğer $\{f_k\}_{k=1}^m$ overcomplete olmasa paraziti sağlayan ve sıfırdan farklı olan $\{c_k\}_{k=1}^m$ katsayıları için ortaya çıkan $\sum_{k=1}^m c_k f_k$ değeri asla sıfıra toplanmaz. Bu ise sinyalin parazitli parçası olan $S^{-1} \sum_{k=1}^m c_k f_k$ değerinin asla elimine edilemeyeceği, yani sinyalin parazitten kurtarılamayacağı manasına gelir. Halbuki eğer $\{f_k\}_{k=1}^m$ overcomplete ise $\sum_{k=1}^m c_k f_k = 0$ olma ihtimali mevcut olduğundan sinyalin $S^{-1} \sum_{k=1}^m c_k f_k$ parazitli kısmını yok etme şansı doğar.

Yukarıdaki veriler, parazit için istatistiksel modeller kullanılarak düzenlenebilir.

$\{f_k\}_{k=1}^m$ frame'inin maksimum düzeydeki paraziti bastırma etkisini elde etmek için nasıl bir seçim yapması gerektiğini analiz etme hususunda [21]ve [29] kaynakları incelenebilir.

Detaylarına inmediğimiz böyle bir uygulamanın olduğu bahsini, aşağıdaki teoremi vererek sonlandıracağız:

Teorem 4.1.8. [9] $\mathbb{R}^n$ için, $n, m \in \mathbb{N}$ -inci elemanları sabitlenmiş olan, $\{f_k\}_{k=1}^m$ normalleştirilmiş frame'sini düşünelim. Bu şekildeki bütün $\{f_k\}_{k=1}^m$ frameleri arasında

$$MSE^{(*)} \text{ minimaldir} \Leftrightarrow \text{frame tight'tır.}$$

Ulaşılan minimal değer

$$MSE = \frac{n}{m} \sigma^2$$

dir.

(*) MSE : mean- square error. (Detaylarına ilgili kaynaklardan ulaşılabilir).

Bu ifade göstermektedir ki; sabitlenmiş bir $n \in \mathbb{N}$ değeri için, frame'in elemanlarının sayısı arttığında, yani frame'de daha fazla sayıda eleman olduğunda, MSE azalır.

Bu manada bazlara kıyasla frame'deki elemanların fazla sayıda olabilirliği özelliği MSE'nin düşmesine yardım edecektir.

Goyal ve Kovacevic, [7] 'de;

"uniform frame ortalama hatayı (MSE) minimize eder $\Leftrightarrow$ bu uniform frame tight'tır."

olduğunu gösterdi.

Sonuç olarak, işte böyle frame'ler (bu amaç için en iyi frameler), frame'lerin uniform parseval olan sınıfıdır.

4.1.5 Sampling Problemi

Bölüm 3.4.2 'de genel bir içerikle tanıtılan örnekleme (sampling) problemi; Eğer sadece $\{f(\lambda_k)\}_{k \in I}$ fonksiyon değerlerinin sayılabilir bir kümesini (yani bir örnekleme-sini) biliyorsak, bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunu nasıl elde edebiliriz? şeklindeydi.

Problem bu şekilde düşünülecek olunursa çözümü oldukça zor hatta imkansız olmaktadır. Çünkü verilen sayılabilir bir küme üzerinde aynı değer alan sonsuz çoklukta fonksiyon vardır. Bu nedenle problemi daha iyi ortaya koymak için f fonksiyonu üzerine ekstra şartlar koymamız gerekir. Genelde, bu, f 'nin belli bir fonksiyon uzayına ait olma zorunluluğu koşularak yapılır. Klasik olarak, fourier dönüşümünün kompakt desteğe sahip olan fonksiyonların (band-sınırlı fonsiyonlar) bir uzayı seçilir:

$$PW := \{f \in L_2(\mathbb{R}) : \text{supp } \hat{f} \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \}$$

şeklinde tanımlanan **Paley-Wiener uzayı**nı düşünelim.

Paley-Wiener uzayı, bir tek fonksiyonun ötelemelerinden oluşan

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

şeklinde bir ortonormal baza sahiptir.

Shannon's Sampling teoremi, Paley-Wiener uzayında, herhangi bir sürekli fonksiyonun, tamsayılarındaki örneklerinden, yeniden tamamen inşaa edilebileceğini söylemektedir:

Teorem 4.1.9. [9] $\{\text{sinc}(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ fonksiyonları, PW uzayı için bir ortonormal baz oluşturur. Eğer, $f \in PW$ sürekli ise, bu durumda, f , $\{f(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ örneklerinden

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \text{sinc}(x - k)$$

şeklinde yeniden oluşturulur.

Shift-Invariant uzaylarda sampling'in kısa bir tanımını vereceğiz. Daha fazla detay için Aldroubi ve Gröchenig'in [27] numaralı makalelerine bakınız.

$L_2(\mathbb{R})$ 'nin sürekli fonksiyonlarının oluşturduğu bir H kapalı alt uzayını düşünmek başlangıç noktası olacaktır. Her $x \in H$ için

$$f \rightarrow f(x)$$

dönüşümü H üzerinde sürekli lineer bir fonksiyoneldir. Bu durumda H **yeniden üreten çekirdek Hilbert uzayı** olarak adlandırılır. Riesz temsil teoremi gereğince, her $x \in H$ için bir tek $z_x \in H$ vardır, öyleki her $f \in H$ için

$$f(x) = \langle f, z_x \rangle \quad (4.1.17)$$

yazılabilir. $\{z_x\}_{x \in H}$ fonksiyonlarının cümlesi yeniden üreten çekirdek olarak adlandırılır. Eğer her $f \in H$ için

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f(\lambda_k)|^2 \leq B \|f\|^2$$

eşitsizliğini sağlayan $A, B > 0$ sabitleri var ise bir $\{\lambda(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ dizisi H için örneklerin bir kümesidir. (4.1.17) gereğince bu H için bir frame olan $\{z_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 'ya denktir.

Bir yeniden üreten çekirdek Hilbert uzayı örneği olarak; $\phi \in L_2(\mathbb{R})$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\phi \chi_{[k, k+1]}\| < \infty$$

özelliğindeki sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$H := \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k T_k \phi : \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in L_2(\mathbb{Z}) \right\}$$

shift invariant uzayı alınabilir.

Burada; $k \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$T_k : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}), \quad (T_k \phi)(x) = \phi(x - k)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme **öteleme dönüşümü** denir.

[8] numaralı kaynağın 8.5. bölümünde bu uzayla ilgili geniş bir içerik mevcuttur. Yine aynı kaynakta sinyal işleme ve sampling üzerine uygulamalarla ilgili detaylı bilgilere ulaşılabilir.

[9] numaralı kaynağın 5.9. ve 7.5. bölümlerinde bu tezde çok fazla detaylandırmadığımız oldukça teknik detaylar içeren ve mühendislik bilgileri gerektiren uygulamaların daha teknik bilgiler çerçevesinde matematiksel ifadeleri mevcuttur.

BÖLÜM 5

HİLBERT C^* -MODÜLLERİNDE BESSEL DİZİLERİ, RIESZ BAZLARI VE FRAME'LER

Hilbert C^* -modülleri, (bir cisim üzerinde) bir vektör uzayı yerine, bir $\mathcal{A}$ -modülünün düşünüldüğü ve kompleks sayılar cismi yerine C^* -cebirinden değerler alan iç çarpıma izin veren yapıdaki Hilbert uzaylarının bir genelleştirmesidir. Dolayısıyla Hilbert uzayları için frame düşüncesinin bir benzerinin Hilbert C^* -modülleri için verilebileceği fikri doğaldır.

Bu bölümde Hilbert C^* -modülünün tanımı ve temel özellikleri verildikten sonra, önceki bölümde genel bir teorisi sunulan, Hilbert uzaylarındaki frame teorisinin bir genelleştirmesi niteliğinde, Hilbert C^* -modüllerinde frame'ler ve Bessel dizileri ile ilgili temel tanım, teorem ve sonuçlar ele alınacak, frame'ler ve Bessel dizileri için denk tanımlar ve bazı karakterizasyonlar verilecektir. Ayrıca, Riesz bazlarının tanımı, Riesz bazları için denk tanımlar ve bazı karakterizasyonlara değinilecektir. Riesz bazlarının dualleri, örnekler ışığında incelenecek ve bu teorilerde Hilbert C^* -modüllerinde Hilbert uzaylarındaki durumdan farklı sonuçların geldiği de vurgulanacaktır.

5.1 Temel Kavramlar

Tanım 5.1.1. [15] $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ bir dönüşüm olsun. Eğer bu dönüşüm her $x, y, z \in \mathcal{A}$ ve her $\alpha \in \mathcal{K}$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{A}$ 'ya ($\mathcal{K}$ cismi üzerinde) bir **cebir** denir:

$$(xy)z = x(yz)$$

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(x + y)z = xz + yz$$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

$\mathcal{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ ise $\mathcal{A}$ 'ya sırasıyla **reel** veya **kompleks cebir** denir.

Eğer her $x, y \in \mathcal{A}$ için $xy = yx$ oluyorsa, $\mathcal{A}$ 'ya **komutatif (değişimli) veya Abelian cebir** denir.

Her $x \in \mathcal{A}$ için $ex = xe = x$ olacak şekilde bir $e \in \mathcal{A}$ var ise $\mathcal{A}$ 'ya **birimli cebir** denir.

Tanım 5.1.2. [15] $\mathcal{A}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer her bir x elemanına karşılık x 'in normu denilen bir $\|x\|$ reel sayısı var, öyleki her $x, y \in \mathcal{A}$ için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ cebiri **norm cebiri** olarak adlandırılır:

$$\|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Veya kısaca, bir **norm cebiri**, her $x, y \in \mathcal{A}$ için $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ özelliğini sağlayan ve bir cebir olan normlu $\mathcal{A}$ uzayına denir.

$e \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ 'nın birim elemanı olmak üzere, $\mathcal{A}$ birimli bir cebir iken $\|e\| = 1$ ise $\mathcal{A}$ norm cebirine **birimli norm cebiri** denir.

Çalışmalar göstermiştir ki, her norm cebiri birimli bir norm cebiri içerisine izometrik olarak gömülebilmektedir. Bu nedenle sadece birimli norm cebirleri üzerinde çalışmak genellik kaybına yol açmaz. Bu çalışmada da bir norm cebiri dendiğinde, bu norm cebirinin birimli olduğu kastedilecektir.

Tanım 5.1.3. [15] Bir norm cebiri, norm metriğine göre tam ise bir **Banach cebiri** adını alır.

Örnek 5.1.1. a) $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ Banach cebiridir.

b) $C[a, b]$ uzayı bir komutatif Banach cebiridir.

c) Tüm polinomlardan oluşan $C[a, b]$ nin alt uzayı komutatif bir norm cebiridir.

Fakat Banach cebiri değildir.

d) $n \times n$ tipindeki tüm kompleks terimli matrislerin vektör uzayı $M_n(\mathbb{C})$, bir Banach cebiridir.

e) X bir kompleks Banach uzayı olmak üzere, $B(X)$ sınırlı lineer operatörlerin uzayı, operatörlerin bileşkesi işlemine göre bir Banach cebiridir.

Tanım 5.1.4. [15] $\mathcal{A}$ bir Banach cebiri ve $a \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer $ab = ba = 1$ olacak şekilde bir $b \in \mathcal{A}$ var ise a elemanına **tersinirdir** (*invertible*) denir.

$Inv(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} : a \text{ invertible}\}$ kümesi skalerle çarpma işlemi ile bir gruptur.

Tanım 5.1.5. [15] $\mathcal{A}$ bir Banach cebiri olsun. $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $x \rightarrow x^*$ dönüşümü, her $x, y \in \mathcal{A}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$(x^*)^* = x$$

$$(x + y)^* = x^* + y^*$$

$$(xy)^* = y^*x^*$$

$$(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$$

şartlarını sağlanıyorsa **involusyon** olarak adlandırılır. Bu durumda $\mathcal{A}$ bir **Banach *-cebiri** olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.6. [15] Bir $\mathcal{A}$ Banach *-cebiri, eğer her $x \in \mathcal{A}$ için

$$\|x^*x\| = \|x\|^2$$

özellikliğini sağlıyorsa **C^* -cebiri**dir.

Örnek 5.1.2. a) $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ Banach cebiridir.

b) $C[a, b]$ uzayı bir komutatif bir C^* -cebiri.

c) $n \times n$ tipindeki tüm kompleks terimli matrislerin uzayı $M_n(\mathbb{C})$, bir C^* -cebiri.

d) Bir H Hilbert uzayı üzerindeki sınırlı lineer operatörlerin cebiri $B(H)$ bir C^* -cebiri. Burada her bir $A \in B(H)$ operatörü için A^* , A 'nın adjointidir.

e) $B(H)$ 'nın herhangi bir kapalı *-alt cebiri bir C^* -cebiri.

Tanım 5.1.7. [15] $\mathcal{A}$ bir C^* -cebiri ve $a, p, u \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda;

1) Eğer $a^*a = aa^*$ ise a **normal**dir,

2) Eğer $p = p^* = p^2$ ise p bir **projeksiyon**dur,

3) Eğer $u^*u = uu^* = 1$ ise u **üniter**dir,

4) Eğer $u^*u = 1$ ise u bir **izometridir**,

5) Eğer $uu^* = 1$ ise u bir **co-izometridir**

denir.

Tanım 5.1.8. [19] Bir $\mathcal{A}$ C^* -cebirinin **bir a elemanının spektrumu** $\sigma(a)$, $a - \lambda e$, $\mathcal{A}$ 'da tersinir olmayacak şekildeki tüm λ kompleks skalerlerinin oluşturduğu kümedir.

Tanım 5.1.9. [15] Bir $\mathcal{A}$ C^* -cebirinin bir a elemanı için eğer $a^* = a$ ve $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$ ise a elemanına **pozitif** denir.

Bir a pozitif elemanı kastedildiğinde $a \geq 0$ yazılır.

Pozitif elemanlar için aşağıdaki karakterizasyonlar verilebilir:

Önerme 5.1.1. [15] $\mathcal{A}$ bir C^* -cebiri olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- 1) $a \in \mathcal{A}$ pozitifdir.
- 2) Bir pozitif $b \in \mathcal{A}$ elemanı için $a = b^2$ 'dir.
- 3) Bir $x \in \mathcal{A}$ için $a = xx^*$ 'dır.
- 4) Bütün $t \geq \|a\|$ için $a^* = a$ ve $\|t - a\| \leq t$ dir.

5.2 Hilbert C^* -Modülleri

Hilbert C^* modülleri, Banach uzayları ve Hilbert uzayları arasındaki bir kategoriden oluşmaktadır. Temel fikir, lineer uzayın yerine C^* -cebiri üzerinde bir modül düşünmek ve $\mathbb{C}$ 'den daha genel olan, bir C^* -cebiri üzerinde değerler alan iç çarpıma izin vermektir. Yapı ilk olarak Kaplansky tarafından 1952 'de kullanılmış, daha sonra Rieffel ve Paschke tarafından 1972/73 yıllarında çalışılmıştır.

Tanım 5.2.1. [13] $\mathcal{A}$ bir halka ve H bir abel grup olmak üzere her $a, b \in \mathcal{A}$ ve her $x, y \in H$ elemanları için

$$a(x + y) = ax + ay$$

$$(a + b)x = ax + bx$$

$$a(bx) = (ab)x$$

$$1_{\mathcal{A}}x = x, \text{ eğer } \mathcal{A} \text{ birimli bir halka ise}$$

koşulları sağlanacak biçimde bir $\mathcal{A} \times H \rightarrow H$ işlemi ile donatılan H kümesine bir **(sol) $\mathcal{A}$ -modül** denir.

Tanım 5.2.2. [13] $\mathcal{A}$ bir C^* -cebiri ve H bir (sol) $\mathcal{A}$ -modül yapısına sahip kompleks bir lineer uzay olsun. $\mathcal{A}$ ve H üzerinde verilen lineer yapıların uyumlu olduğunu

kabul edelim, yani her $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in \mathcal{A}$ ve $x \in H$ için $\lambda(ax) = a(\lambda x) = (\lambda a)x$ olsun. Bu durumda,

$$(1) \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$(2) \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(3) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$$

$$(4) \langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$$

$$(5) \langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

şartlarını sağlayan bir $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathcal{A}$ dönüşümüne **$\mathcal{A}$ -değerli iç çarpım** ve $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de bir **(sol) ön Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü** denir.

Tanım 5.2.3. [13] $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ön Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü üzerinde $\|x\| = \|\langle x, x \rangle\|^{1/2}$ bir norm tanımlar. Eğer H bu norma göre tam ise bu durumda H 'ya **Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü** denir.

Örnek 5.2.1. Bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri, her $a, b \in \mathcal{A}$ için, üzerinde, $\langle a, b \rangle = ab^*$ iç çarpımı tanımlanarak bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü yapılabilir.

Hilbert C^* -modüllerinde **Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin** sağlandığını belirtelim:

Önerme 5.2.1. [13] H bir Hilbert C^* -modülü ve $x, y \in H$ olmak üzere

$$\|\langle x, y \rangle\|^2 \leq \|\langle x, x \rangle\| \cdot \|\langle y, y \rangle\|$$

dır.

Tanım 5.2.4. [13] Bir H Hilbert $\mathcal{A}$ -modül olsun. Eğer; $a_i \in \mathcal{A}$ olmak üzere, her $x \in H$ elemanının $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ lineer kombinasyonu ($\mathcal{A}$ -lineer kombinasyonu) şeklinde ifade edilmesini sağlayan sonlu bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq H$ kümesi varsa H 'ya **sonlu üreteçli Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü** denir. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesine de H 'nın bir **üreteci** denir.

Tanım 5.2.5. [13] Eğer üreteçlerin sayılabilir bir kümesi varsa H Hilbert $\mathcal{A}$ -modülüne **sayılabilir üreteçlidir** denir.

5.2.1 Hilbert C^* -Modülleri'nde Operatörler

Şimdi Hilbert C^* -modülleri üzerindeki operatörlerin bazı özelliklerini tanımlayalım:

Tanım 5.2.6. E ve F , bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerinde Hilbert $\mathcal{A}$ -modülleri olsun.

$T : E \rightarrow F$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $a \in \mathcal{A}$ için,

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

$$T(ax) = aT(x)$$

sağlanıyorsa T 'ye E 'den F 'ye **$\mathcal{A}$ -lineer operatör** denir.

Tanım 5.2.7. E ve F , bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerinde Hilbert $\mathcal{A}$ -modülleri olsun.

$T : E \rightarrow F$ bir dönüşüm olmak üzere her $x \in E$ için,

$$\|Tx\| \leq K \cdot \|x\|$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ sayısı bulunabiliyor ise T 'ye **sınırlı operatör** denir.

Tanım 5.2.8. [15] E ve F , bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerinde Hilbert $\mathcal{A}$ -modülleri ve

$T : E \rightarrow F$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in E$ için,

$$\langle x, Ty \rangle = \langle T^*x, y \rangle$$

eşitliğini sağlayan bir $T^* : F \rightarrow E$ dönüşümü mevcut ise T 'ye **adjointlenebilir operatör (adjointable)** denir. Böyle bir T^* dönüşümüne T 'nin **adjointi** denir.

$\text{End}_{\mathcal{A}}^*(H)$ ile H üzerindeki tüm adjointlenebilir dönüşümlerin kümesi kastedilir.

Her adjointlenebilir operatörün $\mathcal{A}$ -lineer ve sınırlı olduğunu da belirtelim.

Önerme 5.2.2. [15] T ve S 'nin bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerindeki bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü üzerinde adjointlenebilir olan iki operatör olduğunu kabul edelim.

1) T 'nin adjointi tektir ve $T^{**} = T$ olmak üzere adjointlenebilirdir.

2) ST , $(ST)^* = T^*S^*$ ile adjointlenebilirdir.

Önerme 5.2.3. [15] H bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerinde bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü olsun. Bu durumda $\text{End}_{\mathcal{A}}^*(H)$,

$$\|T\| = \sup \{ \|Tx\| : x \in H, \|x\| \leq 1 \}$$

operatör normu ile donatılmış bir C^* -cebidir.

5.2.2 Hilbert C^* -Modülleri'nde Bessel Dizileri ve Frame'ler

Hilbert C^* -modüllerinde frame teorisi ile ilgili çok önemli bir teorem olan **Kasparov's Stabilisation Teoremi**, her sonlu veya sayılabilir üreteçli Hilbert C^* -modülünün bir frame'e sahip olduğunu ifade etmektedir. Sonlu veya sayılabilir üreteçli bir Hilbert C^* -modülünde standart frame'ler her zaman mevcut olduğundan genellikle çalışmaların çoğunda temel olarak, bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerindeki sonlu veya sayılabilir üreteçli H Hilbert C^* -modülleri ele alınmıştır.

Biz de işte bu sebepten dolayı bu tezde bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerindeki sonlu veya sayılabilir üreteçli H Hilbert C^* -modülleri ile ilgileneceğiz.

Tanım 5.2.9. [13] $\mathcal{A}$ bir C^* -cebiri ve J indeks kümesi $\mathbb{N}$ 'nin sonlu veya sayılabilir bir alt kümesi olsun. Bir H Hilbert $\mathcal{A}$ -modülündeki elemanların $\{x_j\}_{j \in J}$ dizisine, eğer her $x \in H$ için,

$$C \langle x, x \rangle \leq \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \leq D \langle x, x \rangle \quad (5.2.1)$$

eşitsizliğini sağlayan $C, D > 0$ reel sabitleri bulunabilmesi durumunda H için bir **modüler frame** denir.

Yukarıdaki eşitsizlikte geçen serinin yakınsaması C^* -cebirinin normuna göre yakınsamadır.

(5.2.1) eşitsizliğini sağlayan optimal sabitler (C için maksimal, D için minimal değerler) **optimal frame sınırları** olarak adlandırılır.

Eğer $C = D$ ise $\{x_j\}_{j \in J}$ **tight frame**, $C = D = 1$ ise $\{x_j\}_{j \in J}$ **Parseval frame** adını alır.

Tanım 5.2.10. [13] H , bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerinde sonlu veya sayılabilir üreteçli bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü olsun. Eğer her $x \in H$ için,

$$\sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \leq D \langle x, x \rangle \quad (5.2.2)$$

eşitsizliğini sağlayan $D > 0$ sayısı var ise $\{x_j\}_{j \in J}$, D sınırı ile bir **modüler Bessel dizisi** olarak adlandırılır.

Tanım 5.2.11. [13] H 'nın bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerinde sonlu veya sayılabilir üreteçli bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü olduğunu kabul edelim ve $\{x_j\}_{j \in J}$ H için bir (modüler) frame

ve $\{y_j\}_{j \in J}$ H 'da bir dizi olsun. Eğer her $x \in H$ için,

$$x = \sum_{j \in J} \langle x, y_j \rangle x_j$$

sağlanırsa, bu durumda $\{y_j\}_{j \in J}$ 'ye $\{x_j\}_{j \in J}$ 'nin **modüler dual dizisi** denir. $\{y_j\}_{j \in J}$ dizisi de bir frame olduğunda $\{x_j\}_{j \in J}$ ve $\{y_j\}_{j \in J}$ çiftine bir **modüler dual frame çifti** denir.

Hilbert uzayları için frame'lerin temel özelliği, uzaydaki her elemanın, frame yardımıyla basit standart bir ayrışma (decomposition) izin veren yeniden inşaa (reconstruction) formülünün varlığıdır. Hilbert C^* -modüllerinde de Parseval frame'ler ve modüler frame'ler için aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Teorem 5.2.1. [13] $\mathcal{A}$ bir C^* -cebiri, H sonlu veya sayılabilir üreteçli bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü ve $\{x_j\}_{j \in J}$, H için bir Parseval frame olsun. Bu durumda her $x \in H$ için **yeniden inşaa (reconstruction) formülü**

$$x = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j$$

şeklindedir.

Daha genel olarak, modüler frame'ler için yeniden inşaa formülünü sağlayan bir varlık ve teklik sonucu mevcuttur. Bu sonuç herhangi bir Hilbert C^* -modül frame'si için bir dualin varlığını da garanti eder:

Teorem 5.2.2. [13] $\mathcal{A}$ bir C^* -cebiri, H sonlu veya sayılabilir üreteçli bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü ve $\{x_j\}_{j \in J}$, H için modüler bir frame olsun. Bu durumda her $x \in H$ için **yeniden inşaa (reconstruction) formülü** denilen

$$x = \sum_{j \in J} \langle x, S(x_j) \rangle x_j$$

eşitliğini sağlayan bir tek $S \in \text{End}_{\mathcal{A}}^*(H)$ operatörü vardır.

Yukarıdaki teoremden geçen duale, $\{x_j\}_{j \in J}$ 'nin **kanonik veya standart duali** denir ve kanonik dualin de bir frame olduğu açıktır.

Tanım 5.2.12. [13] J sayılabilir bir indeks kümesi olmak üzere,

$$l^2(\mathcal{A}) = \left\{ \{a_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{A} : \sum_{j \in J} a_j a_j^* < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan $l^2(\mathcal{A})$,

$$\left\langle \{a_j\}_{j \in J}, \{b_j\}_{j \in J} \right\rangle = \sum_{j \in J} a_j b_j^*$$

$\mathcal{A}$ değerli iç çarpımı ile bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülüdür.

Modüler framer için analiz operatörü, sentez operatörü ve frame operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$T : H \rightarrow l^2(\mathcal{A})$$

$$Tx = \{\langle x, x_j \rangle\}_{j \in J}$$

şeklinde tanımlı operatör **analiz operatörü** olarak adlandırılır.

T 'nin adjointi olan operatör,

$$T^* : l^2(\mathcal{A}) \rightarrow H$$

$$T^* \{a_j\}_{j \in J} = \sum_{j \in J} a_j x_j$$

ile verilir ve T^* operatörüne **pre-frame operatörü** veya **sentez operatörü** denir.

T ve T^* operatörlerinin bileşkesi alınarak, $S : H \rightarrow H$,

$$Sx = T^*Tx = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j \quad (5.2.3)$$

frame operatörü elde edilir.

5.2.3 Bessel Dizileri ve Frame'ler İçin Bir Denk Tanım

Önceki kısımda verilen tanıma göre bir dizinin Bessel dizisi veya bir frame olup olmadığını test etmek için C^* -cebirindeki pozitif elemanları karşılaştırmamız gerekecektir. Ancak bu kolay bir iş değildir. Şimdi uygulama yapılabilirliği açısından

daha kolay olan Hilbert C^* -modüllerindeki Bessel dizileri ve frame'ler için denk bir tanım vereceğiz.

İlk olarak, Bessel dizisinin analiz operatörünün adjointlenebilir olduğunu ifade edeceğiz:

Lemma 5.2.1. [15] $\{x_j\}_{j \in J}$ bir C^* -cebiri olan $\mathcal{A}$ üzerindeki sonlu veya sayılabilir üreteçli bir H Hilbert $\mathcal{A}$ -modülünde bir Bessel dizisi olsun. Bu durumda,

$$Tx = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle e_j$$

şeklinde tanımlı olan $T : H \rightarrow l^2(A)$ analiz operatörü adjointlenebilirdir ve her j için $T^*e_j = x_j$ 'dır.

Aşağıdaki lemma bazı sonuçların ispatında kullanılacaktır:

Lemma 5.2.2. [15] M ve N bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerinde birer Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü ve $T : M \rightarrow N$ lineer bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) T operatörü sınırlı ve $\mathcal{A}$ -lineerdir.

(ii) Her $x \in M$ için $\mathcal{A}$ 'da $\langle Tx, Tx \rangle \leq K \langle x, x \rangle$ eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ sabiti vardır.

Hilbert C^* -modüllerinde Bessel dizileri için aşağıdaki denk tanımı yazabiliriz:

Lemma 5.2.3. [15] $\{x_j\}_{j \in J}$ bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerinde sonlu veya sayılabilir üreteçli bir H Hilbert $\mathcal{A}$ -modülünde bir dizi olsun. Bu durumda $\{x_j\}_{j \in J}$, D sınırı ile bir Bessel dizisidir ancak ve ancak her $x \in H$ için,

$$\left\| \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\| \leq D \|x\|^2$$

olur.

İspat. $(\Rightarrow)$: Aşıkâr.

$(\Leftarrow)$: Her $x \in H$ için, $Tx = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle e_j$ ile bir $T : H \rightarrow l^2(\mathcal{A})$ lineer operatörünü tanımlayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \|\langle Tx, Tx \rangle\| = \|\langle T^*Tx, x \rangle\| \\ &= \left\| \left\langle \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j, x \right\rangle \right\| = \left\| \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\| \leq D \|x\|^2 \end{aligned}$$

ve buradan $\|Tx\| \leq \sqrt{D} \|x\|$ elde edilir. Böylece T sınırlıdır.

T 'nin $\mathcal{A}$ -lineer olduğu açıktır. Dolayısıyla Lemma 5.2.2 gereğince,

$$\langle Tx, Tx \rangle \leq D \langle x, x \rangle$$

veya denk olarak

$$\sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \leq D \langle x, x \rangle$$

yazılabilir. Böylece $\{x_j\}_{j \in J}$, D sınırı ile bir Bessel dizisidir. $\square$

Aynı düşünce ile, Hilbert C^* -modüllerinde frame'lerin denk bir tanımı aşağıdaki formda elde edilebilir:

Önerme 5.2.4. [15] H bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerindeki sonlu veya sayılabilir üreteçli bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü ve $\{x_j\}_{j \in J}$, H 'da bir dizi olsun. $\{x_j\}_{j \in J}$, C ve D sınırları ile H için bir frame'dir ancak ve ancak her $x \in H$ için,

$$C \|x\|^2 \leq \left\| \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\| \leq D \|x\|^2$$

sağlanır.

Bu denk tanımların avantajlarından biri C^* -cebirindeki herhangi pozitif iki elemanın karşılaştırılmasındansa, bu iki pozitif elemanın normlarının karşılaştırılmasının daha kolay oluşudur.

Önerme 5.2.5. [15] H 'nın bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerinde sonlu veya sayılabilir üreteçli bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü olduğunu kabul edelim ve $\{x_j\}_{j \in J}$ ve $\{y_j\}_{j \in J}$ H 'da Bessel dizileri olsun. Eğer her $x \in H$ için,

$$x = \sum_{j \in J} \langle x, y_j \rangle x_j$$

sağlanırsa, bu durumda hem $\{x_j\}_{j \in J}$ hem de $\{y_j\}_{j \in J}$, H için frame'dir ve her $x \in H$ için,

$$x = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle y_j$$

olur.

İspat. $\{y_j\}_{j \in J}$ 'nin Bessel sınırını D_Y ile gösterelim. Her $x \in H$ için,

$$\begin{aligned} \|x\|^4 &= \left\| \left\langle \sum_{j \in J} \langle x, y_j \rangle x_j, x \right\rangle \right\|^2 = \left\| \sum_{j \in J} \langle x, y_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\|^2 \\ &= \left\| \left\langle \sum_{j \in J} \langle x, y_j \rangle \langle x_j, x \rangle, \sum_{j \in J} \langle x, y_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\rangle \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{j \in J} \langle x, y_j \rangle \langle y_j, x \rangle \right\| \cdot \left\| \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\| \\ &\leq D_Y \|x\|^2 \cdot \left\| \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\| \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$D_Y^{-1} \|x\|^2 \leq \left\| \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\|$$

sonucuna ulaşılır. Böylece D_Y^{-1} , $\{x_j\}_{j \in J}$ için alt frame sınırı olup $\{x_j\}_{j \in J}$ bir frame'dir.

Benzer biçimde $\{y_j\}_{j \in J}$ ailesinin de H için bir frame olduğunu gösterebiliriz. [13] 'de Önerme 6.3 ün direkt bir sonucu olarak, her $x \in H$ için, $x = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle y_j$ 'nin sağlandığı gözlemlenebilir. $\square$

5.2.4 Bessel Dizileri ve Frame'ler İçin Bazı Karakterizasyonlar

Bu bölümün amacı, Hilbert C^* -modüllerinde frame'ler ve Bessel dizilerinin operatör-teorik bakış açısıyla bazı karakterizasyonlarını vermektir.

Aşağıdaki lemma Heuser [5] 'dan alınmıştır. Heuser sadece $l^2(\mathbb{C})$ 'deki diziler için mevcut olabilecek durumu düşünmüştür. Ancak onun verdiği ispat daha genel kümeler için de geçerli olmaktadır.

Lemma 5.2.4. [39] $\mathcal{A}$ bir C^* -cebiri ve $\{c_j\}_{j \in J} \mathcal{A}$ 'da bir dizi olsun. Eğer $\sum_{j \in J} c_j \xi_j^*$, bütün $\{\xi_j\}_{j \in J} \in l^2(\mathcal{A})$ için yakınsak ise bu durumda $\{c_j\}_{j \in J} \in l^2(\mathcal{A})$ olur.

Şimdi de Hilbert C^* -modüllerinde operatörler vasıtasıyla Bessel dizilerinin bir karakterizasyonunu vereceğiz:

Önerme 5.2.6. [39] $\{x_j\}_{j \in J}$ bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerinde sonlu veya sayılabilir üreteçli bir H Hilbert $\mathcal{A}$ -modülünde bir dizi olsun. Bu durumda, $\{x_j\}_{j \in J}$, D Bessel sınırı

ile bir Bessel dizisidir ancak ve ancak

$$U \{c_j\}_{j \in J} = \sum_{j \in J} c_j x_j$$

ile tanımlı

$$U : l^2(\mathcal{A}) \rightarrow H$$

operatörü, $\|U\| \leq \sqrt{D}$ olmak üzere, iyi tanımlı sınırlı bir operatördür.

İspat. $(\Rightarrow) : \{x_j\}_{j \in J}$ 'nin D Bessel sınırı ile bir Bessel dizisi olduğunu kabul edelim.

İlk olarak U 'nun iyi tanımlı olduğunu göstereceğiz.

Keyfi $n > m$ için,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n c_j x_j - \sum_{j=1}^m c_j x_j \right\|^2 &= \left\| \sum_{j=m+1}^n c_j x_j \right\|^2 \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left\| \left\langle \sum_{j=m+1}^n c_j x_j, x \right\rangle \right\|^2 \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{j=m+1}^n c_j \langle x_j, x \rangle \right\|^2 \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left\| \left\langle \sum_{j=m+1}^n c_j \langle x_j, x \rangle, \sum_{j=m+1}^n c_j \langle x_j, x \rangle \right\rangle \right\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{j=m+1}^n c_j c_j^* \langle x_j, x \rangle \langle x_j, x \rangle^* \right\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{j=m+1}^n \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\| \cdot \left\| \sum_{j=m+1}^n c_j c_j^* \right\| \\ &\leq D \left\| \sum_{j=m+1}^n c_j c_j^* \right\| \end{aligned}$$

olur. Böylelikle, $\sum_{j \in J} c_j x_j$ H 'da Cauchy dizisi olup, H tam olduğundan, $\sum_{j \in J} c_j x_j$ yakınsaktır. Dolayısıyla U iyi tanımlıdır.

Şimdi de U 'nun sınırlılığını görelim:

$$\begin{aligned}
\|U\{c_j\}\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \|\langle U\{c_j\}, x \rangle\|^2 \\
&= \sup_{\|x\|=1} \left\| \left\langle \sum_{j \in J} c_j x_j, x \right\rangle \right\|^2 \\
&= \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{j \in J} c_j \langle x_j, x \rangle \right\|^2 \\
&= \sup_{\|x\|=1} \left\| \left\langle \sum_{j \in J} c_j \langle x_j, x \rangle, \sum_{j \in J} c_j \langle x_j, x \rangle \right\rangle \right\| \\
&= \sup_{\|x\|=1} \left\| \left\langle \sum_{j \in J} c_j c_j^* \langle x_j, x \rangle \langle x_j, x \rangle^*, \sum_{j \in J} c_j c_j^* \langle x_j, x \rangle \langle x_j, x \rangle^* \right\rangle \right\| \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\| \cdot \left\| \sum_{j \in J} c_j c_j^* \right\| \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \{D \|x\|^2\} \cdot \left\| \sum_{j \in J} c_j c_j^* \right\| \\
&\leq D \left\| \sum_{j \in J} c_j c_j^* \right\| = D \|\{c_j\}\|^2
\end{aligned}$$

olup, buradan $\|U\| \leq \sqrt{D}$ elde edilir.

($\Leftarrow$) : Keyfi $x \in H$ ve $\{c_j\}_{j \in J} \in l^2(\mathcal{A})$ için

$$\langle x, U\{c_j\} \rangle = \left\langle x, \sum_{j \in J} c_j x_j \right\rangle = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle c_j \quad (5.2.4)$$

yazılabilir. Lemma 5.2.4 gereğince $\{\langle x, x_j \rangle\}_{j \in J} \in l^2(\mathcal{A})$ dir. (5.2.4) eşitliğinden,

$$\langle x, U\{c_j\} \rangle = \langle \{\langle x, x_j \rangle\}, \{c_j\} \rangle$$

elde edilir ki, bu da U 'nun adjointlenebilir ve $U^*x = \{\langle x, x_j \rangle\}_{j \in J}$ olduğunu gösterir.

$$\left\| \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\| = \|U^*x\|^2 \leq \|U^*\|^2 \|x\|^2 = \|U\|^2 \|x\|^2 \leq D \|x\|^2$$

olup buradan $\{x_j\}_{j \in J}$ 'nin D Bessel sınırı ile bir Bessel dizisi olduğu görülür. $\square$

Önerme 5.2.7. [15] H bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerinde sonlu veya sayılabilir üreteçli bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü olsun. $\{x_j\}_{j \in J}$ 'nin H 'da bir dizi olduğunu kabul edelim. Bu

durumda, $\{x_j\}_{j \in J}$ H için bir frame'dir ancak ve ancak

$$U \{c_j\}_{j \in J} = \sum_{j \in J} c_j x_j$$

ile tanımlı

$$U : l^2(\mathcal{A}) \rightarrow H$$

operatörü iyi tanımlı sınırlı bir operatördür.

İspat. $(\Rightarrow)$: Aşıkâr.

$(\Leftarrow)$: Önerme 5.2.6 gereğince, $\{x_j\}_{j \in J}$ bir Bessel dizisidir. $D \{x_j\}_{j \in J}$ 'nin Bessel sınırı olsun. Her $x \in H$ için,

$$x = UU^*(UU^*)^{-1}x = \sum_{j \in J} \langle (UU^*)^{-1}x, x_j \rangle x_j$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \|x\|^4 &= \|\langle x, x \rangle\|^2 = \left\| \left\langle \sum_{j \in J} \langle (UU^*)^{-1}x, x_j \rangle x_j, x \right\rangle \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{j \in J} \langle (UU^*)^{-1}x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\|^2 \\ &\leq \left\| \sum_{j \in J} \langle (UU^*)^{-1}x, x_j \rangle \langle x_j, (UU^*)^{-1}x \rangle \right\| \cdot \left\| \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\| \\ &\leq D \|(UU^*)^{-1}x\|^2 \cdot \left\| \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\| \\ &\leq D \|(UU^*)^{-1}\|^2 \cdot \|x\|^2 \cdot \left\| \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\| \end{aligned}$$

olup, buradan frame eşitsizliğindeki alt sınır olarak,

$$\frac{1}{D \|(UU^*)^{-1}\|^2} \|x\|^2 \leq \left\| \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle \right\|$$

elde edilmiş olur. □

5.2.5 Hilbert C^* -Modülleri'nde Riesz Bazları ve Dualleri

Bu bölümün amacı Hilbert C^* -modüllerinde Riesz bazlarını tanıtmaktır. Bilindiği gibi bir Hilbert uzayında her Riesz bazı, kendisi de Riesz bazı olan bir tek duale

sahipti. Ancak Hilbert C^* -modüllerinde bütün Riesz bazlarının bir tek duale sahip olması gerekmediği gibi, her dualin de bir Riesz bazı olması durumu söz konusu değildir. (Bakınız [13]) Bu bölümde Hilbert uzaylarındaki yapıdan daha farklı ve karmaşık olan Hilbert C^* -modüllerindeki Riesz bazlarının duallerini inceleyeceğimiz birkaç örnek de vereceğiz. Ayrıca bir Riesz bazının dual dizisinin de Riesz bazı olması için gerek ve yeter olan şartı inceledikten sonra bir dual Riesz bazının bir tek olması için sağlanması gereken durumu ele alacağız.

Tanım 5.2.13. [13] Bir H Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü için bir $\{x_j\}_{j \in J}$ frame'si, eğer

i) Her $j \in J$ için $x_j \neq 0$,

ii) $S \subseteq J$ ve $\{a_j : j \in S\} \subseteq \mathcal{A}$ katsayıları ile $\sum_{j \in S} a_j x_j$ $\mathcal{A}$ -lineer kombinasyonu sıfıra eşit ise bu durumda her bir $j \in S$ için $a_j x_j$ bileşeni sıfırdır

özelliklerini sağlıyor ise H için **modüler Riesz bazıdır**.

Hilbert C^* -modüllerinde Riesz bazlarının aşağıdaki tanımı, bir $\{x_j\}_{j \in J}$ dizisinin, Riesz bazı olup olmadığını test etmek için kullanılabilir. Bunun için eğer bir $\{c_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{A}$ dizisi için $\sum_{j \in J} c_j x_j = 0$ ise bu durumda her j için $c_j x_j = 0$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

Sonuç 5.2.1. [14] $\{x_j\}_{j \in J}$ 'nin H için bir frame olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\{x_j\}_{j \in J}$ bir Riesz bazıdır ancak ve ancak

(i) her j için $x_j \neq 0$ 'dır ve

(ii) eğer bir $\{c_j\}_{j \in J} \in l^2(\mathcal{A})$ dizisi için $\sum_{j \in J} c_j x_j = 0$ ise bu durumda her j için $c_j x_j = 0$ dir.

5.2.6 Hilbert C^* -Modüllerinde Riesz Bazlarının Dualleri

Bu bölümde Hilbert C^* -modüllerinde Riesz bazlarının dual dizileri üzerine bir inceleme yapacağız. Aşağıdaki üç örnek, Hilbert C^* -modüllerindeki Riesz bazlarının duallerinin, Hilbert uzaylardaki durumlardan oldukça farklı olduğunu göstermektedir. Bunlardan ilki, Hilbert C^* -modüllerinde Riesz bazlarının dual Riesz baz(lar)ının bir tek olması gerekmediğine dair bir örnektir:

Örnek 5.2.2. [14] $\mathcal{A} = M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ ile 2×2 tipindeki tüm kompleks terimli matrislerin C^* -cebirini tanımlayalım. $H = \mathcal{A}$ alalım ve her $A, B \in H$ için $\langle A, B \rangle = AB^*$ olarak tanımlayalım. Bu durumda H bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülüdür.

$E_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 2$ olmak üzere (i, j) -inci koordinatı 1, diğer bütün koordinatları 0 olan 2×2 tipinde bir matris olsun. Bu durumda $\{E_{1,1}, E_{2,2}\}$, H 'nın bir Riesz bazıdır ve kendisinin de dualidir. Diğer yandan $\{E_{1,1} + E_{2,1}, E_{2,2}\}$ de $\{E_{1,1}, E_{2,2}\}$ 'nin bir dual Riesz bazıdır.

Bilindiği gibi bir H Hilbert uzayında, $\{x_j\}_{j \in J}$ bir Riesz bazı ve $\{y_j\}_{j \in J}$ de $\{x_j\}_{j \in J}$ 'nin bir dual dizisi ise, bu durumda $\{y_j\}_{j \in J}$, $\{x_j\}_{j \in J}$ 'nin bir tek duali olan bir Riesz bazı oluyordu. Aşağıdaki örnek, Hilbert C^* -modüllerinde durumun böyle olmadığını göstermektedir:

Örnek 5.2.3. [14] l^∞ tüm kompleks terimli dizilerin uzayı olmak üzere, l^∞ 'da herhangi $u = \{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ve $v = \{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dizilerini göz önüne alalım.

$$uv = \{u_j v_j\}_{j \in \mathbb{N}},$$

$$u^* = \{\overline{u_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$$

ve

$$\|u\| = \max_{j \in \mathbb{N}} |u_j|$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $\mathcal{A} = \{l^\infty, \|\cdot\|\}$ bir C^* -cebiridir.

H olarak da sıfıra yakınsayan tüm dizilerin uzayı olan c_0 'ı düşünelim. Her $u, v \in H$ için

$$\langle u, v \rangle = uv^* = \{u_j \overline{v_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda H bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülüdür.

$e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 0, 0, n, 0, 0, \dots)$, ... olmak üzere $\{e_j\}_{j \in J}$ dizisini tanımlayalım.

$\{e_j\}_{j \in J}$, H 'nın bir ortonormal bazıdır. Şimdi

$$x_j = e_j$$

ve

$$y_j = \begin{cases} e_1, & j = 1 \text{ ise} \\ e_j + j e_{j-1}, & j \neq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Her $x \in H$ için $x = \sum_{j \in J} \langle x, y_j \rangle x_j$ 'nin sağlandığı gösterilebilir. Fakat $\{y_j\}_{j \in J}$ bir Riesz bazı değildir. $\{y_j\}_{j \in J}$ Bessel dizisi bile değildir.

Hilbert C^* -modüllerinde bir Riesz bazının dual dizisinin bir Bessel dizisi olsa bile, Riesz bazı olamama gibi bir ihtimali hala taşıyabileceğini belirtelim:

Örnek 5.2.4. [14] A ve H 'yı Örnek 5.2.3 'deki gibi alalım.

$$x_j = e_j$$

ve

$$y_j = \begin{cases} e_1 + e_2, & j = 1, 2 \text{ ise} \\ e_j, & j \neq 1, 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

$\{y_j\}_{j \in J}$ bir Bessel dizisidir ve her $x \in H$ için $x = \sum_{j \in J} \langle x, y_j \rangle x_j$ eşitliğini sağlar.

Böylelikle $\{y_j\}_{j \in J}$ H için frame'dir. Fakat $\{y_j\}_{j \in J}$ 'nin bir Riesz bazı olmadığı açıktır.

Teorem 5.2.3. [14] $\{x_j\}_{j \in J}$ 'nin bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerindeki sonlu veya sayılabilir üreteçli bir H Hilbert $\mathcal{A}$ -modülünde bir Riesz bazı olduğunu kabul edelim. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $\{y_j\}_{j \in J}$ ailesi, $\{x_j\}_{j \in J}$ 'ailesinin bir dual frame'sidir.
- (ii) $\{y_j\}_{j \in J}$ ailesi, $\{x_j\}_{j \in J}$ 'ailesinin bir dual Bessel dizisidir.
- (iii) S , $\{x_j\}_{j \in J}$ ailesinin frame operatörü ve $\{z_j\}_{j \in J}$, her $j \in J$ ve her $x \in H$ için $\langle x, z_j \rangle x_j = 0$ özelliğini sağlayan H 'da bir Bessel dizisi olmak üzere her $j \in J$ için $y_j = S^{-1}x_j + z_j$ 'dir.

Bir Riesz bazının dual dizisinin de Riesz bazı olması için gereken durum için aşağıdaki karakterizasyonu verebiliriz:

Teorem 5.2.4. [14] $\{x_j\}_{j \in J}$ bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerindeki sonlu veya sayılabilir üreteçli bir H Hilbert $\mathcal{A}$ -modülünde bir Riesz bazı ve $\{y_j\}_{j \in J}$ de H da bir dizi olsun. Bu

durumda $\{y_j\}_{j \in J}, \{x_j\}_{j \in J}$ 'nin bir dual Riesz dizisidir ancak ve ancak her $j \in J$ için $y_j = S^{-1}x_j + z_j$ olur.

Burada $S, \{x_j\}_{j \in J}$ 'nin frame operatörü ve $\{z_j\}_{j \in J}$, her $j \in J$ için $z_j = b_j S^{-1}x_j$ olacak şekilde $b_j \in \mathcal{A}$ ların varlığı ile her $x \in H$ için $\langle x, x_j \rangle b_j x_j = 0$ özelliğini sağlayan H 'da bir Bessel dizisidir.

Sonuç 5.2.2. [14] H 'nın bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerindeki sonlu veya sayılabilir üreteçli bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü olduğunu kabul edelim. Eğer $\mathcal{A}$ komutatif ise bu durumda H için her Riesz bazı bir tek dual Riesz bazına sahiptir.

İspat. Bakınız [26], sayfa 255. □

Sonuç 5.2.2 'deki şart altında her Riesz bazının bir tek dual Riesz bazına sahip olmasına rağmen pek çok dual frame'sinin olabileceğini belirtelim. Aşağıdaki örnek, bu durumu yansıtmaktadır:

Örnek 5.2.5. [14] $\mathcal{A} = D_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, 2×2 tipindeki tüm kompleks terimli diagonal matrislerin C^* -cebiri olsun. $H = \mathcal{A}$ alalım ve her $A, B \in H$ için

$$\langle A, B \rangle = AB^*$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda H bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülüdür.

$\mathcal{A}$ 'nın komutatif olduğu açıktır.

$E_{i,j}$, Örnek 5.2.2 'deki gibi tanımlı olsun. Bu durumda $\{E_{1,1}, E_{2,2}\}$, H 'nın bir Riesz bazıdır ve bir tek dual Riesz bazı da kendisidir.

Fakat $\{E_{1,1}, E_{2,2}\}$ 'nin dual frame'si tek değildir. Örneğin, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\{E_{1,1} + \lambda E_{2,2}, \mu E_{1,1} + E_{2,2}\}$ de $\{E_{1,1}, E_{2,2}\}$ 'nin bir dual frame'sidir.

Hilbert C^* -modüllerinde dual frame'lerin tekliği için bir gerek ve yeter koşul [26] 'de verilmiştir.

Sonuç 5.2.2 'in tersi her zaman doğru değildir. Yani eğer bir H Hilbert $\mathcal{A}$ -modülündeki her Riesz bazı bir tek dual Riesz bazına sahip ise, $\mathcal{A}$ 'nın komutatif olması gerekmez. (Bakınız [26], Sayfa 255).

Bir H Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü için

$$C_{\mathcal{A}}(H) = \{a \in \mathcal{A} : abx = bax, \forall b \in A, x \in H\}$$

şeklinde tanımlanırsa şu sonuç verilebilir:

Sonuç 5.2.3. *[15] H 'nın bir $\mathcal{A}$ C^* -cebiri üzerindeki sonlu veya sayılabilir üreteçli bir Hilbert $\mathcal{A}$ -modülü olduğunu kabul edelim. Bu durumda H için her Riesz bazı bir tek dual Riesz bazına sahiptir ancak ve ancak $\mathcal{A} = C_{\mathcal{A}}(H)$ 'dır.*

Hilbert C^* -modüllerinde Bessel dizileri, frame'ler ve Riesz bazları ile ilgili teoremin detayları için [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [23], [24], [26], [39] numaralı kaynaklar incelenebilir.

5.3 Hilbert C^* -Modülleri'nde Frame'ler ve Sinyal İşleme

Hilbert uzaylarındaki sonlu frame teoremin ışığında sonlu üreteçli bir Hilbert C^* -modülünde sonlu modüler frame'ler ile ilgili çalışmalara bu tezin hazırlanması sürecinde de oldukça kullandığımız [11], [12], [13] numaralı kaynaklardan ulaşılabilir. Sonlu üreteçli bir Hilbert C^* -modülünde frame'lerin teorisinin araştırılmasına yönelik eğilim sinyal taşımada paket kodlama teorisinden ileri gelmektedir. Bu süreç sözlü olarak şu şekilde kısaca ifade edilebilir: Bir x sinyali sonlu boyutlu Hilbert uzayındaki bir vektördür. Digital medyada iletim, x elemanını kodlamak ve bir ağ üzerinden (internet gibi) bilgiyi göndermek şeklinde olmaktadır. Sinyali kodlamak için uygun bir $\{f_j\}_{j=1}^m$ frame'sini (genellikle Parseval veya tight) seçmek ve x elemanını $\{\langle x, f_j \rangle\}_{j=1}^m$ 'ler ile kodlamak gerekir. Fakat H 'nın boyutu büyük olduğunda $\{\langle x, f_j \rangle\}_{j=1}^m$ bilgisinin iletimi git gide zorlaşır. Bu nedenle sinyalleri kodlamada modüler frame'leri kullanırız ve kodlanan sinyaller bilgi paketlerini oluşturur. Daha somut olarak, $M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^k$ 'ya bir Hilbert $M_n(\mathbb{C})$ -modülü olarak bakabiliriz ve $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir $x \in H \cong M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^k$ sinyali, $\{f_j\}_{j=1}^m$ bir Hilbert $M_n(\mathbb{C})$ -modülünde modüler bir frame olmak üzere $\{\langle x, f_j \rangle\}_{j=1}^m$ dizisinin elemanları ile kodlanır. Açıktır ki; her $\langle x, f_j \rangle$ bir matristir ve böylelikle bir data paketidir. Bilindiği gibi internet üzerinden paketlerin taşınması sadece bilgi paketlerinin taşınması şeklinde gerçekleşir. Sinyalleri kodlamada modüler

frame'lerin tercih edilmesi Hilbert uzaylarındaki frame'leri kullanmaktan daha elverişlidir. Kodlama işleminden sonra $j = 1, 2, 3, \dots, m$ olmak üzere $\langle x, f_j \rangle$ data paketleri ağ üzerinden alıcıya gönderilir. Alıcı bilgiyi aldığı anda kodları sentez etme süreci gerekir. Doğal olarak x 'i yeniden oluşturmak için yeniden inşaa (reconstruction) formülü gerekecektir:

$S, \{f_j\}_{j=1}^m$ frame'si için bir frame operatörü olmak üzere

$$x = \sum_{j=1}^m \langle x, S^{-1} f_j \rangle f_j$$

dir.

Fakat iletim (taşıma) sürecinde bazı bilgi paketleri kaybolabilir ve böylece alıcıya gelen sinyal,

I kayıp paketteki elemanlar için bir indeks kümesini oluşturmak üzere

$$\tilde{x} = \sum_{j \in I} \langle x, S^{-1} f_j \rangle f_j$$

şeklinde olacaktır. Böylelikle sonlu frame teorisindeki temel mesele x ile $\tilde{x}$ arasındaki hatayı minimize edebilen optimal modüler frame'leri bulmaktır. Böyle frame'ler ise modüler frame'lerin uniform (parseval) tight olanlarıdır.

Konuyla ilgili daha detaylı bilgiler için [16] ve [22] makaleleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] I. Singer, *Bases in Banach Spaces 1*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.
- [2] I. Singer, *Bases in Banach Spaces 2*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.
- [3] Y. Yilmaz, *Relative Bases in Banach Space*, **Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications**, 71(2009) 2012-2021.
- [4] R.J. Duffin, A.C. Schaeffer, *A Class of Nonharmonic Fourier Series*, **Transactions of the American Mathematical Society**, vol 72. no.2 (1952) pp. 341-366.
- [5] I. Daubechies, A. Grossmann, Y. Meyer, *Painless nonortogonal expansions*, **J. Math. Phys.** 27 (1986) 1271-1283.
- [6] C. Heil, F.D. Walnut, *Continious and Discrete Wavelet Transforms*, **SIAM**, vol.31, no. 4(1989), 628-666.
- [7] G.P. Casazza, *The art of Frame Theory*, **Taiwanese Journal of Math.**, vol 4 (2) (2000) 129-202.
- [8] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2003.
- [9] O. Christensen, *Frames and Bases*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2008.
- [10] C. Heil, *A Basis Theory Primer*, School of Mathematics Georgia Enstitute of Technology, Atlanta, Georgia, 1997.
- [11] M. Frank, D. Larson, *A module frame concept for Hilbert C -modules in Functional and Harmonic Analysis of Wavelets* (San Antonio, TX, Jan. 1999), **Contemp. Math.**, 247 (1999), 207-233.
- [12] M. Frank, D. Larson, *Modular frames for Hilbert C -modules and symmetric approximation of frames*, **Proc. SPIE**, 4119 (2000), 325-336.
- [13] M. Frank, D. Larson, *Frames in Hilbert C^* -modules and C^* -algebras*, **J. Operator Theory**, 48 (2002), 273-314.
- [14] D. Han, W. Jing, D. Larson, R.N. Mohapatra, *Riesz bases and their dual modular frames in Hilbert C^* -modules*, **J. Math. Anal. Appl.** 343, 246-256 (2008).

- [15] W. Jing, "*Frames in Hilbert C^* -modules*", Ph. D. Thesis, University of Central Florida, Orlando (2006).
- [16] W. Jing, D. Han, R.N. Mohapatra, *Structured Parseval frames in Hilbert C^* -modules*, **Contemp. Math.** 414, 275–287 (2006).
- [17] H. Li, *A Hilbert C^* -module admitting no frames*, **Bull. Lond. Math. Soc.** 43, 388–394 (2010).
- [18] I.J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1988.
- [19] E. Kreyszing, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley-Sons Inc., New York, 1989.
- [20] O. Christensen, K. Gröchenig, D. Labate, P. Vandergheynst, G. Weiss, Y. Wiaux, *Four Short Courses on Harmonic Analysis (Wavelets, Frames, Time-Frequency Methods, and Applications to Signal and Image Analysis)*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2009.
- [21] V.K. Goyal, J. Kovacevic, J.A. Kelner, *Quantized Frame Expansions with Erasures*, **Appl. Comp. Harm. Anal.**, vol. 10, no:3, (2001) 203–233.
- [22] B. Meng, *Finite Modular Frames*, Cambridge University Press, Cambridge, 1970.
- [23] Lj. Arambašić, *On Frames for Countably Generated Hilbert C^* -modules*, **Proc. Amer. Math. Soc.** 135 (2007) 469–478.
- [24] D. Han, W. Jing, D. Larson, P. Li, R.N. Mohapatra, *Dilation of Dual Frame Pairs in Hilbert C^* -modules*, **Results. Math.** 18 August 2011, DOI:10.1007/s00025-011-0195-9.
- [25] A. Khosravi, F. Sattari, *Frames in Finitely or Countably Generated Hilbert C^* -modules*, *International Mathematical Forum*, 1, no. 32(2006), 1587–1593.
- [26] I. Raeburn, S.J. Thompson, *Countably generated Hilbert modules, the Kasparov stabilization theorem, and frames in Hilbert modules*, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 131 (2003), 1557–1564.
- [27] A. Aldroubi, K.H. Gröchenig, *Nonuniform Sampling and Reconstruction in Shift-invariant spaces*, **SIAM Review** 43. no. 4 (2001), 585–620.
- [28] M.S. Asgari, A. Khosravi, *Frames and bases of subspaces in Hilbert spaces*, **J. Math. Anal. Appl.** 308 (2005), 541–553.
- [29] G.P. Casazza, J. Kovacevic, *Uniform Tight Frames for Signal Processing and Communication*, **Proc. SPIE** 4478,129(2001).
- [30] G.P. Casazza, C.J. Tremain, *A Brief Introduction to Hilbert Space Frame Theory and its Applications*, Preprint.

- [31] G.P. Casazza, *A frame Theory Primer For The Kadison-Singer Problem*, Preprint.
- [32] O. Christensen, *Frames, Riesz Bases, and Discrete Gabor/Wavelet Expansions*, **Bulletin of the American Mathematical Society**, vol 38, no.3(2001), 273-291.
- [33] O. Christensen, *Functions, Spaces, and Expansions*, Mathematical Tools in Physics and Engineering, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2010.
- [34] C. Constantinescu, *C*-algebras Volume 3*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, New York, 2001.
- [35] D. Gabor, *Theory of Communication*, **J. Inst. Elec. Eng.**, 93 (1946) 429-457.
- [36] O. Gazi, *Sinyaller ve Sistemler*, Çankaya Üniversitesi Yayınları, Ankara, 2010.
- [37] K.H. Gröchenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2000.
- [38] D. Han, D. Larson, *Frames, Bases and Group Representation*, **Mem. Amer. Math. Soc.**, 147(2000) No:697.
- [39] D. Han, W. Jing, D. Larson, R.N. Mohapatra, *Perturbation of frames and Riesz bases in Hilbert C*-modules*, **Linear Algebra and its Applications**, 431(2009), no:5-7 746-759.
- [40] H. Heuser, *Functional Analysis*, John Wiley-Sons Inc., New York, 1982.
- [41] V.R. Kadison, R.J. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras Volume I: Elementary Theory*, AMS, P.O.Box 6248 Providence, Rhode Island, 1997.
- [42] H.A. Kayran, *Analog Haberleşme*, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2002.

ÖZGEÇMİŞ

13 Kasım 1987 tarihinde Malatya’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya’da tamamladı. 2005 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Haziran 2009’da öğrenimini tamamlayarak, aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. Ağustos 2010’da Bingöl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev aldı. Aynı yılın Eylül ayında, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen görevine devam etmektedir.