

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HİPER DİMONOİDLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı SOYADI : Ayşe EKİZ ÖZCAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 03.08.2021

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Canan AKIN

**Haziran 2021
GİRESUN**

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HİPER DİMONOİDLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe EKİZ ÖZCAN

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 22/06/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Dr. Öğr. Üyesi
Dilek BAYRAK
Jüri Başkanı**

**Dr. Öğr. Üyesi
Serdar SOYLU
Üye**

**Dr. Öğr. Üyesi
Canan AKIN
Üye**

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Ayşe EKİZ ÖZCAN

22/06/2021

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarımda her türlü bilimsel desteği sağlayarak yardımcı olan danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Canan AKIN'a ve ilk danışmanım olan değerli hocam Prof. Dr. Feyzullah AHMETOĞLU'na emeklerinden dolayı çok teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarımda manevi desteğini eksik etmeyen aileme ve eşim Enes ÖZCAN'a ve de çalışma arkadaşım Ertuğrul AKÇAY'a çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER.....	II
SİMGELER LİSTESİ.....	III
TABLolar LİSTESİ	IV
ÖZET	V
SUMMARY.....	VI
BÖLÜM 1. GİRİŞ	7
1.1. Ön Bilgiler.....	8
BÖLÜM 2.KAYNAK ARAŞTIRMASI	13
2.1. Dimonoidler	13
2.2..Değişmeli Dimonoidler.....	14
2.3.Yarı-hipergruplar	23
BÖLÜM 3.ARAŞTIRMA BULGULARI:Hiper Dimonoidler.....	26
BÖLÜM 4.TARTIŞMA VE SONUÇ	39
KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	42

SİMGELER LİSTESİ

$A * B$	: A ile B nin $*$ çarpımı
D_α	: D nin bir alt dimonoidi
$(D, *, \circ)$	: " $*$ " ve " $\circ$ " ikili işlemleri ile D dimonodi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^+$	: Pozitif doğal sayılar kümesi
$P(x)$	: X kümesinin güç kümesi
$P^*(H)$	: H nin boştan farklı tüm alt kümelerinin ailesi
$w^{(0)}$	: w kelimesinin ilk harfi
$w^{(1)}$	: w kelimesinin son harfi
X^+	: X alfabesinin içindeki kelimelerin kümesi
$(X, *)$	: " $*$ " ikili işlemi ile X yarıgrubu
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
Δ_φ	: Kongrüans bağıntısı

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1.	14
Tablo 2.	14
Tablo 3.	15
Tablo 4.	15
Tablo 5.	15
Tablo 6.	15
Tablo 7.	15
Tablo 8.	16
Tablo 9.	24
Tablo 10.	24
Tablo 11.	26
Tablo 12.	26
Tablo 13.	27
Tablo 14.	27
Tablo 15.	27
Tablo 16.	27
Tablo 17.	27
Tablo 18.	27
Tablo 19.	37
Tablo 20.	38
Tablo 21.	38

HİPER DİMONOİDLER

ÖZET

Bir dimonoid, bir takım aksiyomları sağlayan iki birleşmeli ikili işlem ile oluşturulmuş bir cebirsel yapıdır. Bu tezde, öncelikle, bu cebirsel yapının tanımlanmasına dair motivasyon araştırılmış ve dimonoidlerin bazı özellikleri açıklanmıştır. Cebirsel hiper yapılar, cebirsel yapıların bir genellemesidir. Bu tez çalışmasında, yarıgrupların genellemesi olarak yarı-hipergruplar incelenmiştir. Daha sonra ise benzer bir yöntemle dimonoidler hiper dimonoidlere genellenerek dimonoidlerin bazı problemleri hiper dimonoidlere aktarılmıştır.

Anahtar kelimeler: Yarıgrup, Dimonoid, Hiper Yapılar, Hiper Dimonoid

HYPER DIMONOIDS

SUMMARY

The dimonoid is an algebraic structure equipped with two associative binary operations satisfying some axioms. In this thesis, primarily, the motivation for defining this algebraic structure is investigated and some properties of dimonoids are explained. Algebraic hyperstructures are a generalization of algebraic structures. In this thesis, semihypergroups as a generalization of semigroups are examined. Later, with a similar method, dimonoids are generalized to hyperdimonoids and some problems of dimonoids are adapted to hyperdimonoids.

Keywords: Semigroup, Dimonoid, Hyperstructures, Hyperdimonoid

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Dimonoid kavramı, ilk kez J.-L. Loday [1] tarafından 2001 yılında tanıtılmıştır. Dimonoid, bir takım aksiyomları sağlayan iki birleşmeli ikili işlem ile oluşturulmuş bir cebirsel yapıdır. Eğer bir dimonoidin ikili işlemleri aynı seçilirse dimonoid bir yarıgruba dönüşür.

Dimonoidler, ayrıntılı şekilde A. V. Zhuchok tarafından çalışılmıştır [2]. Zhuchok, dimonoidler ile ilgili bazı yeni tanımlar, çeşitli özellikler ve farklı birçok dimonoid örneği vermiştir. Zhuchok, “Commutative Dimonoids” isimli çalışmasında yarıgrup ayrışımalarının tanımlanması için dimonoidlerin dibandı kavramını tanıtmıştır [2]. Bu tezde dimonoidlerin anlaşılabilmesi için, öncelikle, Zhuchok’un bu makalesine yer verilmiştir.

Hiper yapıların tarihi, Marty’nin [3] 1934’te “8th Congress Math. Scandinaves Stockholm” isimli konferanstaki “Sur une generalization de la Notion de group” çalışmasında hiper grup teorisinin temel özelliklerini ortaya koyması ile başlamıştır. Cebirsel yapılar, boş olmayan bir küme üzerindeki ikili işlemlerle tanımlanırken cebirsel hiper yapılar ise boş olmayan bir küme üzerindeki hiper işlemlerle tanımlanır. Hiper yapılar cebirsel yapıların genişlemeleridir. Örneğin yarı-hipergruplar, yarıgrupların bir genişlemesidir. Bu tezde, öncelikle, hiper cebirsel yapı örneği olarak yarı-hipergrup kavramı hatırlatılmıştır [4,5,6,7,8]. Pek çok araştırmacı hiper yapılar üzerine çalışmalar yaparak bu teorinin gelişimine katkı sağlamıştır [9,10,11].

Bu tez çalışmasının amacı, dimonoidleri hiper dimonoidlere genelleştirmektir. Bu tezde, yarı-hipergrup kavramından esinlenerek hiper yapı ve dimonoid ilişkisi kurulmuş ve hiper dimonoid adlı yeni bir cebirsel hiper yapı oluşturulmuştur. Böylece hiper dimonoidler, dimonoidlerin bir genişlemesi olarak elde edilmiştir.

Bu tez çalışması; Giriş, Kaynak Araştırması, Araştırma Bulguları, Tartışma ve Sonuç olmak üzere dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde dimonoidler ve hiper

yapılar kısaca açıklanmış ve bazı ön bilgilere yer verilmiştir. Kaynak Araştırması bölümünün ilk kısmı Loday'in dimonoid kavramını ortaya atmasındaki motivasyona ayrılmıştır. Bölümün ikinci kısmı, Zhuchok'un "Commutative Dimonoids" adlı çalışmasındaki bazı bulgulardan oluşmaktadır [12]. Bölümün üçüncü kısmında ise yarı-hipergrup kavramına kısaca değinilmiştir. Burada kaynak olarak Davvaz'ın "Some Results on Congruences in Semihypergroups" adlı çalışması kullanılmıştır [9]. Araştırma Bulguları bölümünde yeni bir kavram olarak hiper dimonoidler tanımlanmakta, çeşitli hiper dimonoid örnekleri verilmekte ve hiper dimonoidlerin bazı özellikleri sunulmaktadır. Tartışma ve Sonuç bölümü tezde elde edilen bulguların özetinden oluşmaktadır.

1.1. Ön Bilgiler

Bu bölümde bu tez çalışmasının anlaşılabilmesi için gerekli bazı kavramlara yer verilmiştir [13,14,15,16,17].

1.1.1.Tanım. X ve Y boştan farklı kümeler olmak üzere $\theta \in P(X \times Y)$ alt kümesine X ten Y ye bir bağıntı denir. $X = Y$ ise θ ya X üzerinde bir bağıntı denir.

1.1.2.Tanım. θ , X üzerinde bir bağıntı olsun. Bu takdirde

- (i) θ ya yansıyan denir : $\Leftrightarrow$ Her $m \in X$ için $(m, m) \in \theta$ dir.
- (ii) θ ya simetrik denir : $\Leftrightarrow$ Her $m, n \in X$ için $(m, n) \in \theta$ ise $(n, m) \in \theta$ dir.
- (iii) θ ya geçişken denir : $\Leftrightarrow$ Her $m, n, l \in X$ için $(m, n) \in \theta$ ve $(n, l) \in \theta$ ise $(m, l) \in \theta$ dir.

Yansıyan, simetrik ve geçişken bir θ bağıntısına X üzerinde bir denklik bağıntısı denir.

1.1.3.Tanım. θ , X ten Y ye bir bağıntı olsun. Bu takdirde $\theta^{-1} = \{(n, m) \in Y \times X | (m, n) \in \theta\}$ bağıntısına θ nın tersi denir.

1.1.4.Tanım. X ve Y boş olmayan iki küme olmak üzere, X nın her elemanını Y nin bir ve yalnız bir elemanı ile eşleyen bağıntıya fonksiyon denir. $m \in X$ ve $n \in Y$ olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon ise $n = f(m)$ şeklinde gösterilir.

1.1.5.Tanım. $f: A \rightarrow B, n = f(m)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f^{-1}: B \rightarrow A, m = f^{-1}(n)$ bağıntısına f nin ters fonksiyonu denir.

1.1.6.Tanım. X bir küme ve $f: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde f ye idempotent denir: $\Leftrightarrow$ Her $m \in X$ için $f(f(m)) = f(m)$ dir.

1.1.7.Tanım. X boştan farklı bir küme ve " $*$ ", X üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. X e yarıgrup denir : $\Leftrightarrow$

Her $m, n, l \in X$ için $m * (n * l) = (m * n) * l$ (birleşme özelliği). Bu durum " $(X, *)$ bir yarıgruptur." şeklinde yazılır.

$(X, *)$ bir yarıgrup ve $A, B \in P(X) \setminus \{\emptyset\}$ iki küme olmak üzere $A * B$ kümesi $\{m * n \mid m \in A, n \in B\}$ olarak tanımlanır. A veya B kümelerinden biri boş küme ise $A * B = \emptyset$ olarak alınacaktır.

1.1.8.Örnek:

1. $\mathbb{Z}$ (tamsayılar kümesi) bilinen anlamdaki çarpma işlemine göre bir yarıgruptur.
2. Bir m pozitif tamsayısı için $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ olsun. $(\mathbb{Z}_m, +)$ bir yarıgruptur.

1.1.9.Tanım. $(X, *)$ bir yarıgrup ve A , X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu takdirde

1. A ya X in alt yarıgrubu denir : $\Leftrightarrow A * A \subseteq A$;
2. A ya X in sol ideali denir : $\Leftrightarrow A * X \subseteq A$;
3. A ya X in sağ ideali denir : $\Leftrightarrow X * A \subseteq A$.

A , X in hem sol hem de sağ ideali ise A ya X in (iki yanlı) ideali denir.

1.1.10.Tanım. $(X, *)$ ve $(Y, \circ)$ yarıgruplar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde f ye, X ten Y ye yarıgrup homomorfisi denir : $\Leftrightarrow$ Her $m, n \in X$ için $f(m * n) = f(m) \circ f(n)$. Eğer f , $(X, *)$ ten $(X, *)$ e yarıgrup homomorfisi ise f ye $(X, *)$ in bir endomorfisi denir.

1.1.11.Tanım. f , $(X, *)$ in bir endomorfisi olsun. Bu takdirde her $m \in X$ için $f(f(m)) = f(m)$ ise f ye idempotent endomorfi denir.

1.1.12.Tanım. $(X,*)$ bir yarıgrup ve θ , X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde θ bağıntısına X üzerinde bir kongrüans bağıntısı denir : $\Leftrightarrow$ Her $m \in X$ için $(a, b) \in \theta$ ise $(a * m, b * m) \in \theta$ ve $(m * a, m * b) \in \theta$.

1.1.13.Tanım. $(X,*)$ bir yarıgrup olsun. Bu takdirde $z \in X$ ye sıfır eleman denir : $\Leftrightarrow$ Her $m \in X$ için $z * m = z = m * z$ dir.

1.1.14.Tanım. $(X,*)$ bir yarıgrup ve $0 \in X$, X in sıfır elemanı olsun. Bu takdirde X e sıfır yarıgrup (veya null yarıgrup) denir : $\Leftrightarrow$ Her $m, n \in X$ için $m * n = 0$ dir.

1.1.15.Tanım. $G \neq \emptyset$ bir küme ve " $*$ " bu küme üzerinde bir ikili işlem olsun. Bu takdirde, $(G,*)$ cebirsel yapısına bir grup denir : $\Leftrightarrow$

- (i) Her $m, n, l \in G$ için $m * (n * l) = (m * n) * l$ dir. (Birleşme özelliği)
- (ii) Bir $e \in G$ vardır öyle ki her $m \in G$ için $m * e = e * m = m$ dir. (Birim elaman)
- (iii) e , G nin birim elamanı olmak üzere her $m \in G$ için $m * m' = e = m' * m$ olacak şekilde $m' \in G$ mevcuttur. (Ters elaman)

1.1.16.Tanım. $(G,*)$ bir grup olsun. Her $m, n \in G$ için $m * n = n * m$ ise G ye değişmeli grup denir.

1.1.17.Tanım. $R \neq \emptyset$ bir küme olsun. R üzerinde

$$+: R \times R \rightarrow R, (m, n) \rightarrow m + n,$$

$$\cdot: R \times R \rightarrow R, (m, n) \rightarrow m \cdot n$$

ikili işlemleri tanımlansın. Bu takdirde $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir : $\Leftrightarrow$

- (i) $(R, +)$ değişmeli gruptur.
- (ii) Her $m, n, l \in R$ için $m \cdot (n \cdot l) = (m \cdot n) \cdot l$
- (iii) Her $m, n, l \in R$ için $m \cdot (n + l) = m \cdot n + m \cdot l$ ve $(n + l) \cdot m = n \cdot m + l \cdot m$ dir.

1.1.18.Tanım. $(R, +, \cdot)$ bir halka olmak üzere

- (i) Her $m, n \in R$ için $m \cdot n = n \cdot m$ ise R ye değişmeli halka denir.
- (ii) Bir $1_R \in R$ elemanı, her $m \in R$ için $m \cdot 1_R = 1_R \cdot m = m$ olacak şekilde mevcutsa R ye birim elemanlı halka denir. Buradaki $1_R \in R$, halkanın birim elemanıdır.

1.1.19.Tanım. $(F, +, \cdot)$ birim elemanlı ve değişmeli bir halka olmak üzere her $m \in F \setminus \{0_F\}$ nin " $\cdot$ " işlemine göre tersi mevcut ise F ye bir cisim denir.

1.1.20.Tanım. $(V, +)$ bir değişmeli grup, F bir cisim ve $\diamond: F \times V \rightarrow V, (\alpha, v) \rightarrow \alpha \diamond v$, bir dönüşüm olsun. Bu takdirde V kümesine F cismi üzerinde bir vektör uzayı denir : $\Leftrightarrow$ Her $\alpha, \beta \in F$ ve her $u, v \in V$ için

- (i) $\alpha \diamond (u + v) = \alpha \diamond u + \alpha \diamond v$,
- (ii) $(\alpha + \beta) \diamond v = \alpha \diamond v + \beta \diamond v$,
- (iii) $\alpha \diamond (\beta \diamond v) = (\alpha \diamond \beta) \diamond v$,
- (iv) $1_F \diamond v = v$ dir.

1.1.21.Tanım. $(V, +)$ bir değişmeli grup, R bir halka ve $\diamond: R \times V \rightarrow V, (\alpha, v) \rightarrow \alpha \diamond v$ bir dönüşüm olsun. Bu takdirde V kümesine R -modül denir : $\Leftrightarrow$ Her $\alpha, \beta \in R$ ve her $u, v \in V$ için

- (i) $\alpha \diamond (u + v) = \alpha \diamond u + \alpha \diamond v$,
- (ii) $(\alpha + \beta) \diamond v = \alpha \diamond v + \beta \diamond v$,
- (iii) $\alpha \diamond (\beta \diamond v) = (\alpha \diamond \beta) \diamond v$ dir.

R birim elemanlı bir halka olmak üzere bir V R -modülüne üniter modül denir. : $\Leftrightarrow$ Her $u \in V$ için $1_R \cdot u = u$ dir. R bir cisim ise V R -üniter modülü bir vektör uzayıdır.

1.1.22.Tanım. A , bir F vektör uzayı olsun. " $\cdot$ ", A üzerinde bir ikili işlem olmak üzere A vektör uzayına F cismi üzerinde bir cebir denir : $\Leftrightarrow$ Her $m, n, l \in A$ ve $\beta \in F$ olmak üzere;

- (i) $(\beta \diamond m) \cdot n = \beta \diamond (m \cdot n) = m \cdot (\beta \diamond n)$
- (ii) $m \cdot (n + l) = m \cdot n + m \cdot l$
- (iii) $(n + l) \cdot m = n \cdot m + l \cdot m$

Burada, " $\cdot$ " işlemi birleşmeli ise A cebirine birleşmeli cebir denir.

1.1.23.Örnek. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olmak üzere 2×2 tipindeki $\mathbb{Z}$ deki matrisler kümesi $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, matrislerde bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile değişmeli olmayan birim elemanlı bir halkadır. $\mathbb{R}$, reel sayılar cismi olmak üzere $(M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}), +)$ değişmeli grubu, $\therefore \mathbb{R} \times M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$,

$\left(r, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \rightarrow r. \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix}$ dönüşümü ile bir $\mathbb{R}$ -modüldür. Bu durumda $(M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ halkası $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir cebirdir.

1.1.24.Tanım. L , bir F vektör uzayı ve $[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L, (m, n) \rightarrow [m, n]$ bir dönüşüm (Lie bracket) olsun. Bu takdirde L ye, F cismi üzerinde bir Lie cebri denir.

$:\Leftrightarrow$

- (i) $[\cdot, \cdot]$ dönüşümü bilineerdir: Her $\alpha, \beta \in F$ ve her $m, n, l \in L$ için $[\alpha n + \beta l, m] = \alpha[n, m] + \beta[l, m]$ ve $[m, \alpha n + \beta l] = \alpha[m, n] + \beta[m, l]$ dir,
- (ii) $[\cdot, \cdot]$ dönüşümü çarpık-simetriktir: Her $m \in L$ için $[m, m] = 0$ dir,
- (iii) $[\cdot, \cdot]$ dönüşümü Jacobi eşitliğini sağlar: Her $m, n, l \in L$ için $[m, [n, l]] + [n, [l, m]] + [l, [m, n]] = 0$ dir.

1.1.25.Örnek. L , bir birleşmeli F cebri olsun ve $[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L$ dönüşümü $(m, n) \rightarrow [m, n] := mn - nm$ olarak tanımlansın. Bu takdirde L , F cismi üzerinde bir Lie cebridir.

1.1.26.Tanım. R bir değişmeli halka; L , bir R -modül ve $[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L, (m, n) \rightarrow [m, n]$ bir bilineer dönüşüm olsun. Bu takdirde L ye, R üzerinde bir Leibniz cebri denir. $:\Leftrightarrow [\cdot, \cdot]$ dönüşümü Leibniz eşitliğini sağlar: Her $m, n, l \in L$ için $[[m, n], l] = [[m, l], n] + [m, [n, l]]$ dir.

1.1.27.Örnek. Her Lie cebri bir Leibniz cebridir.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Dimonoidler

Bu bölümde, Loday'in dimonoidleri tanımlamasındaki motivasyona yer verilmiştir [1]. Loday'in amacı, 1.1.25.Örnek'tekine benzer bir yöntemle bir Leibniz cebiri veren yeni bir cebir kavramını tanıtmak ve incelemektir. Buradaki fikir, ab çarpımı ve ba çarpımı için iki farklı işlemle başlamaktır, böylece parantez artık çarpık-simetrik değildir. Loday, bu noktada dialgebra kavramını tanımlamaktadır:

2.1.1.Tanım. D , bir F vektör uzayı olmak üzere " $*$ " ve " $\circ$ ", D üzerinde tanımlı birleşme özelliğine sahip ikili işlemler olsun. D ye birleşmeli dialgebra (veya kısaca dialgebra) denir: $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in D$ için

- (i) $(x * y) * z = x * (y \circ z)$
- (ii) $(x \circ y) * z = x \circ (y * z)$
- (iii) $(x * y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ dir.

2.1.2.Uyarı. D , " $*$ " ve " $\circ$ " ikili işlemleri ile birlikte bir dialgebra olsun ve $[,]: L \times L \rightarrow L$ dönüşümü $(a, b) \rightarrow [a, b] := a * b - b \circ a$ olarak tanımlansın. Bu takdirde D bir Leibniz cebridir.

Sonuç olarak her dialgebra bir Leibniz cebrine yol açar.

Bir dialgebrayı tanımlayan bağıntılar toplamları içermediğinden, Loday, iyi tanımlanmış bir dimonoid kavramı olduğuna dikkat çekmektedir.

2.2. Değişmeli Dimonoidler

Bu bölümde, Zhuchok'un "Commutative Dimonoids" adlı çalışmasındaki çeşitli bulgular yer almaktadır [2]. Aşağıda, ilk olarak J.-L. Loday [1] tarafından 2001 yılında sunulan dimonoid tanımı verilmiştir.

2.2.1.Tanım. $(D, *, \circ)$ bir cebirsel yapı olsun. Bu takdirde D ye dimonoid denir : $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in D$ için

- (i) $(x * y) * z = x * (y \circ z)$
- (ii) $(x \circ y) * z = x \circ (y * z)$
- (iii) $(x * y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
- (iv) $(x * y) * z = x * (y * z)$
- (v) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ dir.

2.2.2.Örnek:

- (i) $(S, *)$ bir yarıgrup olsun. $(S, *, *)$ bir dimonoiddir.
- (ii) $D = \{a, b\}$ üzerinde aşağıdaki tablolar yardımıyla tanımlanan " $*$ " ve " $\circ$ " ikili işlemleri ile $(D, *, \circ)$ bir dimonoiddir.

$*$	a	b
a	a	a
b	a	a

Tablo 1.

$\circ$	a	b
a	a	b
b	a	b

Tablo 2.

2.2.3.Tanım. Bir $(D, *, \circ)$ dimonoidine idempotent dimonoid ya da diband denir : $\Leftrightarrow x * x = x = x \circ x, \forall x \in D$.

Aşağıdaki örnekte $D = \{a, b\}$ kümesi üzerindeki tüm idempotent dimonoidler gösterilmektedir.

2.2.4.Örnek:

1. $D_1 = \{a, b\}$ üzerinde aşağıdaki tablo yardımıyla tanımlanan " $*$ " ikili işlemi ile $(D_1, *, *)$ yarıgrubu bir idempotent dimonoiddir.

$*$	a	b
a	a	b
b	a	b

Tablo 3.

2. $D_2 = \{a, b\}$ üzerinde aşağıdaki tablo yardımıyla tanımlanan " $*$ " ikili işlemi ile $(D_2, *, *)$ yarıgrubu bir idempotent dimonoiddir.

$*$	a	b
a	a	a
b	b	b

Tablo 4.

3. $D_3 = \{a, b\}$ üzerinde aşağıdaki tablolar yardımıyla tanımlanan " $*$ " ve " $\circ$ " ikili işlemleri ile $(D_3, *, \circ)$ bir idempotent dimonoiddir.

$*$	a	b
a	a	a
b	b	b

Tablo 5.

$\circ$	a	b
a	a	b
b	a	b

Tablo 6.

4. $D_4 = \{a, b\}$ üzerinde aşağıdaki tablo yardımıyla tanımlanan " $*$ " ikili işlemi ile $(D_4, *, *)$ yarıgrubu bir idempotent dimonoiddir.

$*$	a	b
a	a	a
b	a	b

Tablo 7

5. $D_5 = \{a, b\}$ üzerinde aşağıdaki tablo yardımıyla tanımlanan " $*$ " ikili işlemi ile $(D_5, *, *)$ yarıgrubu bir idempotent dimonoiddir.

$*$	a	b
a	a	b
b	b	b

Tablo 8.

2.2.5.Tanım. [1] D ve E birer dimonoid olsun. Bu takdirde bir $f: D \rightarrow E$ dönüşümüne bir dimonoid homomorfisi denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in D$ için $f(x * y) = f(x) * f(y)$ ve $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$ dir.

2.2.6.Örnek: 2.2.4. Örnek'teki D_2 ve D_3 dimonoidleri göz önüne alınırsa D_2 den D_3 e tanımlı tüm dimonoid homomorfileri,

- (i) Her $x \in D_2$ için $f(x) = a$
- (ii) Her $x \in D_2$ için $g(x) = b$ olarak tanımlanan fonksiyonlardır.

2.2.7.Tanım. $(D, *, \circ)$ bir dimonoid ve $\emptyset \neq T \subseteq D$ olsun. Bu takdirde T ye D nin alt dimonoidi denir : $\Leftrightarrow \forall a, b \in T$ için $a * b, a \circ b \in T$ dir.

2.2.8.Tanım. I bir indis kümesi olmak üzere $(D, *, \circ)$ dimonoidine $D_\alpha, \alpha \in I$ alt dimonoidlerinin dibandı denir: $\Leftrightarrow$

- (i) $D = \bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha$,
- (ii) $\alpha \neq \beta$ için $D_\alpha \cap D_\beta = \emptyset$,
- (iii) Her $\alpha, \beta \in I$ için $\exists \gamma, \gamma' \in I$ öyle ki $D_\alpha * D_\beta \subseteq D_\gamma$ ve $D_\alpha \circ D_\beta \subseteq D_{\gamma'}$ dir.

2.2.9.Tanım. S ve T birer dimonoid ve $\varphi: S \rightarrow T$ bir dimonoid homomorfisi olsun. Bu takdirde karşılık gelen S üzerindeki kongrüans bağıntısı Δ_φ ile gösterilir ve her $a, b \in S$ için $(a, b) \in \Delta_\varphi: \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$ olarak tanımlanır. Δ_φ kongrüansının bir sınıfı S_x ($x \in T$) ve $a \in S$ olmak üzere $\varphi(a) = x \Leftrightarrow a \in S_x = \Delta_\varphi^a = \{t \in S \mid (a, t) \in \Delta_\varphi\}$ dir.

2.2.10.Örnek. 2.2.6 Örnek'teki f dimonoid homomorfisine karşılık gelen Δ_f kongrüans bağıntısı $\Delta_f = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ dir. Burada $S_a = \{a, b\} = D_1$ ve $S_b = \emptyset \subset D_1$ dir.

2.2.11.Teorem. S bir dimonoid ve J bir idempotent dimonoid olmak üzere $\varphi: S \rightarrow J$ bir homomorfi olsun. Bu takdirde

- (i) Δ_φ kongrüansının her S_x ($x \in J$) sınıfı S nin bir alt dimonoididir.
- (ii) S, S_x ($x \in J$) lerin birleşimidir.
- (iii) $S_x * S_y \subseteq S_{x*y}$ ve $S_x \circ S_y \subseteq S_{x \circ y}$ dir.
- (iv) $x \neq y \Rightarrow S_x \cap S_y = \emptyset$ dir.

İspat:

- (i) $a, b \in S_x$ olsun. Bu takdirde $\varphi(a) = x = \varphi(b)$ dir. Buradan J idempotent ve φ homomorfi olduğundan

$$x = x * x = \varphi(a) * \varphi(b) = \varphi(a * b) \Rightarrow a * b \in S_x$$

ve

$$x = x \circ x = \varphi(a) \circ \varphi(b) = \varphi(a \circ b) \Rightarrow a \circ b \in S_x$$

elde edilir. Böylece S_x, S nin bir alt dimonoididir.

- (ii) $a \in S$ olsun. Bu takdirde $\exists x \in J$ öyle ki $\varphi(a) = x$ dir. Böylece $a \in S_x$ olduğundan $a \in \bigcup_{x \in J} S_x$ dir. Buradan $S \subseteq \bigcup_{x \in J} S_x$ elde edilir. Dolayısıyla $S = \bigcup_{x \in J} S_x$ dir.
- (iii) $a \in S_x * S_y$ olsun. Bu takdirde $\exists u \in S_x$ ve $v \in S_y$ öyle ki $a = u * v$ dir. Buradan $\varphi(u) = x$ ve $\varphi(v) = y$ dir. $x * y = \varphi(u) * \varphi(v) = \varphi(u * v) = \varphi(a)$ dir. Buradan $a \in S_{x*y}$ elde edilir. Böylece $S_x * S_y \subseteq S_{x*y}$ dir. Benzer şekilde $S_x \circ S_y \subseteq S_{x \circ y}$ dir.

(iv) $S_x \cap S_y \neq \emptyset$ olsun. Bu takdirde $a \in S_x \cap S_y$ elemanı mevcuttur. Böylece $a \in S_x$ ve $a \in S_y$ dir. Buradan $\varphi(a) = x$ ve $\varphi(a) = y$ olduğu görülür. Sonuç olarak $x = y$ dir. Dolayısıyla $S_x \cap S_y = \emptyset$ dir.

2.2.12.Örnek. 2.2.10.Örnek'ten $\emptyset = S_a * S_b \subset S_{a*b} = S_a$ olduğundan $S_x * S_y \neq S_{x*y}$ olabileceği görülür.

$(D, *, \circ)$ dimonoid ve $\mathbb{N}^+$ pozitif doğal sayılar kümesi olmak üzere bir $a \in D$ elemanının " $*$ " ile ilgili derecesi a^n ve " $\circ$ " ile ilgili derecesi ise na ile gösterilir.

2.2.13.Lemma. $(D, *, \circ)$ bir dimonoid ve " $*$ " ikili işlemi D üzerinde değişmeli olsun. Bu takdirde her $b, c \in D, m \in \mathbb{N}, m > 1$ için $(b * c)^m = b^m \circ c^m = (b \circ c)^m$ dir.

İspat: $b, c \in D$ olsun. " $*$ " ikili işleminin değişmeli olması ve dimonoidlerin aksiyomları ile

$$\begin{aligned} (b * c)^m &= b^m * c^m = b^m * c^{m-1} * c = \\ &= (c * b^m) * c^{m-1} = c * (b^m \circ c^{m-1}) = \\ &= (b^m \circ c^{m-1}) * c = b^m \circ (c^{m-1} * c) = b^m \circ c^m \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, m üzerinden tümevarımla $b^m \circ c^m = (b \circ c)^m$ olduğunu gösterelim. $m = 2$ için $*$ işleminin değişmeli olması ve dimonoidlerin aksiyomları ile

$$\begin{aligned} b^2 \circ c^2 &= (b * b) \circ (c * c) = b \circ (b \circ (c * c)) = \\ &= b \circ ((b \circ c) * c) = b \circ (c * (b \circ c)) = \\ &= (b \circ c) * (b \circ c) = (b \circ c)^2 \end{aligned}$$

dir. $m = k$ için $b^k \circ c^k = (b \circ c)^k$ olsun. Bu takdirde $m = k + 1$ için " $*$ " ikili işleminin değişmeli olması ve dimonoidlerin aksiyomları ile

$$\begin{aligned}
(b \circ c)^{k+1} &= (b \circ c)^k * (b \circ c) = \\
&= (b^k \circ c^k) * (b \circ c) = b^k \circ (c^k * (b \circ c)) = \\
&= b^k \circ ((b \circ c) * c^k) = b^k \circ (b \circ (c * c^k)) = \\
&= b^k \circ (b \circ c^{k+1}) = (b^k * b) \circ c^{k+1} = b^{k+1} \circ c^{k+1}
\end{aligned}$$

elde edildiğinden $m > 1$ için $b^m \circ c^m = (b \circ c)^m$ dir.

2.2.14.Tanım. Her iki işlemi değişmeli olan bir $(D, *, \circ)$ dimonoidine değişmeli dimonoid denir.

2.2.15.Lemma. $(D, *, \circ)$ değişmeli dimonoidinde her $x, y, z \in D$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned}
(x * y) * z &= x * (y \circ z) = (x \circ y) * z \\
&= x \circ (y * z) = (x * y) \circ z = x \circ (y \circ z)
\end{aligned}$$

İspat: Her $x, y, z \in D$ dimonoidinin değişmeli oluşuna ve dimonoid aksiyomlarına göre

$$(x * y) \circ z = z \circ (x * y) = (z \circ x) * y = (x \circ z) * y$$

$$= x \circ (z * y) = x \circ (y * z) = (x \circ y) * z,$$

$$(x \circ y) * z = z * (x \circ y) = (z * x) * y = (x * y) * z = x * (y \circ z)$$

dır. Bundan dolayı $(x * y) \circ z = x * (y \circ z)$ dır.

2.2.15.Lemma'den elde edilir ki bir değişmeli $(D, *, \circ)$ dimonoidinin " $*$ " ve " $\circ$ " ikili işlemleri üç ve daha fazla çarpan için benzerdir ve bu elemanların çarpımı parantezlemeden bağımsızdır.

2.2.16.Lemma. " $*$ " ikili işlemi idempotent olan değişmeli bir $(D, *, \circ)$ dimonoidinin işlemleri aynıdır.

İspat: Her $x, y, z \in D$ için 2.2.15.Lemma'ya göre $(x * y) \circ z = (x * y) * z$ dir. Bundan dolayı $x = y$ olduğunda her $x, z \in D$ için $x * z = x \circ z$ elde edilir.

2.2.17.Lemma. " $\circ$ " değişmeli işlemi ile $(D, *, \circ)$ bir dimonoid olsun. Her $b \in D, m \in \mathbb{N}$ için $2b^m = (2m)b$ dir.

İspat: m üzerinden tümevarım uygulansın. $m = 1$ için $2b^1 = 2b = b \circ b = (2.1)b$ olduğundan eşitlik doğrudur. $m = 2$ için " $\circ$ " işleminin değişmeli olması ve dimonoidlerin aksiyomları ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} 2b^2 &= (b * b) \circ (b * b) = ((b * b) \circ b) * b = (b \circ (b \circ b)) * b = b \circ ((b \circ b) * b) \\ &= ((b \circ b) * b) \circ b = (b \circ b) \circ (b \circ b) = 2b \circ 2b = 4b \end{aligned}$$

Eşitlik $m = k$ için doğru olsun, yani $m = k$ için $2b^k = (2k)b$ olsun. Buradan $m = k + 1$ için " $\circ$ " işleminin değişmeli olması ve dimonoidlerin aksiyomları ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} (2(k + 1))b &= (2k + 2)b = (2k)b \circ 2b = 2b^k \circ 2b = (b^k \circ b) \circ (b^k \circ b) \\ &= b^k \circ (b \circ (b^k \circ b)) = (b^k * b) \circ (b^k \circ b) = b^{k+1} \circ (b^k \circ b) \\ &= b^k \circ (b \circ b^{k+1}) = (b^k * b) \circ b^{k+1} = b^{k+1} \circ b^{k+1} = 2b^{k+1} \end{aligned}$$

Böylece $2b^m = (2m)b$ dir.

2.2.18.Örnek:

- (i) 0 sıfır elemanı ile $(X, *)$ bir sıfır yarıgrup olsun, yani, her $x, y \in X$ için $x * y = 0$ olsun. Bu takdirde X kümesinin $a \neq b$ olan a, b elemanları ile X üzerinde her $x, y \in X$ için " $\circ$ " ikili işlemi

$$x \circ y = \begin{cases} a, & x = y = b, \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $(X, *, \circ)$ bir değişmeli dimonoiddir.

- (ii) X kümesi; $0, a, b, c, d \in X$ ve $a \neq b, b \neq c, c \neq d, d \neq a$ olacak şekilde bir küme olsun. X üzerinde her $x, y \in X$ için " $*$ " ve " $\circ$ " ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x * y = \begin{cases} b, & x = y = a, \\ 0 & \text{aksi takdirde,} \end{cases}$$

$$x \circ y = \begin{cases} d, & x = y = c, \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Bu takdirde $(X, *, \circ)$ bir değişmeli dimonoiddir.

2.2.19.Önerme. S bir yarıgrup ve f, S nin bir idempotent endomorfisi olsun. Bu takdirde S üzerinde " $*$ " ve " $\circ$ " ikili işlemleri, sırasıyla, her $x, y \in S$ için $x * y = xf(y)$ ve $x \circ y = f(x)y$ olarak tanımlansın. Bu takdirde $(S, *, \circ)$ bir dimonoiddir.

İspat: Her $x, y \in S$ için

$$(x * y) * z = xf(y) * z = xf(y)f(z) = xf(yz) \text{ ve}$$

$$x * (y * z) = x * yf(z) = xf(yf(z)) = xf(y)f^2(z) = xf(y)f(z) = xf(yz)$$

olduğundan $(x * y) * z = x * (y * z)$ dir.

$$x * (y \circ z) = x * f(y)z = xf(f(y)z) = xf(y)f(z) = xf(yz) \text{ olduğundan}$$

$$(x * y) * z = x * (y \circ z) \text{ dir.}$$

$$(x \circ y) \circ z = f(x)y \circ z = f(f(x)y)z = f(xy)z \text{ ve}$$

$$x \circ (y \circ z) = x \circ f(y)z = f(x)f(y)z = f(xy)z \text{ olduğundan}$$

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \text{ dir.}$$

$$(x * y) \circ z = xf(y) \circ z = f(xf(y))z = f(xy)z \text{ olduğundan}$$

$$(x * y) \circ z = x \circ (y \circ z) \text{ dir.}$$

$$(x \circ y) * z = f(x)y * z = f(x)yf(z) \text{ ve}$$

$$x \circ (y * z) = x \circ yf(z) = f(x)yf(z) \text{ olduğundan}$$

$$(x \circ y) * z = x \circ (y * z) \text{ dir.}$$

Böylece $(S, *, \circ)$ bir dimonoiddir.

2.2.20.Önerme. S ve T birer yarıgrup ve $\theta: T \rightarrow S$ bir homomorfi olsun. $S \times T$ kümesi üzerinde " $*$ " ve " $\circ$ " ikili işlemleri her $(s, t), (p, g) \in S \times T$ için

$$(s, t) * (p, g) = (s, tg) \text{ ve } (s, t) \circ (p, g) = (\theta(t)p, tg) \text{ olarak tanımlansın.}$$

Bu takdirde $(S \times T, *, \circ)$ bir dimonoiddir.

İspat: Açık olarak " $*$ " ikili işlemi birleşmelidir. Her $(s, t), (p, g), (a, b) \in S \times T$ için

$$((s, t) \circ (p, g)) \circ (a, b) = (\theta(t)p, tp) \circ (a, b) = (\theta(tp)a, tgb) \text{ ve}$$

$$(s, t) \circ ((p, g) \circ (a, b)) = (s, t) \circ (\theta(g)a, gb) =$$

$$(\theta(t)\theta(g)a, tgb) = (\theta(tg)a, tgb) \text{ olduğundan } "\circ" \text{ ikili işlemi birleşmelidir.}$$

$$((s, t) * (p, g)) \circ (a, b) = (s, tg) \circ (a, b) = (\theta(tg)a, tgb) \text{ olduğundan}$$

$$((s, t) * (p, g)) \circ (a, b) = (s, t) \circ ((p, g) \circ (a, b)) \text{ dir.}$$

$$((s, t) \circ (p, g)) * (a, b) = (\theta(t)p, tg) * (a, b) = (\theta(t)p, tgb) \text{ ve}$$

$$(s, t) \circ ((p, g) * (a, b)) = (s, t) \circ (p, gb) = (\theta(t)p, tgb) \text{ olduğundan}$$

$$((s, t) \circ (p, g)) * (a, b) = (s, t) \circ ((p, g) * (a, b)) \text{ dir.}$$

$$((s, t) * (p, g)) * (a, b) = (s, tg) * (a, b) = (s, tgb) \text{ ve}$$

$$(s, t) * ((p, g) \circ (a, b)) = (s, t) * (\theta(g)a, gb) = (s, tgb) \text{ olduğundan}$$

$$((s, t) * (p, g)) * (a, b) = (s, t) * ((p, g) \circ (a, b)) \text{ dir.}$$

Böylece $(S \times T, *, \circ)$ bir dimonoiddir.

2.2.21.Önerme. Bir X alfabesinin içindeki kelimelerin kümesi X^+ olsun. Eğer $w \in X^+$ ise w kelimesinin ilk harfi $w^{(0)}$ ve son harfi $w^{(1)}$ ile gösterilsin. X^+ kümesi üzerinde " $*$ " ve " $\circ$ " ikili işlemleri, her $w, u \in X^+$ için

$$w * u = w^{(0)}w^{(1)}, w \circ u = u^{(0)}u^{(1)}$$

olarak tanımlansın. Böylece $(X^+, *, \circ)$ bir dimonoiddir.

İspat: Açık olarak " $*$ " ve " $\circ$ " ikili işlemleri birleşmelidir. Her $w, u, v \in X^+$ için

$$(w * u) * v = w^{(0)}w^{(1)} * v = w^{(0)}w^{(1)} = w * (u \circ v),$$

$$w \circ (u \circ v) = w \circ v^{(0)}v^{(1)} = v^{(0)}v^{(1)} = (w * u) \circ v,$$

$$(w \circ u) * v = u^{(0)}u^{(1)} * v = u^{(0)}u^{(1)} = w \circ (u * v)$$

olduğundan $(X^+, *, \circ)$ bir dimonoiddir.

2.3. Yarı-hipergruplar

Bu bölümde hiper yapılara örnek teşkil etmesi bakımından yarı-hipergruplar açıklanmaktadır. Aşağıda hipergrupoid tanımı yer almaktadır.

2.3.1.Tanım. [6] $H \neq \emptyset$ ve $P^*(H)$, H nin boştan farklı tüm alt kümelerinin ailesi olsun. $\circ: H \times H \rightarrow P^*(H)$ dönüşümüne hiper işlem, $(H, \circ)$ ikilisine bir hipergrupoid denir. $\emptyset \neq A, B \subseteq H$ ve $\forall a, b, x \in H$ olsun. Bu takdirde

- (i) $x \circ A = \{x\} \circ A = \bigcup_{a \in A} x \circ a$ ve $A \circ x = A \circ \{x\} = \bigcup_{a \in A} a \circ x$,
- (ii) $A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b$ olarak tanımlanır.

2.3.2.Tanım. [6] $(H, \circ)$ hipergrupoid olsun. H , " $\circ$ " üzerinde birleşme özelliğine sahipse, yani $\forall x, y, z \in H$ için $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ ise $(H, \circ)$ çiftine bir yarı-hipergrup denir.

2.3.3.Uyarı. $(S, \cdot)$ bir yarıgrup olsun. Bu takdirde $\circ: S \times S \rightarrow P^*(S)$ hiper işlemi her $x, y \in S$ için $x \circ y = \{x \cdot y\}$ olarak tanımlanırsa $(S, \circ)$ bir yarı-hipergruptur. Böylece her yarıgrup bir yarı-hipergrup olarak düşünülebilir ve dolayısıyla yarı-hipergrupların sınıfı yarıgrupların sınıfından daha geniştir.

2.3.4.Örnek. $H = \{a, b, c\}$ ve $\circ: H \times H \rightarrow P^*(H)$ hiper işlemi şu şekilde tanımlansın:

$\circ$	a	b	c
a	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
b	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$
c	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$

Tablo 9

Bu takdirde H bir yarı-hipergruptur.

2.3.5.Örnek. $S = \{a, b, c\}$ ve $\cdot: S \times S \rightarrow P^*(S)$ hiper işlemi şu şekilde tanımlansın.

$\cdot$	a	b	c
a	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{b\}$
b	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$
c	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$

Tablo 10.

Bu takdirde, $a \circ (a \circ b) = \{b\} \neq \{c\} = (a \circ a) \circ b$ olduğundan S bir yarı-hipergrup değildir.



BÖLÜM 3. ARAŞTIRMA BULGULARI: Hiper Dimonoidler

Bu bölümde bir hiper dimonoid kavramı tanımlanmakta ve bu kavramın bazı özellikleri sunulmaktadır.

3.1.Tanım. $D \neq \emptyset$, " $*$ " ve " $\circ$ " hiper işlemleri ile donatılmış bir küme olsun. Bu takdirde $(D, *, \circ)$ ye bir hiper dimonoid denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in D$ için

- (i) $(x * y) * z = x * (y \circ z)$
- (ii) $(x \circ y) * z = x \circ (y * z)$
- (iii) $(x * y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
- (iv) $(x * y) * z = x * (y * z)$
- (v) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ dir.

3.2.Örnek. $(D, \otimes, \odot)$ bir dimonoid olsun. Bu takdirde " $*$ " ve " $\circ$ " hiper işlemleri, her $a, b \in D$ için, sırasıyla, $a * b = \{a \otimes b\}$ ve $a \circ b = \{a \odot b\}$ olarak tanımlansın. Bu takdirde $(D, *, \circ)$ bir hiper dimonoiddir.

3.2 Örnek'ten görüldüğü üzere hiper dimonoidler, dimonoidlerin bir genelleştirmesidir.

3.3.Örnek.

- (i) $H = \{a, b\}$ kümesi üzerinde tanımlı " $*$ " ve " $\circ$ " hiper işlemleri aşağıdaki tablolardaki gibi tanımlansın.

$*$	a	b
a	H	H
b	H	H

Tablo 11.

$\circ$	a	b
a	$\{a\}$	H
b	$\{a\}$	H

Tablo 12.

Bu takdirde $(H, *, \circ)$ bir hiper dimonoiddir.

- (ii) $H = \{a, b\}$ kümesi üzerinde tanımlı " $*$ " ve " $\circ$ " hiper işlemleri aşağıdaki tablolardaki gibi tanımlansın.

$*$	a	b
a	H	H
b	H	H

Tablo 13.

$\circ$	a	b
a	$\{b\}$	H
b	H	H

Tablo 14.

Bu takdirde $(H, *, \circ)$ bir hiper dimonoiddir.

- (iii) $H = \{a, b\}$ kümesi üzerinde tanımlı " $*$ " ve " $\circ$ " hiper işlemleri aşağıdaki tablolardaki gibi tanımlansın.

$*$	a	b
a	$\{b\}$	H
b	H	H

Tablo 15.

$\circ$	a	b
a	H	H
b	H	H

Tablo 16.

Bu takdirde $(H, *, \circ)$ bir hiper dimonoiddir.

- (iv) $H = \{a, b\}$ kümesi üzerinde tanımlı " $*$ " ve " $\circ$ " hiper işlemleri aşağıdaki tablolardaki gibi tanımlansın.

$*$	a	b
a	H	H
b	H	H

Tablo 17.

$\circ$	a	b
a	H	H
b	H	H

Tablo 18.

Bu takdirde $(H, *, \circ)$ bir hiper dimonoiddir.

3.4.Lemma. $(H, *, \circ)$ bir hiper dimonoid ve $A, B \in P^*(H)$ olsun. O halde,

- (i) Eğer " $*$ " değişmeli ise $A * B = B * A$,

(ii) Eğer " $\circ$ " değişmeli ise $A \circ B = B \circ A$ dır.

3.5.Tanım. Eğer " $*$ " ve " $\circ$ " değişmeli ise $(H, *, \circ)$ hiper dimonoidine değişmeli hiper dimonoid denir.

3.6.Teorem. $(H, *, \circ)$ bir hiper dimonoid ve $A, B, C \in P^*(H)$ olsun. Bu takdirde

$$(i) \quad (A * B) * C = A * (B * C)$$

$$(ii) \quad (A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$$

$$(iii) \quad (A * B) * C = A * (B \circ C)$$

$$(iv) \quad (A \circ B) * C = A \circ (B * C)$$

$$(v) \quad (A * B) \circ C = A \circ (B \circ C) \text{ dir.}$$

İspat:

(i) $u \in (A * B) * C$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{c \in C} k * c$$

$$\Rightarrow \exists k \in A * B \text{ ve } c \in C \text{ öyle ki } u \in k * c$$

$$\Rightarrow \exists a \in A \text{ ve } b \in B \text{ öyle ki } k \in a * b$$

$$\Rightarrow u \in (a * b) * c \Rightarrow u \in a * (b * c) \Rightarrow u \in \bigcup_{t \in b * c} a * t$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{t \in B * C} a * t \Rightarrow u \in A * (B * C)$$

Sonuç olarak, $(A * B) * C \subseteq A * (B * C)$ dir.

Tersine $u \in A * (B * C)$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{t \in B * C} a * t$$

$$\Rightarrow \exists t \in B * C \text{ ve } a \in A \text{ öyle ki } u \in a * t$$

$$\Rightarrow t \in B * C \Rightarrow \exists b \in B, c \in C \text{ öyle ki } t \in b * c$$

$$\Rightarrow u \in a * (b * c) \Rightarrow "*" \text{ işlemi birleşmeli olduğundan } u \in (a * b) * c$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{\substack{k \in a * b \\ c \in C}} k * c \Rightarrow u \in \bigcup_{\substack{k \in A * B \\ c \in C}} k * c$$

$$\Rightarrow u \in A * (B * C)$$

Sonuç olarak $A * (B * C) \subseteq (A * B) * C$ dir.

Böylece $(A * B) * C = A * (B * C)$ elde edilir.

(ii) $u \in (A \circ B) \circ C$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{\substack{k \in A \circ B \\ c \in C}} k \circ c$$

$$\Rightarrow \exists k \in A \circ B, c \in C \text{ öyle ki } u \in k \circ c$$

$$\Rightarrow k \in A \circ B \Rightarrow \exists a \in A, b \in B \text{ öyle ki } k \in a \circ b$$

$$\Rightarrow u \in (a \circ b) \circ c \Rightarrow " \circ " \text{ işlemi birleşmeli olduğundan } u \in a \circ (b \circ c)$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{\substack{a \in A \\ t \in b \circ c}} a \circ t \Rightarrow u \in \bigcup_{\substack{a \in A \\ t \in B \circ C}} a \circ t$$

$$\Rightarrow u \in A \circ (B \circ C)$$

Sonuç olarak $(A \circ B) \circ C \subseteq A \circ (B \circ C)$ dir.

Tersine $u \in A \circ (B \circ C)$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{\substack{a \in A \\ t \in B \circ C}} a \circ t$$

$$\Rightarrow \exists t \in B \circ C, a \in A \text{ öyle ki } u \in a \circ t$$

$$\Rightarrow t \in B \circ C \Rightarrow \exists b \in B, c \in C \text{ öyle ki } t \in b \circ c$$

$$\Rightarrow u \in a \circ (b \circ c) \Rightarrow u \in (a \circ b) \circ c$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{\substack{c \in C \\ k \in a \circ b}} k \circ c \Rightarrow u \in \bigcup_{\substack{c \in C \\ k \in A \circ B}} k \circ c$$

$$\Rightarrow u \in (A \circ B) \circ C$$

Sonuç olarak $A \circ (B \circ C) \subseteq (A \circ B) \circ C$ dir.

Böylece $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$ elde edilir.

(iii) $u \in (A * B) * C$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{\substack{k \in C \\ t \in A * B}} t * k$$

$$\Rightarrow \exists t \in A * B, k \in C \text{ öyle ki } u \in t * k$$

$$\Rightarrow t \in A * B \Rightarrow \exists a \in A, b \in B \text{ öyle ki } t \in a * b$$

$$\Rightarrow u \in (a * b) * k \Rightarrow (a * b) * k = a * (b \circ k) \text{ olduğundan } u \in a * (b \circ k)$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{r \in b \circ k} a * r \Rightarrow u \in \bigcup_{\substack{r \in B \circ C \\ a \in A}} a * r$$

$$\Rightarrow u \in A * (B \circ C)$$

Sonuç olarak $(A * B) * C \subseteq A * (B \circ C)$ dir.

Tersine $u \in A * (B \circ C)$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{\substack{r \in B \circ C \\ a \in A}} a * r$$

$$\Rightarrow \exists r \in B \circ C, a \in A \text{ öyle ki } u \in a * r$$

$$\Rightarrow r \in B \circ C \Rightarrow r \in \bigcup_{\substack{b \in B \\ k \in C}} b \circ k$$

$$\Rightarrow r \in B \circ C \Rightarrow \exists b \in B, k \in C \text{ öyle ki } r \in b \circ k$$

$$\Rightarrow u \in a * (b \circ k) \Rightarrow a * (b \circ k) = (a * b) * k$$

$$\Rightarrow u \in (a * b) * k \Rightarrow u \in \bigcup_{t \in a * b} t * k$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{k \in C} \bigcup_{t \in A * B} t * k \Rightarrow u \in (A * B) * C$$

Sonuç olarak $A * (B \circ C) \subseteq (A * B) * C$ dir.

Böylece $(A * B) * C = A * (B \circ C)$ elde edilir.

(iv) $u \in (A \circ B) * C$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{c \in C} \bigcup_{t \in A \circ B} t * c$$

$$\Rightarrow t \in A \circ B, c \in C \text{ öyle ki } u \in t * c$$

$$\Rightarrow t \in A \circ B \Rightarrow \exists a \in A, b \in B \text{ öyle ki } t \in a \circ b$$

$$\Rightarrow u \in (a \circ b) * c \Rightarrow (a \circ b) * c = a \circ (b * c)$$

$$\Rightarrow u \in a \circ (b * c) \Rightarrow u \in \bigcup_{t \in b * c} a \circ t$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{a \in A} \bigcup_{t \in b * c} a \circ t \Rightarrow u \in A \circ (B * C)$$

Sonuç olarak $(A \circ B) * C \subseteq A \circ (B * C)$ dir.

Tersine $u \in A \circ (B * C)$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{a \in A} \bigcup_{t \in B * C} a \circ t \Rightarrow \exists b \in B, c \in C \text{ öyle ki } t \in b * c$$

$$\Rightarrow t \in B * C \Rightarrow t \in \bigcup_{c \in C} \bigcup_{b \in B} b * c$$

$$\Rightarrow t \in B * C \Rightarrow \exists b \in B, k \in C \text{ öyle ki } t \in b \circ k$$

$$\Rightarrow u \in a \circ (b * c) \Rightarrow a \circ (b * c) = (a \circ b) * c \Rightarrow u \in (a \circ b) * c$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{c \in C} \bigcup_{t \in a \circ b} t * c \Rightarrow u \in \bigcup_{c \in C} \bigcup_{t \in A \circ B} t * c$$

$$\Rightarrow u \in (A \circ B) * C$$

Sonuç olarak $A \circ (B * C) \subseteq (A \circ B) * C$ dir.

Böylece $A \circ (B * C) \subseteq (A \circ B) * C$ elde edilir.

(v) $u \in (A * B) \circ C$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{c \in C} \bigcup_{t \in A * B} t \circ c$$

$$\Rightarrow \exists t \in A * B, c \in C \text{ öyle ki } u \in t \circ c$$

$$\Rightarrow t \in A * B \Rightarrow t \in \bigcup_{b \in B} \bigcup_{a \in A} a * b$$

$$\Rightarrow \exists a \in A, b \in B \text{ öyle ki } t \in a * b$$

$$\Rightarrow u \in (a * b) \circ c \Rightarrow (a * b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

$$\Rightarrow u \in a \circ (b \circ c) \Rightarrow u \in \bigcup_{a \in A} \bigcup_{t \in b \circ c} a \circ t$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{a \in A} \bigcup_{t \in B \circ C} a \circ t \Rightarrow u \in A \circ (B \circ C)$$

Sonuç olarak $(A * B) \circ C \subseteq A \circ (B \circ C)$ dir.

Tersine $u \in A \circ (B \circ C)$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{a \in A} \bigcup_{t \in B \circ C} a \circ t$$

$$\Rightarrow \exists t \in B \circ C, a \in A \text{ öyle ki } x \in a \circ t$$

$$\Rightarrow t \in B \circ C \Rightarrow \exists b \in B, c \in C \text{ öyle ki } t \in b \circ c$$

$$\Rightarrow u \in a \circ (b \circ c) \Rightarrow a \circ (b \circ c) = (a * b) \circ c \Rightarrow u \in (a * b) \circ c$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{c \in C} \bigcup_{t \in A * B} t \circ c \Rightarrow u \in \bigcup_{c \in C} \bigcup_{t \in A * B} t \circ c$$

$$\Rightarrow u \in (A * B) \circ C$$

Sonuç olarak $A \circ (B \circ C) \subseteq (A * B) \circ C$ dir.

Böylece $A \circ (B \circ C) = (A * B) \circ C$ elde edilir.

3.7.Tanım. $(H_1, *, \circ)$ ve $(H_2, *, \circ)$ hiper dimonoidler olsun.

O halde;

- (i) Bir $f : H_1 \rightarrow H_2$ fonksiyonuna hiper dimonoid homomorfisi denir
 $:\Leftrightarrow$ Her $x, y \in H_1$ için $f(x * y) \subseteq f(x) * f(y)$ ve $f(x \circ y) \subseteq f(x) \circ f(y)$ dir.
- (ii) Bir $f : H_1 \rightarrow H_2$ fonksiyonuna güçlü hiper dimonoid homomorfisi denir
 $:\Leftrightarrow$ Her $x, y \in H_1$ için $f(x * y) = f(x) * f(y)$ ve $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$ dir.
- (iii) Bir $f : H_1 \rightarrow H_2$ hiper dimonoid homomorfisine idempotent hiper dimonoid homomorfisi denir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y \in D_1$ için $f(f(x)) = f(x)$ dir.

3.8.Örnek. H_1, H_2, H_3 sırasıyla 3.3.Örnek. (ii), (iii) ve (iv) teki hiper dimonoidler olsun.

- (i) Her $x \in H_1$ için $f(x) = b$ ile tanımlanan $f : H_1 \rightarrow H_2$ fonksiyonu bir hiper dimonoid homomorfisidir ancak güçlü değildir.
- (ii) Her $a, b \in H_2$ için $g(a) = b, g(b) = a$ ile tanımlanan $g : H_2 \rightarrow H_1$ fonksiyonu bir hiper dimonoid homomorfisidir ancak güçlü değildir.
- (iii) Her $a, b \in H_3$ için $h(a) = b, h(b) = a$ ile tanımlanan $h : H_3 \rightarrow H_3$ fonksiyonu bir idempotent güçlü hiper dimonoid homomorfisidir.

3.9.Teorem. $(H, \cdot)$ yarı-hipergrup ve $f : H \rightarrow H$ idempotent güçlü homomorfi olsun. O halde $x * y = x \cdot f(y)$ ve $x \circ y = f(x) \cdot y$ hiper işlemleri ile $(H, *, \circ)$ bir hiper dimonoiddir.

İspat:

(i) $u \in (x * y) * z$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{a \in x \cdot f(y)} a \cdot f(z)$$

$$\Rightarrow \exists a \in x \cdot f(y) \text{ öyle ki } u \in a \cdot f(z)$$

$$\Rightarrow u \in (x \cdot f(y)) f(f(z)) \Rightarrow u \in x \cdot f(y \cdot f(z))$$

$$\Rightarrow u \in x \cdot f(y \cdot f(z)) \Rightarrow u \in \bigcup_{b \in y \cdot f(z)} x \cdot f(b) \Rightarrow u \in x * (y * z)$$

Sonuç olarak $(x * y) * z \subseteq x * (y * z)$ dir.

Tersine $u \in x * (y * z)$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{b \in y \cdot f(z)} x \cdot f(b)$$

$$\Rightarrow \exists b \in y \cdot f(z) \text{ öyle ki } u \in x \cdot f(b)$$

$$\Rightarrow u \in x \cdot f(y \cdot f(z)) \Rightarrow u \in x \cdot (f(y) \cdot f(z))$$

$$\Rightarrow u \in (x \cdot f(y) \cdot f(z)) \Rightarrow u \in \bigcup_{a \in x \cdot f(y)} a \cdot f(z)$$

Sonuç olarak $x * (y * z) \subseteq (x * y) * z$ dir.

Böylece $x * (y * z) = (x * y) * z$ elde edilir.

(ii) $u \in (x \circ y) \circ z$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{a \in f(x) \cdot y} f(a) \cdot z$$

$$\Rightarrow \exists a \in f(x) \cdot y \text{ öyle ki } u \in f(a) \cdot z$$

$$\Rightarrow u \in f(f(x) \cdot y) \cdot z \Rightarrow u \in (f(f(x) \cdot y) \cdot z)$$

$$\Rightarrow u \in f(x) \cdot (f(y) \cdot z) \Rightarrow u \in \bigcup_{b \in f(y) \cdot z} f(x) \cdot b$$

Sonuç olarak $(x \circ y) \circ z \subseteq x \circ (y \circ z)$ dir.

Tersine $u \in x \circ (y \circ z)$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{b \in f(y) \cdot z} f(x) \cdot b$$

$$\Rightarrow \exists b \in f(y) \cdot z \text{ öyle ki } u \in f(x) \cdot b$$

$$\Rightarrow u \in f(x) \cdot (f(y) \cdot z) \Rightarrow u \in f(f(x))(f(y) \cdot z)$$

$$\Rightarrow u \in f(f(x)) \cdot f(y) \cdot z$$

$$\Rightarrow u \in f(f(x) \cdot y) \cdot z$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{t \in f(f(x) \cdot y)} t \cdot z = u \in \bigcup_{a \in f(x) \cdot y} f(a) \cdot z$$

Sonuç olarak $x \circ (y \circ z) \subseteq (x \circ y) \circ z$ dir.

Böylece $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ elde edilir.

(iii) $u \in (x * y) * z$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{a \in x \cdot f(y)} a \cdot f(z)$$

$$\Rightarrow \exists a \in x \cdot f(y) \text{ öyle ki } u \in a \cdot f(z)$$

$$\Rightarrow u \in x \cdot (f(f(y)) \cdot f(z)) \Rightarrow u \in x \cdot f(f(y) \cdot z)$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{t \in f(f(y) \cdot z)} x \cdot t \cdot u \in \bigcup_{b \in f(y) \cdot z} x \cdot f(b)$$

Sonuç olarak $(x * y) * z \subseteq x * (y \circ z)$ dir.

Tersine $u \in x * (y \circ z)$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{b \in f(y) \cdot z} x \cdot f(b)$$

$$\Rightarrow \exists b \in f(y) \cdot z \text{ öyle ki } u \in x \cdot f(b)$$

$$\Rightarrow u \in x \cdot f(f(y) \cdot z) \Rightarrow u \in x \cdot (f(f(y) \cdot f(z)))$$

$$\Rightarrow u \in x \cdot (f(y) \cdot f(z)) \Rightarrow u \in (x \cdot f(y)) \cdot f(z)$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{t \in x \cdot f(y)} t \cdot f(z)$$

Sonuç olarak $x * (y \circ z) \subseteq (x * y) * z$ dir.

Böylece $x * (y \circ z) = (x * y) * z$ elde edilir

(iv) $u \in (x \circ y) * z$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{a \in f(x) \cdot y} a \cdot f(z)$$

$$\Rightarrow \exists a \in f(x) \cdot y \text{ öyle ki } u \in a \cdot f(z)$$

$$\Rightarrow u \in (f(x) \cdot y) \cdot f(z) \Rightarrow u \in f(x) \cdot (y \cdot f(z))$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{b \in y \cdot f(z)} f(x) \cdot b \Rightarrow u \in x \circ (y * z)$$

Sonuç olarak $(x \circ y) * z \subseteq x \circ (y * z)$ dir.

Tersine $u \in x \circ (y * z)$ olsun. Bu takdirde

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{b \in y \cdot f(z)} f(x) \cdot b$$

$$\Rightarrow \exists b \in y \cdot f(z) \text{ öyle ki } u \in f(x) \cdot b$$

$$\Rightarrow u \in f(x) \cdot (y \cdot f(z)) \Rightarrow u \in (f(x) \cdot y) \cdot f(z)$$

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{a \in x \cdot f(y)} a \cdot f(z)$$

Sonuç olarak $x \circ (y * z) \subseteq (x \circ y) * z$ dir.

Böylece $x \circ (y * z) = (x \circ y) * z$ elde edilir

(v) $u \in (x * y) \circ z$ olsun. Bu takdirde

$$\Rightarrow u \in \bigcup_{a \in x \cdot f(y)} f(a) \cdot z \Rightarrow u \in f(x \cdot f(y)) \cdot z$$

$$\Rightarrow u \in (f(x) \cdot f(f(y))) \cdot z \Rightarrow u \in f(x)(f(f(y)) \cdot z)$$

$$\Rightarrow u \in f(x) \cdot (f(y) \cdot z) \Rightarrow u \in \bigcup_{b \in f(y) \cdot z} f(x) \cdot b$$

Sonuç olarak $(x * y) \cdot z \subseteq x \circ (y \circ z)$ dir.

Tersine $u \in x \circ (y \circ z)$ olsun. Bu takdirde

$$u \in \bigcup_{b \in f(y) \cdot z} f(x) \cdot b$$

$$\Rightarrow \exists b \in f(y) \cdot z \text{ öyle ki } u \in f(x) \cdot b$$

$$\Rightarrow u \in (f(x)) \cdot f(f(y)) \cdot z$$

$$\Rightarrow u \in f(x) \cdot (f(f(y)) \cdot z) \Rightarrow u \in (f(x)) \cdot f(f(y)) \cdot z$$

$$u \in \bigcup_{t \in f(x \cdot f(y))} t \cdot z \Rightarrow u \in \bigcup_{a \in x \cdot f(y)} f(a) \cdot z$$

Sonuç olarak $x \circ (y \circ z) \subseteq (x * y) \circ z$ dir.

Böylece $x \circ (y \circ z) = (x * y) \circ z$ elde edilir

3.10.Örnek. $H = \{a, b\}$ kümesi üzerinde tanımlı hiper işlem aşağıdaki tabloda verilmiştir:

$\circ$	a	b
a	$\{a\}$	H
b	$\{a\}$	H

Tablo 19.

Bu takdirde $(H, \circ)$ bir yarı-hipergruptur. $f : H \rightarrow H$ fonksiyonu her $x \in H$ için $f(x) = a$ olarak tanımlansın. Bu takdirde f bir idempotent güçlü homomorfidir. Böylece, 3.9.Teorem'de bahsedilen " $*$ " ve " $\circ$ " hiper işlemleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$*$	a	b
a	$\{a\}$	$\{a\}$
b	$\{a\}$	$\{a\}$

Tablo 20.

$\circ$	a	b
a	$\{a\}$	H
b	$\{a\}$	H

Tablo 21.

O halde 3.9.Teorem'e göre $(H, *, \circ)$ bir hiper dimonoiddir.

3.11.Teorem. $(H, *, \circ)$ " $*$ " hiper işlemi değişmeli olan, bir hiper dimonoid olsun.

Her $a, b \in H, m \in N, m > 1$ için;

$$(a * b)^m = a^m \circ b^m = (a \circ b)^m \text{ dir.}$$

İspat: Her bir $a, b \in H$ için

$$\begin{aligned}
 (a * b)^m &= (a * b) * (a * b) * \dots * (a * b) = (a * a * \dots * a) * (b * b * \dots * b) \\
 &= a^m * b^m = a^m * (b^{m-1} * b) = a^m * (b * b^{m-1}) \\
 &= (a^m * b) * b^{m-1} = (b * a^m) * b^{m-1} = b * (a^m * b^{m-1}) \\
 &= (a^m * b^{m-1}) * b
 \end{aligned}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yarı-hipergruplar, yarıgrupların genişlemesidir. Daha genel olarak ifade etmek gerekirse hiper yapılar, ilgili cebirsel yapıların genellemesidir. Cebirsel yapıların özelliklerini daha geniş sınıflarda inceleme problemleri üzerinde çalışmak günümüzde güncelliğini korumaktadır. Böylece oldukça yeni olan dimonoid yapısının geliştirilmesi probleminin oldukça popüler bir çalışma konusu olduğu düşünülebilir. Bu tezde, dimonoidlerin ve yarı-hipergrupların bir genellemesi olarak hiper dimonoid kavramı tanıtılmış ve dimonoidlerin bazı problemleri hiper dimonoidlere uyarlanarak bu problemlerin çözümleri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Loday, J.L., In: Dialgebras and related operads, Lecture Notes in Mathematics, 1763, Springer-Verlag, Berlin, 7-66, 2001.
- [2] Zhuchok, A.V., Commutative dimonoids, Algebra and Discrete Mathematics, 2, 116-127, 2005.
- [3] Marty, F., Sur une generalization de la Notion de group, 8th Congress Mathematics, Scandinaves Stockholm, 45-49, 1934.
- [4] Corsini, P., Prolegomena of hypergroup theory, Aviani Editore, 1979.
- [5] Ameri, R., Zahedi, M.M., Hypergroup and join spaces induced by a fuzzy subset, PUMA 8, 155–168, 1997.
- [6] Zahedi, M.M., Ameri, R., On the prime, primary and maximal sub-hypermodules, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 5, 61–80, 1999.
- [7] Corsini, P., Leoreanu-Fotea, V., Applications of hyperstructure theory, Kluwer, Dordrecht, 2003.
- [8] Corsini, P., Leoreanu-Fotea, V., Applications of hyperstructure theory, Springer, USA, 2013.
- [9] Davvaz, B., Some results on congruences in semihypergroups, Bulletin of the Malaysia Mathematical Sciences Society, 23, 53-58, 2000.
- [10] Davvaz, B., Leoreanu-Fotea, V., Binary relations on ternary semihypergroups, Communications in Algebra, 38, 3621-3636, 2010.
- [11] Davvaz, B., Semihypergroup Theory, Academic Press, 2016.
- [12] Zhuchok, A.V., Free commutative dimonoids, Algebra and Discrete Mathematics, 1, 109-119, 2010.
- [13] Hungerford, T.W., Algebra, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [14] Loday, J.L., Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz, Enseign, Mathematics Series 2, 269–293, 1993.
- [15] Loday, J.L., Teimuraz, P., Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology, Mathematische Annalen, 139–158, 1993.

- [16] Grillet, P.A., Semigroups: An Introduction to the Structure Theory, New York, Marcel Dekker, 1995.
- [17] Erdmann, K., Wildon, M., Introduction to Lie Algebras, Springer, ISBN 1-84628-040-0, 2006.



ÖZGEÇMİŞ

Ayşe EKİZ ÖZCAN İlk, orta ve lise eğitimini Giresun'da tamamladı. 2011 yılında Giresun Atatürk Lisesi'nden mezun oldu. 2012 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde başladığı lisans öğrenimini, 2013 yılında Giresun Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne yatay geçiş yaparak 2016 yılında, burada tamamladı. 2018 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2020 yılından itibaren Gümüşhane ilinin Kürtün ilçesinde Matematik öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.