



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**HİPER DUAL MATRİSLERİN ÖKLİDYEN VE LORENTZIAN
UZAYLARDA KİNEMATİK UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ülkü KAHRAMAN

DANIŞMAN

Doç. Dr. Gülsüm YÜCA

AKSARAY, 2025

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 222342431 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Ülkü KAHRAMAN tarafından hazırlanan “**HİPER DUAL MATRİSLERİN ÖKLİDYEN VE LORENTZIAN UZAYLARDA KİNEMATİK UYGULAMALARI**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Gülsüm YÜCA

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Ayşe YAVUZ

Necmettin Erbakan Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 13/06/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Fazliye KARABÖRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Ülkü KAHRAMAN

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında bilgi, tecrübe ve akademik rehberliğiyle bana yol gösteren, her aşamada destek ve teşviklerini esirgemeyen değerli danışmanım Sayın “Doç. Dr. Gülsüm YÜCA” ya en içten teşekkürlerimi sunarım. Kıymetli katkıları ve yönlendirmeleri, çalışmamın bilimsel niteliğini artırmada büyük rol oynamıştır.

Ayrıca, bu süreçte manevi destekleriyle her zaman yanımda olan, sabır ve anlayışlarıyla beni motive eden sevgili aileme teşekkür ederim.

Ülkü KAHRAMAN
AKSARAY, 2025

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Dual Uzay.....	3
2.2 Hiper Dual Uzay	6
2.3 Öklid Uzay	11
2.4 Lorentz Uzayı.....	14
2.5 Dual Dönüşüm	15
3. ÖKLİDYEN VE LORENTZIAN UZAYLARDA HİPER DUAL MATRİSLER	19
3.1 Hiper Dual Matrisler	19
3.2 Hiper Dual Matrisler ve Dual Dönüşüm	20
4. HİPER DUAL MATRİSLERİN KİNEMATİK UYGULAMALARI.....	27
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ.....	38

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HİPER DUAL MATRİSLERİN ÖKLİDYEN VE LORENTZIAN UZAYLARDA KİNEMATİK UYGULAMALARI

Ülkü KAHRAMAN

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gülsüm YÜCA

ÖZET

Bu tez beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş kısmı olarak düzenlenmiş, dual sayılar, hiper dual sayılar, kinematik ve dual dönüşüm kavramlarından bahsedilerek, bu konular ile ilgili yapılan çalışmalara değinilmiştir.

İkinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, hiper dual matrisler ve dual dönüşüm yardımıyla Öklid uzayı ile Lorentz uzayındaki hareketler ele alınmıştır. Her iki uzayda da sabit kalan eksenler üzerinde çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde, Öklid uzayı ile Lorentz uzayında hiper dual matrisler yardımıyla üçüncü bölümde verilen hareketlerin kinematik uygulamalarına yer verilmiştir.

Son bölüm, tezin sonuç ve öneriler kısmı olarak düzenlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hiper Dual Sayı, Hiper Dual Matris, Dual Dönüşüm, Lorentz Uzayı.

Haziran, 2025; 38 sayfa

M.Sc. THESIS

**KINEMATICS APPLICATIONS OF HYPER DUAL MATRICES IN
EUCLIDEAN AND LORENTZIAN SPACES**

Ülkü KAHRAMAN

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Gülsüm YÜCA

ABSTRACT

This thesis consists of five main parts.

The first chapter was organized as an introductory part, where the concepts of dual numbers, hyper-dual numbers, kinematics and dual transformations are mentioned and the studies on these topics are mentioned.

In the second chapter, the basic definitions and theorems used in this thesis are presented.

In the third chapter, with the help of hyper dual matrices and dual transformation, motions in Euclidean space and Lorentz space are discussed. Axes that remain fixed in both spaces are studied.

In the fourth chapter, kinematic applications of the motions given in the third chapter with the help of hyper dual matrices in Euclidean space and Lorentz space are given.

The last chapter is organized as the conclusion and recommendations part of the thesis.

Keywords: Hyper Dual Number, Hyper Dual Matrix, Dual Transformation, Lorentzian Space.

June, 2025; 38 pages

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\hat{a}$	Dual Sayı
$\tilde{a}$	Hiper Dual Sayı
$\mathbb{D}$	Dual Sayılar Kümesi
$\mathbb{D}^3$	Dual Sayılar Halkası Üzerinde $\mathbb{D}$ -Modül
$\mathbb{E}^n$	n-boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{E}_1^n$	n-boyutlu Lorentz Uzayı
$GL(n, \mathbb{R})$	Genel Lineer Grup
$\mathbb{H}\mathbb{D}$	Hiper Dual Sayılar Kümesi
$\mathbb{H}\mathbb{D}^3$	Hiper Dual Vektörler Kümesi
$O(n)$	Ortogonal Matrislerin Kümesi
$SO(n)$	Özel Ortogonal Matrislerin Kümesi
$SO(n-1, 1)$	Özel Semi-Ortogonal Matrislerin Kümesi
$S\tilde{O}(n)$	Özel Hiper Dual Ortogonal Matrislerin Kümesi
$s\tilde{o}(n)$	Hiper Dual Lie Cebiri
$S\tilde{O}(n-1, 1)$	Özel Hiper Dual Semi-Ortogonal Matrislerin Kümesi
$s\tilde{o}(n-1, 1)$	Hiper Dual Lorentz Lie Cebiri
V	Reel Vektör Uzayı

1. GİRİŞ

Kinematik, hareketin geometrisini inceler ve temelde cisimlerin konum, hız, ivme ve zaman arasındaki ilişkisini matematiksel anlamda tanımlar, ancak bu hareketi oluşturan kuvvetleri (dinamik) hesaba katmaz. Hareketin tanımı uzayın geometrik yapısına bağlıdır. Bu nedenle kinematik, geometri ve matematiğin hareketi tanımlamak için birleştiği bir alandır. Özellikle, diferensiyel geometri, Lie grupları, dual sayılar ve kuaterniyonlar, robotik ve bilgisayar grafikleri gibi disiplinlerle iç içedir. Kinematiğin temellerini Müller, “Kinematik Dersleri” isimli kitabında vermiştir (Müller, 1963).

Dual sayılar, 19. yüzyılda İrlandalı matematikçi William Kingdon Clifford tarafından tanıtılmıştır (Clifford, 1873), daha sonra Eduard Study tarafından geometrik uygulamalarda kullanılmıştır. Clifford’ un tanımı kompleks sayılarla benzerlik gösterirken, Study bu yapıları dual vektörler, dual uzaylar ve kinematik dönüşümlerle ilişkilendirmiştir. Kompleks sayılara benzeyen ancak farklı cebirsel özellikleri olan dual sayıları, Alman matematikçi Eduard Study geometrik uygulamalarda kullanmıştır (Study, 1901). Ayrıca, dual sayılar, dual vektörler, dual uzay ile ilgili temel tanım ve teoremler “Hareket Teorisi ve Kuaterniyonlar Teorisi” kitabında Hacısalihoğlu tarafından verilmiştir (Hacısalihoğlu, 1983). Matematikçiler, yıllar içinde dual sayıları Lie grupları ve kinematik çalışmalarında da kullanmışlardır.

Türev hesaplamalarında kompleks sayıların kullanımı fayda sağlamakta iken ikinci türev alındığında problem yaşanmaktadır. J.A. Fike hiper dual sayıları tanımlayarak bu problemi ortadan kaldırmıştır (Fike, 2009). Hiper dual sayıların türev hesaplamalarında kullanılması ve geliştirilmesi, Fike ve Alonso (2011a,b) tarafından yapılan çalışmalar ile sağlanmıştır (Fike ve Alonso, 2011a,b). Hiper dual sayıların kinematikte kullanımını ise Cohen ve Shoham çalışmalarında göstermişlerdir (Cohen ve Shoham, 2016; Cohen ve Shoham, 2017). Çil (2020) tezinde hiper dual sayıların temel yapılarını sistematik biçimde ortaya koyarak, literatürde eksik görülen bazı özellikleri açıklamıştır. Aslan (2021) çalışmasında, hiper dual sayıların kinematikteki yorumunu ‘dual doğrular’ üzerinde tanımlamış ve hiper dual birim vektörlerin geometrik karşılıklarını incelemiştir. Ramis ve Yaylı (2022) Euler Rodrigues formülünü hiper dual matrisler üzerine uygulamış; hiper dual antisimetrik matrisleri tanımlayarak, bu dönüşümlerin determinant koşullarını altında eksen ve açılarının

belirlenmesini sağlamışlardır. Bu çalışmayla hiper dual dönüşümlerin ‘vida dönüşümü’ şeklinde yorumlanabileceği ortaya konmuştur. Yüca ve Yaylı (2022) çalışmalarında hiper dual ortogonal matrisleri kullanarak katı cisim hareketlerinin eksenlerini incelemişlerdir.

Hiper dual sayılar, katı cisim kinematiği ve genel hareketlerde önemli bir rol oynar. Elemanları hiper dual sayılar olan hiper dual ortogonal matrislere karşılık gelen dönüşüm, hem dönme hem de öteleme hareketlerini içeren bir katı cisim hareketine karşılık gelir. Bu sayede hiper dual matrisler, hem dönme hareketi hem de öteleme hareketini aynı anda temsil etmek için kullanılır. Hiper dual ortogonal matrisler, ortogonal matrislerin hiper dual uzayda genişletilmiş halidir. Robotik, uzay dinamiği ve bilgisayar grafikleri, mekanik sistemlerde kinematik ve dinamik modellenmesinde önemli avantajlar sağlar. Bir robot kolunun hız ve ivme analizinin, hiper dual sayılar yardımıyla daha az hesaplama maliyetiyle yapılabilmesi, uygulama alanı bakımından önem arz etmektedir. Uydu dönme kinematiği veya robot kollarının hareket planlamasında da hiper dual sayılar kullanılmaktadır. Hiper dual sayılar, katı cisim kinematiğinde kullanılan güçlü bir araç olmaktadır (Cohen ve Shoham, 2016).

Öklid olmayan uzaylardan biri olan Lorentz uzayında yapılan çalışmaların sayısı son yıllarda artmaktadır. Yapılan çalışmalar ve elde edilen sonuçlar, uygulandıkları alanlar çerçevesinde önem arz etmektedir. Bu tezin amacı, Öklid ve Lorentz uzaylarındaki hareketler arasındaki ilişkinin, hiper dual matrisler ve Dohi vd. (2010) tarafından tanımlanmış dual dönüşüm kullanılarak incelenmesi ve beraberinde kinematik uygulamalarının verilmesidir. Bu tez çalışmasında ele alınacak kavramlar ile ilgili temel tanım ve teoremler, Hacısalihoğlu (1983), Greub (1967) ve McCarthy (1990) çalışmaları temel alınarak verilecektir. Lopez (2014) ve O’neill (1983) tarafından yapılan çalışmalar ışığında da Lorentzian geometrideki temel kavramlara değinilecektir. Yüca ve Yaylı (2018) çalışmalarında dual uzaylarda dual dönüşümlerin kinematiğini incelemişlerdir. Bu çalışma, tezin hiper dual sayılar yardımıyla hiper dual uzaylarda dual dönüşümlerin ve kinematik uygulamaları üzerinde çalışılan bölümlerine ışık tutacaktır. Bu sayede, Öklid uzayı ve Lorentz uzayındaki katı cisim hareketlerine karşılık getirilen hiper dual ortogonal matrisler ve hiper dual semi-ortogonal matrisler birbirlerine karşılık getirilmiş olacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılacak temel kavramlar sunulacaktır. Bu kavramlar, temel tanım ve teoremler dahilinde; dual uzay, hiper dual uzay, Öklid uzayı, Lorentz uzayı ve dual dönüşüm alt başlıkları halinde verilecektir.

2.1 Dual Uzay

Dual sayılar, reel sayılar kümesinin genelleştirilmiş bir biçimi olarak düşünülebilir. Her dual sayı iki bileşenden oluşur: reel kısım (a) ve dual kısım (a^*). Reel kısım, klasik reel sayıların temsil ettiği değeri verirken; dual kısım, çoğunlukla diferansiyel bilgiler veya sonsuz küçük (infinitesimal) nicelikler ile ilişkilidir.

Tanım 2.1.1 (Dual sayı) $\forall a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\hat{a} = (a, a^*)$ ikilisine sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan sıralı ikililerin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin. $\mathbb{D}$ kümesi

$$\mathbb{D} = \{(a, a^*) | \forall a, a^* \in \mathbb{R}\} \quad (2.1)$$

ile gösterilir. $\mathbb{D}$ kümesine dual sayılar sistemi, her bir $(a, a^*) \in \mathbb{D}$ elemanına da dual sayı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.2 Herhangi $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{D}$ olmak üzere $\hat{a} = (a, a^*), \hat{b} = (b, b^*)$ için $a = b, a^* = b^*$ oluyorsa $\hat{a}$ ile $\hat{b}$ eşittir denir ve $\hat{a} = \hat{b}$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Dual sayılarda eşitlik, hem reel bileşenin hem de dual bileşenin birebir aynı olması koşuluna bağlıdır. Bu tanım, dual sayıların cebirsel işlemlerinde tutarlılığı sağlar ve lineer cebirsel yapıların doğru şekilde işleyebilmesi için temel bir kuraldır.

Tanım 2.1.3 $\hat{a} = (a, a^*), \hat{b} = (b, b^*)$ dual sayılarının toplama ve çıkarma işlemi,

$$+ : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$\hat{a} + \hat{b} = (a, a^*) + (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*) \quad (2.2)$$

$$\hat{a} - \hat{b} = (a, a^*) - (b, b^*) = (a - b, a^* - b^*) \quad (2.3)$$

ile tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Dual sayılarda toplama ve çıkarma işlemleri, reel ve dual bileşenler ayrı ayrı işlenerek yapılır. Bu yapı, dual sayılar kümesinin lineer cebirsel bir yapı oluşturmasını sağlar ve reel sayıların cebirsel özelliklerini korur. Böylece dual sayılar, türev ve infinitesimal analizler gibi uygulamalarda matematiksel olarak tutarlı bir biçimde kullanılabilir.

Teorem 2.1.1 $\lambda \in \mathbb{R}$ skaler ve $\hat{a} = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı için λ skalerinin $\hat{a}$ dual sayısı ile çarpma işlemi

$$\lambda \hat{a} = \lambda(a, a^*) = (\lambda a, \lambda a^*) \quad (2.4)$$

(Hacısalihoglu, 1983).

Bu teorem, dual sayıların skaler çarpma ile uyumlu olduğunu gösterir. Hem reel kısım a , hem de dual bileşen a^* aynı skaler ile çarpılır, böylece lineerlik korunur.

Tanım 2.1.4 $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ iç işlemi için $\hat{a} = (a, a^*)$, $\hat{b} = (b, b^*)$ dual sayılarının çarpma işlemi

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = (a, a^*) \cdot (b, b^*) = (ab, a \cdot b^* + b \cdot a^*) \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlıdır (Hacısalihoglu, 1983).

Dual sayı çarpımında reel bileşenler klasik çarpma işlemine tabi tutulurken, dual bileşenler birbirleriyle etkileşir. Bu yapı, diferansiyasyon özelliklerini yansıtarak türev bilgisinin taşınmasını sağlar.

Tanım 2.1.5 $\hat{a} = (a, a^*)$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $\hat{b}$ dual sayısının $\hat{a}$ dual sayısına bölme işlemi

$$\frac{\hat{b}}{\hat{a}} = \frac{(b, b^*)}{(a, a^*)} = \left(\frac{b}{a}, \frac{a \cdot b^* - a^* \cdot b}{a^2} \right) \quad (2.6)$$

biçiminde tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.6 Bir $\hat{a} = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısında “ a ” reel sayısına $\hat{a}$ ’nın reel kısmı, “ a^* ” reel sayısına $\hat{a}$ ’nın dual kısmı denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.7 $(1, 0) = 1$ dual sayısına $\mathbb{D}$ ’deki çarpma işleminin birim elemanı veya $\mathbb{D}$ ’deki reel birim denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.8 $(0, 1)$ dual sayısı kısaca ε ile gösterilecektir. Yani $(0, 1) = \varepsilon$ alınacak ve dual birim olarak adlandırılacaktır. Dual sayılarda iç çarpım tanımı gereğince,

$$\varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 = (0, 0) \quad (2.7)$$

olduğu görülür (Hacısalihoglu, 1983).

Dual birim ε , reel sayı bileşenine eklenen infinitesimal bir büyüklüğü temsil eder. Kendisinin karesi sıfır olduğundan, $\varepsilon^2 = 0$ özelliği, dual sayıların diferansiyel analiz ve otomatik türev işlemlerinde kullanışlı olmasını sağlar. Bu yapı, dual sayı sisteminin temelini oluşturur ve hiper dual sayılar ile yapılan cebirsel genişletmelerde kritik bir rol oynar.

Teorem 2.1.2 $\hat{a} = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı $\hat{a} = a + \varepsilon a^*$ şeklinde yazılabilir. Yani $(a, a^*) = a + \varepsilon a^*$ dır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Bu teorem, dual sayıların gösterimini sadeleştirerek cebirsel işlemleri kolaylaştırır. Sıralı ikili biçimindeki (a, a^*) ifadesi, reel kısmı a ve dual kısmı a^* olan bir yapı olarak, ε dual birimi kullanılarak tek satırlık bir formda yazılabildiğini gösterir. Böylece, dual sayılar tıpkı kompleks sayılar gibi tek terim şeklinde temsil edilir; fakat $\varepsilon^2 = 0$ özelliği ile kompleks sayılardan ayrılır ve özellikle diferansiyel hesaplamalarda avantaj sağlar.

Tanım 2.1.9 Dual sayılar değişmeli ve birleşimli bir halka olan $\mathbb{D}^3$ modülünü oluştururlar. $\mathbb{D}^3$, $\mathbb{D}$ -Modül olarak da isimlendirilir.

$$\mathbb{D}^3 = \{\vec{\hat{a}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3\} \quad (2.8)$$

$\vec{\hat{a}} \in \mathbb{D}^3$, dual vektör olarak adlandırılır (Veldkamp, 1976).

Teorem 2.1.3 $\vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\mathbb{D}$ -Modül 'de her bir $\vec{\hat{a}}$ dual vektörü

$$\vec{\hat{a}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \quad (2.9)$$

şeklinde yazılabilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.1.4 $\vec{\hat{a}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ dual vektörünün $\lambda \in \mathbb{D}$ skaleri ile çarpımı

$$\lambda \vec{\hat{a}} = (\lambda \vec{a}, \lambda \vec{a}^*) \quad (2.10)$$

dır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Bu teorem, $\mathbb{D}$ -Modül' deki dual vektörlerin skaler ile çarpma işleminde lineerliğin korunduğunu gösterir. Hem reel bileşen olan vektör $\vec{a}$ hem de dual bileşen vektörü $\vec{a}^*$ aynı skaler ile çarpılır, böylece dual vektörün yapısı bozulmadan ölçeklendirilmiş olur.

Teorem 2.1.5 $\vec{\hat{a}} = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ ve $\vec{\hat{b}} = (\vec{b}, \vec{b}^*) \in \mathbb{D}$ -Modül dual vektörlerinin iç çarpımı

$$f: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$f(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon [\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle] \quad (2.11)$$

olarak tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Bu teorem, dual vektörlerde iç çarpım işleminin nasıl tanımlandığını ve klasik iç çarpım kavramının nasıl genişletildiğini ortaya koyar. Reel bileşenlerin iç çarpımı, dual vektörün reel kısmını oluştururken; çapraz çarpımların toplamı, dual birim ε ile çarpılarak dual kısmı verir. Böylece hem reel hem de dual bileşenler dikkate alınarak, diferansiyel bilgiler de içeren zengin bir iç çarpım yapısı elde edilir.

Tanım 2.1.10 Bir $\vec{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektörünün normu

$$|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = |\vec{a}| + \varepsilon \cdot \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{|\vec{a}|}, \vec{a} \neq 0 \quad (2.12)$$

ile tanımlıdır. $|\vec{a}| = 1$ ise ($|\vec{a}| = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ ise) $\vec{a}$ ya birim dual vektör denir (Veldkamp, 1976).

Dual vektör normu, reel vektörün normunu ve dual bileşenin reel vektörle olan iç çarpımını birleştirir. Böylece dual vektörün büyüklüğü hem reel hem de infinitesimal bileşenleri dikkate alır. Birim dual vektör kavramı, özellikle kinematik ve robotik uygulamalarda, yön ve büyüklük bilgisinin dual bileşenlerle birlikte doğru bir şekilde temsil edilmesini sağlar. Bu yapı, lineer cebirsel işlemler ve hiper dual analizlerde temel bir araçtır.

2.2 Hiper Dual Uzay

Hiper dual sayılar, otomatik diferansiyasyon alanında yaygınlık kazanan cebirsel yapılar olan dual sayıların genişletilmesiyle, özellikle hesaplamalı bilimler ve mühendislik uygulamalarında türev bazlı işlemlerin hem daha hızlı hem de daha güvenilir biçimde gerçekleştirilmesine olanak tanımaktadır (Fike ve Alonso, 2011a).

Tanım 2.2.1 Hiper dual sayılar kümesi,

$$\mathbb{HD} = \{\vec{a} = a_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \quad (2.13)$$

şeklinde gösterilir. Burada ε_1 ve ε_2 dual birimlerdir. ε_1 ve ε_2 dual birimleri aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 = 0, \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_1 \neq 0, \varepsilon_2 \neq 0, \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_1 \neq 0 \quad (2.16)$$

(Fike ve Alonso, 2011a,b).

Aynı zamanda hiper dual sayılar, iki dual sayının toplamı şeklinde de ifade edilebilir. Bir $\tilde{a} = a_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2$ hiper dual sayısı için ε_1 ve ε_2 dual birimler olmak üzere,

$$\widehat{a}_0 = a_0 + a_1 \varepsilon_1, \quad (2.17)$$

$$\widehat{a}_1 = a_2 + a_3 \varepsilon_1, \quad (2.18)$$

$$\tilde{a} = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 \varepsilon_2, \quad (2.19)$$

şeklinde iki dual sayının toplamı olarak ifade edilebilir.

Tanım 2.2.2 (Hiper Dual Sayılarda Toplama) $\forall \tilde{a} = a_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2$, $\tilde{b} = b_0 + b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \in \mathbb{HID}$ iki hiper dual sayı olmak üzere, hiper dual sayılarda toplama işlemi,

$$\tilde{a} + \tilde{b} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\varepsilon_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon_2 + (a_3 + b_3)\varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (2.20)$$

biçiminde tanımlanır (Fike ve Alonso, 2011a,b).

Hiper dual sayılarda toplama, her bileşenin kendi karşılığı ile toplanması mantığına dayanır. Reel bileşenler (a_0, b_0) ve dual bileşenler $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ ayrı ayrı toplanır. Bu işlem, hiper dual sayıların cebirsel yapısını basit ve sistematik hâle getirir.

Tanım 2.2.3 (İki Hiper Dual Sayının Çarpımı) $\forall \tilde{a} = a_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2$, $\tilde{b} = b_0 + b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \in \mathbb{HID}$ iki hiper dual sayı olmak üzere, hiper dual sayılarda çarpma işlemi,

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = (a_0 \cdot b_0) + (a_0 b_1 + a_1 \cdot b_0)\varepsilon_1 + (a_0 b_2 + a_2 b_0)\varepsilon_2 + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_3 b_0)\varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (2.21)$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_1$ olduğundan hiper dual sayılarda çarpma işleminin değişme özelliği vardır (Fike ve Alonso, 2011a,b).

Hiper dual sayıların çarpımı, reel bileşenlerin ve dual bileşenlerin birbirleriyle etkileşimini kapsar. İlk üç terim, reel ve birinci dereceden dual bileşenlerin çarpımlarını içerirken; $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ terimi, çapraz etkileşimleri gösterir. Çarpmanın değişmeli olması, hiper dual sayıların cebirsel yapısını klasik sayı sistemlerine benzer şekilde yönetebilmemizi sağlar.

Tanım 2.2.4 (İki Hiper Dual Sayının Bölümü) $\forall \tilde{a} = a_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2$, $\tilde{b} = b_0 + b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \in \mathbb{H}\mathbb{D}$ iki hiper dual sayı olmak üzere, hiper dual sayılarda bölme işlemi,

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{(a_1 b_0 - a_0 b_1)}{b_0^2} \varepsilon_1 + \frac{(a_2 b_0 - a_0 b_2)}{b_0^2} \varepsilon_2 + \left(\frac{a_3 b_0^2 - a_0 b_0 b_3 - a_1 b_0 b_2 + 2 a_0 b_1 b_2}{b_0^3} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (2.22)$$

biçiminde tanımlanır (Fike ve Alonso, 2011a,b).

Hiper dual sayıların bölümü, her bileşenin hem reel hem de dual kısımlarını kapsayacak şekilde tanımlanır. Bölme işlemi, ε_1 ve ε_2 bileşenlerinin karşılıklı etkileşimlerini ve $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ terimlerini dikkate alır.

Tanım 2.2.5 (Hiper Dual Sayının Eşleniği) $\forall \tilde{a} = a_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \in \mathbb{H}\mathbb{D}$ hiper dual sayısının eşleniği,

$$\tilde{\tilde{a}} = a_0 - a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2 - a_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlı bir hiper dual sayıdır (Fike ve Alonso, 2011a,b).

Bir hiper dual sayının eşleniği, kompleks sayıların eşleniğine benzer bir mantıkla tanımlanır; reel kısım aynı kalırken tüm dual kısımların işareti değiştirilir. Bu işlem, hiper dual sayıların cebirsel özelliklerini incelemeye ve özellikle norm, inversini bulma veya iç çarpım gibi işlemlerde kullanılır. Eşlenik sayesinde hiper dual sayıların simetrik yapısı ve lineer cebirsel ilişkileri daha kolay analiz edilebilir.

Tanım 2.2.6 (Bir Hiper Dual Sayının Mutlak Değeri) $\forall \tilde{a} = a_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \in \mathbb{H}\mathbb{D}$ hiper dual sayısının mutlak değeri,

$$|\tilde{a}| = |a_0| + a_1 \frac{a_0}{|a_0|} \varepsilon_1 + a_2 \frac{a_0}{|a_0|} \varepsilon_2 + (a_3 \frac{a_0}{|a_0|}) \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \begin{cases} x, & x_0 \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlanır.

Bir hiper dual sayının mutlak değeri, reel bileşenin büyüklüğünü alırken, dual bileşenlerin işaretlerini ve oranlarını koruyarak hesaplanır. Bu tanım, reel sayıların mutlak değer kavramını hiper dual sayılara genişletir ve norm hesaplamalarında kullanılır. Böylece hiper dual sayıların hem reel büyüklüğü hem de dual bileşenleri dikkate alınarak cebirsel hesaplamalar yapılabilir.

Tanım 2.2.7 (Hiper Dual Sayıların İncersi) $\forall \tilde{a} = a_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \in \mathbb{HD}$, $a_0 \neq 0$ için bir hiper dual sayının incersi

$$\tilde{a}^{-1} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2} \varepsilon_1 - \frac{a_2}{a_0^2} \varepsilon_2 + \left(\frac{2a_1 a_2}{a_0^3} - \frac{a_3}{a_0^2} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (2.25)$$

şeklindedir.

Bir hiper dual sayının incersinin var olması için reel kısım a_0 'ın sıfır olmaması gerekir; aksi hâlde tersi tanımsız olur. İfade, klasik $\frac{1}{a_0}$ reel sayılardaki ters formülünü, ε_1 , ε_2 ve $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ bileşenleri için genişletir. Böylece hiper dual sayılarla yapılan cebirsel işlemlerde bölme işlemi, bu incers formülü kullanılarak gerçekleştirilir.

Tanım 2.2.8 (Hiper Dual Sayının Karekökü) $\forall \tilde{a} = a_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \in \mathbb{HD}$ hiper dual sayısının karekökü

$$\sqrt{\tilde{a}} = \sqrt{a_0} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \varepsilon_1 + \frac{a_2}{2\sqrt{a_0}} \varepsilon_2 + \left(\frac{a_3}{2\sqrt{a_0}} - \frac{a_1 a_2}{4a_0 \sqrt{a_0}} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (2.26)$$

şeklinde tanımlanır.

Hiper dual sayıların karekökü, reel bileşenin karekökünü alırken, dual bileşenler ε_1 ve ε_2 bileşenleri lineer olarak, $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ bileşeni ise çift etkileşim terimi ile hesaplanır. Bu tanım, hiper dual sayılarla yapılan yüksek mertebeden türev ve otomatik diferansiyasyon uygulamalarının hesaplarında kullanılır (Fike ve Alonso, 2011a,b).

Tanım 2.2.9 (Hiper Dual Sayılarda Norm) $\forall \tilde{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbb{H}\mathbb{D}$ hiper dual sayısının normu,

$$|\tilde{a}| = \sqrt{a_0^2} = |a_0| \quad (2.27)$$

biçiminde tanımlanır (Fike ve Alonso, 2011a,b).

Bir hiper dual sayının normu yalnızca reel bileşene (a_0) bağlıdır; dual birimler norm hesaplamasına katkıda bulunmaz. Bu durum, hiper dual sayılarla yapılan hesaplamalarda, büyüklük veya uzaklık ölçümünün bilinen reel sayı normuna indirgenmesini sağlar. Böylece hiper dual sayılar, türev ve diferansiyasyon bilgilerini taşıırken, aynı zamanda norm ve mesafe açısından basit bir yapı sunar.

Tanım 2.2.10 (Hiper Dual Sayıların İç Çarpımı) $\forall \tilde{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\tilde{b} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \mathbb{H}\mathbb{D}$ iki hiper dual sayı olmak üzere, hiper dual sayılarda iç çarpım işlemi,

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = a\bar{b} = a_0b_0 + (a_1b_0 - a_0b_1)\varepsilon_1 + (a_2b_0 - a_0b_2)\varepsilon_2 + (a_3b_0 - a_0b_3 - a_1b_2 - a_2b_1)\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad (2.28)$$

(Fike ve Alonso, 2011a,b).

Tanım 2.2.11 (Dual Doğru) $\vec{\tilde{a}}$ bir birim dual vektör ve $\hat{P}$ de $\mathbb{D}^3$ te bir dual nokta olsun. O halde $\mathbb{D}^3$ te bir doğru

$$\hat{d} = \hat{P} + t\vec{\tilde{a}} \quad (2.29)$$

ile tanımlanabilir. Burada t parametresi bir dual sayı, $\vec{\tilde{a}}$ birim dual vektörü $\hat{d}$ nin doğrultman vektörü ve $\hat{P}$ de $\hat{d}$ üzerinde bir dual noktadır (Aslan, 2021).

Bu tanım bize, klasik doğruların dual sayı genellemesini sunar. Dual doğrular, hem reel bileşenler hem de dual bileşenler üzerinden ifade edilir; böylece doğruların konumu ve yönü üzerinde hem reel hem de infinitesimal değişiklikler tanımlanabilir. Bu yapı, $\mathbb{D}$ -Modül' de doğrusal hareket ve parametrik ifadelerin incelenmesini sağlar.

Tanım 2.2.12 $\mathbb{HD}^3$ hiper dual vektörlerin kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbb{HD}^3 = \{\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1\epsilon_1 + \vec{a}_2\epsilon_2 + \vec{a}_3\epsilon_1\epsilon_2 \mid \vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3\} \quad (2.30)$$

$\vec{a} \in \mathbb{HD}^3$ hiper dual vektör olarak adlandırılır.

Hiper dual vektörlerin kümesi, üç boyutlu vektör uzayının hiper dual sayılara genellemesidir. Burada her bir vektör bileşeni, reel bileşen a_0 ve dual bileşenler a_1, a_2, a_3 ile ifade edilir. Bu yapı, hiper dual sayıların çok boyutlu vektör hesaplamalarına uygulanmasını sağlar. Böylelikle hiper dual vektörler, reel vektörlerin sağladığı tüm geometrik ve cebirsel özellikleri, dual bileşenlerle genişletmiş olur.

Tanım 2.2.13 (İki Hiper Dual Vektörün Toplamı) $\forall \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1\epsilon_1 + \vec{a}_2\epsilon_2 + \vec{a}_3\epsilon_1\epsilon_2, \vec{b} = \vec{b}_0 + \vec{b}_1\epsilon_1 + \vec{b}_2\epsilon_2 + \vec{b}_3\epsilon_1\epsilon_2 \in \mathbb{HD}^3$ iki hiper dual vektör olmak üzere, hiper dual vektörlerde toplama işlemi,

$$\vec{a} + \vec{b} = (\vec{a}_0 + \vec{b}_0) + (\vec{a}_1 + \vec{b}_1)\epsilon_1 + (\vec{a}_2 + \vec{b}_2)\epsilon_2 + (\vec{a}_3 + \vec{b}_3)\epsilon_1\epsilon_2 \quad (2.31)$$

biçiminde tanımlanır (Aslan, 2021).

Hiper dual vektörlerde toplama işlemi bileşen bazlıdır ve reel vektörlerdeki toplama kuralının hiper dual yapıdaki tüm bileşenlere ayrı ayrı uygulanması ile elde edilir. Bu nedenle toplama işlemi değişme ve birleşme özelliklerini korur.

Tanım 2.2.14 (İki Hiper Dual Vektörün Çarpımı) $\forall \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1\epsilon_1 + \vec{a}_2\epsilon_2 + \vec{a}_3\epsilon_1\epsilon_2, \vec{b} = \vec{b}_0 + \vec{b}_1\epsilon_1 + \vec{b}_2\epsilon_2 + \vec{b}_3\epsilon_1\epsilon_2 \in \mathbb{HD}^3$ iki hiper dual vektör olmak üzere, hiper dual vektörlerde çarpma işlemi,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0) + (\vec{a}_0 \vec{b}_1 + \vec{a}_1 \vec{b}_0)\epsilon_1 + (\vec{a}_0 \vec{b}_2 + \vec{a}_2 \vec{b}_0)\epsilon_2 + (\vec{a}_0 \vec{b}_3 + \vec{a}_1 \vec{b}_2 + \vec{a}_2 \vec{b}_1 + \vec{a}_3 \vec{b}_0)\epsilon_1\epsilon_2 \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlanır (Aslan, 2021).

2.3 Öklid Uzayı

Öklid uzayı, geometri ve analizin temel kavramlarından olan, noktalar arasındaki mesafe ve açı kavramlarının tanımlanabildiği, genellikle üç boyutlu olarak düşünülen ancak matematikte n boyutlu olarak da ele alınabilen bir yapıdır. Öklid uzayının matematiksel tanımı yapılırken öncelikle afin uzay kavramı tanımlanır. Afin uzaylar, üzerinde doğrusal yapının (vektör uzayı) tanımlı olduğu, ancak mutlak bir başlangıç noktası (orijin) seçmenin zorunlu olmadığı yapılardır (Berger, 1987).

Tanım 2.3.1 (Afin uzay) $U \neq \emptyset$ bir küme ve bir vektör uzayı W olsun.

$$\begin{aligned} \psi : U \times U &\rightarrow W \\ (K, L) &\mapsto \psi(K, L) = \overrightarrow{KL} \end{aligned} \quad (2.33)$$

dönüşümü

$$i) \forall K, L, M \in U \text{ için } \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM}$$

$$ii) \forall K \in U \text{ ve } \gamma \in W \text{ için } \overrightarrow{KL} = \gamma \text{ olacak biçimde bir tek } L \in U \text{ noktası vardır.}$$

Şartları sağlanıyor ise U kümesine W ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

Öklid geometrisinin cebirsel temsili olarak değerlendirilebilen tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.3.2 (Öklid uzayı) U bir reel afin uzay ve U ile birleşen vektör uzayı W olsun. W de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : W \times W &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlemin yardımı ile U afin uzayına Öklid uzayı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Öklid iç çarpımı, yalnızca vektörlerin büyüklüklerini ölçmekle kalmaz, aynı zamanda aralarındaki açının da tanımlanmasına olanak tanır. Böylece uzunluk, mesafe ve diklik kavramları matematiksel olarak ifade edilebilir. Afin uzayın bu iç çarpım ile donatılması, geometri ile cebir arasında güçlü bir bağ kurar ve ilerleyen bölümlerde ele alınacak dönüşüm, dönme hareketi ve kinematik uygulamalar için temel bir yapı oluşturur (Axler, 1997).

Tanım 2.3.3 $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan tüm $n \times n$ lik matrislerin kümesi $\mathbb{R}_n^n$ olmak üzere, $\mathbb{R}_n^n$ deki tüm regüler matrislerin çarpma işlemi ile oluşturduğu gruba genel lineer grup denir ve $GL(n, \mathbb{R})$ ile gösterilir.

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}_n^n \mid \det(A) \neq 0\} \quad (2.35)$$

(Hacısalıhoğlu, 1998).

$GL(n, \mathbb{R})$ kümesinin tanımı, matrislerin gruplar altında incelenmesini sağlar ve sonrasında ortogonal gruplar ($O(n)$), özel ortogonal gruplar ($SO(n)$) ve Lie grupları kavramlarının temelini oluşturur. Genel lineer grup, hem teorik hem de uygulamalı matematikte, özellikle lineer dönüşümler için önemli bir yapıdır.

Tanım 2.3.4 $GL(n, \mathbb{R})$ ' nin bir altgrubu olan $O(n)$ kümesi,

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n\} \quad (2.36)$$

biçiminde tanımlanır.

$O(n)$ in bir altgrubu olan ve $\det A = 1$ özelliğini taşıdığı için yönlendirmeyi koruyan $SO(n)$ grubu,

$$SO(n) = \{A: A \in O(n), \det A = 1\} \quad (2.37)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Öklid uzayında reel sayılar üzerinde tanımlı $n \times n$ lik ortogonal matrislerden oluşan $SO(n)$ grubu, özel ortogonal grup anlamına gelir ve n boyutlu uzayda dönme hareketlerini temsil eder. $SO(n)$ yönlendirmeyi koruyan, uzunlukları ve açıları koruyan lineer dönüşümleri ifade eder. Bu da katı cisim dönme hareketlerine karşılık gelir.

$SO(n)$ bir Lie grubudur. $SO(n)$ in Lie cebiri $so(n)$, antisimetrik matrisleri temsil eder. $SO(n)$ in elemanları olan ortogonal matrisler, Cayley formülü kullanılarak antisimetrik matrisler yardımıyla da elde edilebilir. Dönme hareketi yaptıran bir ortogonal matrisin dönme eksenini verildiğinde, buna karşılık gelen antisimetrik matris aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Tanım 2.3.5 $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ vektörüne karşılık gelen 3 boyutlu Öklid uzayında bir antisimetrik S matrisi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

(McCarthy, 1990).

S matrisinin bu şekilde ifade edilebilmesi, bir antisimetrik matris formunun 3 boyutlu Öklid uzayındaki dönme hareketlerinin ve katı cisim hareketlerinin incelenmesinde temel bir araç olarak kullanılmasına fayda sağlar. İlerleyen bölümlerde Lorentz

uzayında ele alınacak Lorentzian antisimetrik matris tanımı ile karşılaştırıldığında, metrik yapıya bağlı işaret farklılıklarının ortaya çıktığı görülecektir.

Tanım 2.3.6 $S \in so(n)$ ve $A \in SO(n)$ olmak üzere Cayley formülü iki şekilde aşağıdaki gibi verilir:

$$[S] = [A - I][A + I]^{-1} \quad (2.39)$$

$$[A] = [I - S]^{-1}[I + S]. \quad (2.40)$$

Cayley formülü, özel ortogonal Lie cebirini ifade eden $so(n)$ ve özel ortogonal grup $SO(n)$ in elemanları olan bir antisimetrik matris ile ona karşılık gelen ortogonal matris arasında dönüşüm ilişkisi kurar. Denklem (2.39), ortogonal bir matristen antisimetrik matrisin elde edilmesini; denklem (2.40) ise, antisimetrik matristen ortogonal matrisin oluşturulmasını sağlar.

2.4. Lorentz Uzayı

Lorentz uzayı, fiziksel yasaların değişmezlik ilkesini geometrik bir dille ifade eden bir yapı olarak, hareketin tanımını Öklidyen uzayın katı çerçevesinden çıkararak, serbestçe hareket eden cisimlerin dinamiğini, metriğin yapısından türeyen bir geometrik zorunluluk olarak yeniden tanımlamıştır. Dolayısıyla, Öklid uzayından farklı olarak, aşağıdaki gibi tanımlanan özel bir metrik kullanır (O'Neill, 1983; Lopez, 2014).

Tanım 2.4.1 Lorentz uzayı $\mathbb{E}_1^n = (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ metrik uzayıdır, $\langle , \rangle$ metriği ile şekilde tanımlanır:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n \quad u = (u_1, \dots, u_n), \quad v = (v_1, \dots, v_n), \quad (2.41)$$

$$\langle u, v \rangle = u^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} v = u^T G v. \quad (2.42)$$

(Lopez, 2014).

Tanım 2.4.2 Verilen $u \in \mathbb{E}_1^3$ vektörü için $\sqrt{|\langle u, u \rangle|}$ ifadesi u vektörünün normu olarak adlandırılır ve $|u|$ ile gösterilir. u vektörünün normu 1 ise bu vektöre birim denir (Lopez, 2014).

Lorentz uzayında reel sayılar üzerinde tanımlı $n \times n$ lik semi-ortogonal matrislerden oluşan özel semi-ortogonal grubu $SO(n-1,1)$,

$$SO(n-1,1) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | A^T G A = A G A^T = G, \det A = 1\}, \quad (2.43)$$

şeklinde tanımlanır. Burada I_n , $n \times n$ -lik birim matris ve G işaret matrisi,

$$G = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

biçimindedir.

Özel semi-ortogonal grubu $SO(n-1,1)$, $\mathbb{E}_1^n$ de dönme hareketlerini temsil eder. Bu hareketleri Lopez (2014) çalışmasında “boost” olarak isimlendirmiştir. $SO(n-1,1)$ in elemanları yönlendirmeyi koruyan katı cisim dönme hareketlerine karşılık gelir.

$SO(n-1,1)$ bir Lie grubudur. $SO(n-1,1)$ in Lie cebiri $so(n-1,1)$, Lorentzian antisimetrik matrisleri temsil eder. $SO(n-1,1)$ in elemanları olan semi-ortogonal matrisler, Cayley formülü kullanılarak antisimetrik matrisler yardımıyla da elde edilebilir. Lorentz uzayında dönme hareketi yaptıran bir semi-ortogonal matrisin dönme eksenini verildiğinde, buna karşılık gelen antisimetrik matris aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Tanım 2.4.3 $\mathbb{E}_1^3$ de $\vec{s}_L = (s_1, s_2, s_3)$ vektörüne karşılık gelen 3×3 - lük Lorentzian antisimetrik S_L matrisi aşağıdaki gibi verilir:

$$S_L = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

(Yüca ve Yaylı, 2018).

2.5. Dual Dönüşüm

Tanım 2.5.1 Öklid uzayının ortogonal matris grubu $SO(n)$ ve Lorentz uzayının semi-ortogonal matris grubu $SO(n-1,1)$ aşağıdaki gibi verilsin.

$$SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | A^T A = A A^T = I_n, \det A = 1\}, \quad (2.46)$$

$$SO(n-1,1) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | A^T G A = A G A^T = G, \det A = 1\}, \quad (2.47)$$

$A \in SO(n)$ matrisi, $a_{nn} \neq 0$ elemanını ayıracak şekilde,

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

şeklinde yazılır. Dual dönüşümün hipotezi olan $a_{nn} \neq 0$ şartının sağlanması için,

$$\mathfrak{D}_1 = \{A \in SO(n); a_{nn} \neq 0\}$$

$$\mathfrak{D}_2 = \{A \in SO(n-1,1); a_{nn} \neq 0\}$$

olacak şekilde $\mathfrak{D}_1$ ve $\mathfrak{D}_2$ kümeleri arasında bir dual dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f: \mathfrak{D}_1 \rightarrow \mathfrak{D}_2$$

$$f: A \mapsto f(A) = \frac{1}{a_{nn}} \begin{bmatrix} a_{nn}(B^{-1})^T & C \\ -D & 1 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

(Dohi vd., 2010).

Dual dönüşüm kavramı, Öklidyen ve Lorentzian uzaylar arasında bir yapı koruyucu dönüşüm inşa etme amacını taşır. Burada $SO(n)$ grubu, dönme hareketlerini temsil ederken, $SO(n-1,1)$ grubu Lorentzian anlamdaki dönme hareketine karşılık gelen dönüşümleri içermektedir.

$a_{nn} \neq 0$ koşulu, dual dönüşümün tanımında kritik bir rol oynar; bu koşul sağlanmadığında, dönüşüm tanımsız kalacaktır. Bu nedenle $\mathfrak{D}_1$ ve $\mathfrak{D}_2$ kümeleri, sadece bu koşulu sağlayan matrislerden oluşacak şekilde belirlenmiştir.

Formülde görüldüğü üzere, f dönüşümü, A matrisinin alt sağ köşe elemanı olan a_{nn} 'ye bağlı olarak ölçeklenmiş bir matris çarpımıdır. Burada B bloğunun transpozu ve tersi alınmakta, C ve D blokları ise uygun işaret ve konum değişiklikleriyle yerleştirilmektedir. Bu yapı, dönüşümün hem Öklidyen hem de Lorentzian grup yapısını korumasını sağlar.

Bu nedenle dual dönüşüm, geometrik anlamda Öklidyen uzaydan Lorentzian uzaya (veya tersi) belirli bir simetriyi ve metrik uyumluluğu koruyarak geçiş yapılmasını sağlar.

İspat: f dönüşümü,

$$\begin{aligned} f^2(A) &= f(f(A)) \\ &= f(B) \\ &= A \\ \Rightarrow f^2 &= id. \end{aligned} \quad (2.50)$$

sağladığından bir dual dönüşümdür.

$f^2 = id$ ifadesinin sağlanması, f dönüşümünün ardışık iki kez uygulandığında başlangıç noktasına dönülmesi anlamına gelir. Bu özellik, cebirsel yapısı içerisinde özel olarak geometrik bağlamda dual dönüşüm kavramına karşılık gelir. Dolayısıyla, f dönüşümünün bir dual dönüşüm olduğu ispatlanmış olur.

Örnek 2.1 $A \in SO(3)$ ortogonal matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$A \in SO(3)$ ortogonal matrisine f dual dönüşümü uygulanırsa, $f(A)=B$ semi-ortogonal matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$$

$f(A)=B \in SO(2,1)$ olduğunu göstermek için,

$$BGB^T = G,$$

eşitliği sağlanmalıdır, burada $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ işaret matrisidir.

O halde,

$$BGB^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = G$$

elde edilir.

Bu sayede, dual dönüşümün Öklidyen bir dönme hareketinin ($SO(3)$ kümesinin bir elemanını) Lorentzian bir dönme hareketine ($SO(2,1)$ kümesinin bir elemanına) nasıl dönüştürdüğü gösterilmiş olur.



3. ÖKLİDYEN VE LORENTZIAN UZAYLARDA HİPER DUAL MATRİSLER

3.1. Hiper Dual Matrisler

Katı cisim hareketleri, aşağıdaki özellikleri sağlayan 3×3 lük hiper dual ortogonal matrislerden oluşan Lie grubu $S\tilde{O}(3)$ üzerinde çalışılarak incelenir:

$$\tilde{A}^T \tilde{A} = \tilde{A} \tilde{A}^T = I_3 \quad (3.1)$$

$$\det \tilde{A} = 1. \quad (3.2)$$

Tüm hiper dual ortogonal matrislerden oluşan küme şöyle tanımlanır:

$$\tilde{O}(3) = \{ \tilde{A} \in \mathbb{H}\mathbb{D}_3^3 \mid \tilde{A}^T \tilde{A} = \tilde{A} \tilde{A}^T = I_3 \}. \quad (3.3)$$

Eğer hiper dual ortogonal matris $\det \tilde{A} = 1$ özelliğini sağlıyorsa, o halde bu küme bir Lie grubu olur ve özel hiper dual ortogonal grup olarak adlandırılır, $S\tilde{O}(3)$ ile gösterilir.

Öklid uzayında $S\tilde{O}(3)$ kümesinin bir elemanı olan hiper dual ortogonal matrise karşılık gelen dönüşüm, hem dönme hem de öteleme hareketlerini içeren bir katı cisim hareketini temsil eder. Bu sayede hiper dual matrisler, hem dönme hareketi hem de öteleme hareketini aynı anda ifade etmek için kullanılır. Hiper dual ortogonal matrisler, ortogonal matrislerin hiper dual uzaya genişletilmiş halidir. O halde $\tilde{R} \in \tilde{O}(3)$ ve t öteleme olmak üzere, hiper dual ortogonal matrisler, bir P noktasını

$$P' = \tilde{R}P + t \quad (3.4)$$

şeklinde P' noktasına dönüştürür. Bu dönüşüm, uzaklıkları ve açıları koruyan bir hareket olduğu için katı cisim hareketi olarak adlandırılır.

Ayrıca, $S\tilde{O}(3)$ Lie grubuna bağlı olarak Lie cebiri ve matrisler üzerinde parantez işlemiyle birlikte şu şekilde elde edilir:

$$s\tilde{o}(3) = \{ \Omega \in \mathbb{H}\mathbb{D}_3^3 \mid \tilde{\Omega}^T = -\tilde{\Omega} \}. \quad (3.5)$$

Bu cebir, hiper dual antisimetrik matrislerden oluşur. $s\tilde{o}(3)$ ve $\mathbb{H}\mathbb{D}^3$ arasında aşağıdaki izomorfizm elde edilir:

$$f: s\tilde{o}(3) \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{D}^3$$

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{s}_3 & \tilde{s}_2 \\ \tilde{s}_3 & 0 & -\tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 & -\tilde{s}_1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow f(\tilde{S}) = \tilde{S} = (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3). \quad (3.6)$$

Burada herhangi bir $\tilde{A} \in \mathbb{H}\mathbb{D}^3$ için şu ifade geçerlidir:

$$\tilde{S}\tilde{A} = \tilde{A} \otimes_h \tilde{A}. \quad (3.7)$$

Bir hiper dual dönüşüm matrisi $\tilde{R} \in S\tilde{O}(3)$, hiper dual açı $\tilde{\theta}$ ve hiper dual birim eksen $\vec{\tilde{s}} = (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3)$ ile birlikte aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\tilde{s}_2^2 + \tilde{s}_3^2) & (1 - \cos\tilde{\theta})\tilde{s}_1\tilde{s}_2 - \sin\tilde{\theta}\tilde{s}_3 & (1 - \cos\tilde{\theta})\tilde{s}_1\tilde{s}_3 + \sin\tilde{\theta}\tilde{s}_2 \\ (1 - \cos\tilde{\theta})\tilde{s}_1\tilde{s}_2 + \sin\tilde{\theta}\tilde{s}_3 & 1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_3^2) & (1 - \cos\tilde{\theta})\tilde{s}_2\tilde{s}_3 - \sin\tilde{\theta}\tilde{s}_1 \\ (1 - \cos\tilde{\theta})\tilde{s}_1\tilde{s}_3 - \sin\tilde{\theta}\tilde{s}_2 & (1 - \cos\tilde{\theta})\tilde{s}_2\tilde{s}_3 + \sin\tilde{\theta}\tilde{s}_1 & 1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

(Ramis vd., 2022).

3.2. Hiper Dual Matrisler ve Dual Dönüşüm

Bu bölümde, dual dönüşüm kullanılarak, Öklid uzayında hiper dual ortogonal matrislerden Lorentz uzayında hiper dual semi-ortogonal matrisler elde edilecektir. Bu sayede iki farklı uzaydaki hareketler birbirine karşılık getirilmiş olacaktır.

Öklid uzayında kullanılan hiper dual ortogonal matrislerin dual dönüşüm aracılığıyla Lorentz uzayına taşınması incelenecek ve elde edilen hiper dual semi-ortogonal matrislerin, Lorentz metrik yapısına uygunluğu matematiksel olarak gösterilecektir.

Bu dönüşüm süreci, yalnızca teorik bir eşleme sağlamanın ötesinde, Öklid ve Lorentz uzayları arasındaki yapısal benzerlik ve farklılıkların anlaşılması açısından da önem taşımaktadır. Ayrıca, kinematik uygulamalar bağlamında, bu eşleştirme yöntemi sayesinde iki uzayda tanımlı hareketlerin analizi ortak bir hiper dual cebirsel temelde gerçekleştirilebilecektir.

Tanım 3.2.1. $n \times n$ – lik hiper dual matrislerin iki kümesi aşağıdaki gibidir.

$$S\tilde{O}(n) = \{\tilde{A} \in GL(n, \mathbb{H}\mathbb{D}_3^3) | \tilde{A}^T \tilde{A} = \tilde{A} \tilde{A}^T = I_n, \det \tilde{A} = 1\}, \quad (3.9)$$

$$S\tilde{O}(n-1, n) = \{\tilde{A} \in GL(n, \mathbb{H}\mathbb{D}_3^3) | \tilde{A}^T G \tilde{A} = \tilde{A} G \tilde{A}^T = G, \det \tilde{A} = 1\}, \quad (3.10)$$

burada I_n , $n \times n$ -lik birim matris ve G matrisi,

$$G = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

biçimindedir.

$\tilde{A} \in S\tilde{O}(n)$ matrisi, $Re \tilde{a}_{nn} \neq 0$ elemanını ayıracak şekilde,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{C} \\ \tilde{D} & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

şeklinde yazılır. Dual dönüşümün hipotezi olan $Re \tilde{a}_{nn} \neq 0$ şartının sağlanması için,

$$\mathfrak{S}_1 = \{\tilde{A} \in S\tilde{O}(n); Re \tilde{a}_{nn} \neq 0\} \quad (3.13)$$

$$\mathfrak{S}_2 = \{\tilde{A} \in S\tilde{O}(n-1, 1); Re \tilde{a}_{nn} \neq 0\} \quad (3.14)$$

olacak şekilde $\mathfrak{S}_1$ ve $\mathfrak{S}_2$ kümeleri arasında bir dual dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$h: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$$

$$h: \tilde{A} \mapsto h(\tilde{A}) = \frac{1}{\tilde{a}_{nn}} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{nn}(\tilde{B}^{-1})^T & \tilde{C} \\ -\tilde{D} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

İspat: Bu teoremi ispatlamak için $h(\tilde{A}) \in S\tilde{O}(2, 1)$ olduğunu göstermeliyiz. G işaret matrisi ve $\tilde{B} = h(\tilde{A})$ hiper dual semi-ortogonal matris olmak üzere,

$$\tilde{B}^T = G \tilde{B}^{-1} G \quad (3.16)$$

sağlanmalıdır.

Eşitliğin her iki tarafı soldan $\tilde{B}G$ ile çarpılırsa,

$$\tilde{B}G \tilde{B}^T = G \quad (3.17)$$

elde edilir. O halde,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

ve

$$h(\tilde{A}) = \tilde{B} = \frac{1}{\tilde{a}_{33}} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{22} & -\tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{13} \\ -\tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{23} \\ -\tilde{a}_{31} & -\tilde{a}_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

olmak üzere (3.17) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \tilde{B}G\tilde{B}^T &= \frac{1}{\tilde{a}_{33}} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{22} & -\tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{13} \\ -\tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{23} \\ -\tilde{a}_{31} & -\tilde{a}_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\tilde{a}_{33}} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{22} & -\tilde{a}_{12} & -\tilde{a}_{31} \\ -\tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{11} & -\tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{21} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = G \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde edilir ve h bir dual dönüşümdür (Yüca ve Yaylı, 2022).

(3.8) deki $\tilde{R}$ matrisine h dual dönüşümü uygulanırsa, $h(\tilde{R}) = \tilde{R}_L$ matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\tilde{R}_L = \begin{bmatrix} \frac{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_3^2)}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2)} & \frac{-(1 - \cos\tilde{\theta})\tilde{s}_1\tilde{s}_2 - \sin\tilde{\theta}\tilde{s}_3}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2)} & \frac{(1 - \cos\tilde{\theta})\tilde{s}_1\tilde{s}_3 + \sin\tilde{\theta}\tilde{s}_2}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2)} \\ \frac{-(1 - \cos\tilde{\theta})\tilde{s}_1\tilde{s}_2 + \sin\tilde{\theta}\tilde{s}_3}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2)} & \frac{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\tilde{s}_2^2 + \tilde{s}_3^2)}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2)} & \frac{(1 - \cos\tilde{\theta})\tilde{s}_1\tilde{s}_3 - \sin\tilde{\theta}\tilde{s}_1}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2)} \\ \frac{-(1 - \cos\tilde{\theta})\tilde{s}_1\tilde{s}_3 + \sin\tilde{\theta}\tilde{s}_2}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2)} & \frac{-(1 - \cos\tilde{\theta})\tilde{s}_2\tilde{s}_3 - \sin\tilde{\theta}\tilde{s}_1}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2)} & \frac{1}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2)} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$\tilde{R}_L \in S\tilde{O}(2,1)$ matrisi, hiper dual semi-ortogonal matristir.

Sonuç 3.1. Bir $\tilde{a}$ hiper dual sayısının,

$$\tilde{a} = (a_0 + \varepsilon_1 a_1) + \varepsilon_2(a_2 + \varepsilon_1 a_3) \quad (3.22)$$

biçiminde ifade edilebildiğinden, (3.22) kullanılarak, daha önce yapılan dual dönüşümler üzerindeki çalışmalar elde edilebilir.

Eğer $a_2 + \varepsilon_1 a_3 = 0$ alınırsa, dual uzaylarda dual dönüşüm tanımlarına ulaşılır (Yüca ve Yaylı, 2018). Öte yandan, aynı anda $(a_0 + \varepsilon_1 a_1) = 0$ ve $a_2 + \varepsilon_1 a_3 = 0$ alınırsa, Dohi vd. (2010) çalışmalarında tanımlanan dual dönüşümlere ulaşılabilir. Başka bir deyişle, Yüca ve Yaylı (2022) çalışmalarında hiper dual sayılar yardımıyla dual dönüşümlerin bir genellemesini vermişlerdir.

Aşağıdaki teorem ile Öklid uzayındaki hiper dual ortogonal matrislerin eksenini ile Lorentz uzayında elde edilen hiper dual semi-ortogonal matrislerin eksenleri birbirine

karşılık getirilecektir. Bu sayede hiper dual uzaylarda tanımlanan dual dönüşümün eksenleri sabit bıraktığı gösterilecektir.

Teorem 3.1. h dual dönüşümü aşağıdaki gibi verilsin.

$$h: S\tilde{O}(3) \rightarrow S\tilde{O}(2,1)$$

$$\tilde{A} \mapsto h(\tilde{A}) = \tilde{B}$$

$\tilde{A}$ nın dual eksenini ile $\tilde{B}$ nin dual eksenini, dual dönüşüm altında değişmez veya paralel kalır.

İspat. $\tilde{A} \in S\tilde{O}$ olmak üzere,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$\tilde{A} - \tilde{A}^T$ ile $\tilde{A}$ nın dual eksenini hesaplanır (Ramis ve Yaylı, 2010).

$$\begin{aligned} \tilde{A} - \tilde{A}^T &= \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \tilde{a}_{12} - \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{13} - \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{12} & 0 & \tilde{a}_{23} - \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{31} - \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{32} - \tilde{a}_{23} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dual ekseninin hiper dual doğrultman vektörü $\vec{\tilde{x}}$, (3.24) den,

$$\vec{\tilde{x}} = (\tilde{a}_{32} - \tilde{a}_{23}, \tilde{a}_{13} - \tilde{a}_{31}, \tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{12}) \quad (3.25)$$

biçiminde elde edilir. O halde $\tilde{A}\vec{\tilde{x}} = \vec{\tilde{x}}$ eşitliğini,

$$\begin{aligned} \tilde{A}\vec{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{32} - \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{13} - \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{a}_{32} - \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{13} - \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{12} \end{bmatrix} \\ &= \vec{\tilde{x}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

biçiminde sağlar.

Bunun için öncelikle $h(\tilde{A}) = \tilde{B} \in S\tilde{O}(2,1)$ nin dönme eksenini bulunmalıdır.

$$h(\tilde{A}) = \tilde{B} = \frac{1}{\tilde{a}_{33}} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{22} & -\tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{13} \\ -\tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{23} \\ -\tilde{a}_{31} & -\tilde{a}_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

olmak üzere, $\tilde{B} - \tilde{B}^{-1}$ matrisi ile $\tilde{B}$ nin dönme eksenini hesaplanır.

$$\tilde{B}^{-1} = \varepsilon \tilde{B}^T \varepsilon = \frac{1}{\tilde{a}_{33}} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{22} & -\tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{31} \\ -\tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{32} \\ -\tilde{a}_{13} & -\tilde{a}_{23} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\tilde{B} - \tilde{B}^{-1} = \frac{1}{\tilde{a}_{33}} \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{a}_{21} + \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} - \tilde{a}_{31} \\ -\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{21} & 0 & \tilde{a}_{23} - \tilde{a}_{32} \\ -\tilde{a}_{31} + \tilde{a}_{13} & -\tilde{a}_{32} + \tilde{a}_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

E_1^3 de, dönme ekseninin doğrultman vektörü, denklem (2.45) yardımıyla, $\vec{y}$ aşağıdaki gibidir yazılır:

$$\vec{y} = \frac{1}{\tilde{a}_{33}} (\tilde{a}_{32} - \tilde{a}_{23}, \tilde{a}_{13} - \tilde{a}_{31}, \tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{12}) \quad (3.30)$$

Böylelikle,

$$\vec{y} = \frac{1}{\tilde{a}_{33}} \vec{x} \quad (3.31)$$

olduğu görülür.

$$Sp\{\vec{x}\} = Sp\{\vec{y}\} \quad (3.32)$$

olduğundan, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ nin dual eksenleri paraleldir (Yüca ve Yaylı, 2022).

Örnek 3.1. $\tilde{A} \in S\tilde{O}$ olmak üzere aşağıdaki gibi verilsin:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 & 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ 1 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_2 & 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 & -2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1 \end{bmatrix}.$$

$\tilde{A}$ hiper dual ortogonal matrisinin dual eksenini bulmak için,

$$\tilde{A} - \tilde{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 & 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ 1 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_2 & 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 & -2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 & 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 & \varepsilon_2 & -2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2 & 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \\ -2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2 & 0 & -2\varepsilon_1 \\ -2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 & 2\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix},$$

antisimetrik matrisi elde edilir.

Buradan $\vec{S} = (\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, 1 - \varepsilon_1\varepsilon_2)$ hiper dual eksenine ulaşılır.

$\tilde{A} \in S\tilde{O}(3)$ ortogonal matrisine h dual dönüşümü uygulanarak $h(\tilde{A})=\tilde{B}$ hiper dual semi-ortogonal matrisi elde edilir.

$$\tilde{B} = \frac{1}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} \begin{bmatrix} 2\varepsilon_1\varepsilon_2 & -1 & 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ -2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1 & 0 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & -2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$h(\tilde{A}) \in S\tilde{O}(2,1)$ olduğu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\begin{aligned} \tilde{B}G\tilde{B}^T &= \begin{bmatrix} \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2+1} & \frac{-1}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2+1} & \frac{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2+1} \\ 1 & 0 & \frac{\varepsilon_2}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2+1} \\ \frac{\varepsilon_2}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2+1} & \frac{-2\varepsilon_1-\varepsilon_2}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2+1} & \frac{1}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2+1} & 1 & \frac{\varepsilon_2}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2+1} \\ \frac{-1}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2+1} & 0 & \frac{-2\varepsilon_1-\varepsilon_2}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2+1} \\ \frac{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2+1} & \frac{\varepsilon_2}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2+1} & \frac{1}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = G. \end{aligned}$$

$\tilde{B}$ hiper dual semi-ortogonal matrisinin dual eksenini, $\tilde{B} - \tilde{B}^{-1}$ yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\tilde{B} - \tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 & 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \\ 2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 & 0 & -2\varepsilon_1 \\ 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 & -2\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Buradan hiper dual eksenin $\vec{S} = (\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, 1 - \varepsilon_1\varepsilon_2)$ hiper dual eksenini elde edilir.

Öklid ve Lorentz uzaylarında birbirlerine karşılık getirilen bu eksenlerin $\tilde{A}\tilde{S} = \tilde{S}$ ve $\tilde{B}\tilde{S} = \tilde{S}$ yi sağladıkları aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\tilde{A}\vec{S} = \vec{S}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 & 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ 1 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_2 & 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 & -2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ 1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ 1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

ve

$$\tilde{B}\vec{s} = \vec{s}$$

$$= \frac{1}{-2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} \begin{bmatrix} 2\varepsilon_1\varepsilon_2 & -1 & 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ -2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1 & 0 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & -2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ 1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ 1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ nin aynı dual eksene sahip olduğu gösterilmiş olur.

4. HİPER DUAL MATRİSLERİN KİNEMATİK UYGULAMALARI

Hiper dual matrisler, katı cisim hareketlerinin kinematik uygulamalarında sadece bir hesaplama aracı olarak değil, hareketin geometrik yapısını oluşturan bir model olarak düşünülebilir. Reel ya da dual sayı sistemleri ile ifade edilen katı hareketler cismin nerede olduğunu gösterirken, hiper dual sayılar yardımıyla ifade edilen hareketlerde cismin aynı zamanda nasıl oraya geldiğini ve şu an nereye doğru gittiğini gösterir. Bu özelliği ile hiper dual sayılar, kinematik problemler için vazgeçilmez bir teorik ve pratik bir araç haline gelir (Fike ve Alonso, 2011a,b).

Öklid uzayında, hiper dual sayılar yardımıyla yapılan kinematik hareketler, mutlak bir uzayda serbestçe dönen ve ötelenen bir cismin kinematığıdır. Hiper dual matrisler, bu hareketin anlık vida eksenini ve onun geometrik etkilerini ifade etmek için kullanılır. Yani Öklid uzayında hiper dual sayılar ile hareket eden cismin üzerindeki herhangi bir noktanın hız ve ivmesi ifade edilir. Lorentz uzayında ise hiper dual sayılar bir cismin anlık hızı, ivmesi veya vida eksenini gibi kinematik özelliklerini hesaplar, bu hareketin uzayın temel metriğini otomatik olarak ve doğal bir şekilde korumasını garanti etmesidir. Bu yöntem, kinematığı, metrik yapıyla uyumlu bir şekilde modeller (Wang ve Yu, 2021; Fike ve Alonso, 2011a,b).

Bu bölümde, Öklidyen ve Lorentzian uzaylardaki katı cisim hareketleri, bu anlamdaki güçlü araçlar olan hiper dual matrisler kullanılarak verilecektir. Üçüncü bölümde verilen tanım ve teoremler yardımıyla hiper dual matrislerin yaptırdığı katı cisim hareketleri Öklid uzayı ve Lorentz uzayında birbirine karşılık getirilecektir.

Öncelikle bir hiper dual eksen verildiğinde, buna karşılık getirilen katı cisim hareketlerinin hem Öklidyen hem de Lorentzian uzayda incelendiği bir kinematik uygulama aşağıdaki gibi verilecektir.

Örnek.4.1. Bir $\vec{S} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1\varepsilon_2, 1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)$ hiper dual eksenini için $\tilde{S}$ antisimetrik matrisi Denklem (2.38) kullanılarak aşağıdaki gibi verilsin.

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ 1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 & 0 & -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Aşağıda verilen Cayley dönüşümünü kullanarak $\tilde{A}$ ortogonal matrisini elde edelim.

$$\tilde{A} = [I - \tilde{S}]^{-1} [I + \tilde{S}]$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{-2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1}{2} & \frac{-\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1}{2} & \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}{2} \\ \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}{2} \\ \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2}{2} & \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}{2} & \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ 1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 & 1 & -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2\varepsilon_1\varepsilon_2 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 & \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 + 1 & 0 & -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{A} \in S\tilde{O}(3)$ ortogonal matrisi elde edilir. h dual dönüşüm fonksiyonu yardımıyla $h(\tilde{A}) = \tilde{B}$ matrisi şu şekilde hesaplanır:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} & \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} \\ \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} & \frac{-2\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} & \frac{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} \\ \frac{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} & \frac{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} & \frac{1}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} \end{bmatrix}$$

$h(\tilde{A}) \in S\tilde{O}(2,1)$ olduğu, yani $\tilde{B}$ matrisinin semi-ortogonalliğini, G işaret matrisi ve

$$\tilde{B}^T = G\tilde{B}^{-1}G$$

eşitliği kullanılarak gösterilebilir. Eğer eşitliğin her iki yanı soldan $\tilde{B}G$ ile çarpılırsa,

$$\tilde{B}G\tilde{B}^T = G$$

elde edilir. Gerçekten de,

$$\tilde{B}G\tilde{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanmış olur.

Öklid uzayındaki hareket matrisi $\tilde{A}$ ve Lorentz uzayındaki $\tilde{B}$ matrisi elde edildiğine göre, her iki matrisin de farklı uzaylarda aynı ekseni sabit bıraktığı

$$\tilde{A}\vec{s} = \vec{s}$$

ve

$$\tilde{B}\vec{S} = \vec{S}$$

eşitlikleri ile aşağıdaki şekilde sağlanır.

$$\begin{aligned}\tilde{A}\vec{S} &= \begin{bmatrix} -2\varepsilon_1\varepsilon_2 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 & \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 + 1 & 0 & -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ 1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ 1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{bmatrix} = \vec{S} \\ \tilde{B}\vec{S} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} & \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} \\ \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} & \frac{-2\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} & \frac{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} \\ \frac{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} & \frac{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} & \frac{1}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ 1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ 1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{bmatrix} = \vec{S}\end{aligned}$$

Bu örnekte, verilen hiper dual eksenin doğrultman vektörüne karşılık gelen antisimetrik $\tilde{S}$ matrisi tanımlanmış ve Cayley formülü uygulanarak $\tilde{A}$ ortogonal matrisi elde edilmiştir. $\tilde{A}$ matrisi kullanılarak, h dual dönüşüm fonksiyonu yardımıyla semi-ortogonal $\tilde{B}$ matrisi elde edilmiş ve bu $\tilde{B}$ matrisinin $S\tilde{O}(2,1)$ grubuna ait olduğu gösterilmiştir. Böylelikle her iki uzaydaki katı cisim hareketinin, $\tilde{A}\vec{S} = \vec{S}$ ve $\tilde{B}\vec{S} = \vec{S}$ eşitlikleri de sağlanarak, bu hareketlere karşılık getirilen matrislerin eksenlerinin doğrultman vektörlerini sabit bıraktığı gösterilmiştir.

Her iki uzayda verilen katı cisim hareketinin ekseninin sabit kaldığı gösterilen bu örnekten sonra, hiper dual sayıların bir parametre ile verilmesi durumundaki hareketler aşağıdaki örnek yardımıyla incelenecektir.

Örnek 4.2. Hiper dual açı $\tilde{\theta}$ olmak üzere, $\tilde{H} \in S\tilde{O}(3)$ hiper dual ortogonal matrisi,

$$\tilde{h}_{11} = 1 - (1 - \cos\tilde{\theta})((1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2 + (-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2)$$

$$\tilde{h}_{12} = (1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) - \sin\tilde{\theta}(-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$\tilde{h}_{13} = (1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \sin\tilde{\theta}(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)$$

$$\tilde{h}_{21} = (1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) + \sin\tilde{\theta}(-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$\tilde{h}_{22} = 1 - (1 - \cos\tilde{\theta})((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2)$$

$$\tilde{h}_{23} = (1 - \cos\tilde{\theta})(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)(-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \sin\tilde{\theta}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$\tilde{h}_{31} = (1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \sin\tilde{\theta}(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)$$

$$\tilde{h}_{32} = (1 - \cos\tilde{\theta})(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)(-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \sin\tilde{\theta}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$\tilde{h}_{33} = 1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2$$

bileşenleri olmak üzere aşağıdaki gibi verilsin:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{11} & \tilde{h}_{12} & \tilde{h}_{13} \\ \tilde{h}_{21} & \tilde{h}_{22} & \tilde{h}_{23} \\ \tilde{h}_{31} & \tilde{h}_{32} & \tilde{h}_{33} \end{bmatrix}.$$

h dual dönüşümü kullanılarak, $h(\tilde{H}) = \tilde{H}_L \in S\tilde{O}(2,1)$ hiper dual semi-ortogonal matrisi,

$$\tilde{h}_{L11} = \frac{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2)}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2}$$

$$\tilde{h}_{L12} = \frac{-(1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) - \sin\tilde{\theta}(-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2}$$

$$\tilde{h}_{L13} = \frac{(1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \sin\tilde{\theta}(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2}$$

$$\tilde{h}_{L21} = \frac{-(1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) + \sin\tilde{\theta}(-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2}$$

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{L22} &= \frac{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})((1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2 + (-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2)}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2} \\ \tilde{h}_{L23} &= \frac{(1 - \cos\tilde{\theta})(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)(-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \sin\tilde{\theta}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2} \\ \tilde{h}_{L31} &= \frac{-(1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \sin\tilde{\theta}(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2} \\ \tilde{h}_{L32} &= \frac{-(1 - \cos\tilde{\theta})(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) - \sin\tilde{\theta}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2} \\ \tilde{h}_{L33} &= \frac{1}{1 - (1 - \cos\tilde{\theta})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2}\end{aligned}$$

bileşenleri olmak üzere aşağıdaki gibi verilsin:

$$\tilde{H}_L = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{L11} & \tilde{h}_{L12} & \tilde{h}_{L13} \\ \tilde{h}_{L21} & \tilde{h}_{L22} & \tilde{h}_{L23} \\ \tilde{h}_{L31} & \tilde{h}_{L32} & \tilde{h}_{L33} \end{bmatrix}.$$

G işaret matrisi ve $h(\tilde{H}) = \tilde{H}_L$ hiper dual semi-ortogonal matris olmak üzere,

$$\tilde{H}_L G \tilde{H}_L^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = G$$

sağlandığından, $\tilde{H}_L \in S\tilde{O}(2,1)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\tilde{H}_L$ nin hiper dual semi-ortogonal matris olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi $\tilde{H}$ hiper dual ortogonal matrisine karşılık gelen eksen bulalım:

$$\tilde{H} - \tilde{H}^T = \begin{bmatrix} 0 & \sin\tilde{\theta}(-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) & 2\sin\tilde{\theta}(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) \\ -2\sin\tilde{\theta}(-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) & 0 & -2\sin\tilde{\theta}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ -2\sin\tilde{\theta}(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) & 2\sin\tilde{\theta}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi kullanılarak, dual birim eksen

$$\vec{s} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2, 1 + \varepsilon_1\varepsilon_2, -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

olarak elde edilir.

$$\tilde{H}\vec{s} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ 1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \vec{s}$$

ve

$$\tilde{H}_L\vec{s} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ 1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \vec{s}$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla, Öklid uzayındaki hiper dual ortogonal matris $\tilde{H}$ ve Lorentz uzayındaki hiper dual semi-ortogonal matris $\tilde{H}_L$ nin aynı dual eksene sahip olduğu gösterilmiş olur.

Kinematik anlamda, bir parametre ile verilen reel değerli bir matrise karşılık gelen hareket sadece konum faktörünü ele alırken, dual sayılarla yazılan bir matrise karşılık getirilen hareket, dual bileşen yardımıyla konum ile birlikte hız kavramını da ele alır. Bir hiper dual matris bir parametre eklenerek yazıldığında ise, konum ve hıza ek olarak ivme kavramını da beraberinde getirir. Böylelikle bir katı cisim hareketinin kinematik anlamdaki profili tek bir çatı altında verilmiş olur. Yani, oluşturulan bir parametrelili hiper dual dönme matrisi artık sadece dönme hareketini değil, aynı zamanda dönme hızını ve dönme ivmesini de vermiş olur. Bu çalışmada hiper dual sayılar ile ilgili verilen temel kavramlarda bahsedilen, hiper dual sayıların güçlü yönünü oluşturan diferansiyasyon aslında buradaki hız ve ivme kavramları için anlam kazanmaktadır. Fike ve Alonso (2011a,b) çalışmalarında altı çizilen türev hesaplamalarındaki kolaylık ifadesi, kinematik anlamda bu şekilde verilebilir. Bu durumun Öklid ve Lorentz uzaylarında ele alınarak hareket eksenlerinin birbirlerine karşılık getirilmesi de bu örnekle sağlanmış olur.

Son bir uygulama olarak, Öklid uzayında verilen bir hiper dual ortogonal matris ve Cayley formülünün denklem (2.39) daki kısmı kullanılarak, Öklid ve Lorentz uzaylarındaki katı cisim hareketlerinin eksenlerinin birbirlerine karşılık getirilmesine örnek verilecektir.

Örnek 4.3. Bir $\tilde{A}$ hiper dual ortogonal matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}\varepsilon_1\varepsilon_2 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 & (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\sqrt{3} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1 & -2\sqrt{3}\varepsilon_1\varepsilon_2 & (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sqrt{3} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sqrt{3} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 & (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\sqrt{3} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Öncelikle $\tilde{A}$ matrisinin hiper dual ortogonal olduğunun sağlaması aşağıdaki gibi yapılır:

$$\tilde{A}\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

olduğundan $\tilde{A} \in S\tilde{O}(3)$ olur. Denklem (2.39) daki Cayley formülü,

$$[\tilde{S}] = [\tilde{A} - I][\tilde{A} + I]^{-1}$$

kullanılarak,

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ 1 & 0 & -\varepsilon_1 - \sqrt{3}\varepsilon_2 \\ \sqrt{3}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 & \varepsilon_1 + \sqrt{3}\varepsilon_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{S}$ antisimetrik matrisi elde edilir. Bu sayede, $\tilde{A}$ hiper dual ortogonal matrisine karşılık gelen hareketin ekseni:

$$\vec{\tilde{S}} = (\varepsilon_1 + \sqrt{3}\varepsilon_2, \sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_2, 1)$$

olarak hesaplanır.

h dual dönüşüm ile $\tilde{A}$ hiper dual ortogonal matrisinden $h(\tilde{A}) = \tilde{B}$ hiper dual semi-ortogonal matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{3}\varepsilon_1\varepsilon_2 & -2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 & (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sqrt{3} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ -2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1 & 2\sqrt{3}\varepsilon_1\varepsilon_2 & (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sqrt{3} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ -(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sqrt{3} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sqrt{3} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ayrıca,

$$\tilde{B}^T G \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = G$$

olduğundan $\tilde{B} \in S\tilde{O}(2,1)$ dir.

Öklid ve Lorentz uzaylarında aynı eksenleri sabit bıraktıkları

$$\tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \sqrt{3}\varepsilon_2 \\ \sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \sqrt{3}\varepsilon_2 \\ \sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{s}$$

ve

$$\tilde{B} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \sqrt{3}\varepsilon_2 \\ \sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \sqrt{3}\varepsilon_2 \\ \sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{s}$$

eşitlikleri ile sağlanır.

Kinematik uygulamalardan da görüldüğü üzere, Öklidyen ve Lorentzian uzaylarda hiper dual matrisler yardımıyla Öklid uzayındaki hiper dual ortogonal matris $\tilde{A}$ ve Lorentz uzayındaki hiper dual semi-ortogonal matris $\tilde{B}$ nin aynı dual eksene sahiptir. Diğer bir ifade ile, hiper dual uzaylarda tanımlanan dual dönüşümün eksenleri sabit bıraktığı gösterilmiştir. İki farklı uzay olmalarına rağmen, birbirlerine karşılık getirilen katı cisim hareketlerinin eksenlerinin aynı ya da paralel kalması kinematik anlamda önem arz etmektedir.

Ayrıca daha önce de bahsedildiği üzere, bir $\tilde{a}$ hiper dual sayısı aynı zamanda, $\tilde{a} = (a_0 + \varepsilon_1 a_1) + \varepsilon_2 (a_2 + \varepsilon_1 a_3)$ biçiminde de ifade edilebildiğinden, daha önce yapılan dual dönüşümler üzerindeki çalışmalar da bu ifade çerçevesinde elde edilebilir. Yani, eğer $a_2 + \varepsilon_1 a_3 = 0$ alınırsa, dual uzaylarda dual dönüşüm tanımlarına ulaşılır. Öte yandan, aynı anda $(a_0 + \varepsilon_1 a_1) = 0$ ve $a_2 + \varepsilon_1 a_3 = 0$ alınırsa, reel uzaylarda dual dönüşümlere ulaşılabilir. Başka bir ifade ile, hiper dual sayılar yardımıyla dual dönüşümlerin bir genellemesi yapılmış olur. Tezin bu bölümünde verilen kinematik uygulamalar yardımıyla dual dönüşümler ile ilgili önceki yapılan çalışmalar desteklenerek hiper dual uzaylarda katı cisim hareketleri geometrik olarak yorumlanmıştır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, hiper dual sayılar yardımıyla hiper dual uzaylarda dual dönüşümler üzerinde çalışılmıştır. Bu sayede, Öklid uzayı ve Lorentz uzayındaki hareketlere karşılık gelen hiper dual ortogonal matrisler ve hiper dual semi-ortogonal matrisler birbirlerine karşılık getirilmiştir. Çalışmanın temel amacı, hiper dual cebirin sağladığı genişletilmiş sayı sistemi aracılığıyla, farklı uzay türlerinde tanımlı hareketlerin matematiksel olarak karşılaştırılabilir ve dönüştürülebilir bir çerçevede ele alınmasını sağlamak olmuştur.

Tez kapsamında, elde edilen kuramsal sonuçların somutlaştırılması amacıyla çeşitli kinematik uygulamalara yer verilmiştir. Bu uygulamalar, hem tezde sunulan tanım, önerme ve teoremlerin daha iyi anlaşılmasını hem de hiper dual cebirin mühendislik ve fizik problemlerindeki potansiyel kullanım alanlarının görülmesini sağlamıştır.

Bu tez çalışmasında kullanılan hiper dual matrisler ve dual dönüşüm yöntemlerinin, kuaterniyon cebiri ile birlikte kullanılması hâlinde, daha yüksek boyutlu hareketlerin ve dönüşümlerin incelenebileceği öngörülmektedir. Böyle bir yaklaşım, özellikle üç boyutlu uzayın ötesindeki dönme hareketi ve dönüşüm problemlerinde yeni araştırma olanakları sunabilir.

KAYNAKLAR

- Aslan, S., 2021. Kinematic Applications of Hyper-Dual Numbers. International Electronic Journal of Geometry, 14(2), 292-304.
- Axler, S., 1997. Linear Algebra Done Right (2nd ed.), Springer-Verlag.
- Berger, M., 1987. Geometry I, Springer-Verlag.
- Clifford, W. K., 1873. Preliminary sketch of bi-quaternions, Proceeding of the London Mathematical Socciety London.
- Cohen, A. ve Shoham, M., 2016. Application of hyper-dual numbers to multi-body kinematics, Journal of Mechanisms and Robotics, 8(1), 011015 (4).
- Cohen, A. ve Shoham, M., 2017. Application of hyper-dual numbers to rigid bodies equations of motion, Mechanism and Machine Theory, 111, 76-84.
- Dohi, R., Maeda, Y., Mori, M. ve Yoshida, H., 2010. A dual transformation between $\widehat{SO}(n+1)$ ve $\widehat{SO}(n,1)$ ans its geometric applications, Linear Algebra and its Applications, 770-776.
- Fike, J. A., 2009. Numerically exact derivative calculations using hyper-dual numbers. 3rd Annual Student Joint Workshop in Simulation- Based Engineering and Design.
- Fike, J. A. ve Alonso, J. J., 2011(a). The development of hyper-dual numbers for exact second-derivative calculations. 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 4-7 January 2011, Orlando, Florida.
- Fike, J. A. ve Alonso, J. J., 2011(b). Automatic Differentiation Through The Use of Hyper-dual Numbers for Second Derivatives. Recent Advances in Algorithmic Differentiation, 163–173, Lecture Notes Computer Science Engineering, 87, Springer Heidelberg.
- Greub, W. H., 1967. Linear Algebra, Springer-Verlag, 451, New York.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1980. Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Mat-No:2
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1983. Diferansiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No. 2.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No. 2, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1998. Dönüşümler ve Geometriler, Ankara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara.

- Jennings, G., 1994. Modern Geometry with Applications, Springer-Verlag, 187, New York.
- Karger, A., ve Novak, J., 1985. Space Kinematics and Lie Groups, Gordon and Breach Science Publishers, Montreux.
- Lopez, R., 2014. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space, International Electronic Journal of Geometry, Volume 7, No:1, pp 44
- McCarthy, J. M., 1990. An Introduction to Theoretical Kinematics, MIT Press, Cambridge.
- Müller, H. R., 1963. Kinematik Dersleri. Ankara University Press, 247-271.
- O'Neill, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York.
- Ramis, Ç. ve Yaylı, Y., 2010. Dual split quaternions and Chasles theorem in 3-dimensional Minkowski Space $\mathbb{E}_1^3$, Adv. Appl. Clifford Algebras. 432, 770-776
- Ramis, Ç., Yaylı, Y. ve Zengin, İ., 2022. The Application of Euler-Rodrigues Formula over Hyper-Dual Matrices. International Electronic Journal of Geometry, 15(2), 266-276.
- Study, E., 1901, Geometry der Dynamen, Leipzig.
- Veldkamp, G. R., 1976. On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous, spatial kinematics, Mech. Mach. Theory 11 (2), 141-156.
- Wang, X. ve Yu, Z., 2021. Hyperdual Dual Quaternions for Rigid Body Motion and Its Derivatives. Mechanism and Machine Theory, 164, 104404.
- Yüca, G. ve Yaylı, Y., 2018. A dual Transformation between $\hat{SO}(3)$ and $\hat{SO}(2,1)$ and its applications, Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A. Phys. Sci. 88-2, 267-273.
- Yüca, G. ve Yaylı, Y., 2022. Hyper-dual matrices and dual transformations. Journal of Geometry and Physics, 175, 104473.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Ülkü KAHRAMAN

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015-2020

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2022-2025

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. TÜGEF Keçiören Gençlik Federasyonu, 2016-2022
2. Global Bilgi – Inbound Projesi, 2022-2024
3. Erişim Müşteri Hizmetleri – Inbound Projesi, 2024

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Kahraman, Ü. and Yüca, G., 2025. Kinematics Applications of Hyper Dual Matrices in $\mathbb{E}^3$ and $\mathbb{E}_1^3$, International Congress on Scientific Research – V, Dubai, UAE, 16-18 Mayıs.