



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**HİPER-FİBONACCİ SAYILARININ MAKSİMUM VE
MİNİMUM ELEMANLI MATRİSLERDE UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğçe SOLMAZ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Mustafa BAHŞİ

AKSARAY, 2019

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342637 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, Tuğçe SOLMAZ tarafından hazırlanan “HYPER-FİBONACCI SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM ELEMANLI MATRİSLERDE UYGULAMALARI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir

Danışman: Doç. Dr. Mustafa BAHŞI

Aksaray Üniversitesi

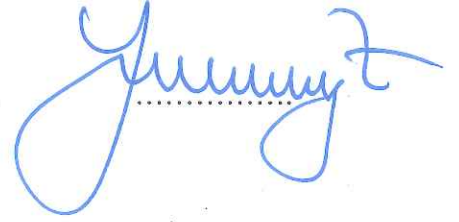
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Doç. Dr. Halis BİLGİL

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Tez Savunma Tarihi: 24/05/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Hiper-Fibonacci sayılarının maksimum ve minimum elemanlı matrislerde uygulamaları konulu Yüksek lisans tezim olan bu çalışmayı, gelenek, bilimsel etik ve ahlak ilkelerine aykırı düşecek şekilde ve faydalandığım kaynakların kaynakçada belirtilenlerden meydana geldiğini ve bu kaynaklardan her türlü bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını belirtir; şerefimle bunu doğrularım.

Belirli bir zaman aramaksızın, tezim hakkında yapmış olduğum bu beyana ters bir durumun belirlenmesi halinde, meydana gelecek tüm ahlaki ve hukuki neticeleri kabul edeceğimi bildiririm.

Tuğçe SOLMAZ

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezimin hazırlanmasında büyük emeği geçen iki yıl boyunca değerli bilgilerini bizlerle paylaşan danışman hocam Doç. Dr. Mustafa BAHŞİ' ye, bu sürecin her aşamasında yanımda olan tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli eşim Şener SOLMAZ' a ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

Tuğçe SOLMAZ
AKSARAY, 2019

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
1.1 Problemin Tanıtımı.....	2
2. LİTERATÜR ÖZETİ	3
3. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER.....	5
4. HİPER-FİBONACCİ SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM ELEMANLI MATRİSLERDE UYGULAMALARI	14
4.1 Hiper- Fibonacci Sayılarının Maksimum Elemanlı Matrislerde Uygulamaları	14
4.2 Hiper- Fibonacci Sayılarının Minimum Elemanlı Matrislerde Uygulamaları	31
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	44
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ.....	47

YÜKSEK LİSANS TEZİ
HİPER-FİBONACCİ SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM
ELEMANLI MATRİSLERDE UYGULAMALARI

Tuğçe SOLMAZ

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mustafa BAHŞİ

ÖZET

Bu çalışmada, elemanları özel olarak seçilmiş bazı maksimum veya minimum elemanlı matrislerin determinantlarını, terslerini ve Hadamard terslerini hesapladık. İncelediğimiz matrislerin elemanları genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan hiper-Fibonacci sayılarından oluşmuştur.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; amaç ve problem tanıtılmıştır. İkinci bölümde; probleme ait literatür verilmiştir. Üçüncü bölümde; çalışmamız ile ilgili bazı temel kavramlar ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde; maksimumlu veya minimumlu matrislerin determinantları, tersleri ve Hadamard tersleri hesaplanmıştır. Ayrıca, bu bölümde elde edilen sonuçlarla ilgili sayısal örnekler verilmiştir. Beşinci bölümde ise; sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ters, Karakteristik polinom, Determinant, Maksimum ve minimum elemanlı matrisler.

Mayıs, 2019; 47 sayfa

M.Sc. THESIS

**APPLICATIONS OF THE HYPER-FIBONACCI NUMBERS IN MATRICES
WITH MAXIMUM AND MINIMUM ELEMENTS**

Tuğçe SOLMAZ

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa BAHŞİ

ABSTRACT

In this study, we have computed the determinants, inverses and Hadamard inverses of the matrices with maximum or minimum elements. The elements of the matrices which we have been examined have been consisted of hyper fibonacci numbers which are the generalized fibonacci numbers.

This study consists of five sections. In the first section; the purpose and the problem have been introduced. In the second section; it has been given literature on problem. In the third section; some basic concepts and theorems related to our study have been given. In the fourth section; the determinants, inverses and Hadamard inverses of the matrices with maximum or minimum elements have been computed. Also, we have given numerical examples related to obtained results. In the fifth section; conclusions and suggestions were given.

Keywords: Inverse, Characteristic polynomial, Determinant, Matrices with maximum and minimum element.

May, 2019; 47 pages

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Bazı hiper-Fibonacci sayıları	6
--	---



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$ A $	A matrisinin determinantı
A^{-1}	A matrisinin tersi
F_n	n . Fibonacci sayısı
$F_n^{(r)}$	n . hiper-Fibonacci sayısı
$\{F_n^{(r)}\}$	Hiper-Fibonacci sayı dizisi
$A \circ B$	A ve B matrislerinin Hadamard çarpımı
$\ A\ _2$	A matrisinin spektral normu
$A^{\circ-1}$	A matrisinin Hadamard tersi

1. GİRİŞ

İnsanoğlu varoluşundan bu yana çevresinde olup bitenleri anlamaya uğraşmaktadır. Bu uğraş sonucunda matematik bilimi ortaya çıkıp gelişmiştir. Matematiğin alfabesi olan sayılar, insanoğlunun zihninde var olan matematiksel düşüncenin ortaya çıkartılmasında ve doğadaki çoklukların sembolleştirilmesinde insanoğluna yardımcı olan ilk unsurlardan biridir. Tarihin seyri içerisinde sayılara olan ilgi artmış ve birçok özel sayı dizisi keşfedilmiştir. Bunlardan birini 1200' lü yıllarda İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci, "Ergin bir tavşan çiftinin (biri erkek biri dişi) her ay yeni bir yavru çift (biri erkek biri dişi) meydana getirdikleri ve yeni doğan bir tavşanın bir ayda erginleştiği, tavşan ölümlerinin olmadığı kuralına göre çoğalan ve başlangıçta bir çift (biri erkek biri dişi) yavru tavşanın bulunduğu bir tavşan nüfusu belli bir ay sonra ne olur?" problemi üzerinde çalışırken keşfetmiştir. Buna göre, herhangi bir aydaki tavşan nüfusu, o aydan önceki iki aydaki tavşan nüfuslarının toplamı şeklinde olmuştur. Yani, tavşan çifti sayıları aylara göre 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... şeklinde olmuştur. Bu sayılar Fibonacci sayıları ve bu sayıların oluşturduğu dizi ise Fibonacci sayı dizisi olarak adlandırılmıştır. Zamanla Fibonacci sayılarına olan ilgi artmış ve bu sayıların; bazı çiçeklerin yaprak sayılarında, ayçekirdeği çekirdeklerinin dizilişinde olduğu gibi doğada birçok yerde bulunduğu tespit edilmiştir. Ayrıca, bu sayıların ardışık terimleri oranının, estetik ve güzellik kriteri olarak kabul edilen altın oranla olan ilişkisi de dikkate değer bir husustur. Fibonacci sayıları üzerine yapılan araştırmalar çoğaldıkça, bu sayılar matrislere eleman olarak taşınmış ve matrislerin bazı özellikleri Fibonacci sayılarına bağlı olarak elde edilmiştir. Dahası, Fibonacci sayılarının farklı türlerdeki genellemeleri de elde edilmiştir. Bu genellemelerden biri de; F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere $F_n^{(0)} = F_n$ ve $F_0^{(r)} = 0$ şartları altında $r \geq 1$

tamsayısı için $F_n^{(r)} = \sum_{k=0}^n F_k^{(r-1)}$ şeklinde tanımlı hiper-Fibonacci sayılarıdır.

Bizim bu tez çalışmasındaki amacımız ise; elemanları, hiper-Fibonacci sayıları olan maksimum elemanlı veya minimum elemanlı matrislerin bazı özelliklerini incelemektir.

1.1 Problemin Tanıtımı

Elemanları hiper-Fibonacci sayılarından oluşan maksimum ve minimum elemanlı matrisler,

$$T = \left[F_{k+\max(i,j)-1}^{(r)} \right]_{i,j=1}^n \quad (1.1)$$

$$S = \left[F_k^{(r+\max(i,j)-1)} \right]_{i,j=1}^n \quad (1.2)$$

$$U = \left[F_{k+\min(i,j)-1}^{(r)} \right]_{i,j=1}^n \quad (1.3)$$

$$V = \left[F_k^{(r+\min(i,j)-1)} \right]_{i,j=1}^n \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu çalışmada, yukarıda verdiğimiz T , S , U ve V matrislerinin determinantları, tersleri, Hadamard tersleri gibi özelliklerinin hiper-Fibonacci sayılarına bağlı olarak elde edilip edilemeyeceğini araştıracağız. Bizim bu çalışmamızda ele aldığımız matrisler, literatür özetinde bahsedeceğimiz Akyüz (2017) tarafından hazırlanan yüksek lisans tezinde incelenen $A = \left[F_{k+\max(i,j)-1} \right]_{i,j=1}^n$ ve $B = \left[F_{k+\min(i,j)-1} \right]_{i,j=1}^n$ matrislerinin genel halidir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Bu bölümde, çalışmamızla yakından alakalı daha önce yapılmış çalışmaları özetleyeceğiz.

Catalani (2002), Fibonacci sayıları ile $A=(\min(i, j))$ matrisinin esas minörleri arasındaki ilişkileri incelemiştir.

Bhatia (2006), $A=(\min(i, j))$ şeklinde tanımlı minimum elemanlı matrislerin sonsuz bölünebilirliğini araştırmıştır.

Bhatia (2011), minimum elemanlı ve benzeri matrisleri daha ayrıntılı olarak irdlemiştir.

Fonseca (2007), $x > 0$ ve $x \neq y$ olmak üzere $C=[\min\{xi - y, xj - y\}]_{i,j=1}^n$ matrisinin özdeğerlerini ve tersini hesaplamıştır.

Chu vd., (2011), $A=[a_{\min(i,j)}]_{i,j=1}^n$ matrisinin determinanı ve tersi gibi bazı özellikleri ile ilgili Neudecker vd., (2009) tarafından ortaya atılan problemlere cevap vermişlerdir.

Bahşi ve Solak, (2011), elemanlarını minimum kavramına bağlı olarak tanımladıkları $B_k=(k+\min(i, j)-1)$ matrisinin determinantını, Öklid normunu ve tersi gibi bazı özelliklerini incelemiştir.

Solak ve Bahşi, (2013), elemanlarını maksimum kavramına bağlı olarak tanımladıkları $B_k=(k+\max(i, j)-1)$ matrisinin determinantını, Öklid normunu, tersini ve Hadamard tersini hesaplamışlardır.

Bahşi ve Solak, (2015), elemanlarını $a_{ij}=k+\min(i, j)-1$, $b_{ij}=k+\max(i, j)-1$ ve $k \in R$ şeklinde maksimum ve minimum kavramlarına bağlı olarak tanımladıkları A_k ve B_k matrislerinin karakteristik polinomlarında, değişkene verilen bazı değerler sonucunda genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını elde etmişlerdir.

Petroudi ve Pirouz, (2016), elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan $F=[F_{\min(i,j)+1}]_{i,j=1}^n$ ve e^F matrislerinin determinantlarını, terslerini ve spektral normunu hesaplamışlardır.

Matilla ve Haukkanen, (2016), daha genel olarak tanımladıkları maksimum ve minimum elemanlı matrislerin çarpanlara ayrılışını, pozitif tanımlılığını ve bazı ayrışımalarını incelemişlerdir.

Dil ve Mezö, (2008), hiper-Fibonacci sayılarını $F_n^{(0)} = F_n$ ve $F_0^{(r)} = 0$ şartları altında

r pozitif tamsayısı için $F_n^{(r)} = \sum_{k=0}^n F_k^{(r-1)}$ şeklinde tanımlamışlardır.

Bahşi vd., (2014), hiper-Fibonacci ve hiper-Lucas sayılarının bazı özelliklerini elde etmişlerdir.

Bahşi ve Solak, (2014), bazı sirkülant matrisleri, elemanlarını hiper-Fibonacci ve hiper-Lucas sayılarından oluşacak şekilde tanımlayıp elde ettikleri matrislerin normlarını incelemişlerdir.

Bahşi ve Solak, (2016), hiper-Fibonacci ve hiper-Lucas sayılarının ve bunların daha genel hallerinin altın oran ile olan ilişkisini vermişlerdir.

Akyüz (2017), yüksek lisans tezinde elemanlarını Fibonacci sayılarına bağlı olarak tanımladığı $A = [F_{k+\max(i,j)-1}]_{i,j=1}^n$ ve $B = [F_{k+\min(i,j)-1}]_{i,j=1}^n$ matrislerinin normlarını, terslerini ve Hadamard terslerini incelemiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, çalışmamızla ilgili bazı temel kavramları ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 3.1 Başlangıç değerleri $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (3.1)$$

bağıntısı ile tanımlanan sayılara Fibonacci sayıları, bu sayıların oluşturduğu $\{F_n\}_{n \geq 0}$ sayı dizisine ise Fibonacci sayı dizisi denir (Koshy, 2001).

Fibonacci sayılarının rekürans bağıntısına ait karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ olup, bu denklemin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olarak hesaplanır. α ve β değerlerine göre n . Fibonacci sayısı

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (3.2)$$

şeklinde Binet Formülü ile gösterilebilir (Koshy, 2001). Fibonacci dizisindeki ardışık terimlerin oranı ile altın oran arasında,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (3.3)$$

ilişkisi mevcuttur (Koshy, 2001). Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ değeri altın oran olarak bilinir.

Fibonacci sayılarının birçok genellemesi mevcuttur. Bunlardan biri de hiper-Fibonacci sayıları şeklinde Dil ve Mezö tarafından yapılan genellemedir. Bu genelleme şu aşağıdaki tanım ile verilmiştir.

Tanım 3.2 $F_n^{(0)} = F_n$ ve $F_0^{(r)} = 0$ şartları altında r pozitif tamsayısı için

$F_n^{(r)} = \sum_{k=0}^n F_k^{(r-1)}$ ile verilen $F_n^{(r)}$ sayısına r . mertebeden n . hiper-Fibonacci sayısı denir

(Dil ve Mezö, 2008).

Aşağıdaki tabloda bazı hiper-Fibonacci sayıları verilmiştir.

Çizelge 3.1. Bazı hiper-Fibonacci sayıları.

$F_n^{(r)}$ \ r	0	1	2	3	4	5	6	7
$F_0^{(r)}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$F_1^{(r)}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$F_2^{(r)}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_3^{(r)}$	2	4	7	11	16	22	29	37
$F_4^{(r)}$	3	7	14	25	41	63	92	129
$F_5^{(r)}$	5	12	26	51	92	155	247	376
$F_6^{(r)}$	8	20	46	97	189	344	591	967
$F_7^{(r)}$	13	33	79	176	365	709	1300	2267

Hiper-Fibonacci sayı dizisi $F_n^{(r)} = F_{n-1}^{(r)} + F_n^{(r-1)}$ şeklinde rekürans bağıntısına sahip olup üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)} t^n = \frac{t}{(1-t-t^2)(1-t)^r} \quad (3.4)$$

şeklindedir (Dil ve Mezö, 2008). Ayrıca, $r=1$ ve $r=2$ için,

$$F_n^{(1)} = F_{n+2} - 1 \quad (3.5)$$

ve

$$F_n^{(2)} = F_{n+4} - n - 3 \quad (3.6)$$

olup

$$F_n^{(1)} = 0, 1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, \dots \quad (3.7)$$

ve

$$F_n^{(2)} = 0, 1, 3, 7, 14, 26, 46, \dots \quad (3.8)$$

değerleri elde edilir.

Hiper-Fibonacci sayıları ve altın oran arasında ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n^{(r)}}{F_{n-1}^{(r)}} = \alpha, \quad (3.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n^{(r-1)}}{F_{n-1}^{(r)}} = \alpha - 1, \quad (3.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}^{(r)}}{F_n^{(r-1)}} = \alpha \quad (3.11)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n^{(r)}}{F_n^{(r-1)}} = 1 + \alpha \quad (3.12)$$

bağıntıları mevcuttur (Bahşi ve Solak, 2016).

Fibonacci sayılarının Horadam sayılarına genellemesine benzer şekilde hiper-Fibonacci sayıları da $W_n^{(0)} = W_n$ ve $W_0^{(r)} = a$ şartları ile, $W_n^{(r)} = W_{n-1}^{(r)} + W_n^{(r-1)}$ şeklinde hiper-Horadam sayılarına genelleştirilebilir (Bahşi vd., 2014).

Tanım 3.3 $m \times n$ tipindeki $T = (t_{ij})$ ve $S = (s_{ij})$ matrislerinin Hadamard çarpımı,

$$T \circ S = (t_{ij} \cdot s_{ij}) \quad (3.13)$$

olarak tanımlanır (Horn ve Johnson, 1991).

$k_1(T) = \max_{1 \leq i \leq m} \sqrt{\sum_{j=1}^n |t_{ij}|^2}$ maksimum satır normu ve $m_1(S) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^m |s_{ij}|^2}$ maksimum

sütun normu olmak üzere, Hadamard çarpımın spektral normu ile $k_1(T)$ ve $m_1(S)$ çarpımı arasında,

$$\|T \circ S\|_2 \leq k_1(T) m_1(S) \quad (3.14)$$

eşitsizliği vardır (Horn ve Johnson, 1991).

Tanım 3.4 $t_{ij} \neq 0$ olmak üzere, $T = (t_{ij})_{m \times n}$ matrisinin Hadamard tersi,

$$T^{\circ-1} = \left(\frac{1}{t_{ij}} \right)_{m \times n} \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlanır (Horn ve Johnson, 1991).

Tanım 3.5 Herhangi bir T matrisinin spektral normu, $\|T\|_2 = \{\lambda : \lambda, T^H T \text{ matrisinin mutlak değerce en büyük öz değerinin karekökü}\}$ olarak tanımlanır (Horn ve Johnson, 1991).

Tanım 3.6 Elemanları maksimum veya minimum kavramlarına bağlı olarak tanımlanan matrislere maksimum elemanlı veya minimum elemanlı matrisler denir (Akyüz, 2017).

Literatürde farklı türlerde tanımlanmış maksimum elemanlı veya minimum elemanlı matrislerle karşılaşabiliriz.

$$A = [F_{k+\max(i,j)-1}]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \\ F_{k+1} & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \\ F_{k+2} & F_{k+2} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{k+n-1} & F_{k+n-1} & F_{k+n-1} & \cdots & F_{k+n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

$$B = [F_{k+\min(i,j)-1}]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} F_k & F_k & F_k & \cdots & F_k \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+1} & \cdots & F_{k+1} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$C_k = [k + \max(i, j) - 1]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} k & k+1 & k+2 & \cdots & k+n-1 \\ k+1 & k+1 & k+2 & \cdots & k+n-1 \\ k+2 & k+2 & k+2 & \cdots & k+n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k+n-1 & k+n-1 & k+n-1 & \cdots & k+n-1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

ve

$$D_k = [k + \min(i, j) - 1]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} k & k & k & \dots & k \\ k & k+1 & k+1 & \dots & k+1 \\ k & k+1 & k+2 & \dots & k+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k+1 & k+2 & \dots & k+n-1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

matrisleri maksimum elemanlı veya minimum elemanlı matrislere örnek olarak verilebilir. (3.16) ve (3.17) ile verilen A ve B matrislerinin elemanlarının Fibonacci sayıları olduğuna ilgi çekelim.

Teorem 3.1 $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_n$ olacak şekilde z_i reel sayılarından oluşan sonlu bir

$M = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ kümesinde tanımlanan maksimumlu ve minimumlu matrisler;

$$[M]_{\max} = \max(z_i, z_j) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \\ z_2 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \\ z_3 & z_3 & z_3 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n & z_n & z_n & \dots & z_n \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

ile

$$(M)_{\min} = \min(z_i, z_j) = \begin{bmatrix} z_1 & z_1 & z_1 & \dots & z_1 \\ z_1 & z_2 & z_2 & \dots & z_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

olsun. Bu durumda, $[M]_{\max}$ ve $(M)_{\min}$ matrisleri $n \geq 2$ için

$$[M]_{\max} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 - z_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 - z_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$(M)_{\min} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 - z_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n - z_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

şeklinde matris çarpanlarına ayrılır (Mattila ve Haukkanen, 2016).

Teorem 3.2 $[M]_{\max}$ ve $(M)_{\min}$ matrislerinin determinantları sırasıyla,

$$\det[M]_{\max} = (z_1 - z_2)(z_2 - z_3) \cdots (z_{n-1} - z_n)z_n \quad (3.24)$$

ve

$$\det(M)_{\min} = z_1(z_2 - z_1)(z_3 - z_2) \cdots (z_n - z_{n-1}) \quad (3.25)$$

şeklindedir (Mattila ve Haukkanen, 2016).

Teorem 3.3 $M = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ kümesinin elemanları birbirinden farklı olsun. Eğer $z_n \neq 0$ ise $[M]_{\max}$ matrisinin tersi var ve bu tersin elemanları

$$\begin{cases} 0 & |i - j| > 1 \\ \frac{1}{z_1 - z_2}, & i = j = 1 \\ \frac{1}{z_{i-1} - z_i} + \frac{1}{z_i - z_{i+1}}, & 1 < i = j < n \\ \frac{1}{|z_i - z_j|}, & |i - j| = 1 \\ \frac{1}{z_{n-1} - z_n} + \frac{1}{z_n}, & i = j = n \end{cases} \quad (3.26)$$

şeklinde ve eğer $z_1 \neq 0$ ise $(M)_{\min}$ matrisinin tersi var ve bu tersin elemanları ise

$$A = \begin{cases} 0 & |i-j| > 1 \\ \frac{z_2}{z_1(z_2 - z_1)}, & i = j = 1 \\ \frac{1}{z_i - z_{i-1}} + \frac{1}{z_{i+1} - z_i}, & 1 < i = j < n \\ \frac{-1}{|z_i - z_j|}, & |i-j| = 1 \\ \frac{1}{z_n - z_{n-1}}, & i = j = n \end{cases} \quad (3.27)$$

şeklindedir (Mattila ve Haukkanen, 2016).

Teorem 3.4 (3.16) ile verilen A matrisinin $k > 0$ ve $n \geq 2$ için tersi,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k - F_{k+1}} & -\frac{1}{F_k - F_{k+1}} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{F_k - F_{k+1}} & \frac{1}{F_k - F_{k+1}} + \frac{1}{F_{k+1} - F_{k+2}} & -\frac{1}{F_{k+1} - F_{k+2}} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{F_{k+1} - F_{k+2}} & \frac{1}{F_{k+1} - F_{k+2}} + \frac{1}{F_{k+2} - F_{k+3}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{F_{k+n-2} - F_{k+n-1}} + \frac{1}{F_{k+n-1}} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

şeklindedir (Akyüz, 2017).

Teorem 3.5 (3.16) ile verilen A matrisinin $k > 0$ ve $n \geq 2$ için determinanı,

$$|A| = (-1)^{n+1} F_{k+n-1} \prod_{i=0}^{n-2} F_{k+i-1} \quad (3.29)$$

olur (Akyüz, 2017).

Teorem 3.6 (3.16) ile verilen A matrisinin spektral normu için,

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{nF_{k+n-1}^2((n-1)F_{k+n-1}^2 + 1)} \quad (3.30)$$

eşitsizliği mevcuttur (Akyüz, 2017).

Teorem 3.7 $k > 0$ olmak üzere (3.17) ile verilen B matrisinin Hadamard tersinin determinanı,

$$|B^{0-1}| = (-1)^{n+1} \frac{F_{k-1}}{F_{k+n-2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{F_{k+i-1}} \quad (3.31)$$

şeklindedir (Akyüz, 2017).

Teorem 3.8 $k > 0$ olmak üzere (3.17) ile verilen B matrisinin Hadamard tersinin tersi,

$$(B^{0-1})^{-1} = \begin{bmatrix} F_k \frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & \frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & -\frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} + \frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & \frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & \frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} + \frac{F_{k+2} F_{k+3}}{F_{k+1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{F_{k+n-1} F_{k+n-2}}{F_{k+n-3}} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

biçimindedir (Akyüz, 2017).

Biz ise tezimizde aşağıda verilen $n \times n$ tipindeki

$$T = \left[F_{k+\max(i,j)-1}^{(r)} \right]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} F_k^{(r)} & F_{k+1}^{(r)} & F_{k+2}^{(r)} & \dots & F_{k+n-1}^{(r)} \\ F_{k+1}^{(r)} & F_{k+1}^{(r)} & F_{k+2}^{(r)} & \dots & F_{k+n-1}^{(r)} \\ F_{k+2}^{(r)} & F_{k+2}^{(r)} & F_{k+2}^{(r)} & \dots & F_{k+n-1}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{k+n-1}^{(r)} & F_{k+n-1}^{(r)} & F_{k+n-1}^{(r)} & \dots & F_{k+n-1}^{(r)} \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

$$S = \left[F_k^{(r+\max(i,j)-1)} \right]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} F_k^{(r)} & F_k^{(r+1)} & F_k^{(r+2)} & \dots & F_k^{(r+n-1)} \\ F_k^{(r+1)} & F_k^{(r+1)} & F_k^{(r+2)} & \dots & F_k^{(r+n-1)} \\ F_k^{(r+2)} & F_k^{(r+2)} & F_k^{(r+2)} & \dots & F_k^{(r+n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_k^{(r+n-1)} & F_k^{(r+n-1)} & F_k^{(r+n-1)} & \dots & F_k^{(r+n-1)} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

$$U = \left[F_{k+\min(i,j)-1}^{(r)} \right]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} F_k^{(r)} & F_k^{(r)} & F_k^{(r)} & \dots & F_k^{(r)} \\ F_k^{(r)} & F_{k+1}^{(r)} & F_{k+1}^{(r)} & \dots & F_{k+1}^{(r)} \\ F_k^{(r)} & F_{k+1}^{(r)} & F_{k+2}^{(r)} & \dots & F_{k+2}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_k^{(r)} & F_{k+1}^{(r)} & F_{k+2}^{(r)} & \dots & F_{k+n-1}^{(r)} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

ve

$$V = \left[F_k^{(r+\min(i,j)-1)} \right]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} F_k^{(r)} & F_k^{(r)} & F_k^{(r)} & \dots & F_k^{(r)} \\ F_k^{(r)} & F_k^{(r+1)} & F_k^{(r+1)} & \dots & F_k^{(r+1)} \\ F_k^{(r)} & F_k^{(r+1)} & F_k^{(r+2)} & \dots & F_k^{(r+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_k^{(r)} & F_k^{(r+1)} & F_k^{(r+2)} & \dots & F_k^{(r+n-1)} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

matrislerinin determinant, karakteristik polinom ve ters gibi özelliklerini araştırdık. Tezimizin bundan sonraki bölümlerinde bahsi geçen T, S, U ve V matrisleri (3.33), (3.34), (3.35) ve (3.36) ile verilen matrisler olup bu durum her defasında tekrar tekrar belirtilmeyecektir.

4. HİPER-FİBONACCİ SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM ELEMANLI MATRİSLERDE UYGULAMALARI

Bu bölümde hiper-Fibonacci sayılarının eleman olarak kullanıldığı maksimum ve minimum elemanlı matrisler için bulduğumuz sonuçlar verilmiştir. Öncelikle belirtelim ki, determinant ve matris tersleri ile ilgili bulduğumuz sonuçlar Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 direkt sonucu olarak yazılabilir. Ayrıca, çalışmamızdaki k ve r değerleri pozitif reel sayılardır.

4.1 Fibonacci Sayılarının Maksimum Elemanlı Matrislerde Uygulamaları

Teorem 4.1.1 $p_T(n, \lambda)$; T matrisinin karakteristik polinomu olmak üzere $n \geq 2$ için,

$$p_T(n, \lambda) = (\lambda - F_{k+n-1}^{(r)})q_T(n-1, \lambda) - \lambda^2 q_T(n-2, \lambda) \quad (4.1)$$

olacak şekilde $q_T(0, \lambda) = 1$, $q_T(1, \lambda) = 2\lambda + F_{k+1}^{(r-1)}$ başlangıç şartları altında

$$q_T(n, \lambda) = (2\lambda + F_{k+n}^{(r-1)})q_T(n-1, \lambda) - \lambda^2 q_T(n-2, \lambda) \quad (4.2)$$

indirgeme bağıntısına sahip $q_T(n, \lambda)$ polinomu vardır.

İspat.

$$p_T(n, \lambda) = |\lambda I - T| = \begin{vmatrix} \lambda - F_k^{(r)} & -F_{k+1}^{(r)} & -F_{k+2}^{(r)} & \cdots & -F_{k+n-1}^{(r)} \\ -F_{k+1}^{(r)} & \lambda - F_{k+1}^{(r)} & -F_{k+2}^{(r)} & \cdots & -F_{k+n-1}^{(r)} \\ -F_{k+2}^{(r)} & -F_{k+2}^{(r)} & \lambda - F_{k+2}^{(r)} & \cdots & -F_{k+n-1}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -F_{k+n-1}^{(r)} & -F_{k+n-1}^{(r)} & -F_{k+n-1}^{(r)} & \cdots & \lambda - F_{k+n-1}^{(r)} \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

olup, sırasıyla $i = 1, 2, \dots, n-1$ için $(i+1)$. satır i . satırdan çıkartıldığında

$$p_T(n, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + F_{k+1}^{(r-1)} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ F_{k+2}^{(r-1)} & \lambda + F_{k+2}^{(r-1)} & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ F_{k+3}^{(r-1)} & F_{k+3}^{(r-1)} & \lambda + F_{k+3}^{(r-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{k+n-1}^{(r-1)} & F_{k+n-1}^{(r-1)} & F_{k+n-1}^{(r-1)} & \cdots & \lambda + F_{k+n-1}^{(r-1)} & -\lambda \\ -F_{k+n-1}^{(r)} & -F_{k+n-1}^{(r)} & -F_{k+n-1}^{(r)} & \cdots & -F_{k+n-1}^{(r)} & \lambda - F_{k+n-1}^{(r)} \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

elde edilir. Şimdi de elde ettiğimiz bu son determinanтта sırasıyla $i=1,2,\dots,n-1$ için $(i+1)$. sütun i . sütundan çıkartılır ve determinanţın özellikleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
p_T(n, \lambda) &= \begin{vmatrix} 2\lambda + F_{k+1}^{(r-1)} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda + F_{k+2}^{(r-1)} & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda + F_{k+3}^{(r-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\lambda + F_{k+n-1}^{(r-1)} & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & \lambda - F_{k+n-1}^{(r)} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2\lambda + F_{k+1}^{(r-1)} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda + F_{k+2}^{(r-1)} & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda + F_{k+3}^{(r-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\lambda + F_{k+n-1}^{(r-1)} & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 2\lambda + F_{k+n}^{(r-1)} \end{vmatrix} \\
&\quad - \begin{vmatrix} 2\lambda + F_{k+1}^{(r-1)} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda + F_{k+2}^{(r-1)} & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda + F_{k+3}^{(r-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\lambda + F_{k+n-1}^{(r-1)} & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda + F_{k+n}^{(r)} \end{vmatrix} \quad (4.5)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitliğin sağ tarafındaki ilk determinanţı $q_T(n, \lambda)$ olarak seçersek,

$$q_T(n, \lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda + F_{k+1}^{(r-1)} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda + F_{k+2}^{(r-1)} & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda + F_{k+3}^{(r-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\lambda + F_{k+n-1}^{(r-1)} & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 2\lambda + F_{k+n}^{(r-1)} \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

olduğundan, $q_T(1, \lambda) = 2\lambda + F_{k+1}^{(r-1)}$ olup son satıra göre determinanţı hesaplırsak

$q_T(0, \lambda) = 1$ şartı altında $n \geq 2$ için

$$q_T(n, \lambda) = (2\lambda + F_{k+n}^{(r-1)})q_T(n-1, \lambda) - \lambda^2 q_T(n-2, \lambda) \quad (4.7)$$

ifadesini elde ederiz. O halde, (4.5), (4.6) ve (4.7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} p_T(n, \lambda) &= q_T(n, \lambda) - (\lambda + F_{k+n}^{(r)}) q_T(n-1, \lambda) \\ &= (\lambda - F_{k+n-1}^{(r)}) q_T(n-1, \lambda) - \lambda^2 q_T(n-2, \lambda) \end{aligned} \quad (4.8)$$

eşitliğini elde ederiz.

Teorem 4.1.2 $p_S(n, \lambda)$; S matrisinin karakteristik polinomu olmak üzere $n \geq 2$ için,

$$p_S(n, \lambda) = (\lambda - F_k^{(r+n-1)}) q_S(n-1, \lambda) - \lambda^2 q_S(n-2, \lambda) \quad (4.9)$$

olacak şekilde $q_S(0, \lambda) = 1$, $q_S(1, \lambda) = 2\lambda + F_{k-1}^{(r+1)}$ başlangıç şartları altında

$$q_S(n, \lambda) = (2\lambda + F_{k-1}^{(r+n)}) q_S(n-1, \lambda) - \lambda^2 q_S(n-2, \lambda) \quad (4.10)$$

indirgeme bağıntısına sahip $q_S(n, \lambda)$ polinomu vardır.

İspat. Teorem 4.1.1' in ispatındaki yöntem izlenerek istenilen elde edilir.

Teorem 4.1.3 S matrisinin determinanı

$$|S| = F_k^{(r+n-1)} (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} F_{k-1}^{(r+i)} \quad (4.11)$$

biçimindedir.

İspat. S matrisinin karakteristik polinomunu

$$p_S(n, \lambda) = |\lambda I - S| = \lambda^n + s_1 \lambda^{n-1} + s_2 \lambda^{n-2} + \dots + s_{n-1} \lambda + s_n \quad (4.12)$$

olarak ele alalım. Bu durumda, $\lambda = 0$ için $p_S(n, 0) = s_n$ olup, S matrisinin determinanı, karakteristik polinomunun sabit terimine bağlı olarak

$$|S| = (-1)^n s_n = (-1)^n p_S(n, 0) \quad (4.13)$$

şeklinde yazılır. Ayrıca (4.9) ve (4.10) eşitlikleri bize

$$p_s(n,0) = -F_k^{(r+n-1)} q_s(n-1,0) \quad (4.14)$$

ve

$$q_s(n-1,0) = F_{k-1}^{(r+n-1)} q_s(n-2,0) = \dots = F_{k-1}^{(r+n-1)} F_{k-1}^{(r+n-2)} \dots F_{k-1}^{(r+2)} F_{k-1}^{(r+1)} \quad (4.15)$$

bağıntılarını verir. (4.13), (4.14) ve (4.15) eşitliklerinden

$$|S| = F_k^{(r+n-1)} (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} F_{k-1}^{(r+i)} \quad (4.16)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4 T matrisinin determinanı için

$$|T| = F_{k+n-1}^{(r)} (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} F_{k+i}^{(r-1)} \quad (4.17)$$

eşitliği yazılır.

İspat. Teorem 4.1.3' ün ispatındaki yöntem izlenerek istenilen elde edilir.

Teorem 4.1.5 T matrisinin tersi

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} - \frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} & \frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} & -\frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} - \frac{1}{F_{k+3}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{F_{k+n-2}^{(r-1)}} - \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} + \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

şeklindedir.

İspat. (3.22)' de verilen denklem göz önüne alındığında

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_k^{(r)} - F_{k+1}^{(r)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_{k+1}^{(r)} - F_{k+2}^{(r)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_{k+n-1}^{(r)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

olur. Buradan, $F_n^{(r)} = F_{n-1}^{(r)} + F_n^{(r-1)}$ bağıntısı göz önüne alınarak işlemler yapılırsa,

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{F_{k+3}^{(r-1)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} - \frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} & \frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} & -\frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} - \frac{1}{F_{k+3}^{(r-1)}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{F_{k+n-2}^{(r-1)}} - \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} + \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

matrisi bulunur. Bu matrisin (i, j) . elemanı

$$\begin{cases} 0 & |i-j| > n \\ -\frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & i=j=1 \\ -\frac{1}{F_{k+i-1}^{(r-1)}} - \frac{1}{F_{k+i}^{(r-1)}} & 1 < i=j < n \\ \frac{1}{|F_{k+i-1}^{(r)} - F_{k+j-1}^{(r)}|} & |i-j|=1 \\ -\frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} + \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} & i=j=n \end{cases} \quad (4.21)$$

şeklinde verilebilir.

Teorem 4.1.6 S matrisinin tersi için

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{F_{k-1}^{(r+1)}} & \frac{1}{F_{k-1}^{(r+1)}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{F_{k-1}^{(r+1)}} & -\frac{1}{F_{k-1}^{(r+1)}} - \frac{1}{F_{k-1}^{(r+2)}} & \frac{1}{F_{k-1}^{(r+2)}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k-1}^{(r+2)}} & -\frac{1}{F_{k-1}^{(r+2)}} - \frac{1}{F_{k-1}^{(r+3)}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{F_{k-1}^{(r+n-2)}} - \frac{1}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} & \frac{1}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} & -\frac{1}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} + \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

yazılır.

İspat. Teorem 4.1.5' in ispatındaki yöntem izlenerek istenilen elde edilir.

Teorem 4.1.7 S matrisinin spektral normu için

$$\|S\|_2 \leq \sqrt{n(F_k^{(r+n-1)})^2 \left((n-1)(F_k^{(r+n-1)})^2 + 1 \right)} \quad (4.23)$$

ifadesi geçerlidir.

İspat. S matrisi iki matrisin Hadamard çarpımı olarak,

$$S = \begin{bmatrix} F_k^{(r)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ F_k^{(r+1)} & F_k^{(r+1)} & 1 & \cdots & 1 \\ F_k^{(r+2)} & F_k^{(r+2)} & F_k^{(r+2)} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_k^{(r+n-1)} & F_k^{(r+n-1)} & F_k^{(r+n-1)} & \cdots & F_k^{(r+n-1)} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & F_k^{(r+1)} & F_k^{(r+2)} & \cdots & F_k^{(r+n-1)} \\ 1 & 1 & F_k^{(r+2)} & \cdots & F_k^{(r+n-1)} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & F_k^{(r+n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$= S_1 \circ S_2$

şeklinde yazılsın. S_1 ve S_2 matrislerinin sırasıyla maksimum satır normu ve maksimum sütun normu

$$k_1(S_1) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |s_{1ij}|^2} = \sqrt{n(F_k^{(r+n-1)})^2} \quad (4.25)$$

$$m_1(S_2) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |s_{2ij}|^2} = \sqrt{(n-1)(F_k^{(r+n-1)})^2 + 1} \quad (4.26)$$

olduğundan (3.14)' teki ifadeye göre

$$\|S\|_2 = \|S_1 \circ S_2\|_2 \leq k_1(S_1)m_1(S_2) \quad (4.27)$$

ve buradan da

$$\|S\|_2 \leq \sqrt{n(F_k^{(r+n-1)})^2 \left((n-1)(F_k^{(r+n-1)})^2 + 1 \right)} \quad (4.28)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.8 $\|T\|_2$, T matrisinin spektral normu olmak üzere

$$\|T\|_2 \leq \sqrt{n(F_{k+n-1}^{(r)})^2 \left((n-1)(F_{k+n-1}^{(r)})^2 + 1 \right)} \quad (4.29)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 4.1.7' nin ispatındaki yöntem izlenerek istenilen elde edilir.

Teorem 4.1.9 $|T^{0-1}|$, T matrisinin Hadamard tersinin determinantı olmak üzere;

$$|T^{0-1}| = \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{F_{k+i}^{(r-1)}}{F_{k+i}^{(r)} F_{k+i-1}^{(r)}} \quad (4.30)$$

ifadesi geçerlidir.

İspat.

$$|T^{0-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{F_k^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+1}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+2}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \\ \frac{1}{F_{k+1}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+1}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+2}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \\ \frac{1}{F_{k+2}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+2}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+2}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \end{vmatrix} \quad (4.31)$$

determinantında sırasıyla $i = 1, 2, \dots, n-1$ için $(i+1)$. satır i . satırdan çıkartıldığında

$$|T^{o-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{F_k^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+1}^{(r)}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{F_{k+1}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+2}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+1}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+2}^{(r)}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{F_{k+2}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+3}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+2}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+3}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+2}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+3}^{(r)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} & \dots & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \end{vmatrix} \quad (4.32)$$

eşitliği bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} |T^{o-1}| &= \left(\frac{1}{F_k^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+1}^{(r)}} \right) \left(\frac{1}{F_{k+1}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+2}^{(r)}} \right) \left(\frac{1}{F_{k+2}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+3}^{(r)}} \right) \dots \left(\frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \right) \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \\ &= \frac{F_{k+1}^{(r)} - F_k^{(r)}}{F_k^{(r)} F_{k+1}^{(r)}} \frac{F_{k+2}^{(r)} - F_{k+1}^{(r)}}{F_{k+1}^{(r)} F_{k+2}^{(r)}} \dots \frac{F_{k+n-1}^{(r)} - F_{k+n-2}^{(r)}}{F_{k+n-2}^{(r)} F_{k+n-1}^{(r)}} \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \\ &= \frac{F_{k+1}^{(r-1)}}{F_k^{(r)} F_{k+1}^{(r)}} \frac{F_{k+2}^{(r-1)}}{F_{k+1}^{(r)} F_{k+2}^{(r)}} \dots \frac{F_{k+n-1}^{(r-1)}}{F_{k+n-2}^{(r)} F_{k+n-1}^{(r)}} \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \\ &= \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{F_{k+i}^{(r-1)}}{F_{k+i}^{(r)} F_{k+i-1}^{(r)}} \end{aligned} \quad (4.33)$$

şeklinde istenilen elde edilir.

Teorem 4.1.10 $|S^{o-1}|$, S matrisinin Hadamard tersinin determinantı olmak üzere;

$$|S^{o-1}| = \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{F_{k-1}^{(r+i)}}{F_k^{(r+i)} F_k^{(r+i-1)}} \quad (4.34)$$

ifadesi geçerlidir.

İspat. Teorem 4.1.9' un ispatındaki yöntem izlenerek istenilen elde edilir.

Teorem 4.1.11 S matrisinin Hadamard tersinin tersi

$$\begin{bmatrix}
\frac{F_k^{(r)} F_k^{(r+1)}}{F_{k-1}^{(r+1)}} & \frac{F_k^{(r)} F_k^{(r+1)}}{F_{k-1}^{(r+1)}} & \dots & 0 & 0 \\
\frac{F_k^{(r)} F_k^{(r+1)}}{F_{k-1}^{(r+1)}} & \frac{F_k^{(r)} F_k^{(r+1)}}{F_{k-1}^{(r+1)}} + \frac{F_k^{(r+1)} F_k^{(r+2)}}{F_{k-1}^{(r+2)}} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \frac{F_k^{(r+n-3)} F_k^{(r+n-2)}}{F_{k-1}^{(r+n-2)}} + \frac{F_k^{(r+n-2)} F_k^{(r+n-1)}}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} & \frac{F_k^{(r+n-2)} F_k^{(r+n-1)}}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} \\
0 & 0 & \dots & \frac{F_k^{(r+n-2)} F_k^{(r+n-1)}}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} & F_k^{(r+n-1)} + \frac{F_k^{(r+n-2)} F_k^{(r+n-1)}}{F_{k-1}^{(r+n-1)}}
\end{bmatrix} \quad (4.35)$$

biçiminde üçlü band matrisidir.

İspat.

$$S_1 = \begin{bmatrix}
\frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & \dots & \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} \\
\frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & \frac{1}{F_k^{(r+n-2)}} & \dots & \frac{1}{F_k^{(r+n-2)}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & \frac{1}{F_k^{(r+n-2)}} & \dots & \frac{1}{F_k^{(r)}}
\end{bmatrix} \quad (4.36)$$

matrisi için

$$I_1 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 1 & \dots & 0 \\
1 & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix} \quad (4.37)$$

olmak üzere

$$I_1 S_1 I_1 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 1 & \dots & 0 \\
1 & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
\frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & \dots & \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} \\
\frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & \frac{1}{F_k^{(r+n-2)}} & \dots & \frac{1}{F_k^{(r+n-2)}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & \frac{1}{F_k^{(r+n-2)}} & \dots & \frac{1}{F_k^{(r)}}
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 1 & \dots & 0 \\
1 & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k^{(r)}} & \frac{1}{F_k^{(r+1)}} & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} \\ \frac{1}{F_k^{(r+1)}} & \frac{1}{F_k^{(r+1)}} & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} \end{bmatrix} = S^{o-1} \quad (4.38)$$

olur. (3.23) eşitliğine göre

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_k^{(r+n-2)}} - \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r)}} - \frac{1}{F_k^{(r+1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

olup, (4.38) ve (4.39)' dan

$$S^{o-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_k^{(r+n-2)}} - \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r)}} - \frac{1}{F_k^{(r+1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_k^{(r+n-2)}} - \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r)}} - \frac{1}{F_k^{(r+1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının tersi alınır ve matris çarpımı yapılırsa

$$(S^{o-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k^{(r+n-1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{F_k^{(r+n-2)}} - \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r)}} - \frac{1}{F_k^{(r+1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{F_k^{(r)} F_k^{(r+1)}}{F_{k-1}^{(r+1)}} & \frac{F_k^{(r)} F_k^{(r+1)}}{F_{k-1}^{(r+1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{F_k^{(r)} F_k^{(r+1)}}{F_{k-1}^{(r+1)}} & \frac{F_k^{(r)} F_k^{(r+1)}}{F_{k-1}^{(r+1)}} + \frac{F_k^{(r+1)} F_k^{(r+2)}}{F_{k-1}^{(r+2)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{F_k^{(r+n-3)} F_k^{(r+n-2)}}{F_{k-1}^{(r+n-2)}} + \frac{F_k^{(r+n-2)} F_k^{(r+n-1)}}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} & \frac{F_k^{(r+n-2)} F_k^{(r+n-1)}}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{F_k^{(r+n-2)} F_k^{(r+n-1)}}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} & F_k^{(r+n-1)} + \frac{F_k^{(r+n-2)} F_k^{(r+n-1)}}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

olur ki istenen elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.12 T matrisinin Hadamard tersinin tersi

$$\begin{bmatrix} \frac{F_k^{(r)} F_{k+1}^{(r)}}{F_{k+1}^{(r-1)}} & -\frac{F_k^{(r)} F_{k+1}^{(r)}}{F_{k+1}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{F_k^{(r)} F_{k+1}^{(r)}}{F_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{F_k^{(r)} F_{k+1}^{(r)}}{F_{k+1}^{(r-1)}} + \frac{F_{k+1}^{(r)} F_{k+2}^{(r)}}{F_{k+2}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{F_{k+n-3}^{(r)} F_{k+n-2}^{(r)}}{F_{k+n-2}^{(r-1)}} + \frac{F_{k+n-2}^{(r)} F_{k+n-1}^{(r)}}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & \frac{F_{k+n-2}^{(r)} F_{k+n-1}^{(r)}}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{F_{k+n-2}^{(r)} F_{k+n-1}^{(r)}}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & F_{k+n-1}^{(r)} + \frac{F_{k+n-2}^{(r)} F_{k+n-1}^{(r)}}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

biçiminde üçlü band matrisidir.

İspat. Teorem 4.1.11' in ispatındaki yöntem izlenerek istenilen elde edilir.

Şimdi $n=5$, $k=2$ ve $r=3$ değerleri için T ve S matrisleri için elde ettiğimiz sayısal sonuçları verelim.

Örnek 4.1.1 $n=5$, $k=2$ ve $r=3$ değerleri için T matrisi

$$T = \begin{bmatrix} F_2^{(3)} & F_3^{(3)} & F_4^{(3)} & F_5^{(3)} & F_6^{(3)} \\ F_3^{(3)} & F_3^{(3)} & F_4^{(3)} & F_5^{(3)} & F_6^{(3)} \\ F_4^{(3)} & F_4^{(3)} & F_4^{(3)} & F_5^{(3)} & F_6^{(3)} \\ F_5^{(3)} & F_5^{(3)} & F_5^{(3)} & F_5^{(3)} & F_6^{(3)} \\ F_6^{(3)} & F_6^{(3)} & F_6^{(3)} & F_6^{(3)} & F_6^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 25 & 51 & 97 \\ 11 & 11 & 25 & 51 & 97 \\ 25 & 25 & 25 & 51 & 97 \\ 51 & 51 & 51 & 51 & 97 \\ 97 & 97 & 97 & 97 & 97 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

olup T matrisinin determinantı;

$$|T| = F_6^{(3)} (-1)^4 \prod_{i=1}^4 F_{2+i}^{(2)} = 97 \cdot [F_3^{(2)} F_4^{(2)} F_5^{(2)} F_6^{(2)}] = 97 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 46 \cdot 26 = 11369176 \quad (4.44)$$

T matrisinin tersi;

$$\begin{aligned}
T^{-1} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{F_3^{(2)}} & \frac{1}{F_3^{(2)}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{F_3^{(2)}} & -\frac{1}{F_3^{(2)}} - \frac{1}{F_4^{(2)}} & \frac{1}{F_4^{(2)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_4^{(2)}} & -\frac{1}{F_4^{(2)}} - \frac{1}{F_5^{(2)}} & \frac{1}{F_5^{(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F_5^{(2)}} & -\frac{1}{F_5^{(2)}} - \frac{1}{F_6^{(2)}} & \frac{1}{F_6^{(2)}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{F_6^{(2)}} & -\frac{1}{F_6^{(2)}} + \frac{1}{F_6^{(3)}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} - \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} - \frac{1}{26} & \frac{1}{26} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{26} & -\frac{1}{26} - \frac{1}{46} & \frac{1}{46} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{46} & -\frac{1}{46} + \frac{1}{97} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{14} & -\frac{40}{364} & \frac{1}{26} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{26} & -\frac{72}{1196} & \frac{1}{46} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{46} & -\frac{51}{4462} \end{bmatrix}, \tag{4.45}
\end{aligned}$$

T matrisinin Hadamard tersinin determinanı;

$$\begin{aligned}
|T^{o-1}| &= \frac{1}{F_6^{(3)}} \prod_{i=1}^4 \frac{F_{2+i}^{(2)}}{F_{2+i}^{(3)} F_{1+i}^{(3)}} \\
&= \frac{1}{F_6^{(3)}} \cdot \frac{F_3^{(2)}}{F_3^{(3)} F_2^{(3)}} \cdot \frac{F_4^{(2)}}{F_4^{(3)} F_3^{(3)}} \cdot \frac{F_5^{(2)}}{F_5^{(3)} F_4^{(3)}} \cdot \frac{F_6^{(2)}}{F_6^{(3)} F_5^{(3)}} \\
&= \frac{1}{97} \frac{7}{11.4} \frac{14}{25.11} \frac{26}{51.25} \frac{46}{97.51} \\
&= \frac{117208}{740302472300}, \tag{4.46}
\end{aligned}$$

T matrisinin Hadamard tersinin tersi;

$$(T^{o-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{F_2^{(3)}F_3^{(3)}}{F_3^{(2)}} & -\frac{F_2^{(3)}F_3^{(3)}}{F_3^{(2)}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{F_2^{(3)}F_3^{(3)}}{F_3^{(2)}} & \frac{F_2^{(3)}F_3^{(3)}}{F_3^{(2)}} + \frac{F_3^{(3)}F_4^{(3)}}{F_4^{(2)}} & \frac{F_3^{(3)}F_4^{(3)}}{F_4^{(2)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_3^{(3)}F_4^{(3)}}{F_4^{(2)}} & \frac{F_3^{(3)}F_4^{(3)}}{F_4^{(2)}} + \frac{F_4^{(3)}F_5^{(3)}}{F_5^{(2)}} & \frac{F_4^{(3)}F_5^{(3)}}{F_5^{(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_4^{(3)}F_5^{(3)}}{F_5^{(2)}} & \frac{F_4^{(3)}F_5^{(3)}}{F_5^{(2)}} + \frac{F_5^{(3)}F_6^{(3)}}{F_6^{(2)}} & -\frac{F_5^{(3)}F_6^{(3)}}{F_6^{(2)}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{F_5^{(3)}F_6^{(3)}}{F_6^{(2)}} & F_6^{(3)} + \frac{F_5^{(3)}F_6^{(3)}}{F_6^{(2)}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4.11}{7} & -\frac{4.11}{7} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4.11}{7} & \frac{4.11}{7} + \frac{11.25}{14} & -\frac{11.25}{14} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11.25}{14} & \frac{11.25}{14} + \frac{25.51}{26} & -\frac{25.51}{26} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{25.51}{26} & \frac{25.51}{26} + \frac{51.97}{46} & -\frac{51.97}{46} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{51.97}{46} & 97 + \frac{51.97}{46} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{44}{7} & -\frac{44}{7} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{44}{7} & \frac{363}{14} & -\frac{275}{14} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{275}{14} & \frac{25000}{364} & -\frac{1275}{26} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1275}{26} & \frac{187272}{1196} & -\frac{4947}{46} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4947}{46} & \frac{9409}{46} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

olur. Ayrıca T matrisinin $n=1,2,3,4,5$ değerleri için karakteristik polinomunu inceleyecek olursak;

$$q_T(0, \lambda) = 1, \quad (4.48)$$

$$p_T(1, \lambda) = |\lambda - 4| = \lambda - 4, \quad (4.49)$$

$$q_T(1, \lambda) = |2\lambda + 7| = 2\lambda + 7, \quad (4.50)$$

$$p_T(2, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -11 \\ -11 & \lambda - 11 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda - 77, \quad (4.51)$$

$$q_T(2, \lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda+7 & -\lambda \\ -\lambda & 2\lambda+14 \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - 14\lambda - 98, \quad (4.52)$$

$$p_T(3, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -11 & -25 \\ -11 & \lambda-11 & -25 \\ -25 & -25 & \lambda-25 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 96\lambda^2 + 252\lambda + 2450, \quad (4.53)$$

$$q_T(3, \lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda+7 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 2\lambda+14 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 2\lambda+26 \end{vmatrix} = 4\lambda^3 - 113\lambda^2 + 168\lambda + 2548, \quad (4.54)$$

$$p_T(4, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -11 & -25 & -51 \\ -11 & \lambda-11 & -25 & -51 \\ -25 & -25 & \lambda-25 & -51 \\ -51 & -51 & -51 & \lambda-51 \end{vmatrix} \\ = \lambda^4 - 303\lambda^3 + 6029\lambda^2 - 6020\lambda - 129948, \quad (4.55)$$

$$q_T(4, \lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda+7 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda+14 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda+26 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 2\lambda+46 \end{vmatrix} \\ = 5\lambda^4 - 396\lambda^3 + 5632\lambda^2 - 2632\lambda - 117208, \quad (4.56)$$

$$p_T(5, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -11 & -25 & -51 & -97 \\ -11 & \lambda-11 & -25 & -51 & -97 \\ -25 & -25 & \lambda-25 & -51 & -97 \\ -51 & -51 & -51 & \lambda-51 & -97 \\ -97 & -97 & -97 & -97 & \lambda-97 \end{vmatrix} \\ = \lambda^5 - 768\lambda^4 + 43876\lambda^3 - 551484\lambda^2 + 138096\lambda + 11369176, \quad (4.57)$$

$$q_T(5, \lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda+7 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda+14 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda+26 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 2\lambda+46 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 2\lambda+79 \end{vmatrix}$$

$$= 6\lambda^5 - 1074\lambda^4 - 20188\lambda^3 - 452740\lambda^2 - 26488\lambda + 9259432, \quad (4.58)$$

olup T matrisinin karakteristik polinomu Teorem 4.1' e göre;

$$q_T(0, \lambda) = 1, \quad (4.59)$$

$$p_T(1, \lambda) = \lambda - 4, \quad (4.60)$$

$$q_T(1, \lambda) = 2\lambda + 7, \quad (4.61)$$

$$p_T(2, \lambda) = (\lambda - 11).(2\lambda + 7) - \lambda^2 = \lambda^2 - 15\lambda - 77, \quad (4.62)$$

$$q_T(2, \lambda) = (2\lambda - 14)(2\lambda + 7) - \lambda^2 = 3\lambda^2 - 14\lambda - 98, \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} p_T(3, \lambda) &= (\lambda - 25).(3\lambda^2 - 14\lambda - 98) - \lambda^2(2\lambda + 7) \\ &= \lambda^3 - 96\lambda^2 + 252\lambda + 2450, \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} q_T(3, \lambda) &= (2\lambda - 26).(3\lambda^2 - 14\lambda - 98) - \lambda^2.(2\lambda + 7) \\ &= 4\lambda^3 - 113\lambda^2 + 168\lambda + 2548, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} p_T(4, \lambda) &= (\lambda - 51).(4\lambda^3 - 113\lambda^2 + 168\lambda + 2548) - \lambda^2.(3\lambda^2 - 14\lambda - 98) \\ &= \lambda^4 - 303\lambda^3 + 6029\lambda^2 - 6020\lambda - 129948, \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} q_T(4, \lambda) &= (2\lambda - 46).(4\lambda^3 - 113\lambda^2 + 168\lambda + 2548) - \lambda^2.(3\lambda^2 - 14\lambda - 98) \\ &= 5\lambda^4 - 396\lambda^3 + 5632\lambda^2 - 2632\lambda - 117208, \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} p_T(5, \lambda) &= (\lambda - 97).(5\lambda^4 - 396\lambda^3 + 5632\lambda^2 - 2632\lambda - 117208) \\ &\quad - \lambda^2.(4\lambda^3 - 113\lambda^2 + 168\lambda + 2548) \\ &= \lambda^5 - 768\lambda^4 + 43876\lambda^3 - 551484\lambda^2 + 138096\lambda + 11369176, \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} q_T(5, \lambda) &= (2\lambda - 79).(5\lambda^4 - 396\lambda^3 + 5632\lambda^2 - 2632\lambda - 117208) \\ &\quad - \lambda^2.(4\lambda^3 - 113\lambda^2 + 168\lambda + 2548) \end{aligned}$$

$$= 6\lambda^5 - 1074\lambda^4 - 20188\lambda^3 - 452740\lambda^2 - 26488\lambda + 9259432 \quad (4.69)$$

elde edilir.

Örnek 4.1.2 $n=5$, $k=2$ ve $r=3$ değerleri için S matrisi

$$S = \begin{bmatrix} F_2^{(3)} & F_2^{(4)} & F_2^{(5)} & F_2^{(6)} & F_2^{(7)} \\ F_2^{(4)} & F_2^{(4)} & F_2^{(5)} & F_2^{(6)} & F_2^{(7)} \\ F_2^{(5)} & F_2^{(5)} & F_2^{(5)} & F_2^{(6)} & F_2^{(7)} \\ F_2^{(6)} & F_2^{(6)} & F_2^{(6)} & F_2^{(6)} & F_2^{(7)} \\ F_2^{(7)} & F_2^{(7)} & F_2^{(7)} & F_2^{(7)} & F_2^{(7)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

olup S matrisinin determinanı;

$$|S| = F_2^{(7)} (-1)^4 \prod_{i=1}^4 F_1^{(3+i)} = 8 \cdot [F_1^{(4)} F_1^{(5)} F_1^{(6)} F_1^{(7)}] = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 8, \quad (4.71)$$

S matrisinin tersi;

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{F_1^{(4)}} & \frac{1}{F_1^{(4)}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{F_1^{(4)}} & -\frac{1}{F_1^{(4)}} - \frac{1}{F_1^{(5)}} & \frac{1}{F_1^{(5)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_1^{(5)}} & -\frac{1}{F_1^{(5)}} - \frac{1}{F_1^{(6)}} & \frac{1}{F_1^{(6)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F_1^{(6)}} & -\frac{1}{F_1^{(6)}} - \frac{1}{F_1^{(7)}} & \frac{1}{F_1^{(7)}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{F_1^{(7)}} & -\frac{1}{F_1^{(7)}} + \frac{1}{F_2^{(7)}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{1} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1} & -\frac{1}{1}-\frac{1}{1} & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} & -\frac{1}{1}-\frac{1}{1} & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1} & -\frac{1}{1}-\frac{1}{1} & \frac{1}{1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & -\frac{1}{1}+\frac{1}{8} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{8} \end{bmatrix}, \tag{4.72}
\end{aligned}$$

S matrisinin Hadamard tersinin determinanı;

$$\begin{aligned}
|S^{o-1}| &= \frac{1}{F_2^{(7)}} \prod_{i=1}^4 \frac{F_1^{(3+i)}}{F_2^{(3+i)} F_2^{(2+i)}} \\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{F_1^{(4)}}{F_2^{(4)} F_2^{(3)}} \cdot \frac{F_1^{(5)}}{F_2^{(5)} F_2^{(4)}} \cdot \frac{F_1^{(6)}}{F_2^{(6)} F_2^{(5)}} \cdot \frac{F_1^{(7)}}{F_2^{(7)} F_2^{(6)}} \\
&= \frac{1}{8} \frac{1}{5.4} \frac{1}{6.5} \frac{1}{7.6} \frac{1}{8.7} = \frac{1}{11289600}, \tag{4.73}
\end{aligned}$$

S matrisinin Hadamard tersinin tersi;

$$\begin{aligned}
(S^{o-1})^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{F_2^{(3)}F_2^{(4)}}{F_1^{(4)}} & -\frac{F_2^{(3)}F_2^{(4)}}{F_1^{(4)}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{F_2^{(3)}F_2^{(4)}}{F_1^{(4)}} & \frac{F_2^{(3)}F_2^{(4)}}{F_1^{(4)}} + \frac{F_2^{(4)}F_2^{(5)}}{F_1^{(5)}} & -\frac{F_2^{(4)}F_2^{(5)}}{F_1^{(5)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F_2^{(4)}F_2^{(5)}}{F_1^{(5)}} & \frac{F_2^{(4)}F_2^{(5)}}{F_1^{(5)}} + \frac{F_2^{(5)}F_2^{(6)}}{F_1^{(6)}} & -\frac{F_2^{(5)}F_2^{(6)}}{F_1^{(6)}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F_2^{(5)}F_2^{(6)}}{F_1^{(6)}} & \frac{F_2^{(5)}F_2^{(6)}}{F_1^{(6)}} + \frac{F_2^{(6)}F_2^{(7)}}{F_1^{(7)}} & -\frac{F_2^{(6)}F_2^{(7)}}{F_1^{(7)}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{F_2^{(6)}F_2^{(7)}}{F_1^{(7)}} & F_2^{(7)} + \frac{F_2^{(6)}F_2^{(7)}}{F_1^{(7)}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{4.5}{1} & -\frac{4.5}{1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4.5}{1} & \frac{4.5}{1} + \frac{5.6}{1} & -\frac{5.6}{1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5.6}{1} & \frac{5.6}{1} + \frac{6.7}{1} & -\frac{6.7}{1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6.7}{1} & \frac{6.7}{1} + \frac{7.8}{1} & -\frac{7.8}{1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7.8}{1} & 8 + \frac{7.8}{1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 20 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 50 & -30 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 72 & -42 & 0 \\ 0 & 0 & -42 & 98 & -56 \\ 0 & 0 & 0 & -56 & 64 \end{bmatrix} \quad (4.74)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2 Fibonacci Sayılarının Minimum Elemanlı Matrislerde Uygulamaları

Teorem 4.2.1 $p_U(n, \lambda)$; U matrisinin karakteristik polinomu olmak üzere $p_U(0, \lambda)=1$ ve $p_U(1, \lambda)=\lambda - F_k^{(r)}$ başlangıç şartları altında $n \geq 2$ için,

$$p_U(n, \lambda) = (2\lambda - F_{k+n-1}^{(r-1)})p_U(n-1, \lambda) - \lambda^2 p_U(n-2, \lambda) \quad (4.75)$$

indirgeme bağıntısı geçerlidir.

İspat.

$$p_U(n, \lambda) = |\lambda I - U| = \begin{vmatrix} \lambda - F_k^{(r)} & -F_k^{(r)} & -F_k^{(r)} & \cdots & -F_k^{(r)} \\ -F_k^{(r)} & \lambda - F_{k+1}^{(r)} & -F_{k+1}^{(r)} & \cdots & -F_{k+1}^{(r)} \\ -F_k^{(r)} & -F_{k+1}^{(r)} & \lambda - F_{k+2}^{(r)} & \cdots & -F_{k+2}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -F_k^{(r)} & -F_{k+1}^{(r)} & -F_{k+2}^{(r)} & \cdots & \lambda - F_{k+n-1}^{(r)} \end{vmatrix} \quad (4.76)$$

olup, sırasıyla $i = n-1, n-2, \dots, 1$ için i . satır $(i+1)$. satırdan çıkartıldığında

$$p_U(n, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - F_k^{(r)} & -F_k^{(r)} & -F_k^{(r)} & \cdots & -F_k^{(r)} & -F_k^{(r)} \\ -\lambda & \lambda - F_{k+1}^{(r-1)} & -F_{k+1}^{(r-1)} & \cdots & -F_{k+1}^{(r-1)} & -F_{k+1}^{(r-1)} \\ 0 & -\lambda & \lambda - F_{k+2}^{(r-1)} & \cdots & -F_{k+2}^{(r-1)} & -F_{k+2}^{(r-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - F_{k+n-2}^{(r-1)} & -F_{k+n-2}^{(r-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & \lambda - F_{k+n-1}^{(r-1)} \end{vmatrix} \quad (4.77)$$

bulunur. Bu son determinanтта ise $i = n-1, n-2, \dots, 1$ için i . sütun $(i+1)$. sütundan çıkarılır ve ardından elde edilen determinant son satıra göre hesaplanırsa

$$\begin{aligned} p_U(n, \lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - F_k^{(r)} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda - F_{k+1}^{(r-1)} & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda - F_{k+2}^{(r-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\lambda - F_{k+n-2}^{(r-1)} & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 2\lambda - F_{k+n-1}^{(r-1)} \end{vmatrix} \\ &= (2\lambda - F_{k+n-1}^{(r-1)})p_U(n-1, \lambda) - \lambda^2 p_U(n-2, \lambda) \end{aligned} \quad (4.78)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.2.2 $p_V(n, \lambda)$; V matrisinin karakteristik polinomu olmak üzere

$p_V(0, \lambda)=1$ ve $p_V(1, \lambda) = \lambda - F_k^{(r)}$ başlangıç şartları altında $n \geq 2$ için,

$$p_V(n, \lambda) = (2\lambda - F_{k-1}^{(r+n-1)})p_V(n-1, \lambda) - \lambda^2 p_V(n-2, \lambda) \quad (4.79)$$

indirgeme bağıntısı geçerlidir.

İspat. 4.2.1' in ispatındaki yöntem izlenerek istenilen elde edilir.

Teorem 4.2.3 V matrisinin determinanı için,

$$|V| = F_k^{(r)} \prod_{i=1}^{n-1} F_{k-1}^{(r+i)} \quad (4.80)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. V matrisinin karakteristik polinomunu

$$p_V(n, \lambda) = |\lambda I - V| = \lambda^n + v_1 \lambda^{n-1} + v_2 \lambda^{n-2} + \dots + v_{n-1} \lambda + v_n \quad (4.81)$$

olarak ele alalım. Bu durumda, $\lambda = 0$ için $p_V(n, 0) = v_n$ olup, V matrisinin determinanı, karakteristik polinomunun sabit terimine bağlı olarak

$$|V| = (-1)^n v_n = (-1)^n p_V(n, 0) \quad (4.82)$$

şeklinde yazılır. (4.79) eşitliğinden

$$\begin{aligned} p_V(n, 0) &= -F_{k-1}^{(r+n-1)} p_V(n-1, 0) \\ &= -F_{k-1}^{(r+n-1)} \left[-F_{k-1}^{(r+n-2)} p_V(n-2, 0) \right] = \dots = (-1)^n F_{k-1}^{(r+n-1)} F_{k-1}^{(r+n-2)} \dots F_{k-1}^{(r+1)} \end{aligned} \quad (4.83)$$

elde edilir. (4.82) ve (4.83) eşitliklerinden

$$|V| = F_k^{(r)} \prod_{i=1}^{n-1} F_{k-1}^{(r+i)} \quad (4.84)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.2.4 U matrisinin determinanı

$$|U| = F_k^{(r)} \prod_{i=1}^{n-1} F_{k+i}^{(r-1)} \quad (4.85)$$

şeklindedir.

İspat. 4.2.3' ün ispatındaki yöntem izlenerek istenilen elde edilir.

Teorem 4.2.5 U matrisinin tersi

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k^{(r)}} + \frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} + \frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} & -\frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} & \frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} + \frac{1}{F_{k+3}^{(r-1)}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r-1)}} + \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

şeklindedir.

İspat. (3.23)' te verilen denklem göz önüne alındığında

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_k^{(r)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & F_{k+1}^{(r)} - F_k^{(r)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_{k+n-2}^{(r)} - F_{k+n-3}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & F_{k+n-1}^{(r)} - F_{k+n-2}^{(r)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

olur. Buradan $F_n^{(r)} = F_{n-1}^{(r)} + F_n^{(r-1)}$ bağıntısı göz önüne alınarak işlemler yapılırsa,

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k^{(r)}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k^{(r)}} + \frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} + \frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} & -\frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} & \frac{1}{F_{k+2}^{(r-1)}} + \frac{1}{F_{k+3}^{(r-1)}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r-1)}} + \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

matrisi bulunur. Bu matrisin (i, j) . elemanı

$$\begin{cases} 0 & |i-j| > 1 \\ \frac{1}{F_k^{(r)}} + \frac{1}{F_{k+1}^{(r-1)}} & i=j=1 \\ \frac{1}{F_{k+i-1}^{(r-1)}} + \frac{1}{F_{k+i}^{(r-1)}} & 1 < i=j < n \\ -1 & |i-j|=1 \\ \left| \frac{F_{k+i-1}^{(r)}}{F_{k+i-1}^{(r-1)}} - \frac{F_{k+j-1}^{(r)}}{F_{k+j-1}^{(r-1)}} \right| & |i-j|=1 \\ \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & i=j=n \end{cases} \quad (4.89)$$

şeklinde verilebilir.

Teorem 4.2.6 V matrisinin tersi

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k^{(r)}} + \frac{1}{F_{k-1}^{(r+1)}} & -\frac{1}{F_{k-1}^{(r+1)}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{F_{k-1}^{(r+1)}} & \frac{1}{F_{k-1}^{(r+1)}} + \frac{1}{F_{k-1}^{(r+2)}} & -\frac{1}{F_{k-1}^{(r+2)}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{F_{k-1}^{(r+2)}} & \frac{1}{F_{k-1}^{(r+2)}} + \frac{1}{F_{k-1}^{(r+3)}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_{k-1}^{(r+n-2)}} + \frac{1}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} & -\frac{1}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} & \frac{1}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

biçimindedir.

İspat. 4.2.5' in ispatındaki yöntem izlenerek istenilen elde edilir.

Teorem 4.2.7 V matrisinin Hadamard tersinin determinanı

$$|V^{0-1}| = \frac{(-1)^{n-1}}{F_k^{(r)}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{F_{k-1}^{(r+i)}}{F_k^{(r+i)} F_k^{(r+i-1)}} \quad (4.91)$$

şeklinededir.

İspat.

$$|V^{0-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{F_k^{(r)}} & \frac{1}{F_k^{(r)}} & \frac{1}{F_k^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r)}} \\ \frac{1}{F_k^{(r)}} & \frac{1}{F_k^{(r+1)}} & \frac{1}{F_k^{(r+1)}} & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r+1)}} \\ \frac{1}{F_k^{(r)}} & \frac{1}{F_k^{(r+1)}} & \frac{1}{F_k^{(r+2)}} & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r+2)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_k^{(r)}} & \frac{1}{F_k^{(r+1)}} & \frac{1}{F_k^{(r+2)}} & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} \end{vmatrix} \quad (4.92)$$

olup, sırasıyla $i = n-1, n-2, \dots, 1$ için $(i+1)$. satırdan i . satır çıkartıldığında

$$|V^{0-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{F_k^{(r)}} & \frac{1}{F_k^{(r)}} & \frac{1}{F_k^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r)}} \\ 0 & \frac{1}{F_k^{(r+1)}} - \frac{1}{F_k^{(r)}} & \frac{1}{F_k^{(r+1)}} - \frac{1}{F_k^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r+1)}} - \frac{1}{F_k^{(r)}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{F_k^{(r+2)}} - \frac{1}{F_k^{(r+1)}} & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r+2)}} - \frac{1}{F_k^{(r+1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} - \frac{1}{F_k^{(r+n-2)}} \end{vmatrix} \quad (4.93)$$

elde edilir. O halde;

$$\begin{aligned} |V^{0-1}| &= \frac{1}{F_k^{(r)}} \left(\frac{1}{F_k^{(r+1)}} - \frac{1}{F_k^{(r)}} \right) \left(\frac{1}{F_k^{(r+2)}} - \frac{1}{F_k^{(r+1)}} \right) \cdots \left(\frac{1}{F_k^{(r+n-1)}} - \frac{1}{F_k^{(r+n-2)}} \right) \\ &= \frac{1}{F_k^{(r)}} \frac{F_k^{(r)} - F_k^{(r+1)}}{F_k^{(r)} F_k^{(r+1)}} \frac{F_k^{(r+1)} - F_k^{(r+2)}}{F_k^{(r+1)} F_k^{(r+2)}} \cdots \frac{F_k^{(r+n-2)} - F_k^{(r+n-1)}}{F_k^{(r+n-2)} F_k^{(r+n-1)}} \\ &= \frac{1}{F_k^{(r)}} \frac{-F_{k-1}^{(r+1)}}{F_k^{(r)} F_k^{(r+1)}} \frac{-F_{k-1}^{(r+2)}}{F_k^{(r+1)} F_k^{(r+2)}} \cdots \frac{-F_{k-1}^{(r+n-1)}}{F_k^{(r+n-2)} F_k^{(r+n-1)}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{F_k^{(r)}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{F_{k-1}^{(r+i)}}{F_k^{(r+i)} F_k^{(r+i-1)}} \end{aligned} \quad (4.94)$$

olur.

Teorem 4.2.8 U matrisinin Hadamard tersinin determinanı

$$|U^{0-1}| = \frac{(-1)^{n-1}}{F_k^{(r)}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{F_{k+i}^{(r-1)}}{F_{k+i}^{(r)} F_{k+i-1}^{(r)}} \quad (4.95)$$

şeklindedir.

İspat. 4.2.7' nin ispatındaki yöntem izlenerek istenilen elde edilir.

Teorem 4.2.9 U matrisinin Hadamard tersinin tersi

$$\begin{bmatrix} F_k^{(r)} - \frac{F_k^{(r)}F_{k+1}^{(r)}}{F_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{F_k^{(r)}F_{k+1}^{(r)}}{F_{k+1}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{F_k^{(r)}F_{k+1}^{(r)}}{F_{k+1}^{(r-1)}} & -\frac{F_k^{(r)}F_{k+1}^{(r)}}{F_{k+1}^{(r-1)}} - \frac{F_{k+1}^{(r)}F_{k+2}^{(r)}}{F_{k+2}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{F_{k+n-3}^{(r)}F_{k+n-2}^{(r)}}{F_{k+n-2}^{(r-1)}} - \frac{F_{k+n-2}^{(r)}F_{k+n-1}^{(r)}}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & \frac{F_{k+n-2}^{(r)}F_{k+n-1}^{(r)}}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{F_{k+n-2}^{(r)}F_{k+n-1}^{(r)}}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & -\frac{F_{k+n-2}^{(r)}F_{k+n-1}^{(r)}}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

şeklindedir.

İspat.

$$U_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} & \dots & \frac{1}{F_k^{(r)}} \\ \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} & \dots & \frac{1}{F_k^{(r)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_k^{(r)}} & \frac{1}{F_k^{(r)}} & \dots & \frac{1}{F_k^{(r)}} \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

matrisini göz önüne alalım. (3.22) ifadesine göre

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+n-3}^{(r)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{F_k^{(r)}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

olup

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

matrisi için

$$\begin{aligned}
I_1 U_1 I_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r)}} \\ \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+n-3}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{F_{k-1}^{(r)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_k^{(r)}} & \frac{1}{F_{k-1}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{F_{k-n+1}^{(r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k^{(r)}} & \frac{1}{F_{k+1}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} \\ \frac{1}{F_{k-1}^{(r)}} & \frac{1}{F_k^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_{k-n+1}^{(r)}} & \frac{1}{F_{k-n+2}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r)}} \end{bmatrix} = U^{0-1} \quad (4.100)
\end{aligned}$$

olduğundan ve (4.98) ifadesinden

$$\begin{aligned}
U^{0-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+n-3}^{(r)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+n-3}^{(r)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.101)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanının tersi alınırsa U matrisinin Hadamard tersinin tersi

$$\begin{aligned}
(U^{0-1})^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{k+n-1}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+n-2}^{(r)}} - \frac{1}{F_{k+n-3}^{(r)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_k^{(r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} F_k^{(r)} - \frac{F_k^{(r)} F_{k+1}^{(r)}}{F_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{F_k^{(r)} F_{k+1}^{(r)}}{F_{k+1}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{F_k^{(r)} F_{k+1}^{(r)}}{F_{k+1}^{(r-1)}} & -\frac{F_k^{(r)} F_{k+1}^{(r)}}{F_{k+1}^{(r-1)}} - \frac{F_{k+1}^{(r)} F_{k+2}^{(r)}}{F_{k+2}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{F_{k+n-3}^{(r)} F_{k+n-2}^{(r)}}{F_{k+n-2}^{(r-1)}} - \frac{F_{k+n-2}^{(r)} F_{k+n-1}^{(r)}}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & \frac{F_{k+n-2}^{(r)} F_{k+n-1}^{(r)}}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{F_{k+n-2}^{(r)} F_{k+n-1}^{(r)}}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} & -\frac{F_{k+n-2}^{(r)} F_{k+n-1}^{(r)}}{F_{k+n-1}^{(r-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2.10 V matrisinin Hadamard tersinin tersi

$$(V^{o-1})^{-1} = \begin{bmatrix} F_k^{(r)} - \frac{F_k^{(r)} F_k^{(r+1)}}{F_{k-1}^{(r+1)}} & \frac{F_k^{(r)} F_k^{(r+1)}}{F_{k-1}^{(r+1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{F_k^{(r)} F_k^{(r+1)}}{F_{k-1}^{(r+1)}} & -\frac{F_k^{(r)} F_k^{(r+1)}}{F_{k-1}^{(r+1)}} - \frac{F_k^{(r+1)} F_k^{(r+2)}}{F_{k-1}^{(r+2)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{F_k^{(r+n-3)} F_k^{(r+n-2)}}{F_{k-1}^{(r+n-2)}} - \frac{F_k^{(r+n-2)} F_k^{(r+n-1)}}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} & \frac{F_k^{(r+n-2)} F_k^{(r+n-1)}}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{F_k^{(r+n-2)} F_k^{(r+n-1)}}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} & -\frac{F_k^{(r+n-2)} F_k^{(r+n-1)}}{F_{k-1}^{(r+n-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

şeklindedir.

İspat. 4.2.9' un ispatındaki yöntem izlenerek istenilen elde edilir.

Şimdi; $n=5$, $k=2$ ve $r=3$ değerleri için U , ve V matrisleri için elde ettiğimiz sayısal sonuçları verelim.

Örnek 4.2.1 $n=5$, $k=2$ ve $r=3$ değerleri için U matrisi

$$U = \begin{bmatrix} F_2^{(3)} & F_2^{(3)} & F_2^{(3)} & F_2^{(3)} & F_2^{(3)} \\ F_2^{(3)} & F_3^{(3)} & F_3^{(3)} & F_3^{(3)} & F_3^{(3)} \\ F_2^{(3)} & F_3^{(3)} & F_4^{(3)} & F_4^{(3)} & F_4^{(3)} \\ F_2^{(3)} & F_3^{(3)} & F_4^{(3)} & F_5^{(3)} & F_5^{(3)} \\ F_2^{(3)} & F_3^{(3)} & F_4^{(3)} & F_5^{(3)} & F_6^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 4 & 11 & 25 & 25 & 25 \\ 4 & 11 & 25 & 51 & 51 \\ 4 & 11 & 25 & 51 & 97 \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

olup V matrisinin determinantı;

$$|U| = F_2^{(3)} \prod_{i=1}^4 F_{2+i}^{(2)} = [F_2^{(3)} F_3^{(2)} F_4^{(2)} F_5^{(2)} F_6^{(2)}] = 4.7.14.26.46 = 468832, \quad (4.105)$$

U matrisinin tersi;

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{F_2^{(3)}} + \frac{1}{F_3^{(2)}} & -\frac{1}{F_3^{(2)}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{F_3^{(2)}} & \frac{1}{F_3^{(2)}} + \frac{1}{F_4^{(2)}} & -\frac{1}{F_4^{(2)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{F_4^{(2)}} & \frac{1}{F_4^{(2)}} + \frac{1}{F_5^{(2)}} & -\frac{1}{F_5^{(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{F_5^{(2)}} & \frac{1}{F_5^{(2)}} + \frac{1}{F_6^{(2)}} & -\frac{1}{F_6^{(2)}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{F_6^{(2)}} & \frac{1}{F_6^{(2)}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} + \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} + \frac{1}{26} & -\frac{1}{26} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{26} & \frac{1}{26} + \frac{1}{46} & -\frac{1}{46} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{46} & \frac{1}{46} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{11}{28} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{14} & \frac{40}{364} & -\frac{1}{26} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{26} & \frac{72}{736} & -\frac{1}{46} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{46} & \frac{1}{46} \end{bmatrix},$$

(4.106)

U matrisinin Hadamard tersinin determinanı;

$$|U^{o-1}| = \frac{1}{F_2^{(3)}} (-1)^4 \prod_{i=1}^4 \frac{F_{2+i}^{(2)}}{F_{2+i}^{(3)} F_{1+i}^{(3)}}$$

$$= \frac{1}{F_2^{(3)}} \cdot \frac{F_3^{(2)}}{F_3^{(3)} \cdot F_2^{(3)}} \cdot \frac{F_4^{(2)}}{F_4^{(3)} \cdot F_3^{(3)}} \cdot \frac{F_5^{(2)}}{F_5^{(3)} \cdot F_4^{(3)}} \cdot \frac{F_6^{(2)}}{F_6^{(3)} \cdot F_5^{(3)}}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{7}{11.4} \frac{14}{25.11} \frac{26}{51.25} \frac{46}{97.51}$$

$$= \frac{117208}{30527937000},$$

(4.107)

U matrisinin Hadamard tersinin tersi;

$$\begin{aligned}
 (U^{o-1})^{-1} &= \begin{bmatrix} F_2^{(3)} - \frac{F_2^{(3)}F_3^{(3)}}{F_3^{(2)}} & \frac{F_2^{(3)}F_3^{(3)}}{F_3^{(2)}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_2^{(3)}F_3^{(3)}}{F_3^{(2)}} & -\frac{F_2^{(3)}F_3^{(3)}}{F_3^{(2)}} - \frac{F_3^{(3)}F_4^{(3)}}{F_4^{(2)}} & \frac{F_3^{(3)}F_4^{(3)}}{F_4^{(2)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_3^{(3)}F_4^{(3)}}{F_4^{(2)}} & -\frac{F_3^{(3)}F_4^{(3)}}{F_4^{(2)}} - \frac{F_4^{(3)}F_5^{(3)}}{F_5^{(2)}} & \frac{F_4^{(3)}F_5^{(3)}}{F_5^{(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_4^{(3)}F_5^{(3)}}{F_5^{(2)}} & -\frac{F_4^{(3)}F_5^{(3)}}{F_5^{(2)}} - \frac{F_5^{(3)}F_6^{(3)}}{F_6^{(2)}} & \frac{F_5^{(3)}F_6^{(3)}}{F_6^{(2)}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{F_5^{(3)}F_6^{(3)}}{F_6^{(2)}} & \frac{F_5^{(3)}F_6^{(3)}}{F_6^{(2)}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 - \frac{4.11}{7} & \frac{4.11}{7} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4.11}{7} & -\frac{4.11}{7} - \frac{11.25}{14} & \frac{11.25}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11.25}{14} & -\frac{11.25}{14} - \frac{25.51}{26} & \frac{25.51}{26} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25.51}{26} & -\frac{25.51}{26} - \frac{51.97}{46} & \frac{51.97}{46} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{51.97}{46} & \frac{51.97}{46} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{16}{7} & \frac{44}{7} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{44}{7} & -\frac{363}{14} & \frac{275}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{275}{14} & -\frac{25000}{364} & \frac{25.51}{26} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1275}{26} & -\frac{187272}{1196} & \frac{4947}{46} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4947}{46} & \frac{4947}{46} \end{bmatrix}, \tag{4.108}
 \end{aligned}$$

olur. U matrisinin $n=1,2,3,4,5$ için karakteristik polinomunu inceleyecek olursak;

$$p_U(1, \lambda) = |\lambda - 4| = \lambda - 4, \tag{4.109}$$

$$p_U(2, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -4 \\ -4 & \lambda - 11 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda - 28, \tag{4.110}$$

$$p_U(3, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -4 & -4 \\ -4 & \lambda - 11 & -11 \\ -4 & -11 & \lambda - 25 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 236\lambda - 392 \tag{4.111}$$

$$\begin{aligned}
p_U(4, \lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & \lambda-11 & -11 & -11 \\ -4 & -11 & \lambda-25 & -25 \\ -4 & -11 & -25 & \lambda-51 \end{vmatrix} \\
&= \lambda^4 - 31\lambda^3 + 704\lambda^2 - 6920\lambda - 10192,
\end{aligned} \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned}
p_U(5, \lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & \lambda-11 & -11 & -11 & -11 \\ -4 & -11 & \lambda-25 & -25 & -25 \\ -4 & -11 & -25 & \lambda-51 & -51 \\ -4 & -11 & -25 & -51 & \lambda-97 \end{vmatrix} \\
&= \lambda^5 - 98\lambda^4 + 2598\lambda^3 - 45832\lambda^2 + 338704\lambda - 468832
\end{aligned} \tag{4.113}$$

olup U matrisinin karakteristik polinomu Teorem 4.2.1' e göre;

$$p_U(1, \lambda) = \lambda - 4, \tag{4.114}$$

$$p_U(2, \lambda) = (2\lambda - 7).(\lambda - 4) - \lambda^2 = \lambda^2 - 15\lambda + 28, \tag{4.115}$$

$$\begin{aligned}
p_U(3, \lambda) &= (2\lambda - 14).(\lambda^2 - 15\lambda + 28) - \lambda^2(\lambda - 4) \\
&= \lambda^3 - 10\lambda^2 + 236\lambda - 392,
\end{aligned} \tag{4.116}$$

$$\begin{aligned}
p_U(4, \lambda) &= (2\lambda - 26).(\lambda^3 - 10\lambda^2 + 236\lambda - 392) - \lambda^2.(\lambda^2 - 15\lambda + 28) \\
&= \lambda^4 - 31\lambda^3 + 704\lambda^2 - 6920\lambda + 10192,
\end{aligned} \tag{4.117}$$

$$\begin{aligned}
p_U(5, \lambda) &= (2\lambda - 46).(\lambda^4 - 31\lambda^3 + 704\lambda^2 - 6920\lambda - 10192) \\
&\quad - \lambda^2.(\lambda^3 - 10\lambda^2 + 236\lambda - 392) \\
&= \lambda^5 - 98\lambda^4 + 2598\lambda^3 - 45832\lambda^2 + 338704\lambda - 468832
\end{aligned} \tag{4.118}$$

elde edilir.

Örnek 4.2.2 $n=5$, $k=2$ ve $r=3$ değerleri için V matrisi

$$V = \begin{bmatrix} F_2^{(3)} & F_2^{(3)} & F_2^{(3)} & F_2^{(3)} & F_2^{(3)} \\ F_2^{(3)} & F_2^{(4)} & F_2^{(4)} & F_2^{(4)} & F_2^{(4)} \\ F_2^{(3)} & F_2^{(4)} & F_2^{(5)} & F_2^{(5)} & F_2^{(5)} \\ F_2^{(3)} & F_2^{(4)} & F_2^{(5)} & F_2^{(6)} & F_2^{(6)} \\ F_2^{(3)} & F_2^{(4)} & F_2^{(5)} & F_2^{(6)} & F_2^{(7)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

olup V matrisinin determinanı;

$$|V| = F_2^{(3)} \prod_{i=2}^5 F_1^{(2+i)} = 4 \cdot [F_1^{(4)} F_1^{(5)} F_1^{(6)} F_1^{(7)}] = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4, \quad (4.120)$$

V matrisinin tersi;

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{F_2^{(3)}} + \frac{1}{F_1^{(4)}} & -\frac{1}{F_1^{(4)}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{F_1^{(4)}} & \frac{1}{F_1^{(4)}} + \frac{1}{F_1^{(5)}} & -\frac{1}{F_1^{(5)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{F_1^{(5)}} & \frac{1}{F_1^{(5)}} + \frac{1}{F_1^{(6)}} & -\frac{1}{F_1^{(6)}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{F_1^{(6)}} & \frac{1}{F_1^{(6)}} + \frac{1}{F_1^{(7)}} & -\frac{1}{F_1^{(7)}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{F_1^{(7)}} & \frac{1}{F_1^{(7)}} \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{1} & \frac{1}{1} + \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1} & \frac{1}{1} + \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1} & \frac{1}{1} + \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{1} & \frac{1}{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.121)$$

V matrisinin Hadamard tersinin determinanti;

$$\begin{aligned}
 |V^{o-1}| &= \frac{(-1)^4}{F_2^{(3)}} \prod_{i=1}^4 \frac{F_1^{(3+i)}}{F_2^{(3+i)} F_2^{(2+i)}} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{F_1^{(4)}}{F_2^{(4)} F_2^{(3)}} \cdot \frac{F_1^{(5)}}{F_2^{(5)} F_2^{(4)}} \cdot \frac{F_1^{(6)}}{F_2^{(6)} F_2^{(5)}} \cdot \frac{F_1^{(7)}}{F_2^{(7)} F_2^{(6)}} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5.4} \cdot \frac{1}{6.5} \cdot \frac{1}{7.6} \cdot \frac{1}{8.7} = \frac{1}{5644800}, \tag{4.122}
 \end{aligned}$$

V matrisinin Hadamard tersinin tersi;

$$\begin{aligned}
 (V^{o-1})^{-1} &= \begin{bmatrix} F_2^{(3)} - \frac{F_2^{(3)} F_2^{(4)}}{F_1^{(4)}} & \frac{F_2^{(3)} F_2^{(4)}}{F_1^{(4)}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_2^{(3)} F_2^{(4)}}{F_1^{(4)}} & -\frac{F_2^{(3)} F_2^{(4)}}{F_1^{(4)}} - \frac{F_2^{(4)} F_2^{(5)}}{F_1^{(5)}} & \frac{F_2^{(4)} F_2^{(5)}}{F_1^{(5)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_2^{(4)} F_2^{(5)}}{F_1^{(5)}} & -\frac{F_2^{(4)} F_2^{(5)}}{F_1^{(5)}} - \frac{F_2^{(5)} F_2^{(6)}}{F_1^{(6)}} & \frac{F_2^{(5)} F_2^{(6)}}{F_1^{(6)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_2^{(5)} F_2^{(6)}}{F_1^{(6)}} & -\frac{F_2^{(5)} F_2^{(6)}}{F_1^{(6)}} - \frac{F_2^{(6)} F_2^{(7)}}{F_1^{(7)}} & \frac{F_2^{(6)} F_2^{(7)}}{F_1^{(7)}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{F_2^{(6)} F_2^{(7)}}{F_1^{(7)}} & -\frac{F_2^{(6)} F_2^{(7)}}{F_1^{(7)}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 - \frac{4.5}{1} & \frac{4.5}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4.5}{1} & -\frac{4.5}{1} - \frac{5.6}{1} & \frac{5.6}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5.6}{1} & -\frac{5.6}{1} - \frac{6.7}{1} & \frac{6.7}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6.7}{1} & -\frac{6.7}{1} - \frac{7.8}{1} & \frac{7.8}{1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7.8}{1} & -\frac{7.8}{1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -16 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & -50 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -72 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & -98 & 56 \\ 0 & 0 & 0 & 56 & -56 \end{bmatrix} \tag{4.123}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; elemanları hiper-Fibonacci sayılarından oluşturulmuş

$$T = \left[F_{k+\max(i,j)-1}^{(r)} \right]_{i,j=1}^n, \quad S = \left[F_k^{(r)+\max(i,j)-1} \right]_{i,j=1}^n, \quad U = \left[F_{k+\min(i,j)-1}^{(r)} \right]_{i,j=1}^n \quad \text{ve}$$

$$V = \left[F_k^{(r)\min(i,j)-1} \right]_{i,j=1}^n \quad \text{şeklinde tanımlı maksimumlu veya minimumlu matrislerinin}$$

determinantlarını, terslerini ve karakteristik polinomları gibi bazı özelliklerini

hesapladık. Çalışmamızda ele aldığımız bu $T = \left[F_{k+\max(i,j)-1}^{(r)} \right]_{i,j=1}^n$ ve

$U = \left[F_{k+\min(i,j)-1}^{(r)} \right]_{i,j=1}^n$ matrisleri aslında, Akyüz (2017) tarafından hazırlanan yüksek

lisans tezinde incelenen $A = \left[F_{k+\max(i,j)-1}^{(r)} \right]_{i,j=1}^n$ ve $B = \left[F_{k+\min(i,j)-1}^{(r)} \right]_{i,j=1}^n$ matrislerinin

genellemeleridir. Şöyle ki, $r=0$ için T ve U matrisleri A ve B matrislerine

indirgenir. Ayrıca, yine buradaki T ve S matrisleri Haukkanen ve Mattila (2016)

tarafından tanımlanan $[M]_{\max}$ matrisinin ve U ve V matrisleri ise $(M)_{\min}$ matrisinin

özel halidir. Bizim bulduğumuz bazı sonuçlar, $[M]_{\max}$ ve $(M)_{\min}$ matrisleri için

Mattila ve Haukkanen (2016) tarafından elde edilen bulguların sonuçları olarak

direkt olarak da bulunur. Bizim çalışmamız, elde ettiğimiz bulguların hiper-

Fibonacci sayılarına bağlı olarak çıkması ve ele aldığımız T, S, U ve V matrislerinin

karakteristik polinomlarının bir rekürans bağıntısı ile elde edilebileceğinin

gösterilmesi açısından önemlidir.

Tezimizde incelemiş olduğumuz T, S, U ve V matrislerinin LU ayrışımı gibi bazı

ayrışımlarının hesaplanabileceği ve bu matrislerin reel özdeğerlerinin hangi

aralıklarda olabileceğinin Sturm Teoreminin uygulaması olarak tespit edilebileceği

kanısındayız.

KAYNAKLAR

- Akyüz, B., 2017. Fibonacci ve Lucas sayılarının maksimum ve minimum elemanlı matrislerde uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aksaray.
- Bahşi, M. ve Solak, S., 2011. A particular matrix and its properties, International Journal of Mathematical Sciences and Applications, 1, 2, 971-974.
- Bahşi, M., Mezö, I. ve Solak, S., 2014. A symmetric algorithm for hyper-Fibonacci and hyper-Lucas numbers, Annales Mathematicae et Informaticae, 43, 19–27.
- Bahşi, M. ve Solak, S., 2014. On the norms of r -circulant matrices with the hyper-Fibonacci and Lucas numbers, Journal of Mathematical Inequalities 8, 4, 693–705.
- Bahşi, M. ve Solak, S., 2015. Some particular matrices and their characteristic polynomials, Linear and Multilinear Algebra, 63, 2071-2078.
- Bahşi, M. ve Solak, S., 2016. A Symmetric Algorithm for Golden Ratio in Hyper-Horadam Numbers, Chinese Journal of Mathematics Volume 2016, Article ID 4361582.
- Bhatia, R., 2006. Infinitely divisible matrices, American Mathematical Monthly, 113, 3, 221-235.
- Bhatia, R., 2011. Min matrices and mean matrices, Mathematical Intelligencer, 33, 2, 22-28.
- Catalani, M., 2002. A particular matrix and its relationship with Fibonacci numbers. URL Adres: <https://arxiv.org/pdf/math/0209249.pdf>. Erişim tarihi: 07.04.2017,
- Chu, K. L., Puntanen, S. ve Styan, G. P. H., 2011. Problem section, Statistical Papers 52, 257-262.
- Da Fonseca, C. M., 2007. On the eigen values of some tridiagonal matrices, Journal of Computational and Applied Mathematics 200, 1, 283-286.
- Dil, A. ve Mezö, I., 2008. A symmetric algorithm hyper-harmonic and Fibonacci numbers, Applied Mathematics and Computation, 206, 942–951.
- Horn, R.A. ve Johnson, C.R., 1991. Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York, USA.
- Koshy, T., 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, A Wiley-Interscience Publication, New York, USA.
- Mattila, M. ve Haukkanen, P., 2016. Studying the various properties of MIN and MAX matrices-elementary vs. more advanced methods, Special Matrices, 4, 101-109.

- Neudecker, H., Trenkler, G. ve Liu, S., 2009. Problem section, Statistical Papers, 50, 221-223.
- Petroudi, S. H. J. ve Pirouz, M., 2016. On the bounds for the spectral norm of particular matrices with Fibonacci and Lucas numbers, International Journal Advances Applied Mathematics and Mechanics, 3, 4, 82-90.
- Solak, S. ve Bahşı, M., 2013. A particular matrix and its someproperties, Scientific research and essays 8, 1-5.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Tuğçe SOLMAZ
Adres : Taşpazar mahallesi 847. Sokak Başkent apartmanı
Kat: 6 No: 37 AKSARAY/ MERKEZ
E-posta adresi : tugcecaglayan1@gmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Aksaray Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü, (2010-2015)

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Bölümü, (2016-2019)