



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HİPER İDEALLER ÜZERİNDE ZARİSKİ ALT HİPER VEKTÖR
UZAYI TOPOLOJİSİ**

DOKTORA TEZİ

NAZLI MAKBULE POLAT ÖZ

HAZİRAN

NAZLI MAKBULE POLAT ÖZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2025

**HİPER İDEALLER ÜZERİNDE ZARİSKİ ALT HİPER VEKTÖR UZAYI
TOPOLOJİSİ**

Nazlı Makbule POLAT ÖZ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2025

Doktora Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Nazlı Makbule POLAT ÖZ tarafından hazırlanan “Hiper İdealler Üzerinde Zariski Alt Hiper Vektör Uzayı Topolojisi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Yılmaz Mehmet DEMİRCİ

Matematik Anabilim Dalı, Abdullah Gül Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Sabahattin ILBIRA

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Emine ÖNAL KIR

Matematik Anabilim Dalı, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Engin KAYNAR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 23/06/2025

Juri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nazlı Makbule POLAT ÖZ
(23/06/2025)

HİPER İDEALLER ÜZERİNDE ZARİSKİ ALT HİPER VEKTÖR UZAYI TOPOLOJİSİ

(Doktora Tezi)

Nazlı Makbule POLAT ÖZ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2025

ÖZET

Bu çalışmada R değişmeli hiper halkasında $\text{Spec}(R)$ ile tüm asal hiper idealler kümesi gösterilmiştir. $\text{Spec}(R)$ üzerinde kurulan Zariski topolojisinin X_J açık kümeleri ile J hiper idealleri arasında bağıntı bulunmuştur. Temel topolojik özellikler kullanılarak hiper kompozisyonel karakterizasyonlar elde edilmiştir. Zariski topolojisinin herbir açık alt kümesinin, yarı kompakt, yoğun, indirgenemez alt kümelerinin karakterizasyonları Noether spektrum yardımıyla yapılmıştır. Değişmeli Krasner hiper halkalarda n -hiper idealler tanımlanmıştır. n -hiperideallerin cebirsel özelliklerine yer verilmiştir. Bu kavram genelleştirilerek değişmeli Krasner hiper halkalarında S - n -hiper idealler tanımlanmıştır. Asal hiper idealler S - n -hiper ideallere genelleştirilmiş ve böylece Spec Zariski topolojisinin bir genelleştirilişi olan Spec^* S - n -Zariski topolojisi, S - n -hiper idealler yardımıyla sınıflandırılmıştır. Ayrıca Zariski alt hiper vektör uzayının genelleştirilişi olarak tanımlanan S - n -Zariski alt hiper vektör uzayının tabanı bulunmuştur.

Sayfa Adedi
Anahtar Kelimeler
Danışman

: 57
: Zariski topolojisi, (asal) hiper ideal, Noether topolojik alt hiper vektör uzayı, S - n -hiper ideal, S - n -Zariski topoloji
: Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

HYPER IDEALS ON ZARISKI TOPOLOGY IN HYPER VECTOR SPACE

(Ph. D. Thesis)

Nazlı Makbule POLAT ÖZ

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2025

ABSTRACT

In this study, the set of all prime hyperideals in the commutative hyperring R is shown with $Spec(R)$. A relation is found between the open sets X_J and the hyperideals J of the Zariski topology constructed on $Spec(R)$. Hypercompositional characterizations are obtained using basic topological properties. The characterizations of semicompact, dense, irreducible subsets of each open subset of the Zariski topology are made with the help of Noether spectrum. n -hyperideals are defined in commutative Krasner hyperrings. Algebraic properties of n -hyperideals are given. By generalizing this concept, S - n -hyperideals have been defined in commutative Krasner hyperrings. Prime hyperideals are generalized to S - n -hyperideals and thus the S - n -Zariski topology $Spec^*$, which is a generalization of the Zariski topology $Spec$, is classified with the help of S - n -hyperideals. Also, the basis of S - n -Zariski subhypervector space, which is defined as the generalization of Zariski subhypervector space, is found.

Page Number

: 57

Keywords

: Zariski topology, (prime) hyperideal, Noether topological subhypervector space, S - n -hyperideal, S - n -Zariski topology

Supervisor

: Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım süresince desteklerini esirgemeyen, kütüphane-sinden yararlanmamı sağlayan tez danışmanım Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN ho-cama teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tez çalışmalarına sunmuş oldukları katkılardan ötürü Doç. Dr. Yılmaz Mehmet DEMİRCİ ve Dr. Öğr. Üyesi Sabahattin ILBIRA hocalarıma teşekkür ederim. Tez yazımında sunmuş olduğu teknik katkılardan ötürü Doç. Dr. Hasan Hüseyin ÖKTEN hocama teşekkür ederim. Her zaman yanımda olan desteklerini esirgemeyen aileme de şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma "Hiper ideallerin üzerinde Zariski Alt Hiper Topolojisi ve Cebirsel Sınırlandırma-sı" başlıklı projeyle Amasya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri koordinatörlüğü (BAP) tarafından desteklenmiştir.

Proje no: FMB-BAP 23-0582.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	4
2.1. Hiper Halka ve Özellikleri	4
3. MATERYAL VE YÖNTEM	13
3.1. Topolojik Uzayların Temel Özellikleri	13
3.2. Asal İdealler Üzerinde Zariski Topolojisi	15
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	19
4.1. Hiper idealler üzerinde Zariski Alt Hiper Vektör Uzayı Topolojisi	19
4.2. Değişmeli Hiper Halkalarda n-Hiper İdealler	38
4.3. Değişmeli Hiper Halkalarda S-n-Hiper idealler	42
4.4. S-n-Zariski Topolojisi	49
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	54
ÖZGEÇMİŞ	57

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler ve Kısaltmalar

Açıklama

$\subseteq$	Alt küme
$\trianglelefteq$	Büyük hiper ideal
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	Asal sayılar kümesi
$P(X)$	X kümesinin kuvvet kümesi
R	hiper halka
S	R nin çarpımsal kapalı alt kümesi
S^*	S çarpımsal kapalı alt kümesinin doygunluğu
$\sqrt{0}$	R nin nil radikal hiper ideali
$Spec(R)$	R nin asal hiper idealleri kümesi
$Spec^*(R)$	R nin S-n-hiper ideallerinin kümesi
$N_J(T)$	J yi kapsamayan T yi kapsayan R nin asal hiper ideallerinin arakesiti
X_J	$Spec(R)$ nin açık alt kümesi
$V^*(J)$	$Spec^*(R)$ nin kapalı alt kümesi
D_X^*	$Spec^*(R)$ nin açık alt kümesi
$\sqrt{J}$	R nin J hiper idealinin radikal hiper ideali
$Reg(R)$	R nin tüm regüler elemanlarının kümesi
$(I : J)$	R nin I ve J hiper ideallerinin rezidüsü
$Ann(J)$	R nin J hiper ideallerinin sıfırlayanı
$f : R_1 \rightarrow R_2$	f güçlü homomorfizması

Simgeler ve Kısaltmalar $ek(f)$ $Gör(f)$ $S^{-1}R$ $S^{-1}J$ **Açıklama** f güçlü homomorfizmasının çekirdeği f güçlü homomorfizmasının görüntü kümesi R nin lokalizasyon hiper halkası $S^{-1}R$ de bir hiper ideal

1. GİRİŞ

Zariski Topolojisi değişmeli cebir ve topoloji ile ilgili problemlere çözüm sunan cebirsel geometride ilgi çekici bir konudur. Bu topoloji yirminci yüzyılın ortalarında Oscar Zariski tarafından tanıtılmış olup bu topoloji ” $n > 2$ olmak üzere $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ için $x^n + y^n = z^n$ denkleminin çözümü yoktur” teoremi olan Fermat’ın ünlü son teoreminin çözümü gibi ünlü problemlerin yanıtlanmasına yardımcı olarak büyük bir başarı elde etmiştir. Başlangıçta cebirsel geometri, bir cisim üzerinde sonsuz sayıda değişken içeren polinom halkalarıyla ilgilenmiştir. Çeşitli değişkenlerdeki polinom denklemlerinin çözümlerinin niteliksel ve niceliksel doğasını anlamak için çok sayıda araştırma yapılmıştır. Halkalarda olduğu gibi; F karakteristiği sıfır olan bir cisim olmak üzere; F cisminden katsayılı çok değişkenli polinomlar halkası olan $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ’nin ideal yapısı araştırılmıştır. Bu polinom halkalarının maksimal ideal yapısı cebirsel geometride önemli rol oynamaktadır. Karakteristiği sıfır olan F cisminden katsayılı $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ çok değişkenli polinomlar halkasının maksimal idealleri tamamen karakterize edilmiştir. Bu halkaların maksimal idealleri $a_i \in F$ olmak üzere $(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$ şeklindedir. Ayrıca F^n n -boyutlu afin uzayların noktaları ve $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ’nin maksimal idealleri arasında bire-bir eşlemenin olması önemli bir sonuçtur. Fakat değişmeli bir R halkası için R den R ye halka homomorfizması düşünüldüğünde bir maksimal idealin ters görüntüsünün maksimal ideal olmayabileceği gösterilerek maksimal ideallerin bu topolojide bir dezavantaj getireceği sonucuna varılmıştır. Bu problem halkanın maksimal spektrumuna genişletildiğinde kurulan halka homomorfizmaları sürekli olmadığın-dan maksimal spektrum önemini yitirmiştir. Nihayetinde Zariski ve diğerleri değişmeli halkaların asal ideallerini kullanarak oluşan topolojinin daha kullanışlı olduğunu farketmişlerdir. Bu topolojiye değişmeli halkanın asal spektrumu adı verilmektedir.

Değişmeli bir R halkası ve R nin asal idealler kümesi olarak tanımlanan $Spec(R)$ asal spektrumu üzerinde J, R nin bir ideali olmak üzere tabanı $X_J = Spec(R) \setminus V(J)$ açık kümeleri şeklinde olan Zariski topolojisi tanımlanır. Bu topolojik uzay, cebirsel geometrinin gelişimine önemli katkı sunmaktadır. Ayrıca, bir asal idealin varlığı, Zorn Lemmasına bağlı olarak geliştirilmiştir. Asal ideal kavramı, asal idealler spektrumunda topolojilerin geliştirilmesine fayda sağlamış ve topolojiler ile cebirsel özellikler arasında pek çok önemli bağlantı kanıtlanmıştır. Halka teorisinde önemli bir yere sahip olan değişmeli bir halkanın nil radikali temel olarak topolojik kavramlar kullanılarak karakterize edilmiştir. Bundan sonra, modüller üzerindeki Zariski topolojisi de birçok yazarın büyük ilgisini çekmiştir (Abuhlail (2011) , (Ansari-Toroghy ve Ovlyae-Sarmazdeh, 2010), Atiyah (1969), Lam (1998), Lu (1995), Lu (1999), Lu (2010), (McCasland, Moore, and Smith (1997) , (Ohm and Pendleton (1968))). Abuhlail (2011) de modüllerin veya halkaların cebirsel özellikleri ile kompaktlık gibi topolojik özellikler arasında bağıntılar olduğunu göstermiştir. Hiper cebirsel yapıda yükseklik

yardımıyla R hiper halkasında cebirsel geometri metotları kullanılarak $Spec(R)$ (Jun (2018)) de çalışılmıştır.

Tez çalışmasının temeli Khashan and Celikel (2023); Ortaç and Alkan (2019); Tekir, Koc, and Oral (2017) çalışmalarının hiper halkalara genelleştirmelerini sunmaktadır. Bu çalışmanın temel problemi bir küme üzerinde belli koşulları gerçekleyen bir hiper işlem ile birlikte bir kanonik hiper grup yapısı oluşturmaktır ve daha sonra üzerinde tanımlanacak ikili işlem ile bu hiper grup yapısını hiper halkalara taşımaktır. Kanonik bir hiper grup yapısı bir dış işlem ile birlikte bir hiper cisim üzerinde hiper vektör uzayı oluşturmaktadır. Hiper kompozisyonel birçok kavram hiper vektör uzayı üzerinde tanımlanmaktadır. Bu düşünceyle bu kümenin birtakım alt kümelerinin belli şartları sağlayan sınıfı bir topoloji oluşturmaktadır. Homeomorfizmler olarak bilinen topolojik dönüşümler altında değişmeyen özellikleri incelemek matematikte önem arz etmektedir. Topolojik hiper vektör uzayını tanımlamada bir araç olarak kullanılan kavramlar arasında açık küme, kapalı küme, alt hiper vektör uzayı kavramları yer almaktadır. Bundan hareketle değişmeli halkalarda asal idealler sınıfı yardımıyla kurulan Zariski topolojisinin değişmeli hiper halkalarda tanımlanması açık bir problem olarak ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışmada yukarıda belirtilen açık probleme somut çözümler sunularak genellemelerine yer verilecektir. Literatürde ikili işlemin hiper işleme taşınmasıyla tanımlanan kanonik hiper grup kavramı, çarpma ikili işlemiyle belli şartlar altında değişmeli hiper halkalara genelleştirilmiştir. Bu yüzden çalışmanın genel bilgiler bölümünde hiper halka kavramının bazı temel özelliklerine yer verilmektedir. Değişmeli hiper halkalar üzerinde bir takım topolojik özellikler sunularak materyal ve yöntem olarak değişmeli halkalar üzerinde çalışılmış olan Zariski topolojisinin temel özelliklerine ihtiyaç duyulmaktadır.

Tez çalışmasının esasını oluşturan bulgular ve tartışma bölümü dört kısma ayrılmıştır. Birinci kısımda değişmeli hiper halkalarda asal hiper ideal yardımıyla Zariski topolojisi çalışılmaktadır. R hiper halkasının bir J hiper idealinde her $a \in R$ için $(X_J)^a$ nın X_J için bir taban olduğu kanıtlanmıştır. J, R hiper halkasında bir hiper ideal ve $a \in R$ olmak üzere $(X_J)^a = X_J$ ise $\sqrt{aJ} = \sqrt{J} \subseteq \sqrt{\langle a \rangle}$ kapsanmasının varlığı kanıtlanmıştır. J, R nin $J, \sqrt{J} \neq \sqrt{0}$ olan bir hiper ideali olsun. Bu takdirde X_J nin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşulun $N_J(0)$ ın R nin bir asal hiper ideali olması olduğu gösterilmiştir. J, R hiper halkasında bir hiper ideal olsun. Bu takdirde R nin TN -şartını sağlaması için gerek ve yeter koşulun X_J nin Noether topolojik hiper vektör uzayı olması olduğu kanıtlanmıştır. D ve her $i \in \wedge$ için J_i R nin öz hiper idealleri olsun. Bu takdirde $\bigcup_{i \in \wedge} X_{J_i} = X_D$ olması için gerek ve yeter koşulun $\sqrt{D} = \sqrt{\sum_{i \in \wedge} J_i}$ olması olduğu gösterilmiştir. I, R nin bir öz hiper ideali olsun. O halde X_I nin, X de yoğun olması için gerek ve yeter koşulun $J \not\subseteq \sqrt{0}$ olan R nin her J öz hiper ideali için $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{0}$ olması olduğu kanıtlanmıştır. $X = \bigcup_{i=1}^t X_{J_i}$ ve $\sqrt{0} \neq \sqrt{J_i}$ koşullarını sağla-

yan R nin her bir J_i ($i \in \{1, 2, \dots, t\}$) hiper ideali için X_{J_i} açık alt kümesinin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşulun $R = \sum_{i=1}^t J_i$ ve $N_{J_i}(0)$ ın R nin asal hiper ideali olması olduğu kanıtlanmıştır. İkinci ve üçüncü kısımlarda değişmeli hiper halkalarda n-hiper idealler ve S-n-hiper idealler birbirleriyle ilişkilendirilerek temel özellikleri sunulmuştur. Burada J , R hiper halkasının öz n-hiper ideali iken $J \subseteq \sqrt{0}$ dır. n-hiper ideallerin herhangi bir $\{J_i\}_{i \in \Delta}$ ailesi için $\cap_{i \in \Delta} J_i$ nin bir n-hiper ideali olduğu kanıtlanmıştır. J , R nin S-n-hiper ideali ve $s \in S$ olmak üzere $(\sqrt{0} : s)$, R nin n-hiper ideali iken $(J : s)$, R nin n-hiper ideali olduğu kanıtlanmıştır. R nin sonlu sayıda S-n-hiper ideallerinin arakesitinin bir S-n-hiper ideal olduğu kanıtlanmıştır. $S \subseteq \text{Reg}(R)$ olacak şekilde R nin S çarpımsal kapalı alt kümesi için R nin her maksimal S-n-hiper idealinin bir asal hiper ideal olduğu bulunmuştur. Son kısımda ise bulgular ve tartışma bölümünün birinci kısmındaki topolojiden daha genel bir topolojik hiper yapı tanımlan-maktadır. S , R nin çarpımsal kapalı alt kümesi ve her $a \in R$ için D_a^* kümesinin S-n-Zariski topolojisinin bir tabanı olduğu kanıtlanmıştır ve özellikle $(J : S) = \sqrt{0}$ eşitliği gösterilmiştir. $Z \subseteq \text{Spec}^*(R)$ nin kapanışı olan $\bar{Z}$ nin $s_j^* \in S$ olmak üzere $V^*(\cap_{j \in Z} (J : s_j^*))$ şeklinde olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca $x, y \in R$ için D_x^* ve D_y^* nin $\text{Spec}^*(R)$ nin keyfi taban elemanları olmak üzere $D_x^* \cap D_y^* = D_{xy}^*$ eşitliğini sağladığı gösterilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde hiper halkalarda ihtiyaç duyulan temel tanımlara ve bu hiper yapıların sağladığı birtakım temel teoremlere yer verilecektir.

2.1. Hiper Halka ve Özellikleri

Hiper grup kavramı ile çalışılmaya başlanılan hiper cebirsel yapılar yirminci yüzyılın başlarında ortaya çıkmıştır.

1934 yılında F. Marty Marty (1934) de hiper işlem kavramını öne sürmüştür. Hiper işlem kavramı, ikili işlem kavramının basit bir genellemesidir. $R \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlı bir hiper işlem her $x, y \in R$ için $x + y \subseteq R$ kuralıyla tanımlı $+: R \times R \rightarrow P(R)$ fonksiyonudur. İki elemanın hiper işlem altındaki görüntüsü bir küme iken, iki elemanın ikili işlem altındaki görüntüsü her zaman bir elemandır. Üzerinde hiper işlem tanımlı boştan farklı kümeye hiper grupoid adı verilmektedir. Marty'ye göre bir hiper grubun tanımı şu şekildedir:

$(R, +)$ bir hiper grupoidi aşağıdaki iki koşulu sağlarsa bir hiper grup olarak adlandırılmaktadır.

- (i) Her $x, y, z \in R$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.
- (ii) Her $x \in R$ için $x + R = R + x$ dir.

Burada $x + (y + z) = \cup_{a \in y+z} x + a$ and $x + H = \cup_{a \in H} x + a$ biçiminde tanımlanır.

$(R, +)$ bir hiper grup ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Her $x \in R$ için $x + S = S + x$ oluyorsa S ye R nin alt hiper grubu denir. 1956 yılında M.Krasner (Krasner, 1956) kanonik hiper grup kavramını tanımlamıştır. Bu kavram 2006 yılında M. Marshall tarafından kanonik hiper grup adlandırmasından farklı olarak çoklu grup adıyla tanımlanmıştır Marshall (2006). M.Krasner'a göre bir R kanonik hiper grubu, $(R, +)$ bir hiper grupoid olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan bir '+' hiper işlemi ile tanımlanmıştır:

2.1 Tanım $+: R \times R \rightarrow P(R)$ bir hiper işlem olmak üzere $(R, +)$ kanonik hiper grup, yani,

- (i) $\forall x, y, z \in R$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (ii) $\forall x, y \in R$ için $x + y = y + x$
- (iii) $\forall x \in R$ için $0 + x = x$ olacak şekilde $0 \in R$ vardır.

(iv) $\forall x \in R$ için $0 \in x + x'$ olacak şekilde tek bir $x' \in R$ vardır. (x' yerine $-x$ yazılabilir.)

(v) $z \in x + y$ ise $y \in -x + z$ ve $x \in z - y$ dir.

biçiminde tanımlanır.

Bu değişme özelliği, birim elemanın ve her elemanın tersinin varlığını teşkil ederek Marty'nin hiper grup tanımını özelleştirmektedir ve tanımı bilindik olan değişmeli grup yapısının bir genellemesi haline getirmektedir. Bundan sonra bu çalışmada kısaca "hiper grup" terimi kullanıldığında "kanonik hiper grup" kastedilecektir.

Zamanla, bu kavramın parçacık fiziği (Nezhad, Akbar, Nadjafikhah ve Moosavi, 2010), yapay zeka gibi başka alanlarda matematiğin birçok uygulamaya sahip ayrı bir dalı haline gelmiştir.

2.2 Tanım Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R, +, \cdot)$ üçlüsüne Krasner hiper halka denir.

(i) $(R, +)$ kanonik hiper gruptur.

(ii) $(R, \cdot)$ yutan eleman olarak sıfıra sahip bir yarı gruptur. Yani $x0 = 0x = 0$ dır.

(iii) Çarpmanın hiper işlem $(+)$ üzerine dağılma özelliği vardır.

$-(-x) = x$ ve $-(x + y) = -x - y$ aksiyomlarından faydalanılarak $-A = \{-a \mid a \in A\}$ ve her $a, b, c, d \in R$ için $(a + b)(c + d) \subset ac + bc + ad + bd$ bulunur. Burada $x \cdot y$ yerine xy ve $0 + x = \{x\}$ yerine $0 + x = x$ yazılır. Ayrıca $(R, +)$ kanonik hiper grubunun boştan farklı A alt kümesi için her $x, y \in A$ olmak üzere $x - y \subseteq A$ oluyorsa A ya R nin alt hiper grubu adı verilir. $(R, +)$ kanonik hiper grubu için $(R, \cdot)$ birim elemanlı olan R değişmeli yarı grup ise $(R, +, \cdot)$ birim elemanlı ve değişmeli hiper halka adı verilir. $(R, +, \cdot)$ hiper halkasında $+$ hiper işlem iken $\cdot$ ikili işlem olarak çalışılıyorsa bu hiper halkaya Krasner hiper halka adı verilir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007: 73).

2.1 Örnek $R = \{0, 1, 2\}$ kümesi için $+$ hiper işlemive $\cdot$ ikili işlemi aşağıdaki şekilde tanımlandığında

$+$	$\begin{array}{c ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & S \\ 2 & 2 & S & 2 \end{array}$	ve	$\cdot$	$\begin{array}{c ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$
-----	--	----	---------	--

$(R, +, \cdot)$ bir Krasner hiper halkadır (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007: 75).

Hiper halka yapısı klasik halka yapısının genelleştirilmiş halidir. 1980’li yıllarda hiper halkalara ilişkin iki kavram daha ortaya atılmıştır. Farklı türde hiper halkalarda tanımlanmıştır. Örneğin hem toplamanın hem de çarpmanın birer hiper işlem olduğu hiper halkalar. Bu tür hiper halkalar (DeSalvo, 1984 ; Barghi, 2003; Asokkumar ve Velrajan, 2010) tarafından incelenmiştir. Bir diğer hiper halka türü olarak toplamanın bir ikili işlem olduğu ancak çarpmanın bir hiper işlem olduğu hiper halkalar, (Rota ve Rosaria, 1990) tarafından kapsamlı bir biçimde çalışılmıştır.

Bu çalışmada bundan sonra "hiper halka" aksi belirtilmedikçe "değişmeli Krasner hiper halka" olarak anlaşılmalıdır.

2.3 Tanım $(R, +, \cdot)$ hiper halka ve A, R nin alt hiper grubu olsun. Her $a, b \in A$ için $ab \in A$ ise $(A, +, \cdot)$ ya alt hiper halka denir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007: 73).

2.4 Tanım $(R, +)$ kanonik hiper grup olmak üzere $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ grup ise $(R, +, \cdot)$ hiper halkasına hiper cisim denir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007: 74).

M. Marshall tarafından tanıtılan “çoklu halkalar” adı verilen başka bir tür hiper yapı daha vardır (Marshall, 2006). Çoklu halkalar, dalga uzaylarının incelenmesinde kullanılmıştır. Çoklu halkaların geometrik uygulamaları da söz konusudur. Hiper halkalar ile çoklu halkalar arasındaki tek fark hiper halkalarda dağılma özelliğinin, çoklu halkalarda ise zayıf dağılma özelliğinin sağlanmasıdır. Yani özel olarak, her $a, b, c \in R$ için $(R, +, \cdot)$ hiper halka iken $a(b + c) = ab + ac$ dir. Her $a, b, c \in R$ için $(R, +, \cdot)$ çoklu halka ise $a(b + c) \subseteq ab + ac$ dir.

Son yıllarda çoğu değişmeli cebirdeki standart sonuçların uzantıları olan hiper halkalar üzerine birçok sonuç yayınlanmaktadır. Özellikle B.Davvaz bir makalesinde (Davvaz, 2004) hiper halkalar için izomorfizma teoremlerini çalışmıştır. B. Davvaz ve A.Salasi başka bir makalesinde (Davvaz ve Salasi, 2006) ise Çin Kalan Teoremini hiper halkalara genelleştirmişlerdir. Bu yazarlar aynı zamanda hiper halkalarda lokalizasyon ve hiper değer kavramlarını tanımlamışlardır. Ayrıca bu kavramlarla ilgili bazı sonuçları kanıtlamışlardır. 2010 yılında M. Velrajan ve A. Asokkumar (Velrajan ve Asokkumar, 2010) de iki hiper işlemli hiper halkalar için izomorfizma teoremlerini kanıtlamışlardır ve ayrıca bir bölüm hiper halkasını hiper idealler yardımıyla karakterize etmişlerdir. Buna göre B. Davvaz a göre Krasner hiper halkalar için izomorfizma teoremlerinin ispatı ve ifadeleri için gerekli olan $\frac{R}{I}$ bölüm hiper halkasını tanımlamak için kullanılan I hiper ideal tanımını şu şekildedir:

2.5 Tanım I, R hiper halkasının alt hiper halkası olsun. Her $s \in R, a \in I$ için $sa \in I$ ise I ya R nin hiper ideali denir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007: 78).

Sıradaki teoremden hiper ideallerin temel özelliklerini verelim:

2.1 Teorem I, J ve K, R hiper halkasının hiper idealleri olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- (i) $I(J + K) = IJ + IK$ dır.
- (ii) $(I \cap J) + (I \cap K) \subseteq I \cap (J + K)$ dır. Ayrıca $J \subseteq I$ ve $K \subseteq I$ ise $(I \cap J) + (I \cap K) = I \cap (J + K) = J + K$ dır.
- (iii) $I + J = R$ ise $IJ = I \cap J$ dir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007: 78).

Kanıt (i) $a \in IJ, b \in IK$ keyfi elemanları için $z \in IJ + IK$ ise $z \in a + b$ dir. Bu takdirde $x_j, z_k \in I, y_j \in J, w_k \in K$ için $a \in \sum_{j=1}^m x_j y_j, b \in \sum_{k=1}^n z_k w_k$ dır. Fakat $J, K \subseteq J + K$ olduğundan $y_j, w_k \in J + K$ dır. Böylece $z \in \sum_{j=1}^m x_j y_j + \sum_{k=1}^n z_k w_k \in I(J + K)$ elde edilir. Böylece $x_i \in I, y_i \in J + K$ için $z \in I(J + K)$ ise $z \in \sum_{i=1}^n$ dir. Fakat $a_i \in J, b_i \in K$ olduğundan $y_i \in a_i + b_i$ dir. Dolayısıyla $z \in \sum_{i=1}^n x_i(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n x_i a_i + x_i b_i \subseteq IJ + IK$ bulunur. Böylece $I(J + K) = IJ + IK$ olup istenen elde edilir.

(ii) $I \cap J \subseteq I \cap (J + K)$ ve $I \cap K \subseteq I \cap (J + K)$ olduğundan $(I \cap J) + (I \cap K) \subseteq I \cap (J + K)$ dır. $J \subseteq I$ ve $K \subseteq I$ ise $I \cap J = J, I \cap K = K$ ve $I \cap (J + K) = (J + K) \subseteq I$ dır. Dolayısıyla istenen elde edilir.

(iii) $IJ \subseteq I$ ve $IJ \subseteq J$ olduğundan $(I \cap J) + (I \cap K) \subseteq I \cap (J + K)$ dır. $I + J = R$ olduğundan $i \in I, j \in J$ elemanları için $1 \in i + j$ dir. Dolayısıyla $x \in I \cap J$ iken $x = x1 \in xi + xj \subseteq IJ$ dir. Böylece $IJ = I \cap J$ elde edilir.

□

2.6 Tanım R, S hiper halkalar ve $f : R \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun.

- (i) Her $x, y \in R$ için $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- (ii) Her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)f(y)$

olan f fonksiyonuna güçlü hiper halka homomorfizması denir. Her $x, y \in R$ için $f(x + y) \subseteq f(x) + f(y)$ koşulu sağlanıyorsa f ye hiper halka homomorfizması denir. Eğer güçlü hiper halka homomorfizması örten ise bu güçlü hiper halka homomorfizmasına güçlü hiper halka epimorfizması denir. Eğer güçlü hiper halka homomorfizması birebir ise bu güçlü hiper halka homomorfizmasına güçlü hiper halka monomorfizması denir. (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007:80).

Bundan sonra kısalık bakımından "güçlü hiper halka homomorfizması" yerine "güçlü homomorfizma" alınacaktır.

2.7 Tanım $f : R \rightarrow S$ hiper halka homomorfizması olsun. R nin f altındaki görüntüsünü S hiper halkasının sıfır elemanına taşıyan R nin elemanları kümesine f nin çekirdeği denir ve $ek(f)$ ile gösterilir. $ek(f) = \{x \in R \mid f(x) = 0_R\}$ dir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007:81).

2.8 Tanım $f : R \rightarrow S$ güçlü hiper halka homomorfizması için S nin boştan farklı bir alt kümesi olan $Gör(f) = \{y \in S \mid \exists x \in R \text{ için } f(x) = y\}$ kümesine f nin görüntüsü denir ve $Gör(f)$ ile gösterilir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007:81).

$f : R \rightarrow S$ güçlü hiper halka homomorfizması olsun. Bu takdirde $ek(f)$ in R nin bir hiper ideali ve $Gör(f)$ in S nin bir alt hiper halkası olduğu açıktır (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007:81).

2.9 Tanım I, R nin hiper ideali ve $\frac{R}{I} = \{r+I \mid r \in R\}$ kümesini alalım. $(a+I) \oplus (b+I) = a+b+I$ ve $(a+I) \otimes (b+I) = ab+I$ olacak şekilde $\frac{R}{I}$ üzerinde $\oplus, \otimes$ işlemlerini tanımlayalım. O halde $(\frac{R}{I}, \oplus, \otimes)$ sıralı üçlüsüne R nin I hiper idealine göre bölüm hiper halkası denir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007:89).

Bölüm hiper halkalarının tanımı aşağıdaki yardımcı teoremden verelim:

2.2 Yardımcı Teorem $(\frac{R}{I}, \oplus, \otimes)$ üçlüsü hiper halkadır (Ramaruban, 2014).

Kanıt Öncelikle $\oplus, \otimes$ işlemlerinin $\frac{R}{I}$ üzerinde iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $a+I = b+I, c+I = d+I$ ise $a+c+I = \{r+I \mid r \in a+c\}$ dir. $x+I \in a+c+I$ alalım. $i, j, k \in I$ elemanları için $a \in b+j$ ve $c \in d+k$ olup $x \in a+c+i$ bulunur. Böylece $x \in b+d+i+j+k$ dir. Dolayısıyla $x+I \subseteq b+d+I$ sağlanır. Buradan $a+c+I \subseteq b+d+I$ kapsamı elde edilir. Benzer şekilde $b+d+I \subseteq a+c+I$ olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla $(a+I) \oplus (c+I) = (b+I) \oplus (d+I)$ ve $\oplus, \frac{R}{I}$ üzerinde iyi tanımlıdır. $a \in b+I$ ve $c \in d+I$ olduğu için $i, j \in I$ elemanları için $a \in b+i, c \in d+j$ dir. Böylece $ac \in bd+bj+di+ij$ dir. Dolayısıyla $ac+I \subseteq bd+I$ kapsamı bulunur. Benzer işlemlerle elde edilen $bd+I \subseteq ac+I$ kapsamı yardımıyla $ac+I = bd+I$ eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $\otimes, \frac{R}{I}$ üzerinde iyi tanımlıdır. Son olarak $\frac{R}{I}$ kümesinin bir hiper halka olduğunu gösterelim.

$$(i) \ a+I, b+I \in \frac{R}{I} \Rightarrow a+b+I \subseteq \frac{R}{I} \text{ dir.}$$

$$(ii) \ [(a+I) \oplus (b+I)] \oplus (c+I) = ((a+b)+I) \oplus (c+I) \\ = [(a+b)+c]+I = a+(b+c)+I = (a+I) \oplus [(b+I) \oplus (c+I)] \text{ dir.}$$

$$(iii) (a+I) \oplus (b+I) = (a+b)+I = (b+a)+I = (b+I) \oplus (a+I) \text{ dır.}$$

$$(iv) (a+I) \oplus (0+I) = (a+0)+I = a+I \text{ dır. Böylece } (0+I), \frac{R}{I} \text{ nın sıfır elemanıdır.}$$

$$(v) 0+I \in (a+I) \oplus (x+I) \Leftrightarrow 0+I \in a+x+I \Leftrightarrow 0 \in a+(x+i) \text{ olacak şekilde } i \in I \text{ mevcut} \Leftrightarrow -a \in (x+i) \Leftrightarrow x+I = -a+I.$$

$$(vi) a+I \in (b+I) \oplus (c+I) \text{ ise } a+I \in b+c+I \text{ dır. Böylece } a+I = z+I \text{ olacak şekilde } z \in b+c \text{ elemanı vardır. O halde } b \in z+(-c) \text{ dir. Dolayısıyla } b+I \in (z+(-c))+I = (z+I) \oplus (-c+I) = (a+I) \oplus (-c+I) \text{ dır.}$$

$$(vii) a+I, b+I \in \frac{R}{I} \text{ ise } (a+I) \otimes (b+I) = ab+I \in \frac{R}{I} \text{ dır.}$$

$$(viii) [(a+I) \otimes (b+I)] \otimes c+I = (ab+I) \otimes (c+I) = (ab)c+I = a(bc)+I = a+I \otimes [(b+I) \otimes (c+I)] \text{ dır.}$$

$$(ix) (a+I) \otimes (b+I) = ab+I = ba+I = (b+I) \otimes (a+I) \text{ dır.}$$

$$(x) (a+I) \otimes (0+I) = a0+I = I \text{ dır.}$$

$$(xi) (a+I) \otimes (1+I) = a+I \text{ dır.}$$

$$(xii) (a+I) \otimes [(b+I) \oplus (c+I)] = (a+I) \otimes [(b+c)+I] = ab+ac+I = (ab+I) \oplus (ac+I) = [(a+I) \otimes (b+I)] \oplus [(a+I) \otimes (c+I)] \text{ ve } [(b+I) \oplus (c+I)] \otimes (a+I) = (b+c+I) \otimes (a+I) = [(b+c)a+I] = [(ba+I) \oplus (ca+I)] = [(b+I) \otimes (a+I)] \oplus [(c+I) \otimes (a+I)] \text{ dır.}$$

Böylece $(\frac{R}{I}, \oplus, \otimes)$ bir hiper halkadır. □

Şimdi $\frac{R}{I}$ da ayrık olmayan iki elemanın da ayrık olmayan iki elemanın birbirine eşit olduğunu gösterelim: $(a+I) \cap (b+I) \neq \emptyset$ olsun. Buradan $x \in (a+I) \cap (b+I)$ olacak şekilde $x \in R$ alalım. Dolayısıyla $i, j \in I$ olmak üzere $x \in a+i, x \in b+j$ bulunur. O halde $a \in x+(-i)$ dir. Böylece $a \in b+j+(-i) \subseteq b+I$ olup $a+I \subseteq b+I$ bulunur. Benzer şekilde $b+I \subseteq a+I$ kapsaması elde edilir. Dolayısıyla $a+I = b+I$ dır.

2.3 Teorem $\phi(r) = r+J$ ile tanımlı $\phi : R \rightarrow \frac{R}{J}$ dönüşümü bir güçlü epimorfizma olup doğal güçlü homomorfizma olarak adlandırılır. $I = \phi^{-1}(K)$ ise $\frac{R}{J}$ bölüm hiper halkasının K hiper idealleri ile R hiper halkasının J yi kapsayan I hiper idealleri arasında bire-bir eşleme vardır (Ramaruban, 2014).

Kanıt İlk olarak ϕ nin güçlü epimorfizma olduğunu gösterelim. $r, s \in R$ alalım. O halde $\phi(r+s) = r+s+J = (r+J) \oplus (s+J) = \phi(r) \oplus \phi(s)$ ve $\phi(rs) = rs+J = (r+J) \otimes (s+J) = \phi(r) \otimes \phi(s)$ dir. Dolayısıyla ϕ bir güçlü hiper halka homomorfizmasıdır. Ayrıca $\phi(1_R) = 1_R + J$ olduğu açıktır. Her $r+J \in \frac{R}{J}$ için $\phi(r) = r+J$ olacak şekilde $r \in R$ elemanının varlığı açıktır. Böylece ϕ bir güçlü hiper halka epimorfizmasıdır. J yi kapsayan R nin hiper idealler kümesi $\mathfrak{A}$ olsun. İlk olarak her $I \in \mathfrak{A}$ için $\phi(I)$ nin $\frac{R}{J}$ nin hiper ideali olduğunu ve $K = \phi(I)$ olacak şekilde $I \in \mathfrak{A}$ nin tekliğini gösterelim. I, R nin J yi kapsayan hiper ideali olsun. $\phi(0_R) = J \in \phi(I)$ olduğundan $\phi(I) \neq \emptyset$ dir. $\phi(I) \subseteq \frac{R}{J}$ olduğu açıktır. Her $\phi(a), \phi(b) \in \phi(I)$ için $a, b \in I$ olup I, R nin hiper ideali olduğundan $a-b \subseteq I$ dir. Böylece $\phi(a) - \phi(b) = \phi(a-b) = a-b+J \subseteq \phi(I)$ dir. Her $r+J \in \frac{R}{J}$ ve her $\phi(a) \in \phi(I)$ için $r \in R, a \in I$ dir. Ayrıca $(r+J) \otimes \phi(a) = (r+J) \otimes (a+J) = ra+J \in \phi(I)$ olduğu açıktır. R hiper halka olduğundan $\phi(I), \frac{R}{J}$ bölüm hiper halkasının bir hiper idealidir. Kabul edelim ki $K, \frac{R}{J}$ de bir hiper ideal olsun. O halde $J \subseteq I$ iken $I = \phi^{-1}(K)$ olsun. $0_{\frac{R}{J}} \in K$ olduğu için $\phi^{-1}(0_{\frac{R}{J}}) = J \subseteq I$ dir. $a, b \in \phi^{-1}(K)$ ise $\phi(a), \phi(b) \in K$ dir. Böylece $\phi(a-b) \subseteq K$ olup $a-b \subseteq \phi^{-1}(K) = I$ bulunur. $r \in R$ keyfi elemanı için $\phi(r) \in \frac{R}{J}$ ve $\phi(a) \in K$ olduğundan K nin $\frac{R}{J}$ nin bir hiper ideali olduğu kullanılarak $\phi(r) \cdot \phi(a) = \phi(ra) \in K$ bulunur. Böylece $ra \in \phi^{-1}(K) = I$ dir. O halde I, R nin J yi kapsayan bir hiper idealidir. Dolayısıyla $I \in \mathfrak{A}$ dir. Üstelik $\frac{R}{J}$ nin her K hiper ideali $\phi^{-1}(K)$ nin ϕ altındaki görüntüsüdür. Ayrıca R nin J yi kapsayan hiper idealleri kümesinden $\frac{R}{J}$ nin hiper ideallerine tanımlanan ϕ fonksiyonu bire-birdir. Böylece $\phi(I_1) = \phi(I_2)$ koşulunu sağlayan R nin her I_1, I_2 hiper ideali için ya $I_1 \subseteq I_2$ ya da $I_2 \subseteq I_1$ olup $I_1 = I_2$ bulunur. $\square$

Bu teorem ile hiper halkalardaki hiper ideallerin belli bir kural altındabire-bir eşlenebildiği görülerek doğal güçlü homomorfizmaların bu eşlemedeki etkin rolünü de gözlemlenmiş olur.

2.10 Tanım R hiper halka ve P, R nin bir hiper ideali olsun. $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P ye R nin h asal hiper ideali denir (Ramaruban, 2014).

2.11 Tanım M, R hiper halkasının bir hiper ideali olsun. R nin M yi kapsayan her I hiper ideali için $M = I$ veya $R = I$ oluyorsa M ye R nin maksimal hiper ideali denir (Ramaruban, 2014).

2.2 Örnek $\mathbb{Z}$ hiper halkası ve $p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $\langle p \rangle$ hiper ideali hem bir asal hiper ideal hem de bir maksimal hiper idealdir (Ramaruban, 2014).

2.12 Tanım R hiper halka ve $x \in R$ olsun. $x^n = 0_R$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ mevcut ise x elemanına R hiper halkasının nilpotent elemanı denir. R nin tüm nilpotent elemanlarının kümesine R nin nil radikali denir ve $\sqrt{0}$ ile gösterilir (Ramaruban, 2014).

Nil radikalin asal hiper idealler yardımıyla karakterizasyonu sıradaki teoremden verilmekte-

dir:

2.4 Teorem R hiper halkasının $\sqrt{0}$ nil radikali R nin tüm asal hiper ideallerinin arakesitidir (Ramaruban, 2014).

Kanıt $\sqrt{0}$ in R hiper halkasının tüm asal hiper ideallerinin arakesitinde kapsandığı açıktır. Kabul edelim ki $x \notin \sqrt{0}$ iken x elemanının R nin tüm asal hiper ideallerin arakesitinde olmadığını gösterelim. $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^n \notin J$ olan R nin J hiper ideallerinin kümesini $\mathcal{J}$ ile gösterelim. $\mathcal{J}$ kümelerdeki içermeye bağıntısına göre bir kısmen sıralı kümedir. $\{0_R\} \in \mathcal{J}$ olduğundan $\mathcal{J} \neq \emptyset$ dır. $\{J_\alpha \mid \alpha \in W\}$ $\mathcal{J}$ de keyfi bir zincir olsun. $J = \cup_{\alpha \in W} J_\alpha$ diyelim. Bu takdirde I, R nin bir hiper idealidir ve $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^n \notin J$ dir. Burada J nin $\{J_\alpha \mid \alpha \in W\}$ zincirinin bir üst sınırı olduğu açıktır. Zorn Lemması gereğince $\mathcal{J}$ nin bir P maksimal elemanı vardır. Şimdi P nin bir asal hiper ideal olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim. $ab \in P$ olan $a, b \notin P$ olsun. Bu takdirde $x^r \in P + \langle a \rangle$, $x^s \in P + \langle b \rangle$ olacak şekilde $r, s \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $x^{r+s} \in P$ olup $P \in \mathcal{J}$ çelişkisi elde edilir. O halde P, R nin asal hiper idealidir. $x \notin P$ olduğu için x elemanı R nin tüm asal hiper ideallerinin arakesitinde bulunmaz. Dolayısıyla istenen elde edilir. $\square$

2.5 Teorem Her maksimal hiper ideal asal hiper idealdir (Ramaruban, 2014).

2.6 Teorem R hiper halkasının en az bir maksimal hiper ideali vardır (Ramaruban, 2014).

Kanıt R hiper halkasının tüm öz hiper ideallerinin kümesi $\mathcal{F}$ olsun. $\{0_R\} \in \mathcal{F}$ olduğundan $\mathcal{F} \neq \emptyset$ dir. $\mathcal{F}$ kümesi içermeye bağıntısına göre kısmen sıralıdır. $\mathcal{F}$ kümesinin herhangi bir $\{I_\alpha \mid \alpha \in W\}$ zinciri için $I = \cup_{\alpha \in W} I_\alpha$ olsun. Her $a, b \in I$ ve her $r \in R$ için $a \in I_\alpha$ ve $b \in I_\beta$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in W$ vardır. $I_\alpha \subseteq I_\beta$ ise $a - b \in I_\beta, ra \in I_\beta$ dır. Böylece $a - b \in I$ ve $ra \in I$ dır. Dolayısıyla I, R nin bir hiper idealidir. Eğer $I = R$ ise $1 \in I_\alpha$ olacak şekilde $\alpha \in W$ vardır. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $I \in \mathcal{F}$ olup $\{I_\alpha \mid \alpha \in W\}$ zincirinin bir üst sınırı olur. Zorn Lemması gereğince $\mathcal{F}$ kümesi bir maksimal elemana sahiptir. Bu maksimal eleman R nin birmaksimal hiper idealidir. $\square$

2.7 Teorem I, R hiper halkasının bir öz hiper ideali olsun. O halde R nin I hiper idealini kapsayan maksimal hiper ideal vardır (Ramaruban, 2014).

2.13 Tanım R hiper halka olsun. R nin tüm maksimal hiper ideallerinin arakesitine R hiper halkasının Jacobson Radikali denir (Ramaruban, 2014).

2.8 Teorem R hiper halkasının hiper ideallerinin bir ailesi $\{I_k\}_{k \in W}$ olsun. O halde $\cap_{k \in W} I_k, R$

nin bir hiper idealidir (Ramaruban, 2014).

Kanıt $0_R \in \cap_{k \in W} I_k$ olduğundan $\cap_{k \in W} I_k \neq \emptyset$ dir. Her $a, b \in \cap_{k \in W} I_k$ ve her $r \in R$ için $a, b \in I_k$ olur. Her $k \in W$ için I_k R nin hiper ideali olduğundan $a - b \subseteq I_k$ elde edilir. O halde $a - b \subseteq \cap_{k \in W} I_k$ olur. Her $a \in \cap_{k \in W} I_k$ ve her $r \in R$ için $a \in I_k$ olur. I_k, R nin bir hiper ideali olduğundan $ra \in I_k$ elde edilir. Dolayısıyla $ra \in \cap_{k \in W} I_k$ olur. Böylece $\cap_{k \in W} I_k, R$ nin bir hiper idealidir. $\square$

2.14 Tanım I ve J, R hiper halkasının hiper idealleri olsun. $(I : J) = \{x \in R \mid xJ \subseteq I\}$ kümesine R nin I ve J hiper ideallerinin rezidüsü adı verilir. Burada özel olarak $I = 0$ alınırsa $(0 : J)$ rezidüsüne J hiper idealinin sıfırlayıcı denir ve $Ann(J)$ ile gösterilir (Ramaruban, 2014).

2.9 Teorem R hiper halkasının I ve J hiper idealleri verilsin. Bu takdirde $(I : J)$ kümesi R nin bir hiper idealidir (Ramaruban, 2014).

Kanıt $0 \in (I : J)$ olduğundan $(I : J) \neq \emptyset$ dir. $x, y \in (I : J)$ keyfi olsun. O halde $xJ \subseteq I$ ve $yJ \subseteq I$ dir. Böylece $(x - y)J \subseteq xJ - yJ \subseteq I$ olup $x - y \in (I : J)$ bulunur. $r \in R$ keyfi elemanı için $x \in (I : J)$ iken $xJ \subseteq I$ dir. Dolayısıyla $rxJ \subseteq xJ \subseteq I$ olup $rx \in (I : J)$ bulunur. Böylece $(I : J), R$ hiper halkasının hiper idealidir. $\square$

Teorem 2.9 da J hiper ideali yerine $\{0_R\}$ hiper ideali alınarak $Ann(J)$ nin R nin bir hiper ideali olduğu kontrol edilebilir.

2.15 Tanım R hiper halka ve $S, 0_R \notin S$ olan R nin çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. " Her $(x, u), (y, v) \in R \times S$ olmak üzere $(x, u) \sim (y, v)$ olması için gerek ve yeter koşul $tvx = tuy$ olacak şekilde $t \in S$ elemanının bulunmasıdır" biçiminde tanımlı $\sim$ bağıntısı $R \times S$ kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre (x, u) nun denklik sınıfı x/u şeklinde gösterilir. Bu formdaki denklik sınıflarının kümesi $S^{-1}R$ ile gösterilir. $S^{-1}R$ kümesi üzerinde '+' hiper işlemi her $\frac{x}{u}, \frac{y}{v} \in S^{-1}R$ için $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \{\frac{z}{uv} \mid z \in vx + uy\}$ ve '.' ikili işlemi her $\frac{x}{u}, \frac{y}{v} \in S^{-1}R$ için $\frac{x}{u} \cdot \frac{y}{v} = \frac{xy}{uv}$ biçiminde tanımlanır. $S^{-1}R$ nin bir Krasner hiper halkadır (Davvaz, 2007:77).

2.10 Teorem S, R hiper halkasının çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Bu takdirde $S^{-1}R$ nin $S^{-1}P$ asal hiper idealleri ile $P \cap S \neq \emptyset$ olan R nin P hiper idealleri arasında bire-bir eşleme vardır (Ramaruban, 2014).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Materyal ve yöntem bölümünde değişmeli halkalarda asal ideallerin sınıfı kullanılarak tanımlanan asal spektrumun temel topolojik özellikleri üzerinde durulmaktadır. Zariski topolojisinin açık alt kümeleri ile halkanın asal idealleri arasındaki bağıntılara değinilecektir. Bir idealin ve halkaların radikali için bazı karakterizasyonlar topolojik yöntemlerle açıklanmaktadır. Zariski topolojisinin açık alt kümelerinin yarı-kompakt, yoğun, indirgenemez alt kümeleri tanıtılmaktadır. Ayrıca bu topolojinin Noether spektrumundan bahsedilebilmesi için gerekli cebirsel koşullar sunulmaktadır. Bu bölümdeki temel kavramlar için (Gürkanlı, 1993; Munkres, 1975; Mucuk, 2023; Öneş ve Alkan, 2019) çalışmalarından faydalanılmıştır.

3.1. Topolojik Uzayların Temel Özellikleri

Bu kısımda topolojik uzaylarda bilinmesi gerekli temel kavramlarla alınmaktadır.

3.1 Tanım (i) X kümesinin ve birtakım alt kümelerinden oluşan bir ailesi τ olsun. Aşağıdaki üç aksiyomu sağlayan τ ailesine X kümesi üzerinde bir topoloji denir:

(T1) Boş küme ve X kümesi τ ailesine aittir.

(T2) τ ailesine ait sonlu sayıda elemanın arakesiti de τ ailesine aittir.

(T3) τ ailesinin herhangi sayıda elemanlarının birleşimi de τ ailesine aittir.

(ii) τ ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji oluşturuyorsa (X, τ) sıralı çiftine bir topolojik uzay denir.

(iii) (X, τ) bir topolojik uzay ise τ ailesine ait kümelere bu topolojik uzayın açık kümeleri denir.

(iv) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $X \setminus A$, (X, τ) ailesinin açık kümesi oluyorsa A kümesine kapalı küme denir (Munkres, 1975: 76).

(v) $\tau = \{\emptyset, X\}$, X üzerinde bir topolojidir. Buna basit topoloji veya kaba topoloji denir (Munkres, 1975: 77).

3.1 Örnek τ , X kümesinin tüm alt kümelerinin ailesi olsun. Bu takdirde τ, X üzerinde bir topolojidir (Munkres, 1975: 77).

Sıradaki teorem topolojik uzay tanımına denk olan tanımı vermektedir.

3.1 Teorem (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) X ve $\emptyset, X$ in kapalı alt kümeleridir.

(ii) X in herhangi sayıda kapalı alt kümelerinin arakesiti kapalı kümedir.

(iii) X in sonlu sayıda kapalı alt kümelerinin birleşimi kapalı kümedir (Gürkanlı, 1993: 34).

3.2 Tanım (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B}$, X in açık alt kümelerinin bir ailesi olsun. τ nun her G açık kümesi $\mathcal{B}$ nin bir alt ailesinin birleşimi olarak yazılabiliyorsa, yani $\mathcal{B}$ ailesinin bir $\mathcal{B}'$ alt ailesi için $G = \cup_{B_i \in \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}} B_i$ olarak yazılabiliyorsa ise $\mathcal{B}$ ailesine τ topolojisinin bir tabanı denir (Mucuk, 2023: 93).

3.2 Örnek $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerine noktasal topoloji konursa $\mathbb{B} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$ ailesi bu topoloji için bir tabandır (Gürkanlı, 1993: 37).

3.3 Tanım Bir A kümesi ile $\mathcal{A} = \{G_i \mid i \in I\}$ ailesi verilsin. Eğer A kümesi $\mathcal{A}$ ailesinin birleşimi tarafından kapsanıyorsa, yani, $A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ oluyorsa $\mathcal{A}$ ailesine A kümesinin bir örtüsüdür denir (Gürkanlı, 1993: 89).

3.4 Tanım (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X kümesinin her $\{U_i\}_{i \in I}$ açık örtününün bir $\{U_i\}_{i \in J}$ sonlu alt açık örtüsü varsa X topolojik uzayına kompaktır denir (Munkres, 1975:164).

3.1 Uyarı (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu takdirde A kümesini içeren X in kapalı alt kümeleri mevcuttur. Bu kapalı alt kümelerin arakesiti de kapalı küme olup A yı kapsayan en küçük kapalı kümedir.

3.5 Tanım A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye A nın kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir (Gürkanlı, 1993:52).

3.3 Örnek $A = (0, 3) \cup \{4\}$ ise $\bar{A} = [0, 3] \cup \{4\}$ olur (Gürkanlı, 1993:54).

3.6 Tanım (X, τ) topolojik uzay ve $X_1, X_2 \subset X$ kapalı alt kümeleri verilsin. $X = X_1 \cup X_2$ iken $X = X_1$ veya $X = X_2$ ise X e indirgenemez topolojik uzay denir (Mucuk, 2023:427).

3.7 Tanım $Y, (X, \tau)$ topoloji uzayının alt kümesi olsun. Eğer $\bar{Y} = X$ ise Y kümesine X de yoğundur denir (Munkres, 1975:191).

3.4 Örnek $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin her yerde yoğun bir alt kümedir (Gürkanlı, 1993 :58).

3.2 Teorem Y , (X, τ) topoloji uzayının bir alt kümesi olsun. Y nin X de yoğun olması için gerek ve yeter koşul X in her $\emptyset \neq U$ açık alt kümesi için $U \cap Y \neq \emptyset$ olmasıdır (Mucuk, 2023:72).

3.8 Tanım (X, τ) topolojik uzayının in her açık örtüsü bir sonlu açık alt örtüye sahip ise X hemen hemen (quasi) kompakttır denir (Munkres, 1975: 161).

3.9 Tanım (X, τ) topolojik uzayında farklı iki elemanı içeren ayrık iki açık küme varsa bu topolojik uzaya Hausdorff uzay denir (Munkres, 1975: 96).

Hemen hemen kompakt olan Hausdorff uzaylar kompakttır. Bu yüzden Zariski topolojisinde hemen hemen kompaktlık, kompaktlık yerini almıştır.

3.10 Tanım (X, τ) topolojik uzayının V_i kapalı kümeleri yardımıyla tanımlanan $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$ azalan zinciri belli bir adım sonunda sabitleniyorsa yani $V_m = V_{m+1} \dots$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}^+$ varsa X in kapalı alt kümelerine azalan zincir koşulunu sağlıyordur denir. (X, τ) topolojik uzay olsun. X in kapalı alt kümeleri azalan zincir şartını sağlıyorsa X e Noether topolojik uzay denir (Hartshorne, 1977).

3.5 Örnek Tüm sonlu topolojik uzaylar Noether topolojik uzaydır.

3.2. Asal İdealler Üzerinde Zariski Topolojisi

Bu kısımda tez çalışmasının bulgular ve tartışma bölümünde genellemesine yer verilecek olan tezin literatürdeki önemini vurgulayan Zariski topolojisinin asal idealler yardımıyla tanımlanmasına yer verilecektir.

3.11 Tanım R birim elemanlı ve değişmeli bir halka olsun. R nin spektrumu olan $Spec(R)$, R nin tüm asal ideallerinin kümesidir. $mSpec(R)$ ise R nin tüm maksimal ideallerinin kümesini göstermektedir. Birim elemanlı ve değişmeli bir halkada her maksimal ideal bir asal ideal olduğundan, $mSpec(R) \subset Spec(R)$ olduğu açıktır. $Spec(R)$ bir topolojik uzay olup Zariski topolojisi olarak adlandırılmaktadır. Bu uzayın kapalı kümeleri R halkasının bir J ideali için $V(J) = \{P \in Spec(R) \mid J \subset P\}$ biçiminde tanımlanmaktadır. $Spec(R)$ nin açık kümeleri ise $X_J = Spec(R) \setminus V(J)$ lerdir (Öneş ve Alkan, 2019).

3.2 Uyarı R Noether halkası için $Spec(R)$ bir Noether topolojik uzaydır. İdealler ile Zariski topolojisinin açık kümeleri arasındaki bağıntılar hemen hemen(quasi) kompaktlık, yoğunlukluk, Noether halka ve indirgenemez alt kümeler yardımıyla verilmiştir (Öneş ve Alkan, 2019). Bu kapsamdaki bilgilere (Bourbaki, 1966; Lu, 2010; McCasland, Moore ve Smith,

1997) çalışmalarından faydalanılarak ulaşılabilir. Hemen hemen kompakt olan Hausdorff uzaylar kompakt olduğundan Zariski topolojisinde hemen hemen kompaktlık, kompaktlığın yerini almaktadır. Bu bağlamda kullanılan çalışmalar (Bourbaki, 1966; Lu, 2010; McCasland, Moore ve Smith, 1997) dir.

3.12 Tanım (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzayları için $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in X$ keyfi elemanı için $f(x_0)$ ın her V açık komşuluğunda $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde x_0 ın U açık komşuluğu varsa f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f ye sürekli fonksiyon denir.

Bu tanımın önermeler cebirindeki değili ise " f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul x_0 ın her U açık komşuluğu için $f(U) \not\subseteq V$ olacak şekilde $f(x_0)$ ın bir V açık komşuluğunun bulunmasıdır" biçiminde yorumlanabilir (Mucuk, 2023;132)

3.3 Teorem (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu süreklidir gerek ve yeter koşul Y deki her açık kümenin ters görüntüsü X de açık olmasıdır (Mucuk, 2023;133).

Kanıt $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon, V de Y de açık bir küme iken $f^{-1}(V)$ nin X de açık olduğunu gösterelim. $x \in f^{-1}(V)$ için $f(x) \in V$ ve f sürekli olduğundan $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde x in U açık komşuluğu vardır. Buradan $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$ olup $f^{-1}(V)$ kümesi X de açıktır.

Tersine Y deki her V açık kümesinin $f^{-1}(V)$ ters görüntüsü X de açık olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $f(x)$ ın V açık komşuluğu mevcut olsun. Bu takdirde $U = f^{-1}(V)$ kümesi x in açık komşuluğu olup $f(U) \subseteq V$ dir. O halde f fonksiyonu keyfi x noktasında sürekli olduğundan süreklidir. $\square$

3.4 Teorem (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar için $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon ve $\mathcal{B} \subseteq \sigma$ ailesi de σ topolojisi için bir taban olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $B \in \mathcal{B}$ için $f^{-1}(B) \in \tau$ olmasıdır (Mucuk, 2023;133).

Kanıt f fonksiyonu sürekli ise $B \in \mathcal{B}$ nin elemanları açık kümeler olduğundan Teorem 3.3 den her $B \in \mathcal{B}$ için $f^{-1}(B) \in \tau$ dir. Tersine her $B \in \mathcal{B}$ için $f^{-1}(B) \in \tau$ ve $V \in \sigma$ bir açık küme olsun. $\mathcal{B}$ ailesi σ için taban olduğundan, V kümesi $\mathcal{B}$ deki bazı kümelerin birleşimi olarak yazılabilir. O halde $V = \bigcup_{B_i \in \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}} B_i$ olup $f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup_{B_i \in \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}} B_i) = \bigcup_{B_i \in \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}} f^{-1}(B_i)$ dir. Burada her bir $f^{-1}(B_i)$ kümesi X de açık olduğundan $f^{-1}(V) \in \tau$ dur. O halde Teorem 3.3 den f süreklidir. $\square$

3.5 Teorem (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar ve $\{X_i \mid i \in I\}$ ailesi de X in açık örtüsü

olsun. Bu takdirde $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun her $f_i : X_i \rightarrow Y$ kısıtlanmış fonksiyonu sürekli ise f sürekli (Mucuk, 2023;135).

Kanıt $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermek için Y deki herhangi bir V açık kümesinin $f^{-1}(V)$ ters görüntüsünün X de açık olduğunu gösterelim. Burada $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ olduğundan $f^{-1}(V) = X \cap f^{-1}(V) = (\bigcup_{i \in I} X_i) \cap f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} (X_i \cap f^{-1}(V)) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$ olup her $f_i^{-1}(V)$ kümesi X_i de, X_i kümeleri X de açık olduğundan $f_i^{-1}(V)$ ters görüntüsü X de açıktır. Bundan dolayı $f^{-1}(V)$ ters görüntüsü X de açıktır. $\square$

3.3 Uyarı Homeomorfizmler topolojik özellikleri koruyan dönüşümlerdir. Aralarında bir homeomorfizm bulunun topolojik uzaylara homeomorf denir. Homeomorf olan vektör uzaylarında kompaktlık korunur.

Şimdi homeomorfizmlerle ilgili özelliklere yer verelim:

3.13 Tanım (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzayları için $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa f fonksiyonuna homeomorfizm denir.

(i) f fonksiyonu bire-bir ve örtendir.

(ii) f bir sürekli fonksiyondur.

(iii) f fonksiyonunun tersi $f^{-1} : (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ bir sürekli fonksiyondur.

Eğer (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzayları arasında bir homeomorfizm varsa bu topolojik uzaylara homeomorf ya da topolojik olarak eş yapılıdır denir (Mucuk, 2023; 158).

3.6 Teorem Topolojik uzayların homeomorf olma bağıntısı denklik bağıntısıdır (Mucuk, 2023 ; 158).

Kanıt (X, τ) topolojik uzayı için $1_X : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ birim fonksiyonu bire-bir, örten, sürekli olup 1_X^{-1} ters fonksiyonu da sürekli. Tanım 3.13 gereğince 1_X bir homeomorfizmdir. Böylece homeomorf olma bağıntısının yansıma özelliği sağlanır. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir homeomorfizm iken $f^{-1} : (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ bir homeomorfizm olup bağıntının simetri özelliği sağlanır. Eğer $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ ve $g : (Y, \sigma) \rightarrow (Z, \gamma)$ birer homeomorfizm ise $gf : (X, \tau) \rightarrow (Z, \gamma)$ bileşke fonksiyonu da homeomorfizm olduğundan geçişme özelliği de sağlanır. $\square$

3.7 Teorem (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzayları için $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir bire-bir ve örten

fonksiyon olsun. Bu takdirde $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun sürekli ve kapalı olmasıdır (Mucuk, 2023 ;158).

3.14 Tanım $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ homeomorfizm olsun. Eğer (X, τ) topolojik uzayında sağlanan bir özellik (Y, σ) uzayında da sağlanıyor ise bu özelliğe homeomorfizm altında korunuyor denir. Homeomorfizm altında korunan bu özelliğe topolojik özellik denir (Mucuk, 2023; 159).

3.8 Teorem (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olsun. X_1, X_2 alt kümeleri X de ve Y_1, Y_2 kümeleri Y de kapalı iken $X = X_1 \cup X_2$ ve $Y = Y_1 \cup Y_2$ olsun. $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ ve $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ homeomorfizmlerinin $X_1 \cap X_2$ ye kısıtlanmış fonksiyonu ise aynı $f_0 : X_1 \cap X_2 \rightarrow Y_1 \cap Y_2$ homeomorfizmi olsun. Bu durumda

$$y = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1 \\ f_2(x), & x \in X_2 \end{cases}$$

ile tanımlanan $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir (Mucuk, 2023: 160).

3.6 Örnek $[0, 1] \cup [2, 3]$ ve $[0, 2] \cup [3, 4]$ uzayları homeomorftur (Mucuk, 2023:164).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde birtakım topolojik yöntemler yardımıyla bir R hiper halkasındaki hiper idealin radikali için karakterizasyon elde edilmiştir. R hiper halkasının bir J hiper ideali için X_J nin hemen hemen (quasi) kompakt olması durumunda J hiper idealinin radikalının $\sqrt{J} = \sqrt{Ra_1 + Ra_2 + \dots + Ra_t}$ olacak şekilde R nin $\{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ sonlu alt kümesinin varlığı kanıtlanmıştır. X_J nin hemen hemen (quasi) kompakt olmasına denk koşullar bulunmuştur. R hiper halkasında tanımladığımız $N_J(T)$ hiper ideali ile X_J arasında bir bağıntı sunulmuştur. X_J nin Noether topolojik hiper vektör uzayı olması için denk koşul bulduk. Değişmeli hiper halkalarda n -hiper idealler ve S - n -hiper idealler birbirleriyle ilişkilendirerek temel özelliklerine değinilmiştir. Ayrıca değişmeli hiper halkalardaki Zariski topolojisi ve daha genel bir topolojik hiper vektör uzayı tanımlanmıştır.

4.1. Hiper idealler üzerinde Zariski Alt Hiper Vektör Uzayı Topolojisi

Bu kısımda değişmeli bir hiper halkanın asal hiper idealler yardımıyla kurulacak olan Zariski topolojisinin açık alt kümelerinin sağladığı topolojik özellikleri ile bu hiper yapının, hiper halkanın asal spektrumundaki ilişkisi vurgulanarak araştırılmıştır.

4.1 Tanım J, R hiper halkasının hiper ideali ve $Spec(R)$, tüm asal hiper ideallerinin kümesi olsun. K, R nin hiper ideali ve $a \in R$ olmak üzere $V(J) = \{P \in Spec(R) \mid J \subseteq P\}$, $X_J = Spec(R) \setminus V(J)$ kümeleri yardımıyla $\tilde{V}(K) = V(K) \setminus V(J)$, $(X_J)^a = X_J \setminus \tilde{V}(a) = Spec(R) \setminus V(aJ)$ kümeleri tanımlanır. $Spec(R)$ ye R hiper halkası üzerinde Zariski topolojisi adı verilir. R nin J hiper ideali için $V(J)$ Zariski topolojisinin kapalı alt kümesidir. Burada $J = R$ alınırsa $X_J = X_R = Spec(R)$ olur. Ayrıca $J = 0$ için $X_J = X_0 = \emptyset$ dir.

4.2 Tanım R bir hiper halka, $X_R = Spec(R)$ ve $mSpec(R)$, R nin tüm maksimal hiper ideallerinin kümesi olsun. Değişmeli Krasner hiper halkalarda her maksimal hiper ideal asal hiper ideal olduğundan $mSpec(R) \subset Spec(R)$ dir.

4.1 Örnek $\mathbb{Z}$ hiper halkası için $Spec(\mathbb{Z})$ nin elemanları (0) and p asal bir sayı olmak üzere $p\mathbb{Z}$ hiper idealleridir. Ayrıca $(0) \notin mSpec(\mathbb{Z})$ dir.

Şimdi $Spec(R)$ nin X_J kapalı alt kümesinde taban elemanlarını belirlemek için sıradaki Yardımcı Teoremi verelim.

4.1 Yardımcı Teorem J, R hiper halkasında bir hiper ideal olsun. Bu takdirde her $a \in R$ için $(X_J)^a$, X_J için bir tabandır.

Kanıt $(X_J)^a = \{P \mid aJ \not\subseteq P, P \in \text{Spec}(R)\}$ kümesi için

$X_J = \langle \cup_{P \in (X_J)^a} P \rangle$ olduğunu gösterelim. $\langle \cup_{P \in (X_J)^a} P \rangle \subseteq X_J$ olduğu açıktır. $Q \in X_J$ için $J \not\subseteq Q$ olur. Her $a \in R$ için $aJ \not\subseteq Q$ olduğu gösterilirse $Q \in (X_J)^a$ bulunur. Kabul edelim ki $aJ \subseteq Q$ olacak şekilde $a \in R$ bulunsun. O halde $\forall b \in J$ için $ab \in Q$ dur. $Q \in \text{Spec}(R)$ olduğundan $a \in Q$ veya $b \in Q$ dur. $a \in Q$ iken $R \subseteq Q$ olup $R = Q$ olur. Q öz hiper ideal olduğundan çelişki elde edilir. O halde $b \in Q$ bulunur. Bu durumda $J \subseteq Q$ olup çelişki elde edilir. O halde $\forall a \in R$ için $aJ \not\subseteq Q$ olup $Q \in (X_J)^a$ elde edilir. Dolayısıyla $Q \subseteq \cup_{P \in (X_J)^a} P \subseteq \langle \cup_{P \in (X_J)^a} P \rangle$ dir. Buradan $X_J \subseteq \langle \cup_{P \in (X_J)^a} P \rangle$ olur. O halde $X_J = \langle \cup_{P \in (X_J)^a} P \rangle$ dir. Son olarak $(X_J)^a$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. $\forall Q_1, Q_2, \dots, Q_t \in \langle \cup_{P \in (X_J)^a} P \rangle$ ve $\forall s_1, s_2, \dots, s_t \in R$ için $s_1 Q_1 + s_2 Q_2 + \dots + s_t Q_t = 0$ olsun. Her $1 \leq l \leq t$ ve $\forall s_l \in R$ için $s_l Q_l \not\subseteq P$ dir. O halde $s_l Q_l \not\subseteq P$ olur. Kabul edelim ki $s_1 Q_1 + s_2 Q_2 + \dots + s_t Q_t \subseteq P$ olsun. $s_l Q_l \subseteq s_1 Q_1 + s_2 Q_2 + \dots + s_t Q_t \subseteq P$ kapsamından $s_l Q_l \subseteq P$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $s_1 Q_1 + s_2 Q_2 + \dots + s_t Q_t \not\subseteq P$ dir. Ancak $s_1 Q_1 + s_2 Q_2 + \dots + s_t Q_t = 0$ olduğundan $0 \not\subseteq P$ olup çelişki elde edilir. O halde her $1 \leq i \leq t$ için $s_i = 0$ olmalıdır. $\square$

4.2 Teorem J, R hiper halkasında bir hiper ideal ve $a, b \in R$ olsun. Bu durumda $(X_J)^a \cap (X_J)^b = (X_J)^{ab}$ dir.

Kanıt $K \in (X_J)^a \cap (X_J)^b$ alalım. Böylece $K \in \text{Spec}(R) \setminus V(aJ)$ ve $K \in \text{Spec}(R) \setminus V(bJ)$ olur. Buradan $K \not\subseteq V(aJ)$ olup $aJ \not\subseteq K$ dir. Benzer şekilde $bJ \not\subseteq K$ dir. O halde $x \in aJ$ için $x \notin K$ ve $y \in bJ$ için $y \notin K$ dir. O halde $x = ac$ ve $y = bd$ olacak şekilde $c, d \in J$ vardır.

$xy = (ac)(bd) = (ab)(cd) \in abJ$ olur. Buradan $xy \in abJ$ bulunur. Ayrıca $x \notin K$, $y \notin K$ ve K asal hiper ideal olduğundan $xy \notin K$ dir. O halde $abJ \not\subseteq K$ olur. Buradan $K \in \text{Spec}(R) \setminus V(abJ)$ olup $K \in (X_J)^{ab}$ bulunur. O halde $(X_J)^a \cap (X_J)^b \subseteq (X_J)^{ab}$. Şimdi de $K \in (X_J)^{ab}$ alalım. $K \in \text{Spec}(R) \setminus V(abJ)$ olup $K \not\subseteq V(abJ)$ dir. Buradan $abJ \not\subseteq K$ elde edilir. Ayrıca $bJ \subseteq J$ olup $abJ \subseteq aJ$ ve $abJ \subseteq bJ$ dir. Kabul edelim ki $aJ \subseteq K$ olsun. Bu durumda $baJ \subseteq bK \subseteq K$ olup $abJ \subseteq K$ kapsamından çelişki elde edilir. O halde $aJ \not\subseteq K$ olur. Benzer şekilde $bJ \not\subseteq K$ dir. Buradan $K \in \text{Spec}(R) \setminus V(aJ)$ ve $K \in \text{Spec}(R) \setminus V(bJ)$ dir. Yani $K \in (X_J)^a \cap (X_J)^b$ olup $(X_J)^{ab} \subseteq (X_J)^a \cap (X_J)^b$ kapsamından istenen eşitlik elde edilir. $\square$

4.3 Tanım J, R hiper halkasının hiper ideali olmak üzere

$$\sqrt{J} = \{s \in R \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } s^n \in J\}.$$

hiper idealine R nin radikal hiper ideali denir. $J = 0$ ise $\sqrt{0}$ hiper idealine nil radikali denir. Ayrıca radikal hiper ideal R hiper halkasında J hiper idealini kapsayan tüm asal hiper ideal-lerinin arakesiti olarak da tanımlanabilir. Böylece $\sqrt{J} = \bigcap_{J \subseteq Q \in \text{Spec}(R)} Q$ olur.

Sıradaki teoremlerde R hiper halkasının J hiper ideali ile $\text{Spec}(R)$ nin X_J açık kümesi arasın-

daki bağıntılara yer verilmektedir.

4.3 Teorem J, R hiper halkasında hiper ideal ve $a \in R$ olsun. O halde $(X_J)^a = \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul $aJ \subseteq \sqrt{0}$ olmasıdır.

Kanıt $(X_J)^a = \emptyset$ olsun. $(X_J)^a = \text{Spec}(R) \setminus V(aJ)$ olması kullanılarak ve $(X_J)^a = \emptyset$ hipotezin-den $\text{Spec}(R) = V(aJ)$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla $aJ = 0$ bulunur. Aynı zamanda $0 \subseteq \sqrt{0}$ kapsaması kullanılarak $aJ \subseteq \sqrt{0}$ elde edilir. Tersine $aJ \subseteq \sqrt{0}$ olsun. $K \in (X_J)^a$ için $K \notin V(aJ)$ dir. Buradan $aJ \not\subseteq K$ dir. $K \in \text{Spec}(R)$ ve aJ, R deki tüm hiper idealleri içerdüğinden $aJ \subseteq K$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. O halde $(X_J)^a = \emptyset$ olmalıdır. $\square$

4.4 Teorem J, R hiper halkasında hiper ideal ve $a \in R$ olsun. a birim (terslenebilir eleman) ise $(X_J)^a = X_J$ eşitliği sağlanır.

Kanıt a terslenebilir eleman olsun. $(X_J)^a \subseteq X_J$ olur. $K \in (X_J)^a$ keyfi olsun. O halde $K \in \text{Spec}(R) \setminus V(aJ)$ olur. Yani $K \not\subseteq V(aJ)$. Buradan $aJ \not\subseteq K$ bulunur. O halde $b \in aJ$ için $b \notin K$ dir. $aJ \subseteq J$ olduğundan $b \in J$ dir. O halde $J \not\subseteq K$ için $K \notin V(J)$ olur. Böylece $K \in \text{Spec}(R) \setminus V(J)$ olup $K \in (X_J)$ elde edilir. Tersine $K \in X_J$ olsun. O halde $K \not\subseteq V(J)$ olup $J \not\subseteq K$ dir. $1_R J = J$ ve a terslenebilir olduğundan $aa' = 1_R$ olacak şekilde $a' \in R$ vardır. Ayrıca $J \not\subseteq K$ iken $(aa')J \not\subseteq (aa')K$ olup $aJ \not\subseteq aK$ bulunur. Buradan $aK \not\subseteq V(aJ)$ olup a birim olduğundan $K \not\subseteq V(aJ)$ dir. Böylece $K \in (X_J)^a$ elde edilir. $\square$

4.5 Teorem J, R hiper halkasında hiper ideal ve $a, b \in R$ olsun. O halde $(X_J)^a = (X_J)^b$ olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{aJ} = \sqrt{bJ}$ olmasıdır.

Kanıt $(\Leftarrow)$ $\sqrt{aJ} = \sqrt{bJ}$ olsun. $(X_J)^a = (X_J)^b$ olduğunu gösterelim. $K \in (X_J)^a$ keyfi olsun. Buradan $K \not\subseteq V(aJ)$ için $aJ \not\subseteq K$ bulunur. Böylece $\sqrt{aJ} \not\subseteq K$ dir. Hipotez gereğince $\sqrt{bJ} \not\subseteq K$ dir. Buradan $K \not\subseteq V(bJ)$ dir. Sonuç olarak $K \in (X_J)^b$ bulunur. Dolayısıyla $\sqrt{aJ} \subseteq \sqrt{bJ}$ elde edilir. Benzer bir teknikte $\sqrt{bJ} \subseteq \sqrt{aJ}$ de gösterilebilir. Böylece $(X_J)^a = (X_J)^b$ bulunur. $(\Rightarrow)$ $(X_J)^a = (X_J)^b$ olsun. $\sqrt{aJ} = \sqrt{bJ}$ olduğunu gösterelim. $x \in \sqrt{aJ}$ keyfi olsun. Bu takdirde $aJ \subseteq K$ olan her $K \in \text{Spec}(R)$ için $x \in K$ dir. Buradan $K \in V(aJ)$ olup $K \notin (X_J)^a$ bulunur. Hipotez gereğince $K \notin (X_J)^b$ ve buradan da $K \in V(bJ)$ dir. Böylece $bJ \subseteq K$ olup $\sqrt{bJ} \subseteq K$ dir. Şimdi $x \in \sqrt{bJ}$ olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim. $x \notin \sqrt{bJ}$ olsa $bJ \subseteq K'$ ve $x \notin K'$ olacak şekilde $K' \in \text{Spec}(R)$ vardır. Buradan $K' \in V(aJ) = V(bJ)$ olup $bJ \subseteq K'$ bulunur. $x \in \sqrt{bJ}$ olduğundan $bJ \subseteq K$ olan her $K \in \text{Spec}(R)$ için $x \in K$ dir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde $x \in \sqrt{bJ}$ dir. $\sqrt{aJ} \subseteq \sqrt{bJ}$ dir. Benzer bir teknikte $\sqrt{bJ} \subseteq \sqrt{aJ}$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $\sqrt{aJ} = \sqrt{bJ}$ olur. $\square$

4.6 Teorem J, R hiper halkasında hiper ideal ve $a \in R$ olsun. $(X_J)^a = X_J$ ise $\sqrt{aJ} = \sqrt{J} \subseteq \sqrt{\langle a \rangle}$ kapsaması vardır.

Kanıt $K \in \sqrt{aJ}$ keyfi olsun. Bu takdirde $aJ \subseteq K$ olan her $K \in \text{Spec}(R)$ için $a \in K$ dır. $\sqrt{aJ}$, aJ yi kapsayan tüm asal hiper ideallerin arakesiti olduğundan $aJ \subseteq K$ dır. Dolayısıyla $K \in V(aJ)$ olur. O halde $K \notin (X_J)^a$ dır. Hipotezden $K \notin X_J$ olur. Yani $K \notin \text{Spec}(R) \setminus V(J)$ olup $K \in V(J)$ elde edilir. Buradan $J \subseteq K$ bulunur. Dolayısıyla $r \in \sqrt{J}$ olup $\sqrt{aJ} \subseteq \sqrt{J}$ bulunur. Tersine $r \in \sqrt{J}$ keyfi olsun. $J \subseteq P$ olan her $P \in \text{Spec}(R)$ için $r \in P$ dir. Her $a \in R$ için $aJ \subseteq aP$ olur. Buradan $aJ \subseteq aP \subseteq P$ olup $aJ \subseteq P$ bulunur. O halde $r \in \sqrt{aJ}$ olup $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{aJ}$ elde edilir. O halde $\sqrt{aJ} = \sqrt{J}$ olur. Aynı zamanda $R \in \text{Spec}(R)$ dir. Buradan $\sqrt{aR} = \sqrt{R}$ ve $aR = \langle a \rangle$ dır.

$\sqrt{aJ} = \sqrt{J} \subseteq R = \sqrt{R} = \sqrt{aR} = \sqrt{\langle a \rangle}$ eşitliğinden $\sqrt{aJ} \subseteq \sqrt{\langle a \rangle}$ elde edilir. $\square$

4.4 Tanım (i) J, R hiper halkasının bir öz hiper ideali olsun. $\wedge$ indis kümesi olmak üzere $\sqrt{\langle s_i \in R \mid i \in \wedge \rangle} = \sqrt{\langle s_j \in R \mid j \in \Delta \rangle}$ ve $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{\langle s_i \in R \mid i \in \wedge \rangle}$ olan $\wedge$ nın bir Δ sonlu alt kümesi varsa J hiper idealine $(*)$ şartını sağlar denir.

(ii) Noether hiper halkaların her hiper ideali $(*)$ şartını sağlar. Ayrıca $\frac{R}{\sqrt{J}}$ Noether hiper halka ise $J, (*)$ şartını sağlar. Ancak $J, (*)$ şartını sağlarken $\frac{R}{\sqrt{J}}$ hiper halkasının Noether olması gerekmez.

Sıradaki Teoremden $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\Delta = \{1, 2, \dots, t\}$ kümesi bir sonlu küme olarak alınacaktır.

4.7 Teorem J, R hiper halkasının hiper ideali olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i) Her $a \in R$ için $(X_J)^a$ hemen hemen (quasi) kompakttır.
- (ii) X_J hemen hemen (quasi) kompakt ise $\sqrt{J} = \sqrt{Rs_1 + Rs_2 + \dots + Rs_t}$ olacak şekilde $\{s_1, s_2, \dots, s_t\} \subseteq R$ sonlu alt kümesi vardır.
- (iii) $J (*)$ şartını sağlarsa X_J hemen hemen (quasi) kompakttır.

Kanıt (i) $\wedge$ sonlu bir küme olmak üzere $(X_J)^a = \bigcup_{i \in \wedge} X_{J_i}$ olsun.
 $(X_J)^a = \bigcup_{i \in \wedge} X_{J_i} = \bigcup_{i \in \wedge} [\text{Spec}(R) \setminus V(X_{J_i})] = \text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i \in \wedge} V(X_{J_i}) = \text{Spec}(R) \setminus V(\sum_{i \in \wedge} X_{J_i})$
 $\subseteq \text{Spec}(R) \setminus \sum_{i \in \wedge} V(X_{J_i}) = \bigcup_{i \in \wedge} X_{J_i}$ olur. $\Delta \subseteq \wedge$ olmak üzere $\bigcup_{i \in \wedge} X_{J_i} \subseteq \bigcup_{i \in \Delta} X_{J_i}$ elde edilir.
 $\bigcup_{i \in \Delta} X_{J_i} \subseteq \bigcup_{i \in \wedge} X_{J_i}$ olduğu açıktır. O halde $\bigcup_{i \in \wedge} X_{J_i} = \bigcup_{i \in \Delta} X_{J_i}$ dır. Yani $(X_J)^a = \bigcup_{i \in \wedge} X_{J_i} = \bigcup_{i \in \Delta} X_{J_i}$ eşitliğini elde edilir. Yani $(X_J)^a$ nın her açık örtüsü sonlu açık örtüye sahip olup böylece $(X_J)^a$ hemen hemen (quasi) kompakttır.

(ii) $X_J = \text{Spec}(R) \setminus V(\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J)$ olduğunu gösterelim. $P \in X_J = \text{Spec}(R) \setminus V(J)$ olsun. Buradan $P \notin V(J)$ olup $J \not\subseteq P$ bulunur. Bunun için ilk olarak $s_i J \subseteq J$ iken $\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J \not\subseteq P$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J \subseteq P$ olsun. O halde $s_i J \subseteq P$ olacak şekilde $i \in \Lambda$ vardır. Her $a \in J$ için $s_i a \in P$ olur. $P \in \text{Spec}(R)$ olduğundan $s_i \in P$ veya $a \in P$ dir. $s_i \in P$ ise $R \subseteq P$ olup $R = P$ olur. P öz hiper ideal olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $a \in P$ dir. $a \in J$ iken $a \in P$ bulunur. Böylece $J \subseteq P$ olup çelişki elde edilir. O halde $\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J \not\subseteq P$ olmalıdır. Dolayısıyla $P \notin V(\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J)$ elde edilir. Böylece $P \in \text{Spec}(R) \setminus V(\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J)$ dir. O halde $X_J \subseteq \text{Spec}(R) \setminus V(\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J)$ elde edilir. Tersine $P \in \text{Spec}(R) \setminus V(\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J)$ olsun. $P \notin V(\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J)$ dir. Böylece $\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J \not\subseteq P$ bulunur. O halde $s_i J \not\subseteq P$ olacak şekilde $i \in \Lambda$ vardır. Buradan $P \notin V(s_i J)$ olup $P \in \text{Spec}(R) \setminus V(s_i J)$ dir. Dolayısıyla $P \in (X_J)^{s_i}$ elde edilir. $(X_J)^{s_i} \subseteq X_J$ olduğundan $P \in X_J$ dir. O halde $\text{Spec}(R) \setminus V(\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J) \subseteq X_J$ dir. Böylece $X_J = \text{Spec}(R) \setminus V(\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J)$ eşitliği elde edilir.

$\text{Spec}(R) \setminus V(\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J) = \text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J)$ eşitliğini gösterelim. Bunun için $Q \in \text{Spec}(R) \setminus V(\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J)$ keyfi olsun. $Q \notin V(\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J)$ olup $\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J \not\subseteq Q$ bulunur. Buradan $s_i J \not\subseteq Q$ olacak şekilde $i \in \Lambda$ vardır. $Q \notin V(s_i J)$ dir. Dolayısıyla $Q \notin \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J)$ elde edilir. $Q \in \text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J)$ olur. Tersine $P \in \text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J)$ olsun. Bu takdirde $P \notin \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J)$ olup $P \notin V(s_i J)$ olacak şekilde $i \in \Lambda$ vardır. Yani $P \notin \bigcup_{i \in \Lambda} V(s_i J)$ dir. Böylece $P \in \text{Spec}(R) \setminus \bigcup_{i \in \Lambda} V(s_i J)$ olur. O halde $\text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J) \subseteq \text{Spec}(R) \setminus \bigcup_{i \in \Lambda} V(s_i J)$ elde edilir. Dolayısıyla $\text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J) = \text{Spec}(R) \setminus V(\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J)$ eşitliği sağlanır.

Şimdi $\text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J) = \bigcup_{i \in \Lambda} [\text{Spec}(R) \setminus V(s_i J)]$ olduğunu gösterelim. $P \in \text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J)$ alalım. $P \notin \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J)$ olur. O halde $i \in \Lambda$ için $P \notin V(s_i J)$ olup $P \in X \setminus V(s_i J)$ bulunur. Buradan $P \in \bigcup_{i \in \Lambda} [\text{Spec}(R) \setminus V(s_i J)]$ elde edilir. O halde $\text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J) \subseteq \bigcup_{i \in \Lambda} [\text{Spec}(R) \setminus V(s_i J)]$ bulunur. Tersine $P \in \bigcup_{i \in \Lambda} [\text{Spec}(R) \setminus V(s_i J)]$ olsun. O halde $P \in \text{Spec}(R) \setminus V(s_i J)$ olacak şekilde $i \in \Lambda$ vardır. Buradan $P \notin V(s_i J)$ olur. Dolayısıyla $P \notin \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J)$ ve $P \in \text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J)$ olduğundan $\bigcup_{i \in \Lambda} [\text{Spec}(R) \setminus V(s_i J)] \subseteq \text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J)$ dir. O halde $\text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J) = \bigcup_{i \in \Lambda} [\text{Spec}(R) \setminus V(s_i J)]$ bulunur.

Dolayısıyla $X_J = \text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i \in \Lambda} V(s_i J) = \bigcup_{i \in \Lambda} [\text{Spec}(R) \setminus V(s_i J)] = \text{Spec}(R) \setminus V(\bigcup_{i \in \Lambda} s_i J) = \bigcup_{i \in \Lambda} (X_J)^{s_i}$ olur. Buradan $X_J = \bigcup_{i \in \Lambda} (X_J)^{s_i}$ olup X_J açık örtüye sahiptir. X_J hemen hemen (quasi) kompakt olduğundan $X_J = \bigcup_{i \in \Delta} (X_J)^{s_i}$ olacak şekilde $\Delta = \{1, 2, \dots, t\}$ sonlu alt kümesi vardır.

$X_J = \bigcup_{i \in \Delta} (X_J)^{s_i} = X_J \setminus \tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >)$ olduğunu gösterelim.

$P \in \bigcup_{i \in \Delta} (X_J)^{s_i}$ olsun. O halde $P \in (X_J)^{s_i}$ olacak şekilde $i \in \Delta$ vardır. $(X_J)^{s_i} = X_J \setminus \tilde{V}(< s_i >)$ olduğundan $P \notin \tilde{V}(< s_i >)$ dir. Ayrıca $\tilde{V}(< s_i >) = V(< s_i >) \setminus V(J)$ ve $\tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >) = V(< s_1, s_2, \dots, s_t >) \setminus V(J)$ iken $\tilde{V}(< s_i >) \subseteq \tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >)$ elde edilir. O halde $P \notin \tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >)$ dir. Burada $P \in \tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >)$ iken $\tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >) = V(< s_1, s_2, \dots, s_t >) \setminus V(J)$ bulunur. Böylece $P \notin \tilde{V}(J)$ olmalıdır. $P \in \tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >)$ iken $< s_1, s_2, \dots, s_t > \subseteq P$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $P \notin \tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >)$ dir. Üstelik $(X_J)^{s_i} \subseteq X_J$ olduğundan $P \in X_J$ olup $P \in X_J \setminus \tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >)$ elde edilir.

O halde $\bigcup_{i \in \Delta} (X_J)^{s_i} \subseteq X_J \setminus \tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >)$. Ters kapsama için $P \in X_J \setminus \tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >)$ olsun. $P \in X_J$ ve $P \notin \tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >)$ dir. $X_J = X \setminus V(J)$ olduğundan $P \notin V(J)$ bulunur. $\tilde{V}(< s_i >) \subseteq \tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >)$ için $P \notin \tilde{V}(< s_i >)$ dir. $(X_J)^{s_i} = X_J \setminus \tilde{V}(< s_i >)$ olduğundan $P \in (X_J)^{s_i}$ olup $P \in \bigcup_{i \in \Delta} (X_J)^{s_i}$ dir. Buradan $X_J \setminus \tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >) \subseteq \bigcup_{i \in \Delta} (X_J)^{s_i}$ bulunur. Dolayısıyla $X_J = X_J \setminus \tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >) = \bigcup_{i \in \Delta} (X_J)^{s_i}$ eşitliği elde edilir. Buradan $X_J = X_J \setminus \tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >)$ olup $\tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >) = \emptyset$ bulunur. O halde $\tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >) = V(< s_1, s_2, \dots, s_t >) \setminus V(J) = \emptyset$ olur ki, böylece $V(< s_1, s_2, \dots, s_t >) = V(J)$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten $V(< s_1, s_2, \dots, s_t >) \subseteq V(J)$ bulunur. $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{Rs_1 + Rs_2 + \dots + Rs_t}$ olduğunu göstermek için $x \in J$ alalım. $\sqrt{J} = \bigcap_{J \subseteq P} P$ olduğundan $x \in P$ olur. Kabul edelim ki $x \notin \sqrt{Rs_1 + Rs_2 + \dots + Rs_t}$ olsun. O halde $x \notin P'$ ve $Rs_1 + Rs_2 + \dots + Rs_t \subseteq P'$ olacak şekilde $P' \in \text{Spec}(R)$ vardır. $Rs_1 + Rs_2 + \dots + Rs_t \subseteq P'$ olduğundan $P' \in V(< s_1 + s_2 + \dots + s_t >)$ olur. Buradan $P' \in V(J)$ olup $J \subseteq P$ dir. $\sqrt{J}$ tanımından $\sqrt{J} \subseteq P'$ olur. $x \in P'$ bulunur ki bu ise bir çelişkidir. O halde $x \in \sqrt{Rs_1 + Rs_2 + \dots + Rs_t}$ olup $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{Rs_1 + Rs_2 + \dots + Rs_t}$ elde edilir. Ayrıca $s_1, s_2, \dots, s_t \in J$ olduğundan $\tilde{V}(< s_1, s_2, \dots, s_t >) = V(< s_1, s_1, \dots, s_t >) \setminus V(J) = \emptyset$ dir. Dolayısıyla $V(< s_1, s_2, \dots, s_t >) = V(J)$ olur. 4.5. Teoreminden $\sqrt{Rs_1 + Rs_2 + \dots + Rs_t} = \sqrt{J}$ bulunur.

(iii) J (*) şartını sağlasın. $\{B_i \mid i \in \wedge\}$, X_J nin açık örtüsü olsun. B_i , $(X_J)^{s_i}$ lerin birleşimi olarak ifade edildiğinden her $i \in \wedge$ için $B_i = (X_J)^{s_i}$ biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} X_J &= \bigcup_{i \in \wedge} (X_J)^{s_i} \\ &= \bigcup_{i \in \wedge} (X_J \setminus \tilde{V}(< s_i >)) \\ &= X_J \setminus \bigcap_{i \in \wedge} (X_J \setminus \tilde{V}(< s_i >)) \\ &= X_J \setminus \tilde{V}(< s_i \mid i \in \wedge >). \end{aligned}$$

$P \in X_J \setminus \bigcap_{i \in \wedge} [(X_J \setminus \tilde{V}(< s_i >))]$ olsun. O halde her $i \in \wedge$ için $P \in X_J$ ve $P \notin \tilde{V}(< s_i >)$ dir. $\tilde{V}(<$

$s_i >)) = V(< s_i >) \setminus V(J)$ den $P \notin V(< s_i >)$ ve $P \in V(J)$ olur. Buradan $< s_i > \not\subseteq P$ ve $J \subseteq P$ sağlanır. $P \in \tilde{V}(< s_i \mid i \in \wedge >)$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $P \notin \tilde{V}(< s_i \mid i \in \wedge >)$ olsun. O halde $P \in V(< s_i \mid i \in \wedge >)$ ve $P \notin V(J)$ olur. Dolayısıyla $< s_i \mid i \in \wedge > \subseteq P$ ve $J \not\subseteq P$ dir. $< s_i > \subseteq < s_i \mid i \in \wedge > \subseteq P$ kapsamından $< s_i > \subseteq P$ ve $J \not\subseteq P$ olup çelişki elde edilir. O halde $P \in \tilde{V}(< s_i \mid i \in \wedge >)$ bulunur. Böylece $P \in X_J \setminus \tilde{V}(< s_i \mid i \in \wedge >)$ olur. O halde $X_J \setminus \bigcap_{i \in \wedge} [(X_J \setminus \tilde{V}(< s_i >))]$ $\subseteq X_J \setminus \tilde{V}(< s_i \mid i \in \wedge >)$ elde edilir. $P \in X_J \setminus \tilde{V}(< s_i \mid i \in \wedge >)$ keyfi olsun. Bu durumda $P \in X_J$ ve $P \notin \tilde{V}(< s_i \mid i \in \wedge >)$ olur. $\tilde{V}(< s_i \mid i \in \wedge >) = V(< s_i > \mid i \in \wedge >)$ olduğundan $P \notin V(< s_i \mid i \in \wedge >)$ ve $P \in V(J)$. olduğu açıktır. Dolayısıyla $< s_i \mid i \in \wedge > \not\subseteq P$ ve $J \subseteq P$ bulunur. $P \in X_J \setminus \bigcap_{i \in \wedge} \tilde{V}(< s_i >))$ olduğunu göstermek için aksini kabul edelim. $P \notin X_J \setminus \bigcap_{i \in \wedge} (X_J \setminus \tilde{V}(< s_i >))$ olsun. O halde $P \notin X_J$ ve $P \in \bigcap_{i \in \wedge} (X_J \setminus \tilde{V}(< s_i >))$ dir. Buradan $J \not\subseteq P$ ve $< s_i > \subseteq P$ olur. Böylece $J \subseteq P$ çelişkisi elde edilir. O halde $P \in X_J \setminus \bigcap_{i \in \wedge} \tilde{V}(< s_i >))$ dir. Böylece $X_J \setminus \tilde{V}(< s_i \mid i \in \wedge >) \subseteq X_J \setminus \bigcap_{i \in \wedge} (X_J \setminus \tilde{V}(< s_i >))$ olur. Sonuç olarak $X_J \setminus \tilde{V}(< s_i \mid i \in \wedge >) = X_J \setminus \bigcap_{i \in \wedge} [(X_J \setminus \tilde{V}(< s_i >))]$ olur. Yani $\tilde{V}(< s_i \mid i \in \wedge >) = \emptyset$ bulunur. O halde $V(< s_i \mid i \in \wedge >) \setminus V(J) = \emptyset$ dir. $V(< s_i \mid i \in \wedge >) = V(J)$ eşitliğinden $V(< s_i \mid i \in \wedge >) \subseteq V(J)$ yazılır. (*) hipotezinden $\sqrt{J} = \sqrt{\langle s_j \mid j \in \Delta \rangle}$ eşitliğini sağlayan $\Delta \subseteq \wedge$ sonlu alt kümesi bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
 X_J &= X_J \setminus \tilde{V}(< s_j > \mid j \in \wedge >) \\
 &= X_J \setminus \bigcap_{j \in \Delta} \tilde{V}(< s_j >) \\
 &= \bigcup_{j \in \Delta} [X_J \setminus \tilde{V}(< s_j >)] \\
 &= \bigcup_{j \in \Delta} (X_J)^{s_j}.
 \end{aligned}$$

Buradan $X_J = \bigcup_{j \in \Delta} (X_J)^{s_j}$ sağlanır. Dolayısıyla $(X_J), (X_J)^{s_j}$ sonlu açık alt kümeleri tarafından örtülür. O halde X_J hemen hemen (quasi) kompakttır. $\square$

4.5 Tanım J, R nin hiper ideali olsun.

$$N_J(T) = \bigcap \{P \in \text{Spec}(R) \mid T \subseteq P \text{ ve } J \not\subseteq P\}.$$

J hiper idealini kapsamazken T hiper idealini kapsayan bütün asal hiper ideallerinin arakesiti olan $N_J(T)$ kümesi R nin bir hiper idealidir.

4.8 Yardımcı Teorem J, R hiper halkasının hiper ideali olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) $J = R$ iken $N_J(T) = \sqrt{T}$ dir.

(ii) $N_J(T)$, R nin hiper idealidir.

(iii) $K \subseteq T$, R nin hiper ideali olmak üzere $N_{J/K}(T/K) = N_J(T)/K$ dir.

(iv) $N_J(0) = N_{\sqrt{J}}(0)$ dir.

Kanıt (i) $N_J(T) = N_R(T) = \bigcap \{P \in \text{Spec}(R) \mid T \subseteq P, R \not\subseteq P\} = \bigcap \{P \in \text{Spec}(R) \mid T \subseteq P\} = \sqrt{T}$ olduğu açıktır.

(ii) $N_J(T)$ nin R nin hiper ideali olduğunu gösterelim. $x, y \in N_J(T)$ alalım. O halde $T \subseteq P$, $J \not\subseteq P$ olacak şekilde R nin P hiper ideali vardır. $x, y \in P$, $P \in \text{Spec}(R)$ olduğundan $x - y \subseteq P$, $T \subseteq P, J \not\subseteq P$ dir. O halde $x - y \in N_J(T)$ olur.

$s \in R$, $r \in N_J(T)$ için $r \in N_J(T)$ ise $T \subseteq P$, $J \not\subseteq P$ olan her $P \in \text{Spec}(R)$ için $r \in P$ dir. O halde $rs \in P$ olup $rs \in N_J(T)$ olur.

(iii) $N_{J/K}(T/K) = \bigcap \{P/K \in \text{Spec}(R/K) \mid T/K \subseteq P/K, J/K \not\subseteq P/K\}$ dir. $x + K \in N_{J/K}(T/K)$ alalım. $T/K \subseteq P/K$, $J/K \not\subseteq P/K$ olacak şekilde her P/K hiper ideali için $x + K \in P/K$ dir. Yani $x \in P$ dir. $T/K \subseteq P/K$ ise $K \subseteq T \subseteq P$ kapsaması gelir. $J/K \not\subseteq P/K$ olduğundan $J \not\subseteq P$ olur. $x \in P$, $T \subseteq P$ ve $J \not\subseteq P$ olduğundan $x \in N_J(T)$ olur. O halde $x + K \in N_J(T)/K$ olup buradan $N_{J/K}(T/K) \subseteq N_J(T)/K$ bulunur. Ters kapsamayı göstermek için $x + K \in N_J(T)/K$ verilsin. $x \in N_J(T)$ dir. O halde $P \in \text{Spec}(R)$ asal hiper ideal olmak üzere $T \subseteq P$ ve $J \not\subseteq P$ koşullarını sağlayan $x \in P$ vardır. $K \subseteq T$ olduğundan $K \subseteq T \subseteq P$ kapsamısından $T/K \subseteq P/K$ bulunur. $J \not\subseteq P$ için $J/K \not\subseteq P/K$ dir. O halde $x + K \in N_{J/K}(T/K)$ dir. Buradan $N_J(T)/K \subseteq N_{J/K}(T/K)$ olur.

(iv) $N_J(0) = \bigcap \{P \in \text{Spec}(R) \mid 0 \subseteq P, J \not\subseteq P\}$ dir. $x \in N_J(0)$ alalım. O halde $0 \subseteq P$, $J \not\subseteq P$ olacak şekildeki her $P \in \text{Spec}(R)$ için $x \in P$ dir. $x \in N_{\sqrt{J}}(0)$ olduğunu gösterelim. $N_{\sqrt{J}}(0) = \bigcap \{P' \in \text{Spec}(R) \mid 0 \subseteq P', J \not\subseteq P'\}$ dir. $J \subseteq \sqrt{J}$ kapsaması kullanılarak $J \subseteq \sqrt{J} \not\subseteq P'$ olup $J \not\subseteq P'$ bulunur. Kabul edelim ki $J \subseteq P'$ olsun. $\sqrt{J} = \{s \in S \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } s^n \in J\}$ olduğundan her $x \in \sqrt{J}$ için $x^n \in J$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $J \subseteq P'$ olduğundan $x^n \in P'$ olur. P' asal hiper ideal olduğundan $x \in P'$ olur. Buradan $\sqrt{J} \subseteq P'$ bulunur. Ancak bu durum $\sqrt{J} \not\subseteq P'$ olmasıyla çelişir. O halde $\sqrt{J} \not\subseteq P'$ olur. $0 \subseteq P'$, $J \subseteq P'$ olduğundan P' , $N_J(0)$ kümesindeki P lerden biridir. Yani $x \in N_{\sqrt{J}}(0)$ dir. O halde $N_J(0) \subseteq N_{\sqrt{J}}(0)$ olur. Şimdi de ters kapsamayı gösterelim: $N_{\sqrt{J}}(0)$ tanımından $0 \subseteq P$, $\sqrt{J} \not\subseteq P$ olacak şekilde keyfi $P \in \text{Spec}(R)$ alalım. $\sqrt{J} \not\subseteq P$ olduğundan $a \notin \sqrt{J}$ olacak şekilde $a \in P$ vardır. $a \notin \sqrt{J}$ olduğundan $a^n \notin J$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $a \in P$ olduğundan $a^n \in P$ olur. O halde $J \not\subseteq P$ dir. $0 \subseteq P$, $J \not\subseteq P$ olduğundan istenen elde edilir. $\square$

4.9 Teorem J , R hiper halkasının hiper ideali ve $\sqrt{J} \neq \sqrt{0}$ olsun. Bu takdirde X_J nin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $N_J(0)$ nin R nin asal hiper ideali olmasıdır.

Kanıt $N_J(0) \in \text{Spec}(R)$ ve $T \subseteq X_J$ boştan farklı açık küme olsun. L , R nin hiper ideali olmak

üzere $T = X_J \setminus \tilde{V}(L) = X \setminus [V(J) \cup V(R)]$ olduğunu gösterelim. $P \in X_J \setminus \tilde{V}(L)$ alalım. $P \in X_J$ ve $P \notin \tilde{V}(L)$ dir. $X_J = X \setminus V(J)$, $\tilde{V}(L) = V(L) \setminus V(J)$ olduğunu biliyoruz. $P \in X_J$ ise $P \notin V(J)$ ve $P \notin \tilde{V}(L)$ ise $P \notin V(L)$ dir. Buradan $P \notin V(L) \cup V(J)$ olup $P \in X \setminus [V(L) \cup V(J)]$ bulunur. O halde $T = X_J \setminus \tilde{V}(L) \subseteq X \setminus [V(J) \cup V(L)]$ elde edilir. $P \in X \setminus [V(J) \cup V(L)]$ keyfi olsun. $P \in X$ ve $P \notin V(J) \cup V(L)$ dir. Buradan $P \notin V(J)$ ve $P \notin V(L)$ dir. $P \notin V(J)$ ise $P \in X_J$ ve $P \notin V(L)$ ise $P \notin V(L) \setminus V(J)$ olur. Böylece $P \notin \tilde{V}(L)$ ve $P \in X_J \setminus \tilde{V}(L)$ bulunur. O halde $X \setminus [V(J) \cup V(L)] \subseteq X_J \setminus \tilde{V}(L)$ olur. Şimdi $P \in T$ keyfi olsun. Buradan $P \notin V(J) \cup V(L)$ dir. O halde $L \notin P$ ve $J \notin P$ olmalıdır. $J \notin P$ olduğundan $N_J(0) \subseteq P$ bulunur. Böylece $L \not\subseteq N_J(0)$ dir. $L \subseteq N_J(0)$ olsa $N_J(0) = \bigcap_{0 \subseteq P \in \text{Spec}(R)} P$ tanımından $L \subseteq P$ bulunur. Bu ise $L \not\subseteq P$ olmasıyla çelişir. O halde $L \not\subseteq N_J(0)$ dir. Böylece $N_J(0) \notin V(L)$ bulunur. Bu $N_J(0)$ tanımından $N_J(0) \notin V(J)$ iken $N_J(0) \notin V(L)$ ve $N_J(0) \notin V(J)$ olup $N_J(0) \notin V(J) \cap V(L)$ buradan da $N_J(0) \in T$ elde edilir. Böylece X_J nin boştan farklı açık alt kümesi $N_J(0)$ kümesini içerir. Yani X_J den alınan herhangi iki açık alt kümenin arakesiti boştan farklı olur. Böylece X_J indirgenemezdir. Tersine X_J indirgenemez olsun. $N_J(0) \in \text{Spec}(R)$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $N_J(0)$ asal hiper ideal olmasın. O halde $x, y \in R$ olmak üzere $xy \in N_J(0)$ iken $x, y \in R \setminus N_J(0)$ olur. Hipotezden $\sqrt{J} \neq \sqrt{0}$ dir. $x \in R \setminus N_J(0)$ olduğundan $x \notin N_J(0)$ dir. O halde $0 \subseteq P$ ve $J \not\subseteq P$ olan R nin bir P asal hiper ideali için $x \notin P$ dir. $\tilde{V}(\langle x \rangle) = V(\langle x \rangle) \setminus V(J)$ dir. Buradan $\tilde{V}(\langle x \rangle) = \emptyset$ olsa $V(\langle x \rangle) = V(J)$ olup $V(\langle x \rangle) = V(J) = \{P \in X \mid J \subseteq P\}$ eşitliğinden $x \in P$ çelişkisi elde edilir. O halde $\tilde{V}(\langle x \rangle) \neq \emptyset$ dir. $\tilde{V}(x) = V(X) \setminus V(J) = X_J = X \setminus V(J)$ olsa $V(X) = X$ eşitliğinden $x \in N_J(0)$ çelişkisi elde edilir. O halde $X_J \neq \tilde{V}(\langle x \rangle)$ olur. Benzer işlemlerle $(X_J)^x = X \setminus V(xJ) \neq \emptyset$ olduğu gösterilir. Yine $(X_J)^y \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned}
(X_J)^x \cap (X_J)^y &= (X_J)^{xy} \\
&= X_J \setminus \tilde{V}(xy) \\
&\subseteq X_J \setminus \tilde{V}(N_J(0))
\end{aligned}$$

dir. Şimdi $\tilde{V}(N_J(0)) \subseteq \tilde{V}(xy)$ olduğunu gösterelim. $P \in \tilde{V}(N_J(0))$ alalım. $\tilde{V}(N_J(0)) = V(N_J(0)) \setminus V(J)$ dir. $P \in V(N_J(0))$, $P \notin V(J)$ olup $N_J(0) \subseteq P$ ve $J \not\subseteq P$ dir. $xy \in \langle xy \rangle$ ve $xy \in N_J(0)$ olduğu açıktır. O halde $\langle xy \rangle \subseteq N_J(0) \subseteq P$ kapsamalarından $\langle xy \rangle \subseteq P$ bulunur. Yani $P \in V(\langle xy \rangle)$ iken $J \not\subseteq P$ olduğundan $P \in \tilde{V}(\langle xy \rangle)$ elde edilir. Buradan $\tilde{V}(N_J(0)) \subseteq \tilde{V}(\langle xy \rangle)$ iken $X_J \setminus \tilde{V}(xy) \subseteq X_J \setminus \tilde{V}(N_J(0))$ elde edilir. Şimdi de $X_J \setminus \tilde{V}(N_J(0)) = X \setminus [N_J(0) \cup V(J)]$ olduğunu gösterelim. $K = X_J \setminus \tilde{V}(E) = X \setminus [V(E) \cup V(J)]$ olduğu için $E = N_J(0)$ alınırsa istenilen elde edilir. $X \setminus (V(N_J(0)) \cup V(J)) = \emptyset$ bulunur. $P \in X \setminus [V(N_J(0)) \cup V(J)]$ olsun. $P \notin N_J(0)$ ve $P \notin V(J)$ dir. Böylece $N_J(0) \not\subseteq P$ ve $J \not\subseteq P$ dir. $N_J(0) = \bigcap_{J \not\subseteq P} P \subseteq P$ olup $N_J(0) \subseteq P$ kapsaması elde edilir. Bu ise $N_J(0) \not\subseteq P$ olmasıyla çelişir. O halde $P = \emptyset$ bulunur ki, buradan $(X_J)^x \cap (X_J)^y = \emptyset$ eşitliği bulunur. Bu ise X_J nin indirgenemez olmasıyla çelişir. O halde $N_J(0) \in \text{Spec}(R)$ dir. $\square$

4.6 Tanım Bir R hiper halkasında $N_J(U_1) \subseteq N_J(U_2) \subseteq \dots$ artan zinciri için $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ için $N_J(U_t) = N_J(U_{t+i})$ olacak şekilde $i \in \mathbb{Z}^+$ varsa R hiper halkasına TN -şartını sağlıyordur denir.

Sıradaki teoremde TN -şartı yardımıyla Noether topolojik hiper vektör uzayı karakterize edilmektedir.

4.10 Teorem J , R hiper halkasında bir hiper ideal olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) R, TN -şartını sağlar.

(ii) X_J Noether topolojik hiper vektör uzayıdır.

Kanıt (i) $\Rightarrow$ (ii) R, TN -şartını sağlasın. X_J nin Noether olduğunu göstermek için U_i , R nin hiper ideali olmak üzere $\tilde{V}(U_1) \supseteq \tilde{V}(U_2) \supseteq \dots$ şeklinde azalan zincirini alalım. Bu takdirde $N_J(U_1) \subseteq N_J(U_2) \subseteq \dots$ şeklinde artan zinciri elde edilir. Genelliği bozmadan $\tilde{V}(U_1) \supseteq \tilde{V}(U_2)$ iken $N_J(U_1) \subseteq N_J(U_2)$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $N_J(U_1) \not\subseteq N_J(U_2)$ olsun. O halde $x \in N_J(U_1)$ için $x \notin N_J(U_2)$ dir. $x \in N_J(U_1)$ ise $U_1 \subseteq P$, $J \not\subseteq P$ olacak şekildeki her $P' \in Spec(R)$ için $x \in P$ dir. $x \notin N_J(U_2)$ ise $U_2 \subseteq P'$, $J \not\subseteq P'$ olacak şekildeki her P asal hiper ideali için $x \notin P'$ dir. $U_2 \subseteq P'$ iken $P' \in V(U_2)$ ve $J \not\subseteq P'$ iken $P' \notin V(J)$ olup $P' \in \tilde{V}(U_2)$ bulunur. O halde $\tilde{V}(U_2) \subseteq \tilde{V}(U_1)$ iken $P' \in \tilde{V}(U_1)$ dir. $\tilde{V}(U_1) = V(U_1) \setminus V(J)$ tanımından $P' \in V(U_1)$, $P \notin V(J)$ dir. Buradan $J \not\subseteq P'$ iken $U_1 \subseteq P'$ elde edilir. $x \in N_J(U_1)$ alalım. Tanım gereği U_1 kümesini kapsayan J hiper idealini kapsamayan tüm $P \in Spec(R)$ için $x \in P$ olduğundan ve $U_1 \subseteq P'$, $J \not\subseteq P'$ olup P', R nin $P \in Spec(R)$ hiper ideallerinden biridir. Yani $x \in P'$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $N_J(U_1) \subseteq N_J(U_2)$ kapsaması elde edilir. Bu yolla $N_J(U_1) \subseteq N_J(U_2) \subseteq \dots$ artan zincirin varlığı açıktır. Hipotezden R, TN -şartını sağladığından $N_J(U_m) = N_J(U_{m+i})$ olacak şekilde m tamsayısı vardır. Bu ise X_J nin Noether olduğunu göstermektedir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) X_J Noether topolojik hiper vektör uzayı olsun. U_i , R nin hiper ideali olmak üzere $N_J(U_1) \subseteq N_J(U_2) \subseteq \dots$ artan zincirini alalım. Buradan $\tilde{V}(U_1) \supseteq \tilde{V}(U_2) \supseteq \dots$ azalan zincir elde edilir. $N_J(U_1) \subseteq N_J(U_2)$ iken $\tilde{V}(U_1) \supseteq \tilde{V}(U_2)$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\tilde{V}(U_1) \not\subseteq \tilde{V}(U_2)$ olsun. O halde $P \notin \tilde{V}(U_1)$ olacak şekilde $P \in \tilde{V}(U_2)$ vardır. Dolayısıyla $P \in V(U_2)$ iken $P \notin V(J)$ dir. Yani $U_2 \subseteq P$, $J \not\subseteq P$ bulunur. Böylece $P \notin \tilde{V}(U_1)$ iken $P \notin V(U_1)$ veya $P \in V(J)$ dir. $P \in V(J)$ dir. Burada $P \notin V(J)$ olduğundan $P \notin V(U_1)$ dir. $N_J(U_2) = \bigcap_{\substack{P \in Spec(R) \\ J \not\subseteq P}} P$ olduğundan $N_J(U_2) \subseteq P$ kapsaması sağlanır. $N_J(U_1) \subseteq N_J(U_2)$ olduğundan $N_J(U_1) \subseteq P$ bulunur. $N_J(U_1) = \bigcap_{\substack{U_1 \subseteq P' \in Spec(R) \\ J \not\subseteq P'}} P' \subseteq P$ elde edilir. Bu ise $P \notin V(U_1)$ olmasıyla çelişir. o halde $\tilde{V}(U_1) \supseteq \tilde{V}(U_2)$ dir. Tümevarımla $\tilde{V}(U_1) \supseteq \tilde{V}(U_2) \supseteq \dots$ azalan zin-

ciri elde edilir. Hipotez gereğince $N_J(U_1) \subseteq N_J(U_2) \subseteq \dots$ artan zinciri sonlu bir adım sonra eşitlendiğinden $\tilde{V}(U_1) \supseteq \tilde{V}(U_2) \supseteq \dots$ azalan zinciri de sonlu bir adımdan sonra sabitlenir. Böylece R , TN -şartını sağlar. $\square$

4.11 Yardımcı Teorem R hiper halka ve K ve L , R hiper halkasının hiper idealleri olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- (i) $V(L) = V(\sqrt{L})$ dir.
- (ii) $L \subseteq K$ ise $V(K) \subseteq V(L)$ dir.
- (iii) $V(L) \subseteq V(K)$ olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{K} \subseteq \sqrt{L}$ olmasıdır.
- (iv) $V(L) = V(K)$ olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{K} = \sqrt{L}$ olmasıdır.

Kanıt (i) $P \in V(L)$ olsun. O halde $L \subseteq P$ dir. $x \in \sqrt{L}$ keyfi elemanı için $x^n \in L$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $P \in \text{Spec}(R)$ olduğundan $x \in P$ olup $\sqrt{L} \subseteq P$ elde edilir. O halde $P \in V(\sqrt{L})$ dir. $P \in V(\sqrt{L})$ keyfi olsun. Buradan $\sqrt{L} \subseteq P$ olup $L \subseteq \sqrt{L}$ kapsamından $L \subseteq P$ bulunur. Böylece $P \in V(L)$ dir.

(ii) $P \in V(K)$ için $K \subseteq P$ olduğu açıktır. Hipotezden $L \subseteq K$ olduğundan $L \subseteq P$ bulunur ki $P \in V(L)$ olup istenen elde edilir.

(iii) Kabul edelim ki $\sqrt{K} \not\subseteq \sqrt{L}$ olsun. O halde $x \in \sqrt{K}$ ve $x \notin \sqrt{L}$ olacak şekilde $x \in R$ vardır. $x \in \sqrt{K}$ olduğundan K yı kapsayan tüm $P \in \text{Spec}(R)$ için $x \in P$ dir. Ayrıca $x \notin \sqrt{L}$ olduğundan $L \subseteq P'$ için $x \notin P'$ olacak şekilde P' asal hiper ideali vardır. Hipotezden $V(L) \subseteq V(K)$ olduğundan $P' \in V(K)$ dir. $K \subseteq P'$ olup $\sqrt{J} \subseteq P'$ kapsamı vardır. $x \in \sqrt{J}$ olduğundan $x \in P'$ olup çelişki elde edilir. O halde $\sqrt{K} \subseteq \sqrt{L}$ dir. Ters kapsamayı göstermek için $\sqrt{K} \subseteq \sqrt{L}$ olduğunu kabul edelim. O halde $V(\sqrt{K}) \subseteq V(\sqrt{L})$ dir. (i) den $V(L) = V(\sqrt{L})$ ve $V(K) = V(\sqrt{K})$ olduğundan $V(L) \subseteq V(K)$ elde edilir.

(iv), (iii) den açıktır. $\square$

4.1 Sonuç R hiper halka olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

- (i) X Noether topolojik hiper vektör uzaydır.
- (ii) J , R nin hiper ideali olmak üzere X_J bir Noether topolojik hiper vektör uzaydır.
- (iii) R , TN -şartını sağlar.
- (iv) R , R nin radikal hiper idealleri üzerinde artan zincir şartını sağlar.

Kanıt (i) $\Rightarrow$ (ii) Noether hiper halkasının her alt hiper halkası da Noether olduğundan açıktır. (iv) $\Leftrightarrow$ (i) $\sqrt{J_1} \subseteq \sqrt{J_2} \subseteq \sqrt{J_3} \subseteq \dots$ bir artan zinciri olsun. Buradan $V(\sqrt{J_1}) \supseteq V(\sqrt{J_2}) \supseteq \dots$ azalan zinciri bulunur. $V(\sqrt{J}) = V(J)$ olduğundan $V(J_1) \supseteq V(J_2) \supseteq \dots$ azalan zinciri vardır. $V(J_i)$ kapalı kümeler, azalan zincirin elemanları olduğundan ve X Noether topolojik hiper vektör uzay olduğundan bu zincir belli bir adım sonunda sabitlenir. Yani $V(J_m) = V(J_{m+1})$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}^+$ mevcuttur. Böylece artan zincir şartı sağlanır. Tersisi de benzer şekilde gösterilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) U_i , R nin hiper ideali olmak üzere $V(U_1) \supseteq V(U_2) \supseteq \dots$ bir azalan zincir olsun. R nin bir hiper ideali $J = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} U_i$ olsun. X_J üzerinde Zariski topolojisine göre $\tilde{V}(U_1) \supseteq \tilde{V}(U_2) \supseteq \dots$ bir azalan zinciri oluşturur. X_J Noether olduğundan $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ için $\tilde{V}(U_m) = \tilde{V}(U_{m+i})$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $V(U_m) = V(U_{m+i})$ eşitliği sağlanır. Yani X Noether olur.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Teorem 4.10 dan açıktır. □

Aşağıdaki teoremden R hiper halkasında alınan öz hiper ideallerin radikallerinin kapsama bağıntısına göre tam sıralı olması $\text{Spec}(R)$ nin açık kümelerinin tam sıralı olmasıyla ilişkilendirildi.

4.12 Teorem K, L ve M, R nin öz hiper idealleri olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) X in herhangi açık kümeleri X_J şeklindedir.

(ii) $X_K = X_L$ olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{K} = \sqrt{L}$ olmasıdır.

(iii) $X_K \subseteq X_L$ olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{K} \subseteq \sqrt{L}$ olmasıdır.

(iv) $X_K \cap X_L = X_M$ olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{K} \cap \sqrt{L} = \sqrt{KL} = \sqrt{M}$ olmasıdır.

Kanıt (i) $X_J = \text{Spec}(R) \setminus V(J)$ ve R nin her J hiper ideali için $V(J)$, $X_R = \text{Spec}(R)$ nin kapalı alt kümeleri olduğundan X_J , X in açık alt kümeleridir. Burada $J = 0$ iken $X_J = \emptyset$ dir. Ayrıca $J = R$ için $X_J = X$ dir.

(ii) ($\Rightarrow$) Yardımcı Teorem 4.11 den $X_K = X_L$ olması için gerekli ve yeter koşul $\sqrt{K} = \sqrt{L}$ olmasıdır ve $V(K) = V(\sqrt{K})$, $V(L) = V(\sqrt{L})$ eşitliği sağlanır. $x \in \sqrt{K}$ ve $x \notin \sqrt{L}$ olsun. $x \in \sqrt{K}$ ise $x \in \sqrt{K} = \bigcap_{K \subseteq P} P$ olan her $P \in \text{Spec}(R)$ için $x \in P$ dir. $K \subseteq P$ ise $P \in V(K)$ dir. $P \in V(K)$ ise $P \notin X_K$ dir. Hipotezden $X_K = X_L$ olduğundan $P \notin X_L$ dir. Buradan $P \in V(L)$ olup $L \subseteq P$ elde edilir. $\sqrt{L}$, L yi kapsayan tüm asal hiper ideallerin arakesiti olup bunların en

küçüğü olduğundan $\sqrt{L} \subseteq P$ dir. $x \notin \sqrt{L}$ ise $x \notin P'$ olacak şekilde $L \subseteq P'$ koşulunu sağlayan $P' \in \text{Spec}(R)$ vardır. $L \subseteq P'$ ise $P' \in V(L)$ bulunur. Buradan $P' \notin X_L$ dir. Hipotezden $X_K = X_L$ olduğundan $P' \notin X_K$ dir. O halde $P' \in V(K)$ dir. Dolayısıyla $K \subseteq P'$ bulunur. $x \in \sqrt{K}$ iken $\forall K \subseteq P$ için $x \in P$ olduğundan $x \in P'$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $x \in \sqrt{L}$ dir. Dolayısıyla $\sqrt{K} \subseteq \sqrt{L}$ kapsaması elde edilir. Ters kapsama da benzer şekilde gösterilir.

($\Leftarrow$) $\sqrt{K} = \sqrt{L}$ olsun. Yardımcı Teorem 4.11 den $V(\sqrt{K}) = V(\sqrt{L})$ olur. Yani $V(K) = V(L)$ olup $X_K = X_L$ bulunur.

(iii) ($\Rightarrow$) $\sqrt{K} \not\subseteq \sqrt{L}$ olsun. O halde $x \in \sqrt{K}$ için $x \notin \sqrt{L}$ dir. Yani $K \subseteq P$ olan $P \in \text{Spec}(R)$ için $x \in P$ ve $L \subseteq P'$ olan $P' \in \text{Spec}(R)$ için $x \notin P'$ dir. $K \subseteq P$ ve $L \subseteq P'$ olduğundan $P \in V(K)$, $P' \in V(L)$ elde edilir. Dolayısıyla $P \notin X_K$, $P' \notin X_L$ dir. Hipotezden $X_K \subseteq X_L$ olduğundan $P' \notin X_K$ olur. Buradan $P' \in V(K)$ olup $K \subseteq P'$ kapsaması elde edilir. $x \in \sqrt{K}$ olduğundan K yı kapsayan her P asal hiper ideali için $x \in P$ olduğundan $x \in P'$ bulunur. Bu ise $x \notin P'$ olmasıyla çelişir. O halde $\sqrt{K} \subseteq \sqrt{L}$ olmalıdır.

($\Leftarrow$) $\sqrt{K} \subseteq \sqrt{L}$ ise Yardımcı Teorem 4.11 den $V(\sqrt{L}) \subseteq V(\sqrt{K})$ ve $V(\sqrt{K}) = V(K)$ olup $V(L) \subseteq V(K)$ bulunur. O halde $X \setminus V(K) \subseteq X \setminus V(L)$ olup $X_K \subseteq X_L$ bulunur.

(iv) ($\Rightarrow$) $KL \subseteq K$, $KL \subseteq L$ dir. Yardımcı Teorem 4.11 den $\sqrt{KL} \subseteq \sqrt{K}$, $\sqrt{KL} \subseteq \sqrt{L}$ dir. Buradan $\sqrt{KL} \subseteq \sqrt{K} \cap \sqrt{L}$ dir. Ters kapsamayı göstermek için $x \in \sqrt{K} \cap \sqrt{L}$ alalım. Bu durumda $x \in \sqrt{K}$, $x \in \sqrt{L}$ dir. O halde $K \subseteq P$ ve $L \subseteq P$ olan her $P \in \text{Spec}(R)$ için $x \in P$ dir. $KL \subseteq K \subseteq P$, $KL \subseteq L \subseteq P$ den $\sqrt{KL} \subseteq P$ kapsaması vardır. $x \notin \sqrt{KL}$ olsun. O halde $x \notin \sqrt{KL} \subseteq P'$ olacak şekilde P' asal hiper ideali vardır. $P' \in \text{Spec}(R)$ olduğundan $K \subseteq P'$ veya $L \subseteq P'$ olmalıdır. Böylece x hem K yı hem L yı kapsayan bir asal hiper idealin elemanı değildir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde $x \in \sqrt{KL}$ dir. Dolayısıyla $\sqrt{K} \cap \sqrt{L} \subseteq \sqrt{KL}$ olup $\sqrt{K} \cap \sqrt{L} = \sqrt{KL}$ eşitliği elde edilir. Şimdi $\sqrt{K} \cap \sqrt{L} = \sqrt{M}$ olduğunu gösterelim. Hipotezden $X_K \cap X_L = X_M$ olduğunu biliyoruz. $x \in \sqrt{K} \cap \sqrt{L}$ olsun. $x \in K \subseteq P$, $x \in L \subseteq P$ olacak şekilde her $P \in \text{Spec}(R)$ için $x \in P$ dir. Aynı zamanda $P \in V(K) \cap V(L)$ olup $P \notin X_K \cap X_L$ bulunur. Buradan $P \notin X_M$ dir. O halde $P \in V(M)$ olup $M \subseteq P$ kapsamından $\sqrt{M} \subseteq P$ elde edilir. $x \notin \sqrt{M}$ olsun. O halde $M \subseteq P''$ ve $x \notin P''$ olacak şekilde R nin $P'' \in \text{Spec}(R)$ vardır. Buradan $P'' \in V(M)$ olup $P'' \notin X_M$ sonucu elde edilir. Böylece $P'' \notin X_K \cap X_L$ olup $P'' \notin X_K$ veya $P'' \notin X_L$ olmalıdır. $P'' \notin X_K$ olsun. O halde $P'' \in V(K)$ dır. Buradan $K \subseteq P''$ olup $x \in K$ iken $x \in P''$ olup çelişki elde edilir. Benzer şekilde $P'' \notin X_L$ için de benzer işlemler yapılır. O halde $x \in \sqrt{M}$ dir. Böylece $\sqrt{K} \cap \sqrt{L} \subseteq \sqrt{M}$ olur. Ters kapsamayı göstermek için $x \in \sqrt{M}$ alalım. O halde $M \subseteq P$ olan her P asal hiper ideali için $x \in P$ olmalıdır. $P \in V(M)$ olup $P \notin X_M$ dir. $X_K \cap X_L = X_M$ olduğundan $P \notin X_K$ veya $P \notin X_L$ dir. $P \notin X_K$ iken $P \in V(K)$ dır. $K \subseteq P$ olması kullanılarak $\sqrt{K} \subseteq P$ bulunur. $x \notin \sqrt{K}$ olsun. O halde $K \subseteq P'$ olan $P' \in \text{Spec}(R)$ için $x \notin P'$ dir. $K \subseteq P'$ olduğundan $P' \in V(K)$ olup $P' \notin X_K$ dır. O halde $P' \notin X_M$ olup $P' \in V(M)$ bulunur. Buradan $K \subseteq P'$ ve $x \in \sqrt{M}$ olduğundan $M \subseteq P$ olan her P asal hiper ideali için $x \in P$ olduğundan $x \in P'$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $x \in \sqrt{K}$ olur. Dolayısıyla $\sqrt{M} \subseteq \sqrt{K}$ dır. Benzer şekilde $P \notin X_L$ için de $\sqrt{M} \subseteq \sqrt{L}$ kapsaması elde edilir. Sonuç olarak $\sqrt{M} \subseteq \sqrt{K} \cap \sqrt{L}$ kapsaması vardır.

($\Leftarrow$) $\sqrt{M} = \sqrt{K} \cap \sqrt{L} = \sqrt{KL}$ olsun. $P \in X_K \cap X_L$ verilsin. $P \in X_K$, $P \in X_L$ dir. $X_K = X \setminus V(K)$ ve $X_L = X \setminus V(L)$ olduğundan $P \notin V(K)$ ve $P \notin V(L)$ dir. Yani $K \not\subseteq P$, $L \not\subseteq P$ dir. $KL \subseteq K \not\subseteq P$ iken $KL \not\subseteq P$ dir. Aksi taktirde $KL \subseteq P$ olsa $P \in \text{Spec}(R)$ olduğundan $K \subseteq P$ veya $L \subseteq P$ olmalıdır. Bu ise $K \not\subseteq P$, $L \not\subseteq P$ olmasıyla çelişir. O halde $KL \not\subseteq P$ bulunur. Dolayısıyla $\sqrt{KL} \not\subseteq P$ olur. Hipotezden $\sqrt{KL} = \sqrt{M}$ iken $\sqrt{M} \not\subseteq P$ dir. Yani $P \notin V(M)$ olup. $P \in X_M$ bulunur. Dolayısıyla $X_K \cap X_L \subseteq X_M$ kapsaması elde edilir.

Şimdi de ters kapsamayı gösterelim. $P \in X_M$ keyfi olsun. $P \notin V(M)$ olup $K \not\subseteq P$ bulunur. Buradan $\sqrt{M} \not\subseteq P$ dir. $\sqrt{M} = \sqrt{K} \cap \sqrt{L}$ olduğundan $\sqrt{K} \cap \sqrt{L} \not\subseteq P$ elde edilir ki $P \notin V(\sqrt{K} \cap \sqrt{L})$ dir. $\sqrt{K} \cap \sqrt{L} \subseteq \sqrt{K}$ iken Yardımcı Teorem 4.11 (ii) den $V(\sqrt{K}) \subseteq V(\sqrt{K} \cap \sqrt{L})$ dir. Benzer şekilde $\sqrt{K} \cap \sqrt{L} \subseteq \sqrt{L}$ iken Yardımcı Teorem 4.11 (ii) den $V(\sqrt{L}) \subseteq V(\sqrt{K} \cap \sqrt{L})$ bulunur. Dolayısıyla $P \notin V(\sqrt{K}) = V(K)$ eşitliğinden $P \in X_K$ elde edilir. $P \notin V(\sqrt{L}) = V(L)$ olup $P \in X_L$ dir. Buradan $P \in X_L \cap X_K$ olup $X_M \subseteq X_L \cap X_K$ kapsaması elde edilir. $\square$

4.2 Sonuç K ve L , R hiper halkasının öz hiper idealleri olsun. O halde $X_K \cap X_L = \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{K} \cap \sqrt{L} = \sqrt{KL} = \sqrt{0}$ olmasıdır.

Kanıt $X_K = \emptyset$ iken $K = 0$ olmasından ispat açıktır. $\square$

4.13 Teorem I, R nin bir öz hiper ideali olsun. O halde X_I nin, X de yoğun olması için gerek ve yeter koşul $J \not\subseteq \sqrt{0}$ olan R nin her J öz hiper ideali için $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{0}$ olmasıdır.

Kanıt ($\Rightarrow$) X_I, X da yoğun olsun. O halde X_J açık küme olduğundan ve hipotezden $X_I \cap X_J \neq \emptyset$ olduğu görülür. Bir önceki sonuçtan $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{0}$ dir.

($\Leftarrow$) $J \not\subseteq \sqrt{0}$ olan R nin bir J hiper idealini alalım. $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{0}$ olduğundan bir önceki sonuçtan $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} \neq \emptyset$ olup $X_I \cap X_J \neq \emptyset$ bulunur. Böylece X_I yoğundur. $\square$

4.7 Tanım R bir hiper halka ve J, R nin sıfırdan farklı bir hiper ideali olsun. J nin R deki sıfırdan farklı her hiper ideal ile arakesiti sıfırdan farklı oluyorsa J ye R nin büyük hiper ideali denir ve $J \trianglelefteq R$ ile gösterilir.

4.14 Teorem Bir R hiper halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $\sqrt{0}, R$ nin bir asal hiper idealidir.

(ii) $\text{Spec}(R)$ indirgenemezdir.

(iii) $R/\sqrt{0}$ bölüm hiper halkasının her hiper ideali büyüktür.

(iv) $Spec(R)$ nin her açık alt kümesi yoğundur.

Kanıt (i) $\Rightarrow$ (ii) I ve J, R nin öz hiper idealleri olsun. X_I ve X_J, X_R nin açık alt kümeleri olmak üzere $X_I \cap X_J \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim. $X_I \cap X_J = \emptyset$ ise bir önceki sonuçtan $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{IJ} = \sqrt{0}$ bulunur. Ayrıca $\sqrt{I}\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$ ve $\sqrt{I}\sqrt{J} \subseteq \sqrt{J}$ olduğundan $\sqrt{I}\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{0}$ dır. Hipotez gereği $\sqrt{0}, R$ nin asal hiper ideali olduğundan $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{0}$ veya $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{0}$ bulunur ki bu ise I ve J nin R nin öz hiper idealleri olmasıyla çelişir. O halde $X_I \cap X_J \neq \emptyset$ olmalıdır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $I \not\subseteq \sqrt{0}, J \not\subseteq \sqrt{0}$ ve $IJ \subseteq \sqrt{0}$ olacak şekilde R nin I, J öz hiper idealleri verilsin. O halde $\sqrt{IJ} = \sqrt{0}$ dır. Burada $X_I \cap X_J \neq \emptyset$ olduğundan $X_I \cap X_J = X_M$ olacak şekilde R nin M öz hiper ideali vardır. Böylece $M \neq 0$ dır. Teorem 4.12 den $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{M}$ elde edilir. Bu ise $M \neq 0$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $Spec(R)$ indirgenemezdir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) I ve J, R nin hiper ideali, X_I ve X_J, X_R nin açık alt kümeleri olsun. $\frac{I+\sqrt{0}}{\sqrt{0}}$ ve $\frac{J+\sqrt{0}}{\sqrt{0}}, \frac{R}{\sqrt{0}}$ in hiper idealleri ve $\frac{R}{\sqrt{0}}$ bölüm hiper halkasının her hiper ideali büyük olduğundan $\frac{I+\sqrt{0}}{\sqrt{0}} \cap \frac{J+\sqrt{0}}{\sqrt{0}} \neq \frac{0+\sqrt{0}}{\sqrt{0}}$ dır. Bu takdirde $(I+\sqrt{0}) \cap (J+\sqrt{0}) \neq 0+\sqrt{0} = 0$ olup $\sqrt{(I+\sqrt{0}) \cap (J+\sqrt{0})} \neq \sqrt{0}$ bulunur. Buradan $\sqrt{(I+\sqrt{0})(J+\sqrt{0})} \neq \sqrt{0}$ dır. $\sqrt{(I+\sqrt{0})(J+\sqrt{0})} = \sqrt{IJ+\sqrt{0}}$ olduğundan $\sqrt{IJ+\sqrt{0}} \neq \sqrt{0}$ dır. O halde $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{0}$ elde edilir. Bir önceki sonuçtan $X_I \cap X_J \neq \emptyset$ dır. Böylece X_I yoğundur.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) $Spec(R)$ nin her açık alt kümesi yoğun olsun. Teorem 4.13 den $X_I, Spec(R)$ de yoğun ise R nin bir J hiper ideali için $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{0}$ dır. Bir önceki sonuçtan $X_I \cap X_J \neq \emptyset$ olur. O halde $Spec(R)$ indirgenemezdir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $Spec(R)$ indirgenemez olsun. O halde $\frac{R}{\sqrt{0}}$ bölüm hiper halkasının $\frac{I+\sqrt{0}}{\sqrt{0}}$ ve $\frac{J+\sqrt{0}}{\sqrt{0}}$ hiper idealleri için $\frac{I+\sqrt{0}}{\sqrt{0}} \cap \frac{J+\sqrt{0}}{\sqrt{0}} = \frac{(I+\sqrt{0}) \cap (J+\sqrt{0})}{\sqrt{0}} = \frac{(IJ+\sqrt{0})}{\sqrt{0}} \neq \sqrt{0}$ olur. Böylece $\frac{R}{\sqrt{0}}$ in her hiper ideali büyüktür. $\square$

4.15 Teorem D ve her $i \in \Lambda$ için J_i, R nin öz hiper idealleri olsun. Bu takdirde $\bigcup_{i \in \Lambda} X_{J_i} = X_D$ olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{D} = \sqrt{\sum_{i \in \Lambda} J_i}$ olmasıdır.

Kanıt

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{i \in \Lambda} X_{J_i} = X_D &\Leftrightarrow \bigcup_{i \in \Lambda} [X \setminus V(J_i)] = X \setminus V(D) \\
 &\Leftrightarrow X \setminus \bigcap_{i \in \Lambda} V(J_i) = X \setminus V(D) \\
 &\Leftrightarrow \bigcap_{i \in \Lambda} V(J_i) = V(D) \\
 &\Leftrightarrow V\left(\sum_{i \in \Lambda} J_i\right) = V(D) \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i \in \Lambda} J_i = D
 \end{aligned}$$

Şimdi $\bigcap_{i \in \wedge} V(J_i) = V(\sum_{i \in \wedge} J_i)$ olduğunu gösterelim. $P \in V(\sum_{i \in \wedge} J_i)$ olsun. Bu takdirde $\sum_{i \in \wedge} J_i \subseteq P$ olur. $\sum_{i \in \wedge} J_i = \bigcup_{i \in \wedge} J_i$ olduğundan her $i \in \wedge$ için $\sum_{i \in \wedge} J_i \subseteq P$ kapsayan en küçük hiper ideal olduğundan $J_i \subseteq \sum_{i \in \wedge} J_i \subseteq P$ kapsaması vardır. Buradan $P \in V(J_i)$ olup $P \in \bigcap_{i \in \wedge} V(J_i)$ bulunur. Şimdi de ters kapsamayı göstermek için $P \in \bigcap_{i \in \wedge} V(J_i)$ alalım. $P \in V(J_i)$ olup $J_i \subseteq P$ bulunur. $\sum_{i \in \wedge} J_i$, J_i leri kapsayan en küçük hiper ideal olduğundan $\sum_{i \in \wedge} J_i \subseteq P$ kapsaması vardır. Böylece $P \in V(\sum_{i \in \wedge} J_i)$ elde edilir. $\square$

4.16 Teorem R hiper halka ve her $i \in \wedge$ için J_i , R nin öz hiper idealleri olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $\bigcup_{i \in \wedge} X_{J_i} = X_D$ olacak şekilde R nin D sonlu üretilmiş hiper ideali vardır.
- (ii) $\Delta \subseteq \wedge$ sonlu alt kümesi için $\bigcup_{i \in \Delta} X_{J_i} = X_D$ olacak şekilde R nin D sonlu üretilmiş hiper ideali vardır.
- (iii) $\Delta \subseteq \wedge$ sonlu alt kümesi için $\sqrt{\sum_{i \in \Delta} J_i} = \sqrt{D}$ olacak şekilde R nin D sonlu üretilmiş hiper ideali vardır.

Kanıt (i) $\Rightarrow$ (iii) $\bigcup_{i \in \wedge} X_{J_i} = X_D$ olsun. Teorem 4.15 den $\sqrt{\sum_{i \in \wedge} J_i} = \sqrt{D}$ dir. Kabul edelim ki D , $\{d_1, d_2, \dots, d_t\}$ elemanları tarafından üretilsin. Bu takdirde $d_i^{n_i} \in D$ olacak şekilde $n_i \in \mathbb{Z}^+$ bulunur. Böylece $d_i^{n_i} \in \sum_{i \in \wedge} J_i$ olur. O halde $\wedge$ nın Δ_i sonlu alt kümesi için $d_i^{n_i} \in \sum_{i \in \Delta_i} J_i$ dir. $n = \max\{n_1, n_2, \dots, n_t\}$ ve $\wedge = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ alınırsa $\sqrt{\sum_{i \in \wedge} J_i} = \sqrt{D}$ eşitliği bulunur.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Teorem 4.15 den açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $\Delta \subseteq \wedge$ sonlu alt kümesi için $\sqrt{\sum_{i \in \Delta} J_i} = \sqrt{D}$ iken $\bigcup_{i \in \wedge} X_{J_i} \neq X_D$ olsa $V(\sum_{i \in \Delta} J_i) \neq V(D)$ olup $\bigcup_{i \in \wedge} X_{J_i} \neq X_D$ bulunur. Bu ise $\sqrt{\sum_{i \in \Delta} J_i} = \sqrt{D}$ olmasıyla çelişir. O halde $\bigcup_{i \in \wedge} X_{J_i} = X_D$ olmalıdır $\square$

4.3 Sonuç Her $i \in \wedge$ için J_i, R nin öz hiper idealleri olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $\bigcup_{i \in \wedge} X_{J_i} = \text{Spec}(R)$ dir.
- (ii) $\Delta \subseteq \wedge$ sonlu alt kümesi için $\bigcup_{i \in \Delta} X_{J_i} = \text{Spec}(R)$ dir.
- (iii) $\Delta \subseteq \wedge$ sonlu alt kümesi için $\sum_{i \in \Delta} J_i = R$ dir.

Kanıt $X_D = \text{Spec}(R)$ alınırsa Teorem 4.16 den ispat açıktır. $\square$

4.4 Sonuç D , R nin sonlu üretilmiş hiper ideali olsun. Bu takdirde X_D hemen hemen (quasi)

kompakttır.

Kanıt X_R in X_{J_i} açık alt kümeleri için $\bigcup_{i \in \Delta} X_{J_i} = X_D$ olsun. O halde Teorem 4.16 (ii) den X_{J_i} açık alt kümeleri için $\bigcup_{i \in \Delta} X_{J_i} = X_D$ olacak şekilde $\Delta \subseteq \wedge$ sonlu alt kümesi vardır. O halde X_D hemen hemen (quasi) kompakttır. $\square$

4.17 Teorem R , TN -şartını sağlayan hiper halka olsun. Bu takdirde $\sqrt{0} = \sqrt{J_1 J_2 \dots J_t}$ olacak şekilde $J_1, J_2, \dots, J_t$ hiper idealleri vardır.

Kanıt R TN -şartını sağladığından Teorem 4.10 dan $X = \text{Spec}(R)$ Noether topolojik hiper vektör uzaydır. (Hulek, 2003) deki Önerme 2.14 den X in $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ olacak şekilde farklı U_i indirgenemez bileşenleri vardır. İndirgenemez bileşenler kapalı olduğundan $U_i = V(J_i)$ olarak alınabilir. Böylece

$$\begin{aligned} \emptyset &= X \setminus \bigcup_{i=1}^n V(J_i) \\ &= \bigcap_{i=1}^n (X \setminus V(J_i)) \\ &= \bigcap_{i=1}^n X_{J_i} \end{aligned}$$

Teorem 4.12 ve bir önceki sonuçtan $\sqrt{0} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{J_i} = \sqrt{J_1 J_2 \dots J_t}$ bulunur. O halde istenen elde edilir. $\square$

4.18 Teorem Her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için J_i , $\sqrt{0} \neq \sqrt{J_i}$ olan R nin hiper idealleri ve $X_R = \bigcup_{i=1}^n X_{J_i}$ olsun. Bu takdirde her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için X_{J_i} açık alt kümelerinin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $R = \sum_{i=1}^n J_i$ ve $N_{J_i}(0)$ ın R nin asal hiper ideali olmasıdır.

Kanıt Bir önceki sonuç ve Teorem 4.9 dan açıktır. $\square$

4.19 Teorem R, T hiper halkalar olmak üzere $\varphi : R \rightarrow T$ bir güçlü homomorfizma olsun. Bu takdirde $\varphi^*(P) = \varphi^{-1}(P)$ kuralıyla verilen $\varphi^* : \text{Spec}(T) \rightarrow \text{Spec}(R)$ dönüşümü süreklidir. Eğer φ güçlü epimorfizma ise φ^* bire-birdir ve φ güçlü monomorfizma ise φ^* örtendir.

Kanıt İlk olarak φ^* ın sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için $\text{Spec}(R)$ de kapalı bir kümenin ters görüntüsünün kapalı olduğunu, yani $(\varphi^*)^{-1}(V(J)) = V(\varphi(J))$ biçiminde olduğunu gösterelim. $P \in (\varphi^*)^{-1}(V(J))$ olsun. Dolayısıyla $\varphi^*(P) \in V(J)$ olup $\varphi^{-1}(P) = \varphi^*(P) \in V(J)$

olup $J \subseteq \varphi^{-1}(P)$ elde edilir. Böylece $\varphi(J) \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(P)) \subseteq P$ olur. Buradan $\varphi(J) \subseteq P$ kapsamı vardır. Dolayısıyla $P \in V(\varphi(J))$ dir. Bu takdirde $(\varphi^*)^{-1}(V(J)) \subseteq V(\varphi(J))$ kapsamı elde edilir. Tersine $P \in V(\varphi(J))$ olsun. O halde $\varphi(J) \subseteq Q$ olup $\varphi^{-1}(\varphi(J)) \subseteq \varphi^{-1}(Q)$ elde edilir. Böylece $J \subseteq Q^{-1}(Q)$ iken $J \subseteq Q^*(Q)$ olup $Q^*(Q) \in V(J)$ dir. Dolayısıyla $Q \in (\varphi^*)^{-1}(V(J))$ bulunur. Böylece $V(\varphi(J)) \subseteq (\varphi^*)^{-1}(V(J))$ dir. Bu takdirde $(\varphi^*)^{-1}(V(J)) = V(\varphi(J))$ elde edilir. Dolayısıyla $(\varphi^*)^{-1}(V(J))$, $Spec(T)$ nin bir kapalı alt kümesidir. Böylece φ^* süreklidir.

φ güçlü epimorfizma ise $\varphi^*(Q) = \varphi^*(P)$ iken φ^* in tanımından, $\varphi^{-1}(P) = \varphi^{-1}(Q)$ bulunur. Böylece $P = \varphi(\varphi^{-1}(P)) = \varphi(\varphi^{-1}(Q)) = Q$ elde edilir.

φ güçlü monomorfizma ise $P \in Spec(R)$ için $\varphi(P) \in Spec(T)$ dir. O halde $\varphi^*(\varphi(P)) = \varphi^{-1}(\varphi(P)) = P$ dir. Buradan φ^* örten olur. $\square$

4.2 Örnek $\varphi : R \rightarrow T$ güçlü epimorfizma iken $\varphi^* : Spec(T) \rightarrow Spec(R)$ örten olmayabilir. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}[x]$ değişmeli Krasner hiper halkalarını alalım. $\varphi, x \mapsto 0$ kuralıyla tanımlı $\varphi : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}$ güçlü epimorfizması için $\varphi^* : Spec(\mathbb{Z}) \rightarrow Spec(\mathbb{Z}[x])$ dir. $p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $\mathbb{Z}$ nin asal hiper idealleri (0) ve (p) dir. Böylece Teorem 4.19 gereğince $\varphi^*((0)) = \varphi^{-1}(0) = (x)$ ve $\varphi^*((p)) = (p, x)$ olur. $\mathbb{Z}[x]$ in bu asal hiper idealleri $\mathbb{Z}[x]$ in tüm asal hiper ideallerinde kapsamaz. Özellikle bu asal hiper idealler $p\mathbb{Z}[x]$ formunda olan asal hiper idealleri içermezler. Dolayısıyla φ^* örten değildir.

$\varphi : R \rightarrow T$ güçlü monomorfizma iken $\varphi^* : Spec(T) \rightarrow Spec(R)$ bire-bir olmayabilir. $\varphi, a \mapsto a$ kuralı ile tanımlı $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[x]$ güçlü monomorfizma iken $\varphi^* : Spec(\mathbb{Z}[x]) \rightarrow Spec(\mathbb{Z})$ örten homeomorfizması bire-bir değildir. Zira $\varphi^*((x)) = \varphi^{-1}((x))$ eşitliğinden $a \in \varphi^{-1}((x))$ olması için gerek ve yeter koşul $\varphi(a) = a \in (x)$ olmasıdır. Bir başka deyişle $a = 0$ olmasıdır. Buradan $\varphi^*((x)) = (0)$ olmalıdır. Benzer şekilde $\varphi^*((x+1)) = (0)$ iken $(x) \neq (x+1)$ dir. Böylece φ^* bire-bir değildir.

4.20 Teorem R hiper halkası için $\varphi^* : Spec(R) \rightarrow Spec(\frac{R}{\sqrt{0}})$ dönüşümü bir homeomorfizmadır.

Kanıt $\varphi : R \rightarrow \frac{R}{\sqrt{0}}$ doğal güçlü homomorfizması için Teorem 4.19 dan R nin bir P asal hiper ideali için $\varphi^*(\frac{P}{\sqrt{0}}) = P$ kuralı ile tanımlı $\varphi^* : Spec(\frac{R}{\sqrt{0}}) \rightarrow Spec(R)$ dönüşümü süreklidir. Böylece $\frac{P}{\sqrt{0}} \in Spec(\frac{R}{\sqrt{0}})$ olup φ^* örtendir. Şimdi φ^* in homeomorfizm olduğunu gösterelim. Bunun için $Spec(R)$ deki kapalı bir kümenin φ^* altındaki ters görüntüsünün $Spec(\frac{R}{\sqrt{0}})$ de bir kapalı küme olduğunu gösterelim. $V(\frac{J}{\sqrt{0}}) \in Spec(\frac{R}{\sqrt{0}})$ bir kapalı küme olsun. $\varphi^*(V(\frac{J}{\sqrt{0}})) = V(J)$ olduğunu gösterelim. $Q \in \varphi^*(V(\frac{J}{\sqrt{0}}))$ olsun Dolayısıyla $Q \in \varphi^{-1}(V(\frac{J}{\sqrt{0}}))$ olup $\varphi(Q) \in V(\frac{J}{\sqrt{0}})$ bulunur. Buradan $\frac{J}{\sqrt{0}} \subseteq \frac{Q}{\sqrt{0}}$ kapsamından $J \subseteq Q$ elde edilir. Böylece $Q \in V(J)$ dir. Ters kapsama da benzer bir yöntemle benzer biçimde gösterilir. $\varphi^*(V(\frac{J}{\sqrt{0}})) = V(J)$ eşitliği sağlanır. $\square$

Şimdi $Spec(R)$ nin bir alt kümesi olan $Spec_S(R) = \{P' \in Spec(R) \mid P' \cap S = \emptyset\}$ kümesini tanımlayalım. Bu küme $Spec(R)$ nin bir alt hiper vektör uzayıdır. $Spec_S(R)$ nin kapalı kümeleri ise J, R nin bir asal hiper ideali olmak üzere $Spec_S(R) \cap V(J)$ formundadır.

4.5 Sonuç Her $K \in Spec_S(R)$ için $\phi(K) = S^{-1}K$ ile tanımlı $\phi : Spec_S(R) \rightarrow Spec(S^{-1}R)$ fonksiyonu bir ϕ bir homeomorfizmdir.

Kanıt ϕ nin bir homeomorfizm olduğunu göstermek için $Spec(S^{-1}R)$ deki her bir kapalı kümenin ϕ altındaki ters görüntüsünün $Spec_S(R)$ de kapalı olduğunu gösterelim. Bunun için R nin bir J asal hiper ideali için $\phi^{-1}(V(S^{-1}J)) = Spec_S(R) \cap V(J)$ olduğunu gösterelim. $K \in \phi^{-1}(V(S^{-1}J))$ olsun. Böylece $\phi(K) = S^{-1}K \in V(S^{-1}J)$ olup $S^{-1}J \subseteq S^{-1}K$ bulunur. Bu ise $k \in K, v \in S$ olmak üzere $\frac{x}{1} = \frac{k}{v}$ eşitliğini sağlayan $x \in J$ elemanının olmasına denktir. Buradan $uvx = uk$ olacak şekilde $u \in S$ vardır. Dolayısıyla $vux \in K$ olduğundan $x \in K$ dır. O halde $J \subseteq K$ ve $K \in Spec_S(R) \cap V(J)$ bulunur. Bu takdirde ϕ süreklidir. ϕ nin bire-bir olduğunu gösterelim. $K, L \in Spec(R)$ için $S^{-1}K = S^{-1}L$ olsun. Her $k \in K$ için $\frac{k}{1} = \frac{y}{v}$ olacak şekilde $y \in L$ vardır. Bu ise $uvk = uy$ olacak şekilde $u \in S$ vardır. Böylece $uvk \in L$ olup $k \in L$ bulunur. Buradan $K \subseteq L$ elde edilir. Benzer yöntemle $L \subseteq K$ kapsamı da kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla $K = L$ eşitliği sağlanır. ϕ nin tanımından ϕ nin örten olduğu açıktır. Böylece $Spec_S(R)$ nin $Spec_S(R) \cap V(J)$ kapalı alt kümesi için ϕ örten olduğundan $\phi(Spec_S(R)) = Spec(S^{-1}R)$ olur. $\phi(V(J)) \cap Spec(S^{-1}R) = V(S^{-1}J)$ olduğunu gösterelim. $V(K) \in \phi(V(J)) \cap \phi(Spec_S(R))$ alalım. ϕ bire-bir olduğu için

$$\begin{aligned} K \in V(J) \cap Spec_S(R) &\Rightarrow K \in V(J), K \in Spec_S(R) \\ &\Rightarrow J \subseteq K, K \cap S = \emptyset \\ &\Rightarrow S^{-1}J \subseteq S^{-1}K \\ &\Rightarrow \phi(K) = S^{-1}K \in V(S^{-1}J) \\ &\Rightarrow \phi(V(J)) \cap Spec(S^{-1}R) \subseteq V(S^{-1}J) \dots (1) \end{aligned}$$

$S^{-1}K \in V(S^{-1}J)$ olup $S^{-1}J \subseteq S^{-1}K$ elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} \text{Her } x \in J \text{ olmak üzere } k \in K \text{ için } \frac{a}{1} = \frac{k}{v} &\Rightarrow uxv = uk \text{ olacak şekilde } u \in S \text{ vardır} \\ &\Rightarrow uxv \in K \\ &\Rightarrow x \in K \text{ ve } J \subseteq K \\ &\Rightarrow K \in V(J) \\ &\Rightarrow \phi(K) \in \phi(V(J)) \text{ ve } \phi(K) \in Spec(S^{-1}R) \\ &\Rightarrow V(S^{-1}J) \subseteq \phi(V(J)) \cap Spec(S^{-1}R) \dots (2) \end{aligned}$$

(1) ve (2) kapsamalarını kullanarak istenilen elde edilir. Dolayısıyla ϕ bir homeomorfizmdir.

□

4.6 Sonuç R, T hiper halkalar olmak üzere $\theta : R \rightarrow T$ güçlü epimorfizma olsun. Bu takdirde $Spec(T), Spec(R)$ hiper alt vektör uzayına homeomorftur.

Kanıt Teorem 4.19 kullanılarak $\theta^* : Spec(T) \rightarrow Spec(R)$ sürekli dönüşümü örten olmayabilir. Yalnız θ^* ın değer kümesini görüntü kümesine kısıtlanırsa $\varphi^* : Spec(T) \rightarrow \theta^*(Spec(T))$ fonksiyonuna örtendir. θ örten olduğundan φ^* , Teorem 4.19 dan bire-birdir. Böylece φ^* fonksiyonu sürekli dir. φ^* ın bir homeomorfizma olduğunu gösterelim. Bunun için T nin her J hiper ideali için $\varphi^*(V(J)) = V(\theta^{-1}(J))$ olduğunu gösterelim. $\varphi^*(K) \in \varphi^*(V(J))$ alalım. O halde $\theta^{-1}(K) = \theta^{-1}(L)$ olacak şekilde $L \in V(J)$ vardır. θ örten olduğundan $\theta(\theta^{-1}(K)) = \theta(\theta^{-1}(L))$ dir. Dolayısıyla $J \subseteq L$ olmak üzere $K = L$ dir. Böylece $J \subseteq K$ dir. $\theta^{-1}(J) \subseteq \theta^{-1}(K)$ dir. $L \in V(\theta^{-1}(J))$ olsun. θ örten ve $\theta^{-1}(J) \subseteq L$ olduğundan $J \subseteq \theta(L)$ bulunur. Buradan $\theta(L) \in V(J)$ dir. Dolayısıyla $L \in \theta^{-1}(J) = \varphi^*(J)$ elde edilir. Sürekli dönüşümün tanımı gereğince $\varphi^* : Spec(T) \rightarrow \theta^*(Spec(T)) \subseteq Spec(R)$ yardımıyla $Spec(T)$ nin $Spec(R)$ nin alt hiper vektör uzayına homeomorf olduğu görülür. □

4.21 Teorem K, R hiper halkasının bir asal hiper ideali olsun. Bu takdirde $V(K), Spec(R)$ de indirgenemezdir.

Kanıt L ve N, R nin hiper idealleri olmak üzere $V(K) = V(L) \cup V(N)$ olsun. $K \in V(K)$ olduğundan $K \in V(L)$ veya $K \in V(N)$ dir. $K \in V(L)$ iken $L \subseteq K$ dir. $K \in V(N)$ iken $N \subseteq K$ olur. Yardımcı Teorem 4.11 den $V(K) \subseteq V(L)$ veya $V(K) \subseteq V(N)$ elde edilir. Böylece hipotez gereğince $V(K) = V(L)$ veya $V(K) = V(N)$ dir. Dolayısıyla $V(K)$ indirgenemezdir. □

4.2. Değişmeli Hiper Halkalarda n-Hiper İdealler

Bu kısımda (Tekir, Koç ve Oral, 2017) çalışmasında yer alan değişmeli halkalarda n-ideal ve r-ideal kavramlarını değişmeli hiper halkalara taşınarak asal hiper ideallerden daha genel bir yapı olan n-hiper idealler araştırıldı ve temel cebirsel özelliklerine yer verildi.

4.8 Tanım J, R nin bir öz hiper ideali olsun. $ab \in J$ ve $a \notin \sqrt{0}$ olan her $a, b \in R$ için $b \in J$ ise J ye R nin bir n-hiper ideali denir.

4.3 Örnek $\mathbb{Z}$ değişmeli hiper halkasının sıfır hiper ideali bir n-hiper idealdir.

4.22 Teorem J, R nin bir öz n-hiper ideali ise $J \subseteq \sqrt{0}$ dır.

Kanıt Kabul edelim ki J , R nin öz n -hiper ideali ve $J \not\subseteq \sqrt{0}$ olsun. Bu takdirde $a \in J$ iken $a \notin \sqrt{0}$ olacak şekilde $a \in R$ vardır. $a = a1_R \in J$ ve J, R nin n -hiper ideal olduğundan $a \notin \sqrt{0}$ bulunur. Böylece $1_R \in J$ olup $J = R$ olup çelişki elde edilir. O halde $J \subseteq \sqrt{0}$ dır. $\square$

4.23 Teorem $\{J_i\}_{i \in \Delta}$, R nin n -hiper ideallerinin kümesi olsun. Bu takdirde $\cap_{i \in \Delta} J_i$, R nin n -hiper idealdir.

Kanıt $ab \in \cap_{i \in \Delta} J_i$ ve $a \notin \sqrt{0}$ olsun. $b \in \cap_{i \in \Delta} J_i$ olduğunu kanıtlayalım. $ab \in \cap_{i \in \Delta} J_i$ ise her $i \in \Delta$ için $ab \in J_i$ dir. J_i, R nin n -hiper ideali ve $a \notin \sqrt{0}$ olduğundan $b \in J_i$ olur. Buradan $b \in \cap_{i \in \Delta} J_i$ dir. $\square$

4.9 Tanım R hiper halka ve J, R nin bir öz hiper ideali olsun. $ab \in J$ ve $\text{Ann}(J) = 0$ iken $b \in J$ oluyorsa, J hiper ideale r -hiper ideal denir.

4.24 Teorem Her n -hiper ideal bir r -hiper idealdir.

Kanıt J, R nin bir n -hiper ideali olsun. $ab \in J$ ve $\text{Ann}(J) = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $b \in J$ olduğunu kanıtlayalım. Öncelikle $a \notin \sqrt{0}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $a \in \sqrt{0}$ olsun. Bu takdirde $a^n = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $a^n = a^{n-1}a = 0$ dır. $\text{Ann}(a) = 0$ olduğundan $a^{n-1} = 0$ olur. Benzer şekilde $a^{n-1} = a^{n-2}a = 0$ dır. $\text{ann}(a) = 0$ olduğundan $a^{n-2} = 0$ bulunur. Sonlu adım sonunda $a = 0$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $a \notin \sqrt{0}$ olmalıdır. $a, b \in R$ için $ab \in J$ ve $a \notin \sqrt{0}$ için J, R nin n -hiper ideal olduğundan $b \in J$ dir. $\square$

4.25 Teorem R hiper halka J, R nin hiper ideali olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) J n -hiper idealdir.

(ii) Her $a \notin \sqrt{0}$ için $J = (J : a)$ dır.

(iii) J ve K, R nin hiper idealleri olmak üzere $JK \subseteq I$ ve $J \cap \sqrt{0} = \emptyset$ ise $K \subseteq J$ dir.

Kanıt (i) $\Rightarrow$ (ii) Kabul edelim ki J, R nin n -hiper ideali olsun. Her $a \in R$ için $J \subseteq (J : a)$ dır. $a \notin \sqrt{0}$ için $b \in (J : a)$ keyfi olsun. $b \in (J : a)$ ise $ab \in J$ dir. $a \notin \sqrt{0}$ ve J, R nin n -hiper ideal olduğundan $b \in J$ dir. Dolayısıyla $(J : a) \subseteq J$ elde edilir. O halde $J = (J : a)$ dır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Kabul edelim ki $JK \subseteq I$ ve $J \cap \sqrt{0} = \emptyset$ olsun. Bu takdirde $a \in J$ ve $a \in (R \setminus \sqrt{0})$ dır. Yani $a \notin \sqrt{0}$ dır. O halde $aK \subseteq J$ olup $K \subseteq (J : a)$ elde edilir. Hipotezden $a \notin \sqrt{0}$ için $J = (J : a)$ olduğundan $K \subseteq (J : a) = J$ bulunur. Böylece $K \subseteq J$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $ab \in J$ ve $a \notin \sqrt{0}$ olsun. $b \in J$ olduğunu gösterelim. $J = aR$ ve $K = bR$ alınırsa $(aR)(bR) \subseteq J$, $(aR) \cap \sqrt{0} = \emptyset$ olur. Hipotezden $bR \subseteq J$ elde edilir. Dolayısıyla $b \in J$ olup istenen elde edilir. $\square$

4.26 Teorem J, R nin bir asal hiper ideali olsun. J nin bir n-hiper ideal olması için gerek ve yeter koşul $J = \sqrt{0}$ olmasıdır.

Kanıt ($\Rightarrow$) J, R nin bir asal hiper ideali olsun. $\sqrt{0}, R$ nin nil radikali olduğundan $\sqrt{0} \subseteq J$ dir. J, R nin n-hiper ideal olduğundan Teorem 4.22 den $J \subseteq \sqrt{0}$ dir. Dolayısıyla $J = \sqrt{0}$ bulunur. ($\Leftarrow$) $ab \in J$ ve $a \notin \sqrt{0}$ olacak şekilde $a, b \in R$ keyfi olsun. J, R nin asal hiper ideali olduğundan $a \in J$ veya $b \in J$ olur. Hipotezden $J = \sqrt{0}$ olup $a \notin J$ dir. O halde $b \in J$ bulunur. Dolayısıyla J, R nin n-hiper idealidir. $\square$

Aşağıdaki teoremden n-hiper ideallerin rezidülerinin de n-hiper ideal olduğu gösterilmektedir.

4.27 Teorem R hiper halka ve S, R nin boştan farklı kümesi olsun. J, R nin $S \not\subseteq J$ olacak şekilde bir n-hiper ideali olsun. Bu takdirde $(J : S), R$ nin bir n-hiper idealidir.

Kanıt İlk olarak $(J : S) \neq R$ olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim. O halde $1_R \in (J : S)$ olup her $s \in S$ için $1_R s \in J$ bulunur. Buradan $S \subseteq J$ çelişkisi elde edilir. O halde $(J : S) \neq R$ dir. $ab \in (J : S)$ ve $a \notin \sqrt{0}$ için $abs \in J$ olacak şekilde $s \in S$ vardır. J, R nin bir n-hiper ideali ve $a \notin \sqrt{0}$ olduğundan $bs \in J$ dir. O halde $b \in (J : S)$ bulunur. $\square$

4.28 Teorem R hiper halkasının her maksimal n-hiper ideali nil radikal hiper idealdir.

Kanıt J, R nin maksimal n-hiper ideali olsun. J nin R nin asal hiper ideali olduğunu gösterelim. $ab \in J$ ve $a \notin J$ olacak şekilde $a, b \in R$ keyfi elemanları için J, R nin bir maksimal n-hiper ideali olduğundan Teorem 4.27 den $(J : S), R$ nin bir n-hiper ideali olur. Ayrıca $J \subseteq (J : a)$ ve J, R nin bir maksimal n-hiper ideali olduğundan $J = (J : a)$ olur. Böylece $ab \in J$ iken $b \in (J : a)$ olup $b \in J$ elde edilir. O halde J, R nin asal hiper ideal olup istenen elde edilir. $\square$

4.29 Teorem R hiper halka K, R nin hiper ideali ve $K \cap \sqrt{0} = \emptyset$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) J_1, J_2, R nin n-hiper idealleri ve $J_1 K = J_2 K$ ise $J_1 = J_2$ dir.

(ii) JK, R nin n-hiper idealleri ise $JK = J$ dir.

Kanıt (i) J_1, R nin n-hiper ideali ve $J_2K = J_1K \subseteq J_1$ olduğundan Teorem 4.25 (iii) den $J_2 \subseteq J_1$ dir. Benzer şekilde J_2, R nin bir n-hiper ideali ve $J_1K = J_2K \subseteq J_2$ olduğundan Teorem 4.25 (iii) den $J_1 \subseteq J_2$ elde edilir. O halde $J_1 = J_2$ dir.

(ii) JK, R nin bir n-hiper ideali, $JK \subseteq JK$ ve Teorem 4.25 (iii) den $J \subseteq JK$ dir. $JK \subseteq J$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $J = JK$ dir. $\square$

Sıradaki teorem güçlü homomorfizmalarında n-hiper ideallerin bire-bir eşlemesini ifade etmektedir.

4.30 Teorem R, S hiper halka olmak üzere $f : R \rightarrow S$ güçlü homomorfizma olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- (i) f güçlü epimorfizma ve $J, ek(f) \subseteq J$ koşulunu sağlayan bir n-hiper ideali olsun. O halde $f(J), S$ nin n-hiper idealidir.
- (ii) f güçlü monomorfizma ve J, S nin n-hiper ideali olsun. O halde $f^{-1}(J), R$ nin n-hiper idealidir.

Kanıt (i) Her $a', b' \in S$ için $a'b' \in f(J)$ ve $a' \notin \sqrt{0}$ olsun. f güçlü epimorfizma olduğundan $f(a) = a', f(b) = b'$ olacak şekilde $a, b \in R$ vardır. $a'b' = f(a)f(b) = f(ab) \in f(J)$ dir. O halde $f(ab) = f(x)$ olacak şekilde $x \in J$ vardır. O halde $f(ab - x) = 0_S$ olur. Dolayısıyla $ab - x \in ek(f)$ elde edilir. Hipotezden $ek(f) \subseteq J$ olduğundan $ab - x \in J$ olur. O halde $ab \in J$ dir. Böylece $ab \in J, a \notin \sqrt{0}$ dir. Şayet $a \in \sqrt{0}$ olsa $a^k = 0_R$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ bulunur. Buradan $f(a^k) = f(0_R) = 0_S$ olup $f(a)^k = 0_S$ elde edilir. Dolayısıyla $f(a) \in \sqrt{0_S}$ olup $a' \in \sqrt{0_S}$ bulunur ki bu ise bir çelişkidir. J, R nin n-hiper ideali olduğundan $b \in J$ dir. O halde $f(b) = b' \in f(J)$ olduğundan $f(S), S$ nin bir n-hiper idealidir.

(ii) $ab \in f^{-1}(J)$ ve $a \notin \sqrt{0}$ olsun. Buradan $f(ab) = f(a)f(b) \in J$ dir. $a \notin \sqrt{0}$ ve f güçlü monomorfizma olduğundan $f(a) \notin \sqrt{0_S}$ dir. Şayet $f(a) \in \sqrt{0_S}$ olsa $f(a)^k = 0_S$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ bulunur. Buradan $f(a)^k = f(a^k) = 0_S = f(0_R)$ olur. f güçlü monomorfizma olduğundan $a^k = 0_R$ bulunur. Buradan $a \in \sqrt{0}$ olup çelişki elde edilir. J, S nin n-hiper ideali olduğundan $f(b) \in J$ ve $b \in f^{-1}(J)$ olup $f^{-1}(J), R$ nin bir n-hiper idealidir. $\square$

4.31 Teorem R hiper halka ve $J \subseteq I, R$ nin hiper idealleri olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

- (i) J, R nin n-hiper ideali ise $\frac{I}{J}, \frac{R}{J}$ nin bir n-hiper idealidir.
- (ii) $\frac{I}{J}, \frac{R}{J}$ nin n-hiper ideali ve $J \subseteq \sqrt{0}$ ise I, R nin bir n-hiper idealidir.

(iii) $\frac{I}{J}, \frac{R}{J}$ nin n-hiper ideali ve J, R nin n-hiper ideali ise I, R nin bir n-hiper idealidir.

Kanıt (i) J, R nin n-hiper ideali ve $J \subseteq I$ olacak şekilde $f: R \rightarrow \frac{R}{J}$ doğal güçlü homomorfizması için $ek(f) = J \subseteq I$ olduğundan Teorem 4.30 (i) den $f(I) = \frac{I}{J}, \frac{R}{J}$ nin n-hiper idealidir.

(ii) Her $a, b \in R$ için $ab \in I$ ve $a \notin \sqrt{0}$ olsun. $(a+J)(b+J) = ab+J \in \frac{I}{J}$ ve $a+J \notin \sqrt{\frac{0}{J}}$ dir. $\frac{I}{J}, \frac{R}{J}$ nin n-hiper ideali olduğundan $b+J \in \frac{I}{J}$ olur. Buradan $b \in I$ elde edilir. O halde I, R nin n-hiper idealidir.

(iii) Teorem 4.22 ve (ii) den açıktır. $\square$

4.32 Teorem S, R nin bir alt hiper halkası, J, R nin $S \not\subseteq J$ olan bir n-hiper ideali olsun. Bu takdirde $J \cap S, S$ nin n-hiper idealidir.

Kanıt S, R nin alt hiper halkası ve J, R nin $S \not\subseteq J$ olan bir n-hiper ideali olsun. $i: S \rightarrow R$ içermek fonksiyonu olmak üzere $i^{-1}(J) = J \cap S$ dir. $x \in i^{-1}(J)$ alalım. $i(x) \in J$ dir. $i(x) = x \in J$ ve $x \in S$ olduğundan $x \in J \cap S$ dir. Tersine $x \in J \cap S$ için $i(x) = x$ olduğundan $x \in i^{-1}(J)$ dir. Buradan $i^{-1}(J) = J \cap S$ dir. Teorem 4.30 (ii) şikkından $J \cap S, S$ nin bir n-hiper idealidir. $\square$

4.3. Değişmeli Hiper Halkalarda S-n-Hiper idealler

Bu kısımda S-n-hiper ideal kavramının temel özellikleri verilerek bu hiper idealler n-hiper idealler ile ilişkilendirilecektir. Üstelik S-n-hiper idealler yardımıyla lokalizasyon hiper halkalarına denk koşullar çalışılacaktır.

4.10 Tanım R hiper halka, S, R nin çarpımsal kapalı alt kümesi ve $J, J \cap S = \emptyset$ olacak şekilde R nin bir hiper ideali olsun. $ab \in J$ olan her $a, b \in R$ ve $sa \notin \sqrt{0}$ olan bir $s \in S$ için $sb \in J$ ise J ye R nin S-n-hiper ideali denir. Bu tanımda geçen $s \in S$ elemanına J nin bir S-elemanı adı verilir.

4.4 Örnek (i) $R = \mathbb{Z}_{12}$ hiper halkasında $S = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{9}\}$ çarpımsal kapalı alt kümesi için $J = \langle \bar{2} \rangle$ hiper idealini alalım. $s = \bar{3} \in S$ için $\bar{a}\bar{b} \in J$ ve $\bar{3}\bar{b} \notin J$ olsun. Kabul edelim ki $\bar{a} \notin J$ olsun. Buradan $\bar{a} \in \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{11}\}$ olup $\bar{a}\bar{b} \notin J$ çelişkisi elde edilir. Böylece $\bar{a} \in J$ bulunur. Buradan $\bar{3} \cdot \bar{a} \in \langle \bar{6} \rangle = \sqrt{0}$ elde edilir. Yani, J, R nin bir S-n-hiper idealidir. $\bar{2} \cdot \bar{2} \in J$ iken $\bar{2} \notin \sqrt{0}$ ve $\bar{2} \notin J$ olduğundan J, R nin bir n-hiper ideali değildir.

(ii) $R = \mathbb{Z}[x]$ hiper halkasında $J = \langle 4x \rangle$ hiper ideali için $S = \{4^m \in \mathbb{N} \mid m \in \mathbb{N}\}$, R nin çarpımsal kapalı alt kümesi olup J, R nin bir S-n-hiper ideali değildir. Zira her $s = 4^m \in S$ için $(2x) \cdot s \in J$ iken $s \cdot (2x) \notin \sqrt{0}$ ve $2 \cdot s \notin J$ dir.

Açıktır ki her n-hiper ideal bir S-n-hiper idealdir. R hiper halkasının birim (terslenebilir ele-

manlarının) kümesi $U(R)$ olmak üzere $S \subseteq U(R)$ iken n -hiper ideal ve S - n -hiper ideal kavramları çıkarılır.

4.1 Uyarı Sıradaki teoremden $Reg(R)$, R hiper halkasının tüm regüler elemanları kümesini ifade etmektedir.

4.33 Teorem $J \cap S = \emptyset$ ve J , R nin hiper ideali olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- (i) J , R nin S - n -hiper ideal ise $s \in S$ için $sJ \subseteq \sqrt{0}$ dır. Aynı zamanda $S \subseteq Reg(R)$ ise $J \subseteq \sqrt{0}$ dır.
- (ii) $\sqrt{0}$ in R nin S - n -hiper ideali olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{0}$ in R nin asal hiper ideali olmasıdır.
- (iii) $S \subseteq Reg(R)$ olsun. O halde 0 in R nin S - n -hiper ideali olması için gerek ve yeter koşul 0 in R nin bir n -hiper ideali olmasıdır.

Kanıt (i) $a \in J$ için $J \cap S = \emptyset$ olduğundan her $s \in S$ için $s1_R \in J$ dir. Bu yüzden $a1_R \in J$ dir. O halde $sa \in \sqrt{0}$ olacak şekilde $s \in S$ vardır. Aynı zamanda $S \subseteq Reg(R)$ ise $I \subseteq \sqrt{0}$ olduğu açıktır.

(ii) (i) den açıktır.

(iii) $ab = 0_R$ olan $a, b \in R$ elemanları keyfi olsun. Böylece $sa \in \sqrt{0}$ veya $sb = 0_R$ olacak şekilde $s \in S$ vardır. $sa \in \sqrt{0}$ ise $(sa)^n = 0_R$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $S \subseteq Reg(R)$ olduğu için $a^n = 0_R$ veya $b = 0_R$ dır. $\square$

4.34 Teorem $J \cap S = \emptyset$ olacak şekilde R nin J hiper ideali verilsin. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) J , R nin S - n -hiper idealidir.
- (ii) R nin J, K hiper idealleri için $JK \subseteq J$ iken $sJ \subseteq \sqrt{0}$ veya $sK \subseteq J$ olacak şekilde $s \in S$ vardır.

Kanıt (i) $\Rightarrow$ (ii) J , R nin bir S - n -hiper ideali olsun. Kabul edelim ki $J'K' \subseteq J$ olan R nin her J', K' hiper idealleri için $sJ \not\subseteq \sqrt{0}$ ve $sK' \not\subseteq J$ olacak şekilde $s \in S$ vardır. J , R nin S - n -hiper ideali olduğu için $a \in J'$ ve $b \in K'$ elemanları için $ab \in J$ iken $sb \in J$ veya $sa \in \sqrt{0}$ olacak şekilde $s \in S$ vardır. Bu ise kabulümüz ile çelişir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $a, b \in R$ keyfi elemanları için $J = \langle a \rangle$ ve $K = \langle b \rangle$ alınarak istenen görülür. $\square$

4.35 Teorem $J \cap S = \emptyset$ olacak şekilde R nin J hiper ideali verilsin. s, J nin bir S -elemanı olmak üzere $(J : s), R$ nin bir n -hiper ideali olsun. Bu takdirde J, R nin S - n -hiper idealidir.

Kanıt $ab \in J$ ve s, J nin bir S -elemanı olmak üzere $sa \notin \sqrt{0}$ olsun. $ab \in J, sab \in J$ olduğu için $ab \in (J : s)$ dir. $(J : s), R$ nin n -hiper ideali olduğundan $a \in \sqrt{0}$ veya $b \in (J : s)$ dir. $a \in \sqrt{0}$ ise $sa \in \sqrt{0}$ dir. Bu ise kabülümüz ile çelişir. Böylece $b \in (J : s)$ dir. O halde $bs \in J$ dir. $\square$

4.36 Teorem J, R nin bir S - n -hiper ideali ve J nin her $s S$ -elemanı için $(\sqrt{0} : s), R$ nin n -hiper ideali olsun. O halde $(J : s), R$ nin n -hiper idealidir.

Kanıt Kabul edelim ki $ab \in (J : s)$ olsun. J, R nin S - n -hiper ideali olduğu için $sa \in \sqrt{0}$ veya $s^2b \in J$ dir. $sa \in \sqrt{0}$ verilsin. $(\sqrt{0} : s) = \sqrt{0}$ olduğundan $\sqrt{0}, R$ nin n -hiper idealidir. Bu yüzden $s \in \sqrt{0}$ veya $a \in \sqrt{0}$ dir. O halde $a \in \sqrt{0}$ dir. $s^2b \in J$ olsun. $sb \notin J$ ve J, R nin S - n -hiper ideali ise $s^3 \in \sqrt{0}$ dir. $\sqrt{0}, R$ nin n -hiper ideali olduğu için $s \in \sqrt{0}$ veya $s^2 \in \sqrt{0}$ dir. Böylece $s \in \sqrt{0}$ bulunur. Bu ise kabülümüz ile çelişir. O halde $sb \in J$ dir. Dolayısıyla $b \in (J : S)$ dir. $\square$

Sıradaki teoremde bir hiper halkada çarpımsal kapalı alt kümenin regüler elemanların kümesinde kapsanması durumunda, çarpımsal kapalı kümeden alınan her bir elemana göre yazılabilen S - n -hiper ideallerin rezidüsünün bir n -hiper ideal olduğu gösterilmiştir.

4.37 Teorem J, R nin S - n -hiper ideali ve $S \subseteq \text{Reg}(R)$ olsun. O halde J nin her $s S$ -elemanı için $(J : s)$ bir n -hiper idealidir.

Kanıt $S \subseteq \text{Reg}(R)$ ve J, R nin S - n -hiper ideali olsun. Kabul edelim ki $a, b \in R$ için $ab \in (J : s)$ olsun. Böylece $a(sb) \in J$ dir. $sa \in \sqrt{0}$ ise $s^m a^m = 0$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}$ vardır. $S \subseteq \text{Reg}(R)$ olduğu için $a^m = 0$ olup $a \in \sqrt{0}$ bulunur. $s^2b \in J$ ise Teorem 4.36 den $b \in (J : s)$ bulunur. $\square$

4.38 Teorem $J \cap S = \emptyset$ olacak şekilde R nin J S - n -hiper ideali ve $I \cap S \neq \emptyset$ olacak şekilde R nin I hiper ideali verilsin. Bu takdirde IJ ve $I \cap J, R$ nin S - n -hiper idealidir.

Kanıt $J \cap S = \emptyset$ ve $s' \in I \cap S$ olsun. $ab \in IJ$ keyfi olsun. Buradan $ab \in J$ dir. J, R nin S - n -hiper ideali olduğu için $sa \in \sqrt{0}$ veya $sb \in J$ koşulunu sağlayan $s S$ -elemanı vardır. Dolayısıyla $s'(sa) \in \sqrt{0}$ veya $s'(sb) \in IJ$ dir. Böylece IJ, R nin S - n -hiper idealidir. $ab \in I \cap J$ keyfi olsun. O halde $ab \in J$ dir. J, R nin S - n -hiper ideali olduğu için $sa \in \sqrt{0}$ veya $sb \in J$ olacak şekilde $s S$ -elemanı vardır. Dolayısıyla $s'(sa) \in \sqrt{0}$ veya $s'(sb) \in I \cap J$ bulunur. O halde $I \cap J, R$ nin bir S - n -hiper idealidir. $\square$

4.39 Teorem Her $1 \leq i \leq n$ için J_i, R nin S-n-hiper ideali olsun. Bu takdirde $\cap_{i=1}^n J_i, R$ nin S-n-hiper idealidir.

Kanıt Her $1 \leq i \leq n$ için J_i, R nin S-n-hiper ideali olduğu için $J_i \cap S = \emptyset$ dir. Böylece $\cap_{i=1}^n J_i \cap S = \emptyset$ dir. $ab \in \cap J_i$ keyfi olsun. Dolayısıyla $ab \in J_i$ olup her $1 \leq i \leq n$ için J_i, R nin S-n-hiper ideali olduğundan J_i nin s_i S-elemanı için $s_i a \in \sqrt{0}$ veya $s_i b \in J_i$ dir. $s = \prod_{i=1}^n s_i$ diyelim. Buradan $s_1 s_2 \dots s_n a \in \sqrt{0}$ veya $sb \in J_i$ dir. Dolayısıyla $sb \in \cap_{i=1}^n J_i$ dir. O halde $\cap_{i=1}^n J_i, R$ nin S-n-hiper idealidir. $\square$

4.40 Teorem R hiper halkasında $J_1, J_2, \dots, J_n$ hiper idealleri için $(\cap_{i=1}^n J_i) \cap S \neq \emptyset$ olsun. Eğer $\omega \subset \{1, 2, \dots, n\}$ koşulunu sağlayan ve her $k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \omega$ için J_k, R nin S-n-hiper idealleri ise $\cap_{i=1}^n J_i, R$ nin S-n-hiper idealidir.

Kanıt $(\cap_{i=1}^n J_i) \cap S \neq \emptyset$ olduğundan $s' \in (\cap_{i=1}^n J_i) \cap S$ elemanı mevcuttur. $ab \in \cap_{i=1}^n J_i$ keyfi olsun. Buradan özel olarak her $k \in \{1, 2, \dots, n\} - \omega$ için de $ab \in J_k$ dır. Her $k \in \{1, 2, \dots, n\} - \omega$ için J_k, R nin S-n-hiper ideali olduğundan $s_k a \in \sqrt{0}$ veya $s_k b \in J_k$ dır. Dolayısıyla her $k \in \{1, 2, \dots, n\} - \omega$ için $s' s^k b \in \cap_{i=1}^n J_i$ veya $s' s^k a \in \sqrt{0}$ olur. Dolayısıyla $\cap_{i=1}^n J_i, R$ nin bir S-n-hiper idealidir. $\square$

Sıradaki teoremde S-n-hiper ideallerdeki S çarpımsal kümesi özel bir koşul altında kendisinde içerilen bir başka çarpımsal kapalı alt kümeye indirgenerek bu küme üzerinde benzer bir türde hiper idealin tanımlanabilir olduğunu kanıtlanmaktadır.

4.41 Teorem $S \subseteq T$ olan R nin S ve T çarpımsal kapalı alt kümeleri verilsin. Her $t \in T$ için $tt' \in S$ olacak şekilde $t' \in T$ varsa ve J, R nin T -n-hiper ideali ise J, R nin bir S-n-hiper idealidir.

Kanıt $ab \in J$ verilsin. $t \in T$ elemanı J nin T -elemanı olsun. J, R nin T -n-hiper ideali olduğu için $ta \in \sqrt{0}$ veya $tb \in J$ dir. Hipotezden $tt' \in S$ olacak şekilde $t' \in T$ vardır. $s = tt'$ diyelim. Böylece $sa = tt'a \in \sqrt{0}$ veya $sb = tt'b \in J$ dir. Dolayısıyla J, R nin bir S-n-hiper idealidir. $\square$

4.11 Tanım $S^* = \{r \in R \mid \frac{r}{1_R}, \frac{r}{1_R} \in S^{-1}R \text{ birim (terslenebilir eleman)}\}$ kümesine R hiper halkasının S çarpımsal kapalı alt kümesinin doygunluğu denir.

4.11 Tanımdan S^* ın R nin S yi kapsayan çarpımsal kapalı alt kümesi olduğu açıktır.

4.42 Teorem $J \cap S = \emptyset$ olacak şekilde R nin J hiper ideali için J nin R nin S-n-hiper ideali olması için gerek ve yeter koşul J nin R nin bir S^* -n-hiper ideali olmasıdır.

Kanıt ($\Rightarrow$) J, R nin S -n-hiper ideali olsun. $ab \in J$ olan her $a, b \in R$ ve $s' = \frac{s}{1_R} \in S^{-1}R$ birimi için $sa \notin \sqrt{0}$ iken $sb \in J$ dir. Buradan $s' \frac{a}{1_R} \notin \sqrt{0_{S^{-1}R}}$ iken $s' \frac{b}{1_R} \in S^{-1}J$ olduğu açıktır. Dolayısıyla J, R nin bir S^* -n-hiper idealidir.

($\Leftarrow$) J, R nin bir S^* -n-hiper ideali olsun. Her $t \in S^*$ için $t = \frac{r}{1_R} \in S^{-1}R$ birimi vardır. O halde $\frac{r}{1_R} \frac{r'}{1_R} = 1_{S^{-1}R}$ olacak şekilde $\frac{r'}{1_R} \in S^{-1}R$ elemanı vardır. $t' = \frac{1_R}{r} \in S^{-1}R$ için $tt' = 1_R \in S$ olur ki Teorem 4.41 den J, R nin bir S -n-hiper idealidir. $\square$

4.43 Teorem $f : R_1 \rightarrow R_2$ güçlü homomorfizması ve S, R_1 hiper halkasının çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) J, R_1 in S -n-hiper ideali ve $ek(f) \subseteq J$ olsun. O halde $f(J), R_2$ hiper halkasının $f(S)$ -n-hiper idealidir.

(ii) $ek(f) \subseteq \sqrt{0_{R_1}}$ ve J, R_2 nin $f(S)$ -n-hiper ideali ise $f^{-1}(J), R_1$ in S -n-hiper idealidir .

Kanıt (i) $x, y \in f(J)$ olan $x, y \in R_2$ elemanları için $x = f(a), y = f(b)$ olacak şekilde $a, b \in R_1$ elemanları vardır. $ek(f) \subseteq J$ olduğundan böylece $xy = f(a)f(b) = f(ab) \in f(J)$ için $ab \in J + ek(f) \subseteq J$ olup $ab \in J$ bulunur. J, R nin S -n-hiper ideali olduğu için $sa \in \sqrt{0}$ veya $sb \in J$ olacak şekilde s S -elemanı vardır. Dolayısıyla $f(sa) = f(s)f(a) \in f(\sqrt{0})$ veya $f(sa) \in f(J)$ dir. Son olarak $f(J) \cap f(S) = \emptyset$ olduğunu göstermek için aksini kabul edelim. $f(J) \cap f(J) \neq \emptyset$ olsun. Böylece $t \in f(J) \cap f(S)$ elemanı vardır. Bu yüzden $t = f(x), t = f(s)$ olacak şekilde $x \in J, s \in S$ elemanı vardır. Dolayısıyla $x - s \in ek(f) \subseteq J$ dir. Böylece $x - s \in J$ olup $s \in J$ bulunur. Dolayısıyla $S \cap J \neq \emptyset$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $f(J) \cap f(S) = \emptyset$ olmalıdır.

(ii) $f(\sqrt{0}) \subseteq \sqrt{0_{R_2}}$ olduğunu gösterelim. $a \in \sqrt{0}$ için $f(a^n) = f(a)^n = 0_{R_1}$ dir. Böylece $f(a) \in \sqrt{0_{R_2}}$ olup $f(\sqrt{0}) \subseteq \sqrt{0_{R_2}}$ bulunur. $ab \in f^{-1}(J)$ olan her $a, b \in R_1$ için $f(ab) = f(a)f(b) \in J$ dir. J, R_2 nin $f(S)$ -n-hiper ideali olduğu için $f(s)f(a) \in \sqrt{0_{R_2}}$ veya $f(s)f(b) \in J$ olacak şekilde $f(s) \in f(S)$ elemanı vardır. Bu yüzden $sa \in \sqrt{0_{R_1}}$ veya $sb \in f^{-1}(J)$ olur. $\square$

4.44 Yardımcı Teorem S, R nin çarpımsal kapalı alt kümesi ve J, R nin bir S -n-hiper ideali ise J nin her s S -elemanı için $(J : s) \subset (J : s')$ olacak şekilde $s \neq s' \in S$ elemanı vardır.

Kanıt $a \in (J : s)$ olsun. Böylece $as \in J$ dir. J, R nin S -n-hiper ideali olduğu için $s''s \in \sqrt{0}$ veya $s''a \in J$ olacak şekilde $s'' \in S$ elemanı vardır. $s''a \in J$ ise $a \in (J : s'')$ olup $(J : s) \subseteq (J : s'')$ bulunur. $s''s \in \sqrt{0}$ iken $0_R \neq s''s \in S$ olduğu açıktır. Ayrıca $J \cap S = \emptyset$ olduğundan $s''s \notin J$ dir. Buradan $(s''s)a = s''(sa) \in J$ için $a \in (J : s''s)$ bulunur. $s''s = s'$ olarak adlandırılırsa $s' \in S$ olup $(J : s) \subseteq (J : s')$ elde edilir. $\square$

4.12 Tanım R hiper halka ve P , R hiper halkasının hiper ideali ve S , R nin $S \cap P = \emptyset$ koşulunu sağlayan bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Her $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $sa \in P$ veya $sb \in P$ olacak şekilde $s \in S$ elamanı varsa R nin P hiper idealine S -asal hiper ideal denir.

4.2 Uyarı R hiper halkasında her regüler eleman sıfır bölen olmayan elemandır. S, R nin çarpımsal kapalı alt kümesi ve $S \subseteq \text{Reg}(R)$ ise S, R nin sıfır bölensiz bir alt kümesidir.

4.45 Teorem $S \subseteq \text{Reg}(R)$ ve J , R nin S -asal hiper ideali olsun. J nin R nin S -n-hiper ideali olması için gerek ve yeter koşul $(J : s) = \sqrt{0}$ olacak şekilde $s \in S$ olmasıdır.

Kanıt ilk olarak J, R nin S -asal hiper ideali ve $s \in S$ olmak üzere $(J : s)$ nin bir asal hiper ideal olduğunu kanıtlayalım. $cd \in (J : s)$ keyfi olsun. $scd \in J$ dir. J, R nin S -asal hiper ideali olduğundan $s^2c \in J$ veya $sd \in J$ olmalıdır. $s^2c \in J$ ise $s^2 \in S$ ve $S \cap J = \emptyset$ olduğundan $s^2 \notin J$ dir. Bu durumda $c \in J$ olmalıdır. Şayet $c \notin J$ olsa $s^2c \notin J$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $c \in J$ olmalıdır. Böylece $sc \in J$ olup $c \in (J : s)$ elde edilir. Benzer şekilde $sd \in J$ iken $d \in (J : s)$ bulunur. O halde $(J : s)$, R nin bir asal hiper idealidir.

$(\Rightarrow)$ J, R nin bir S -n-hiper ideali ve s_1, J nin bir S -elemanı olsun. Teorem 4.37 ve $S \subseteq \text{Reg}(R)$ olduğu için $(J : s_1)$, R nin bir n -hiper idealdir. Aynı zamanda $t \in S$ için $(J : ts_1)$, R nin bir n -hiper idealidir. $ab \in (J : ts_1)$ keyfi elemanı için $ts_1ab \in J$ olup $s_1abt \in J$ bulunur. J, R nin S -n-hiper ideali olduğu için $s_1^2a \in \sqrt{0}$ veya $s_1tb \in J$ dir. $s_1^2a \in \sqrt{0}$ için $(s_1^2a)^n = 0_R$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ mevcuttur. Buradan $s_1^{2n}a \in S$ ve $S \subseteq \text{Reg}(R)$ olduğu için $a^n = 0_R$ dir. Böylece $a \in \sqrt{0}$ bulunur. $s_1tb \in J$ olduğundan $b \in (J : s_1t)$ olup J, R nin S -asal hiper ideali olduğu için $(J : s_2)$, R nin bir asal hiper idealdir. Benzer şekilde $(J : ts_2)$ nin R nin asal hiper ideali olduğu gösterilebilir. $s = s_1s_2$ denilirse $(J : s)$, R nin bir asal hiper ideali olur. Buradan $\sqrt{0} \subseteq (J : s)$ olduğu açıktır. Şimdi de ters kapsamayı gösterelim. Keyfi $x \in (J : s)$ için $xs \in J$ dir. J, R nin bir S -n-hiper ideali olduğu için $s'x \in J$ veya $s'x \in \sqrt{0}$ olacak şekilde $s, t \in S$ elemanları mevcuttur. $S \cap J = \emptyset$ olduğundan $s'x \notin J$ dir. O halde $s'x \in \sqrt{0}$ bulunur. Böylece $(s'x)^m = 0_R$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $(s')^m x^m = 0_R$ elde edilir. $S \subseteq \text{Reg}(R)$ olduğundan $(s')^m \neq 0_R$ dir. Aksi halde $s' = 0_R$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $x^m = 0_R$ olup $x \in \sqrt{0}$ dir. Böylece $(J : s) = \sqrt{0}$ dir.

$(\Leftarrow)$ $(J : s) = \sqrt{0}$ olan $s \in S$ için J, R nin bir S -asal hiper ideali olduğundan $(J : s')$, R nin bir asal hiper idealidir. $a \in (J : s')$ keyfi olsun. Böylece $as' \in J$ dir. $J \subseteq (J : s)$ ve $(J : s) = \sqrt{0}$ olduğundan $as' \in \sqrt{0}$ dir. Böylece $(s'a)^n = 0_R$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $S \subseteq \text{Reg}(R)$ olduğu için $a^n = 0_R$ dir. Böylece $a \in \sqrt{0}$ olup $(J : s') \subseteq \sqrt{0}$ bulunur. $(J : s')$, R nin bir asal hiper ideal olduğundan $\sqrt{0} \subseteq (J : s')$ dir. Böylece $(J : s') = \sqrt{0}$ elde edilir. Teorem 4.26 den $(J : s')$ R nin bir n -hiper idealdir. Böylece Teorem 4.35 den J, R nin bir S -n-hiper idealidir. $\square$

4.46 Teorem $S, S \subseteq \text{Reg}(R)$ olacak şekilde R nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. J, R nin maksimal S-n-hiper ideali ise J, R nin bir asal hiper idealidir. Aynı zamanda $(J : S) = \sqrt{0}$ dır.

Kanıt J, R nin bir maksimal S-n-hiper ideali ve $s \in J$ nin S-elemanı olsun. J, R nin S-n-hiper ideal olduğundan Teorem 4.37 gereğince her $s \in S$ elemanı için $(J : s)$ bir n-hiper idealdir. Dolayısıyla $(J : S), R$ nin n-hiper idealidir. Kabul edelim ki $(J : S), R$ nin bir maksimal S-n-hiper ideali olmasın. Böylece $(K : S) \subseteq J$ olacak şekilde R nin K öz maksimal S-n-hiper ideali vardır. $K \subseteq (K : S) \subseteq J$ olması J nin R nin bir maksimal S-n-hiper ideali olmasıyla çelişir. Böylece $(J : S), R$ nin bir maksimal S-n-hiper idealidir. Hipotez gereğince J, R nin bir maksimal hiper ideal olduğundan bir asal hiper ideal olduğu açıktır. Teorem 4.45 den $(J : S) = \sqrt{0}$ bulunur. $\square$

4.47 Teorem S ve T, R nin $S \subseteq T$ çarpımsal kapalı alt kümeleri ve $T \cap J = \emptyset$ olsun. J, R nin S-n-hiper ideal ise $T^{-1}J, T^{-1}R$ nin $T^{-1}S$ -n-hiper idealidir. Ayrıca $T^{-1}J \cap R = (J : u)$ eşitliğini sağlayan J nin bir u S-elemanı vardır.

Kanıt İlk olarak $T^{-1}J \cap T^{-1}S = \emptyset$ olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim. Böylece $\frac{a}{t} \in T^{-1}J \cap T^{-1}S$ olacak şekilde $\exists \frac{a}{t} \in T^{-1}R$ elemanı vardır. Dolayısıyla $a \in J \cap S$ olur ki bu ise $J \cap S = \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde $T^{-1}J \cap T^{-1}S \neq \emptyset$ dir. $\frac{a}{t_1} \frac{b}{t_2} \in T^{-1}J$ keyfi olsun. Buradan $ab \in J$ dir. $s \in S, J$ nin S-elemanı iken $\frac{s}{1} \in T^{-1}S$ olduğu açıktır. Şimdi $\frac{s}{1} \frac{a}{t_1} \in \sqrt{0_{T^{-1}R}}$ veya $\frac{s}{1} \frac{b}{t_2} \in T^{-1}J$ olduğunu gösterelim. $\frac{s}{1} \frac{a}{t_1} \notin \sqrt{0_{T^{-1}R}}$ olsa $sa \notin \sqrt{0}$ olup J, R nin S-n-hiper ideali olduğu için $sb \in J$ bulunur. Böylece $t \in T$ için $stb \in J$ dir. $r \in T^{-1}J \cap R$ keyfi olsun. $\frac{r}{1} = \frac{i}{t}$ olacak şekilde $i \in J, t \in T$ vardır. Böylece $vrt = i \in J$ olacak şekilde $v \in T$ vardır. $v' = vt \in T$ denilirse $v'r \in J$ dir. J, R nin S-n-hiper ideali olduğu için $uv' \in \sqrt{0}$ veya $ur \in J$ olacak şekilde u S-elemanı vardır. $T \cap \sqrt{0} = \emptyset$ olduğunu göstermek için $\sqrt{0}$ ın R nin bir T-n-hiper ideali olduğunu göstermemiz yeterlidir. $ab \in \sqrt{0}$ keyfi olsun. Bu takdirde $\sqrt{0}$ ın R nin tüm asal hiper ideallerinin arakesiti olması sebebiyle R nin keyfi bir W asal hiper ideali için $ab \in W$ bulunur. W nın R nin asal hiper ideali olması kullanılarak $a \in W$ veya $b \in W$ bulunur. Dolayısıyla $s = 1_R \in S$ elemanı için $sa \in W$ veya $sb \in W$ sağlanır. Böylece $sa \in \sqrt{0}$ veya $sb \in \sqrt{0}$ dır. Dolayısıyla $\sqrt{0}, R$ nin bir S-asal hiper idealidir. Teorem 4.45 den $\sqrt{0}, R$ nin S-n-hiper idealidir. $S \subseteq T$ olduğundan $\sqrt{0}$ bir T-n-hiper idealdir. Dolayısıyla $T \cap \sqrt{0} = \emptyset$ dir. O halde $uv' \notin \sqrt{0}$ elde edilir. $uv' \in \sqrt{0}$ olsa $uv' \in T$ olduğundan bu $T \cap \sqrt{0} = \emptyset$ olmasıyla çelişir. Böylece $ur \in J$ dir. Böylece u, J nin S-elemanı olmak üzere $r \in (J : u)$ bulunur. Böylece $T^{-1}J \cap R \subseteq (J : u)$ dir. Ayrıca $(J : u) \subseteq T^{-1}J \cap R$ kapsamı da açık olduğundan istenen eşitlik elde edilir. $\square$

4.7 Sonuç S, R nin çarpımsal kapalı alt kümesi ve J, R nin $J \cap S = \emptyset$ olacak şekilde bir hiper

ideali olsun. J, R nin S -n-hiper ideali ise $S^{-1}J, S^{-1}R$ nin n -hiper idealidir. Ayrıca $S^{-1}J \cap R = (J : s)$ ve $S^{-1}\sqrt{0} \cap R = (\sqrt{0}_R : t)$ olacak şekilde $s, t \in S$ vardır.

Kanıt Teorem 4.47 den ve J, R nin bir S -n-hiper ideali olduğu için $S^{-1}J, S^{-1}R$ nin $S^{-1}S$ -n-hiper idealidir. $\frac{a}{s_1} \frac{b}{s_2} \in S^{-1}J$ keyfi olsun. $S^{-1}J, S^{-1}R$ nin $S^{-1}S$ -n-hiper ideali olduğu için $\frac{s}{t} \frac{a}{s_1} \in \sqrt{0_{S^{-1}R}}$ veya $\frac{s}{t} \frac{b}{s_2} \in S^{-1}J$ dir. Böylece $\frac{s}{t}$ birimdir. $\frac{s}{t}$ birim olduğu için $\frac{a}{s_1} \in \sqrt{0_{S^{-1}R}}$ veya $\frac{b}{s_2} \in S^{-1}J$ dir. Dolayısıyla $S^{-1}J, S^{-1}R$ nin bir n -hiper idealidir. Teorem 4.47 den $S^{-1}R \cap R = (J : s)$ ve $S^{-1}\sqrt{0} \cap R = (\sqrt{0} : t)$ bulunur. $\square$

4.8 Sonuç S, R nin çarpımsal kapalı alt kümesi ve J, R nin $J \cap S = \emptyset$ olacak şekilde bir hiper ideali olsun. Bu takdirde J nin R nin S -n-hiper ideali olması için gerek ve yeter koşul $S^{-1}J, S^{-1}R$ nin n -hiper ideali olmasıdır. Üstelik $S^{-1}J \cap R = (J : s)$ ve $S^{-1}\sqrt{0} \cap R = (\sqrt{0} : t)$ olacak şekilde $s, t \in S$ vardır.

Kanıt ($\Rightarrow$) J, R nin bir S -n-hiper ideali olduğu için bir önceki sonuçtan $S^{-1}J, S^{-1}R$ nin bir n -hiper idealidir. Böylece $S^{-1}J \cap R = (J : s) = (J : s)$ ve $S^{-1}\sqrt{0} \cap R = (\sqrt{0} : t)$ olacak şekilde $s, t \in S$ vardır.

($\Leftarrow$) $S^{-1}J, S^{-1}R$ nin bir n -hiper ideali olsun. Ayrıca $s, t \in S$ için $S^{-1}J \cap R = (J : s), S^{-1}\sqrt{0} \cap R = (\sqrt{0} : t)$ olacak şekilde $s, t \in S$ vardır. $u = st$ denirse $ab \in J$ olacak şekilde $a, b \in R$ keyfi elemanları için $\frac{a}{1_R} \cdot \frac{b}{1_R} \in S^{-1}J$ dir. $S^{-1}J, S^{-1}R$ nin bir n -hiper ideali olduğu için $\frac{a}{1_R} \in \sqrt{0_{S^{-1}R}}$ veya $\frac{b}{1_R} \in S^{-1}J$ dir. $\frac{a}{1_R} \in \sqrt{0_{S^{-1}R}}$ ise $wa \in \sqrt{0}$ olacak şekilde $w \in S$ vardır. Dolayısıyla $a \in S^{-1}\sqrt{0} \cap R = (\sqrt{0} : t)$ dir. O halde $a \in (\sqrt{0} : t)$ olduğundan $at \in \sqrt{0}$ bulunur. Böylece $ua = sta \in \sqrt{0}$ dir. $\frac{b}{1_R} \in S^{-1}J$ verilsin. O halde $vb \in J$ olacak şekilde $v \in S$ olup $b \in S^{-1}J = (J : s)$ elde edilir. Dolayısıyla $ub \in J$ dir. Böylece J, R nin bir S -n-hiper idealidir. $\square$

4.4. S-n-Zariski Topolojisi

Bu kısımda S -n-hiper idealler yardımıyla $Spec^*$ kümesinde tanımlanacak topoloji yardımıyla temel tanım ve teoremler sunulmaktadır.

4.48 Teorem Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- (i) X, R nin $\langle X \rangle \cap S = \emptyset$ olacak şekilde bir alt kümesi olsun. Bu takdirde $V^*(X) = V^*(\langle X \rangle)$ dir.
- (ii) $V^*(R) = \emptyset$ ve $V^*(\langle 0 \rangle) = Spec^*(R)$ dir.
- (iii) Δ herhangi bir indis kümesi ve I_j, R nin $I_j \cap S = \emptyset$ koşulunu sağlayan keyfi bir hiper ideali olsun. Bu takdirde $\bigcap_{j \in \Delta} V^*(I_j) = V^*(\bigcup_{j \in \Delta} I_j)$ dir.

(iv) I ve J, R nin $I \cap S = \emptyset$ ve $J \cap S = \emptyset$ koşulunu sağlayan hiper idealleri olmak üzere $V^*(I) \cup V^*(J) = V^*(I \cap J) = V^*(IJ)$ dir.

Kanıt (i) $V^*(\langle X \rangle) = \{J \in Spec^*(R) \mid s \langle X \rangle \subseteq J\} = \{J \in Spec^*(R) \mid sX \subseteq J\} = V^*(X)$ eşitliğinden istenen elde edilir.

(ii) $J \in Spec^*(R)$ olsun. $J \in V^*(R)$ ise $s_1 R \subseteq J$ olacak şekilde $s_1 \in S$ vardır. Böylece $s_1 \in J \cap S = \emptyset$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $V^*(R) = \emptyset$ olup $V^*(\langle 0 \rangle) = \{J \in Spec^*(R) \mid s \langle 0 \rangle = \langle 0 \rangle \subseteq J\} = Spec^*(R)$ elde edilir.

(iii) $J \in \bigcap_{j \in \Delta} V^*(I_j)$ olsun. Böylece her $j \in \Delta$ için $J \in V^*(I_j)$ dir. Dolayısıyla $s_j \in S$ için $s_j I_j \subseteq J$ dir. Böylece $I_j \subseteq (J : s_j)$ dir. Yardımcı Teorem 4.44 den her $j \in \Delta$ için $I_j \subseteq (J : s)$ olacak şekilde $s \in S$ vardır. Dolayısıyla $\exists j \in \Delta$ için $s I_j \subseteq J$ dir. Böylece $s(\bigcup_{j \in \Delta} I_j) \subseteq J$ dir. Dolayısıyla $J \in V^*(\bigcup_{j \in \Delta} I_j)$ dir. Bu yüzden $\bigcap_{j \in \Delta} V^*(I_j) \subseteq V^*(\bigcup_{j \in \Delta} I_j)$ dir. Tersine $J \in V^*(\bigcup_{j \in \Delta} I_j)$ olsun. O halde $s'(\bigcup_{j \in \Delta} I_j) \subseteq J$ olacak şekilde $s' \in S$ vardır. Her $j \in \Delta$ için $I_j \subseteq \bigcup_{j \in \Delta} I_j$ olduğu için $s' I_j \subseteq J$ ve $J \in V^*(I_j)$ dir. Böylece $J \in \bigcap_{j \in \Delta} V^*(I_j)$ dir. Dolayısıyla $\bigcap_{j \in \Delta} V^*(I_j) = V^*(\bigcup_{j \in \Delta} I_j)$ dir.

(iv) $IJ \subseteq I \cap J \subseteq I$ olduğu için $V^*(I) \subseteq V^*(I \cap J) \subseteq V^*(IJ)$ dir. Benzer şekilde $V^*(J) \subseteq V^*(I \cap J) \subseteq V^*(IJ)$ dir. Böylece $V^*(I) \cup V^*(J) \subseteq V^*(I \cap J) \subseteq V^*(IJ)$ dir. Tersine $K \in V^*(IJ)$ olsun. Böylece $s'(IJ) = (s'I)J \subseteq K$ dir. $K \in Spec^*(R)$ olduğu için $s(s'I) \subseteq \sqrt{0}$ veya $sJ \subseteq K$ dir. Böylece $K \in V^*(I)$ veya $K \in V^*(J)$ dir. Dolayısıyla $K \in V^*(I) \cup V^*(J)$ dir. Dolayısıyla $V^*(IJ) = V^*(I) \cup V^*(J)$ bulunur. $\square$

4.13 Tanım S, R nin çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $Spec^*(R)$ kümesi R nin tüm S -n-hiper ideallerinin kümesi olarak tanımlıdır. I, R nin $I \cap S = \emptyset$ koşulunu sağlayan bir hiper idealdir. O halde $V^*(I) = \{J \in Spec^*(R) \mid \exists s \in S \text{ için } sI \subseteq J\}$ biçiminde tanımlıdır.

4.14 Tanım Teorem 4.48 deki şartları sağlayan $\{V^*(X) \mid X \subseteq R\}$ kümesi $Spec^*(R)$ kümesi üzerinde τ topolojisinin kapalı alt kümelerinin bir ailesidir. Bu topolojiye R nin S -n-Zariski topolojisi denir ve $Spec^*(R)$ ile gösterilir. $Spec^*(R)$ nin herhangi açık kümesi $X \subseteq R$ keyfi olmak üzere $D_X^* = Spec^*(R) \setminus V^*(X)$ şeklinde tanımlanır.

Sıradaki teorem Zariski topolojisinin taban elemanlarının neler olduğunu ifade etmektedir.

4.49 Teorem S, R nin çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda herhangi bir $a \in R$ için D_a^* kümesi S -n-Zariski topolojisinin bir tabanıdır.

Kanıt İlk olarak her $a \in R$ için D_a^* ın açık küme olduğunu gösterelim. $J \in Spec^*(R) \setminus D_a^*$ keyfi olsun. $J \notin D_a^*$ olduğundan $sa \in J$ olacak şekilde $s \in S$ elemanı vardır. $sa \in \langle a \rangle \subseteq J$ olduğundan $J \in V^*(\langle a \rangle)$ dir. Böylece $Spec^*(R) \setminus D_a^* \subseteq V^*(\langle a \rangle)$ dir. Tersine $J \in$

$V^*(\langle a \rangle)$ keyfi olsun. Böylece $sa \in \langle a \rangle \subseteq J$ olacak şekilde $s \in S$ vardır. Dolayısıyla $J \in D_a^*$ ve $J \in \text{Spec}^*(R) \setminus D_a^*$ dir. Böylece $\text{Spec}^*(R) \setminus D_a^* = V^*(\langle a \rangle)$ dir. $V^*(\langle a \rangle)$ Zariski topolojisinin kapalı alt kümesi olduğu için $\text{Spec}^*(R) \setminus D_a^*$ bir kapalı kümedir. Böylece D_a^* bir açık kümedir. Şimdi I, R nin bir hiper ideali ve $a \in R$ için $\text{Spec}^*(R) \setminus V^*(I) = \bigcup_{a \in R} (D_a^*)$ olduğunu gösterelim. $J \in \text{Spec}^*(R) \setminus V^*(I)$ olsun. Bu yüzden $J \notin V^*(I)$ dir. O halde Yardımcı Teorem 4.44 den her bir $s \in S$ için $(J : s) \subseteq (J : s')$ olacak şekilde $s' \in S$ vardır. $J \notin V^*(I)$ olduğu için her $s \in S$ için $sI \not\subseteq J$ dir. Aynı zamanda $s'I \not\subseteq J$ dir. $I = \{a_j \mid j \in \Delta\}$ ve $\Delta' = \{j \in \Delta \mid s'a_j \notin J\}$ olsun. Yardımcı Teorem 4.44 den her $s \in S$ için $sa_j \notin J$ olacak şekilde $j \in \Delta'$ vardır. Ters kapsamayı göstermek için $J \in \bigcup_{j \in \Delta'} D_{a_j}^*$ keyfi olsun. Burada $J \in D_{a_j}^*$ olacak şekilde $j \in \Delta'$ vardır. $sa_j \notin J$ olduğundan her $s \in S$ için $sI \not\subseteq J$ olup $J \in \text{Spec}^*(R) \setminus V^*(I)$. $\square$

4.15 Tanım J, R nin bir S-n-hiper ideali olsun. $\sqrt{J} = \{x \in R \mid \exists s \in S \text{ ve } m \in \mathbb{N} \text{ için } sx^m \in J\}$ kümesine J nin S-n-radikali denir.

Tanım 4.15 yardımıyla her $x \in R$ için $\phi(x) = \frac{x}{1}$ olan $\phi : R \rightarrow S^{-1}R$ doğal güçlü homomorfizması alınarak R nin keyfi bir J hiper idealine $S^{-1}R$ hiper halkasında $S^{-1}J = \{u \in S^{-1}R \mid u = \frac{x}{s}, x \in R, s \in S\}$ hiper ideali akarsılık getirilir. Böylece;

- (i) Her $a \in R$ için $V^*(a) = V^*(\langle a \rangle)$ dir.
- (ii) $I \subseteq J$ ise R nin I, J hiper idealleri için $V^*(J) \subseteq V^*(I)$ dir.
- (iii) $I \subseteq J$ iken $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$ dir.

4.50 Teorem $Z \subseteq \text{Spec}^*(R)$ nin kapanışı olan $\bar{Z}, s_j^* \in S$ olmak üzere $V^*(\bigcap_{J \in Z} (J : s_j^*))$ dir.

Kanıt $K \in Z$ olsun. Buradan $s_K(\bigcap_{J \in Z} (J : s_j^*)) \subseteq K$ iken $\bigcap_{J \in Z} (J : s_j^*) \subseteq (J : s_K)$ kapsaması vardır. Böylece $K \in Z$ için $K \in V^*(\bigcap_{J \in Z} (J : s_j^*))$ iken $Z \subseteq V^*(\bigcap_{J \in Z} (J : s_j^*))$ kapsamısından $\bar{Z} \subseteq V^*(\bigcap_{J \in Z} (J : s_j^*))$ bulunur. $Z \subseteq V^*(I)$ olsun. Böylece $J \in Z$ için $J \in V^*(I)$ dir. O halde $s \in S$ için $sI \subseteq J$ dir. Böylece $J \in Z$ için $I \subseteq (J : s) \subset (J : s')$ olacak şekilde $s \neq s' \in S$ dir. Dolayısıyla $I \subseteq \bigcap_{J \in Z} (J : s_j^*)$ olup $V^*(\bigcap_{J \in Z} (J : s_j^*)) \subseteq V^*(I)$ kapsaması elde edilir. $\bar{Z}$ kümesi Z yi kapsayan en küçük kapalı küme olduğundan $V^*(\bigcap_{J \in Z} (J : s_j^*)) \subseteq \bar{Z}$ dir. Buradan $V^*(\bigcap_{J \in Z} (J : s_j^*)) = \bar{Z}$ elde edilir. $\square$

4.51 Teorem $J \in \text{Spec}^*(R)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) Her $s_j^* \in S$ için $\bar{J} = V^*(J) = V^*(J : s_j^*)$ dir.
- (ii) $K \in \text{Spec}^*(R)$ olsun. Bu takdirde $\{\bar{J}\} = \{\bar{K}\}$ olması için gerek ve yeter koşul $(J : s) =$

$(K : s)$ olacak şekilde $s \in S$ bulunmasıdır.

Kanıt (i) $J \subseteq (J : s_J^*)$ olduğu için $V^*((J : s_J^*)) \subseteq V^*(J)$ dir. $K \in V^*(J)$ alalım. Dolayısıyla $sJ \subseteq K$ olacak şekilde $s \in S$ vardır. $ss_J^*(J : s_J^*) \subseteq sJ \subseteq K$ olduğu için $K \in V^*((J : s_J^*))$ dir. Teorem 4.50 den tersinin doğru olduğu açıktır.

(ii) $(\Rightarrow) \{\bar{J}\} = \{\bar{K}\}$ olsun. (i) gereğince $V^*(J) = V^*(K)$ dir. $\bar{J} \in V^*(J) = V^*(K)$ olduğundan $s_1 K \subseteq J$ olacak şekilde $s_1 \in S$ vardır. O halde $K \subseteq (J : s_1)$ olup Yardımcı Teorem 4.44 den $K \subseteq (J : s_1) \subseteq (J : s_J^*)$ kapsamaları bulunur. Benzer metotla $J \subseteq (K : s_K^*)$ kapsaması da gösterilebilir. $s = s_J^* s_K^* \in S$ elemanı için tekrar Yardımcı Teorem 4.44 kullanılarak $(K : s) \subseteq (J : s_J^* s) \subseteq (J : s_J^*) \subseteq (J : s)$ olduğu görülür. Benzer şekilde $(J : s) \subseteq (K : s)$ olduğu da gösterilebilir. Böylece $(J : s) = (K : s)$ dir.

$(\Leftarrow)$ $(J : s) = (K : s)$ olan $s \in S$ olsun. Yardımcı Teorem 4.44 den $(K : s) \subseteq (J : s_J^*) \subseteq (J : s_J^* s_K^* s) \subseteq (J : s_J^*)$ olup $(J : s_J^*) = (J : s_J^* s_K^* s) \subseteq (J : s_J^*)$ kapsamalarından $(J : s_J^*) = (J : s_J^* s_K^* s)$ bulunur. Benzer metotla $(K : s_K^*) = (J : s_J^* s_K^* s)$ olduğu görülür. $(J : s) = (K : s)$ olduğundan $(J : s_J^*) = (J : s_J^* s_K^* s) = (J : s_J^* s_K^* s) = (K : s_K^*)$ eşitliği elde edilir. $V^*(J : s_J^*) = V^*(K : s_K^*)$ olup (i) den $\{\bar{J}\} = \{\bar{K}\}$ bulunur. $\square$

Sıradaki teoremde $Spec^*(R)$ nin taban elemanları yorumlanmaktadır.

4.52 Teorem R hiper halkasının $x, y \in R$ keyfi elemanları için D_x^* ve D_y^* , $Spec^*(R)$ nin taban elemanları olmak üzere $D_x^* \cap D_y^* = D_{xy}^*$ dir.

Kanıt $J \in D_x^* \cap D_y^*$ keyfi olsun. Böylece her $s \in S$ için $sx \notin J, sy \notin J$ olup $s'xy = (s'x)y \in J$ olacak şekilde $s' \in S$ vardır. Buradan $s''s'x \notin \sqrt{0}$ olacak şekilde $s'' \in S$ ve $s''y \in J$ elemanları mevcuttur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla her $s' \in S$ için $s'xy \notin J$ dir. Dolayısıyla $J \in D_{xy}^*$ dür. Tersine $J \in D_{xy}^*$ keyfi olsun. Bu takdirde her $s \in S$ için $sxy \notin J$ dir. $J \in Spec^*(R)$ olduğundan J, R nin S-n-hiper idealidir. Böylece $s' \in S$ için $s'sx \notin \sqrt{0}$ ya da $s'y \notin J$ dir. Dolayısıyla $J \in D_y^*$ dir. $J \notin D_x^*$ ise $J \in V^*(x)$ dir. Her $s'' \in S$ için $s''x \in J$ olur. $y \in R$ olduğundan R nin J hiper ideali için $s''xy \in J$ dir. Bu ise her $s \in S$ için $sxy \notin J$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $J \in D_x^*$ olup $D_x^* \cap D_y^* = D_{xy}^*$ dür. $\square$

Sıradaki sonuçta, $Spec^*(R)$ nin indirgenemez kümesi teşkil edilmektedir.

4.9 Sonuç K, R nin bir S-n-hiper ideali iken $V^*(K)$, $Spec^*(R)$ nin bir indirgenemez kümesidir.

Kanıt R nin I, J hiper idealleri için $V^*(K) = V^*(I) \cup V^*(J)$ olsun. Buradan $V^*(I) \subseteq V^*(K)$

olduğu açıktır. $K \in V^*(K)$ olduğundan $K \in V^*(I)$ veya $K \in V^*(J)$ dir. $K \in V^*(I)$ ise $s_1 I \subseteq K$ olacak şekilde $s_1 \in S$ vardır. $Q \in V^*(K)$ olsun. Böylece $s_2 K \subseteq Q$ olacak şekilde $s_2 \in S$ vardır. $s_1 s_2 I \subseteq s_2 K \subseteq Q$ olduğundan $Q \in V^*(I)$ dır. $V^*(K) \subseteq V^*(I)$ olduğundan $V^*(K) = V^*(I)$ bulunur. Dolayısıyla $V^*(K)$, $Spec^*(R)$ nin bir indirgenemez kümesidir. $\square$



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada değişmeli Krasner hiper halka teorisinde n-hiper ideal, r-hiper ideal ve S-n-hiper ideal kavramlarının cebirsel özellikleri araştırıldı. İlk olarak bu hiper idealler; n-hiper ideal, r-hiper ideal ve S-n-hiper ideal olarak '+' hiper işlemi ve '.' ikili işlemi yardımıyla tanımlandı. S-n-hiper ideal kavramı n-hiper ideal kavramı ile karşılaştırmalı olarak incelendi. Değişmeli hiper halkalarda asal hiper ideal yardımıyla Zariski topolojisi çalışıldı. Lokalizasyon hiper halkalarında S-asal hiper ideallerin yardımıyla S-n-hiper ideallere dair önemli sonuçlar elde edildi. Değişmeli hiper halkalarda n-hiper idealler ve S-n-hiper idealler birbirleriyle ilişkilendirilerek temel özellikleri verildi. Ayrıca daha önceki kısımlarda tanımlanan topolojik hiper yapıya benzer bir topolojik hiper yapı tanımlandı. Bu bağlamda Zariski topolojisindeki metotlar S-n-hiper idealler yardımıyla vektör uzayı tanımlanmasında kullanıldı. Çalışmada yer alan en önemli bulgular özetle şu şekildedir: R hiper halkasının bir J hiper idealinde her $a \in R$ için $(X_J)^a$ nın X_J için bir taban olduğu kanıtlandı. J, R hiper halkasında bir hiper ideal ve $a \in R$ olmak üzere $(X_J)^a = X_J$ ise $\sqrt{aJ} = \sqrt{J} \subseteq \sqrt{\langle a \rangle}$ kapsamasının var olduğu gösterildi. $J, \sqrt{J} \neq \sqrt{0}$ olan R hiper halkasının bir hiper ideali olsun. Bu takdirde X_J nin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşulun $N_J(0)$ ın R nin bir asal hiper ideali olması olduğu ispatlandı. J, R hiper halkasında bir hiper ideal olsun. Bu takdirde R nin TN -şartını sağlaması için gerek ve yeter koşulun X_J nin Noether topolojik hiper vektör uzayı olması olduğu gösterildi. D ve her $i \in \Delta$ için J_i, R nin öz hiper idealleri olsun. Bu takdirde $\bigcup_{i \in \Delta} X_{J_i} = X_D$ olması için gerek ve yeter koşulun $\sqrt{D} = \sqrt{\sum_{i \in \Delta} J_i}$ olması olduğu kanıtlandı. I, R nin bir öz hiper ideali olsun. O halde X_I nin, X de yoğun olması için gerek ve yeter koşulun $J \not\subseteq \sqrt{0}$ olan S nin her J öz hiper ideali için $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{0}$ olması olduğu gösterildi. R nin her $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ için $\sqrt{0} \neq \sqrt{J_i}$ olan J_i hiper idealleri verilsin. Bu takdirde $X = \bigcup_{i=1}^n X_{J_i}$ olmak üzere X_{J_i} açık alt kümelerinin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşulun $R = \sum_{i=1}^n J_i$ ve $N_{J_i}(0)$ ın R nin asal hiper ideali olması olduğu ispatlandı. Burada J, R hiper halkasının öz n-hiper ideali ise $J \subseteq \sqrt{0}$ olduğu kanıtlandı. n-hiper ideallerin $\{J_i\}_{i \in \Delta}$ kümesi için $\bigcap_{i \in \Delta} J_i$ nin bir n-hiper ideali olduğu ispatlandı. J, R nin S-n-hiper ideali ve $s \in S$ olmak üzere $(\sqrt{0} : s), R$ nin n-hiper ideali olsun. O halde $(J : s), R$ nin n-hiper idealidir. R nin sonlu sayıda S-n-hiper ideallerinin arakesitinin de bir S-n-hiper ideal olduğu ispatlandı. $S \subseteq \text{Reg}(R)$ olacak şekilde R nin S çarpımsal kapalı alt kümesi için R nin her maksimal S-n-hiper idealinin bir asal hiper ideal olduğu kanıtlandı. S, R nin çarpımsal kapalı alt kümesi ve her $a \in R$ için D_a^* kümesi S-n-Zariski topolojisinin bir tabanı olduğu ispatlandı. $Z \subseteq \text{Spec}^*(R)$ nin kapanışı olan $\bar{Z}$ nin $s_J^* \in S$ olmak üzere $V^*(\bigcap_{J \in Z} (J : s_J^*))$ şeklinde olduğu kanıtlandı. Ayrıca $x, y \in R$ olmak üzere D_x^* ve $D_y^*, \text{Spec}^*(R)$ nin keyfi taban elemanları için $D_x^* \cap D_y^* = D_{xy}^*$ olduğu gösterildi.

Bu çalışma yardımıyla Teorem 4.19, Teorem 4.20 ve Teorem 4.21 olarak yer verilen bulgulara benzer bir metotla hiper vektör uzaylarında S-asal hiper ideallerin spektrumları araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Abuhlail, J. (2011). A dual zariski topology for modules. *Topology and its Applications*, 158(3), 457–467.
- Ansari-Toroghy, H., ve Ovlyae-Sarmazdeh, R. (2010). On the prime spectrum of a module and zariski topologies. *Communications in Algebra*, 38(12), 4461–4475.
- Atiyah, M. (1969). *Macdonald., ig, introduction to commutative algebra univ. of oxford*. Addison-Wesley Publishing Co.
- Barghi, A. R. (2003). A class of hyperrings. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 6(2-3), 227–233.
- Bourbaki, N. (1966). *Elements of mathematics: General topology*. Hermann.
- Davvaz, B. (2004). Isomorphism theorems of hyperrings. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 35(3), 321–332.
- Davvaz, B., ve Leoreanu-Fotea, V. (2007). *Hyperring theory and applications* (Vol. 347). International Academic Press, USA.
- Davvaz, B., ve Salasi, A. (2006). A realization of hyperrings. *Communications in Algebra*, 34(12), 4389–4400.
- Dehghan Nezhad, A., Nadjafikhah, M., ve Moosavi Nejad, S. M. (2010). The algebraic hyperstructure of elementary particles in physical theory. *arXiv e-prints*.
- DE SALVO, M. (1984). Hyperrings and hyperfields. *Annales scientifiques de l'université de clermont. Mathématiques*, 82, 89–107.
- Gürkanlı, A. T. (1993). *Genel topoloji*. Ondokuz Mayıs Üniversitesi.
- Hartshorne, R. (1977). *Algebraic geometry, graduate texts in mathematics*. New York: Springer-verlag.
- Hulek, K. (2003). *Elementary algebraic geometry* (No. 20). American Mathematical Soc.
- Jun, J. (2018). Algebraic geometry over hyperrings. *Advances in Mathematics*, 323, 142–192.
- Khashan, H., ve Celikel, E. Y. (2023). Sn-ideals of commutative rings. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 72(1), 199–215.
- Krasner, M. (1983). A class of hyperrings and hyperfields. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 6(2), 307–311.
- Kunz, E. (1985). *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*. Springer Science & Business Media.

- Lam, T. (1998). *Lectures on modules and rings*, spring-verlag, new york. Inc.
- Lu, C.-P. (1995). Spectra of modules. *Communications in Algebra*, 23(10), 3741–3752.
- Lu, C.-P. (1999). Erratum to “the zariski topology on the prime spectrum of a module “. *Houston J. Math*, 25(3), 417–432.
- Lu, C.-P. (2010). Modules with noetherian spectrum. *Communications in Algebra*, 38(3), 807–828.
- Marshall, M. (2006). Real reduced multirings and multifields. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 205(2), 452–468.
- Marty, F. (1934). Sur une generalization de la notion de groups. In *8th congress math. scandinaves, stockholm,(1934)*.
- McCasland, R., Moore, M., ve Smith, P. (1997). On the spectrum of a module over a commutative ring. *Communications in Algebra*, 25(1), 79–103.
- Mucuk, O. (2023a). *Topoloji ve kategori teorisi*. Nobel Akademik Yayıncılık (Geliştirilmiş 3. Basım).
- Mucuk, O. (2023b). *Topoloji ve kategori teorisi*. Nobel Akademik Yayıncılık.
- Mumford, D. (1999). *The red book of varieties and schemes: includes the michigan lectures (1974) on curves and their jacobians* (Vol. 1358). Springer Science & Business Media.
- Munkres, J. (1975). *Topology (second edition)*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs.
- Northcott, D. G. (1968). Lessons on rings, modules and multiplicities. (*No Title*).
- Ohm, J., ve Pendleton, R. L. (1968). Rings with noetherian spectrum. *Duke Math. J.*, 35, 631–639.
- Ortaç, Ö., ve Alkan, M. (2019). Zariski subspace topologies on ideals. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48(6), 1667–1674.
- Ramaruban, N. (2014). *Commutative hyperalgebra*. University of Cincinnati.
- Tekir, U., Koc, S., ve Oral, K. H. (2017). n-ideals of commutative rings. *Filomat*, 31(10), 2933–2941.
- Velrajan, M., ve Arjunan, A. (2010). Note on isomorphism theorems of hyperrings. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2010(376985), 1–12.
- Zariski, O., ve Samuel, P. (2013). *Commutative algebra: Volume ii* (Vol. 29). Springer Science & Business Media.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Nazlı Makbule Polat Öz

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
-----------------	--------------	----------------

Lisans	OMÜ Matematik Bölümü	2011
--------	----------------------	------

Yüksek Lisans	OMÜ Matematik Bölümü	2014
---------------	----------------------	------

Yabancı Dil

İngilizce

