



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**HİPER-LUCAS SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM
ELEMENLİ MATRİSLERDE UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Derya ÖZGÜL

DANIŞMAN

Doç. Dr. Mustafa BAHŞİ

AKSARAY, 2019

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342629 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, **Derya ÖZGÜL** tarafından hazırlanan "**HYPER-LUCAS SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM ELEMANLI MATRİSLERDE UYGULAMALARI**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir

Danışman: Doç. Dr. Mustafa BAHŞİ

Aksaray Üniversitesi

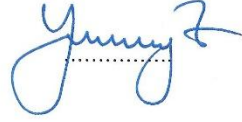
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Tez Savunma Tarihi: 24/05/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Hiper-Lucas sayılarının maksimum ve minimum elemanlı matrislerde uygulamaları konulu yüksek lisans tezim olan bu çalışmayı, gelenek, bilimsel etik ve ahlak ilkelerine ters düşecek şekilde ve yardıma müracaat etmeksizin yazdığımı, faydalandığım kaynakların kaynakçada belirtilenlerden meydana geldiğini ve bu kaynaklardan her faydalanışımın aktarma olduğunu belirtir; şerefimle bunu doğrularım.

Belirli bir zaman aramaksızın, tezim hakkında yapmış olduğum bu beyana ters bir durumun belirlenmesi halinde, meydana gelecek tüm ahlaki ve hukuki neticeleri kabul edeceğimi bildiririm.

Derya ÖZGÜL



TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanmasında, kendisine ne zaman gitsek kıymetli zamanını ayırıp sorunlarımızı çözmemiz için elinden geleni yapan, güler yüzünü ve samimiyetini bizden esirgemeyen saygı değer hocam Doç. Dr. Mustafa BAHŞİ' ye teşekkürlerimi sunuyorum. Bu çalışma süresince bana olan güveni ile bana destek ve yardımcı olan Ferit ÖZGÜL'e ve hayattaki en büyük şanslarım olan annem ve babama teşekkürü borç bilirim.

Derya ÖZGÜL

AKSARAY, 2019

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	v
ŞİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
1.1 Problemin Tanıtımı.....	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	3
3. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	5
4. HİPER-LUCAS SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM ELEMANLI MATRİSLERDE UYGULAMALARI	13
4.1 Hiper- Lucas Sayılarının Maksimum Elemanlı Matrislerde Uygulamaları.....	13
4.2 Hiper- Lucas Sayılarının Minimum Elemanlı Matrislerde Uygulamaları.....	26
5. UYGULAMALAR	37
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	47
KAYNAKLAR.....	48
ÖZGEÇMİŞ	50

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HİPER-LUCAS SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM ELEMANLI MATRİSLERDE UYGULAMALARI

Derya ÖZGÜL

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mustafa BAHŞİ

ÖZET

Bu çalışmada, elemanları hiper-Lucas sayılarından oluşan 4 adet maksimum veya minimum elemanlı matrislerin determinantlarını, karakteristik polinomlarını, terslerini ve Hadamard terslerini araştırdık ve hiper-Lucas sayılarına bağlı olarak bazı sonuçlar elde ettik.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; çalışmamızın amacı belirlenmiş ve problem tanıtılmıştır. İkinci bölümde; çalışmamızla ilgili literatür özetlenmiştir. Üçüncü bölümde; çalışmamız ile ilgili bazı temel kavramlar tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde; elemanları hiper-Lucas sayıları olarak seçilen maksimumlu veya minimumlu matrislerin determinantları, karakteristik polinomları, tersleri ve Hadamard tersleri ile ilgili elde edilen bulgular verilmiştir. Beşinci bölümde; dördüncü bölümdeki bulgularımızla ilgili bazı sayısal örnekler verilmiştir. Altıncı bölümde ise; sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ters, Karakteristik polinom, Determinant, Maksimum ve minimum elemanlı matrisler

Mayıs, 2019; 50 sayfa

M.Sc. THESIS

**APPLICATIONS OF THE HYPER-LUCAS NUMBERS IN MATRICES
WITH MAXIMUM AND MINIMUM ELEMENTS**

Derya ÖZGÜL

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa BAHŞİ

ABSTRACT

In this study, we have examined the determinants, characteristic polynomials, inverses and Hadamard inverses of the matrices with maximum and minimum elements, which have been formed from hyper-Lucas numbers and we have obtained some results which depend on the hyper-Lucas Numbers.

This study consists of six sections. In the first section; the purpose has been determined and the problem has been introduced. In the second section; the literature on the problem studied has been summarized. In the third section; some basic concepts related to our study have been introduced. In the fourth section; the obtained results related to the determinants, characteristic polynomials, inverses and Hadamard inverses of the maximum or minimum matrices selected as hyper-Lucas numbers elements have been given. In the fifth section; we have given some numerical examples related to our findings in the fourth section. In the sixth section; conclusions and suggestions were given.

Keywords: Inverse, Characteristic polynomial, Determinant, Matrices with maximum and minimum element

May, 2019; 50 Pages

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1. Bazı hiper-Lucas sayıları.....	37
---	----



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$ A $	A matrisinin determinantı
A^{-1}	A matrisinin tersi
L_n	n . Lucas sayısı
$L_n^{(r)}$	n . hiper-Lucas sayısı
$\{L_n^{(r)}\}$	Hiper-Lucas sayı dizisi
$A \circ B$	A ve B matrislerinin Hadamard çarpımı
$\ A\ _2$	A matrisinin spektral normu
$A^{\circ-1}$	A matrisinin Hadamard tersi

1. GİRİŞ

Matematik; gerek konuları gerekse metodolojik çalışma ilkeleri açısından fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik gibi diğer bazı uygulamalı bilimlerde araştırmacıların sık sık faydalandığı bir bilim dalıdır.

Uygulamalı bilimlerde verilen bir problemi matematiksel olarak ifade edebilmek son derece önemlidir. Çünkü; elde edilen matematiksel ifadenin özellikleri araştırmacılara üzerinde çalıştıkları problemle ilgili önemli bilgiler sunmaktadır. Matris teorisi bu matematiksel ifade etmede önemli bir yer tutmaktadır. Dolayısıyla üzerinde çalışılan problem matris problemine dönüşmektedir.

Bizim bu çalışmadaki amacımız; elemanları, $L_n^{(0)} = L_n$ olmak üzere $r \geq 1$ tamsayısı için $L_n^{(r)} = \sum_{k=0}^n L_k^{(r-1)}$ şeklinde tanımlı hiper-Lucas sayıları olan maksimum elemanlı ve minimum elemanlı matrislerin özelliklerini araştırmaktır.

1.1 Problemin Tanıtımı

Son yıllarda, elemanları özel olarak seçilmiş matrisler üzerine çalışmalar artmıştır. Biz bu çalışmamızda elemanları hiper-Lucas sayılarından oluşan,

$$X = \left[L_{k+\max(i,j)-1}^{(r)} \right]_{i,j=1}^n \quad (1.1)$$

$$Y = \left[L_k^{(r+\max(i,j)-1)} \right]_{i,j=1}^n \quad (1.2)$$

$$Z = \left[L_{k+\min(i,j)-1}^{(r)} \right]_{i,j=1}^n \quad (1.3)$$

$$T = \left[L_k^{(r+\min(i,j)-1)} \right]_{i,j=1}^n \quad (1.4)$$

şeklinde maksimum ve minimum kavramlarına bağlı olarak tanımlanan X , Y , Z ve T matrislerinin determinant, ters, Hadamard tersi ve karakteristik polinomu gibi özelliklerini inceleyeceğiz. Hiper-Lucas sayıları Lucas sayılarının genel hali olduğundan bizim bu çalışmamızda ele aldığımız matrisler, literatür özetinde

bahsedeceğimiz Akyüz (2017) tarafından hazırlanan yüksek lisans tezinde incelenen

$C = [L_{k+\max(i,j)-1}]_{i,j=1}^n$ ve $D = [L_{k+\min(i,j)-1}]_{i,j=1}^n$ matrislerinin genel halidir.



2. LİTERATÜR ÖZETİ

Bu bölümde, çalışmamızla ilgili daha önce yapılmış çalışmaları kısa kısa özetleyeceğiz.

Catalani (2002), $A = (\min(i, j))$ matrisinin esas minörlerini Fibonacci sayılarına bağlı olarak elde etmiştir.

Bhatia (2006), minimumlu matrislerin sonsuz bölünebilirliğini incelemiştir.

Bhatia (2011), minimumlu ve benzeri tipteki matrisleri daha kapsamlı bir şekilde incelemiştir.

Fonseca (2007), $C = [\min\{xi - y, xj - y\}]_{i,j=1}^n$, $x > 0$ ve $x \neq y$, matrisinin özdeğerlerini ve tersini hesaplamıştır.

Chu vd., (2011), Neudecker vd., (2009) tarafından ortaya atılan reel sayılardan oluşan $A = [a_{\min(i,j)}]_{i,j=1}^n$ matrisi ile ilgili bazı problemlere cevap vermişlerdir.

Bahşi ve Solak, (2011), $B_k = (k + \min(i, j) - 1)$ matrisinin determinantını, Öklid normunu ve tersini hesaplamışlardır.

Solak ve Bahşi, (2013), $B_k = (k + \max(i, j) - 1)$ matrisinin determinantını, Öklid normunu, tersini ve Hadamard tersini elde etmişlerdir.

Bahşi ve Solak, (2015), A_k ve B_k matrislerinin elemanlarını $a_{ij} = k + \min(i, j) - 1$, $b_{ij} = k + \max(i, j) - 1$ ve $k \in R$ şeklinde tanımlayıp bu matrislerin karakteristik polinomları ile genelleştirilmiş Fibonacci sayıları arasındaki ilişkileri vermişlerdir.

Petroudi ve Pirouz, (2016), elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan $F = [F_{\min(i,j)+1}]_{i,j=1}^n$ ve e^F matrislerinin spektral normu için alt ve üst sınırlar vermişlerdir.

Matilla ve Haukkanen, (2016), minimum ve maksimum elemanlı matrislere ilk defa Pólya ve Szegő tarafından yazılan Problems and Theorems in Analysis II kitabının 4. baskısında karşılaştığını belirterek maksimum ve minimum elemanlı matrislerin bazı özelliklerini incelemiştir.

Dil ve Mezö, (2008), hiperharmonik sayıların tanımına benzer olarak hiper-Lucas sayılarını $L_n^{(0)} = L_n$ ve r pozitif tamsayı olmak üzere, $L_0^{(r)} = 2$, $L_1^{(r)} = 2r + 1$ şartları altında $L_n^{(r)} = \sum_{k=0}^n L_k^{(r-1)}$ şeklinde tanımlamışlardır.

Bahşi vd., (2014), hiper-Fibonacci ve hiper-Lucas sayılarının bazı özelliklerini bir simetrik alitritmadan faydalanarak elde etmişlerdir.

Bahşi ve Solak, (2014), hiper-Fibonacci ve hiper-Lucas sayılarından oluşan sirkülant matrislerin normlarını hesaplamışlardır.

Akyüz (2017), yüksek lisans tezinde elemanlarını Lucas sayılarına bağlı olarak tanımladığı $C = [L_{k+\max(i,j)-1}]_{i,j=1}^n$ ve $D = [L_{k+\min(i,j)-1}]_{i,j=1}^n$ matrislerinin normlarını, terslerini ve Hadamard terslerini incelemiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Tanım 3.1 $X = (x_{ij})$ ve $Y = (y_{ij})$ $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere, bu iki matrisin Hadamard çarpımı

$$X \circ Y = (x_{ij} \cdot y_{ij}) \quad (3.1)$$

eşitliğiyle tanımlanır (Horn ve Johnson, 1991).

Maksimum satır normu, $t_1(X) = \max_{1 \leq i \leq m} \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_{ij}|^2}$ ve maksimum sütun normu,

$k_1(Y) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^m |y_{ij}|^2}$ olmak üzere, Hadamard çarpımın spektral normu;

$$\|X \circ Y\|_2 \leq t_1(X) k_1(Y) \quad (3.2)$$

eşitsizliğini sağlar (Horn ve Johnson, 1991).

Tanım 3.2 $x_{ij} \neq 0$ olmak üzere, $X = (x_{ij})_{m \times n}$ matrisinin Hadamard tersi,

$$X^{\circ -1} = \left(\frac{1}{x_{ij}} \right)_{m \times n} \quad (3.3)$$

eşitliği ile ifade edilir (Horn ve Johnson, 1991).

Tanım 3.3 Herhangi bir X matrisinin spektral normu, $\|X\|_2 = \{\lambda : \lambda, X^H X \text{ 'in mutlak değerce en büyük öz değerinin karekökü}\}$ şeklinde ifade edilir (Horn ve Johnson, 1991).

Tanım 3.4 Başlangıç koşulu; $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olan ve $n \geq 2$ doğal sayı olmak üzere $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ denklemi ile meydana gelen $\{L_n\}_{n \geq 0}$ sayı dizisine Lucas sayı dizisi denir (Koshy, 2001).

$x^2 - x - 1 = 0$ denklemi Lucas sayılarının rekürans bağıntısına ait karakteristik denklemi olup, bu denklemin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ şeklindedir. n . Lucas sayısı α ve β ya bağlı olarak,

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \quad (3.4)$$

şeklinde yazılır. Bu gösterime Lucas sayılarının Binet Formülü denir (Koshy, 2001). Buradaki $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısı iyi bilinen altın oran olup, Lucas sayıları ile altın oran arasında,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \alpha \quad (3.5)$$

bağıntısı mevcuttur (Koshy, 2001).

Lucas sayılarının bir genellemesi olarak, Dil ve Mezö hiper-Lucas sayıları kavramını hiperharmonik sayı kavramına benzer olarak literatüre şu şekilde kazandırmışlardır.

Tanım 3.5 $L_n^{(0)} = L_n$ ve r pozitif tamsayı olmak üzere, $L_0^{(r)} = 2$, $L_1^{(r)} = 2r + 1$ şartları altında $L_n^{(r)} = \sum_{k=0}^n L_k^{(r-1)}$ ile verilen $L_n^{(r)}$ sayısına r . mertebeden n . hiper-Lucas sayısı denir (Dil ve Mezö, 2008).

Hiper-Lucas sayı dizisi, $L_n^{(r)} = L_{n-1}^{(r)} + L_n^{(r-1)}$ şeklinde rekürans bağıntısına sahiptir. α altın oran olmak üzere hiper-Lucas sayıları ve altın oran arasında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(r)}}{L_{n-1}^{(r)}} = \alpha, \quad (3.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(r-1)}}{L_{n-1}^{(r)}} = \alpha - 1, \quad (3.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n-1}^{(r)}}{L_n^{(r-1)}} = \alpha \quad (3.8)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(r)}}{L_n^{(r-1)}} = 1 + \alpha \quad (3.9)$$

bağıntıları mevcuttur (Bahşi ve Solak, 2016).

Tanım 3.6 Elemanları maksimum (minimum) kavramlarına bağlı olarak tanımlanan matrislere maksimum elemanlı (minimum elemanlı) matrisler denir (Akyüz, 2017).

Bazı maksimum ve minimum elemanlı matrislere örnek olarak

$$A = [\min(i, j)]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$B = [\max(i, j)]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$C = [L_{k+\max(i,j)-1}]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} L_k & L_{k+1} & L_{k+2} & \dots & L_{k+n-1} \\ L_{k+1} & L_{k+1} & L_{k+2} & \dots & L_{k+n-1} \\ L_{k+2} & L_{k+2} & L_{k+2} & \dots & L_{k+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & L_{k+n-1} \\ L_{k+n-1} & L_{k+n-1} & L_{k+n-1} & L_{k+n-1} & L_{k+n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

ve

$$D = [L_{k+\min(i,j)-1}] = \begin{bmatrix} L_k & L_k & L_k & \dots & L_k \\ L_k & L_{k+1} & L_{k+1} & \dots & L_{k+1} \\ L_k & L_{k+1} & L_{k+2} & \dots & L_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_k & L_{k+1} & L_{k+2} & \dots & L_{k+n-1} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

matrisleri yazılabilir.

Teorem 3.1 $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_n$ olacak şekilde z_i reel sayıları ve

$$[K]_{\max} = \max(z_i, z_j) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \\ z_2 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \\ z_3 & z_3 & z_3 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n & z_n & z_n & z_n & z_n \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

ile

$$[K]_{\min} = \min(z_i, z_j) = \begin{bmatrix} z_1 & z_1 & z_1 & \dots & z_1 \\ z_1 & z_2 & z_2 & \dots & z_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

matrisleri verilsin. O halde, $n \geq 2$ için

$$[K]_{\max} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 - z_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 - z_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$[K]_{\min} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 - z_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_n - z_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

eşitlikleri geçerlidir (Haukkanen ve Mattila, 2016).

Teorem 3.2 $[K]_{\max}$ ve $[K]_{\min}$ matrislerinin determinantları sırasıyla,

$$\det[K]_{\max} = (z_1 - z_2)(z_2 - z_3) \dots (z_{n-1} - z_n)z_n \quad (3.18)$$

ve

$$\det[K]_{\min} = z_1(z_2 - z_2)(z_3 - z_2) \dots (z_n - z_{n-1}) \quad (3.19)$$

şeklindedir (Haukkanen ve Mattila, 2016).

Teorem 3.3 $z_1, z_2, \dots, z_n$ sayıları birbirinden farklı olsunlar. Eğer $z_1 \neq 0$ ise $[K]_{\min}$ matrisinin tersi var ve bu tersin elemanları ise

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & |i-j| > 1 \\ \frac{z_2}{z_1(z_2 - z_1)}, & i = j = 1 \\ \frac{1}{z_i - z_{i-1}} + \frac{1}{z_{i+1} - z_i}, & 1 < i = j < n \\ \frac{-1}{|z_i - z_j|}, & |i-j| = 1 \\ \frac{1}{z_n - z_{n-1}}, & i = j = n \end{array} \right. \quad (3.20)$$

şeklinde ve eğer $z_n \neq 0$ ise $[K]_{\max}$ matrisinin tersi var ve bu tersin elemanları

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & |i-j| > 1 \\ \frac{1}{z_1 - z_2}, & i = j = 1 \\ \frac{1}{z_{i-1} - z_i} + \frac{1}{z_i - z_{i+1}}, & 1 < i = j < n \\ \frac{1}{|z_i - z_j|}, & |i-j| = 1 \\ \frac{1}{z_{n-1} - z_n} + \frac{1}{z_n}, & i = j = n \end{array} \right. \quad (3.21)$$

şeklindedir (Haukkanen ve Mattila, 2016).

Teorem 3.4 (3.12) ile verilen C matrisinin $k > 0$ ve $n \geq 2$ için determinanı,

$$|C| = (-1)^{n+1} L_{k+n-1} \prod_{i=0}^{n-2} L_{k+i-1} \quad (3.22)$$

şeklindedir (Akyüz, 2017).

Teorem 3.5 (3.12) ile verilen C matrisinin $k > 0$ ve $n \geq 2$ için tersi,

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k - L_{k+1}} & -\frac{1}{L_k - L_{k+1}} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{L_k - L_{k+1}} & \frac{1}{L_k - L_{k+1}} + \frac{1}{L_{k+1} - L_{k+2}} & -\frac{1}{L_{k+1} - L_{k+2}} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_{k+1} - L_{k+2}} & \frac{1}{L_{k+1} - L_{k+2}} + \frac{1}{L_{k+2} - L_{k+3}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{L_{k+n-2} - L_{k+n-1}} + \frac{1}{L_{k+n-1}} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

şeklindedir (Akyüz, 2017).

Teorem 3.6 (3.12) ile verilen C matrisinin spektral normu için,

$$\|C\|_2 \leq \sqrt{n L_{k+n-1}^2 ((n-1) L_{k+n-1}^2 + 1)} \quad (3.24)$$

eşitsizliği mevcuttur (Akyüz, 2017).

Teorem 3.7 $k > 0$ olmak üzere (3.13) ile verilen D matrisinin Hadamard tersinin determinanı,

$$|D^{o-1}| = (-1)^{n+1} \frac{L_{k-1}}{L_{k+n-2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{L_{k+i-1}} \quad (3.25)$$

şeklindedir (Akyüz, 2017).

Teorem 3.8 $k > 0$ olmak üzere (3.13) ile verilen D matrisinin Hadamard tersinin tersi,

$$(D^{\circ-1})^{-1} = \begin{bmatrix} L_k - \frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & \frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & -\frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} - \frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & \frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & -\frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} - \frac{L_{k+2} L_{k+3}}{L_{k+1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{L_{k+n-1} L_{k+n-2}}{L_{k+n-3}} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

biçimindedir (Akyüz, 2017).

Bu araştırmada incelenen ve tezimizin bundan sonrasında bahsedilen $n \times n$ tipindeki X , Y , Z ve T matrisleri,

$$X = \left[L_{k+\max(i,j)-1}^{(r)} \right]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} L_k^{(r)} & L_{k+1}^{(r)} & L_{k+2}^{(r)} & \dots & L_{k+n-1}^{(r)} \\ L_{k+1}^{(r)} & L_{k+1}^{(r)} & L_{k+2}^{(r)} & \dots & L_{k+n-1}^{(r)} \\ L_{k+2}^{(r)} & L_{k+2}^{(r)} & L_{k+2}^{(r)} & \dots & L_{k+n-1}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{k+n-1}^{(r)} & L_{k+n-1}^{(r)} & L_{k+n-1}^{(r)} & \dots & L_{k+n-1}^{(r)} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$Y = \left[L_k^{(r+\max(i,j)-1)} \right]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} L_k^{(r)} & L_k^{(r+1)} & L_k^{(r+2)} & \dots & L_k^{(r+n-1)} \\ L_k^{(r+1)} & L_k^{(r+1)} & L_k^{(r+2)} & \dots & L_k^{(r+n-1)} \\ L_k^{(r+2)} & L_k^{(r+2)} & L_k^{(r+2)} & \dots & L_k^{(r+n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_k^{(r+n-1)} & L_k^{(r+n-1)} & L_k^{(r+n-1)} & \dots & L_k^{(r+n-1)} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$Z = \left[L_{k+\min(i,j)-1}^{(r)} \right]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} L_k^{(r)} & L_k^{(r)} & L_k^{(r)} & \dots & L_k^{(r)} \\ L_k^{(r)} & L_{k+1}^{(r)} & L_{k+1}^{(r)} & \dots & L_{k+1}^{(r)} \\ L_k^{(r)} & L_{k+1}^{(r)} & L_{k+2}^{(r)} & \dots & L_{k+2}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_k^{(r)} & L_{k+1}^{(r)} & L_{k+2}^{(r)} & \dots & L_{k+n-1}^{(r)} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$T = \left[L_k^{(r+\min(i,j)-1)} \right]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} L_k^{(r)} & L_k^{(r)} & L_k^{(r)} & \dots & L_k^{(r)} \\ L_k^{(r)} & L_k^{(r+1)} & L_k^{(r+1)} & \dots & L_k^{(r+1)} \\ L_k^{(r)} & L_k^{(r+1)} & L_k^{(r+2)} & \dots & L_k^{(r+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_k^{(r)} & L_k^{(r+1)} & L_k^{(r+2)} & \dots & L_k^{(r+n-1)} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

şeklindedir. Bu durum her defasında tekrar ifade edilmeyecektir.



4. HİPER-LUCAS SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM ELEMANLI MATRİSLERDE UYGULAMALARI

Bu bölümde, elemanları hiper-Lucas sayıları olarak seçilen maksimum ve minimum elemanlı matrislerin determinant, ters, karakteristik polinom gibi bazı özelliklerini inceledik. Burada hemen ilgi çekelim ki; çalışmamızdaki k ve r değerleri pozitif reel sayılardır.

4.1 Hiper-Lucas Sayılarının Maksimum Elemanlı Matrislerde Uygulamaları

Teorem 4.1.1 X matrisinin karakteristik polinomu $p_X(n, \lambda)$ olsun. Bu durumda,

$$p_X(n, \lambda) = (\lambda - L_{k+n-1}^{(r)})q_X(n-1, \lambda) - \lambda^2 q_X(n-2, \lambda) \quad (4.1)$$

olacak şekilde, $q_X(0, \lambda) = 1$, $q_X(1, \lambda) = 2\lambda + L_{k+1}^{(r-1)}$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$q_X(n, \lambda) = (2\lambda + L_{k+n}^{(r-1)})q_X(n-1, \lambda) - \lambda^2 q_X(n-2, \lambda) \quad (4.2)$$

bağıntısı ile tanımlı $q_X(n, \lambda)$ polinomu vardır.

İspat.

$$p_X(n, \lambda) = |\lambda I - X| = \begin{vmatrix} \lambda - L_k^{(r)} & -L_{k+1}^{(r)} & -L_{k+2}^{(r)} & \cdots & -L_{k+n-1}^{(r)} \\ -L_{k+1}^{(r)} & \lambda - L_{k+1}^{(r)} & -L_{k+2}^{(r)} & \cdots & -L_{k+n-1}^{(r)} \\ -L_{k+2}^{(r)} & -L_{k+2}^{(r)} & \lambda - L_{k+2}^{(r)} & \cdots & -L_{k+n-1}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -L_{k+n-1}^{(r)} & -L_{k+n-1}^{(r)} & -L_{k+n-1}^{(r)} & \cdots & \lambda - L_{k+n-1}^{(r)} \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

olup, bu determinantta her satırdan bir sonraki satır çıkartıldığında

$$p_X(n, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + L_{k+1}^{(r-1)} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_{k+2}^{(r-1)} & \lambda + L_{k+2}^{(r-1)} & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ L_{k+3}^{(r-1)} & L_{k+3}^{(r-1)} & \lambda + L_{k+3}^{(r-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{k+n-1}^{(r-1)} & L_{k+n-1}^{(r-1)} & L_{k+n-1}^{(r-1)} & \cdots & \lambda + L_{k+n-1}^{(r-1)} & -\lambda \\ -L_{k+n-1}^{(r)} & -L_{k+n-1}^{(r)} & -L_{k+n-1}^{(r)} & \cdots & -L_{k+n-1}^{(r)} & \lambda - L_{k+n-1}^{(r)} \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

elde edilir. Bu son determinanтта da ilk sütundan itibaren her sütundan sonraki sütun çıkarılırsa

$$p_X(n, \lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda + L_{k+1}^{(r-1)} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda + L_{k+2}^{(r-1)} & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda + L_{k+3}^{(r-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\lambda + L_{k+n-1}^{(r-1)} & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & \lambda - L_{k+n-1}^{(r)} \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

elde edilir. Eğer $q_X(n, \lambda)$ polinomunu,

$$q_X(n, \lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda + L_{k+1}^{(r-1)} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda + L_{k+2}^{(r-1)} & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda + L_{k+3}^{(r-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\lambda + L_{k+n-1}^{(r-1)} & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 2\lambda + L_{k+n}^{(r-1)} \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

olarak seçersek $q_X(1, \lambda) = 2\lambda + L_{k+1}^{(r-1)}$ olup bu determinanıtı son sütuna göre hesaplırsak $q_X(0, \lambda) = 1$ kabulü altında $n \geq 2$ için

$$q_X(n, \lambda) = (2\lambda + L_{k+n}^{(r-1)})q_X(n-1, \lambda) - \lambda^2 q_X(n-2, \lambda) \quad (4.7)$$

bağıntısını elde ederiz. O halde, (4.5), (4.6) ve (4.7) eşitliklerinden

$$p_X(n, \lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda + L_{k+1}^{(r-1)} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda + L_{k+2}^{(r-1)} & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda + L_{k+3}^{(r-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\lambda + L_{k+n-1}^{(r-1)} & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 2\lambda + L_{k+n}^{(r-1)} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 2\lambda + L_{k+1}^{(r-1)} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda + L_{k+2}^{(r-1)} & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda + L_{k+3}^{(r-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\lambda + L_{k+n-1}^{(r-1)} & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda + L_{k+n}^{(r)} \end{vmatrix}$$

$$= q_X(n, \lambda) - (\lambda + L_{k+n}^{(r)}) q_X(n-1, \lambda)$$

$$= (\lambda - L_{k+n-1}^{(r)}) q_X(n-1, \lambda) - \lambda^2 q_X(n-2, \lambda) \quad (4.8)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2 X matrisinin determinanı

$$|X| = L_{k+n-1}^{(r)} (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} L_{k+i}^{(r-1)} \quad (4.9)$$

şeklindedir.

İspat. X matrisinin karakteristik polinomu

$$p_X(n, \lambda) = |\lambda I - X| = \lambda^n + x_1 \lambda^{n-1} + x_2 \lambda^{n-2} + \cdots + x_{n-1} \lambda + x_n \quad (4.10)$$

olsun. Bu durumda, $p_X(n, 0) = x_n$ olup, determinant ile karakteristik polinomun sabit terimi arasındaki ilişkiden

$$|X| = (-1)^n x_n = (-1)^n p_X(n, 0) \quad (4.11)$$

yazılır. (4.7) ve (4.8) eşitliklerinden

$$p_X(n,0) = -L_{k+n-1}^{(r)} q_X(n-1,0) \quad (4.12)$$

ve

$$q_X(n-1,0) = L_{k+n-1}^{(r-1)} q_X(n-2,0) = \dots = L_{k+n-1}^{(r-1)} L_{k+n-2}^{(r-1)} \dots L_{k+2}^{(r-1)} L_{k+1}^{(r-1)} \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.11), (4.12) ve (4.13) eşitliklerinden

$$|X| = L_{k+n-1}^{(r)} (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} L_{k+i}^{(r-1)} \quad (4.14)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.1.3 X matrisinin tersi

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} - \frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} & \frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} & -\frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} - \frac{1}{L_{k+3}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{L_{k+n-2}^{(r-1)}} - \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} + \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

biçimindedir.

İspat. X matrisi (3.16) eşitliğine göre

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_k^{(r)} - L_{k+1}^{(r)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_{k+1}^{(r)} - L_{k+2}^{(r)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_{k+n-1}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

şeklinde yazılır. Buradan bu eşitliğin her iki yanının tersi, $L_k^{(r)} = L_{k-1}^{(r)} + L_k^{(r-1)}$ bağıntısı da göz önüne alınarak hesaplanır ve elde edilen matrislerin çarpımı yapılırsa,

$$\begin{aligned}
X^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_{k+3}^{(r-1)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} - \frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} & \frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} & -\frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} - \frac{1}{L_{k+3}^{(r-1)}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{L_{k+n-2}^{(r-1)}} - \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} + \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \end{bmatrix} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu matrisin (i, j) elemanı

$$\begin{cases} 0 & |i-j| > 1 \\ -\frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & i=j=1 \\ -\frac{1}{L_{k+i-1}^{(r-1)}} - \frac{1}{L_{k+i}^{(r-1)}} & 1 < i=j < n \\ \frac{1}{|L_{k+i-1}^{(r)} - L_{k+j-1}^{(r)}|} & |i-j|=1 \\ -\frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} + \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & i=j=n \end{cases} \quad (4.18)$$

olarak da yazılır.

Teorem 4.1.4 X matrisinin spektral normu

$$\|X\|_2 \leq \sqrt{n(L_{k+n-1}^{(r)})^2 \left((n-1)(L_{k+n-1}^{(r)})^2 + 1 \right)} \quad (4.19)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. X matrisi,

$$X = \begin{bmatrix} L_k^{(r)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ L_{k+1}^{(r)} & L_{k+1}^{(r)} & 1 & \cdots & 1 \\ L_{k+2}^{(r)} & L_{k+2}^{(r)} & L_{k+2}^{(r)} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{k+n-1}^{(r)} & L_{k+n-1}^{(r)} & L_{k+n-1}^{(r)} & \cdots & L_{k+n-1}^{(r)} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & L_{k+1}^{(r)} & L_{k+2}^{(r)} & \cdots & L_{k+n-1}^{(r)} \\ 1 & 1 & L_{k+2}^{(r)} & \cdots & L_{k+n-1}^{(r)} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & L_{k+n-1}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= X_1 \circ X_2 \quad (4.20)$$

olarak iki matrisin Hadamard çarpımı şeklinde yazılsın. X_1 ve X_2 matrislerinin maksimum satır normu ve maksimum sütun normu

$$t_1(X_1) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_{1j}|^2} = \sqrt{n(L_{k+n-1}^{(r)})^2} \quad (4.21)$$

$$k_1(X_2) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_{2j}|^2} = \sqrt{(n-1)(L_{k+n-1}^{(r)})^2 + 1} \quad (4.22)$$

şeklinde olup, (3.2) eşitsizliğinden

$$\|X\|_2 = \|X_1 \circ X_2\|_2 \leq t_1(X_1)k_1(X_2) \quad (4.23)$$

ve

$$\|X\|_2 \leq \sqrt{n(L_{k+n-1}^{(r)})^2 \left((n-1)(L_{k+n-1}^{(r)})^2 + 1 \right)} \quad (4.24)$$

elde edilir ki bu da istenendir.

Teorem 4.1.5 X matrisinin Hadamard tersinin determinantı için

$$|X^{\circ-1}| = \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{L_{k+i}^{(r-1)}}{L_{k+i}^{(r)} L_{k+i-1}^{(r)}} \quad (4.25)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $X^{\circ-1}$ matrisinin determinanı

$$|X^{\circ-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \\ \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \\ \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \end{vmatrix} \quad (4.26)$$

şeklinde olup, ikinci satırdan itibaren her satır -1 ile çarpılıp kendinden önceki satıra eklenirse

$$|X^{\circ-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{L_k^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+3}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+3}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+3}^{(r)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \end{vmatrix}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned} |X^{\circ-1}| &= \left(\frac{1}{L_k^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} \right) \left(\frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} \right) \left(\frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+3}^{(r)}} \right) \cdots \left(\frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \right) \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \\ &= \frac{L_{k+1}^{(r)} - L_k^{(r)}}{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}} \frac{L_{k+2}^{(r)} - L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r)} L_{k+2}^{(r)}} \cdots \frac{L_{k+n-1}^{(r)} - L_{k+n-2}^{(r)}}{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}} \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \\ &= \frac{L_{k+1}^{(r-1)}}{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}} \frac{L_{k+2}^{(r-1)}}{L_{k+1}^{(r)} L_{k+2}^{(r)}} \cdots \frac{L_{k+n-1}^{(r-1)}}{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}} \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \\ &= \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{L_{k+i}^{(r-1)}}{L_{k+i}^{(r)} L_{k+i-1}^{(r)}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde edilir ki bu da istenendir.

Teorem 4.1.6 X matrisinin Hadamard tersinin tersi

$$(X^{\circ-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} & -\frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} + \frac{L_{k+1}^{(r)} L_{k+2}^{(r)}}{L_{k+2}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{L_{k+n-3}^{(r)} L_{k+n-2}^{(r)}}{L_{k+n-2}^{(r-1)}} + \frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & -\frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & L_{k+n-1}^{(r)} + \frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

biçimindedir.

İspat. X_1 matrisini

$$X_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \dots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \\ \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} & \dots & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} & \dots & \frac{1}{L_k^{(r)}} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

şeklinde ele alalım. Bu durumda

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

matrisi için,

$$I_1 X_1 I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \dots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \\ \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} & \dots & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} & \dots & \frac{1}{L_k^{(r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \\ \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \end{bmatrix} = X^{\circ-1} \quad (4.31)$$

olur. (3.17) eşitliğinden

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_k^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

olduğu ve

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

matris çarpımı göz önüne alınırsa,

$$X^{\circ-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_k^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının tersi alınırsa

$$\begin{aligned}
(X^{\circ-1})^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{k+n-1}^{(r)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)} - L_{k+n-1}^{(r)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_k^{(r)} - L_{k+1}^{(r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} & -\frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} + \frac{L_{k+1}^{(r)} L_{k+2}^{(r)}}{L_{k+2}^{(r-1)}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{L_{k+n-3}^{(r)} L_{k+n-2}^{(r)}}{L_{k+n-2}^{(r-1)}} + \frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & -\frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & L_{k+n-1}^{(r)} + \frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.35)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.7 Y matrisinin karakteristik polinomu $p_Y(n, \lambda)$ olsun. Bu durumda,

$$p_Y(n, \lambda) = (\lambda - L_k^{(r+n-1)}) q_Y(n-1, \lambda) - \lambda^2 q_Y(n-2, \lambda) \quad (4.36)$$

olacak şekilde $q_Y(0, \lambda) = 1$, $q_Y(1, \lambda) = 2\lambda + L_{k-1}^{(r+1)}$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$q_Y(n, \lambda) = (2\lambda + L_{k-1}^{(r+n)}) q_Y(n-1, \lambda) - \lambda^2 q_Y(n-2, \lambda) \quad (4.37)$$

bağıntısı ile tanımlı $q_Y(n, \lambda)$ polinomu vardır.

İspat. Teorem 4.1.1' in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.8 Y matrisinin determinanı

$$|Y| = L_k^{(r+n-1)} (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} L_{k-1}^{(r+i)} \quad (4.38)$$

şeklindedir.

İspat.

$$Y = \begin{bmatrix} L_k^{(r)} & L_k^{(r+1)} & L_k^{(r+2)} & \dots & L_k^{(r+n-1)} \\ L_k^{(r+1)} & L_k^{(r+1)} & L_k^{(r+2)} & \dots & L_k^{(r+n-1)} \\ L_k^{(r+2)} & L_k^{(r+2)} & L_k^{(r+2)} & \dots & L_k^{(r+n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_k^{(r+n-1)} & L_k^{(r+n-1)} & L_k^{(r+n-1)} & \dots & L_k^{(r+n-1)} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

matrisinin (3.16) denklemine göre çarpanlarına ayrılışı

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_k^{(r)} - L_k^{(r+1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_k^{(r+1)} - L_k^{(r+2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L_k^{(r+2)} - L_k^{(r+3)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & L_k^{(r+n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

şeklindedir. Bu eşitliğin her iki tarafının determinantı alınırsa,

$$|Y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_k^{(r)} - L_k^{(r+1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_k^{(r+1)} - L_k^{(r+2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L_k^{(r+2)} - L_k^{(r+3)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & L_k^{(r+n-1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (4.41)$$

yazılır. Bu ve

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (4.42)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} |Y| &= (L_k^{(r)} - L_k^{(r+1)})(L_k^{(r+1)} - L_k^{(r+2)}) \dots (L_k^{(r+n-2)} - L_k^{(r+n-1)}) L_k^{(r+n-1)} \\ &= (-L_{k-1}^{(r+1)})(-L_{k-1}^{(r+2)}) \dots (-L_{k-1}^{(r+n-1)}) L_k^{(r+n-1)} \\ &= L_k^{(r+n-1)} (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} L_{k-1}^{(r+i)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

yazılır.

Teorem 4.1.9 Y matrisinin tersi

$$Y^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_{k-1}^{(r+1)}} & \frac{1}{L_{k-1}^{(r+1)}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_{k-1}^{(r+1)}} & -\frac{1}{L_{k-1}^{(r+1)}} - \frac{1}{L_{k-1}^{(r+2)}} & \frac{1}{L_{k-1}^{(r+2)}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k-1}^{(r+2)}} & -\frac{1}{L_{k-1}^{(r+2)}} - \frac{1}{L_{k-1}^{(r+3)}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{L_{k-1}^{(r+n-2)}} - \frac{1}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} & \frac{1}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} & -\frac{1}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} + \frac{1}{L_k^{(r+n-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

biçimindedir ve bu matrisin (i, j) elemanı

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & |i-j| > 1 \\ -\frac{1}{L_{k-1}^{(r+1)}} & i=j=1 \\ -\frac{1}{L_{k-1}^{(r+i-1)}} - \frac{1}{L_{k-1}^{(r+i)}} & 1 < i=j < n \\ \frac{1}{|L_k^{(r+i-1)} - L_k^{(r+j-1)}|} & |i-j|=1 \\ -\frac{1}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} + \frac{1}{L_k^{(r+n-1)}} & i=j=n \end{array} \right. \quad (4.45)$$

olarak da yazılabilir.

İspat. Teorem 4.1.3' ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.10 Y matrisinin spektral normu

$$\|Y\|_2 \leq \sqrt{n(L_k^{(r+n-1)})^2 \left((n-1)(L_k^{(r+n-1)})^2 + 1 \right)} \quad (4.46)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. Teorem 4.1.4' ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.11 Y matrisinin Hadamard tersinin determinantı için

$$|Y^{\circ-1}| = \frac{1}{L_k^{(r+n-1)}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{L_{k-1}^{(r+i)}}{L_k^{(r+i)} L_k^{(r+i-1)}} \quad (4.47)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Teorem 4.1.5' in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.12 Y matrisinin Hadamard tersinin tersi

$$(Y^{\circ-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{L_k^{(r)} L_k^{(r+1)}}{L_{k-1}^{(r+1)}} & -\frac{L_k^{(r)} L_k^{(r+1)}}{L_{k-1}^{(r+1)}} & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{L_k^{(r)} L_k^{(r+1)}}{L_{k-1}^{(r+1)}} & \frac{L_k^{(r)} L_k^{(r+1)}}{L_{k-1}^{(r+1)}} + \frac{L_k^{(r+1)} L_k^{(r+2)}}{L_{k-1}^{(r+2)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{L_k^{(r+n-2)} L_k^{(r+n-1)}}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} + \frac{L_k^{(r+n-2)} L_k^{(r+n-1)}}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} & -\frac{L_k^{(r+n-2)} L_k^{(r+n-1)}}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{L_k^{(r+n-2)} L_k^{(r+n-1)}}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} & L_k^{(r+n-1)} + \frac{L_k^{(r+n-2)} L_k^{(r+n-1)}}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

biçimindedir.

İspat. Teorem 4.1.6' nın ispatına benzer şekilde yapılır.

4.2 Hiper-Lucas Sayılarının Minimum Elemanlı Matrislerde Uygulamaları

Teorem 4.2.1 Z matrisinin karakteristik polinomu $p_Z(n, \lambda)$ olsun. $p_Z(0, \lambda)=1$ ve $p_Z(1, \lambda)=\lambda - L_k^{(r)}$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$p_Z(n, \lambda) = (2\lambda - L_{k+n-1}^{(r-1)})p_Z(n-1, \lambda) - \lambda^2 p_Z(n-2, \lambda) \quad (4.49)$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat.

$$p_Z(n, \lambda) = |\lambda I - Z| = \begin{vmatrix} \lambda - L_k^{(r)} & -L_k^{(r)} & -L_k^{(r)} & \cdots & -L_k^{(r)} \\ -L_k^{(r)} & \lambda - L_{k+1}^{(r)} & -L_{k+1}^{(r)} & \cdots & -L_{k+1}^{(r)} \\ -L_k^{(r)} & -L_{k+1}^{(r)} & \lambda - L_{k+2}^{(r)} & \cdots & -L_{k+2}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -L_k^{(r)} & -L_{k+1}^{(r)} & -L_{k+2}^{(r)} & \cdots & \lambda - L_{k+n-1}^{(r)} \end{vmatrix} \quad (4.50)$$

olup, bu determinanтта son satırdan başlanarak her satırdan bir önceki satır çıkartıldığında

$$p_Z(n, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - L_k^{(r)} & -L_k^{(r)} & -L_k^{(r)} & \cdots & -L_k^{(r)} & -L_k^{(r)} \\ -\lambda & \lambda - L_{k+1}^{(r-1)} & -L_{k+1}^{(r-1)} & \cdots & -L_{k+1}^{(r-1)} & -L_{k+1}^{(r-1)} \\ 0 & -\lambda & \lambda - L_{k+2}^{(r-1)} & \cdots & -L_{k+2}^{(r-1)} & -L_{k+2}^{(r-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - L_{k+n-2}^{(r-1)} & -L_{k+n-2}^{(r-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & \lambda - L_{k+n-1}^{(r-1)} \end{vmatrix} \quad (4.51)$$

elde edilir. Bu son determinanтта da 2. sütundan itibaren her sütundan önceki sütun çıkarılırsa

$$p_Z(n, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - L_k^{(r)} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda - L_{k+1}^{(r-1)} & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda - L_{k+2}^{(r-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\lambda - L_{k+n-2}^{(r-1)} & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 2\lambda - L_{k+n-1}^{(r-1)} \end{vmatrix} \\ = (2\lambda - L_{k+n-1}^{(r-1)})p_Z(n-1, \lambda) - \lambda^2 p_Z(n-2, \lambda) \quad (4.52)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2 Z matrisinin determinanı

$$|Z| = L_k^{(r)} \prod_{i=1}^{n-1} L_{k+i}^{(r-1)} \quad (4.53)$$

şeklindedir.

İspat. Z matrisinin karakteristik polinomu

$$p_Z(n, \lambda) = |\lambda I - Z| = \lambda^n + z_1 \lambda^{n-1} + z_2 \lambda^{n-2} + \dots + z_{n-1} \lambda + z_n \quad (4.54)$$

olsun. Bu durumda, $p_Z(n, 0) = z_n$ olup, determinant ile karakteristik polinomun sabit terimi arasındaki ilişkiden

$$|Z| = (-1)^n z_n = (-1)^n p_Z(n, 0) \quad (4.55)$$

yazılır. (4.52) eşitliğinden

$$\begin{aligned} p_Z(n, 0) &= -L_{k+n-1}^{(r-1)} p_Z(n-1, 0) \\ &= -L_{k+n-1}^{(r-1)} [-L_{k+n-2}^{(r-1)} p_Z(n-2, 0)] = \dots = (-1)^n L_{k+n-1}^{(r-1)} L_{k+n-2}^{(r-1)} L_{k+n-3}^{(r-1)} \dots L_{k+1}^{(r-1)} L_k^{(r)} \end{aligned} \quad (4.56)$$

elde edilir. (4.55) ve (4.56) eşitliklerinden

$$|Z| = L_k^{(r)} \prod_{i=1}^{n-1} L_{k+i}^{(r-1)} \quad (4.57)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.2.3 Z matrisinin tersi

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k^{(r)}} + \frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} + \frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} & -\frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} & \frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} + \frac{1}{L_{k+3}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r-1)}} + \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

biçimindedir.

İspat. Z matrisi (3.17) eşitliğine göre

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_k^{(r)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_{k+1}^{(r)} - L_k^{(r)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{k+n-1}^{(r)} - L_{k+n-2}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

şeklinde yazılır. Buradan bu eşitliğin her iki tarafının tersi $L_n^{(r)} = L_{n-1}^{(r)} + L_n^{(r-1)}$ bağıntısı göz önüne alınarak alınır ve elde edilen matrislerin çarpımı yapılırsa,

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k^{(r)}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k^{(r)}} + \frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} + \frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} & -\frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} & \frac{1}{L_{k+2}^{(r-1)}} + \frac{1}{L_{k+3}^{(r-1)}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r-1)}} + \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & -\frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

elde edilir. Bu matrisin (i, j) elemanı

$$\begin{cases} 0 & |i-j| > 1 \\ \frac{1}{L_k^{(r)}} + \frac{1}{L_{k+1}^{(r-1)}} & i=j=1 \\ \frac{1}{L_{k+i-1}^{(r-1)}} + \frac{1}{L_{k+i}^{(r-1)}} & 1 < i=j < n \\ \frac{-1}{|L_{k+i-1}^{(r)} - L_{k+j-1}^{(r)}|} & |i-j|=1 \\ \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & i=j=n \end{cases} \quad (4.61)$$

olarak da yazılabilir.

Teorem 4.2.4 Z matrisinin Hadamard tersinin determinanı için

$$|Z^{\circ-1}| = \frac{(-1)^{n-1}}{L_k^{(r)}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{L_{k+i}^{(r-1)}}{L_{k+i}^{(r)} L_{k+i-1}^{(r)}} \quad (4.62)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $Z^{\circ-1}$ matrisinin determinanı

$$|Z^{\circ-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_k^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_k^{(r)}} \\ \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} \\ \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \end{vmatrix} \quad (4.63)$$

şeklinde olup, $(n-1)$. satırdan itibaren her satır -1 ile çarpılır ve kendinden sonraki satıra eklenirse

$$|Z^{\circ-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_k^{(r)}} & \dots & \frac{1}{L_k^{(r)}} \\ 0 & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} - \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} - \frac{1}{L_k^{(r)}} & \dots & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} - \frac{1}{L_k^{(r)}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} & \dots & \frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} \end{vmatrix}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned} |Z^{\circ-1}| &= \frac{1}{L_k^{(r)}} \left(\frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} - \frac{1}{L_k^{(r)}} \right) \left(\frac{1}{L_{k+2}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} \right) \dots \left(\frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} \right) \\ &= \frac{1}{L_k^{(r)}} \frac{L_k^{(r)} - L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r)} L_k^{(r)}} \frac{L_{k+1}^{(r)} - L_{k+2}^{(r)}}{L_{k+2}^{(r)} L_{k+1}^{(r)}} \dots \frac{L_{k+n-2}^{(r)} - L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r)} L_{k+n-2}^{(r)}} \\ &= \frac{1}{L_k^{(r)}} \frac{-L_{k+1}^{(r-1)}}{L_{k+1}^{(r)} L_k^{(r)}} \frac{-L_{k+2}^{(r-1)}}{L_{k+2}^{(r)} L_{k+1}^{(r)}} \dots \frac{-L_{k+n-1}^{(r-1)}}{L_{k+n-1}^{(r)} L_{k+n-2}^{(r)}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{L_k^{(r)}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{L_{k+i}^{(r-1)}}{L_{k+i}^{(r)} L_{k+i-1}^{(r)}} \end{aligned} \quad (4.64)$$

elde edilir ki bu da istenendir.

Teorem 4.2.5 Z matrisinin Hadamard tersinin tersi

$$(Z^{\circ-1})^{-1} = \begin{bmatrix} L_k^{(r)} - \frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} & -\frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} - \frac{L_{k+1}^{(r)} L_{k+2}^{(r)}}{L_{k+2}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{L_{k+n-3}^{(r)} L_{k+n-2}^{(r)}}{L_{k+n-2}^{(r-1)}} - \frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & \frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & -\frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

biçimindedir.

İspat. Z_1 matrisini

$$Z_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_k^{(r)}} \\ \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_k^{(r)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_k^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_k^{(r)}} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

şeklinde ele alalım. Bu durumda

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi için

$$I_1 Z_1 I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_k^{(r)}} \\ \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_k^{(r)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_k^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_k^{(r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_k^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_k^{(r)}} \\ \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_k^{(r)}} & \frac{1}{L_{k+1}^{(r)}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} \end{bmatrix} = Z^{\circ-1} \quad (4.67)$$

olur. (3.16) eşitliğinden

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+n-3}^{(r)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{L_k^{(r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

olduğu ve

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

matris çarpımı göz önüne alınırsa,

$$Z^{\circ-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+n-3}^{(r)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{L_k^{(r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının tersi alınırsa

$$(Z^{\circ-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+n-2}^{(r)}} - \frac{1}{L_{k+n-3}^{(r)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_k^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_k^{(r)} - \frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} & \frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} - \frac{L_k^{(r)} L_{k+1}^{(r)}}{L_{k+1}^{(r-1)}} - \frac{L_{k+1}^{(r)} L_{k+2}^{(r)}}{L_{k+2}^{(r-1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{L_{k+n-3}^{(r)} L_{k+n-2}^{(r)}}{L_{k+n-2}^{(r-1)}} - \frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & \frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} & -\frac{L_{k+n-2}^{(r)} L_{k+n-1}^{(r)}}{L_{k+n-1}^{(r-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.6 T matrisinin karakteristik polinomu $p_T(n, \lambda)$ olsun. $p_T(0, \lambda)=1$ ve $p_T(1, \lambda)=\lambda - L_k^{(r)}$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$p_T(n, \lambda) = (2\lambda - L_{k-1}^{(r+n-1)})p_T(n-1, \lambda) - \lambda^2 p_T(n-2, \lambda) \quad (4.72)$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat. Teorem 4.2.1' in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.2.7 T matrisinin determinanı

$$|T| = L_k^{(r)} \prod_{i=1}^{n-1} L_{k-1}^{(r+i)} \quad (4.73)$$

şeklindedir.

İspat.

$$T = \begin{bmatrix} L_k^{(r)} & L_k^{(r)} & L_k^{(r)} & \cdots & L_k^{(r)} \\ L_k^{(r)} & L_k^{(r+1)} & L_k^{(r+1)} & \cdots & L_k^{(r+1)} \\ L_k^{(r)} & L_k^{(r+1)} & L_k^{(r+2)} & \cdots & L_k^{(r+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_k^{(r)} & L_k^{(r+1)} & L_k^{(r+2)} & \cdots & L_k^{(r+n-1)} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

matrisinin (3.17) denkleminde göre çarpanlarına ayrılışı

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_k^{(r)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_k^{(r+1)} - L_k^{(r)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & L_k^{(r+2)} - L_k^{(r+1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & L_k^{(r+n-1)} - L_k^{(r+n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

şeklindedir. Bu eşitliğin her tarafının determinanı alınırsa,

$$|T| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_k^{(r)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_k^{(r+1)} - L_k^{(r)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L_k^{(r+2)} - L_k^{(r+1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & L_k^{(r+n-1)} - L_k^{(r+n-2)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (4.76)$$

yazılır. Bu ve

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (4.77)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} |T| &= L_k^{(r)} (L_k^{(r+1)} - L_k^{(r)}) \dots (L_k^{(r+n-1)} - L_k^{(r+n-2)}) \\ &= L_k^{(r)} (L_{k-1}^{(r+1)} - L_{k-1}^{(r)}) \dots (L_{k-1}^{(r+n-1)} - L_{k-1}^{(r+n-2)}) \\ &= L_k^{(r)} \prod_{i=1}^{n-1} L_{k-1}^{(r+i)} \end{aligned} \quad (4.78)$$

yazılır.

Teorem 4.2.8 T matrisinin tersi

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k^{(r)}} + \frac{1}{L_{k-1}^{(r+1)}} & -\frac{1}{L_{k-1}^{(r+1)}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_{k-1}^{(r+1)}} & \frac{1}{L_{k-1}^{(r+1)}} + \frac{1}{L_{k-1}^{(r+2)}} & -\frac{1}{L_{k-1}^{(r+2)}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_{k-1}^{(r+2)}} & \frac{1}{L_{k-1}^{(r+2)}} + \frac{1}{L_{k-1}^{(r+3)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{L_{k-1}^{(r+n-2)}} + \frac{1}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} & -\frac{1}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} & \frac{1}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

biçimindedir ve bu matrisin (i, j) elemanı

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & |i-j| > 1 \\ \frac{L_k^{(r+1)}}{L_k^{(r)} L_{k-1}^{(r+1)}} & i=j=1 \\ \frac{1}{L_{k-1}^{(r+i-1)}} + \frac{1}{L_{k-1}^{(r+i)}} & 1 < i=j < n \\ \frac{-1}{|L_k^{(r+i-1)} - L_k^{(r+j-1)}|} & |i-j|=1 \\ \frac{1}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} & i=j=n \end{array} \right. \quad (4.80)$$

olarak da yazılabilir.

İspat. Teorem 4.2.3' ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.2.9 T matrisinin Hadamard tersinin determinanı için

$$|T^{\circ-1}| = \frac{(-1)^{n-1}}{L_k^{(r)}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{L_{k-1}^{(r+i)}}{L_k^{(r+i)} L_k^{(r+i-1)}} \quad (4.81)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Teorem 4.2.4' ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.2.10 T matrisinin Hadamard tersinin tersi

$$(T^{\circ-1})^{-1} = \begin{bmatrix} L_k^{(r)} - \frac{L_k^{(r)} L_k^{(r+1)}}{L_{k-1}^{(r+1)}} & \frac{L_k^{(r)} L_k^{(r+1)}}{L_{k-1}^{(r+1)}} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{L_k^{(r)} L_k^{(r+1)}}{L_{k-1}^{(r+1)}} & -\frac{L_k^{(r)} L_k^{(r+1)}}{L_{k-1}^{(r+1)}} - \frac{L_k^{(r+1)} L_k^{(r+2)}}{L_{k-1}^{(r+2)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{L_k^{(r+n-3)} L_k^{(r+n-2)}}{L_{k-1}^{(r+n-2)}} - \frac{L_k^{(r+n-2)} L_k^{(r+n-1)}}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} & \frac{L_k^{(r+n-2)} L_k^{(r+n-1)}}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{L_k^{(r+n-2)} L_k^{(r+n-1)}}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} & -\frac{L_k^{(r+n-2)} L_k^{(r+n-1)}}{L_{k-1}^{(r+n-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

biçimindedir.

İspat. Teorem 4.2.5' in ispatına benzer şekilde yapılır.

Burada hemen belirtelim ki; X , Y , Z ve T matrislerinin karakteristik polinomları hariç elde ettiğimiz diğer bulgular 3. bölümde verdiğimiz Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 kullanılarak ta elde edilebilir. Çünkü, bizim ele aldığımız X , Y , Z ve T matrisleri adı geçen teoremlerde bahsi geçen $[K]_{\max}$ ve $[K]_{\min}$ matrislerinin özel halleridir.



5. UYGULAMALAR

Bu bölümde 4. bölümde elde ettiğimiz bulgularla ilgili bazı sayısal örnekler verdik. Aşağıdaki tabloda bazı hiper-Lucas sayıları verilmiştir.

Çizelge 5.1. Bazı hiper-Lucas sayıları.

$L_n^{(r)} \backslash r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$L_0^{(r)}$	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$L_1^{(r)}$	1	3	5	7	9	11	13	15	17
$L_2^{(r)}$	3	6	11	18	27	38	51	66	83
$L_3^{(r)}$	4	10	21	39	66	104	155	221	304
$L_4^{(r)}$	7	17	38	77	143	247	402	623	927
$L_5^{(r)}$	11	28	66	143	286	533	935	1558	2485
$L_6^{(r)}$	18	46	112	255	541	1074	2009	3567	6052
$L_7^{(r)}$	29	75	187	442	983	2057	4066	7633	13685
$L_8^{(r)}$	47	122	309	751	1734	3791	7857	15490	29175

Şimdi; $n=5$, $k=1$ ve $r=2$ değerleri için X ile Z matrisleri için elde ettiğimiz sayısal sonuçları verelim.

Örnek 5.1 $n=5$, $k=1$ ve $r=2$ için X matrisi

$$X = \begin{bmatrix} L_3^{(2)} & L_4^{(2)} & L_5^{(2)} & L_6^{(2)} & L_7^{(2)} \\ L_4^{(2)} & L_4^{(2)} & L_5^{(2)} & L_6^{(2)} & L_7^{(2)} \\ L_5^{(2)} & L_5^{(2)} & L_5^{(2)} & L_6^{(2)} & L_7^{(2)} \\ L_6^{(2)} & L_6^{(2)} & L_6^{(2)} & L_6^{(2)} & L_7^{(2)} \\ L_7^{(2)} & L_7^{(2)} & L_7^{(2)} & L_7^{(2)} & L_7^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 38 & 66 & 112 & 187 \\ 38 & 38 & 66 & 112 & 187 \\ 66 & 66 & 66 & 112 & 187 \\ 112 & 112 & 112 & 112 & 187 \\ 187 & 187 & 187 & 187 & 187 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

olup Teorem 4.1.2' ye göre determinantı;

$$\begin{aligned} |X| &= L_7^{(2)} (-1)^4 \prod_{i=1}^4 L_{3+i}^{(1)} = L_7^{(2)} (-1)^4 L_4^{(1)} L_5^{(1)} L_6^{(1)} L_7^{(1)} = 187.17.28.46.75 \\ &= 307091400, \end{aligned} \quad (5.2)$$

Teorem 4.1.3' e göre tersi;

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_4^{(1)}} & \frac{1}{L_4^{(1)}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_4^{(1)}} & -\frac{1}{L_4^{(1)}} - \frac{1}{L_5^{(1)}} & \frac{1}{L_5^{(1)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_5^{(1)}} & -\frac{1}{L_5^{(1)}} - \frac{1}{L_6^{(1)}} & \frac{1}{L_6^{(1)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_6^{(1)}} & -\frac{1}{L_6^{(1)}} - \frac{1}{L_7^{(1)}} & \frac{1}{L_7^{(1)}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_7^{(1)}} & -\frac{1}{L_7^{(1)}} + \frac{1}{L_7^{(2)}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{17} & \frac{1}{17} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{17} & -\frac{1}{17} - \frac{1}{28} & \frac{1}{28} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{28} & -\frac{1}{28} - \frac{1}{46} & \frac{1}{46} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{46} & -\frac{1}{46} - \frac{1}{75} & \frac{1}{75} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{75} & -\frac{1}{75} + \frac{1}{187} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{17} & \frac{1}{17} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{17} & -\frac{45}{476} & \frac{1}{28} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{28} & -\frac{74}{1288} & \frac{1}{46} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{46} & -\frac{121}{3450} & \frac{1}{75} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{75} & -\frac{112}{14025} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

Teorem 4.1.5' e göre Hadamard tersinin determinanı;

$$\begin{aligned}
 |X^{\circ-1}| &= \frac{1}{L_7^{(2)}} \prod_{i=1}^4 \frac{L_{3+i}^{(1)}}{L_{3+i}^{(2)} L_{2+i}^{(2)}} = \frac{L_4^{(1)} L_5^{(1)} L_6^{(1)} L_7^{(1)}}{L_3^{(2)} (L_4^{(2)})^2 (L_5^{(2)})^2 (L_6^{(2)})^2 (L_7^{(2)})^2} \\
 &= \frac{17.28.46.75}{21.(38)^2 .(66)^2 .(112)^2 .(187)^2} = \frac{9775}{344892964889088}, \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Teorem 4.1.6' ya göre Hadamard tersinin tersi;

$$\begin{aligned}
 (X^{\circ-1})^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{L_3^{(2)} L_4^{(2)}}{L_4^{(1)}} & -\frac{L_3^{(2)} L_4^{(2)}}{L_4^{(1)}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{L_3^{(2)} L_4^{(2)}}{L_4^{(1)}} & \frac{L_3^{(2)} L_4^{(2)}}{L_4^{(1)}} + \frac{L_4^{(2)} L_5^{(2)}}{L_5^{(1)}} & -\frac{L_4^{(2)} L_5^{(2)}}{L_5^{(1)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L_4^{(2)} L_5^{(2)}}{L_5^{(1)}} & \frac{L_4^{(2)} L_5^{(2)}}{L_5^{(1)}} + \frac{L_5^{(2)} L_6^{(2)}}{L_6^{(1)}} & -\frac{L_5^{(2)} L_6^{(2)}}{L_6^{(1)}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L_5^{(2)} L_6^{(2)}}{L_6^{(1)}} & \frac{L_5^{(2)} L_6^{(2)}}{L_6^{(1)}} + \frac{L_6^{(2)} L_7^{(2)}}{L_7^{(1)}} & -\frac{L_6^{(2)} L_7^{(2)}}{L_7^{(1)}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{L_6^{(2)} L_7^{(2)}}{L_7^{(1)}} & \frac{L_6^{(2)} L_7^{(2)}}{L_7^{(1)}} + L_7^{(2)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{21.38}{17} & -\frac{21.38}{17} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{21.38}{17} & \frac{21.38}{17} + \frac{38.66}{28} & -\frac{38.66}{28} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{38.66}{28} & \frac{38.66}{28} + \frac{66.112}{46} & -\frac{66.112}{46} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{66.112}{46} & \frac{66.112}{46} + \frac{112.187}{75} & -\frac{112.187}{75} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{112.187}{75} & \frac{112.187}{75} + 187 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{798}{17} & -\frac{798}{17} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{798}{17} & \frac{64980}{476} & -\frac{2508}{28} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2508}{28} & \frac{322344}{1288} & -\frac{7392}{46} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7392}{46} & \frac{1517824}{3450} & -\frac{20944}{75} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{20944}{75} & \frac{34969}{75} \end{bmatrix} \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$q_X(0, \lambda) = 1, \quad (5.6)$$

$$p_X(1, \lambda) = |\lambda - 21| = \lambda - 21, \quad (5.7)$$

$$q_X(1, \lambda) = |2\lambda + 17| = 2\lambda + 17, \quad (5.8)$$

$$p_X(2, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 21 & -38 \\ -38 & \lambda - 38 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 59\lambda - 646, \quad (5.9)$$

$$q_X(2, \lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda + 17 & -\lambda \\ -\lambda & 2\lambda + 28 \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - 90\lambda + 476, \quad (5.10)$$

$$p_X(3, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 21 & -38 & -66 \\ -38 & \lambda - 38 & -66 \\ -66 & -66 & \lambda - 66 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 305\lambda^2 + 6416\lambda - 31416, \quad (5.11)$$

$$q_X(3, \lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda + 17 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 2\lambda + 28 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 2\lambda + 46 \end{vmatrix} = 4\lambda^3 - 59\lambda^2 - 3188\lambda + 21896, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} p_X(4, \lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 21 & -38 & -66 & -112 \\ -38 & \lambda - 38 & -66 & -112 \\ -66 & -66 & \lambda - 66 & -112 \\ -112 & -112 & -112 & \lambda - 112 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^4 - 417\lambda^3 + 2944\lambda^2 + 378952\lambda - 2452352, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} q_X(4, \lambda) &= \begin{vmatrix} 2\lambda + 17 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda + 28 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda + 46 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 2\lambda + 75 \end{vmatrix} \\ &= 5\lambda^4 + 272\lambda^3 - 11277\lambda^2 - 195308\lambda + 1642200, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$p_X(5, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 21 & -38 & -66 & -112 & -187 \\ -38 & \lambda - 38 & -66 & -112 & -187 \\ -66 & -66 & \lambda - 66 & -112 & -187 \\ -112 & -112 & -112 & \lambda - 112 & -187 \\ -187 & -187 & -187 & -187 & \lambda - 187 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^5 - 604\lambda^4 - 58953\lambda^3 + 1891595\lambda^2 + 38164796\lambda - 307091400, \quad (5.15)$$

$$q_X(5, \lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda + 17 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda + 28 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda + 46 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 2\lambda + 75 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 2\lambda + 122 \end{vmatrix}$$

$$= 10\lambda^5 + 1395\lambda^4 + 10036\lambda^3 - 1788306\lambda^2 - 20543176\lambda + 200348400, \quad (5.16)$$

olup Teorem 4.1.1' e göre karakteristik polinomu;

$$p_X(1, \lambda) = \lambda - 21, \quad (5.17)$$

$$q_X(1, \lambda) = 2\lambda + 17, \quad (5.18)$$

$$p_X(2, \lambda) = (\lambda - 38)(2\lambda + 17) - \lambda^2 = \lambda^2 - 59\lambda - 646, \quad (5.19)$$

$$q_X(2, \lambda) = (2\lambda + 28)(2\lambda + 17) - \lambda^2 = 3\lambda^2 - 90\lambda + 476, \quad (5.20)$$

$$p_X(3, \lambda) = (\lambda - 66)(3\lambda^2 - 90\lambda + 476) - \lambda^2(2\lambda + 17)$$

$$= \lambda^3 - 305\lambda^2 + 6416\lambda - 31416, \quad (5.21)$$

$$q_X(3, \lambda) = (2\lambda + 46)(3\lambda^2 - 90\lambda + 476) - \lambda^2(2\lambda + 17)$$

$$= 4\lambda^3 - 59\lambda^2 - 3188\lambda + 21896, \quad (5.22)$$

$$p_X(4, \lambda) = (\lambda - 112)(4\lambda^3 - 59\lambda^2 - 3188\lambda + 21896) - \lambda^2(3\lambda^2 - 90\lambda + 476)$$

$$= \lambda^4 - 417\lambda^3 + 2944\lambda^2 + 378952\lambda - 2452352, \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned}
q_x(4, \lambda) &= (2\lambda + 75)(4\lambda^3 - 59\lambda^2 - 3188\lambda + 21896) - \lambda^2(3\lambda^2 - 90\lambda + 476) \\
&= 5\lambda^4 + 272\lambda^3 - 11277\lambda^2 - 195308\lambda + 1642200, \tag{5.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_x(5, \lambda) &= (\lambda - 187)(5\lambda^4 + 272\lambda^3 - 11277\lambda^2 - 195308\lambda + 1642200) \\
&\quad - \lambda^2(4\lambda^3 - 59\lambda^2 - 3188\lambda + 21896) \\
&= \lambda^5 - 604\lambda^4 - 58953\lambda^3 + 1891595\lambda^2 + 38164796\lambda - 307091400, \tag{5.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_x(5, \lambda) &= (2\lambda + 122)(5\lambda^4 + 272\lambda^3 - 11277\lambda^2 - 195308\lambda + 1642200) \\
&\quad - \lambda^2(4\lambda^3 - 59\lambda^2 - 3188\lambda + 21896) \\
&= 6\lambda^5 + 1213\lambda^4 + 13818\lambda^3 - 1788306\lambda^2 - 20543176\lambda + 200348400 \tag{5.26}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 5.2 $n=5$, $r=2$, $k=3$ için Z matrisi

$$Z = \begin{bmatrix} 21 & 21 & 21 & 21 & 21 \\ 21 & 38 & 38 & 38 & 38 \\ 21 & 38 & 66 & 66 & 66 \\ 21 & 38 & 66 & 112 & 112 \\ 21 & 38 & 66 & 112 & 187 \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

olup Teorem 4.2.2' ye göre determinanı;

$$\begin{aligned}
|Z| &= L_3^{(2)} \prod_{i=1}^4 L_{3+i}^{(1)} = L_3^{(2)} L_4^{(1)} L_5^{(1)} L_6^{(1)} L_7^{(1)} = 21.17.28.46.75 \\
&= 34486200, \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Teorem 4.2.3' e göre tersi;

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_3^{(2)}} + \frac{1}{L_4^{(2)}} & -\frac{1}{L_4^{(1)}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_4^{(1)}} & \frac{1}{L_4^{(1)}} + \frac{1}{L_5^{(1)}} & -\frac{1}{L_5^{(1)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_5^{(1)}} & \frac{1}{L_5^{(1)}} + \frac{1}{L_6^{(1)}} & -\frac{1}{L_6^{(1)}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_6^{(1)}} & \frac{1}{L_6^{(1)}} + \frac{1}{L_7^{(1)}} & -\frac{1}{L_7^{(1)}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_7^{(1)}} & \frac{1}{L_7^{(1)}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{21} + \frac{1}{17} & -\frac{1}{17} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{17} & \frac{1}{17} + \frac{1}{28} & -\frac{1}{28} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{28} & \frac{1}{28} + \frac{1}{46} & -\frac{1}{46} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{46} & \frac{1}{46} + \frac{1}{75} & -\frac{1}{75} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{75} & \frac{1}{75} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{38}{357} & -\frac{1}{17} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{17} & \frac{45}{476} & -\frac{1}{28} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{28} & \frac{74}{1288} & -\frac{1}{46} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{46} & \frac{121}{3450} & -\frac{1}{75} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{75} & \frac{1}{75} \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

Teorem 4.2.4' e göre Hadamard tersinin determinanı;

$$\begin{aligned}
 |Z^{\circ-1}| &= \frac{(-1)^{n-1}}{L_3^{(2)}} \prod_{i=1}^4 \frac{L_{3+i}^{(1)}}{L_{3+i}^{(2)} L_{2+i}^{(2)}} = \frac{(-L_4^{(1)})(-L_5^{(1)})(-L_6^{(1)})(-L_7^{(1)})}{(L_3^{(2)})^2 (L_4^{(2)})^2 (L_5^{(2)})^2 (L_6^{(2)})^2 L_7^{(2)}} \\
 &= \frac{17.28.46.75}{(21)^2 (38)^2 \cdot (66)^2 \cdot (112)^2 187} = \frac{9775}{38731295522304}, \tag{5.30}
 \end{aligned}$$

Teorem 4.2.5' e göre Hadamard tersinin tersi;

$$\begin{aligned}
 (Z^{\circ-1})^{-1} &= \begin{bmatrix} L_3^{(2)} - \frac{L_3^{(2)} L_4^{(2)}}{L_4^{(1)}} & \frac{L_3^{(2)} L_4^{(2)}}{L_4^{(1)}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_3^{(2)} L_4^{(2)}}{L_4^{(1)}} & -\frac{L_3^{(2)} L_4^{(2)}}{L_4^{(1)}} - \frac{L_4^{(2)} L_5^{(2)}}{L_5^{(1)}} & \frac{L_4^{(2)} L_5^{(2)}}{L_5^{(1)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_4^{(2)} L_5^{(2)}}{L_5^{(1)}} & -\frac{L_4^{(2)} L_5^{(2)}}{L_5^{(1)}} - \frac{L_5^{(2)} L_6^{(2)}}{L_6^{(1)}} & \frac{L_5^{(2)} L_6^{(2)}}{L_6^{(1)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_5^{(2)} L_6^{(2)}}{L_6^{(1)}} & -\frac{L_5^{(2)} L_6^{(2)}}{L_6^{(1)}} - \frac{L_6^{(2)} L_7^{(2)}}{L_7^{(1)}} & \frac{L_6^{(2)} L_7^{(2)}}{L_7^{(1)}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_6^{(2)} L_7^{(2)}}{L_7^{(1)}} & -\frac{L_6^{(2)} L_7^{(2)}}{L_7^{(1)}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 21 - \frac{21.38}{17} & \frac{21.38}{17} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{21.38}{17} & -\frac{21.38}{17} - \frac{38.66}{28} & \frac{38.66}{28} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{38.66}{28} & -\frac{38.66}{28} - \frac{66.112}{46} & \frac{66.112}{46} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{66.112}{46} & -\frac{66.112}{46} - \frac{112.187}{75} & \frac{112.187}{75} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{112.187}{75} & -\frac{112.187}{75} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{441}{17} & \frac{798}{17} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{798}{17} & -\frac{64980}{476} & \frac{2508}{28} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2508}{28} & -\frac{322344}{1288} & \frac{7392}{46} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7392}{46} & -\frac{1517824}{3450} & \frac{20944}{75} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20944}{75} & -\frac{20944}{75} \end{bmatrix} \tag{5.31}
 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$p_z(0, \lambda) = 1, \quad (5.32)$$

$$p_z(1, \lambda) = |\lambda - 21| = \lambda - 21, \quad (5.33)$$

$$p_z(2, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 21 & -21 \\ -21 & \lambda - 38 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 59\lambda + 357, \quad (5.34)$$

$$p_z(3, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 21 & -21 & -21 \\ -21 & \lambda - 38 & -38 \\ -21 & -38 & \lambda - 66 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 125\lambda^2 + 2366\lambda - 9996, \quad (5.35)$$

$$p_z(4, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 21 & -21 & -21 & -21 \\ -21 & \lambda - 38 & -38 & -38 \\ -21 & -38 & \lambda - 66 & -66 \\ -21 & -38 & -66 & \lambda - 112 \end{vmatrix} \\ = \lambda^4 - 237\lambda^3 + 10125\lambda^2 - 128828\lambda + 459816, \quad (5.36)$$

$$p_z(5, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 21 & -21 & -21 & -21 & -21 \\ -21 & \lambda - 38 & -38 & -38 & -38 \\ -21 & -38 & \lambda - 66 & -66 & -66 \\ -21 & -38 & -66 & \lambda - 112 & -112 \\ -21 & -38 & -66 & -112 & \lambda - 187 \end{vmatrix} \\ = \lambda^5 - 424\lambda^4 + 35659\lambda^3 - 1007035\lambda^2 + 10581732\lambda - 34486200, \quad (5.37)$$

olup Teorem 4.2.1' e göre karakteristik polinomu;

$$p_z(1, \lambda) = \lambda - 21, \quad (5.38)$$

$$p_z(2, \lambda) = (2\lambda - 17)(\lambda - 21) - \lambda^2 = \lambda^2 - 59\lambda + 357, \quad (5.39)$$

$$p_z(3, \lambda) = (2\lambda - 28)(\lambda^2 - 59\lambda + 357) - \lambda^2(\lambda - 21) = \lambda^3 - 125\lambda^2 + 2366\lambda - 9996, \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned}
p_z(4, \lambda) &= (2\lambda - 46)(\lambda^3 - 125\lambda^2 + 2366\lambda - 9996) - \lambda^2(\lambda^2 - 59\lambda + 357) \\
&= \lambda^4 - 237\lambda^3 + 10125\lambda^2 - 128828\lambda + 459816,
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
p_z(5, \lambda) &= (2\lambda - 75)(\lambda^4 - 237\lambda^3 + 10125\lambda^2 - 128828\lambda + 459816) \\
&\quad - \lambda^2(\lambda^3 - 125\lambda^2 + 2366\lambda - 9996) \\
&= \lambda^5 - 424\lambda^4 + 35659\lambda^3 - 1007035\lambda^2 + 10581732\lambda - 34486200
\end{aligned} \tag{5.42}$$

olur.

Benzer şekilde Y ve T matrisleri için de örnekler verilebilir.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; elemanları hiper-Lucas sayılarına bağlı olarak elde edilen

$$X = \left[L_{k+\max(i,j)-1}^r \right]_{i,j=1}^n, \quad Y = \left[L_k^{r+\max(i,j)-1} \right]_{i,j=1}^n, \quad Z = \left[L_{k+\min(i,j)-1}^r \right]_{i,j=1}^n \quad \text{ve} \quad T = \left[L_k^{r+\min(i,j)-1} \right]_{i,j=1}^n$$

matrislerinin determinantı, tersi, Hadamard tersi ve karakteristik polinomu gibi özelliklerini inceledik.

Bu çalışmada kullandığımız yöntem ve teknikler elemanter olmasına karşın, çalışmamız elde edilen sonuçların hiper-Lucas sayılarına bağlı olması açısından ilginçtir. Özellikle X , Y , Z , T matrislerinin karakteristik polinomlarının indirgeme bağıntılarına sahip olduğunun gösterilmesi çalışmamızın en ilgi çekici yanıdır.

Ayrıca, çalışmamızda ele aldığımız $X = \left[L_{k+\max(i,j)-1}^r \right]_{i,j=1}^n$ ve $Z = \left[L_{k+\min(i,j)-1}^r \right]_{i,j=1}^n$ matrisleri aslında, Akyüz (2017) tarafından hazırlanan yüksek lisans tezinde incelenen $C = \left[L_{k+\max(i,j)-1} \right]_{i,j=1}^n$ ve $D = \left[L_{k+\min(i,j)-1} \right]_{i,j=1}^n$ matrislerinin daha genel halidir.

Çünkü, $r = 0$ için X ve Z matrisleri C ve D matrislerine indirgenir. Yani $r = 0$ için,

$$X = \begin{bmatrix} L_k & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \\ L_{k+1} & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \\ L_{k+2} & L_{k+2} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{k+n-1} & L_{k+n-1} & L_{k+n-1} & \cdots & L_{k+n-1} \end{bmatrix} = C \quad (6.1)$$

ve

$$Z = \begin{bmatrix} L_k & L_k & L_k & \cdots & L_k \\ L_k & L_{k+1} & L_{k+1} & \cdots & L_{k+1} \\ L_k & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_k & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \end{bmatrix} = D \quad (6.2)$$

şeklindedir.

Lucas sayılarının farklı türdeki genellemeleri veya bilinen farklı türdeki özel sayılar seçilerek benzer matrisler üzerine çalışmalar yapılabileceği kanaatindeyiz.

KAYNAKLAR

- Akyüz, B., 2017. Fibonacci ve Lucas sayılarının maksimum ve minimum elemanlı matrislerde uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aksaray.
- Bahşi, M. ve Solak, S., 2011. A particular matrix and its properties, International Journal of Mathematical Sciences and Applications, 1, 2, 971-974.
- Bahşi, M., Mezö, I. ve Solak, S., 2014. A symmetric algorithm for hyper-Fibonacci and hyper-Lucas numbers, Annales Mathematicae et Informaticae, 43, 19–27.
- Bahşi, M. ve Solak, S., 2014. On the norms of r -circulant matrices with the hyper-Fibonacci and Lucas numbers, Journal of Mathematical Inequalities 8, 4, 693–705.
- Bahşi, M. ve Solak, S., 2015. Some particular matrices and their characteristic polynomials, Linear and Multilinear Algebra, 63, 2071-2078.
- Bahşi, M. ve Solak, S., 2016. A Symmetric Algorithm for Golden Ratio in Hyper-Horadam Numbers, Chinese Journal of Mathematics Volume 2016, Article ID 4361582.
- Bhatia, R., 2006. Infinitely divisible matrices, American Mathematical Monthly, 113, 3, 221-235.
- Bhatia, R., 2011. Min matrices and mean matrices, Mathematical Intelligencer, 33, 2, 22-28.
- Catalani, M., 2002. A particular matrix and its relationship with Fibonacci numbers. URL Adres: <https://arxiv.org/pdf/math/0209249.pdf>. Erişim tarihi: 17.04.2017,
- Chu, K. L., Puntanen, S. ve Styan, G. P. H., 2011. Problem section, Statistical Papers 52, 257-262.
- Da Fonseca, C. M., 2007. On the eigen values of some tridiagonal matrices, Journal of Computational and Applied Mathematics 200, 1, 283-286.
- Dil, A. ve Mezö, I., 2008. A symmetric algorithm hyper-harmonic and Fibonacci numbers, Applied Mathematics and Computation, 206, 942–951.
- Horn, R.A. ve Johnson, C.R., 1991. Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York, USA.
- Koshy, T., 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, A Wiley-Interscience Publication, New York, USA.

- Mattila, M. ve Haukkanen, P., 2016. Studying the various properties of MIN and MAX matrices-elementary vs. more advanced methods, *Special Matrices*, 4, 101-109.
- Neudecker, H., Trenkler, G. ve Liu, S., 2009. Problem section, *Statistical Papers*, 50, 221-223.
- Petroudi, S. H. J. ve Pirouz, M., 2016. On the bounds for the spectral norm of particular matrices with Fibonacci and Lucas numbers, *International Journal Advances Applied Mathematics and Mechanics*, 3, 4, 82-90.
- Solak, S. ve Bahşı, M., 2013. A particular matrix and its someproperties, *Scientific research and essays* 8, 1-5.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Derya Özgöl

Adres : Pazaryeri Mah. 436. Sok. no:11/5 Fethiye/MUĞLA

E-posta adresi : d.tekeli@hotmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Erciyes Üniversitesi, 2009-2013

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, 2016-2019

