

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

HİPERBOLİK GEOMETRİDE BAZI UYGULAMALAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Tezi Hazırlayan: İbrahim KURBAY

İSTANBUL, 2007

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

HİPERBOLİK GEOMETRİDE BAZI UYGULAMALAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan:
İbrahim KURBAY
Öğrenci No:
050860001

Danışman:
Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN

İSTANBUL, 2007

YEMİN METNİ

Sunduğum Yüksek Lisans Tezimi, Akademik Etik İlkelerine bağlı kalarak, hiç kimseden akademik ilkelere aykırı bir yardım almaksızın bizzat kendimin hazırladığına and içerim. 10/09/2007

İbrahim KURBAY

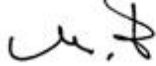
T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
TEZİ YÜKSEK LİSANS TEZ SINAV TUTANAĞI

12.09.2007

Enstitümüz Matematik Bilgisayar Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı yüksek lisans öğrencilerinden 050860001 numaralı **İbrahim KURBAY**'ın "Beykent Üniversitesi Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddesine göre hazırlayarak, Enstitümüze teslim ettiği "**HİPERBOLİK GEOMETRİDE BAZI UYGULAMALAR**" başlıklı tezi, Yönetim Kurulumuzun 10.09.2007 tarih ve 2007/11 sayılı toplantısında seçilen ve Fakülte binasında toplanan biz jüri üyeleri huzurunda, ilgili yönetmeliğin (c) bendi gereğince (90) dakika süre ile aday tarafından savunulmuş ve sonuçta adayın tezi hakkında ~~Özellikle/Oybirliği~~ ile ~~Kabul/Red veya Düzeltme~~ kararı verilmiştir.

İşbu tutanak, 4 nüsha olarak hazırlanmış ve Enstitü Müdürlüğü'ne sunulmak üzere tarafımızdan düzenlenmiştir.

DANIŞMAN
Prof.Dr. Mehmet ERDOĞAN



ÜYE
Prof.Dr. Mahir RESULOV



ÜYE
Yrd.Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL



ÖNSÖZ

Beykent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Ana Bilim Dalı tarafından verilen “Hiperbolik Geometride Bazı Uygulamalar” konulu tezimi bulduğum kaynaklar çerçevesinde araştırmaya çalıştım. Bu tezi hazırlarken İngilizceyi iyi bilmememin verdiği zorluklarla karşılaştım. Günümüzde bilimle ilgilenebilmek için en az bir yabancı dilin çok iyi bilinmesi gerektiğini öğrendim.

Tezimi hazırlarken, karşılaştığım zorluklarla ilgilenen, değerli zamanlarını esirgemeyen hocam Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN ‘a içtenlikle teşekkür ediyorum.

Tezimin yazımında yardımcı olan Şermin DURA‘ ya ve desteklerini benden esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç biliyorum.

İSTANBUL, 2007

İbrahim KURBAY

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, Öklidyen olmayan hiperbolik geometrinin bazı özelliklerini araştırmaktır. Öncelikle hiperbolik geometrinin tarihçesinden bahsedilmiştir.

2.Bölümde hiperbolik modeller üzerinde durularak stereografik izdüşüm dönüşümü hakkında bilgi verilmiştir.

3.Bölümde hiperbolik geometri ile Minskowski uzayı arasındaki ilişki araştırılmış, bir boyutlu hiperbolik uzay ve hiperbolik düzlem üzerinde durulmuştur.

4.Bölümde hiperbolik trigonometrinin kuvvet serileri bakımından tanımlamaları yapılmış ve çemberin çevresi ile alanının bulunması gösterilmiştir.

Son olarak, 5.Bölümde hiperbolik analitik geometriden bahsedilmiş, düzlem koordinat geometrisi hakkında bilgi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik Düzlem, Hiperbolik Geometri, Hiperbolik Trigonometri, Minkowski uzayı, Öklidyen Olmayan, Stereografik İzdüşüm

ABSTRACT

The main aim of this work is to analyze some characteristics of non-Euclidean hyperbolic geometry. First of all, it is mentioned about the history of hyperbolic geometry.

In the second section, it is investigated hyperbolic models and described stereographic projection and inversion.

In the third section it is analyzed the relationship between the hyperbolic geometry and Minkowski's space. Then one-dimensional hyperbolic space and 2-dimensional hyperbolic plane are studied.

The fourth section, is about the definition of hyperbolic trigonometry by power series. It is presented that how we calculate the circumference and the area of a triangle.

In the last section, it is mentioned about the hyperbolic analytic geometry and plane coordinate geometry.

Keywords: Hyperbolic Plane, Hyperbolic Geometry, Hyperbolic Trigonometry, Minkowski's Space, Non-Euclidean, Stereographic Projection

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ

ÖZET

ABSTRACT

İÇİNDEKİLER i

ŞEKİL LİSTESİ ii

1. GİRİŞ 1

1.1.Hiperbolik Geometrinin Tarihçesi 1

2. HİPERBOLİK GEOMETRİ 3

2.1. Hiperbolik Uzay Modelleri 3

2.2. Stereografik İzdüşüm Dönüşümü 7

3.HİPERBOLİK GEOMETRİ İLE MINSKOWSKI UZAYI ARASINDAKİ İLİŞKİ 13

3.1. BİR BOYUTLU HİPERBOLİK UZAY 14

3.2. HİPERBOLİK DÜZLEM 17

3.2.1. İzometriler 17

3.2.2. Jeodezikler 19

3.3.3. Açılar ve Uzaklıklar 21

3.3.4. Hiperbolik Üçgenler 23

3.3.5. Kompleks Analiz ve Hiperbolik Düzlem 30

4. HİPERBOLİK TRİGONOMETRİ 33

4.1. Çemberin Çevresi ve Alanı 41

5. HİPERBOLİK ANALİTİK GEOMETRİ 46

SONUÇLAR 50

KAYNAKÇA 51

ÖZGEÇMİŞ 52

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil Numarası	Adı	Sayfa
Şekil 2.1	Hiperbolik Uzay Modelleri	3
Şekil 2.2	Stereografik İzdüşüm	7
Şekil 2.3	qpr ve $qp'r$ açıları	9
Şekil 2.4	Küreden Küreye Stereografik İzdüşüm	11
Şekil 3.1	Minkowski Uzayı	13
Şekil 3.2	Paralel daire	15
Şekil 3.3	Hiperbolik doğru	17
Şekil 3.6	Hiperbolik üçgenin standart duruma getirilmesi	26
Şekil 3.7	Bir köşesi ideal hiperbolik üçgen	27
Şekil 3.8	Hiperbolik Üçgen	28
Şekil 3.9	Poincare disk modelinde ideal üçgenin bölünmesi	29
Şekil 4.1	D de dik üçgenler	37
Şekil 4.2	Hiperbolik Çember	42

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1.Hiperbolik Geometrinin Tarihçesi

Hiperbolik geometri Öklid Geometri' sinin ve aksiyomlarının daha iyi anlaşılması için yapılan çalışmaların sonucunda 19. yüzyılın ilk çeyreğinde aksiyomatik biçimde tanımlanmıştır. Bu geometrinin esası Öklid aksiyomlarının reddedilmesi düşüncesine dayanan Öklidyen olmayan geometrilerden birisi olmasıdır. Fiziksel uzay ve zamanın daha iyi anlaşılabilmesi için Öklidyen olmayan geometrileri çalışma fikrinin kaynağı Minkowski ve Einstein' e aittir. Hiperbolik geometrinin önemi negatif eğrilikli bir uzayın geometrisini en iyi yansıtan ve Öklidyen olmayan geometrilerin en tipik örneği olmasıdır. Öklid' in düzlem geometrisi 5 temel postulat' a dayanır.

Postulat I. Her nokta çifti yalnız ve ancak bir tek doğru parçası ile birleştirilebilir.

PostulatII. Herhangi bir doğru parçası her iki doğrultuda sonsuza kadar uzatılabilir.

Postulat III. Merkezi ve yarıçapı verilen sadece bir tek çember çizilebilir.

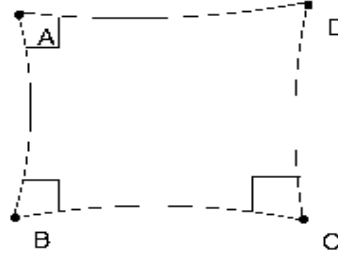
Postulat IV. Bütün dik açılar birbirine eşdeğerdir.

Postulat V. Herhangi farklı iki doğru üçüncü bir doğru tarafından kesildiğinde bu üçüncü doğruya göre aynı tarafta oluşan iç açılar sürekli şekilde 2 dik açıdan küçük kalıyor ise o takdirde ilk iki doğru bu 2 dik açıdan küçük açılarının olduğu bölge içinde kesişirler. Postulat V in eşdeğeri paralellik postulatıdır.

Paralellik Postulatı: Bir doğru ve dışında bir nokta verildiğinde verilen noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan bir tek doğru vardır.

Tarih boyunca, matematikçiler Öklid'in ispatlarını düzenlemek için aksiyom sistemleri oluşturmuşlardır. David Hilbert, Öklid'in aksiyomları ile çalışmış ve bu aksiyomlara eşdeğer olma aksiyomu ile arada olma aksiyomu ekleyerek aksiyomların sayısını 7 ye ulaştırmıştır. 4 postulatı kullanarak 5.sinin elde edilip edilemeyeceği sorusu 2 bin yıldan fazla insanları meşgul etmiştir. Uğraşanlar arasında İ. Ö. 400 yılında Proclus, 1616–1703 yılları arasında İngiliz John Wallis, 1667–1733 yılları arasında İtalyan Girolamo Saccheri, 1728–1777 yılları arasında Johann Heinrich Lambert sayılabilir. Girolamo Saccheri ve Johann Heinrich Lambert ikisi de beşinci aksiyomun yanlış olduğunu ispatlamaya ve

aksini arayip bulmaya çalışmışlardır. Lambert, Saccheri 'nin çalışmalarını üç dik açılı bir dörtgen üzerinde bakarak daha da öteye taşımaya çalıştı.



Şekil 1.1

Lambert dördüncü açı için üç olasılığa baktı: dik, geniş, dar açı. Bunun için geniş ya da dar açı olduğu olasılıklarını çürüterek sonra paralellik aksiyomunu kanıtlayabilirdi. Bununla birlikte, Lambert açının dar olduğu tezini çürütmede başarısız oldu. Bu araştırmalar Öklid'in 5. postulatının ancak Öklid geometrisinde geçerli olabileceğini gösterdi ve birden çok paralelin çizilebileceği bir geometrinin doğmasına yol açtı, işte bu geometri Hiperbolik geometri olarak adlandırılan Öklidyen olmayan bir geometridir. Bu geometride artık bir doğrunun her iki yanında doğruya eş uzaklıkta bulunan doğrular değil eğriler olacak, benzer üçgenler eşdeğer ve bir üçgenin iç açıları toplamı da π den farklı olacaktır. Daha sonraları hiperbolik geometriye aksiyomatik ve sentetik katkılar 1777–1855 yıllarında yaşayan ve Geometrinin duayeni olarak bilinen Carl Friedrich Gauss ve 1802–1860 yılları arasında yaşayan Janos Bolyai tarafından yapılmış ve Öklid geometrisindeki trigonometrik kavramlara paralel olan kavramlar ise 1793–1856 yılları arasında yaşamış olan Nikolai Ivanovich Lobachevski tarafından elde edilmiştir.

Daha sonraları hiperbolik geometriye analitik katkılar için Leonhar Euler ve Gaspard Monge ve daha fazlası negatif ya da pozitif eğriliğe sahip yüzeyleri çalışan ve onları Riemann manifoldlarına genelleştiren 1826–1866 yılları arasında yaşamış ve Gauss'un öğrencisi olan Bernhard Riemann tarafından yapılmıştır. Eugenio Beltrami ise 1868 yılında Öklidyen olmayan geometriler için analitik modellemeler yaparak Hiperbolik geometrinin Öklid geometrisine tıpatıp benzeyen ve onunla uyumlu olan modellemelerini elde etmiştir. Bu modellerden 5 tanesinden konformal olan 3 tanesi Henri Poincare tarafından 20. yüzyılın başlarında tanımlanmıştır.

BÖLÜM 2

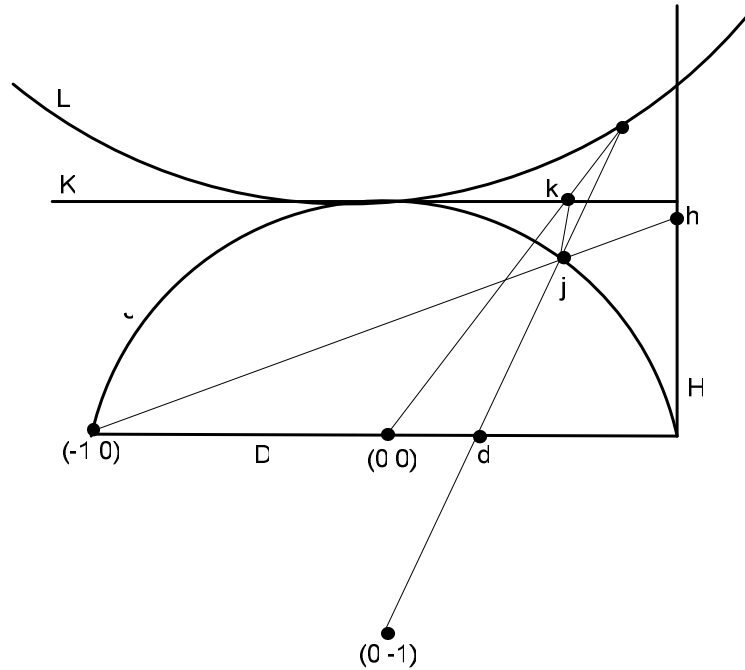
HİPERBOLİK GEOMETRİ

2.1. Hiperbolik Uzay Modelleri

Hiperbolik uzayların analitik modellerinden en bilinen 5 tanesi şunlardır:

1. H, Yarı-Uzay Modeli
2. D, Disk Modeli
3. J, Yarım-Küre Modeli
4. K, Klein Modeli
5. L, Hiperboloid Modeli

Bu modellerin her birinin kendine özgü özellikleri mevcut olmasına karşın her birisinin kendine ait metrikleri, izometrilere ve jeodezikleri mevcut olup bazı bakımlardan birbirine üstünlük oluşturan, yani daha kolay anlaşılabilir veya daha açık ifade edilişleri de söz konusudur.



Şekil 2.1

(5 analitik model ve onları birbirine bağlayan izometrilere. $h \in H$, $d \in D$, $j \in J$, $k \in K$, $l \in L$ noktaları hiperbolik uzaydaki aynı nokta olarak kabul edilebilir)

Bu modellerin hepsi R^{n+1} in farklı alt kümeleri üstünde tanımlıdır, n=1 için bunların tanım kümeleri Şekil 2.1 de verilmiştir ve bunlara ait tanım kümeleri aşağıda verildiği gibidir:

$$\begin{aligned} H &= \{(1, x_2, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} > 0\}; \\ D &= \{(x_1, \dots, x_n, 0) : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}; \\ J &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1, x_{n+1} > 0\}; \\ K &= \{(x_1, \dots, x_n, 1) : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}; \\ L &= \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, x_{n+1} > 0\}. \end{aligned}$$

Yukarıdaki 5 Modele ilişkin Riemann metrikleri ds^2 , sırası ile şöyledir:

$$\begin{aligned} ds_H^2 &= \frac{dx_2^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}, \\ ds_D^2 &= \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2}, \\ ds_J^2 &= \frac{dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}, \\ ds_K^2 &= \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2} + \frac{(x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n)^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2}, \\ ds_L^2 &= dx_1^2 + \dots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Bu tanımlamalarda verilen Riemann metrikleri uzayın her noktasında tanımlanabilen simetrik, lineer ve pozitif tanımlı yay elemanlarıdır. Bu metriklerle verilen 5 model birbirine izometrik olarak eşdeğer metriklerdir. Bunu görmek için izometrilere kullanabiliriz.

$$a) \alpha : J \rightarrow H, (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow (1, \frac{2x_2}{x_1 + 1}, \dots, \frac{2x_{n+1}}{x_1 + 1})$$

şeklinde tanımlanan $(-1, 0, \dots, 0)$ noktasından merkezi izdüşümü,

$$b) \beta : J \rightarrow D, (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x_1}{x_{n+1} + 1}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1} + 1}, 0 \right)$$

şeklinde tanımlanan $(0, \dots, 0, -1)$ noktasından merkezi izdüşümü,

$$c) \lambda : K \rightarrow J, (x_1, \dots, x_n, 1) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2})$$

şeklinde tanımlanan dik izdüşüm dönüşümü,

$$d) \delta : L \rightarrow J, (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+1}} \right)$$

şeklinde tanımlanan $(0, \dots, 0, -1)$ noktasından merkezi izdüşümü.

Yukarıda tanımladığımız dönüşümlere geri çekme dönüşümünü uygulamak suretiyle sağ taraftaki metrikten sol taraftaki uzayın metriğini şöyle elde ederiz;

$$\alpha : J \rightarrow H, (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(1, \frac{2x_2}{x_1 + 1}, \dots, \frac{2x_{n+1}}{x_1 + 1} \right)$$

dönüşümü için,

$\alpha^* : (TH)^* \rightarrow (TJ)^*$ şeklinde verilen kotanjant uzaylar arasındaki geri çekme dönüşümü sayesinde H daki metriği J ye taşıyabiliriz, yani $ds_J^2 = \alpha^*(ds_H^2)$ yazabiliriz.

Yukarıda α dönüşümünün tanımında görüntü elemanın bileşenlerini $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ olarak tanımlarsak, yani

$$y_1 = 1, y_2 = \frac{2x_2}{x_1 + 1}, \dots, y_{n+1} = \frac{2x_{n+1}}{x_1 + 1}$$

yazmak suretiyle bu eşitliklerden diferansiyel alırsak

$$dy_1 = 0, dy_2 = -\frac{2x_2}{(x_1 + 1)^2} dx_1 + \frac{2}{x_1 + 1} dx_2, \dots, dy_{n+1} = \frac{2x_{n+1}}{(x_1 + 1)^2} dx_1 + \frac{2}{x_1 + 1} dx_{n+1}$$

denklemlerini elde ederiz. Ayrıca $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ olduğunu da göz önüne alırsak bu denklemden elde edeceğimiz

$$x_1 dx_1 = -(x_2 dx_2 + \dots + x_{n+1} dx_{n+1})$$

ifadesini de hesaba katmak suretiyle

$$\begin{aligned} \alpha^*(ds_H^2) &= \alpha^*\left(\frac{dy_2^2 + \dots + dy_{n+1}^2}{y_{n+1}^2}\right) \\ &= \frac{(x_1+1)^2}{4x_{n+1}^2} \frac{4}{(x_1+1)^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 - \frac{2dx_1}{x_1+1} \sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i + \frac{dx_1^2}{(x_1+1)^2} \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 + \frac{2x_1}{x_1+1} dx_1^2 + \frac{dx_1^2}{(x_1+1)^2} (1-x_1^2) \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2 = ds_J^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece α dönüşümü sayesinde geri çekme operatörünü kullanarak bir metrikten diğerini elde etmiş olduk. Şimdi aşağıdaki dönüşüme geri çekme dönüşümünü uygulayalım:

$$\lambda : K \rightarrow J, (x_1, \dots, x_n, 1) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2})$$

dönüşümünde $y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n$ ve $y_{n+1}^2 = 1 - y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2 = 1 - x_1^2 - \dots - x_n^2$

alalım. Bu denklemlerden diferansiyel almak suretiyle

$$dy_1 = dx_1, \dots, dy_n = dx_n \quad \text{ve} \quad y_{n+1} dy_{n+1} = -(x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n)$$

yazabiliriz.

Böylece,

$$\gamma^*(ds_J^2) = \gamma^*\left(\frac{1}{y_{n+1}^2} (dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2) + \frac{1}{y_{n+1}^2} dy_{n+1}^2\right)$$

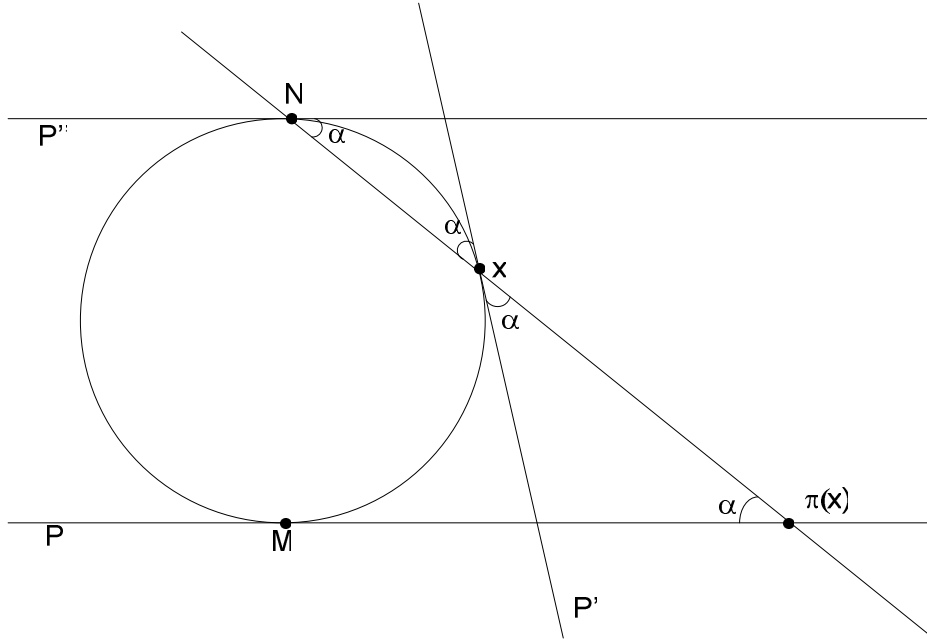
$$\frac{1}{(1-x_1^2-\dots-x_n^2)} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2) + \frac{(x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n)^2}{(1-x_1^2-\dots-x_n^2)^2}$$

elde ederiz ki bu son ifade ds_K^2 metriğinden ibarettir.

2.2. Stereografik İzdüşüm Dönüşümü

Bu kısımda yukarıdaki dönüşümleri tanımlayan bir noktadan merkezi izdüşüm ve daha çok küreden bir düzleme olan veya küreden küreye tanımlanabilen stereografik izdüşüm dönüşümünün tanımını verip bazı özelliklerini kanıtlayacağız.

Tanım 2.2.1. $n+1$ boyutlu Öklid uzayı R^{n+1} ve bu uzayda n boyutlu küre S^n olsun. S^n küresinin güney kutup noktası M noktası ve bu noktadan küreye çizilen teğet düzlemde P olsun. S^n nin kuzey kutup noktası N noktası ise $x \in S^n \setminus \{N\}$ olmak üzere x noktası ile N noktasını birleştiren doğrunun P düzlemini kestiği noktaya $\pi(x)$ dersek π dönüşümü ile kürenin her noktasını düzlemin bir tek noktası ile eşleştirmiş oluruz. Bu şekilde tanımlanan π dönüşümüne stereografik izdüşüm dönüşümü adı verilir.



Şekil 2.2. Stereografik İzdüşüm

Açıları koruyan dönüşümlere konformal dönüşümler denir. Şimdi stereografik dönüşümlerin açıları koruduğunu yani konformal olduğunu aşağıdaki teoremlerle kanıtlayalım.

Teorem 2.2.1. S^n, M, S, N ve π yukarıda tanımlandığı gibi olsun. O takdirde π stereografik izdüşüm dönüşümü $S^n \setminus \{N\}$ deki herhangi iki eğri arasındaki açıyı korur.

Kanıt. Keyfi boyut için analitik ispat yapacağız. S^n küresinin birim küre olduğunu kabul edelim. M ve N nin koordinatları sırasıyla $M(0, \dots, 0, -1)$ ve $N(0, \dots, 0, 1)$ dir . Ayrıca P düzleminin denklemi $x_{n+1} = -1$ dir ve $\pi: S^n \rightarrow P, \pi(x) = (y_1, \dots, y_n, -1)$ dönüşümü tanımlıdır.

Burada, $y_i = \frac{-2}{x_{n+1} - 1} x_i, 1 \leq i \leq n$ dir. Şimdi P düzleminin Öklid metriğini

$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2$ olarak alıp geri çekme operatörünü kullanarak bu metriği küre yüzeyi üzerine $\pi^*(ds^2)$ şeklinde taşıyalım.

Burada,

$$\pi^*(dy_i) = \frac{-2}{x_{n+1} - 1} \left(dx_i - \frac{x_i}{x_{n+1} - 1} dx_{n+1} \right), 1 \leq i \leq n.$$

şeklindedir. Ayrıca $x \in S^n$ olduğundan aşağıdaki denklemleri de ifade edebiliriz;

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1$$

$$x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n + x_{n+1} dx_{n+1} = 0$$

Böylece,

$$\pi^*(ds^2) = \pi^*(dy_1^2 + \dots + dy_n^2) = \pi^*(dy_1^2) + \dots + \pi^*(dy_n^2) = (\pi^*(dy_1^2))^2 + \dots + (\pi^*(dy_n^2))^2$$

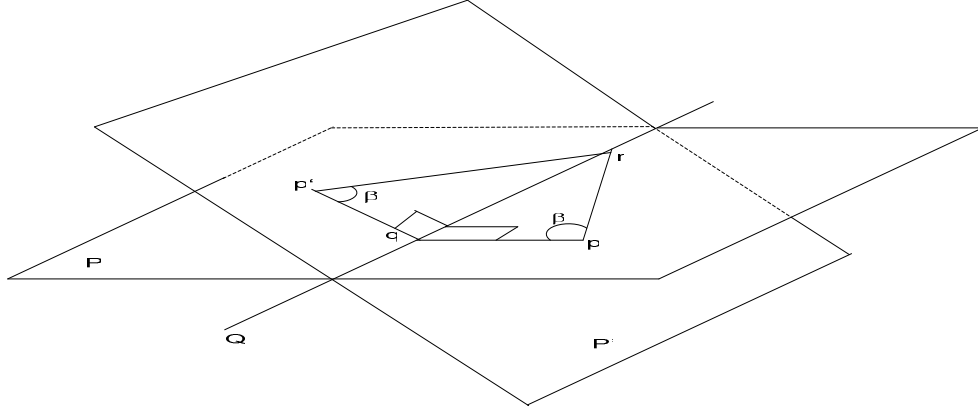
yazılabileceğini dikkate alarak, yukarıdaki üç ifade kullanıldıktan sonra gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\pi^*(ds^2) = \frac{4}{(x_{n+1} - 1)^2} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2 + dx_{n+1}^2)$$

buluruz. Bunun hesaplaması yukarıdaki yaptıklarımızla aynıdır. Böylece P düzlemi üstündeki her noktada Öklid metriğinin geri çekilmiş S^n üstündeki Öklid metriğinin bir pozitif katı olduğu sonucuna varırız. Diğer taraftan, tanjant uzayda uzunlukların bir pozitif sayı ile çarpılması açıları değiştirmeyeceğinden

$$\pi: S^n \setminus \{N\} \rightarrow P$$

dönüşümü açıları korur.



Şekil 2.3. qpr ve $qp'r$ açıları

Şimdi, teoremin ikinci kısmı için $(n+1=3)$ -boyutlu hal için aynı zamanda yukarıdaki analitik ispatımızın diğer bir şekli olan geometrik bir kanıt vereceğiz. Bunun için $(n+1)$ -boyutlu Öklid uzayı R^{n+1} de n -boyutlu P ve P' düzlemlerini göz önüne alalım. Bu düzlemler $(n-1)$ -boyutlu Q düzlemi boyunca kesişsinler. Sonra pq ve $p'q$ doğru parçaları eşit uzunlukta ve Q ya dik olacak şekilde $p \in P, q \in Q$ ve $p' \in P'$ noktalarını alalım. Şekil 2.3. den görüleceği üzere bu düzlemlerin arakesiti olan Q düzlemi üzerinde bir r noktası alırsak qpr ve $qp'r$ açıları eşit olur, benzer şekilde $p'pr$ ve $pp'r$ açıları da eşittir. Teoremin ikinci kısmını kanıtlamak için öncelikle içinde x ve y yi bulunduran M doğrusunun P yi kesmeyeceği gerçeğini göz önüne alalım ve kabul edelim ki M, P yi kessin. π dönüşümü M nin noktalarında tanımlı olduğundan $\pi(x)$ ve $\pi(y)$ yi birleştiren doğru π nin görüntü kümesinde bulunur. Buna göre $y \in P$ diyebiliriz. Şimdi P düzlemini S^n küresine yüzey kutup noktası olan S noktasında teğet olacak biçimde alalım. P' düzlemi de $x \in S^n$ noktasında S^n küresine teğet alınsın. $p' \in P'$ ve $p \in P$ noktalarını sırasıyla $p = \pi(x) \in P$ ve $p' = x \in P'$ şeklinde olacak şekilde ve r noktası içinde y noktası alınırsa bu durumda $p'pr$ ve $pp'r$ açılarının eşit olacağını görürüz ki bu iddiayı kanıtlar.

Üç boyutlu halde qpr ve $qp'r$ açılarının eşit olması π nin verilen bir eğri ile belirli bir teğet doğrultu arasındaki açıyı koruyacağını gösterir, yani pq ve $p'q$ arasındaki açının korunacağını görürüz. Tanjant düzlemler bu hal için 2-boyutlu olduğundan genel olarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.2. (Kürelerin korunması)

Bir önceki teoremden verilenleri varsayalım. Eğer C , S^n de N kuzey kutup noktasından geçen c -boyutlu bir küre ise bu durumda C nin π altındaki görüntüsü $\pi(C)$, P içinde c -boyutlu bir düzlemdir. Diğer taraftan eğer C , N den geçmiyorsa o zaman $\pi(C)$ görüntüsü P içinde c -boyutlu bir küre olur.

Kanıt: Eğer $N \in C$ ise ispat kolaydır. Gerçekten, bu durumda C , $(c+1)$ -boyutlu bir tek $P^\wedge$ düzleminde kapsanır ve $\pi(C)$ resmi ise $P^\wedge$ ile P nin arakesiti olan c -boyutlu bir düzlem olur.

Eğer C , N den geçmiyor ise yukarıdaki teoremin analitik kısmındaki gibi her şeyin varlığını kabul edelim ve S^n de birim küre olsun. C nin büyük çemberlerin bir birleşimi olması durumunda ispatı yaparsak diğer bütün haller içinde ispat yapılmış olur. Sonuç olarak R^{n+1} nin C deki vektörler tarafından gerilen at vektör uzayının $(c+2)$ -boyuta sahip olacağını kabul edebiliriz. Bu alt uzay $c=n-1$ için R^{n+1} in tamamında olabilir ve dolayısıyla genelliği kaybetmemiş oluruz.

C noktalarında S^n nin tanjant uzayları y noktasında bir koni olan konisel bir zarf tanımlar ve y yi bulmanın en kolay yolu ise N yi kapsayan 2-boyutlu bir R düzlemini, C nin r ve $r^\wedge$ gibi iki zıt noktasını ve r de $C \cap R$ ye teğet $t(r)$ ve $r^\wedge$ de $C \cap R$ ye teğet $t(r^\wedge)$ doğrularını göz önüne almaktır. Bu durumda y noktası $t(r)$ ile $t(r^\wedge)$ nin kesim noktası olacaktır (Şekil 2.4. e bak). Süreklilik nedeniyle $\pi(y)$ noktasının tanımlı olduğunu kabul edebiliriz.

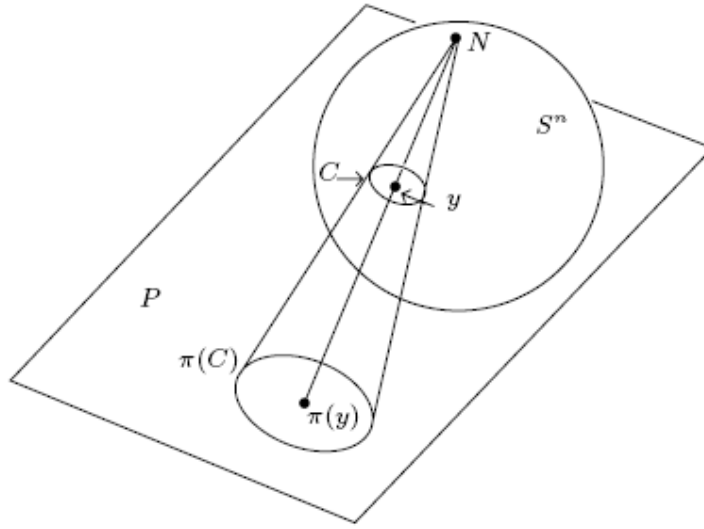
Şimdi iddia ediyoruz ki $\pi(y)$, $\pi(C)$ nin noktalarından eşit uzaklıktadır, böylece $\pi(C)$ nin $\pi(y)$ merkezli bir küre olacağını sonuçlandırırız.

Süreklilik nedeniyle sadece $\pi(y)$ nin $\pi(C) \setminus S$ nin noktalarından eşit uzaklıkta olacağını göstermemiz yeterlidir. Böylece iddiayı aşağıdaki düşünceyi kullanarak ispatlayabiliriz.

$x \in C \setminus S$ olsun ve x ve y yi kapsayan 2-boyutlu N düzlemini göz önüne alalım. Bu düzlemin x ve N den geçen doğru üstünde bulunan bir $x^\wedge$ noktası $yx^\wedge$ doğru parçası $\pi(y)\pi(x)$ doğru parçasına paralel olacak biçimde vardır. Yani $N\pi(y)\pi(x)$ ve $Nx^\wedge y$ açıları eşittir. Bir önceki teoremin son kısmına göre $\pi(y)\pi(x)$ ve $yx\pi(x)$ açıları ya eşittirler veya birbirinin tümleyenidir. Böylece $xyx^\wedge$ üçgeni eşkenar üçgen olacağından xy ve $x^\wedge y$ kenarları birbirine eşit olur. Böylece $Nx^\wedge y$ ve $N\pi(y)\pi(x)$ benzer üçgenlerinde karşılıklı kenarların oranları dikkate alınarak

$$d(\pi(x), \pi(y)) = \frac{d(N, \pi(y))}{d(N, y)} d(x', y) = \frac{d(N, \pi(y))}{d(N, y)} d(x, y)$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Burada elbette ki N , y ve $\pi(y)$ noktaları x 'e bağlı olmadığından oranlar birer sabittir, aynı şekilde $x \in C$, C bir küre ve y , C nin merkezi olduğundan $d(x, y)$ de bir sabittir. O halde $d(\pi(x), \pi(y))$ bir sabit olur ki bu sonuç bize bir kürenin π stereografik izdüşüm dönüşümü altındaki resminin de bir küre olacağını kanıtlar.



Şekil 2.4.(Küreden Küreye Stereografik İzdüşüm)

Tanım 2.2.2. S^n, R^{n+1} de kuzey ve güney kutup noktaları sırasıyla N ve S olan n -boyutlu bir küre olsun. P düzlemi de S^n in merkezinden geçen ve N ve S yi birleştiren doğruya dik olan düzlem olsun. Eğer $x, S^n \setminus \{N\}$ herhangi bir nokta ise o takdirde P nin N ile x den geçen doğru üstünde bir tek $\pi'(x)$ noktası vardır. Bu $S^n \setminus \{N\}$ den P düzlemine

$$\pi' : S^n \setminus \{N\} \rightarrow P$$

şeklinde bir stereografik izdüşüm dönüşümü tanımlar.

Teorem 2.2.3. π dönüşümü $S^n \setminus \{N\}$ deki eğriler arasındaki açılıarı korur ve küreleri düzlemlere veya kürelere dönüştürür.

Kanıt. S^n nin $N=(0, \dots, 0, 1)$ ve $S=(0, \dots, 0, -1)$ olmak üzere R^{n+1} deki birim küre olduğunu kabul edelim. Teorem 2.2.1 den $\forall x \in S^n \setminus \{N\}$ için $\pi(x)=(y_1, \dots, y_n, -1)$ yazabiliriz. Burada

$$y_i = \frac{-2}{x_{n+1} - 1} x_i,$$

dir. Aynı şekilde $\pi'(x) = (y'_1, \dots, y'_n, -1)$ dir. Burada

$$y'_i = \frac{-1}{x_{n+1} - 1} x_i = \frac{y_i}{2}.$$

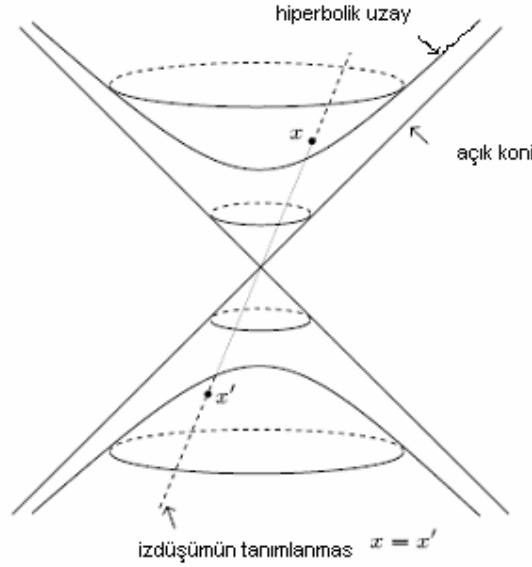
dir. Böylece π' , π nin bir öteleme ve bir nokta silme işlemi ile olan birleşim dönüşümüdür. O halde π açılıarı koruduğundan ve küreleri düzlemlere veya kürelere dönüştüreceğinden π' de aynı şekilde açılıarı korur ve küreleri düzlemlere veya kürelere dönüştürür.

BÖLÜM 3

HİPERBOLİK GEOMETRİ İLE MINKOWSKI UZAYI ARASINDAKİ İLİŞKİ

Doğal analitik modeller olması nedeniyle Gauss, Lobachevski ve Bolyai'nin Öklidyen olmayan geometrilerinin hepsini hiperbolik geometri olarak isimlendiririz. Şimdi modeli açıklayalım.

Klasik olarak, uzay ve zaman bağımsız büyüklükler olarak ele alınırdı ve bir olay $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1}$ şeklinde koordinatlarla verilebilirdi. Burada x_{n+1} koordinatı zamanı gösterir ve metrik ise $x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$ şeklinde pozitif tanımlı Öklid metriği olarak alınırdı.



Şekil 3.1 Minkowski uzayı

Relativite teorisi bunların hepsini değiştirdi. Düz uzay -zaman geometrisinde ışık hızı bir çatıyı referans olarak aldığımız zaman sabit olmalıydı. Uzay-zaman geometrisinin Minkowski modelinde yine R^{n+1} alınır fakat uzaklığı tanımlamak için $x^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$ şeklindeki tanımsız metrik kullanılır. Işık konisi ile normu sıfır olan noktalar (veya vektörler) kümesi olarak tanımlanır.

Işık konisi üstündeki $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ noktaları için orijinden

$$\left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^{1/2}$$

şeklindeki Öklid uzaklığı x_{n+1} zamanına eşittir. Bu ise orijinden çıkan bir ışığın hızının sabit olacağı anlamına gelir. Öklid normunu $\cdot$ şeklinde nokta ile öklidyen olmayan normu ise $*$ şeklinde yıldız sembolü ile göstereceğiz.

Orijinden sabit uzaklıkta olan noktaların kümesini göz önüne alırsak bu kümeler Öklid uzayı halinde çeşitli yarıçaplara sahip küreleri, Minkowski halinde ise bir veya iki parçalı hiperboloidleri elde ederiz. Böylece R^{n+1} Öklid uzayındaki n-boyutlu birim küreyi

$$S^n = \{x \in R^{n+1} : x \cdot x = 1\}$$

ve n-boyutlu hiperbolik uzayı ise

$$\{x \in R^{n+1} : x * x = -1\}$$

kümesi ile tanımlayabiliriz. Böylece hiperbolik uzay iki parçalı bir hiperboloid'tir ve yarıçapın karesi -1 veya yarıçapı $i = \sqrt{-1}$ olan bir küre olarak düşünülebilir.

Biz daha çok iki parçalı hiperboloid yerine bir parçalı olan veya iki parçayı projektif olarak özdeşleştirmek suretiyle sadece bir parçalı hiperboloid ile çalışacağız.

3.1. BİR BOYUTLU HİPERBOLİK UZAY

H^n hiperbolik uzayını ve onun Minkowski iç çarpımı olan $*$ dan (ki bu tanımsız bir metriktir) kaynaklanan içsel(kendisine özgü olan) metriğini anlamamanın en iyi yolu $n=1$ halini anlamaktır.

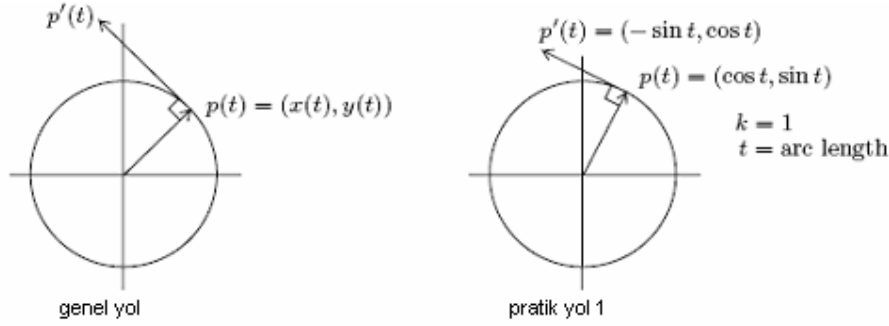
$$p : (-\infty, \infty) \rightarrow S^1$$

$p(0) = (1, 0)$ olacak şekildeki düzgün bir eğri olsun. Koordinatlarla bunu $p(t) = (x(t), y(t))$ şeklinde yazabiliriz. Burada $x^2 + y^2 = 1$ dir. Bu denklemin diferansiyelini alırsak

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

buluruz. Bunu $p(t) \cdot p'(t) = 0$ şeklinde de yazabiliriz. Bu ise $p'(t)$ hız vektörünün Öklid anlamında $p(t)$ yer vektörüne dik olması demektir.

Özel olarak $p'(t) = k(t)(-y(t), x(t))$ yazabiliriz. Çünkü S^1 çemberine $p(t)$ noktasında teğet olan uzay bir boyutludur yani, bir doğrudur ve $(-y(t), x(t))$, $p = (x, y)$ yer vektörüne Öklid anlamında diktir. Şekil (3.2)



Şekil 3.2.Paralel daire S^1

Eğer ilave olarak $p(t)$ nin sabit birim hızlı olduğunu varsayarsak

$$1 = |p'(t)| = |k(t)|\sqrt{(-y)^2 + x^2} = k(t)$$

ve böylece $k \equiv \pm 1$ elde ederiz. $k \equiv 1$ alırsak $p = (x, y)$ nin Öklid düzleminde bir çember etrafında birim hızlı olacak şekilde bir hareketi tanımlayacağını görürüz. Sonuç olarak tanıma göre, t ile birim çemberin Öklidyen yay uzunluğuna, $x = x(t)$ yi $\cos t$ ile ve $y = y(t)$ yi de $\sin t$ ile özdeşleyebiliriz. Böylece,

$$\frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t \text{ ve } \frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t$$

olması iddiamızı kanıtlamış olur.

Formüllerde, $k=1$ alarak x ve y nin (yani $\cos t$ ve $\sin t$) aşağıdaki diferansiyel denklem sistemini $x(0)=1$ ve $y(0)=0$ başlangıç koşullarıyla birlikte sağladığını görürüz:

$$x'(t) = -y(t), y'(t) = x(t)$$

Aşağıdaki kuvvet serisi açılımları kolayca elde edebiliriz:

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots,$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots,$$

H^1 deki hiperbolik haldeki hesaplama için (1,0) başlangıç noktası yerine (0,1) başlangıç noktasını almamız, S^1 yerine H^1 i ve Öklid iç çarpımı olan $\cdot$ yerine hiperbolik iç çarpım olan $*$, +1 yerine -1, Öklid yay uzunluğunu hiperbolik yay uzunluğu ile $\cosh t$ yi $\cosh t$, $\sinh t$ yi $\sinh t$ ile yer değiştirmemiz gerekecektir.

Şimdi, $p(0) = (0,1)$ olmak üzere

$$p : (-\infty, \infty) \rightarrow H^1$$

şeklindeki düzgün eğriyi göz önüne alalım. $x^2 - y^2 = -1$ olmak üzere $p(t) = (x(t), y(t))$ koordinat gösterimini alıp $x^2 - y^2 = -1$ denkleminin diferansiyelini alırsak

$$2x(t)x'(t) - 2y(t)y'(t) = 0$$

buluruz ki $p(t) * p'(t) = 0$ iç çarpımından başka bir şey değildir. Yani, $p'(t)$ hız vektörü hiperbolik anlamda $p(t)$ yer vektörüne diktir. H^1 in $p(t)$ noktasındaki tanjant uzayı bir boyutlu olduğundan ve $(y(t), x(t))$ vektörü $p=(x,y)$ yer vektörüne hiperbolik anlamda dik olduğundan özel olarak

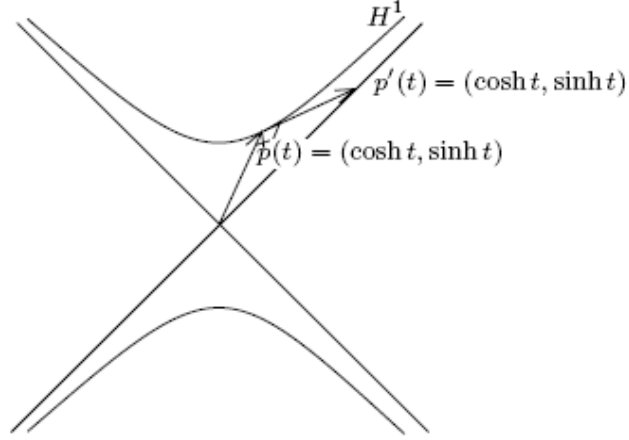
$$p'(t) = k(t)(y(t), x(t))$$

yazabiliriz.

İlaveten $p(t)$ nin hızının sabit ve 1 olduğunu varsayarsak

$$1 = |p'(t)| = |k(t)\sqrt{y^2 - x^2}| = |k(t)|$$

yazabiliriz ki buradan $k \equiv \pm 1$ elde ederiz. $k \equiv 1$ alırsak $p=(x,y)$ nin Minkowski düzlemindeki birim hiperbol boyunca sağ tarafa doğru hiperbolik anlamda sabit 1 birim hızı ile hareket ettiğini görürüz. Dolayısıyla tanıma uygun olarak t yi H^1 birim hiperbolü üstündeki yay uzunluğu ile $x=x(t)$ yi $\sinh t$ ve $y=y(t)$ $\cosh t$ olarak tanımlayabiliriz, böylece $\frac{d}{dt}(\cosh t) = \sinh t$ ve $\frac{d}{dt}(\sinh t) = \cosh t$ olduğundan iddiamızı kanıtlamış oluruz.



Şekil 3.3.Hiperbolik Doğru

Formüllerde $k=1$ alarak x ve y nin $(\sinh t, \cosh t)$ $x(0) = 0, y(0) = 0$ başlangıç koşulları ile

$$x'(t) = y(t), y'(t) = x(t)$$

diferansiyel denklem sistemini sağladığını gösterebiliriz. O halde $\sinh t$ ve $\cosh t$ nin aşağıdaki kuvvet serisi açılımlarını uygulama suretiyle sonuca ulaşırız.

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots,$$

$$\sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots,$$

3.2.HİPERBOLİK DÜZLEM

3.2.1. İzometriler

Sabit negatif eğrilik bir metriği H üst yarı uzayı üstünde

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

metriği ile modellenir ve bu uzaya hiperbolik düzlem adı verilir. Bu uzay $\mathbb{R}^3$ deki metrikten indirgenen birinci temel formu göz almadığımızdan soyut bir yüzey tanımlar, ancak yinede geometrik açıdan her şeyi çalışabileceğimiz şekilde yeterli bir tanımlamaya sahiptir. Önce H nin kendi üzerine olan izometrilerini göz önüne alalım.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $ad - bc > 0$ ise

$$z \rightarrow w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1)$$

şeklindeki Möbius dönüşümü H den H ye birebir ve örten olan düzgün bir dönüşüme kısıtlanabilir ve inversi

$$w \rightarrow z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

şeklindedir.

$$\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{4|dw|^2}{|w - \bar{w}|^2} \text{ denkleminde}$$

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \text{ ve } dw = \left(\frac{a}{cz + d} - \frac{c(az + b)}{(cz + d)^2} \right) dz = \frac{(ad - bc)}{(cz + d)^2} dz$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{4(ad - bc)^2 |dz|^2}{|(az + b)(c\bar{z} + d) - (a\bar{z} + b)(cz + d)|^2} = \frac{4(ad - bc)^2 |dz|^2}{|(ad - bc)(z - \bar{z})|^2} = \frac{4|dz|^2}{|z - \bar{z}|^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

denklemleri elde edilir.

O halde bu Möbius dönüşümü H den H ye bir izometridir. Böylece $z \rightarrow -\bar{z}$ ve böylece de

$$z \rightarrow \frac{b - a\bar{z}}{d - c\bar{z}} \quad (2)$$

şeklindeki bileşke dönüşümü H den H ye birer izometridir.

Birim D diski üzerinde

$$\frac{du^2 + dv^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}$$

metriğini düşünürsek H ye izometrik olur ve böylece H için ifade edeceğimiz herhangi bir şeyi aynen D içinde ifade edebiliriz.

Hiperbolik düzlemin birim disk modelinin $f : D \rightarrow D$ izometrilere de Möbius dönüşümüdür, ancak bu izometrilere yönlendirmeyi korumalı veya $z \rightarrow -\bar{z}$ ile Möbius dönüşümlerinin bileşkeleri yönlendirmeyi tersine çevirmesi gereklidir. D yi kendi üzerine dönüştüren Möbius dönüşümleri $a \in D$ ve $\theta \in R$ olmak üzere

$$z \rightarrow w = e^{i\theta} \left(\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right)$$

şeklinde verilir. Bunlar birer izometridir, çünkü w nin yukarıdaki ifadesi ve

$$dw = e^{i\theta} \frac{(1 - |a|^2)}{(1 - \bar{a}z)^2} dz$$

ifadesini $4(1 - |w|^2)^{-2} |dw|^2$ de yerine yazarsak

$$4(1 - |z|^2)^{-2} |dz|^2$$

elde ederiz.

H nin izometrilere grubu $\text{Isom}(H)$, H üstünde geçişmeli olarak hareket eder.

Bunun nedeni $a + ib \in H$ ise o zaman $b > 0$ ve böylece $z \rightarrow bz + a$

dönüşümü H nin i yi $a + ib$ ye taşıyan bir izometrisi olmasıdır. Benzer şekilde D birim diskinin izometrilere grubu $\text{Isom}(D)$ grubu D üstünde geçişmeli olarak hareket eder çünkü $a \in D$ ise bu durumda

$$z \rightarrow \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

dönüşüm a yi 0 a resmeder. $\text{Isom}(D)$ nin sıfırı sabit tutan bütün izometrilere grubu sıfır etrafındaki

$z \rightarrow e^{i\theta} z$ şeklindeki dönme hareketleri ile $z \rightarrow -\bar{z}$ şeklindeki dönüşümlerden ibarettir.

3.2.2. Jeodezikler

Hiperbolik düzlemin jeodezik denklemlerini kolayca çözebiliriz: $E = G = 1/y^2$ ve $F = 0$ olup bunların x den bağımsız olması nedeniyle ilk jeodezik denklem

$$\frac{d}{ds} (Eu' + Fv') = \frac{1}{2} (E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2)$$

şeklinden

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{x'}{y^2}\right) = 0$$

şekline indirgenir ve böylece

$$x' = cy^2 \quad (3)$$

buluruz. Bu denklemlerdeki parametre yay uzunluğu olduğundan

$$\frac{x'^2 + y'^2}{y^2} = 1 \quad (4)$$

x' yerine cy^2 yazılırsa

$$\frac{c^2 y^4 + y'^2}{y^2} = 1$$

dir. Eğer $c = 0$ ise $x = \text{sbt}$ elde ederiz ki bu y -eksenine paralel bir doğrudur. $c \neq 0$ olduğunu kabul edelim (3) ve (4) den

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2 - c^2 y^4}{c^2 y^4}}$$

veya

$$\frac{cydy}{\sqrt{1 - c^2 y^2}} = dx$$

elde ederiz ki bunun integrali

$$-c^{-1} \sqrt{1 - c^2 y^2} = x - a$$

veya

$$(x - a)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$$

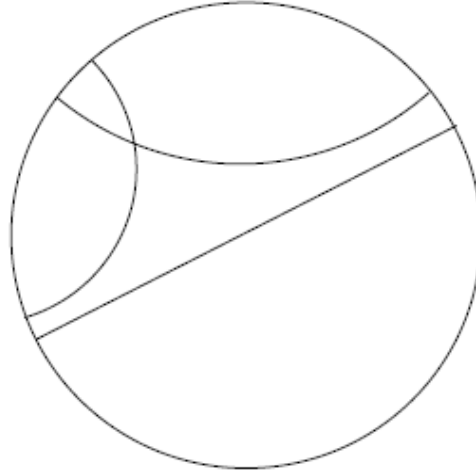
şeklindeki merkezi reel eksen üzerinde bulunan bir yarı çemberdir.

H dan D ye

$$w \rightarrow z = \frac{w - i}{w + i}$$

şeklinde verilen izometri jeodezikleri jeodeziklere resmeder ve bu çember ve doğruları çember ve doğrulara resmeden açıları koruyan ve reel eksen C deki birim çembere dönüştüren $C \cup \{\infty\} \rightarrow C \cup \{\infty\}$ şeklindeki bir Möbius dönüşümünü H ya kısıtlanmıştır.

Bundan dolayı D deki jeodezikler, D deki birim çemberi dik açıyla kesen çemberler veya doğrulardır.(Aşağıdaki gibi)



Şekil 3.4.

Şimdi jeodezikleri kullanarak herhangi bir izometrinin yukarıdaki gibi Möbius dönüşümü olduğunu gösterebiliriz. Böylece $F : D \rightarrow D$ bir izometri olsun. $F(0)$ ı sıfıra resmeden bir G Möbius izometrisini alırsak GF nin de Möbius dönüşümü olduğunu kanıtlamamız gerekir. Bu sıfırı sabit tutan bir izometri olduğundan sıfırdan geçen jeodezikleri sıfırdan geçen diğer jeodeziklere resmeder. Bu dönüşüm açıları da korur böylece o jeodezikler üzerinde dönme veya bir yansıma şeklinde hareket eder. Bu uzaklıkları da korur ve bu nedenle bir jeodezik üstündeki orijinde r uzaklığındaki bir noktayı yine orijinden aynı uzaklıkta bulunan bir diğer noktaya resmeder. Ancak yukarıda belirttiğimiz üzere $R: z \rightarrow e^{i\theta} z$ şeklindeki her bir dönme hareketi bir Möbius izometrisi olduğundan bununla olan bileşke dönüşümü için $RGF=1$ ve $F=(RG)^{-1}$ in bir Möbius izometrisi olduğunu görürüz.

3.3.3. Açılar ve Uzaklıklar

H ve D deki hiperbolik açılar H ve D nin birinci temel formları $E=G$ ve $F=0$ eşitliklerini sağladıklarından Öklidyen açılarla aynıdır. Noktalar arasındaki uzaklıklar ise bu noktaları birleştiren jeodezik yayların uzunlukları ile verilir. Örneğin $(-1,1)$ aralığı D birim diski üzerinde bir jeodezik olduğundan 0 dan herhangi $x \in (-1,1)$ noktasına olan uzaklık $[0,x]$ doğru parçasının hiperbolik uzunluğu olarak

$$\int_0^x \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = 2 \tanh^{-1} x$$

şeklinde verilir, burada $u(t)=t$ ve $v(t)=0$ ve $E=G=(1-u^2-v^2)^{-2}$ ve $F=0$ dır. Şimdi $a, b \in D$ olsun

$$e^{i\theta} \frac{b-a}{1-\overline{a}b} = \left| \frac{b-a}{1-\overline{a}b} \right|$$

reel ve pozitif olacak şekilde $\theta \in R$ yi belirleyebiliriz, böylece sıfırdan uzaklığını

$$2 \tanh^{-1} \left| \frac{b-a}{1-\overline{a}b} \right|$$

olarak buluruz.

$$z \rightarrow e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

İzometrisi uzaklıkları koruduğundan ve a' yi sıfıra ve b' yi de $e^{i\theta}(b-a)/(1-\overline{a}b)$ ye götüreceğinden D üstündeki a ve b arasındaki uzaklığı

$$d_D(a, b) = 2 \tanh^{-1} \left| \frac{b-a}{1-\overline{a}b} \right|$$

Benzer şekilde H' daki hiperbolik uzaklıkları şöyle bulabiliriz: önce $\lambda \in [1, \infty]$ olmak üzere i den λi 'ye olan uzaklığı bulalım. Bunu sanal eksen üzerindeki i den λi ye olan jeodeziğin uzunluğu olarak

$$\int_1^\lambda \frac{dt}{t} = \log \lambda$$

şeklinde buluruz, sonra verilen $a, b \in H$ için H nın a' yi i 'ye ve b' yi de bir $\lambda \in [1, \infty]$ için λi 'ye götüren bir izometrisini bulmak suretiyle bunu kullanarak a dan b' ye olan uzaklığı elde edebiliriz. Diğer bir yol ise şöyledir:

$$w \rightarrow z = \frac{w-i}{w+i}$$

Dönüşümü H dan D ye bir izometri tanımlayacağından $a, b \in H$ noktaları arasındaki hiperbolik uzaklık bu noktalara yukarıdaki dönüşümün karşılık getireceği D nin $(a-i)/(a+i)$ ve $(b-i)/(b+i)$ noktaları arasındaki hiperbolik uzaklığa eşit olacaktır ki bu

$$d_H(a, b) = d_D\left(\frac{a-i}{a+i}, \frac{b-i}{b+i}\right)$$

$$= 2 \tanh^{-1} \left| \frac{(b-i)(a+i) - (a-i)(b+i)}{(a+i)(b+i) - (a-i)(b-i)} \right| = 2 \tanh^{-1} \left| \frac{b-a}{b-\bar{a}} \right|$$

şeklinde bulunur.

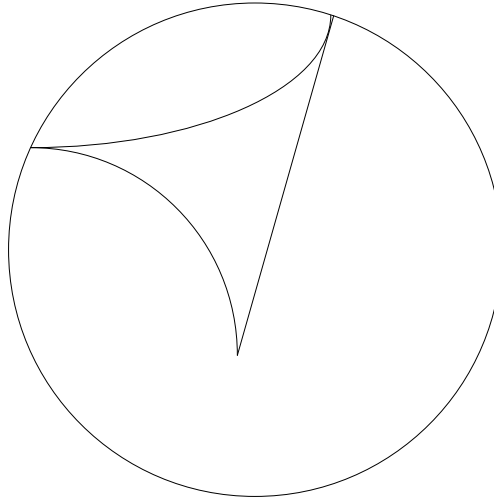
3.3.4. Hiperbolik Üçgenler

Bir Δ hiperbolik üçgen şöyle tanımlanır:

H veya D de üç nokta verilsin. Bu noktaları birleştiren jeodezik parçaların oluşturacağı üçgen Δ üçgenini tanımlar. Gauss-Bonnet teoreminden bir üçgenin iç açılarının toplamının

$$A + B + C = \pi - \Delta \text{ nın alanı}$$

şeklinde verileceğini elde edebiliriz. Bir veya birden fazla köşesinin sonsuzda olduğu hiperbolik üçgenleri düşünebiliriz. Bu sonsuzdaki köşeleri H veya D nin sınırı üstünde düşünürüz. Bu üçgenleri sonsuzda olan köşelerinin sayısına göre asimptotik, 2-asimptotik veya 3-asimptotik şeklinde isimlendireceğiz. H veya D nin bütün jeodezikleri sınırda dik açı ile kesişeceklerinden sonsuzdaki bir köşedeki açığı daima sıfır olarak alırız. (Şekil 3.5)



Şekil 3.5

Teorem 3.2.1. (Hiperbolik Üçgenler için Kosinüs Kuralı)

Δ , D de köşeleri a,b,c olan bir hiperbolik üçgen ve

$$\alpha = d_D(b, c), \beta = d_D(a, c) \text{ ve } \gamma = d_D(a, b)$$

ise Δ nın c köşesindeki iç açısı θ olmak üzere

$$\cosh \gamma = \cosh \alpha \cosh \beta - \sinh \alpha \sinh \beta \cos \theta$$

dır.

Kanıt. D nin izometrilерinin grubu D üstünde geçişmeli hareket edeceğinden $c=0$ olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca,

$$z \mapsto e^{i\phi} z$$

şeklindeki dönme hareketleri sıfırı sabit tutan izometrilер olduğundan a nın reel ve pozitif olduğunu kabul edebiliriz. Böylece

$$\beta = 2 \tan^{-1}(a)$$

dır ve buradan

$$a = \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$\tanh(\gamma/2) = \left| \frac{b-a}{1-\bar{a}b} \right|$$

olmak üzere

$$b = e^{i\theta} \tanh(\alpha/2)$$

elde ederiz

$$\frac{1 + \tanh^2(\gamma/2)}{1 - \tanh^2(\gamma/2)} = \cosh(\gamma)$$

olduğunu göz önüne alırsak

$$\cosh(\gamma) = \frac{|1 - \bar{a}b|^2 + |b - a|^2}{|1 - \bar{a}b|^2 - |b - a|^2} = \frac{(1 + |a|^2)(1 + |b|^2) - 2(\bar{a}b + a\bar{b})}{(1 - |a|^2)(1 - |b|^2)}$$

yazabiliriz. Aynı şekilde

$$\frac{1 + |a|^2}{1 - |a|^2} = \frac{1 + \tanh^2(\beta/2)}{1 - \tanh^2(\beta/2)} = \cosh \beta$$

ve benzer şekilde

$$\frac{2(\bar{a}b + a\bar{b})}{(1 - |a|^2)(1 - |b|^2)} = \frac{2 \tanh(\alpha/2) \tanh(\beta/2)(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{\sec h^2(\alpha/2) \sec h^2(\beta/2)} = \sinh \alpha \sinh \beta \cos \theta$$

iken

$$\frac{1 + |b|^2}{1 - |b|^2} = \cosh \alpha$$

buluruz ki bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.2.(Hiperbolik Üçgenler İçin Sinüs Kuralı)

Δ , köşeleri a, b, c ve bu köşelerdeki iç açıları A, B, C olan bir üçgen olmak üzere

$$\alpha = d_D(b, c), \beta = d_D(a, c) \text{ ve } \gamma = d_D(a, b)$$

diyelim. Bu durumda

$$\frac{\sin A}{\sinh \alpha} = \frac{\sin B}{\sinh \beta} = \frac{\sin C}{\sinh \gamma}$$

dır.

Kanıt: Teoremin ispatını 2 şekilde yapabiliriz:

1) $\sinh^2 \alpha \sinh^2 \beta \sinh^2 C$ yi α, β, γ ya göre simetrik olan $\cosh \alpha, \cosh \beta$ ve $\cosh \gamma$ cinsinden ifade etmek için Kosinüs kuralını kullanırız.

$$\sinh^2 \alpha \sinh^2 \beta \sinh^2 C = \sinh^2 \alpha \sinh^2 \gamma \sinh^2 B = \sinh^2 \gamma \sinh^2 \beta \sinh^2 A$$

2) Önce $C = \pi/2$ ise Δ ya Kosinüs kuralını iki farklı şekilde uygulamak suretiyle $\sin A \sin \gamma = \sinh \alpha$ olduğu ispatlanır, sonra Δ nın bir köşesinden karşı kenara bir dikme inmek suretiyle genel olarak sonuca ulaşırız.

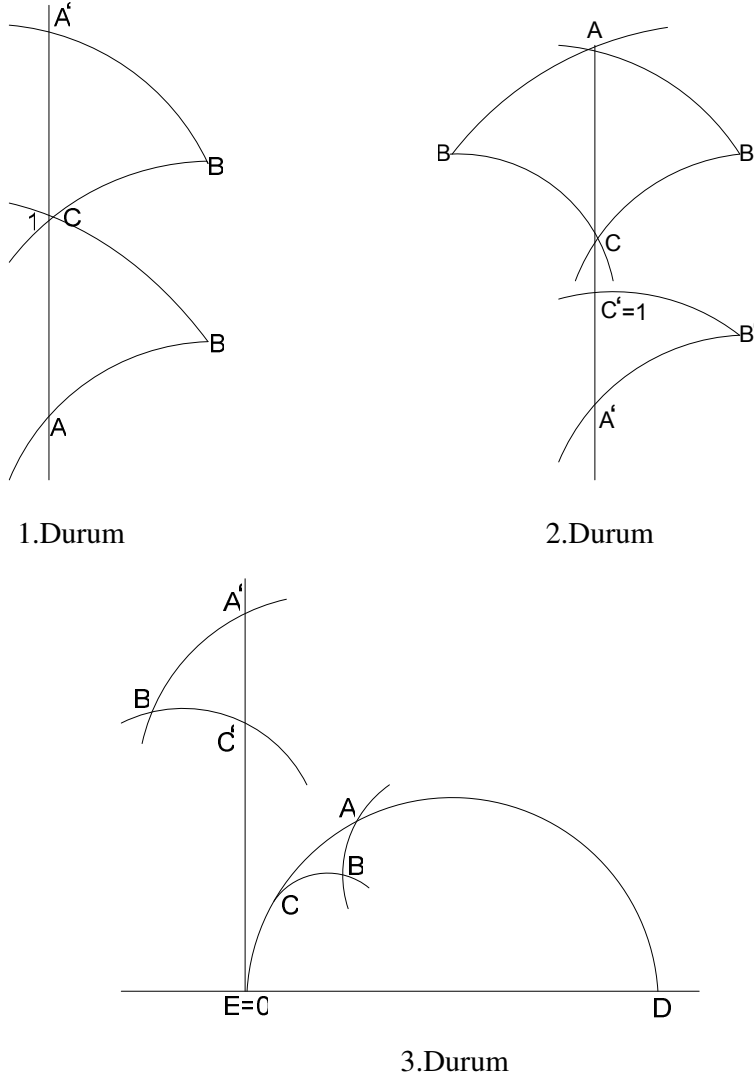
Gauss-Bonnet teoremi ve bu teoremin özel hallerini kullanarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 3.2.3.(Hiperbolik üçgenlerin alanları)

- i) 3-asimptotik bir Δ hiperbolik üçgenin alanı, π dir.
- ii) Bir iç açısı α olan 2-asimptotik bir Δ hiperbolik üçgenin alanı $\pi - \alpha$ dır.
- iii) İç açıları α ve β olan bir asimptotik Δ hiperbolik üçgenin alanı $\pi - \alpha - \beta$ dir.
- iv) İç açıları α, β ve γ olan bir asimptotik Δ hiperbolik üçgenin alanı $\pi - \alpha - \beta - \gamma$

Tanım 3.2.1. Üçü aynı hiperbolik doğru üzerinde olmayan A, B, C noktalarının hiperbolik doğrularla birleştirilmesiyle oluşan şekle hiperbolik üçgen denir. Eğer A, B, C noktaları sırasıyla $s > 0, k > 1$ olmak üzere $(O, k), (s, t), (O, 1)$ koordinatlarına sahipse oluşan üçgen standart durumdadır.

Teorem 3.2.4. Üst yarı düzlemdeki her hiperbolik üçgen izometrilere standart duruma getirilebilir.



Şekil 3.6. Hiperbolik Üçgenin Standart Duruma Getirilmesi

Kanıt: Bu teoremi üç durumda ispatı şu şekildedir. Birinci durumda $\triangle ABC$ hiperbolik üçgeninin köşeleri $C = (0,1)$, $s > 0$ olmak üzere $B = (s, t)$ ve $k < 1$ olmak üzere $A = (0, k)$ şeklinde olsun. Bu durumda $\triangle ABC$ hiperbolik üçgeni $D_{0,1}$ çemberde yansıma dönüşümü ile standart duruma dönüşür.

İkinci durumda $\triangle ABC$ hiperbolik üçgeninin köşelerinin ikisi y ekseninde $A = (0,a)$ ve $C = (0, c)$ noktaları olsun. Eğer $s < 0$ ise y-ekseninde yansıma yaparak $s > 0$ elde ederiz. Böylece $B = (s, t)$ köşesi için $s > 0$ varsayabiliriz. Bu durumda $D_{0,\sqrt{c}}$ inversiyonu uygularsak

$$|OC||OC'| = R^2$$

$$c|OC'|=(\sqrt{c})^2$$

$$|OC'|=1$$

buluruz. Böylece ΔABC hiperbolik üçgenini standart duruma veya birinci durumdaki hiperbolik üçgene dönüşmüş olur.

Son olarak ΔABC *keyfi* bir hiperbolik üçgen olsun. AC kenarının x -eksenini kestiği noktaları D ve E olarak adlandıralım (Şekil 3.6). Yatay ötelemeler üst yarı düzlem modeli için izometri olduğundan $E=0$ orijin olarak alabiliriz.

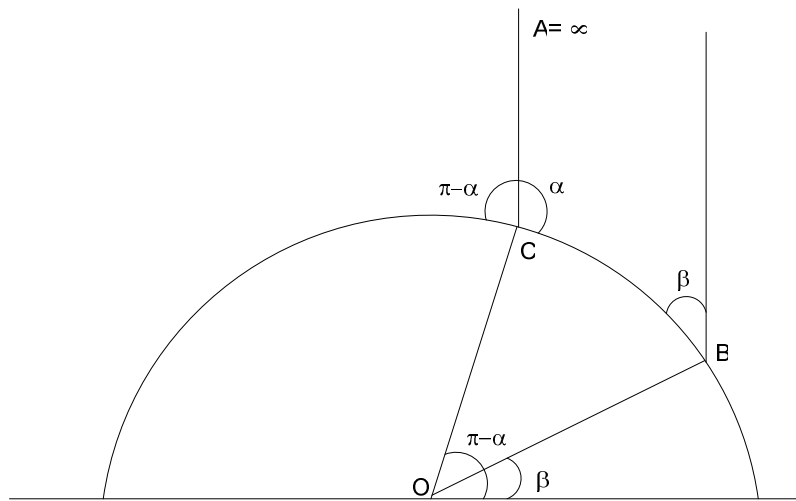
Bu durumda $D=(d,0)$ olur ve yansıma ile A ve C noktalarından geçen hiperbolik doğruyu y eksenine gönderebiliriz. Böylece standart olan veya ilk iki durumdan birine uyan bir hiperbolik üçgen elde etmiş oluruz. Böylece üst yarı düzlem modelinde verilen herhangi bir hiperbolik üçgen bu modelin izometrileryle standart duruma getirilmiş olur.

Şimdide teorem 3.2.3 ile verilen (iii) durumun ispatını yapalım.

Kanıt: Bu hiperbolik üçgenin ideal köşesini A , açısı β olan köşeyi B , diğer köşeyi de C olarak adlandıralım. Burada genelliği bozmadan $A = \infty$, BC kenarında O merkezli r yarıçaplı hiperbolik doğru üzerinde alabiliriz (Şekil 3.7)

Bu durumda OB 'nin x -ekseni ile yaptığı açı β , OC 'nin x -ekseni ile yaptığı açı ise $\pi - \alpha$ olur. Böylece ΔABC hiperbolik üçgeninin hiperbolik alanı

$$HA(\Delta ABC) = \int_{r \cos(\pi-\alpha)}^{r \cos \beta} \int_{\sqrt{r^2-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx$$



Şekil 3.7. Bir köşesi ideal hiperbolik üçgen

İle verilir. Bu integrali hesaplarsak

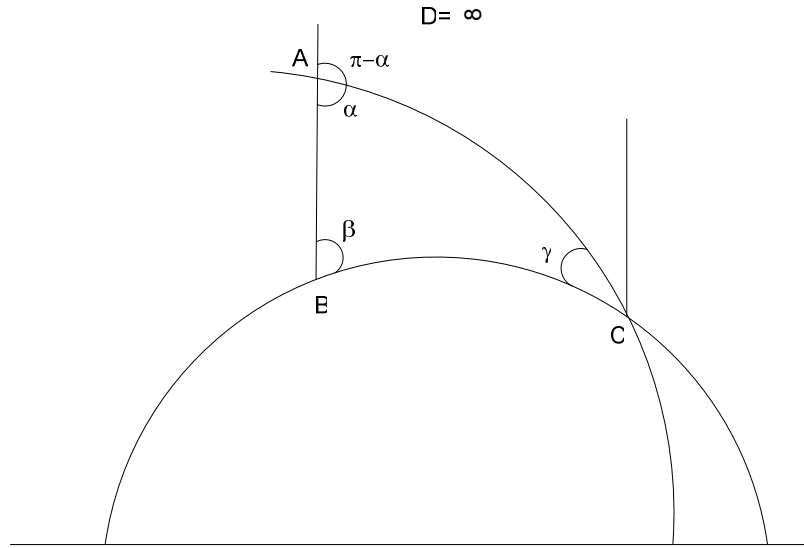
$$\begin{aligned}
 HA(ABC) &= \int_{-r \cos \alpha}^{r \cos \beta} \left[\frac{-1}{y} \right]_{\sqrt{r^2 - x^2}}^{\infty} dx \\
 &= \int_{-r \cos \alpha}^{r \cos \beta} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\
 &= \left[\arcsin \frac{x}{r} \right]_{-r \cos \alpha}^{r \cos \beta} \\
 &= \arcsin(\cos \beta) - \arcsin(-\cos \alpha) \\
 &= \frac{\pi}{2} - \beta + \frac{\pi}{2} - \alpha \\
 &= \pi - \alpha - \beta
 \end{aligned}$$

elde ederiz böylece ispat tamamlanmış olur.

Son olarak teoremin (iv) durumun ispatı şöyledir.

Kanıt: Teorem 3.2.4 'ü kullanarak ΔABC hiperbolik üçgenini standart durumda varsayabiliriz.

$D = \infty$ olarak adlandıralım. Böylece ΔDAC ve ΔDBC



Şekil 3.8. Hiperbolik Üçgen

üçgenleri bir önceki ispatla hesapladığımız türden hiperbolik üçgenlerdir. Böylece ΔABC hiperbolik üçgeninin alanı

$$HA(\Delta ABC) = HA(\Delta DBC) - HA(\Delta DAC)$$

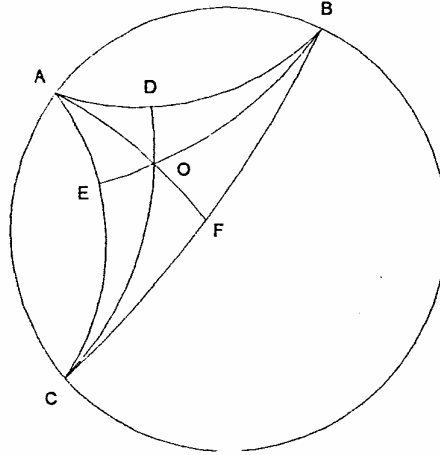
olur. Burada DAC açısı $\pi - \alpha$ 'dır. $\angle$ açığı göstermek üzere

$$\begin{aligned}
 HA(\Delta ABC) &= \pi - \beta - \angle DCB - (\pi - (\pi - \alpha) - \angle DCA) \\
 &= \pi - \beta - \gamma - \angle DCA - (\pi - (\pi - \alpha) - \angle DCA) \\
 &= \pi - \beta - \gamma - \angle DCA - \alpha + \angle DCA \\
 &= \pi - \alpha - \beta - \gamma
 \end{aligned}$$

elde ederiz.

Sonuç. İdeal hiperbolik üçgenin alanı π 'dir.

Kanıt. ΔABC ideal hiperbolik üçgeni verilsin. Bu hiperbolik üçgenin iç bölgesinde bir O noktası alalım. Bu O noktası ile A, B, C noktalarından geçen hiperbolik doğruları çizelim ve kenarları kestikleri noktaları sırasıyla F, E, D olarak adlandıralım. Burada O noktasında kesişen hiperbolik doğrular arasındaki açılar toplamı 2π ' dir. Diğer taraftan $\angle ADC + \angle BDC = \pi$, $\angle AEB + \angle BEC = \pi$ ve $\angle AFC + \angle AFB = \pi$ eşitlikleri vardır. (Şekil 3.9) Böylece ΔABC hiperbolik üçgeninin alanı



Şekil 3.9 Poincare disk modelinde ideal üçgenin bölünmesi

Teorem 3.2.3. kullanarak

$$HA(\Delta ABC) = 6\pi - 2\pi - \pi - \pi - \pi = \pi$$

elde edilir.

Sonuç. Bir hiperbolik üçgenin maksimum alana sahip olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul ideal hiperbolik üçgen olmasıdır.

Kanıt. Herhangi bir hiperbolik üçgen bir ideal hiperbolik üçgen tarafından içerilir. O halde maksimum hacimli hiperbolik üçgen ideal olmalıdır. Diğer taraftan bütün ideal hiperbolik üçgenlerin alanları π olduğundan, ideal üçgenler maksimum alana sahiptir.

3.3.5. Kompleks Analiz ve Hiperbolik Düzlem

Hiperbolik düzlemdeki jeodezik, üçgenler ve diğer bütün metrik kavramları hiperbolik düzlem üstündeki holomorfik fonksiyonlar ile belirleyebiliriz, o nedenle hiperbolik parametreyi kompleks analizin bir branşı gibi düşünebiliriz. Aşağıdaki teorem bunun bir göstergesidir.

Teorem 3.2.5. $f : D \rightarrow D$ şeklindeki herhangi bir holomorfik homeomorfizm hiperbolik metriğin bir izometrisidir.

Kanıt. Bunun için Schwartz'ın lemmasını kullanacağız. Bir izometri uygulamak suretiyle $f(0) = 0$ olduğunu farz edebiliriz. f nin resmi D olduğundan $|f(z)| < 1, z \in D$ yazabiliriz. Şimdi $f(0) = 0$, $f_1(z) = \frac{f(z)}{z}$ holomorfik olduğundan $r < 1$ yarıçaplı bir diske maksimum prensibini uygulayarak

$$|f_1(z)| \leq \frac{1}{r}$$

buluruz ve $r \rightarrow 1$ iken limit alarak $|f_1(z)| \leq 1$ veya

$$|f(z)| \leq |z|$$

elde ederiz. f bir homeomorfizm olduğundan ve inversi aynı eşitsizliği sağlayacağından

$$|z| \leq |f(z)|$$

ve $\forall z \in D, |f_1(z)| = 1$ buluruz. Bu eşitlik bir iç noktada da doğru olduğundan fonksiyon c gibi bir sabit olmak durumundadır, böylece $f_1(z) = cz$ ve $|f_1(z)| = |z|$ olduğundan

$$f(z) = e^{i\theta} z$$

elde ederiz ki bu f nin bir izometri olduğunu gösterir. Yukarıdaki teorem C içinde aynen sağlanır, yani

Teorem 3.2.6. Herhangi bir $f : C \rightarrow C$ holomorfik homeomorfizm $a \neq 0$ olmak üzere $f(z) = az + b$ şeklindedir.

şeklindeki teoremi ifade edebiliriz.

Eğer $|a| = 1$ ise bu fonksiyon $dx^2 + dy^2$ şeklindeki Öklidyen metriğin bir izometrisidir. $z \mapsto \lambda z$ şeklindeki klasik geometride ortaya çıkan büyüklük değiştirme fonksiyonu benzer şekildedir ancak üçgenlere eşdeğer yapılamaz.

Kanıt: $|z| > R$ için $g(z) = f(1/z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. g nin $z=0$ da bir esas singüler noktaya sahip olduğunu farz eldim. O takdirde Weierstrass teoremine göre z yeteri kadar küçük ise $g(z)$ herhangi bir kompleks sayıya istenildiği kadar yaklaştırılabilir ve özellikle f altında $\{z : |z| \leq R\}$ nin yer alan noktalara yaklaştırabiliriz. f nin birebir ve üzerine olması nedeniyle bu bir çelişmedir. Böylece g , sonsuzda en çok bir kutup noktasına sahip olabilir, o halde bu nedenle $f(z)$, herhangi k.nıncı dereceden bir polinom fonksiyon olmak zorundadır.

Diğer taraftan bu durumda $f(z) = c$, c nin değerlerine karşılık en çok k çözüme sahip olur ve f birebir ve üzerine olduğundan $k=1$ olmak zorundadır, böylece

$$f(z) = az + b$$

elde ederiz.

Bu sonuçlar hepsi tamamen kompleks düzlem ve onun alt kümeleri için geçerlidir. Aslında hiperbolik geometri kompakt Riemann yüzeylerini çalışırken çok önemli bir rol oynar. Bir Riemann yüzeyi üstünde yerel holomorfik koordinatlar holomorfik dönüşümlerle ilişkilidirler ve bunlar açıları korurlar. Bir Riemann yüzeyi üstünde iki düzgün eğri verildiğinde bu eğriler arasındaki açıyı tanımlamak anlamlıdır ve bu konformal yapıyı tanımlar. Bir metrik aynı zamanda açıları da tanımlar, bu nedenle bir Riemann yüzeyinin konform yapısıyla metrikleri bağdaştırabiliriz. z lokal koordinatı için böyle bir metrik

$$f dz d\bar{z} = f(dx^2 + dy^2)$$

şeklindedir. Aşağıdaki teorem çok önemli bir sonuca ulaşır.

Teorem 3.2.7. Her kapalı X Riemann yüzeyi, yüzeyin konformal yapısıyla bağdaşan sabit Gauss eğrilikli bir metriğe sahiptir.

Gauss-Bonnet teoremi ile $K > 0$ olması X ' in Euler sayısı $\chi(X)$ in pozitif olması dolayısıyla X in bir küre olmasını gerektirir. Eğer $K = 0$ ise bu $\chi(X) = 0$ yani X in bir tor yüzeyi olmasını gerektirir. Eğer $K < 0$ ise bu $\chi(X) < 0$ olmasını gerektirir.

Bu sonucun kanıtı oldukça zor olup literatürde Riemann mapping teoremi olarak bilinen derin bir teoremin sonucudur.

BÖLÜM 4

HİPERBOLİK TRİGONOMETRİ

Trigonometri bir üçgenin kenar ve açıları arasındaki bağıntılardan ibarettir. Öklid geometrisinde trigonometrik fonksiyonları tanımlamak için benzer üçgenleri kullanırız, ancak benzer üçgenler teorisi hiperbolik geometri için geçerli değildir. Bu nedenle hiperbolik geometride trigonometrik fonksiyonları herhangi bir reel sayı için kuvvet serisi açılımlarını kullanmak suretiyle tanımlarız.

Hiperbolik trigonometrik fonksiyonları

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlarız.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ serisi yakınsak olduğundan hiperbolik trigonometrik fonksiyonların kuvvet serisine açılımları

$$\begin{aligned}\sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

şeklinde verilir ve bunlar bütün $x \in \mathbb{R}$ sayıları için yakınsak olur. Gerçekten, kompleks analiz kullanarak $i = \sqrt{-1}$ dersek

$$\sinh x = -i \sin(ix) = i \sin\left(\frac{x}{i}\right)$$

$$\cosh x = \cos(ix) = \cos\left(\frac{x}{i}\right)$$

olduğunu kolayca elde edebiliriz.

Diğer taraftan aşağıdaki hiperbolik trigonometrik özdeşlikleri hemen ifade edebiliriz:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$$

$\pi : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow H^2$ dönüşümü ile Poincare modelini H^2 de tanımlarsak

$$\sin \pi(x) = \operatorname{sech} x \quad (4.1)$$

$$\cos \pi(x) = \tanh x \quad (4.2)$$

$$\tan \pi(x) = \operatorname{csch}(x) \quad (4.3)$$

olduğunu ifade edebiliriz. Örneğin

$$\begin{aligned} \sin \pi(x) &= \sin(2 \arctan e^{-x}) \\ &= 2 \sin(\arctan e^{-x}) \cos(\arctan e^{-x}) \\ &= 2 \left(\frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}} \right) = 2 \left(\frac{1}{e^x + e^{-2x}} \right) \\ &= \frac{1}{\cosh x} = \operatorname{sech} x \end{aligned}$$

Şimdi ABC üçgeninde Poincare uzaklıklarını

$$a = d_p(B, C), \quad b = d_p(A, C), \quad c = d_p(A, B)$$

şeklinde gösterelim. Orijinden B noktasına olan uzaklık $x = d_p(0, B)$ olsun. $t = d_p(0, B)$

ise 0 dan B ye Öklidyen uzaklık olsun.

$e^x = \frac{1+t}{1-t}$ ifadesini kullanarak

$$\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$\tanh x = \frac{2t}{1+t^2}$$

elde ederiz.

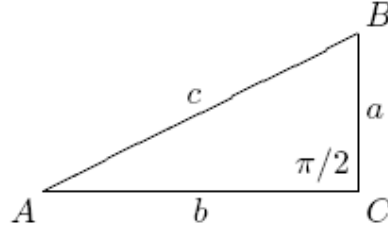
Teorem 4.1. ABC dik üçgeni verilsin. Eğer C açısı dik açı yani $\frac{\pi}{2}$ ise bu durumda

$$\sin A = \frac{\sinh a}{\sinh c} \quad \cos A = \frac{\tanh b}{\tanh c} \quad (4.4)$$

$$\cosh c = \cosh a \cosh b \quad (4.5)$$

$$\cosh a = \frac{\cos A}{\sin B} \quad (4.6)$$

dır.



Hiperbolik halde bu teoremi kanıtlamadan önce Öklidyen geometride bir dik üçgen için verilen formüllerle karşılaştıralım:

1. Pisagor teoreminin hiperbolik benzeri denklem (4.5) ile verilir:

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{c^2}{2!} + \frac{c^4}{4!} + \dots &= \left(1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \dots \right) \cdot \left(1 + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} + \dots \right) \\ &= 1 + \left(\frac{a^2}{2!} + \frac{b^2}{2!} \right) + \dots \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece, eğer ABC üçgeni yeteri kadar küçük ve dolayısıyla a,b,c nin yüksek dereceli kuvvetleri ihmal edilirse o zaman

$$\begin{aligned} 1 + \frac{c^2}{2} &\approx 1 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \\ c^2 &\approx a^2 + b^2 \end{aligned}$$

yazabiliriz.

2. Denklem (4.4) yeterince küçük ABC üçgeni için $\sin A \approx \frac{a}{c}$ ve $\cos A \approx \frac{b}{c}$ alabileceğimizi

ifade eder.

Dik üçgenlerin A açısını sabit tutup, c nin sıfıra yaklaştığını göz önüne alalım. $a < c$ ve $a \rightarrow 0$ yaklaşırsa

$$\frac{1}{\sinh x} \approx \frac{1}{c^3} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1+u} = \frac{1}{c} (1-u+u^2-u^3+\dots)$$

yazabiliriz, burada $\lim_{c \rightarrow 0} = 0$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned} \frac{\sinh a}{\sinh c} &= \frac{a}{c} \left(1 + \frac{a^2}{3!} + \frac{a^4}{5!} + \dots\right) (1-u+u^2-u^3+\dots) \\ &\approx \frac{a}{c} \end{aligned}$$

yazabiliriz. O halde

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{a}{c} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sinh a}{\sinh c} = \sin A$$

dır.

3) Denklem (4.6) ve Denklem (4.5) deki ikinci eşitlik Öklidyen paralelliğin olmadığını ve açıların kenar uzunluklarını belirleyemeyeceği durumda söz konusudur.

Önce H da bir $P = ie^p$ noktasının i ye olan uzaklığının p olduğunu ifade edelim.

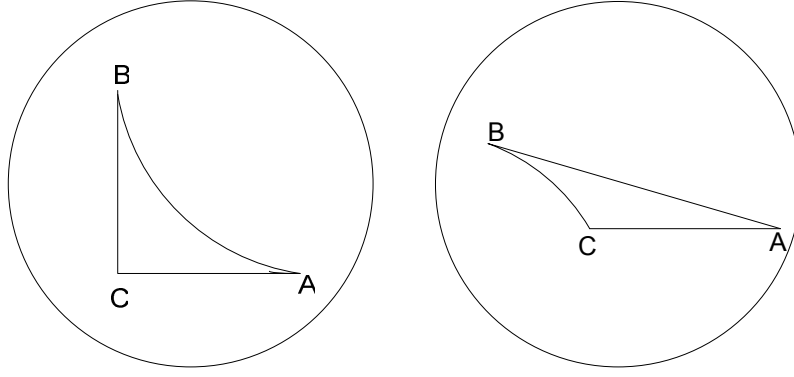
$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindeki dönüşümün H yı D ye resmedeceğini biliyoruz. Bu durumda $\phi(i) = 0$ dır ve

$$\phi(ie^p) = \frac{ie^p - i}{e^p + 1} = i \tanh\left(\frac{p}{2}\right)$$

dir.

Böylece D de sıfırdan p kadar hiperbolik uzaklıkta olan bir nokta, sıfırdan $\tanh\left(\frac{p}{2}\right)$ kadar Öklidyen uzaklıktadır. Böylece C açısı dik olan ve kenar uzunlukları $|AC|=b$ ve $|BC|=a$ olan ABC dik üçgenimizi Poincare dik modeli olan D de koşulları $C=0$, $A = \tanh\left(\frac{b}{2}\right)$, $B = i \tanh\left(\frac{a}{2}\right)$ olan üçgen olarak seçebiliriz.



Şekil 4.1. D de Dik Üçgenler

Ancak hesaplarımızı kolaylaştırmak için yukarıda sağ taraftaki üçgende gibi $A=0$ alabiliriz. Bunun için D nin bir γ izometrisini A yı sıfıra resmeden ve AC yi kendine resmeden bir izometri olarak bulmamız gerekir. Böylece

$$\gamma(A) = 0, \quad \gamma(1) = 1 \quad \text{ve} \quad \gamma(-1) = -1$$

olmalıdır. O halde

$$(z, A; 1, -1) = (\gamma z, 0; 1, -1)$$

den

$$\gamma = \begin{bmatrix} -1 & A \\ A & -1 \end{bmatrix}$$

olduğunu elde ederiz. Şimdi γ yı B ye uygularsak

$$\gamma(B) = \frac{-B+1}{AB-1} = \frac{-i \tanh(a/2) + \tanh(b/2)}{i \tanh(a/2) \tanh(b/2) - 1}$$

O halde ispatı yapabilmek için D deki ABC üçgeni için

$$A=0$$

$$B = \frac{-i \tanh(a/2) + \tanh(b/2)}{i \tanh(a/2) \tanh(b/2) - 1}$$

$$C = -\tanh(b/2)$$

koşulları sağlanmalıdır.

Kanıt: Hiperbolik Pisagor teoremini kanıtlamak için $A=0$ noktasını orijin kabul edebiliriz. B nin sifıra olan uzaklığı $\tanh(\frac{c}{2})$ olduğundan

$$\tanh(\frac{c}{2}) = \left| \frac{-B + A}{AB - 1} \right|$$

$$\tanh^2(\frac{c}{2}) = \frac{\tanh^2(a/2) + \tanh^2(b/2)}{\tanh^2(a/2) \tanh^2(b/2) + 1}$$

buluruz.

Hiperbolik trigonometri özdeşliklerinden $\sec^2 x = 1 + \tanh^2 x$ olduğu kolayca gösterilebilir, böylece

$$\begin{aligned} \sec^2(c/2) &= 1 + \tanh^2(c/2) \\ &= \frac{\tanh^2(a/2) \tanh^2(b/2) + \tanh^2(a/2) + \tanh^2(b/2) + 1}{\tanh^2(a/2) \tanh^2(b/2) + 1} \\ &= \frac{(\tanh^2(a/2) + 1)(\tanh^2(b/2) + 1)}{\tanh^2(a/2) \tanh^2(b/2) + 1} \\ \cosh^2(c/2) &= \frac{(\tanh^2(a/2) \tanh^2(b/2) + 1)}{\operatorname{sech}^2(a/2) \operatorname{sech}^2(b/2)} \\ &= (\tanh^2(a/2) \tanh^2(b/2) + 1) \cosh^2(a/2) \cosh^2(b/2) \\ &= \sinh^2(a/2) \sinh^2(b/2) + \cosh^2(a/2) \cosh^2(b/2) \\ &= 2 \cosh^2(a/2) \cosh^2(b/2) - \cosh^2(a/2) - \cosh^2(b/2) + 1 \end{aligned}$$

Tekrar $\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1$ özdeşliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \cosh c &= 2 \cosh^2(c/2) - 1 \\ &= 4 \cosh^2(a/2) \cosh^2(b/2) - 2 \cosh^2(a/2) - 2 \cosh^2(b/2) + 1 \\ &= (2 \cosh^2(a/2) - 1)(2 \cosh^2(b/2) - 1) \\ &= \cosh a \cosh b \end{aligned}$$

elde ederiz.

A yı orijin olarak aldığımızdan ve açıları Öklidyen olarak ölçebileceğimizden bildiğimiz trigonometriyi kullanarak A daki açıyı bulabiliriz. Sadece bilmemiz gereken kenar uzunluklarının ne olduğudur.

Önce B için koordinatları bulmamız gerekir. B için paydayı rasyonel yapalım.

$$B = \frac{(\tanh^2(a/2) + 1) \tanh(b/2) + i \tanh(a/2)(\tanh^2(b/2) - 1)}{\tanh^2(a/2) \tanh^2(b/2) + 1}$$

Burada,

$$\tanh^2(b/2) - 1 = -\sec^2(b/2)$$

$$\tanh^2(a/2) + 1 = \frac{\sinh^2(a/2) + \cosh^2(a/2)}{\cosh^2(a/2)} = \frac{\cosh a}{\cosh^2(a/2)}$$

dır. Böylece

$$B = \frac{(\cosh a \tanh(b/2) \cosh^2(b/2) - i \tanh(a/2) \cosh^2(a/2))}{\sinh^2(a/2) \sinh^2(b/2) + \cosh^2(a/2) \cosh^2(b/2)}$$

yazabiliriz. O halde

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{B_x}{|B|} \\ &= \frac{\cosh a \sinh b}{2(\sinh^2(a/2) \sinh^2(b/2) + \cosh^2(a/2) \cosh^2(b/2))} \\ &= \frac{\cosh a \sinh b}{2(\sinh^2(a/2) \sinh^2(b/2) + \cosh^2(a/2) \cosh^2(b/2))} \sqrt{\frac{\tanh^2(a/2) \tanh^2(b/2) + 1}{\tanh^2(a/2) + \tanh^2(b/2)}} \\ &= \frac{\cosh a \sinh b}{2(\sinh^2(a/2) \sinh^2(b/2) + \cosh^2(a/2) \cosh^2(b/2))} \sqrt{\frac{\sinh^2(a/2) \cosh^2(b/2) + \sinh^2(b/2) \cosh^2(a/2)}{\sinh^2(a/2) \sinh^2(b/2) + \cosh^2(b/2) \cosh^2(a/2)}} \\ &= \frac{\cosh a \sinh b}{\sqrt{(\sinh^2(a/2) \sinh^2(b/2) + \cosh^2(b/2) \cosh^2(a/2)) \sinh^2(a/2) \cosh^2(b/2) + \sinh^2(b/2) \cosh^2(a/2)}} \\ &= \frac{2 \cosh a \sinh b}{\sqrt{[(\cosh a - 1)(\cosh b - 1) + (\cosh a + 1)(\cosh b + 1)][(\cosh a - 1)(\cosh b + 1) + (\cosh a + 1)(\cosh b - 1)]}} \\ &= \frac{\cosh a \sinh b}{\sqrt{(\cosh a \cosh b + 1)(\cosh a \cosh b - 1)}} \\ &= \frac{\cosh a \sinh b}{\sqrt{\cosh^2 a \cosh^2 b - 1}} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\sin A = \frac{\sinh a}{\sqrt{\cosh^2 a \cosh^2 b - 1}}$$

buluruz.

Şimdi

$$\begin{aligned}\cosh^2 a \cosh^2 b - 1 &= \cosh^2 c - 1 \\ &= \sinh^2 c\end{aligned}$$

ve hiperbolik Pisagor teoreminden $\cosh a \cosh b = \cosh c$ yazılabileceğinden

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\cosh a \sinh b}{\sinh c} \\ &= \frac{\cosh a \sinh b}{\frac{\sinh c}{\cosh b}} \\ &= \frac{\tanh b \cosh a \cosh b}{\sinh c} \\ &= \frac{\tanh b \cosh c}{\sinh c} \\ \cos A &= \frac{\tanh b}{\tanh c} \\ \sin A &= \frac{\sinh a}{\sinh c}\end{aligned}$$

elde ederiz.

Teorem 4.2. Hiperbolik düzlemde bir ABC üçgeni için

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos C \quad (\text{Hiperbolik Kosinüs Kuralı})$$

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C} \quad (\text{Hiperbolik Sinüs Kuralı})$$

Teorem 4.3. (Açılar için Hiperbolik Kosinüs Kuralı)

H^2 düzlemi kenarları a, b, c ve karşılık gelen açıları A, B, C olan ABC üçgeni verilsin.

O takdirde

$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cosh c$$

dir.

Bu teorem üç açısı verilen bir üçgenin kenarlarını bulmak için kullanılır.

Bir üçgenin alanı açıları tarafından belirlenebileceğinden ve yukarıdaki teoreme göre bir üçgenin kenarlarını açıları sayesinde bulabileceğimizden bir üçgenin alanını üçgenin

kenarları cinsinden bulmak için bir formül bulabilmeliyiz, bu formül Hiperbolik geometride Heron formülü olarak bilinir.

Teorem 4.4 (Hiperbolik Geometri için Heron Formülü)

H^2 de kenarları a,b,c ve karşılık gelen açıları A,B,C olan bir ABC üçgeni verilsin.

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Üçgenin yarı-çevresi olsun. ABC üçgeninin alanına K dersek

$$1 - \cos(K) = \frac{4 \sinh s \sinh(s-a) \sinh(s-b) \sinh(s-c)}{(1 + \cosh a)(1 + \cosh b)(1 + \cosh c)}$$

dır.

Özel bir örnek ele alalım. Eşkenar üçgeni göz önüne alalım. Öklidyen geometride böylesi üçgenlerin hepsinin iç açıları 60° olduğundan bu üçgenler benzer üçgenlerdir. Eğer bu hiperbolik geometride doğru olmuş olsaydı bu üçgenler AAA kuralına göre eşdeğer üçgenler olacaktı. O zaman farklı kenar uzunluklarına sahip eşkenar bir üçgende açılar ne olurdu. Ne olacağını görebilmek için aşağıdaki tabloya bir göz atabiliriz.

Kenarlar	Radyan	Derece
10	0.0135	0.77
5	0.1633	9.35
2.5	0.5359	30.71
1.5	0.7930	45.43
1	0.9188	52.64
.5	1.0122	57.99
.1	1.0458	59.92

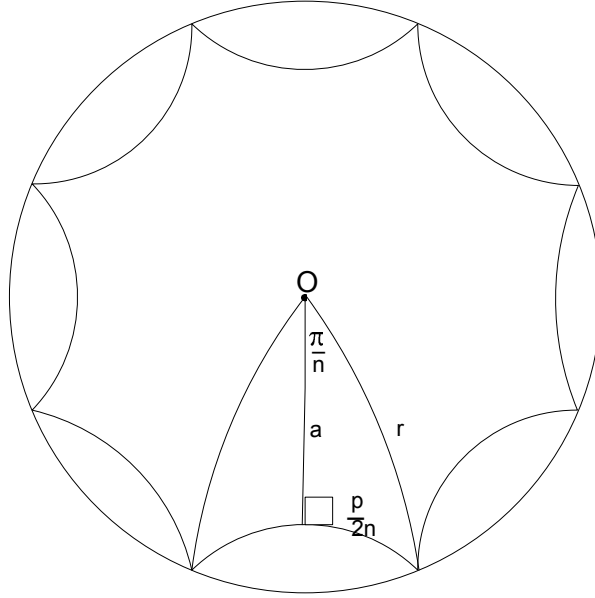
Tablo 4.1 Hiperbolik Eşkenar Üçgenler

Diğer bir ilginç durum ikizkenar dik üçgenlerde açılarının kenarlara göre nasıl değiştiğini görmektir.

4.1. Çemberin Çevresi ve Alanı

Teorem 4.5. r yarıçaplı bir çemberin C çevresi

$$C=2\pi \sinh r$$



Şekil 4.2.Hiperbolik Çember

Öklidyen geometride bir çember içine çizilecek bir düzgün n -genin çevresi P_n ise $C = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ çemberin çevresini verecektir.

$$\begin{aligned} p_n &= 2\pi r \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi r \left[\frac{\pi}{n} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{n} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{n} \right)^5 - \dots \right] \\ &= 2\pi r - 2\pi r \left[\frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{n} \right)^4 - \dots \right] \end{aligned}$$

yazabiliriz.

Böylece,

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 2\pi r$$

buluruz.

Hiperbolik geometride aynı yolu izleyebiliriz. Bunun için n -genin çevresini hesaplamak için teorem 4.1 i kullanacağız. İspat şöyledir:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2n} &= \frac{\sinh \frac{p}{2n}}{\sinh r} \\ \sinh \frac{p}{2n} &= \sinh r \sin \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{p}{2n}\right)^{2j+1}}{(2j+1)!} &= \sinh r \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) \\
\frac{p}{2n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{p}{2n}\right)^{2j}}{(2j+1)!} \right) &= \frac{\pi}{n} \sinh r \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2j}}{(2j+1)!} \right) \\
p \left(1 + \frac{1}{3!} \left(\frac{p}{2n}\right)^2 + \dots \right) &= 2\pi \sinh r \left(1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + \dots \right) \\
C = \lim_{n \rightarrow \infty} p &= 2\pi \sinh r
\end{aligned}$$

ABC üçgeninin alanı K ise $K = \pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}$ dir. Eğer ABC üçgeni C açısı dik olan bir dik üçgen ise

$$K = \frac{\pi}{2} - A - B \text{ dir.}$$

Teorem 4.6. $\tan \frac{K}{2} = \tanh \frac{a}{2} \tanh \frac{b}{2}$

dir.

Teoremin ispatı şöyledir:

$$\begin{aligned}
\tanh^2 \frac{a}{2} \tanh^2 \frac{b}{2} &= \frac{\cosh a - 1}{\cosh a + 1} \cdot \frac{\cosh b - 1}{\cosh b + 1} \\
&= \frac{\cos A - \sin B}{\cos A + \sin B} \cdot \frac{\cos B - \sin A}{\cos B + \sin A} \\
&= \frac{1 - \sin(A+B) \cos(A-B)}{1 + \sin(A+B) \cos(A-B)} \\
&= \frac{1 - \cos K}{1 + \cos K} = \tan^2 \frac{K}{2}
\end{aligned}$$

Bu teoremin sonucunu ve limit yaklaşımı kullanılarak artık bir çemberin alanını hesaplayabiliriz.

Teorem 4.7. r yarıçaplı bir çemberin A alanı

$$A = 4\pi \sinh^2 \frac{r}{2}$$

dir.

Kanıt: Bunu daha öncekine benzer şekilde yapacağız. Yukarıdaki teoremde ele aldığımız n-genin alanı K_n olmak üzere

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$$

dir. Şekil 4.2 deki dik üçgende K, a ve p yi K_n, a_n ve p_n ile gösterirsek dik üçgenin alanı

$\frac{K_n}{2n}$ olur.

$$\begin{aligned} \tan \frac{K}{4n} &= \tanh \frac{a}{2} \tanh \frac{p}{4n} \\ 4n \tan \frac{K}{4n} &= (\tanh \frac{a}{2}) 4n \tanh \frac{p}{4n} \end{aligned}$$

O halde

$$\begin{aligned} 4n \tan \frac{K}{4n} &= 4n \left[\frac{K}{4n} + \frac{1}{3} \left(\frac{K}{4n} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{K}{4n} \right)^5 + \dots \right] \\ &= K \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{K}{4n} \right)^2 + \frac{2}{15} \left(\frac{K}{4n} \right)^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 4n \tanh \frac{p}{4n} &= 4n \left[\frac{p}{4n} - \frac{1}{3} \left(\frac{p}{4n} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{p}{4n} \right)^5 + \dots \right] \\ &= p \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{p}{4n} \right)^2 + \frac{2}{15} \left(\frac{p}{4n} \right)^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

bulunur.

Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4n \tan \frac{K}{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} K = A$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4n \tanh \frac{p}{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} p = C$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = r$$

buluruz. Bütün bunları bir araya getirirsek

$$A = C \tanh \frac{r}{2}$$

$$= 2\pi \sinh r \tanh \frac{r}{2}$$

$$= 2\pi \sinh r \frac{\cosh r - 1}{\sinh r}$$

$$= 2\pi(\cosh r - 1)$$

$$= 4\pi \sinh^2 \frac{r}{2}$$

sonucunu elde ederiz.

BÖLÜM 5

HİPERBOLİK ANALİTİK GEOMETRİ

Hiperbolik düzlemde orijin için bir O noktası seçelim ve O , Ox ve Oy arasından iki düşey çizgi seçelim. Modellerimizde hem Klein hem de Poincare ikilisi için bu O noktasını tanımladığımız çemberin Öklidyen merkezi olarak kullanıyoruz. Bu iki düşey çizgiden her birisi için koordinat sistemlerini düzenlememiz gerekiyor. Bunun için her bir hatta pozitif ve negatif bir yön ve her bir kesit için bir birim seçmemiz gerekiyor. Bu eksenleri u eksen ve v eksen olarak alalım. Herhangi bir nokta için, $p \in H^2$, U ve V eksenlerinde bulunmayan bir p alırsak ve U, V için ayrı ayrı koordinatları olan U ve V aldığımızda $UOVP$ dörtgeni Lambert dörtgeni olmuş olur. Eğer UP uzunluğuna W ve VP uzunluğuna Z dersek Corollary teoremini uygularsak, şunu elde etmiş oluruz,

$$\tanh w = \tanh v \cosh u$$

$$\tanh z = \tanh u \cosh v$$

$r = dh(OP)$ nin ait olduğu hiperbolik uzaklık OP dir ve θ esas ölçüsü

$$-\pi < \theta < \pi \text{ dir.}$$

ve

$$\tanh u = \cos \theta \tanh r$$

$$\tanh v = \sin \theta \tanh r$$

aynı zamanda şunu da oluştururuz,

$$x = \tanh u, \quad y = \tanh v$$

$$T = \cosh u \cosh v, \quad X = xT, \quad Y = yT$$

dir.

Sıralı ikili OX , OY , OX ve OY eksenine bir çerçevedir. Bu çerçeveye göre P noktasıyla ilgili olarak şunları söyleyebiliriz;

- . Eksen koordinatları (u, v) ,
- . Kutup koordinatları (r, θ) ,
- . Lobachevsky koordinatları (u, w) ,
- . Beltrami koordinatları (x, y) ,

. Weierstrauss koordinatları (T, X, Y) .

Eğer alınan nokta Beltrami koordinatlarıyla gösterilirse (x, y) ve

$$t = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

yerine

$$p = \frac{x}{t}, \quad q = \frac{y}{t}$$

yazılırsa (p, q) Poincare koordinatları olur.

Her noktanın tek bir düzenli Lobachevsky koordinat çifti vardır ve buna zıt olarak, her düzenli gerçek sayı çifti belli bir nokta için Lobachevsky koordinat çiftidir. Lobachevsky koordinatlarında,

1. $a \neq 0$ için, $u=a$ bir doğrunun denklemi;
2. $a \neq 0$ için, $w=a$ bir hypercycle 'ın denklemi;
3. $e^u = \tanh w$ bir doğrunun denklemi, ilk çeyrek dairede her iki eksen horoparalel dir.

4. $e^u = \cosh w$, $\overrightarrow{OX}$ yarıçaplı bir horocycle'ın denklemidir.

Böylece, Lobachevsky koordinatlarında bir doğrunun lineer bir denklemi yoktur. Koordinatlar ve bir lineer denklem bir doğruyu tarif edemez. Her noktanın düzenli bir eksensel koordinat çifti vardır. Bununla beraber, her düzenli gerçek sayı çifti bir eksensel koordinat çifti oluşturmaz. U ve V , $V \neq 0$ olacak şekilde eksen üzerinde noktalar olsunlar. Şimdi U ve V deki dikmeler kesişmek zorunda değiller. Eğer iki doğru horoparalel ise o zaman bu OU ve OV kesitlerini zorunlu birer kesit yapar. Bu durumda U ve V de eksene dik bu dikmeler ancak ve ancak $|u| < |v|$ olursa kesişirler. O zaman (u, v) bir noktanın ancak $\tanh^2 u + \tanh^2 v < 1$ durumunda eksen koordinatlarıdır. Her nokta düzenli tek bir Beltrami koordinat çiftine sahiptir ve (x, y) ancak ve ancak $x^2 + y^2 < 1$ durumunda düzenli bir Beltrami koordinat çifti oluşturur.

Eğer P_1 noktası Beltrami koordinatları (x_1, y_1) ve P_2 noktası (x_2, y_2) Beltrami koordinatlarına sahipse, o zaman uzaklık $d_h(P_1 P_2) = P_1 P_2$ şu formülle verilir

$$\cosh P_1 P_2 = \frac{1 - x_1 x_2 - y_1 y_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2}}$$

$$\tanh P_1 P_2 = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}}{1 - x_1 x_2 - y_1 y_2}$$

$Ax+By+C=0$ bir doğrunun ancak $A^2+B^2>C^2$ durumunda Beltrami koordinatları denklemdir ve her noktanın şöyle bir denklemi vardır.

Verilen açı $\angle PQR$ olsun ve P noktasının Beltrami koordinatları da (x_1, y_1) olsun, Q'nun (x_2, y_2) , ve R'nin (x_3, y_3) , o zaman bu açının kosinüsü şöyle verilir.

$$\cos(\angle PQR) = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) - (x_2 y_1 - x_1 y_2)(x_3 y_1 - x_1 y_3)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2} \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2}}$$

5. Eğer $Ax+By+C=0$ ve $Dx+Ey+F=0$ ise Beltrami koordinatlarındaki kesişen iki doğrunun denklemidir ve θ onların kesişimin den oluşan bir açıdır, o zaman

$$\cos \theta = \pm \frac{AD + BE - CF}{\sqrt{A^2 + B^2 - C^2} \sqrt{D^2 + E^2 - F^2}}$$

$AD+BE=CF$ ise doğrular diktir. Eğer (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) iki farklı noktanın Beltrami koordinatları ise

$$t_1 = \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} \quad \text{ve} \quad t_2 = \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2} \quad \text{olur.}$$

O zaman iki noktayı birleştiren kesitin orta noktasının Beltrami koordinatları

$$\left(\frac{x_1 t_2 + x_2 t_1}{t_1 + t_2}, \frac{y_1 t_2 + y_2 t_1}{t_1 + t_2} \right)$$

ve iki noktayı iki eşit parçaya bölen dikmenin denklemi

$$(x_1 t_2 - x_2 t_1)x + (y_1 t_2 - y_2 t_1)y + (t_1 - t_2) = 0$$

olur.

Eğer $A_1x+B_1y+C_1=0$ ve $A_2x+B_2y+C_2=0$ Beltrami koordinatlarındaki doğruların denklemi ancak $A_1B_2=A_2B_1$ ise, o zaman iki doğru hiperparaleldir.

Beltrami koordinatlarında her dönüşümün şu biçimde bir denklemi vardır.

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = ax+by+c$$

Bir dönüşüm ancak $-1 < a^2+b^2-c^2 < 0$ ve $c > 0$ ise bir dairedir.

Bir dönüşüm ancak $a^2+b^2+c^2 = 0$ ise ve $c > 0$ ise bir horocycle dır.

Bir dönüşüm ancak $a^2+b^2-c^2 > 0$ olursa hipercycle dır.

Poincaré koordinatlarda (p,q)

$$C((p^2 + q^2) + 2Ap + 2Bq + C = 0$$

ancak $A^2+B^2 > C^2$ ise bir doğrunun denklemidir.

SONUÇLAR

“Hiperbolik Geometride Bazı Uygulamalar” konulu tezde

- . Hiperbolik geometrinin Öklid aksiyomlarının reddedilmesi düşüncesinden ortaya çıktığı
- . Hiperbolik modellerin izometrik olarak eşdeğer metrikler olduğu
- . Stereografik izdüşüm dönüşümlerinin açıları koruduğu
- . Hiperbolik üçgenlerin iç açıları toplamının π den küçük olduğu
- . Hiperbolik geometride trigonometrik fonksiyonların tanımlanabilmesi için kuvvet serisi açılımlarının kullanıldığı

sonuçlarına ulaşılmıştır.

KAYNAKÇA

- [1] James W. CANNON, William J. FLOYD, Richard KENYON and Walter R. PARRY, 1997, Flavors of Geometry, MSRI Publications, Volume 31
- [2] David C. Royster, 2000, Neutral and Non-Euclidean Geometry, UNC Charlotte
- [3] Beardon, A.F., 1983, The Geometry of Discrete Groups, Springer Verlag, New York.
- [4] Beardon, A.F., 1979, Hyperbolic Polygons and Funchsian Groups, London Math. Soc., 2
- [5] Macbeath, A.M., 1983, Commensurability of Co-Compact Three-Dimensional Hyperbolic Groups, Duke Mathematical Journal, 50
- [6] Mednykh, A.D., 1985, Automorphism Groups of Three Dimensional Hyperbolic Manifolds, Soviet Math, Dokl. Vol. 32, No 3.
- [7] Milnor, J., 1982, Hyperbolic Geometry: The First 150 Years, Bull.Amer. Math. Soc., 6

ÖZGEÇMİŞ

09.09.1976 yılında Denizli’de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Denizli’ de tamamladı.1995 yılında Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2000 yılında mezun oldu. Bir süre dershanede çalıştıktan sonra İzmir’de bir okulda matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2005 yılında Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar-Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisansa başladı. Halen Sudi Özkan Ç.P.L. de matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır ve yabancı dili İngilizcedir.