



**HİPERBOLİK OKTONİONLARLA
PLAZMA FİZİĞİ DENKLEMLERİNİN
YENİDEN FORMÜLASYONU**

Yüksek Lisans Tezi

Erdoğan ZEREN

ESKİŞEHİR 2019

**HİPERBOLİK OKTONİONLARLA PLAZMA FİZİĞİ DENKLEMLERİNİN
YENİDEN FORMÜLASYONU**

Erdoğan ZEREN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Fizik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Süleyman DEMİR**

**Eskişehir
Eskişehir Teknik Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Ekim 2019**

Bu tez çalışması BAP Komisyonu tarafından kabul edilen 1709F512 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Erdoğan ZEREN' in "Hiperbolik Oktonionlarla Plazma Fiziği Denklemlerinin Yeniden Formülasyonu" başlıklı tezi 24/10/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği" nin maddeleri uyarınca, Fizik Anabilim dalında Yüksek Lisans Yeterlilik tezi olarak kabul edilmiştir.

	<u>Unvanı-Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Süleyman DEMİR	
Üye	: Prof. Dr. Murat TANIŞLI	
Üye	: Doç. Dr. M. Emre KANSU	

Prof. Dr. Murat TANIŞLI

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZET

HİPERBOLİK OKTONİONLARLA PLAZMA FİZİĞİ DENKLEMLERİNİN YENİDEN FORMÜLASYONU

Erdoğan ZEREN

Fizik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ekim, 2019

Danışman: Prof. Dr. Süleyman DEMİR

Bu tezde, elektrodinamik ve akışkanlar dinamiğinin temel denklemleri arasındaki teorik benzerlikten yararlanılarak, çok akışkanlı plazmanın Maxwell tipi denklemleri hiperbolik oktonionlar cinsinden ifade edilmiştir. Sunulan model, bu türdeki plazmanın Lamb ve vortisite (girdaplanma) vektörlerini hiperbolik oktonionlarla genelleştirilmesine olanak tanımaktadır. Böylece çok akışkanlı plazmanın temel denklemleri, daha önce bu formalizm kullanılarak elde edilen elektromanyetik ve gravitasyonel alanlardaki karşılıklarıyla benzer bir formda türetilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik oktonionlar; Maxwell denklemleri; Plazma denklemleri; Oktonion cebiri; Elektromanyetik teori

ABSTRACT

REFORMULATION OF MULTIFLUID PLASMA EQUATIONS IN TERMS OF HYPERBOLIC OCTONIONS

Erdoğan ZEREN

Department of Physics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, October, 2019

Supervisor: Prof. Dr. Süleyman Demir

In this thesis, using the theoretical analogy between basic equations of electrodynamics and fluid dynamics, the Maxwell type equations of multifluid plasma are expressed in terms of hyperbolic octonions. The presented model allows us to generalize the species generalized Lamb vector and species generalized vorticity of plasma by a hyperbolic octonion. Thus, the basic equations of multifluid plasma are derived in a form similar to electromagnetic and gravitational counterparts previously given using this formalism.

Keywords: Hyperbolic octonions; Maxwell equations; Plasma equations; Octonion algebra; Electromagnetic theory

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansa başladığım andan itibaren tezimin hazırlanması aşamasında bilgisini, alakasını, zor durumlarımda anlayışını ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Süleyman DEMİR' e ve yüksek lisans ders aşamasında bilgileriyle ve içtenlikleriyle üzerimde emeği bulunan tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım esnasında manevi desteğini esirgemeyen ve bana inanan sevgili aileme de teşekkürü borç bilirim.

Erdoğan ZEREN

24/10/2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalardan bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğim ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

İmza

Erdinç ZEREN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
GÖRSELLER DİZİNİ	xi
SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
2. PLAZMA	4
2.1. Plazma Nedir?.....	4
2.2. Plazmanın Genel Özellikleri	6
3. PLAZMA FİZİĞİNDEKİ MAXWELL TİPİ DENKLEMLER	8
3.1. Elektromanyetik Teoride Maxwell Denklemleri	8
3.1.1. Elektrik alan için Gauss yasası	8
3.1.2. Manyetik alan için Gauss yasası	9
3.1.3. Faraday yasası	9
3.1.4. Ampere-Maxwell yasası	10
3.2. Akışkanlar Mekaniğinin Maxwell Tipi Denklemleri	10
3.3. Plazma Fiziğinin Maxwell Tipi Denklemleri	12
4. OKTONİON CEBİRİ	15
4.1. Reel Oktonionlar	15
4.1.1. Tanımlar	15
4.1.2. Temel işlemler	16
4.2. Kompleks Oktonionlar	21
4.2.1. Tanımlar	21
4.2.2. Temel işlemler	23

	<u>Sayfa</u>
4.3. Hiperbolik Oktonionlar	27
5. HİPERBOLİK OKTONİONLARLA PLAZMA FİZİĞİ	
DENKLEMLERİNİN YENİDEN FORMÜLASYONU	29
6. SONUÇ	36
KAYNAKÇA	38
ÖZGEÇMİŞ	



ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1. Oktonion bazları için Cayley-Dickson çarpım kuralları	18
Çizelge 4.2. Hiperbolik oktonion bazlarının çarpım kuralı	27



ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 4.1. Cayley-Dickson çarpım kurallarının Fano düzlemindeki çevrimi	18
---	----



GÖRSELLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Görsel 2.1. Soğuk plazmaya örnek olarak plazma topu	5
Görsel 2.2. Sıcak plazmaya örnek olarak güneş	5
Görsel 2.3. Laboratuvar ortamında hidrojen gazından oluşturulan soğuk plazma	5
Görsel 2.4. Elektron sıcaklığı-elektron parçacık yoğunluğu-elektron enerjisi (plazma sınıflandırması)	7



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

e_n	: Reel oktonion baz elemanları ($n=0\dots7$)
e_n^*	: Oktonion baz elemanlarının kompleks eşleniği ($n=0,1,\dots,7$)
$e_{1,2,3}$	: Hiperbolik oktonion baz elemanları
$\epsilon_{4,5,6,7}$	: Hiperbolik oktonion baz elemanları
a_n	: Reel oktonion bileşenleri ($n=0\dots7$)
$\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n$	: Kompleks oktonion bileşeni
λ	: Reel skaler
i	: İmajiner eleman
$\mathbf{A}$	: Reel oktonion
S_A	: Reel oktonionun skaler kısmı
V_A	: Reel oktonionun vektörel kısmı
$\mathbf{A}^*$	: Reel oktonionun eşleniği
$N(\mathbf{A})$	: Reel oktonion normu
$\mathbf{A}^{-1}$	: Reel oktonionun tersi
$\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$	: Kompleks oktonion
$S_{\mathfrak{U}}$	: Kompleks oktonionun skaler kısmı
$V_{\mathfrak{U}}$	: Kompleks oktonionun vektörel kısmı
$\mathfrak{U}^*$	: Kompleks oktonionun oktonionik eşleniği
$\bar{\mathfrak{U}}$	: Kompleks oktonionun kompleks eşleniği
$N(\mathfrak{U})$	: Kompleks oktonionun normu
$\square$	: Hiperbolik oktonion diferansiyel operatörü
$\square$	: d'Alembertian operatörü
$\Psi, \mathbb{Q}$	: Hiperbolik oktonion
$\Psi^*, \mathbb{Q}^*$	: Hiperbolik oktonionun eşleniği
$N(\mathbb{Q})$	: Hiperbolik oktonionun normu
$\mathbb{Q}^{-1}$	: Hiperbolik oktonionun tersi
$\mathbb{J}$	: Hiperbolik oktonion plazma akım yoğunluğu
$\mathbb{F}$	: Hiperbolik oktonion plazma alan denklemi
$\rho_{p,\alpha}$	: Plazma yük yoğunluğu
$\rho_{f,\alpha}$	: Akışkan yük yoğunluğu

$\mathbf{j}_e$	: Elektrik akım yoğunluğu
$\mathbf{j}_{f,\alpha}$	: Akışkan akım yoğunluğu
$\mathbf{j}_{p,\alpha}$	: Plazma akım yoğunluğu
$\mathbf{J}_p$	: Genelleştirilmiş plazma akım yoğunluğu
$\mathbf{P}_\alpha$	: Kanonik momentum
$\mathbf{E}$	: Elektrik alan
$\mathbf{B}$	: Manyetik alan
ϵ_α	: Toplam enerji
h_α	: Entalpi
a	: Ses hızı
c	: Işık hızı
ξ_α	: Genelleştirilmiş Lamb vektörü
β_α	: Genelleştirilmiş vortisite vektörü
$\mathbf{u}_\alpha$	: Hız
$\omega_\alpha, \Omega_\alpha$	: Vortisite
ϵ_0	: Boş uzayın elektriksel geçirgenlik sabiti
μ_0	: Boş uzayın manyetik geçirgenlik sabiti
I	: Elektrik akımı
Φ	: Akı
$d\ell$	: Uzunluk elemanı
$d\mathbf{A}$	: Alan elemanı
DC	: Doğru akım
AC	: Alternatif akım
MW	: Mikrodalga
RF	: Radyo frekansı

1. GİRİŞ

1920’li yıllarda iyonlaşmış gaz plazma olarak adlandırılmaya başlanmıştır. Maddenin dördüncü hali olarak kabul edilen plazma, çok iyi elektriksel iletkenidir. İyonlaşmış gaz kolektif davranışı ve elektrik iletkenliği ile plazma olur. Her iyonlaşmış gaz plazma değildir. Plazmada bir çeşit sıkıştırılabilir akışkandır [1-4].

Elektrodinamiğin temel denklemleri ile akışkanlar dinamiğinin temel denklemleri arasındaki teorik benzerlik, bilim adamlarını akışkanların hareket denklemlerini elektromanyetizmadaki Maxwell denklemine benzer bir biçimde yeniden formüle etmeye zorlamıştır. Bu nedenle literatürde hem sıkıştırılabilir hem de sıkıştırılmaz akışkanların alan denklemlerinin elektromanyetik teorideki Maxwell denklemlerinde yer alan elektrik ve manyetik alanların tanımlarına benzer bir formda ifade edildiği birçok araştırma mevcuttur [5-13].

Öte yandan çoğu durumda, bir plazmanın etkisinde kaldığı mekanik kuvvetler, akışkanların etkisinde kaldığı kuvvetlerle tutarlılık gösterir. Dolayısıyla yukarıda bahsedilen tartışma plazmalar için de geçerlidir. Diğer bir ifade ile plazmaların temel denklemlerini elektromanyetik teoremin Maxwell tipi denklemlerine benzer bir biçimde ifade etmek mümkündür. Akışkanların ve plazmaların davranışları arasındaki teorik benzerlik Thompson ve Moeller tarafından geniş bir biçimde araştırılmıştır [14, 15]. Thompson ve Moeller, bu konudaki ilk makalelerinde [14] plazma için Maxwell tipi denklemleri türetmeyi başarmışlardır. Bu çalışma, çok akışkanlı bir plazmanın denklemlerini elde etmek için bir çerçeve olarak görülebilir. Bir sonraki makalelerinde Thompson ve Moeller [15], bu sonuçları çoklu akış teorisi ile klasik elektromanyetizma arasında kesin bir izomorfizm oluşturmak için genişlettiler.

Genel olarak sıkıştırılabilir akışkanların ve plazmaların alan denklemlerini hiperkompleks sayılarla yeniden ifade edebilmek için ilgili literatürde daha önce bu denklemlerin elektromanyetizma ve gravitasyondaki için türetilen karşılıklarına dayalı birçok girişim mevcuttur.

İlk kez Hamilton [16] tarafından bilim dünyasına kazandırılan reel kuaterniyonlar, bir skaler ile bir vektörden oluşan 4-boyutlu matematiksel yapılardır. Bu hiperkompleks yapı için tanımlanan kuaternion çarpımı, aynı zamanda vektörlerin hem skaler çarpımını hem de vektörel çarpımını içerdiğinden elektromanyetizmanın ve lineer gravitasyonun tüm alan denklemlerinin daha kompakt ve daha zarif bir biçimde ifade edilmesine olanak

tanır [17-31]. Kuaternionların reel bileşenlerinin kompleks sayılarla değiştirmek suretiyle elde edilen kompleks kuaternionlar(bikuaternionlar) ise elektrik ve manyetik kaynakların birlikte bulunmasının yanı sıra fotonların kütlelerinin sıfırdan farklı olmasının kabulü durumunda bile Maxwell ve Proca denklemlerinin genelleştirilmesinde kullanılabilir [32-48].

Öte yandan lineer gravitasyon ve elektromanyetizma arasında da mükemmel bir analogi söz konusudur. Bu nedenle, hem Proca hem de gravitomanyetik monopol (tek kutup) terimlerini içeren gravitasyonel denklemlerin genelleştirilmesi için iyi çalışan bazı kuaterniyonik modeller önerilmiştir [39-41]. Ayrıca, bu yapılar birçok çekici özelliğe sahip olduklarından elektriksel, manyetik, gravitoelektrik ve gravitomanyetik yüklerin varlığında lineer gravitasyona ve elektromanyetizmaya ilişkin teorilerini birleştirmesi için de kompleks kuaterniyonlar kullanılmıştır [42-49].

Literatürde son zamanlarda ise sıkıştırılabilir akışkanların Maxwell tipi denklemlerinin genelleştirilmesi [50] ve matematiksel açıdan benzer yapıdaki çok akışkanlı plazma denkleminin yeniden formülasyonu için kuaternion cebirinin kullanıldığı yeni bir yaklaşım ortaya atılmıştır [51].

Kuaternionların kompleks bileşenleri sekiz bileşene kadar fiziksel niceliklerin başarı ile ifade edilmesini sağlar ve elde edilen kompakt yapıdaki denklemler de vektörel notasyonla kolayca ilişkilendirilebilir. Öte yandan ele alınan fiziksel denklemlerin bileşenleri reel sayılar olan matematiksel yapılar tarafından ifade edilmesi isteniyorsa bu durumda en az sekiz bileşenli hiperkompleks yapılar kullanılmalıdır. Bu noktada, uzay-zaman cebiri (space-time algebra, STA) fizik ve matematik için doğal bir dil oluşturur. Özel olarak, bu cebir yalnızca herhangi bir koordinat çerçevesinden bağımsız olarak temel fizik yasalarını ifade etmemize olanak sağlamakla kalmaz, aynı zamanda denklemleri vektörlerle ve Hamilton'un kuaterniyonlarıyla kolayca ilişkilendirilebilir. Son zamanlarda, uzay-zaman cebirinin bu avantajlarından yararlanmak için, sıkıştırılabilir akışkanın alan denklemleri için türetilen alternatif bir formülasyon [52] elektromanyetik teori [53, 54] ve lineer gravitasyondaki [55] uygulamalarına benzer bir formatta sunulmuştur.

Skaler, psödovektör, psödoskalar ve vektör bileşenlere sahip sekiz boyutlu oktonlar, farklı tipteki yapıları aynı anda kullanmanıza imkân verir [56-61]. Benzer şekilde sekiz bileşenli oktonionlar (Cayley sayıları), kuaterniyon cebirlerinden sonra en

büyük normlu bölüm cebirini oluştururlar [62-74]. Hiperbolik oktonionlar sadece kompleks baz elemanlarına değil hiperbolik baz elemanlarına da sahip olduklarından klasik oktonionlardan farklıdır. Bu türdeki oktonionlar, split(bölüntü) oktonionlarla izomorfik olup fizikte çok iyi bilinen denklemlerin yeniden formülasyonu için alternatif yöntemler sunar [75-92].

Bu tezde plazmalar için yeni denklemler ortaya konulurken sıkıştırılabilir akışkanların Maxwell tipi denklemlerinin hiperbolik oktonionlarla reformulasyonundan esinlenilmiştir [93]. Çok akışkanlı plazmanın temel denklemleri daha önce bu formalizm kullanılarak elde edilen elektromanyetik ve gravitasyonel karşılıklarına benzer bir biçimde türetilmiştir. Bu yolla elde edilen plazmanın temel denklemleri kompakt biçimde verilse de, bu yapının reel bileşenleri plazmanın hem akışkanlar dinamiği hem de elektromanyetik teori ile ilgili davranışını başarıyla yansıtır.

Bu tezin birinci bölümünde, plazmanın genel bir tanımı yapıldıktan sonra temel özelliklerinden ve günlük yaşamdaki kullanım alanlarından bahsedilmiştir. İkinci bölümde, elektromanyetik teorideki Maxwell denklemlerinin vektörel ve integral biçimleri hatırladıktan sonra akışkanlar plazma fiziğindeki Maxwell-tipi denklemler türetilmiştir. Üçüncü bölümde, oktonionların genel yapıları ve cebirsel özelliklerinden bahsedildikten sonra reel, kompleks ve hiperbolik oktonionların temel özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde ise hiperbolik oktonionlarla plazmaların Maxwell-tipi denklemleri yeniden formüle edilmiştir.

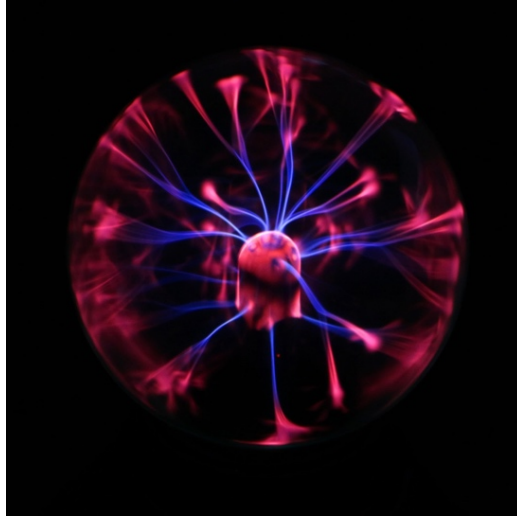
2. PLAZMA

2.1. Plazma Nedir?

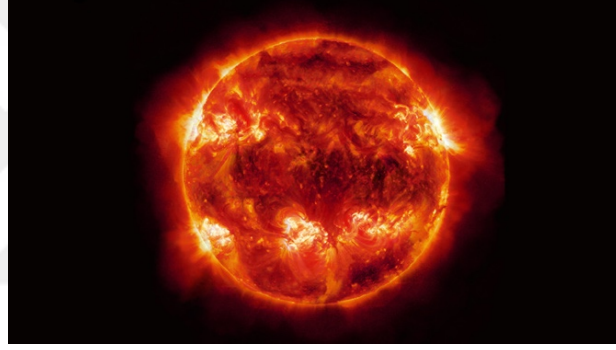
Plazma ismi ilk olarak 1920’li yıllarda Irving Langmuir tarafından kullanılmıştır. Plazma, iyonlaşmış gazların elektrik ve manyetik alandan etkilenmesiyle oluşan kontrollü reaksiyonlar olarak adlandırılabilir ve iyonize olmuş gaz anlamına da gelir. İyonlaşmış gazın plazma olması için iyonların elektriksel iletkenliği, kolektif davranışı gibi özellikleri olması gerekir. Kendine özgü özellikleri olduğundan, plazma maddenin dördüncü hali olarak ayrı incelenir. Plazmanın içerisinde iyonlaşmış gaz, protonlar, elektronlar, uyarılmış atomlar, yüksüz atomlar ve moleküller bulunur. Plazma içerisindeki hareketli pozitif ve negatif yüklü parçacıklar olmasına rağmen sistem yüksüz gibi davranmaktadır. Bu sebepten dolayı bu iyonların kolektif hareket etikleri anlaşılır [1].

Katıların molekülleri enerji verilerek hareketleri artırılarak sıvıya ve daha sonra gaza dönüşür. Gaz fazında elektronlar hızlı hareket ederler. Gaz halinden sonra da kinetik enerjisi artırılmaya devam edilirse iyonlaşma başlar ve çekirdekten elektron kopar. Bu elektron maddeye yeni bir hal kazandırır. Enerjisi arttırılmış gazın içinde iyonlaşma tekrarlanır. Bu iyon plazma adı verilmektedir. Plazmaya, elektrik ve manyetik kuvvetlerin güçlü bir şekilde hakim olduğu bir ortam olarak bakılabilir. Plazma gazda görülmeyen özelliklere sahiptir. Plazmadaki iyonlar ve elektronlar arasındaki yük ayrımı elektrik alana, yüklü parçacıkların akısı ise akıma dolayısı ile manyetik alan oluşmasına neden olur. Bu nedenle plazma, hem dinamik bir akışkan hem de iyi bir elektrik ileticisidir [1-4].

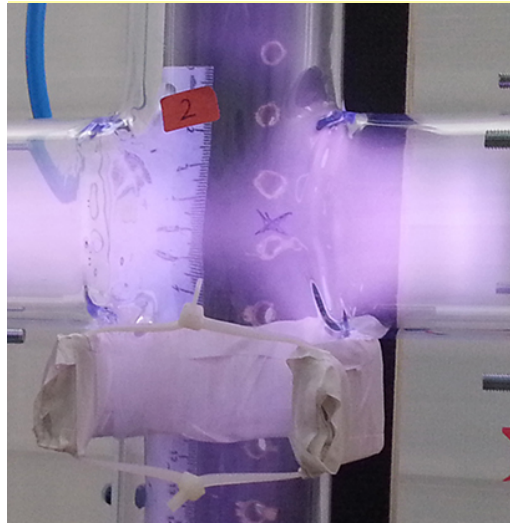
Plazmadaki serbest elektrik yükü plazmayı iyi bir elektrik iletkenliğine kavuşturur ve plazma elektromanyetik alanlardan kolaylıkla etkilenir. Kutup bölgesinde oluşan auroralar, yüklü parçacıkların oksijen atomlarıyla çarpışmasıyla oluşur. Yıldırım, şimşek ve kutup ışıkları dünyadaki doğal plazmalara örnektir. Evrenin %99’u plazmadan oluşmaktadır. Güneş, güneş rüzgarları, yıldızların iç bölgeleri ve yıldızlar arası bölge uzaydaki plazmalara örnektir. İnsan yapımı plazmalar ise neon lambalar, floresan lambalar, plazma tv ve plazma tabancaları buna örnektir [1].



Görsel 2.1. Soğuk plazmaya örnek olarak plazma topu



Görsel 2.2. Sıcak plazmaya örnek olarak güneş



Görsel 2.3. Laboratuvar ortamında hidrojen gazından oluşturulan soğuk plazma

2.2. Plazmanın Genel Özellikleri

Madde; katı, sıvı, gaz ve plazma olmak üzere dört halde bulunur. Plazma içerisinde hareket eden ve etkileşen yüklü iyonlar yanında nötr atomlar ya da moleküller de mevcuttur. Bu durum, maddenin plazma halini değiştirmez. Plazmanın içerisindeki elektronların çekirdeklerle olan bağları zayıftır. Bu zayıf çekirdek bağlarından dolayı kimyasal reaksiyonları da hızlıdır [1-4].

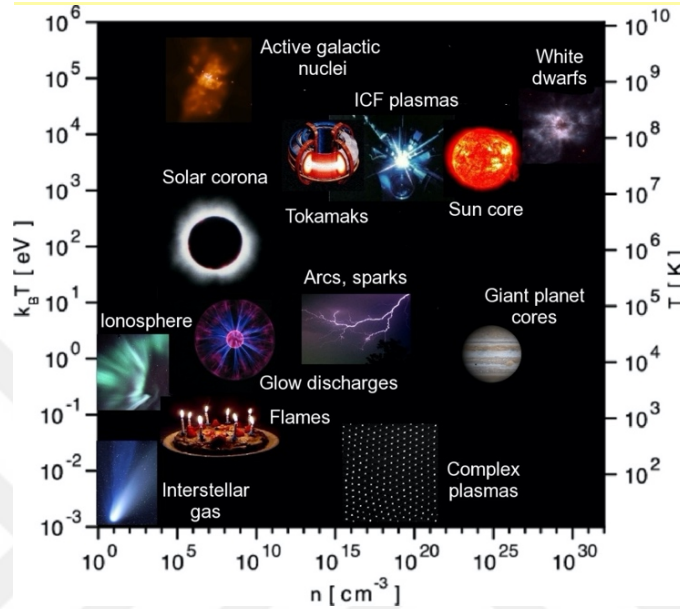
Plazma, gazın ısı enerjisi değişimi dışında bir lazer veya mikrodalga jeneratörü ile güçlü bir elektromanyetik alana tabi tutularak oluşturulabilir. Bu elektron sayısındaki değişim iyonları oluşturur. Bu iyonlar pozitif ve negatif yüklü parçacıklardan oluşur. Bu negatif ve pozitif yüklü parçacıkların oluşturduğu elektrik alandan dolayı plazma elektriksel olarak iyi bir iletken hale gelir. Bu nedenle elektromanyetik alanlardan kolayca etkilenebilirler. Plazmanın molekül yapısından dolayı gazlar gibi belirli bir hacmi ve belirli bir şekli yoktur [1-4].

Plazmayı katı, sıvı ve gazlardan ayıran bazı özellikleri vardır. Plazmayı diğer hallerden ayırt eden en önemli özelliği, plazmayı oluşturan yüklü parçacıkların Coulomb kuvvetleri ile birbirlerine etki etmesidir. Plazma içindeki her parçacık aynı ortamda bulunduğu diğer parçacıklara etki eder. Bu nedenle bu parçacıklar sürekli birbirleriyle etkileşir ve kollektif bir davranışta bulunurlar [1-4].

Plazma, gaz halindeki maddeye ısı enerjisi verilerek elde edildiği gibi farklı yöntemlerle de elde edilebilir. Bu laboratuvar plazmalarının üretim yöntemlerin dolayı farklı isimlerle adlandırılmasına neden olur. DC elektriksel deşarj, AC elektriksel deşarj, RF deşarj, MW deşarj, puls deşarj, dielektrik bariyer deşarj gibi farklı üretim mekanizmalarına ve farklı özelliklere sahip olan plazmalar vardır [1].

Plazma sıcak ve soğuk olarak ikiye ayrılır. Dünyadaki sıcak plazmalar; laboratuvar gazların çok yüksek sıcaklıklara (4000K-20000K) kadar ısıtılmasıyla oluşur. Sıcak plazma yüksek sıcaklıklarda maddenin iyonlaşmasıyla oluşur. Soğuk plazmalar, ısıtım yoluyla ya da normal sıcaklarda atomların yüksek enerjili parçacıklarla bombardımanı ile oluşturulur. Soğuk plazma düşük sıcaklıklarda (303K-353K) maddenin iyonlaşması ile oluşur. Güneş, alev sıcak plazmaya örnektir. Florasan, plazma topu soğuk plazmaya örnektir [2-4].

Plazma, iyonizasyon derecesi, plazma yoğunluğu, Debye uzunluğu, plazma sıcaklığı ve plazma frekansı gibi parametrelerle karakterize edilir. Bu parametreler plazmanın üretim şekliyle değiştirilebilir. Plazmanın elektron sıcaklığı, elektron parçacık yoğunluğu ve elektron enerjisine göre sınıflandırması Görsel 2.4'te verildiği gibidir [2].



Görsel 2.4. Elektron sıcaklığı-elektron parçacık yoğunluğu-elektron enerjisi (plazma sınıflandırması)

Plazma içerisinde bulunan parçacıkların sıcaklığına göre sınıflandırılabilir. Sıcaklığına göre sınıflandırma yaparken plazma üç gruba ayrılır. Bunlar Toplam Termodinamik Denge olan plazmalar (TTD), Lokal Termodinamik Denge olan plazmalar (LTD) ve Lokal Termodinamik Denge olmayan plazmalar (non-LTD) olarak gruplandırılır [2].

Laboratuvar ortamında üretilen plazmalar, ileri teknoloji ve endüstride olmak üzere birçok alanda kullanılır. Bu alanlar, biyomedikal, kağıt endüstrisi, tekstil endüstrisi, yarı iletken teknolojisi gibi bir çok alanda kullanılır. Biyolojik dezenfeksiyon, ince film kaplama ve materyal yüzey işlemleri genellikle soğuk plazma kullanılır [2].

3. PLAZMA FİZİĞİNDEKİ MAXWELL-TİPİ DENKLEMLER

Tüm elektrik ve manyetik olayların temeli olarak kabul edilen dört tane denklemi James Clerk Maxwell' in (1831-1879) formüle etmesi nedeniyle Maxwell denklemi olarak bilinen bu denklemler, mekanik olayların tartışılmasında Newton kurallarının rolü ne ise, elektromanyetik olayların incelenmesinde benzer görevleri yaparlar. Maxwell tarafından geliştirilen teoriler, 1905'te Einstein' ın, özel rölativite teorisi ile uyum içinde olması gibi, Maxwell' in o zamanlarda kendisinin hayal ettiğinden bile daha ileri düzeyde sonuçlara götürmüştür [5].

3.1. Elektromanyetik Teoride Maxwell Denklemleri

Elektromanyetizmadaki Maxwell denklemleri, elektrik ve manyetik alan yasalarını temsil etmektedir. Bununla beraber, bu denklemler daha başka önemli sonuçlara götürür. Bu denklemler, Maxwell' in ışık hızıyla hareket eden elektromanyetik dalgaların varlığının öngördüğünü gösterir. Ayrıca bu teori böyle dalgaların, ivmeli yükler tarafından yayımlandığını söyler. Fiziksel açıdan tartışmanın daha basit olması için Maxwell denklemleri, herhangi bir dielektrik ve manyetik malzemenin olmadığı ortamda, yani serbest uzaya uygulandığı biçimde gösterilmiştir [5].

3.1.1. Elektrik alan için Gauss yasası

Bu yasa, herhangi kapalı bir yüzeyden geçen toplam elektrik akısının bu yüzey içindeki net yükün ϵ_0 ' a bölümüne eşit olduğunu ifade eder. Diğer bir ifade ile elektrik alanını, bu elektrik alanını meydana getiren yük dağılımına bağlar. Bu yasanın integral formu

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.1a)$$

şeklinde ifade edilirken, diferansiyel formu ise

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.1b)$$

biçiminde verilir. Gauss yasası, elektrik alan çizgilerinin bir noktada başlayıp başka bir noktada sonlanacağını ifade eder [5].

3.1.2. Manyetik alan için Gauss yasası

Manyetizma için olan Gauss yasası kapalı bir yüzeyden geçen net manyetik akının sıfır olduğunu ifade eder. Yani, kapalı bir hacime giren manyetik alan çizgilerinin sayısı, bu hacmi terk edenlerin sayısına eşittir. Bu, manyetik alan çizgilerinin herhangi bir noktada başlamayacağını veya sona eremeyeceğini düşündürür. Bu durum gerçekleşseydi, o noktalarda yalıtılmış manyetik tek kutupların var olduğu anlaşılacaktı. Doğada yalıtılmış manyetik tek kutupların gözlenememesi gerçeği manyetik alan için Gauss yasasının doğrulaması olarak dikkate alınabilir. Bu yasanın integral formu

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (3.2a)$$

şeklinde ifade edilirken, diferansiyel formu ise

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2b)$$

biçiminde verilir [5].

3.1.3. Faraday yasası

Değişen bir manyetik akının oluşturduğu elektrik alanını tanımlayan Faraday'ın indüksiyon yasasıdır. Bu yasa, herhangi bir kapalı yol boyunca elektrik alanın çizgi integrali olan emk' nın bu kapalı yol boyunca sınırlanan herhangi bir yüzey alanından geçen manyetik akının zamanla değişim hızına eşit olduğunu vurgular. Faraday yasasının bir sonucu, zamanla değişen bir manyetik alan içine yerleştirilen iletken halkada bir akım oluşmasıdır. Buradaki negatiflik indüklenen gerilimin yönünü verir. Lenz yasasında indüklenen akım veya gerilim kendisini meydana getiren indüklenmedeki değişimin zıt yönünde olmalıdır. Bu yasanın integral formu

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (3.3a)$$

şeklinde ifade edilirken, diferansiyel formu ise

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.3b)$$

biçiminde verilir [5].

3.1.4. Ampere–Maxwell yasası

Genellikle Ampere-Maxwell yasası olarak bilinen denklem, Ampere yasasının genelleştirilmiş biçimidir. Bu yasa, değişen elektrik alanı ve elektrik akımları tarafından oluşturulan manyetik alanı tanımlar. Herhangi bir kapalı bir yol boyunca manyetik alanın çizgi integrali, bu kapalı yol içinden geçen, akımın, μ_0 ile çarpımının, bu kapalı yol boyunca sınırlanmış herhangi bir yüzeyden geçen elektrik akısının değişim hızının, $\varepsilon_0\mu_0$ ile çarpımının toplamına eşittir. Bu yasanın integral formu

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (3.4a)$$

şeklinde ifade edilirken, diferansiyel formu ise

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \quad (3.4b)$$

biçiminde verilir [5].

3.2. Akışkanlar Mekaniğinin Maxwell-Tipi Denklemleri

Bölümün başında bahsedilen Maxwell denklemlerinden yararlanılarak akışkanlar mekaniğinin temel denklemlerini de bu denklemlere benzer şekilde yazmak mümkündür. Akışkanlar mekaniğinde:

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla h_\alpha + a^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha = 0 \quad (3.5)$$

ve

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}_\alpha = -\nabla h_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} [\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}] \quad (3.6)$$

olmak üzere iki temel denklem vardır. Buradaki Denklem (3.5),

$$\left(1/\rho_{m,\alpha}\right) \nabla p_\alpha = \nabla h_\alpha = \left(a^2/\rho_{m,\alpha}\right) \nabla \rho_{m,\alpha}$$

termodinamik bağıntılarla yerine koyulmuş süreklilik denklemidir ve denklem (3.6) mevcut Lorentz kuvveti ile tipik momentum denklemidir. Burada h_α , a ve $\mathbf{u}_\alpha$ entalpi, ses hızı ve hızdır, ve e_α/m_α yük türlerinin kütleyle oranıdır. $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$ elektromanyetik alan nicelikleridir. Denklemlerin entropi ve Maxwell denklemlerinin korunumu ile daha da desteklenmesi gerekir [14].

Sıkıştırılabilir akışkan için türevin ardından, akışkan denklemlerini bir dizi Maxwell denkleminde yeniden biçimlendirilebilir. Denklem (3.6) yı Lorentz kuvveti olmadan ele aldığında bu denklemi doğrusal olmayan terim için çözebilir.

$$\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}_\alpha = -\nabla h_\alpha - \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} \quad (3.7)$$

Dikkat edilirse bu yeni denklem, elektromanyetik teorideki elektrik alan ile skaler ve vektörel potansiyelleri arasındaki

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.8)$$

ile verilen ilişkiye eşdeğerdir. Açıkça denklem (3.7)'de $\mathbf{u}_\alpha$ ve h_α sırasıyla akışkanlar için vektör ve skaler potansiyel rolleri oynarken $\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}_\alpha$ akışkan için tanımlanan bir elektrik alanına benzer rol üstlenir [14]. Benzer şekilde vortisitenin ($\boldsymbol{\omega}_\alpha$) rolünün ise $\mathbf{u}_\alpha$ ile $\boldsymbol{\omega}_\alpha = \nabla \times \mathbf{u}_\alpha$ şeklindeki ilişkisinden dolayı akışkanların manyetik alanı olduğu söylenebilir.

Akışkanların Maxwell-tipi denklemlerini elde edebilmek, Gauss, Faraday ve Ampere yasalarına erişebilmek için denklem (3.7) 'ün diverjans, rotasyonel ve zaman türevleri alınır. Ampère yasasında, entalpinin yer-zaman türevini denklem (3.5)'de süreklilik denklemini kullanarak ortadan kaldırdıktan sonra vektörel özdeşlikler yardımıyla,

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega}_\alpha = \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_\alpha = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) - \nabla^2 \mathbf{u}_\alpha \quad (3.9)$$

eşitliği yazılabilir. Son Maxwell denklemini ise vortisitenin ($\boldsymbol{\omega}_\alpha$) diverjansının yok olması ile ortaya çıkmaktadır. Bu sonuçlar akışkanları tanımlayan aşağıdaki Maxwell denklemleri sonucunu verir [14].

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta}_\alpha = \rho_{f,\alpha} \quad (3.10a)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_\alpha = 0 \quad (3.10b)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_\alpha}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{\zeta}_\alpha = 0 \quad (3.10c)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}_\alpha}{\partial t} - a^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega}_\alpha + \mathbf{j}_{f,\alpha} = 0 \quad (3.10d)$$

Burada $\boldsymbol{\zeta}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}_\alpha$ dır. Kaynak terimleri $\rho_{f,\alpha}$ ve $\mathbf{j}_{f,\alpha}$ aşağıdaki terimleri içerir,

$$\rho_{f,\alpha} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) - \nabla^2 h_\alpha \quad (3.11)$$

$$\mathbf{j}_{f,\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_\alpha}{\partial t^2} - \nabla(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla h_\alpha) - a^2 \nabla^2 \mathbf{u}_\alpha. \quad (3.12)$$

Bunların ayrıca aşağıdaki korunum denklemini sağladığı da söylenebilir,

$$\frac{\partial \rho_{f,\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{f,\alpha} = 0. \quad (3.13)$$

3.3. Plazma Fiziğinin Maxwell-Tipi Denklemleri

Plazma fiziğinin Maxwell-tipi denklemlerini elde edebilmek için, $\boldsymbol{\zeta}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}_\alpha$ ve vortisite $\boldsymbol{\omega}_\alpha$ yeni dinamik değişkenler olarak seçilir. Spesifik bir plazma örneği için, vektör ve skaler potansiyelleri kullanılarak tek bir türe ait momentum denkleminin formu [14,15],

$$\boldsymbol{\zeta}_\alpha = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{u}_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{A} \right] - \nabla \left[h_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \phi \right] - \mathbf{u}_\alpha \times \left(\nabla \times \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{A} \right) \quad (3.14)$$

haline gelir. Burada $k_\alpha = (1/2) \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha$ olmak üzere $\boldsymbol{\zeta}_\alpha = \boldsymbol{\omega}_\alpha \times \mathbf{u}_\alpha + \nabla k_\alpha$ vektör özdeşliği uygulanarak,

$$\left(\boldsymbol{\omega}_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{B} \right) \times \mathbf{u}_\alpha = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{u}_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{A} \right] - \nabla \left[h_\alpha + k_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \phi \right] \quad (3.15)$$

eşitliği yazılabilir. Kanonik momentum $\mathbf{P}_\alpha = m_\alpha \mathbf{u}_\alpha + e_\alpha \mathbf{A}$ şeklinde tanımlandığında genelleştirilmiş vortisite kanonik momentumun rotasyoneli olacaktır:

$$\boldsymbol{\Omega}_\alpha = \nabla \times \mathbf{P}_\alpha = m_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha + e_\alpha \mathbf{B} \quad (3.16)$$

Ayrıca türlerin toplam enerjisi

$$\epsilon_\alpha = m_\alpha \left(h_\alpha + k_\alpha + \left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right) \phi \right) \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\boldsymbol{\Omega}_\alpha \times \mathbf{u}_\alpha = -\frac{\partial \mathbf{P}_\alpha}{\partial t} - \nabla \epsilon_\alpha \quad (3.18)$$

denklemini yazılabilir. Plazmanın Maxwell-tipi denklemlerini belirlemek Gauss, Faraday ve Ampere yasalarına ulaşmak için denklem (3.18) in sırasıyla diverjans, rotasyonel ve zamana göre türevi alınır. Maxwell denklemleri formuyla eşleşmeyen tüm terimler sağa

taşınır ve bir kaynak terimi katkısı olarak kabul edilir. Gauss ve Faraday yasaları daha açıktır [14,15],

$$\nabla \cdot (\mathbf{\Omega}_\alpha \times \mathbf{u}_\alpha) = \rho_{p,\alpha} = -\nabla^2 \epsilon_\alpha - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{P}_\alpha \quad (3.19)$$

$$= -\nabla^2 (m_\alpha h_\alpha + m_\alpha k_\alpha) - m_\alpha \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \frac{e_\alpha}{\epsilon_0} \rho_{e,\alpha} . \quad (3.20)$$

Ampere yasası daha çok karışıktır fakat denklem (3.10d) 'ye benzer şekilde ifade edilebilir. Bunun için,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{\Omega}_\alpha \times \mathbf{u}_\alpha) + \mathbf{j}_{p,\alpha} = a^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega}_\alpha + c^2 \nabla \times \mathbf{B} \quad (3.21)$$

denklemini yazılabilir. Burada,

$$\mathbf{j}_{p,\alpha} = m_\alpha \left[\nabla \frac{\partial k_\alpha}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_\alpha}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \mathbf{u}_\alpha \right) - \nabla (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla h_\alpha) \right] + \frac{e_\alpha}{\epsilon_0} \mathbf{j}_{e,\alpha} \quad (3.22)$$

şeklinde verilmiştir. Son Maxwell denklemi, genelleştirilmiş vortisitenin diverjansının her zaman sıfır olması gerektiğini kabul ederek modellenmiştir. Böylece, plazma için aşağıdaki Maxwell denklemleri yazılabilir [14]:

$$\nabla \cdot (\mathbf{\Omega}_\alpha \times \mathbf{u}_\alpha) = \rho_{p,\alpha} \quad (3.23a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{\Omega}_\alpha = 0 \quad (3.23b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}_\alpha}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{\Omega}_\alpha \times \mathbf{u}_\alpha) = 0 \quad (3.23c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{\Omega}_\alpha \times \mathbf{u}_\alpha) + \mathbf{j}_{p,\alpha} = a^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega}_\alpha + c^2 \nabla \times \mathbf{B} \quad (3.23d)$$

Bu denklemler, çok akışkan plazma denklemlerini türetmek için bir yapı olarak kullanılabilir.

Thompson ve Moeller, çok akışkanlı ve klasik elektromanyetizma arasındaki tam benzerliği oluşturmak için bu sonuçları genişlettiler [15]. Bu amaçla, denklem (3.23d)'nin her iki tarafına $u_\alpha^2 \nabla \times \mathbf{\Omega}_\alpha$ terimi eklenirse,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{\Omega}_\alpha \times \mathbf{u}_\alpha) + \mathbf{j}_{p,\alpha} + u_\alpha^2 \nabla \times \mathbf{\Omega}_\alpha = a^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega}_\alpha + c^2 \nabla \times \mathbf{B} + u_\alpha^2 \nabla \times \mathbf{\Omega}_\alpha, \quad (3.24)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{\Omega}_\alpha \times \mathbf{u}_\alpha) + J_{p,\alpha} = u_\alpha^2 \nabla \times \mathbf{\Omega}_\alpha, \quad (3.25)$$

ifadesi elde edilir. Burada $J_{p,\alpha}$ genelleştirilmiş plazma akım yoğunluğudur,

$$\mathbf{J}_\alpha = \mathbf{j}_{p,\alpha} + (u_\alpha^2 - a^2) \nabla \times \mathbf{\Omega}_\alpha + (u_\alpha^2 - c^2) \nabla \times \mathbf{B}. \quad (3.26)$$

Son olarak genelleştirilmiş Lamb vektörü,

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha = \mathbf{\Omega}_\alpha \times \mathbf{u}_\alpha$$

denklemleri birleştirmek için tanımlanırsa, çok akışkan plazma için Maxwell-tipi denklemleri tanımlanabilir:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha = \rho_{p,\alpha} \quad (3.27a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{\Omega}_\alpha = 0 \quad (3.27b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}_\alpha}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{\xi}_\alpha = 0 \quad (3.27c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\xi}_\alpha + \mathbf{J}_\alpha = u_\alpha^2 \nabla \times \mathbf{\Omega}_\alpha. \quad (3.27d)$$

4. OKTONİON CEBRİ

Oktonionların en büyük özelliği hem sıra değişimli hem de birleşimli olmayan yapılara sahip olmalarıdır. Oktonionlar iki kuaternion birleşimi şeklinde ifade edildiğinden ikili cebirlerden biridir. Sistemin yapısına göre reel, kompleks ve hiperbolik olmak üzere çeşitli tanımlamalara ve temsillere sahiptir. Oktonionlar birleşimli olmadıklarından Clifford cebirlerine dahil edilmezler ve matris gösterimleri mevcut değildir [62,65].

4.1. Reel Oktonionlar

4.1.1. Tanımlar

Reel oktonion, sekiz reel bileşenden oluşan hiper-kompleks bir sayı sistemi olarak tanımlanabilir. Bir $\mathbf{A}$ oktonionu,

$$\mathbf{A} = \sum_{n=0}^7 a_n \mathbf{e}_n = a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4 + a_5 \mathbf{e}_5 + a_6 \mathbf{e}_6 + a_7 \mathbf{e}_7 \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada a_n terimleri oktonionun reel bileşenleri, $\mathbf{e}_n$ 'ler ise baz elemanlarıdır. Bu baz elemanlardan $\mathbf{e}_0$, 1'e eşit ($\mathbf{e}_0 = 1$) olup skaler ya da reel baz eleman olarak isimlendirilirken diğer $\mathbf{e}_n$ 'ler ise ($n = 1, 2, \dots, 7$) sanal baz elemanları olarak adlandırılır.

Bir $\mathbf{A}$ oktonionu skaler ve vektörel olmak üzere iki ayrı kısımdan oluşur. Oktonionun skaler kısmı,

$$S_{\mathbf{A}} = a_0 \mathbf{e}_0 \quad (4.2)$$

biçiminde tanımlanırken vektörel kısmı

$$V_{\mathbf{A}} = \mathbf{A} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4 + a_5 \mathbf{e}_5 + a_6 \mathbf{e}_6 + a_7 \mathbf{e}_7 \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanabilir. Böylece bir $\mathbf{A}$ oktonionu,

$$\mathbf{A} = S_{\mathbf{A}} + V_{\mathbf{A}} = a_0 \mathbf{e}_0 + \mathbf{A} \quad (4.4)$$

biçiminde skaler ve vektörel kısımlarla da ifade edilmektedir [62-65,69]. Dolayısıyla bir oktonionun skaler veya vektörel kısımlarının olup-olmaması onun yeniden yapılanmasına neden olur. Yani reel $\mathbf{A}$ oktonionunun vektörel kısmı yoksa onun bir skaler oktonion olduğu,

$$\mathbf{A} = S_A = a_0 \quad (4.5)$$

tersi durumda bu kez eğer reel $\mathbf{A}$ oktonionunun skaler kısmı bulunmuyorsa onun vektör oktonion olduğu,

$$\mathbf{A} = V_A = A \quad (4.6)$$

söylenebilir.

4.1.2. Temel işlemler

4.1.2.1. Eşitlik

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ gibi herhangi iki reel oktonionun birbirine eşit olabilmesi için aynı baz elemanlara ait karşılıklı bileşenlerinin tamamının birbirine eşit olması gerekmektedir. Diğer bir ifadeyle;

$$\mathbf{A} = a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4 + a_5 \mathbf{e}_5 + a_6 \mathbf{e}_6 + a_7 \mathbf{e}_7 \quad (4.7)$$

ve

$$\mathbf{B} = b_0 \mathbf{e}_0 + b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 + b_4 \mathbf{e}_4 + b_5 \mathbf{e}_5 + b_6 \mathbf{e}_6 + b_7 \mathbf{e}_7 \quad (4.8)$$

olarak verilen iki reel oktonion için,

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 = b_4, a_5 = b_5, a_6 = b_6, a_7 = b_7 \quad (4.9)$$

koşulları sağlanıyorsa, bu iki oktonion birbirine eşittir.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (4.10)$$

4.1.2.2. Toplama ve çıkarma

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ reel oktonionlarının toplam ve farkı,

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \sum_{n=0}^7 a_n \mathbf{e}_n \pm \sum_{n=0}^7 b_n \mathbf{e}_n$$

olup

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = & (a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4 + a_5 \mathbf{e}_5 + a_6 \mathbf{e}_6 + a_7 \mathbf{e}_7) \pm \\ & (b_0 \mathbf{e}_0 + b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 + b_4 \mathbf{e}_4 + b_5 \mathbf{e}_5 + b_6 \mathbf{e}_6 + b_7 \mathbf{e}_7) \end{aligned} \quad (4.11)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklem, oktonionun aynı bazları altında yeniden düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \pm \mathbf{B} &= \sum_{n=0}^7 (a_n \pm b_n) \mathbf{e}_n \\
&= (a_0 \pm b_0) \mathbf{e}_0 + (a_1 \pm b_1) \mathbf{e}_1 + (a_2 \pm b_2) \mathbf{e}_2 + (a_3 \pm b_3) \mathbf{e}_3 + (a_4 \pm b_4) \mathbf{e}_4 \\
&\quad + (a_5 \pm b_5) \mathbf{e}_5 + (a_6 \pm b_6) \mathbf{e}_6 + (a_7 \pm b_7) \mathbf{e}_7 \quad (4.12)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. İki oktonionun toplam ya da farkları reel oktonionun skaler ve vektörel kısımları kullanılarak da gösterilebilir:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (S_A \pm S_B) + (V_A \pm V_B) = (a_0 \pm b_0) \mathbf{e}_0 + (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \quad (4.13)$$

4.1.2.3. Skaler ile çarpma

λ reel bir skaler olmak üzere, λ ile reel bir $\mathbf{A}$ oktonionun çarpımı,

$$\begin{aligned}
\lambda \mathbf{A} &= \lambda(S_A + V_A) = \lambda(a_0 \mathbf{e}_0 + \mathbf{A}) = \lambda a_0 \mathbf{e}_0 + \lambda a_1 \mathbf{e}_1 + \lambda a_2 \mathbf{e}_2 + \lambda a_3 \mathbf{e}_3 + \lambda a_4 \mathbf{e}_4 + \\
&\quad \lambda a_5 \mathbf{e}_5 + \lambda a_6 \mathbf{e}_6 + \lambda a_7 \mathbf{e}_7 \quad (4.14)
\end{aligned}$$

ile tanımlanmaktadır ve sonuç, ise λ skaler değeriyle orantılı reel bir oktoniondur.

4.1.2.4. Reel oktonionların çarpımı

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ gibi iki reel oktonionun toplam ve farkları, baz elemanlardaki reel bileşenleri toplayarak veya çıkararak elde edilmektedir. Ancak, iki oktonionun çarpımı oktonionlara ait tüm terimlerin birbirleriyle çarpılarak ardından toplanmasıyla hesaplanmaktadır.

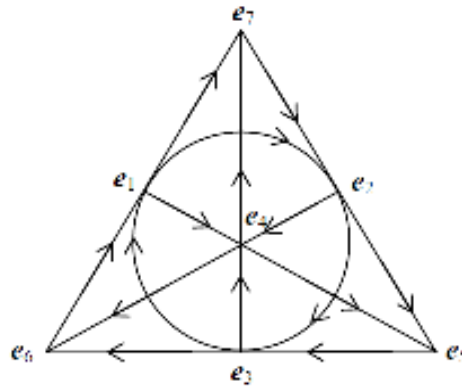
İki reel oktonionun çarpımı, oktonionlara ait baz elemanlarının çarpımlarının tanımlanmasından sonra çarpım işlemi yapılması gerekmektedir. Çünkü oktonionlar hem sıra değişimli hem de birleşimli olmayan özellik göstermektedir. Cayley sayıları olarak da bilinen oktonionlar için, hem Cayley hem de Dickson'ın birbirinden bağımsız olarak elde ettikleri ve isimleriyle belirtilen Cayley-Dickson yöntemi sıklıkla kullanılan çarpım kurallarından biridir [62].

Oktonion bazları arasındaki Cayley-Dickson çarpım kuralları aşağıdaki Çizelge 4.1'de gibi verilmektedir [68-70]:

Çizelge 4.1. Oktonion bazları için Cayley-Dickson çarpım kuralları [68-70]

$\begin{array}{c} \text{II} \\ \text{I} \end{array} \backslash$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	$-e_2$	$-e_3$
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Bu tablodaki çarpım kuralı, I sütunundaki baz elemanları ile II satırında bulunan baz elemanının kesiştiği noktadaki elemanı bulmak olarak özetlenebilir. Cayley-Dickson yöntemiyle çarpım kuralının farklı bir gösterimi ise baz elemanlarının Fano düzlemiyle verilen şeklidir. Bu durum Şekil 4.1’de verilmiştir:



Şekil 4.1. Cayley-Dickson çarpım kurallarının Fano düzlemindeki çevrimi [69]

Böylece oktonionların baz elemanları arasındaki çarpım kuralları, hem denklemlerle, hem tabloyla hem de Fano düzlemiyle ifade edilmektedir. Bu 3 tip içinde sonuçlar birbirleriyle aynıdır. Denklemlerde verilen kurallar, oktonionların çarpımı için tek bir kural olmadığı ortaya çıkmaktadır. Yukarıda tanımlanan Cayley-Dickson çarpım kuralı literatürde bulunan 480 çarpım kuralından sadece birini oluşturmaktadır. Diğer

arpım kuralları, skaler olmayan baz elemanların farklı kombinasyonlarından meydana gelmektedir [62].

A ve **B** gibi iki reel oktonionun çarpımı,

$$\mathbf{AB} = (a_0\mathbf{e}_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_4 + a_5\mathbf{e}_5 + a_6\mathbf{e}_6 + a_7\mathbf{e}_7) (b_0\mathbf{e}_0 + b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 + b_4\mathbf{e}_4 + b_5\mathbf{e}_5 + b_6\mathbf{e}_6 + b_7\mathbf{e}_7) \quad (4.15)$$

olmaktadır. arpım kuralları kullanarak bu çarpım aık olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{e}_1 + a_0b_2\mathbf{e}_2 + a_0b_3\mathbf{e}_3 + a_0b_4\mathbf{e}_4 + a_0b_5\mathbf{e}_5 + a_0b_6\mathbf{e}_6 + a_0b_7\mathbf{e}_7 + \\ & a_1b_0\mathbf{e}_1 - a_1b_1 + a_1b_2\mathbf{e}_3 - a_1b_3\mathbf{e}_2 + a_1b_4\mathbf{e}_5 - a_1b_5\mathbf{e}_4 - a_1b_6\mathbf{e}_7 + a_1b_7\mathbf{e}_6 + \\ & a_2b_0\mathbf{e}_2 - a_2b_1\mathbf{e}_3 - a_2b_2 + a_2b_3\mathbf{e}_1 + a_2b_4\mathbf{e}_6 + a_2b_5\mathbf{e}_7 - a_2b_6\mathbf{e}_4 - a_2b_7\mathbf{e}_5 + \\ & a_3b_0\mathbf{e}_3 + a_3b_1\mathbf{e}_2 - a_3b_2\mathbf{e}_1 - a_3b_3 + a_3b_4\mathbf{e}_7 - a_3b_5\mathbf{e}_6 + a_3b_6\mathbf{e}_5 - a_3b_7\mathbf{e}_4 + \\ & a_4b_0\mathbf{e}_4 - a_4b_1\mathbf{e}_5 - a_4b_2\mathbf{e}_6 - a_4b_3\mathbf{e}_7 - a_4b_4 + a_4b_5\mathbf{e}_1 + a_4b_6\mathbf{e}_2 + a_4b_7\mathbf{e}_3 + \\ & a_5b_0\mathbf{e}_5 + a_5b_1\mathbf{e}_4 - a_5b_2\mathbf{e}_7 + a_5b_3\mathbf{e}_6 - a_5b_4\mathbf{e}_1 - a_5b_5 - a_5b_6\mathbf{e}_3 + a_5b_7\mathbf{e}_2 + \\ & a_6b_0\mathbf{e}_6 + a_6b_1\mathbf{e}_7 + a_6b_2\mathbf{e}_4 - a_6b_3\mathbf{e}_5 - a_6b_4\mathbf{e}_2 + a_6b_5\mathbf{e}_3 - a_6b_6 - a_6b_7\mathbf{e}_1 + \\ & a_7b_0\mathbf{e}_7 - a_7b_1\mathbf{e}_6 + a_7b_2\mathbf{e}_5 + a_7b_3\mathbf{e}_4 - a_7b_4\mathbf{e}_3 - a_7b_5\mathbf{e}_2 + a_7b_6\mathbf{e}_1 - a_7b_7 \end{aligned} \quad (4.16)$$

yazılabilir. Bu ifade,

$$\mathbf{AB} = a_0b_0 + a_0\mathbf{B} + b_0\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (4.17)$$

eklinde daha sade bir biçiminde elde edilmektedir[62,68-70]. **A** ve **B** gibi iki reel oktonionun çarpımıyla ilgili olan (4.16) ifadesinde, skaler kısımlardan bağımsız oktonionların vektörel arpımına ilişkin sonuçlar aynı bazlar altında toplandığında aağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = & \mathbf{e}_1(a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_5 - a_5b_4 - a_6b_7 + a_7b_6) + \mathbf{e}_2(a_0b_2 + \\ & a_2b_0 - a_1b_3 + a_3b_1 + a_4b_6 - a_6b_4 + a_5b_7 - a_7b_5) + \mathbf{e}_3(a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - \\ & a_2b_1 + a_4b_7 - a_5b_6 + a_6b_5 - a_7b_4) + \mathbf{e}_4(a_0b_4 + a_4b_0 - a_1b_5 - a_2b_6 - a_3b_7 + \\ & a_5b_1 + a_6b_2 + a_7b_3) + \mathbf{e}_5(a_0b_5 + a_5b_0 + a_1b_4 - a_2b_7 + a_3b_6 - a_4b_1 - a_6b_3 + \\ & a_7b_2) + \mathbf{e}_6(a_0b_6 + a_6b_0 + a_1b_7 + a_2b_4 - a_3b_5 - a_4b_2 + a_5b_3 - a_7b_1) + \mathbf{e}_7(a_0b_7 + \\ & a_7b_0 - a_1b_6 + a_2b_5 + a_3b_4 - a_4b_3 - a_5b_2 + a_6b_1) \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.1.2.5. Reel oktonionların eşleniği

Reel $\mathbf{A}$ oktonionunun oktonionik eşleniği, sanal baz elemanlarının işaretinin değişmesiyle ya da diğer bir ifadeyle oktonionun vektörel kısmının işaretinin değişmesiyle elde edilmektedir [62].

$$\mathbf{A}^* = S_{\mathbf{A}} - V_{\mathbf{A}} = a_0 \mathbf{e}_0 - \mathbf{A} \quad (4.19)$$

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ gibi iki reel oktonion için bazı eşlenik özellikleri aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}, \quad (4.20)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*, \quad (4.21)$$

$$(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^* \quad (4.22)$$

Oktonionik eşleniğin tanımından yola çıkarak, reel $\mathbf{A}$ oktonionunun reel ve sanal kısımları için sırasıyla şu tanımlamalar yapılabilir [62,64-67]:

$$S_{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^*}{2} = a_0 \mathbf{e}_0 \quad (4.23)$$

$$V_{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^*}{2} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4 + a_5 \mathbf{e}_5 + a_6 \mathbf{e}_6 + a_7 \mathbf{e}_7 \quad (4.24)$$

4.1.2.6. Reel oktonionların skaler çarpımı

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ oktonionlarının skaler çarpımı,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}^* \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}^*] = \frac{1}{2} [\mathbf{A}^* \mathbf{B} + \mathbf{B}^* \mathbf{A}] \quad (4.25)$$

olarak verilmektedir [66,69]. Bu iki oktonionu sadece vektörel kısımlarından oluşmasıyla elde edilen reel vektör oktonionun skaler çarpımı ise,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{2} [\mathbf{AB} + (\mathbf{AB})^*] \quad (4.26)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

4.1.2.7. Reel oktonionların vektörel çarpımı

İki reel oktonionun skaler çarpımına benzer olarak, oktonionlarının vektörel çarpımı literatürde,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2} [\mathbf{A}^* \mathbf{B} - \mathbf{B}^* \mathbf{A}] \quad (4.27)$$

olarak verilmektedir [66,69]. Yalnızca vektörel kısımları olan iki reel vektör oktonionun skaler çarpımı,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \frac{1}{2}[\mathbf{AB} - (\mathbf{AB})^*] \quad (4.28)$$

biçiminde tanımlanmaktadır [68-70].

4.1.2.8. Reel oktonionların normu

Reel oktonionların norm işlemi, oktonionun kendisi ile eşleniğinin oktonion çarpımıyla elde edilmektedir. Bir $\mathbf{A}$ oktonionunun normu $N(\mathbf{A})$ ile gösterilir ve norm işleminin sonucu reel bir sayıyı vermektedir.

$$N(\mathbf{A}) = \mathbf{AA}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 = \sum_{n=0}^7 a_n^2 \quad (4.29)$$

Tek bir $\mathbf{A}$ oktonionuyla norm işlemi yapılabildiği gibi, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ gibi iki reel oktonion için de norm işlemi tanımlanmaktadır. $N(\mathbf{AB})$ ile ifade edilen iki oktonionun çarpımının normu, her bir oktonionun normlarının çarpımlarıyla verilmektedir [62]:

$$N(\mathbf{AB}) = N(\mathbf{A})N(\mathbf{B}) \quad (4.30)$$

4.1.2.9. Ters eleman

Oktonionların alternatif bir bölüm cebri oluşturmalarından dolayı, $\mathbf{A}$ reel oktonionunun tersinin varlığı söz konusudur. Oktonionlar için ters eleman işlemi,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{N(\mathbf{A})} \quad (4.31)$$

ifadesiyle tanımlanmaktadır. Bir oktonionun ters elemanının tanımlanabilmesi için $\mathbf{A}$ reel oktonionunun ve bu oktonionun normunun sıfırdan farklı olması gerekmektedir [62].

4.2. Kompleks Oktonionlar

4.2.1. Tanımlar

Kompleks oktonionlar, reel oktonionların kompleks formunu ifade etmektedir. İki reel oktonion ve bu iki reel oktoniondan birine $i^2 = -1$ şartını sağlayan “ i ” sanal birimin eklenmesi kombinasyonu ile oluşurlar. Böylece, 8-bileşenli reel oktonionlardan birine eklenen sanal birim sayesinde toplam bileşen sayısı 16’ya ulaşmaktadır [62].

Kompleks bir oktonion, $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ gibi iki reel oktonionun birleşmesinden oluşur ve kompleks bir oktonion,

$$\mathfrak{A} = \mathbf{A} + i\mathbf{A}' \quad (4.32)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Bu ifade,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = & (a_0\mathbf{e}_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_4 + a_5\mathbf{e}_5 + a_6\mathbf{e}_6 + a_7\mathbf{e}_7) \\ & + i(a'_0\mathbf{e}_0 + a'_1\mathbf{e}_1 + a'_2\mathbf{e}_2 + a'_3\mathbf{e}_3 + a'_4\mathbf{e}_4 + a'_5\mathbf{e}_5 + a'_6\mathbf{e}_6 + a'_7\mathbf{e}_7) \end{aligned} \quad (4.33)$$

ve

$$\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^7 (a_n + ia'_n)\mathbf{e}_n = (a_0 + ia'_0)\mathbf{e}_0 + (a_1 + ia'_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + ia'_2)\mathbf{e}_2 + (a_3 + ia'_3)\mathbf{e}_3 + (a_4 + ia'_4)\mathbf{e}_4 + (a_5 + ia'_5)\mathbf{e}_5 + (a_6 + ia'_6)\mathbf{e}_6 + (a_7 + ia'_7)\mathbf{e}_7 \quad (4.34)$$

şeklinde yazılmaktadır. Son denklemde aynı baz elemanlar altında yazılan oktonion bileşenleri kompleks sayılardan oluşmaktadır. Yeni oluşan kompleks bileşenler $\mathcal{A}_n$ sembolüyle gösterilerek $\mathfrak{A}$ kompleks oktonionu daha sade biçimde,

$$\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^7 \mathcal{A}_n \mathbf{e}_n = \mathcal{A}_0 \mathbf{e}_0 + \mathcal{A}_1 \mathbf{e}_1 + \mathcal{A}_2 \mathbf{e}_2 + \mathcal{A}_3 \mathbf{e}_3 + \mathcal{A}_4 \mathbf{e}_4 + \mathcal{A}_5 \mathbf{e}_5 + \mathcal{A}_6 \mathbf{e}_6 + \mathcal{A}_7 \mathbf{e}_7 \quad (4.35)$$

olarak yazılabilmektedir. Kompleks oktonionlar da reel oktonionlardaki gibi skaler ve vektörel kısımlardan oluşmaktadır. Kompleks skaler ve vektör oktonionlar sırasıyla,

$$S_{\mathfrak{A}} = (a_0 + ia'_0)\mathbf{e}_0 = \mathcal{A}_0 \mathbf{e}_0 \quad (4.36)$$

ve

$$V_{\mathfrak{A}} = \sum_{n=1}^7 (a_n + ia'_n)\mathbf{e}_n = (a_1 + ia'_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + ia'_2)\mathbf{e}_2 + (a_3 + ia'_3)\mathbf{e}_3 + (a_4 + ia'_4)\mathbf{e}_4 + (a_5 + ia'_5)\mathbf{e}_5 + (a_6 + ia'_6)\mathbf{e}_6 + (a_7 + ia'_7)\mathbf{e}_7 \quad (4.37)$$

$$V_{\mathfrak{A}} = \sum_{n=1}^7 \mathcal{A}_n \mathbf{e}_n = \mathcal{A}_1 \mathbf{e}_1 + \mathcal{A}_2 \mathbf{e}_2 + \mathcal{A}_3 \mathbf{e}_3 + \mathcal{A}_4 \mathbf{e}_4 + \mathcal{A}_5 \mathbf{e}_5 + \mathcal{A}_6 \mathbf{e}_6 + \mathcal{A}_7 \mathbf{e}_7$$

şeklinde ayrı ayrı ifade edilebilir. Sonuç olarak, $\mathfrak{A}$ kompleks oktonionu,

$$\mathfrak{A} = S_{\mathfrak{A}} + V_{\mathfrak{A}} = \mathcal{A}_0 \mathbf{e}_0 + \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \mathbf{e}_0 + \mathcal{A}_1 \mathbf{e}_1 + \mathcal{A}_2 \mathbf{e}_2 + \mathcal{A}_3 \mathbf{e}_3 + \mathcal{A}_4 \mathbf{e}_4 + \mathcal{A}_5 \mathbf{e}_5 + \mathcal{A}_6 \mathbf{e}_6 + \mathcal{A}_7 \mathbf{e}_7 \quad (4.38)$$

olarak yazılabilmekte ve elde edilen ifadenin önceki denklem ile aynı olduğu kolaylıkla görülmektedir [62].

Reel oktonionlarda olduğu gibi kompleks oktonionların da kompleks skaler, kompleks vektör ve kompleks sıfır oktonion olma durumları söz konusudur. Bir $\mathfrak{A}$ kompleks oktonionu sadece skaler kısımdan oluşuyorsa bu oktonion kompleks skaler oktonion,

$$\mathfrak{A} = S_{\mathfrak{A}} = \mathcal{A}_0, \quad (4.39)$$

sadece vektörel kısımdan oluşuyorsa bu oktonionun kompleks vektör oktonion,

$$\mathfrak{A} = V_{\mathfrak{A}} = \mathcal{A}, \quad (4.40)$$

olarak tanımlanır.

4.2.2. Temel işlemler

4.2.2.1. Eşitlik

$\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ gibi iki kompleks oktonionun birbirine eşit olabilmesi için aynı baz elemanlara karşılık gelen bileşenlerin her birinin birbirine eşit olması gerekmektedir. Dolayısıyla $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$,

$$\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^7 \mathcal{A}_n \mathbf{e}_n = \mathcal{A}_0 \mathbf{e}_0 + \mathcal{A}_1 \mathbf{e}_1 + \mathcal{A}_2 \mathbf{e}_2 + \mathcal{A}_3 \mathbf{e}_3 + \mathcal{A}_4 \mathbf{e}_4 + \mathcal{A}_5 \mathbf{e}_5 + \mathcal{A}_6 \mathbf{e}_6 + \mathcal{A}_7 \mathbf{e}_7 \quad (4.41)$$

ve

$$\mathfrak{B} = \sum_{n=0}^7 \mathcal{B}_n \mathbf{e}_n = \mathcal{B}_0 \mathbf{e}_0 + \mathcal{B}_1 \mathbf{e}_1 + \mathcal{B}_2 \mathbf{e}_2 + \mathcal{B}_3 \mathbf{e}_3 + \mathcal{B}_4 \mathbf{e}_4 + \mathcal{B}_5 \mathbf{e}_5 + \mathcal{B}_6 \mathbf{e}_6 + \mathcal{B}_7 \mathbf{e}_7 \quad (4.42)$$

olarak yazılan iki kompleks oktonion için,

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_0, \mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_1, \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_2, \mathcal{A}_3 = \mathcal{B}_3, \mathcal{A}_4 = \mathcal{B}_4, \mathcal{A}_5 = \mathcal{B}_5, \mathcal{A}_6 = \mathcal{B}_6, \mathcal{A}_7 = \mathcal{B}_7 \quad (4.43)$$

eşitlikleri yazılabiliyorsa, bu iki kompleks oktonionun birbirine eşit olduğu ortaya çıkmaktadır.

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \quad (4.44)$$

Ayrıca, $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ ile tanımlanan kompleks iki oktonionu oluşturan tüm kompleks bileşenler de,

$$a_n = b_n, \quad a'_n = b'_n \quad (4.45)$$

$n = (0,1,2, \dots, 7)$ şartını sağlamak üzere ayrı ayrı eşit olmak zorundadırlar [62].

4.2.2.2. Toplama ve çıkarma

İki kompleks oktonion üzerinde reel oktonionlarda uygulandığı gibi cebirsel olarak toplama ve çıkarma işlemi uygulanabilmektedir. $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ kompleks iki oktonionu belirtmek üzere toplam ve fark işlemleri,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \pm \mathfrak{B} &= \sum_{n=0}^7 ((a_n + ia'_n) \pm (b_n + ib'_n)) \mathbf{e}_n = \sum_{n=0}^7 (\mathcal{A}_n \pm \mathcal{B}_n) \mathbf{e}_n = (\mathcal{A}_0 \pm \mathcal{B}_0) \mathbf{e}_0 + \\ &(\mathcal{A}_1 \pm \mathcal{B}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathcal{A}_2 \pm \mathcal{B}_2) \mathbf{e}_2 + (\mathcal{A}_3 \pm \mathcal{B}_3) \mathbf{e}_3 + (\mathcal{A}_4 \pm \mathcal{B}_4) \mathbf{e}_4 + (\mathcal{A}_5 \pm \mathcal{B}_5) \mathbf{e}_5 + \\ &(\mathcal{A}_6 \pm \mathcal{B}_6) \mathbf{e}_6 + (\mathcal{A}_7 \pm \mathcal{B}_7) \mathbf{e}_7 \end{aligned} \quad (4.46)$$

ifadesiyle tanımlanmaktadır. Aynı zamanda bu işlem, iki kompleks oktonionun skaler ve vektörel kısımlarının toplam ve farkları cinsinden de yazılabilir [62]:

$$\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B} = (S_{\mathfrak{A}} + S_{\mathfrak{B}}) \pm (V_{\mathfrak{A}} + V_{\mathfrak{B}}) = (\mathcal{A}_0 \pm \mathcal{B}_0) \mathbf{e}_0 + (\mathcal{A} \pm \mathcal{B}). \quad (4.47)$$

4.2.2.3. Skaler ile çarpma

λ reel bir skaler olmak üzere $\mathfrak{A}$ şeklinde belirtilen kompleks bir oktonionun λ skaleri ile çarpımı,

$$\begin{aligned} \lambda \mathfrak{A} &= (\lambda a_0 + ia'_0) \mathbf{e}_0 + \lambda \sum_{n=1}^7 (a_n + ia'_n) \mathbf{e}_n = \lambda(a_0 + a'_0) \mathbf{e}_0 + \lambda(a_1 + a'_1) \mathbf{e}_1 + \\ &\lambda(a_2 + a'_2) \mathbf{e}_2 + \lambda(a_3 + a'_3) \mathbf{e}_3 + \lambda(a_4 + a'_4) \mathbf{e}_4 + \lambda(a_5 + a'_5) \mathbf{e}_5 + \lambda(a_6 + a'_6) \mathbf{e}_6 + \\ &\lambda(a_7 + a'_7) \mathbf{e}_7 \end{aligned} \quad (4.48)$$

veya

$$\begin{aligned} \lambda \mathfrak{A} &= \lambda(S_{\mathfrak{A}} + V_{\mathfrak{A}}) = \lambda(\mathcal{A}_0 \mathbf{e}_0 + \mathcal{A}) \\ &= \lambda \mathcal{A}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda \mathcal{A}_2 \mathbf{e}_2 + \lambda \mathcal{A}_3 \mathbf{e}_3 + \lambda \mathcal{A}_4 \mathbf{e}_4 + \lambda \mathcal{A}_5 \mathbf{e}_5 + \lambda \mathcal{A}_6 \mathbf{e}_6 + \lambda \mathcal{A}_7 \mathbf{e}_7 \end{aligned} \quad (4.49)$$

biçiminde gösterilebilir. Sonuç, yine λ reel skaleriyle orantılı bir kompleks oktoniondur [62].

4.2.2.4. Kompleks oktonionların çarpımı

$\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ kompleks iki oktonionu kompleks sayıları belirten $\mathcal{A}_n$ ve $\mathcal{B}_n$ ($n = 0,1,2, \dots, 7$) terimleriyle ifade edilebilmektedir. Kompleks iki oktonionun çarpımı baz elemanlarının çarpımlarının tanımlanmasıyla gerçekleşmektedir. Oktonionun tipi ne olursa olsun, başta hangi çarpım kuralı tanımlanırsa o yöntem geçerli olacaktır. Burada

kullanılan ise Cayley-Dickson çarpım kurallarıdır. Böylece $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ kompleks oktonionlarının çarpımı,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\mathcal{A}_0\mathbf{e}_0 + \mathcal{A}_1\mathbf{e}_1 + \mathcal{A}_2\mathbf{e}_2 + \mathcal{A}_3\mathbf{e}_3 + \mathcal{A}_4\mathbf{e}_4 + \mathcal{A}_5\mathbf{e}_5 + \mathcal{A}_6\mathbf{e}_6 + \mathcal{A}_7\mathbf{e}_7)(\mathcal{B}_0\mathbf{e}_0 + \mathcal{B}_1\mathbf{e}_1 + \mathcal{B}_2\mathbf{e}_2 + \mathcal{B}_3\mathbf{e}_3 + \mathcal{B}_4\mathbf{e}_4 + \mathcal{B}_5\mathbf{e}_5 + \mathcal{B}_6\mathbf{e}_6 + \mathcal{B}_7\mathbf{e}_7) \quad (4.50)$$

ifadesiyle belirtilerek, işlem yapıldığında çarpım sonucu,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathcal{A}_0\mathcal{B}_0 + \mathcal{A}_0\mathbf{B} + \mathcal{B}_0\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (4.51)$$

olarak elde edilmektedir.

4.2.2.5. Kompleks oktonionların eşleniği

Reel oktonionların tanımı yapılırken oktonionların sadece oktonionik eşleniği ya da konjugesinin varlığından söz edilmişti. Ancak kompleks oktonion cebirinde, reel oktonionlardan birine “ i ” sanal birimi eklenmesinden dolayı kompleks eşlenikten de bahsetmek gerekir. Şimdi kompleks oktonionların eşlenik özelliklerini kısaca tanımlanırsa:

a) Oktonionik eşlenik

$\mathfrak{A}$ ile ifade edilen ve 16 bileşenden oluşan kompleks bir oktonionunun oktonionik eşleniği, skaler kısmı dışında kalan tüm bazlarının işaretlerinin değişmesiyle gerçekleşir. Bu durum aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^* &= (a_0\mathbf{e}_0 - a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3 - a_4\mathbf{e}_4 - a_5\mathbf{e}_5 - a_6\mathbf{e}_6 - a_7\mathbf{e}_7) \\ &+ i(a'_0\mathbf{e}_0 - a'_1\mathbf{e}_1 - a'_2\mathbf{e}_2 - a'_3\mathbf{e}_3 - a'_4\mathbf{e}_4 - a'_5\mathbf{e}_5 - a'_6\mathbf{e}_6 - a'_7\mathbf{e}_7) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Bu denklem reel ve kompleks bileşenlerin aynı baz elemanlar altında toplanmasıyla

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^* &= (a_0 + ia'_0)\mathbf{e}_0 - (a_1 + ia'_1)\mathbf{e}_1 - (a_2 + ia'_2)\mathbf{e}_2 - (a_3 + ia'_3)\mathbf{e}_3 - (a_4 + ia'_4)\mathbf{e}_4 - \\ &-(a_5 + ia'_5)\mathbf{e}_5 - (a_6 + ia'_6)\mathbf{e}_6 - (a_7 + ia'_7)\mathbf{e}_7 \end{aligned} \quad (4.53)$$

şeklinde ve daha kısa biçimde,

$$\mathfrak{A}^* = \mathcal{A}_0\mathbf{e}_0 - \mathcal{A}_1\mathbf{e}_1 - \mathcal{A}_2\mathbf{e}_2 - \mathcal{A}_3\mathbf{e}_3 - \mathcal{A}_4\mathbf{e}_4 - \mathcal{A}_5\mathbf{e}_5 - \mathcal{A}_6\mathbf{e}_6 - \mathcal{A}_7\mathbf{e}_7 \quad (4.54)$$

veya

$$\mathfrak{A}^* = S_{\mathfrak{A}} - V_{\mathfrak{A}} = \mathcal{A}_0\mathbf{e}_0 - \mathbf{A} \quad (4.55)$$

olarak kompleks skaler ve vektör oktonionu cinsinden ifade edilmektedir. $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ gibi iki kompleks oktonion için oktonionik eşlenik işlemine ait bazı tanımlamalar ise aşağıda verilmektedir [62]:

$$(\mathfrak{A}^*)^* = \mathfrak{A} \quad (4.56)$$

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^* = \mathfrak{A}^* + \mathfrak{B}^*, \quad (4.57)$$

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^* = \mathfrak{B}^*\mathfrak{A}^* \quad (4.58)$$

b) Kompleks eşlenik

$\mathfrak{A}$ ile verilen kompleks oktonionun, kompleks birim elemanın varlığından dolayı kompleks eşleniği mevcuttur. Bu eşlenik ise $\mathfrak{A}$ kompleks oktonionunda “ i ” terimini içeren tüm elemanlarının işaret değiştirmesiyle elde edilmektedir:

$$\bar{\mathfrak{A}} = (a_0\mathbf{e}_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_4 + a_5\mathbf{e}_5 + a_6\mathbf{e}_6 + a_7\mathbf{e}_7) - i(a'_0\mathbf{e}_0 + a'_1\mathbf{e}_1 + a'_2\mathbf{e}_2 + a'_3\mathbf{e}_3 + a'_4\mathbf{e}_4 + a'_5\mathbf{e}_5 + a'_6\mathbf{e}_6 + a'_7\mathbf{e}_7) \quad (4.59)$$

Bu ifade daha basit hale getirilecek olursa,

$$\bar{\mathfrak{A}} = (a_0 - ia'_0)\mathbf{e}_0 + (a_1 - ia'_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 - ia'_2)\mathbf{e}_2 + (a_3 - ia'_3)\mathbf{e}_3 + (a_4 - ia'_4)\mathbf{e}_4 + (a_5 - ia'_5)\mathbf{e}_5 + (a_6 - ia'_6)\mathbf{e}_6 + (a_7 - ia'_7)\mathbf{e}_7 \quad (4.60)$$

eşitliği elde edilmiş olur. Kompleks eşlenik işlemi sonucunda bu ifadenin $\mathcal{A}_n$ terimleri altında değil de, farklı bir X_n kompleks terimi şeklinde yazılabileceği açıkça görülmektedir. Ayrıca kompleks eşlenik ifadesiyle bir veya iki kompleks oktonion için tıpkı oktonionik eşlenikte olduğu gibi bazı özellikler belirtilebilir [62]:

$$(\bar{\bar{\mathfrak{A}}}) = \mathfrak{A}, \quad (4.61)$$

$$(\overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}) = \bar{\mathfrak{A}} + \bar{\mathfrak{B}}, \quad (4.62)$$

$$(\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}) = \bar{\mathfrak{B}}\bar{\mathfrak{A}} \quad (4.63)$$

4.2.2.6. Kompleks oktonionların normu

Kompleks oktonionların normu, reel oktonionlara benzer olarak kompleks oktonionun kendisi ile oktonionik eşleniğinin oktonion çarpımıyla elde edilmektedir. Bir $\mathfrak{A}$ oktonionunun normu $N(\mathfrak{A})$ ile gösterilir ve norm işleminin sonucu yine reel bir sayıyı vermektedir.

$$N(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^*\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^7 \mathcal{A}_n^2 \quad (4.64)$$

Ancak, kompleks oktonionlarda ‘ i ’ sanal biriminin varlığından dolayı kompleks bileşenlerden oluşan kompleks oktonionun norm işleminin sonucu sıfıra eşit çıkabilir. Bu yüzden kompleks oktonionlar için reel oktonionlarda olduğu gibi ters işleminin varlığı ve bölüm cebirini sağlandığı söylenemez [65].

4.3. Hiperbolik Oktonionlar

Hiperbolik oktonionlar 16 boyutlu sedenionların alt cebiridir ve klasik oktonionlardan farklıdır [94,95]. Klasik oktonion yalnızca $e_n^2 = -1$ özelliğine sahip imajiner temel elemanlara sahip olsa da, hiperbolik oktonion temel elemanları $\varepsilon_n^2 = +1$ özelliğine sahip imajiner hiperbolik temel elemanları tarafından baz elemanlar olarak oluşturulmaz [98].

Öte yandan, klasik oktonionlara benzer şekilde bir hiperbolik oktonion $\mathbb{Q}$, aynı zamanda, gerçek elemanlardan oluşan sekiz boyutlu bir hiperkompleks sayısı olarak tanımlanabilir,

$$\mathbb{Q} = q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 \varepsilon_4 + q_5 \varepsilon_5 + q_6 \varepsilon_6 + q_7 \varepsilon_7 \quad (4.65)$$

Ayrıca, hem sıra değişimli hem de birleşimli olmayan cebirsel yapılara sahiptirler. Hiperbolik oktonion temel elemanlar için çarpım kuralları Çizelge 4.2’de ifade edilmiştir.

Çizelge 4.2. Hiperbolik oktonion bazlarının çarpım kuralı

$\begin{smallmatrix} \text{II} \\ \text{I} \end{smallmatrix}$	1	e_1	e_2	e_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7
1	1	e_1	e_2	e_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	ε_5	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_7$	ε_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	ε_6	ε_7	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	ε_7	$-\varepsilon_6$	ε_5	$-\varepsilon_4$
ε_4	ε_4	$-\varepsilon_5$	$-\varepsilon_6$	$-\varepsilon_7$	1	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$
ε_5	ε_5	ε_4	$-\varepsilon_7$	ε_6	e_1	1	e_3	$-e_2$
ε_6	ε_6	ε_7	ε_4	$-\varepsilon_5$	e_2	$-e_3$	1	e_1
ε_7	ε_7	$-\varepsilon_6$	ε_5	ε_4	e_3	e_2	$-e_1$	1

Bir hiperbolik oktonionun eşleniği, hem imajiner hem de hiperbolik temel unsurları göz ardı ederek elde edilir [98]:

$$\mathbb{Q}^* = q_0 - q_1 \mathbf{e}_1 - q_2 \mathbf{e}_2 - q_3 \mathbf{e}_3 - q_4 \mathbf{e}_4 - q_5 \mathbf{e}_5 - q_6 \mathbf{e}_6 - q_7 \mathbf{e}_7 \quad (4.66)$$

Benzer şekilde, çarpımsal modül N , olarak verilmiştir

$$N(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}^*\mathbb{Q} = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - (q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 + q_7^2). \quad (4.67)$$

Her zaman pozitif olarak tanımlanamadığından, hiperbolik oktonion klasik oktoniondan farklıdır. Dahası, eğer sadece $N \neq 0$ ise hiperbolik oktonion için tersi $\mathbb{Q}^{-1}$ tanımlanabilir,

$$\mathbb{Q}^{-1} = \frac{\mathbb{Q}^*}{N_{\mathbb{Q}}} \quad (4.68)$$

5. HİPERBOLİK OKTONİONLARLA PLAZMA FİZİĞİ DENKLEMLERİNİN YENİDEN FORMÜLASYONU

Sıkıştırılabilir sıvıların hiperbolik oktonionik formülasyonu ile klasik elektromanyetizma arasındaki izomorfizmden esinlenerek daha önce ortaya konulan eşitlikler plazmanın Maxwell tipi denklemleri için de genelleştirilebilir [93]. Daha önce ilgili denklemleri daha kısa ve şık bir biçimde ifade etmek için kullanılan matematiksel yapılara benzer şekilde dört boyutlu hiperbolik oktonion diferansiyel operatörü,

$$\Xi = -\frac{1}{v_\alpha} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_5 - \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_6 - \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_7 \quad (5.1)$$

ve eşleniği,

$$\Xi^* = -\frac{1}{v_\alpha} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_5 + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_6 + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_7 \quad (5.2)$$

biçiminde tanımlanır. Denklemlerde kullanılan v_α 'nın daha önce tanımlandığı üzere ses hızı olduğunu hatırlayınız. Burada sunulan oktonionik formalizm, plazma denklemlerindeki fiziksel nicelikleri kompleks sayılar yerine reel bileşenlerle ifade etmesini sağlar [96].

Bir Ψ hiperbolik oktonionu, tıpkı daha önce klasik Maxwell denklemlerindeki skaler ve vektör potansiyelleri genelleştirmek için kullanıldığı gibi plazma denklemlerindeki toplam enerji ϵ_α ve kanonik momentum $\mathbf{P}_\alpha$ 'yı genelleştirmek için de kullanılabilir [96].

$$\Psi = v_\alpha \mathbf{P} - \epsilon_\alpha \epsilon_4 = v_\alpha [P_x \mathbf{e}_1 + P_y \mathbf{e}_2 + P_z \mathbf{e}_3] - \epsilon_\alpha \epsilon_4 \quad (5.3)$$

Burada P_x, P_y, P_z , sırasıyla kanonik momentum $\mathbf{P}$ 'nin, (x, y, z) eksenleri yönündeki üç ayrı bileşenini temsil etmektedir.

Hiperbolik oktonion diferansiyel operatörünün eşleniği Ξ^* , yukarıda tanımlanan, Ψ hiperbolik oktonionuna uygulandığında aşağıdaki denklem elde edilir [98]:

$$\begin{aligned} \Xi^* \Psi = & -\left[\frac{\partial P_x}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial x}\right] \mathbf{e}_1 - \left[\frac{\partial P_y}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial y}\right] \mathbf{e}_2 - \left[\frac{\partial P_z}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial z}\right] \mathbf{e}_3 \\ & + \left[\frac{1}{v_\alpha} \frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial t} + v_\alpha \left\{\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right\}\right] \epsilon_4 + v_\alpha \left[\frac{\partial P_y}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial y}\right] \epsilon_5 \\ & + v_\alpha \left[\frac{\partial P_z}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial z}\right] \epsilon_6 + v_\alpha \left[\frac{\partial P_x}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial x}\right] \epsilon_7 \end{aligned}$$

Genel olarak oktonionik formalizmin bir avantajı da türetilen ifadelerin vektörel notasyonla kolayca ilişkilendirilebilmesidir. Bu nedenle, bu denklem çok iyi bilinen vektörel eşitliklerle ilişkilendirilerek yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} \boxminus^* \Psi = & - \left[\frac{\partial P_x}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial x} \right] \mathbf{e}_1 - \left[\frac{\partial P_y}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial y} \right] \mathbf{e}_2 - \left[\frac{\partial P_z}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial z} \right] \mathbf{e}_3 + \left[\frac{1}{v_\alpha} \frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial t} + v_\alpha (\nabla \cdot \mathbf{P}) \right] \epsilon_4 - \\ & v_\alpha [(\nabla \times \mathbf{P})_x] \epsilon_5 - v_\alpha [(\nabla \times \mathbf{P})_y] \epsilon_6 - v_\alpha [(\nabla \times \mathbf{P})_z] \epsilon_7 \end{aligned} \quad (5.4)$$

ifadesi elde edilir. Dikkat edilirse bu denklemdeki $\mathbf{e}_{1,2,3}$ imajiner baz elemanlarının reel bileşenleri, açıkça ξ_α genelleştirilmiş Lamb vektörünün bileşenleridir. Benzer şekilde, $\epsilon_{5,6,7}$ hiperbolik baz elemanları ile ilişkili diğer reel bileşenler de daha önce tanımlanan genelleştirilmiş vortisite β_α 'nin üç vektörel bileşenini verir [98].

Öte yandan, Kambe tarafından akışkanlar için türetilen Lorentz koşuluna benzer şekilde [9],

$$\frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial t} + v_\alpha^2 \nabla \cdot \mathbf{P}_\alpha = 0. \quad (5.5)$$

denklemini plazma için de yazılabilir. Bu nedenle, Eşitlik (5.4)'teki ϵ_4 baz elemanına ait olan bileşenlerin tamamı yok olacaktır. Böylece, Eşitlik (5.4)'ün yeni biçimi,

$$\boxminus^* \Psi = \xi_x \mathbf{e}_1 + \xi_y \mathbf{e}_2 + \xi_z \mathbf{e}_3 - v_\alpha [\beta_x \epsilon_5 + \beta_y \epsilon_6 + \beta_z \epsilon_7] \quad (5.6)$$

şeklinde verilmelidir.

Plazmalar için hiperbolik oktonion formunda

$$\mathbb{F} = \xi_x \mathbf{e}_1 + \xi_y \mathbf{e}_2 + \xi_z \mathbf{e}_3 - v_\alpha [\beta_x \epsilon_5 + \beta_y \epsilon_6 + \beta_z \epsilon_7] \quad (5.7)$$

genelleştirilmiş alan ifadesi tanımlanırsa, ilgili literatürde daha önce elektromanyetizma ve lineer gravitasyon için ifade edilen karşılıklarına benzer şekilde,

$$\boxminus^* \Psi = \mathbb{F} \quad (5.8)$$

kompakt eşitliği yazılabilir. Burada ξ_x, ξ_y, ξ_z ve $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ sırasıyla ξ_α ve β_α 'nın, (x, y, z) eksenleri yönündeki reel bileşenleridir. Bu denklem, plazmaya ilişkin alanlarının hiperbolik oktonionların cebiri kullanılarak reel bileşenler cinsinden tek bir denklemde genelleştirilebileceğini göstermektedir. Burada açıkça görüldüğü üzere literatürde daha önce verilen kuaternionik plazma modelinin aksine, sunulan formülasyonda herhangi bir kompleks sayı kullanılmasına ihtiyaç duyulmamaktadır [51].

Plazma davranışı ile elektromanyetizma arasındaki benzerliği ortaya koymak için, hiperbolik oktonion diferansiyel operatörü $\boxminus$, $\mathbb{F}$ üzerinde uygulandığında,

$$\begin{aligned}\boxminus \mathbb{F} = & v_\alpha \left[\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{\partial \beta_z}{\partial z} \right] + v_\alpha \left[\frac{\partial \beta_z}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial z} - \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial \xi_x}{\partial t} \right] \mathbf{e}_1 \\ & + v_\alpha \left[\frac{\partial \beta_x}{\partial z} - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} - \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \right] \mathbf{e}_2 + v_\alpha \left[\frac{\partial \beta_y}{\partial x} - \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial \xi_z}{\partial t} \right] \mathbf{e}_3 \\ & - \left[\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_4 + \left[\frac{\partial \xi_z}{\partial y} - \frac{\partial \xi_y}{\partial z} + \frac{\partial \beta_x}{\partial t} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_5 \\ & + \left[\frac{\partial \xi_x}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial t} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_6 + \left[\frac{\partial \xi_y}{\partial x} - \frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_z}{\partial t} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_7\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir [98]. Bu oktonionik ifadeleri, vektörel karşılıkları ile ilişkilendirdikten sonra daha basit bir form elde edilebilir:

$$\begin{aligned}\boxminus \mathbb{F} = & v_\alpha (\nabla \cdot \boldsymbol{\beta}_\alpha) + v_\alpha \left[(\nabla \times \boldsymbol{\beta}_\alpha)_x - \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial \xi_x}{\partial t} \right] \mathbf{e}_1 + v_\alpha \left[(\nabla \times \boldsymbol{\beta}_\alpha)_y - \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \right] \mathbf{e}_2 + \\ & v_\alpha \left[(\nabla \times \boldsymbol{\beta}_\alpha)_z - \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial \xi_z}{\partial t} \right] \mathbf{e}_3 - (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha) \boldsymbol{\varepsilon}_4 + \left[(\nabla \times \boldsymbol{\xi}_\alpha)_x + \frac{\partial \beta_x}{\partial t} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_5 + \left[(\nabla \times \boldsymbol{\xi}_\alpha)_y + \right. \\ & \left. \frac{\partial \beta_y}{\partial t} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_6 + \left[(\nabla \times \boldsymbol{\xi}_\alpha)_z + \frac{\partial \beta_z}{\partial t} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_7\end{aligned}\quad (5.9)$$

Plazma için daha önce denklem (3.23) de ifade edilen Maxwell benzeri denklemlerin yardımıyla, yukarıdaki eşitlikteki skaler çarpım içeren denklemlerin sırasıyla genelleştirilmiş vortisite ve Lamb vektörleri için Gauss yasası olduğu açıkça görülür. Benzer şekilde, (5.9) eşitliğindeki hiperbolik oktonion baz elemanları ile ilişkili diğer bileşenler de plazma için daha önce elde edilen Ampere ve Faraday yasalarının (x, y, z) eksenleri yönündeki bileşenleriyle ilgili vektörel ifadelerdir. Bu nedenle, bu denklemin sağ tarafı için,

$$\boxminus \mathbb{F} = \frac{1}{v_\alpha} (\mathcal{J}_x \mathbf{e}_1 + \mathcal{J}_y \mathbf{e}_2 + \mathcal{J}_z \mathbf{e}_3) - \rho_\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_4 \quad (5.10)$$

eşitliği yazılabilir. Bu noktada oktonionik formda,

$$\mathbb{J} = \frac{1}{v_\alpha} (\mathcal{J}_x \mathbf{e}_1 + \mathcal{J}_y \mathbf{e}_2 + \mathcal{J}_z \mathbf{e}_3) - \rho_\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_4 \quad (5.11)$$

ile verilen genelleştirilmiş plazma akımı tanımlanabilir. Burada; ρ_α ve $\mathcal{J}_\alpha = \mathcal{J}_x \mathbf{e}_1 + \mathcal{J}_y \mathbf{e}_2 + \mathcal{J}_z \mathbf{e}_3$ sırasıyla plazma yük ve akım yoğunluğudur. Dolayısıyla (5.11) eşitliğini,

$$\boxminus \mathbb{F} = \mathbb{J} \quad (5.12)$$

biçiminde kısa ve şık bir biçimde ifade etmek mümkündür. Aslında bu oktonionik gösterim, sekiz farklı ifadeyi tek bir denklemde birleştirmektedir:

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{\partial \beta_z}{\partial z} = 0, \quad (5.13a)$$

$$v_\alpha^2 \left[\frac{\partial \beta_z}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial z} \right] - \frac{\partial \xi_x}{\partial t} = \mathcal{J}_x, \quad (5.13b)$$

$$v_\alpha^2 \left[\frac{\partial \beta_x}{\partial z} - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} \right] - \frac{\partial \xi_y}{\partial t} = \mathcal{J}_y, \quad (5.13c)$$

$$v_\alpha^2 \left[\frac{\partial \beta_y}{\partial x} - \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right] - \frac{\partial \xi_z}{\partial t} = \mathcal{J}_z, \quad (5.13d)$$

$$\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} = \rho_\alpha, \quad (5.13e)$$

$$\frac{\partial \xi_z}{\partial y} - \frac{\partial \xi_y}{\partial z} + \frac{\partial \beta_x}{\partial t} = 0, \quad (5.13f)$$

$$\frac{\partial \xi_x}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial t} = 0, \quad (5.13g)$$

$$\frac{\partial \xi_y}{\partial x} - \frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_z}{\partial t} = 0. \quad (5.13h)$$

Öte yandan, (5.8) denklemi hiperbolik oktonionik diferansiyel operatörünün eşleniği ile soldan çarpılırsa,

$$\square \square^* \Psi = \square \Psi = \square \mathbb{F} \quad (5.14)$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$\square = \square \square^* = \square^* \square = \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.15)$$

şeklinde tanımlanan d'Alembert operatörüdür. Eşitlik (5.12)'deki kompakt ifade gereğince, (5.14) denklemi, genelleştirilmiş plazma akım yoğunluğu $\mathbb{J}$ ' yi vermelidir. Bu nedenle, aşağıdaki ilişki yazılabilir [98]:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{v_\alpha} \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} - v_\alpha \left[\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_x}{\partial z^2} \right] \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ \frac{1}{v_\alpha} \frac{\partial^2 P_y}{\partial t^2} - v_\alpha \left[\frac{\partial^2 P_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial z^2} \right] \right\} \mathbf{e}_2 + \\ & \left\{ \frac{1}{v_\alpha} \frac{\partial^2 P_z}{\partial t^2} - v_\alpha \left[\frac{\partial^2 P_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_z}{\partial z^2} \right] \right\} \mathbf{e}_3 + \left\{ \frac{1}{v_\alpha} \frac{\partial^2 \epsilon_\alpha}{\partial t^2} - v_\alpha \left[\frac{\partial^2 \epsilon_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_\alpha}{\partial z^2} \right] \right\} \mathbf{e}_4 = \\ & \frac{1}{v_\alpha} (\mathcal{J}_x \mathbf{e}_1 + \mathcal{J}_y \mathbf{e}_2 + \mathcal{J}_z \mathbf{e}_3) - \rho_\alpha \mathbf{e}_4. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Bu sonuç, çok akışkanlı bir plazma için,

$$\square \Psi = \mathbb{J} \quad (5.17)$$

ile verilen diğer bir kullanışlı kompakt denklemin ortaya çıktığını göstermektedir. Aslında bu ifade, toplam enerji ϵ_α ve kanonik momentum $\mathbf{P}_\alpha$ cinsinden çok akışkanlı plazma dalga denklemlerinin kompakt bir şeklidir:

$$\square \epsilon_\alpha = \rho_\alpha \quad (5.18a)$$

$$\square \mathbf{P}_\alpha = \mathbf{J}_\alpha \quad (5.18b)$$

Açıkça (5.17) ifadesi, benzerlerine elektromanyetik teorideki rastlanan aşağıdaki plazma dalga denklemlerini özetlemektedir:

$$\frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial^2 \epsilon_\alpha}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \epsilon_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_\alpha}{\partial z^2} \right] = \rho_\alpha, \quad (5.19a)$$

$$\frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} - v_\alpha^2 \left[\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_x}{\partial z^2} \right] = J_x, \quad (5.19b)$$

$$\frac{\partial^2 P_y}{\partial t^2} - v_\alpha^2 \left[\frac{\partial^2 P_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial z^2} \right] = J_y, \quad (5.19c)$$

$$\frac{\partial^2 P_z}{\partial t^2} - v_\alpha^2 \left[\frac{\partial^2 P_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_z}{\partial z^2} \right] = J_z. \quad (5.19d)$$

Öte yandan hiperbolik oktonion diferansiyel operatörünün eşleniği $\square^*$, plazma dalga denklemlerinin alanlar cinsinden yeniden düzenlenmesine olanak sağlar:

$$\square^* \square \mathbb{F} = \square \mathbb{F} = \square^* \mathbb{J} \quad (5.20)$$

Bu denklemde hiperbolik oktonion çarpımı yaptıktan sonra

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z^2} \right] \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z^2} \right] \right\} \mathbf{e}_2 \\
& + \left\{ \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial z^2} \right] \right\} \mathbf{e}_3 \\
& + \left\{ \frac{1}{v_\alpha} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} - v_\alpha \left[\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial z^2} \right] \right\} \boldsymbol{\varepsilon}_5 \\
& + \left\{ \frac{1}{v_\alpha} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} - v_\alpha \left[\frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial z^2} \right] \right\} \boldsymbol{\varepsilon}_6 \\
& + \left\{ \frac{1}{v_\alpha} \frac{\partial^2 \beta_z}{\partial t^2} - v_\alpha \left[\frac{\partial^2 \beta_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_z}{\partial z^2} \right] \right\} \boldsymbol{\varepsilon}_7 \\
& = - \left\{ \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial x} + \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial t} \right\} \mathbf{e}_1 - \left\{ \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial y} + \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial \mathcal{J}_y}{\partial t} \right\} \mathbf{e}_2 - \left\{ \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial z} + \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial t} \right\} \mathbf{e}_3 \\
& + \frac{1}{v_\alpha} \left\{ \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{J}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial z} \right\} \boldsymbol{\varepsilon}_4 + \frac{1}{v_\alpha} \left\{ \frac{\partial \mathcal{J}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial y} \right\} \boldsymbol{\varepsilon}_5 \\
& + \frac{1}{v_\alpha} \left\{ \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial z} \right\} \boldsymbol{\varepsilon}_6 + \frac{1}{v_\alpha} \left\{ \frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{J}_y}{\partial x} \right\} \boldsymbol{\varepsilon}_7
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitliğin solundaki ve sağındaki her bir baz elemana ilişkin bileşenler karşılıklı olarak eşitlenirse aşağıdaki plazma denklemleri yazılabilir [98]:

$$\frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z^2} \right] = - \left[\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial x} + \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial t} \right] \quad (5.21a)$$

$$\frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z^2} \right] = - \left[\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial y} + \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial \mathcal{J}_y}{\partial t} \right] \quad (5.21b)$$

$$\frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial z^2} \right] = - \left[\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial z} + \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial t} \right] \quad (5.21c)$$

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{J}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial z} = 0 \quad (5.21d)$$

$$\frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial z^2} \right] = \frac{1}{v_\alpha^2} \left[\frac{\partial \mathcal{J}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial y} \right] \quad (5.21e)$$

$$\frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial z^2} \right] = \frac{1}{v_\alpha^2} \left[\frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial z} \right] \quad (5.21f)$$

$$\frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial^2 \beta_z}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \beta_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_z}{\partial z^2} \right] = \frac{1}{v_\alpha^2} \left[\frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{J}_y}{\partial x} \right] \quad (5.21g)$$

Yukarıdaki denklemden ilk üçü imajiner baz elemanları $\mathbf{e}_{1,2,3}$ 'nın bileşenleri ile ilişkili olup genelleştirilmiş Lamb vektörü $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ cinsinden ifade edilen,

$$\frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial^2 \xi_\alpha}{\partial t^2} - \nabla^2 \xi_\alpha = -\nabla^2 \rho_\alpha - \frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial J_\alpha}{\partial t} \quad (5.22)$$

dalga denklemini oluştururlar. Benzer şekilde $\epsilon_{5,6,7}$ hiperbolik baz elemanları ile ilişkili diğer ifadeler de β_α için elde edilen,

$$\frac{1}{v_\alpha^2} \frac{\partial^2 \beta_\alpha}{\partial t^2} - \nabla^2 \beta_\alpha = \frac{1}{v_\alpha^2} \nabla \times J_\alpha \quad (5.23)$$

dalga denklemini meydana getirirler. Ayrıca, hiperbolik baz elemanı ϵ_4 ile ilgili ifade ise aynı zamanda genelleştirilmiş plazma yükü için korunum yasasıdır ve klasik elektromanyetizmada benzeri ile aynı formatta ifade edilir:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot J_\alpha = 0. \quad (5.24)$$

6. SONUÇ

İlgili literatürde, Thompson ve Moeller tarafından elektromanyetizma ile akışkan dinamiği arasındaki teorik benzerlikten yola çıkarak kanonik vortisite ve genelleştirilmiş Lamb vektörü cinsinden plazma denklemlerinin yeniden formülasyonu için yeni bir teorik model ortaya konulmuştur [14,15]. Bu modelden yararlanılarak; elektromanyetik teorideki elektrik ve manyetik alanların tanımlarına biçimsel olarak benzeyen yeni plazma alanları tanımlanmış, elektromanyetik teoremin temel yapı taşlarından olan Maxwell denklemlerine benzeyen yeni bir denklem takımı plazmalar için de türetilmiştir.

Yukarıda bahsedilen bu model, sıkıştırılabilir ve sıkıştırılmaz akışkanların denklemlerinden yola çıkarak tasarlandığı ve plazmalar için genişletildiği için, plazmanın hem akışkanlarla hem de elektromanyetik teori ile ilgili davranışını açıkça yansıtabilen yeni denklemlere ihtiyaç duyulmaktaydı. Literatürde daha önce Demir ve Tanışlı tarafından akışkanların Maxwell-tipi denklemlerinin hiperbolik oktonionlarla yeniden formülasyonu [93], plazmanın benzer biçimdeki denklemlerinin de aynı sayı sistemi kullanılarak ifade edilebileceği yönünde bir öngörü oluşturmuştur.

Bu tez, plazmanın Maxwell-tipi denklemlerinin daha kullanışlı ve daha kompakt bir formda hiperbolik oktonionlarla yeniden formüle edilmesini amaçlamaktadır. Bu hedefi gerçekleştirmek için daha önce akışkanlar için hiperbolik oktonion terimleri cinsinden tanımlanan denklemler [93], plazmanın ilgili denklemlerini elde edebilmek için tekrar modifiye edilmiştir. Akışkan alan denklemleri ve plazma denklemleri arasındaki biçimsel benzerlik, bu sürecin çok daha kolay bir biçimde gerçekleştirilmesine olanak tanımıştır.

Gerçekten de Denklem (5.7)'de tanımlanan F hiperbolik oktonionu, plazmanın genelleştirilmiş Lamb vektörü ξ_α ve genelleştirilmiş vortisite vektörünün β_α birlikte ifade edilmesine olanak tanır. Ayrıca, 4-boyutlu hiperkompleks sayı sistemlerinden farklı olarak ortaya konulan bu formülasyon hiçbir kompleks bileşene ihtiyaç duymadan anılan vektörlerin reel bileşenler cinsinden ifade edilebilmesini sağlar.

Denklem (5.12) yardımıyla çok akışkanlı plazmanın alan denklemleri tek bir denklemde birleştirilebilir. Aslında bu kompakt ve zarif ifade, plazmanın Maxwell-tipi dört denklemini özetlemektedir. Plazmanın daha önce ilgili literatürde verilen kuaternionik reformülasyonundan [51], farklı olarak mevcut denklemlerde yine herhangi

bir kompleks sayı kullanılmasına gerek yoktur. Tüm matematiksel ilişkiler, hiperbolik oktonionların reel bileşenleri ile gerçekleştirilmiştir.

Ortaya konulan formülasyon, ξ_α genelleştirilmiş Lamb vektörünün ve β_α genelleştirilmiş vortisite vektörünün açıkça klasik elektromanyetizmadaki elektrik alan ve manyetik alana benzer şekilde davranış sergilediğini vurgular. Benzer şekilde elde edilen denklemlerde toplam enerji ϵ_α ve kanonik momentum P_α , skaler potansiyel ϕ ve vektör potansiyel A 'nın elektromanyetizmadaki rolü ile aynı davranışı gösterir. Akışkan denklemlerinde ise benzer rollerin hız v ve entalpi h tarafından üstlenildiği görülmektedir [52].

Bu tez, hiperbolik oktonion terimleri cinsinden elde edilen plazma ve sıkıştırılabilir akışkan denklemleri arasında kesin bir izomorfizm olduğunu kanıtlamaktadır. Ayrıca, hiperbolik oktoniyonik ifadeler vektör alanlarıyla ilişkilendirerek, Denklem (5.17)'deki genelleştirilmiş dalga denklemi ilgili literatürde daha önce verilen elektromanyetik teori ve lineer gravitasyondaki benzerleri ile aynı formda türetilmiştir. Matematiksel olarak değişme ve birleşme özelliği göstermeyen yapılarına rağmen hiperbolik oktonionlar, sekiz boyuta kadar fiziksel niceliklerin ilgili denklemlerini basitleştirmek için güçlü bir araçtır. Bu tez çalışmaları sırasında elde edilen sonuçlar bir makale haline getirilerek bilim dünyasına sunulmuştur [98].

KAYNAKÇA

- [1] http-1: <https://www.researchgate.net/publication/302468212> (20.11.2019)
- [2] Şahin, N. (2017). Plazma Temel Denklemleri ve Düşük Basınç Plazmalarda Langmuir Probu Ölçümleriyle Optik ve Elektriksel Özelliklerin Belirlenmesi. Doktora Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [3] Prof. Mag. Dr. Helmut O. Rucker , Introduction to Plasma Physics , Institute of Physics Karl-Franzens- University Graz , 1-47 , Austria (2011)
- [4] Pat, S. (2007). Çoklu Gaz Karışımı Plazmalarının Optik Emisyon Spektroskopisi. Doktora Tezi. Eskişehir: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [5] Serway R.A., Beichner R.J. (2011). Fen ve Mühendislik için Fizik 2 (Çev: K. Çolakoğlu) Palme Yayıncılık, Ankara
- [6] Logan J. G., (1962) . Hydrodynamic analog of the classical field equations. Phys. Fluids, 5, 868–869.
- [7] Troshkin O. V. (1993). Perturbation waves in turbulent media. Comput. Math. Math. Phys., 33, 1613–1628.
- [8] Marmanis H. (1998). Analogy between the Navier–Stokes equations and Maxwell–equations: Application to turbulence. Phys. Fluids, 10, 1428–1437.
- [9] Kambe T. (2010). A new formulation of equations of compressible fluids by analogy with Maxwell’s equations. Fluid Dyn. Res., 42, 055502.
- [10] Kambe T. (2014). On fluid Maxwell equations, in Frontiers of Fundamental Physics and Physics Education Research, eds. B. G. Sidharth et al. (Springer, Cham,), pp. 287–295.
- [11] Scofield D. F. and Huq P. (2014). Fluid dynamical Lorentz force law and Poynting theorem introduction. Fluid Dyn. Res., 46, 055513.
- [12] Scofield D. F. and Huq P. (2014). Fluid dynamical Lorentz force law and Poynting theorem derivation and implications. Fluid Dyn. Res., 46, 055514.

- [13] Abreu E. M. C., Neto J. A., Mendes A. C. R. and Sasaki N. (2015). Abelian and non-Abelian considerations on compressible fluids with Maxwell-type equations and minimal coupling with the electromagnetic field. *Phys. Rev. D*, 91, 125011.
- [14] Thompson R. J. and Moeller T. M. (2012). A Maxwell formulation for the equations of a plasma. *Phys. Plasmas*, 19, 010702.
- [15] Thompson R. J. and Moeller T. M. (2012). Classical field isomorphism in two-fluid plasmas. *Phys. Plasmas*, 19, 082116.
- [16] Hamilton W. R. (1899). *Elements of Quaternions*. Chelsea.
- [17] Imaeda K. (1976). A new formulation of classical electrodynamics. *Nuovo Cimento B*, 32, 138–162.
- [18] Colombo F., Loustau P., Sabadini I. and Struppa D. C. (1998). Regular functions of biquaternionic variables and Maxwell's equations. *J. Geom. Phys.*, 26, 183–201.
- [19] Lambek J. (1995). If Hamilton had prevailed Quaternions in physics, *Math. Intelligencer*, 17, 7–15.
- [20] Ward J. P., (1996). *Quaternions and Cayley Numbers* (Kluwer)
- [21] Kassandrov V. V. (1995). Biquaternion electrodynamics and Weyl–Cartan geometry of space-time. *Gravit. Cosmol.*, 3, 216–222.
- [22] Majernik V. (1999). Quaternionic formulation of the classical fields. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 9, 119–130.
- [23] Gsponer A. and Hurni J. P. (2001). Comment on formulating and generalizing Dirac's, Proca's, and Maxwell's equations with biquaternions or Clifford numbers. *Found. Phys. Lett.*, 14, 77–85.
- [24] Kravchenko V. V., (2002) Quaternionic reformulation of Maxwell equations for inhomogeneous media and new solutions. *Z. Anal. Anwendungen*, 21, 21–26.
- [25] Kravchenko V. V. (2003). On a quaternionic reformulation of Maxwell's equations for chiral media and its applications. *Z. Anal. Anwendungen*, 22, 569–589.

- [26] Van Vlaenderen K. J. and Waser A. (2004). Electrodynamics with the scalar field. *Hadronic J.*, 27, 673–691.
- [27] Grudsky S. M., Khmelnytskaya K. V. and Kravchenko V. V. (2004). On a quaternionic Maxwell equation for the time-dependent electromagnetic field in a chiral medium. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37, 4641–4647.
- [28] Tanışlı M. (2006) Gauge transformation and electromagnetism with biquaternions. *Euro-phys. Lett.*, 74, 569–573.
- [29] Demir S. and Özdaş K. (2003). Dual quaternionic reformulation of classical electromagnetism. *Acta Phys. Slovaca*, 53, 429–436.
- [30] Demir S. (2007) Matrix realization of dual quaternionic electromagnetism. *Cent. Eur. J. Phys.*, 5, 487–506.
- [31] Demir S., Tanışlı M. and Candemir N. (2010). Hyperbolic quaternion formulation of electromagnetism. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 20, 547–563.
- [32] Negi O. P. S., Bisht S. and Bisht P. S. (1998). Revisiting quaternion formulation and electromagnetism. *Nuovo Cimento B*, 113, 1449–1467.
- [33] Bisht P. S. and Negi O. P. S. (2008). Revisiting quaternion dual electrodynamics. *Int. J. Theor. Phys.*, 47, 3108–3120.
- [34] Singh J., Bisht P. S. and Negi O. P. S. (2007). Quaternion analysis for generalized electromagnetic fields of dyons in an isotropic medium. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40, 9137–9147.
- [35] Bisht P. S., Singh J. and Negi O. P. S. (2007). Generalized electromagnetic fields in a chiral medium. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40, 11395–11402.
- [36] Yefremov A., Smarandache F. and Christianto V. (2007). Yang–Mills field from quaternion space geometry, and its Klein–Gordon representation, *Prog. Phys.*, 3, 42–50.
- [37] Christianto V. and Smarandache F. (2008). Numerical solution of radial biquaternion Klein–Gordon equation, *Prog. Phys.*, 1, 40–41.
- [38] Christianto V., Smarandache F. and Lichtenberg F. (2009). A note of extended Proca equations and superconductivity. *Prog. Phys.*, 1, 40–43.

- [39] Singh A.(1981). Quaternionic form of linear equations for the gravitational field with Heavisidian monopoles. *Lett. Nuovo Cimento*, 32, 5–8.
- [40] Majernik V. (1982). Some astrophysical consequences of the extended Maxwell-like gravitational field equations. *Astrophys. Space. Sci.*, 84, 191–204.
- [41] Demir S. and Tanışlı M. (2011). Biquaternionic Proca-type generalization of gravity. *Eur. Phys. J. Plus*, 126, 51.
- [42] Rajput B. S. (1984). Unification of generalized electromagnetic and gravitational fields. *J. Math. Phys.*, 25, 351–353.
- [43] Bisht P. S., Negi O. P. S. and Rajput B. S. (1993). Quaternion formulation for unified fields of dyons and gravito-dyons. *Indian J. Pure Appl. Phys.*, 24, 543–549.
- [44] Bisht P. S., Negi O. P. S. and Rajput B. S. (1993). Null tetrad formulation of non-Abelian dyons. *Int. J. Theor. Phys.*, 32, 2099–2124.
- [45] Dangwal S., Bisht P. S. and Negi O. P. S. (2006). Theory of quaternion angular momentum for unifold fields of dyons. *Russian Phys. J.*, 49, 1274–1282.
- [46] Bisht P. S., Karnatak G. and Negi O. P. S. (2010). Generalized gravi — electromagnetism. *Int. J. Theor. Phys.*, 49, 1344–1356.
- [47] Rawat A. S. and Negi O. P. S. (2012). Quaternion gravi-electromagnetism. *Int. J. Theor. Phys.*, 51, 738–745.
- [48] Demir S. and Tanışlı M. (2011). A compact biquaternionic formulation of massive field equations in gravi-electromagnetism. *Eur. Phys. J. Plus*, 126, 115.
- [49] Weng Z. H.(2014). Field equations in the complex quaternion spaces. *Adv. Math. Phys.* 2014, 450262.
- [50] Demir S., Uymaz A. and Tanışlı M. (2017). A new model for the reformulation of compress- ible fluid equations. *Chin. J. Phys.*, 55, 115–126.
- [51] Demir S., Tanışlı M., Şahin N. and Kansu M. E. (2017). Biquaternionic reformulation of multifluid plasma equations. *Chin. J. Phys.*, 55, 1329–1339.
- [52] Demir S. and Tanışlı M. (2017). Spacetime algebra for the reformulation of fluid field equations. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 14, 1750075.

- [53] Cafaro C. and Ali S. A. (2007). The spacetime algebra approach to massive classical electro- dynamics with magnetic monopoles, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 17, 23–36.
- [54] Cafaro C. (2007). Finite-range electromagnetic interaction and magnetic charges spacetime algebra or algebra of physical space?. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 17, 617– 634.
- [55] Demir S. (2013). Space–time algebra for the generalization of gravitational field equations. *Pramana J.Phys.*, 80, 811–823.
- [56] Mironov V. L. and Mironov S. (2009). Octonic representation of electromagnetic field equations. *J. Math. Phys.*, 50, 012901.
- [57] Mironov V. L. and Mironov S. (2009). Octonic first-order equations of relativistic quantum mechanics. *Int. J. Mod. Phys. A*, 24, 4157–4167.
- [58] Mironov V. L. and Mironov S. (2009). Octonic second-order equations of relativistic quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 50, 012302.
- [59] Tolan T., Tanışlı M. and Demir S. (2013). Octonic form of Proca-Maxwells equations and relativistic derivation of electromagnetism. *Int. J. Theor. Phys.*, 52, 4488–4506.
- [60] Demir S., Tanışlı M. and Tolan T. (2013). Octonic gravitational field equations. *Int. J. Mod. Phys. A*, 28, 1350112.
- [61] Tanışlı M., Demir S. and Şahin N. (2015). Octonic formulations of Maxwell type fluid equations. *J. Math. Phys.*, 56, 091701.
- [62] Kansu M.E. (2012). Kompleks Oktonionlarla Bi-izotropik Ortam için Maxwell Denklemleri ve Elektromanyetik Enerji. Doktora Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [63] Gürsey, F. ve Tze, C. H. (1996). On the Role of Division, Jordan and Related Algebras in Particle Physics, World Scientific, Singapore.
- [64] Baez J. C. (2002). The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 39, 145–205.
- [65] Okubo, S. (1995) Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics, Cambridge University Press, Cambridge.

- [66] Catto, S., “Exceptional Projective Geometries and Internal Symmetries”, arXiv:hep-th/0302079v1, 2003.
- [67] Chanyal B. C., Bisht P. S. and Negi O. P. S. (2010). Generalized octonion electrodynamics. *Int. J. Theor. Phys.*, 49, 1333–1343.
- [68] Tolan, T., Özdaş, K. ve Tanışlı, M. (2006). Reformulation of electromagnetism with octonions. *Il Nuovo Cimento B*, 121(1), 43 – 55.
- [69] Tolan T. (2006). Maxwell Denklemleri ve Dirac Denkleminin Oktonionik Temsili. Doktor Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [70] Tanışlı, M. ve Jancewicz, B. (2012). Octonionic Lorenz-like condition. *Pramana – Journal of Physics*, 78(2), 165 – 174.
- [71] Daboul, J. ve Delbourgo, R. (1999). Matrix Representation of Octonions and Generalizations. *J. Math. Phys.*, 40, 4134 – 4150.
- [72] Chanyal B. C., Bisht P. S. and Negi O. P. S. (2011), Generalized split-octonion electrodynamics. *Int. J. Theor. Phys.*, 50, 1919–1926.
- [73] Tanışlı M., Kansu M. E. and Demir S. (2014). Reformulation of electromagnetic and gravito-electromagnetic equations for Lorentz system with octonion algebra. *Gen. Relativ. Gravit.*, 46, 1739.
- [74] Kansu M. E., Tanışlı M. and Demir S. (2014). Representation of electromagnetic and gravito-electromagnetic Poynting theorems in higher dimensions. *Turk. J. Phys.*, 38, 155–164.
- [75] Bisht P. S. and Negi O. P. S. (1993). Split octonion electrodynamics. *Indian J. Pure Appl. Phys.*, 31, 292–296.
- [76] Gogberashvili M. (2006). Octonionic electrodynamics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39, 7099–7104.
- [77] Candemir N., Özdaş K., Tanışlı M. and Demir S. (2008). Hyperbolic octonionic Proca- Maxwell equations. *Z. Naturforsch. A*, 63, 15–18.
- [78] Bisht P. S. and Negi O. P. S. (2009). Octonion wave equation and tachyon electrodynamics. *Pramana J. Phys.*, 73, 605–613.

- [79] Nurowski P. (2009). Split octonions and Maxwell equations. *Acta Phys. Polon. A*, 116, 992–993.
- [80] Kansu M. E., Tanışlı M. and Demir S. (2012). A new approach to Lorentz invariance in electromagnetism with hyperbolic octonions, *Eur. Phys. J. Plus*, 127, 69.
- [81] Chanyal B. C., Bisht P. S. and Negi O. P. S. (2013). Octonion and conservation laws for dyons. *Int. J. Mod. Phys. A*, 28, 1350125.
- [82] Demir S. (2013). Hyperbolic octonion formulation of gravitational field equations. *Int. J. Theor. Phys.*, 52, 105–116.
- [83] Chanyal B. C. (2015). Split octonion reformulation of generalized linear gravitational field equations. *J. Math. Phys.*, 56, 051702.
- [84] Chanyal B. C. (2015). Classical geometrodynamics with Zorn vector-matrix algebra for gravito-dyons. *Rep. Math. Phys.*, 76, 1–20.
- [85] Bisht P. S., Dangwal S. and Negi O. P. S. (2008). Unified split octonion formulation of dyons. *Int. J. Theor. Phys.*, 47, 2297–2313.
- [86] Chanyal B. C., Sharma V. K. and Negi O. P. S. (2015). Octonionic gravi-electromagnetism and dark matter. *Int. J. Theor. Phys.*, 54, 3516–3532.
- [87] Demir S., Tanışlı M. and Kansu M. E. (2013). Generalized hyperbolic octonion formulation for the fields of massive dyons and gravito-dyons. *Int. J. Theor. Phys.*, 52, 3696–3711.
- [88] Köplinger J. (2006), Dirac equation on hyperbolic octonions. *Appl. Math. Comput.*, 182, 443–446.
- [89] Gogberashvili M. (2006). Octonionic version of Dirac equation. *Int. J. Mod. Phys. A*, 21, 3513.
- [90] Dzhunushaliev V. (2006). Colorless operators in a non-associative quantum theory. *Phys. Lett. A*, 355, 298–302.
- [91] Dzhunushaliev V. (2008). Nonassociativity, supersymmetry, and hidden variables. *J. Math. Phys.*, 49, 042108.

- [92] Dzhunushaliev V. (2010). Hidden nonassociative structure in supersymmetric quantum mechanic. *Ann. Phys.*, 522, 382–388.
- [93] Demir S. and Tanışlı M. (2016). Hyperbolic octonion formulation of the fluid Maxwell equations. *J. Korean Phys. Soc.*, 68, 616–623.
- [94] Carmody K. (1988). Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions. *Appl. Math. Comput.* 28, 47–72.
- [95] Carmody K. (1997). Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions Further results. *Appl. Math. Comput.*, 84, 27–47.
- [96] Maxwell J. C. (1873). *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Clarendon Press,.
- [97] Tian, Y. (2000). Matrix representations of octonions and their applications. *Adv. Appl. Clifford Algebra*, 10(1), 61 – 90.
- [98] Demir, S. and Zeren, E. (2018). Multifluid plasma equations in terms of hyperbolic octonions. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 15. 1850053

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Erdiñ ZEREN

Yabancı Dil : İngilizce

Doğum Yeri ve Yılı : Sakarya/ 17.08.1990

E-Posta : ezeren@eskisehir.edu.tr

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2009-2016, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, Lisans

Yayınları ve Bilimsel Faaliyetleri:

Demir, S. and Zeren, E. (2018). Multifluid plasma equations in terms of hyperbolic octonions. Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 15. 1850053