

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

HİPERBOLİK TANJANT FONKSİYONUNUN ÜRETECİ OLDUĞU
NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZ

YÜKSEK LİSANS

Zeynep DEMİR

ŞUBAT-2024
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**HİPERBOLİK TANJANT FONKSİYONUNUN ÜRETECİ OLDUĞU
NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZ**

**NON-NEWTONIAN ANALYSIS GENERATED BY
HYPERBOLIC TANGENT FUNCTION**

YÜKSEK LİSANS

Zeynep DEMİR

**ŞUBAT-2024
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**HİPERBOLİK TANJANT FONKSİYONUNUN ÜRETECİ OLDUĞU
NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZ**

**NON-NEWTONIAN ANALYSIS GENERATED BY
HYPERBOLIC TANGENT FUNCTION**

YÜKSEK LİSANS

Zeynep DEMİR

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK

**ŞUBAT-2024
GÜMÜŞHANE**

KABUL VE ONAY

X X X X

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Hiperbolik Tanjant Fonksiyonunun Üretici Olduğu Newtonyen Olmayan Analiz**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

01/02/2024

.....
Zeynep DEMİR

TEŞEKKÜR

Tezimin her aşamasında bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK 'e teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca beni destekleyen, zorlukları aşmama yardımcı olan annem, babam ve kardeşlerime teşekkür ederim.

Zeynep DEMİR
GÜMÜŞHANE – 2024



ÖZET

İlk olarak Jane Grossman, Michael Grossman ve Robert Katz, üretici $\tanh(x/2)$ olan sigmoidal aritmetiği, 1983 yılında tanıtmışlardır. Bu aritmetik ile ilgili toplama ve çıkarma işlemlerini vermişlerdir (Grossman vd., 1983). Marek Czachor, hiperbolik tanjant fonksiyonunun, $\tanh(x)$, üretici olduğu aritmetiği ve ilgili toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin tanımını vermiştir (Czachor, 2021). Fakat bu analizin türev ve integralini tanımlamamıştır. Bu tezde, hiperbolik tanjant analiz olarak isimlendirilen ve hiperbolik tanjant fonksiyonunun, $\tanh(x)$, üretici olduğu Newtonyen olmayan analiz çalışılmıştır. Hiperbolik tanjant türev ve hiperbolik tanjant integral ilk kez tanıtılmıştır. Ayrıca bu analiz ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik tanjant analiz, Hiperbolik tanjant fonksiyon, Hiperbolik tanjant integral, Hiperbolik tanjant türev, Newtonyen olmayan analiz

SUMMARY

Jane Grossman, Michael Grossman and Robert Katz first introduced sigmoidal arithmetic with the generator $\tanh(x/2)$ in 1983. They gave the addition and subtraction operations related to this arithmetic (Grossman et al., 1983). Marek Czachor gave a definition of the arithmetic of which the hyperbolic tangent function, $\tanh(x)$, is the generator and the related operations of addition, subtraction, multiplication and division (Czachor, 2021). But he did not define the derivative and integral of this analysis. In this thesis, a non-Newtonian analysis, which is called hyperbolic tangent analysis, where the hyperbolic tangent function ($\tanh(x)$) is the generator, has been studied. Hyperbolic tangent derivative and hyperbolic tangent integral were introduced for the first time. Additionally, fundamental definitions and theorems related to this analysis are given.

Keywords: Hyperbolic tangent analysis, Hyperbolic tangent function, Hyperbolic tangent integral, Hyperbolic tangent derivative, Non-Newtonian analysis

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	IV
TEŞEKKÜR	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER.....	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	IX
1. GİRİŞ	1
2. NEWTONTEN OLMAYAN ANALİZ	3
2.1. α Aritmetik.....	3
2.2. $\star$ Analiz	4
2.3. Hiperbolik Fonksiyonlar.....	7
3. HİPERBOLİK TANJANT ARİTMETİK	10
3.1. Hiperbolik Tanjant Sayılar	10
3.1.1. Hiperbolik Tanjant Sıralama.....	11
3.1.4. Hiperbolik Tanjant Aritmetiğin Temel İşlemleri	11
4. HİPERBOLİK TANJANT ANALİZ	14
4.1. Hiperbolik Tanjant Mutlak Değer.....	14
4.2. Hiperbolik Tanjant Limit ve Hiperbolik Tanjant Süreklilik.....	14
4.3. Hiperbolik Tanjant Türev	17
4.4. Hiperbolik Tanjant Türevin Özellikleri.....	24
4.5. Hiperbolik Tanjant İntegral	30
4.5.1. Hiperbolik Tanjant Belirsiz İntegral	30
4.5.2. Hiperbolik Tanjant Belirli İntegral.....	33
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	36
KAYNAKÇA	37
ÖZGEÇMİŞ.....	39

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}_\alpha$: α reel sayılar kümesi

$\mathbb{Z}_\alpha$: α tam sayılar kümesi

$|x|_\alpha$: α mutlak değer fonksiyonu

$\iota: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$: $\mathbb{R}_\alpha$ dan $\mathbb{R}_\beta$ ya tanımlı izomorfizma

$M_\alpha\{\dots\}$: α ortalama

$[u, v]_\alpha$: α aralık

$M_\beta f[u, v]_\alpha$: f fonksiyonunun $[u, v]_\alpha$ α -aralığında $\star$ -ortalaması

${}^t\lim_{x \rightarrow a} f(x)$: f fonksiyonunun a noktasındaki hiperbolik tanjant limiti

$f'^t(x_0)$: f fonksiyonunun x_0 noktasındaki hiperbolik tanjant türevi

${}^t\int f(x)dx$: f fonksiyonunun hiperbolik tanjant belirsiz integrali

1. GİRİŞ

Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz'in oluşturduğu analizde (Newton analizi) bir büyüklükte meydana gelen küçük değişimler (artışlar) çıkarma işlemiyle hesaplanmaktadır. Bu analiz bir büyüklüğün anlık değişim hızını hesaplamak (veya iki büyüklükteki anlık değişimleri karşılaştırmak) için çıkarma işlemiyle bulunan farkların bölümüne dayanan türevi kullanmaktadır. Geometrik olarak (Kartezyen düzlemde) bir noktada fonksiyona yaklaşım o noktada fonksiyonun grafiğine teğet olan (polinom olarak) doğrusal bir fonksiyon ile yapılır. Keşfedildiği 17. Yüzyılın sonundan günümüze toplamsal türev ve integrale dayanan Newtonyen diferansiyel ve integral hesabı bilimin en önemli araçlarından biri haline gelmiştir. (Gürbulak, 2023)

Michael Grossman ve Robert Katz, Newtonyen olmayan analizleri (geometrik analiz, harmonik analiz, kuadratik analizi ve diğerlerini) 1970 yılı ve öncesinde tanımlamışlar ve önemli temel bilgileri vermişlerdir (Grossman ve Katz, 1972; Grossman, 1979).

Geometrik analiz önemli bir Newtonyen olmayan analizdir. Dick Stanley ve Duff Campbell'ın bu analiz ile ilgili çalışmaları vardır (Stanley, 1999; Campbell, 1999). Bu analiz ile ilgili bir diğer önemli çalışma Bashirov ve arkadaşlarının 2008'de yaptıkları çalışmadır (Bashirov vd., 2008). Son yıllarda çarpımsal analiz ve onun çeşitli bilim dallarındaki uygulamalarını içeren pek çok sayıda çalışma yapılmıştır (Gürefe, 2009; Filip ve Piatecki, 2014; Córdova-Lepe, 2006; Córdova-Lepe vd., 2015; Florack ve van Assen, 2012; Çakmak ve Başar, 2012; Goktas vd., 2022; Göktas vd., 2022; Gulsen vd., 2022; Gülşen, 2023; Yalçın, 2016; Duyar ve Erdoğan, 2020; Yalçın, 2021; Yalçın ve Dedetürk, 2021; Yılmaz vd., 2023; Güngör ve Durmaz, 2020; Yalcın ve Dedetürk, 2023; Bal, Yalçın ve Dedetürk, 2023).

İlk olarak Jane Grossman, Michael Grossman ve Robert Katz, üretici $\tanh(x/2)$ olan sigmoidal aritmetiği, 1983 yılında tanıtmışlardır. Bu aritmetik ile ilgili toplama ve çıkarma işlemlerini vermişlerdir (Grossman vd., 1983).

$\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t = (-1,1)$ hiperbolik tanjant fonksiyonu birebir ve örten fonksiyondur. $\operatorname{atanh} : \mathbb{R}_t = (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ ile hiperbolik tanjant fonksiyonunun tersi gösterilsin. Marek Czachor, 2021 yılındaki makalesinde hiperbolik tanjant fonksiyonunun, $\tanh(x)$, üretici olduğu aritmetiği ve ilgili $\oplus$ toplama, $\ominus$ çıkarma, $\odot$ çarpma ve $\oslash$ bölme işlemlerinin tanımını aşağıdaki gibi vermiştir: $\forall x, y \in \mathbb{R}_t$ için

$$\begin{aligned}
x \oplus y &= \tanh[\operatorname{atanh}(x) + \operatorname{atanh}(y)] \\
x \ominus y &= \tanh[\operatorname{atanh}(x) - \operatorname{atanh}(y)] \\
x \odot y &= \tanh[\operatorname{atanh}(x) \cdot \operatorname{atanh}(y)] \\
x \oslash y &= \tanh[\operatorname{atanh}(x)/\operatorname{atanh}(y)], y \neq 0
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlamıştır (Czachor, 2021). Eğer $\prec$ sıralama işlemi

$$x \prec y \Leftrightarrow \operatorname{atanh}(x) < \operatorname{atanh}(y)$$

olarak verilirse Czachor'un yazdığı gibi $(\mathbb{R}_t, \oplus, \ominus, \odot, \oslash, \prec)$ bir α aritmetik tanımlar. Hiperbolik tanjant fonksiyonu bu aritmetiğin üreticidir. Czachor bu yeni aritmetik ile ilgili türev ve integral tanımı verilerek yeni bir analiz tanımlanabileceğini belirtmiştir (Czachor, 2021). Fakat bu analizin türev ve integralini tanımlamamıştır. Bu tez çalışmasında $\alpha(x) = \tanh(x)$ hiperbolik tanjant fonksiyonunun üretici olduğu Newtonyen olmayan analizin türev ve integrali ilk kez tanıtılmış ve bu analizle ilgili temel tanım ve teoremler ilk kez verilmiştir.

2. NEWTONTEN OLMAYAN ANALİZ

Bu bölümde α aritmetik, $\star$ analiz ve hiperbolik fonksiyonlarla ilgili temel bilgiler verilmiştir. Bunun için Grossman ve Katz'ın kitabı (Grossman ve Katz, 1972), Murat Erdoğan'ın yüksek lisans tezi (Erdoğan, 2016), Tekin ve Başar'ın makalesi (Tekin ve Başar, 2013) ve Thomas ve arkadaşlarının analiz kitabı (Thomas vd., 2009) kaynak olarak kullanılmıştır.

2.1. α Aritmetik

Tanım 2.1: $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ birebir ve örten fonsiyon olsun. α toplama ($\dot{+}$), α çıkarma ($\dot{-}$), α çarpma ($\dot{\times}$), α bölme ($\dot{/}$) işlemleri aşağıdaki biçimde tanımlanır: $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

- i) $x \dot{+} y = \alpha(\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y))$,
- ii) $x \dot{-} y = \alpha(\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y))$,
- iii) $x \dot{\times} y = \alpha(\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y))$,
- iv) $x \dot{/} y = \alpha(\alpha^{-1}(x) / \alpha^{-1}(y))$, $y \neq \alpha(0)$

(Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.2: $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ birebir ve örten fonsiyon olsun. α sıralama bağıntısı ($\dot{<}$) aşağıdaki biçimde tanımlanır: $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$x \dot{<} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

(Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.3: $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ birebir ve örten fonsiyon olsun. Bu durumda eğer $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ tam sıralı cisim ise bu cisim, aritmetik veya α -aritmetik olarak adlandırılır. Ayrıca α bir üreteç olarak adlandırılır (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.4: α sayı kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972):

- a) α reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_\alpha = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}\}$,
- b) α pozitif reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_\alpha^+ = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$,
- c) α negatif reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_\alpha^- = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}, x < 0\}$,
- d) α negatif olmayan reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_\alpha^{+,0} = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$,
- e) α pozitif olmayan reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_\alpha^{-,0} = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$,
- f) α tam sayılar kümesi: $\mathbb{Z}_\alpha = \{\alpha(n) | n \in \mathbb{Z}\}$

Gösterim 2.1: $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ aritmetiği verilsin. $a \in \mathbb{R}$ bir reel sayı olmak üzere $\dot{a}$ ile

$$\dot{a} = \alpha(a)$$

α reel sayısı gösterilecektir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.5: $|\cdot|_\alpha: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha^{+,0}$, α mutlak değer fonksiyonu

$$|x|_\alpha = \begin{cases} x, & x \dot{>} \dot{0} \text{ veya } x = \dot{0}, \\ \dot{0} \dot{-} x, & x \dot{<} \dot{0}. \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972).

2.2. ★ Analiz

İki keyfî aritmetik α aritmetik = $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ ve β aritmetik = $(\mathbb{R}_\beta, \ddot{+}, \ddot{-}, \ddot{\times}, \ddot{/}, \ddot{<})$ olarak alınsın. ★ (yıldız) ise bu iki aritmetiğin ★ = (α aritmetik, β aritmetik) biçiminde sıralı ikilisi olsun. ★ analizde fonksiyonların tanım kümesi α aritmetikte bir küme ($\mathbb{R}_\alpha$ 'nın bir alt kümesi) ve değer kümesi ise β aritmetikte bir küme ($\mathbb{R}_\beta$ 'nin bir alt kümesi) olarak alınacaktır. Bu bölümde keyfî bir f fonksiyonu

$$f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$$

olarak kabul edilecektir (Grossman ve Katz, 1972).

α aritmetik = $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ ve β aritmetik = $(\mathbb{R}_\beta, \ddot{+}, \ddot{-}, \ddot{\times}, \ddot{/}, \ddot{<})$ tam sıralı cisim olduklarından birbirlerine izomorftur. Tek türlü belirli olan $\iota: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ izomorfizması, birebir ve örten fonksiyondur ve aşağıdaki şartları sağlar: $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$

- i) $\iota(x \dot{+} y) = \iota(x) \ddot{+} \iota(y)$,
- ii) $\iota(x \dot{-} y) = \iota(x) \ddot{-} \iota(y)$,
- iii) $\iota(x \dot{\times} y) = \iota(x) \ddot{\times} \iota(y)$,
- iv) $\iota(x \dot{/} y) = \iota(x) \ddot{/} \iota(y), y \neq \dot{0}$,
- v) $x \dot{<} y \Leftrightarrow \iota(x) \ddot{<} \iota(y)$

(Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.6: Eğer her $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ için $\dot{0} \dot{<} |x \dot{-} x_0|_\alpha \dot{<} \delta$ iken $|f(x) \ddot{-} L|_\beta \ddot{<} \varepsilon$ kalacak şekilde $\delta \dot{>} \dot{0}$ varsa f fonksiyonunun $x, x_0 \in \mathbb{R}_\alpha$ noktasına yaklaşırken ★ limiti L 'dir

denir

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

ile gösterilir (Tekin ve Başar, 2013).

Tanım 2.7: Eğer $\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ise f fonksiyonuna $x_0 \in \mathbb{R}_\alpha$ noktasında $\star$ süreklidir denir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.8: $f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki $\star$ limit var ise $x_0 \in A$ noktasında f 'nin $\star$ türevi

$$\star Df(x_0) = \star \lim_{x \rightarrow x_0} \{ [f(x) \dot{-} f(x_0)] / [l(x) \dot{-} l(x_0)] \}$$

olarak tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.9: $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_\alpha$, verilmiş n tane α -reel sayı olsun. Bu n tane sayının α -ortalaması

$$(x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} \dots \dot{+} x_n) / \dot{n}$$

formülü ile bulunan α -sayısıdır (Grossman ve Katz, 1972).

Gösterim 2.2: $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_\alpha$ sayılarının α -ortalamasını göstermek için

$$M_\alpha\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = (x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} \dots \dot{+} x_n) / \dot{n}$$

kullanılacaktır.

Önerme 2.1: $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_\alpha$ sayılarının α -ortalaması için

$$M_\alpha\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \alpha \left(\frac{\alpha^{-1}(x_1) + \alpha^{-1}(x_2) + \dots + \alpha^{-1}(x_n)}{n} \right)$$

eşitliği geçerlidir (Grossman ve Katz, 1972).

İspat:

$$M_\alpha\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = (x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} \dots \dot{+} x_n) / \dot{n}$$

$$M_\alpha\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \alpha(\alpha^{-1}(x_1) + \alpha^{-1}(x_2) + \dots + \alpha^{-1}(x_n)) / \alpha(n)$$

$$M_\alpha\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \alpha\left(\frac{\alpha^{-1}[\alpha(\alpha^{-1}(x_1) + \alpha^{-1}(x_2) + \dots + \alpha^{-1}(x_n))]}{\alpha^{-1}(\alpha(n))}\right)$$

$$M_\alpha\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \alpha\left(\frac{\alpha^{-1}(x_1) + \alpha^{-1}(x_2) + \dots + \alpha^{-1}(x_n)}{n}\right)$$

Tanım 2.10: $(x_n)_{1 \leq n \leq m}$ terimleri $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinden seçilen bir sonlu dizi ve $K \in \mathbb{R}_\alpha$ olsun. Eğer bu dizinin ardışık herhangi iki teriminin

$$x_{n+1} \dot{-} x_n = K, n = 1, 2, \dots, m-1,$$

farkı sabit ise bu sonlu diziye bir α -ilerleme denir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.11: $\{x \in \mathbb{R}_\alpha | u \dot{\leq} x \dot{\leq} v; u, v \in \mathbb{R}_\alpha\}$ kümesi bir α -aralık olarak adlandırılır ve

$$[u, v]_\alpha = \{x \in \mathbb{R}_\alpha | u \dot{\leq} x \dot{\leq} v; u, v \in \mathbb{R}_\alpha\}$$

ile gösterilir (Grossman ve Katz, 1972).

Reel sayılarda olduğu gibi uç noktaların dahil olup olmamasına göre açık, kapalı ve yarı-açık α -aralıklar tanımlanabilir.

Altta α -parçalanışın tanımı verilecektir. Bu tanım Grossman ve Katz'ın verdiği tanımdan farklıdır.

Tanım 2.12: $[u, v]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha$ kapalı α -aralığı verilsin. $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinin terimlerinden oluşan bir $(x_n)_{1 \leq n \leq m}$ sonlu dizisi için

$$u = x_1 \dot{<} x_2 \dot{<} x_3 \dot{<} \dots \dot{<} x_m = v$$

sıralaması geçerli olsun. Bu durumda $(x_n)_{1 \leq n \leq m}$ sonlu dizisine $[u, v]_\alpha$ aralığının bir α -parçalanışı (bölüntüsü) denir.

Tanım 2.13: m terimden oluşan bir α -parçalanışa m -katlı denir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.14: $(x_n)_{1 \leq n \leq m}$ sonlu dizisi $[u, v]_\alpha$ aralığının bir α -parçalanışı olsun. Eğer $(x_n)_{1 \leq n \leq m}$ bir α -ilerleme ise bu α -parçalanışa tekdüzedir (uniformdur) denir.

Tanım 2.15: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ terimleri $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinde olan sonsuz bir dizi ve $x \in \mathbb{R}_\alpha$ olsun. Eğer x elemanının içinde bulunduğu her açık α -aralık aynı zamanda sonlu sayıdaki

terimleri hariç (x_n) dizisinin bütün terimlerini içeriyorsa x elemanına (x_n) dizisinin α -limiti denir. (x_n) dizisi, x elemanına α -yakınsar denir (Grossman ve Katz, 1972).

Aşağıda $\star$ -süreklili bir fonksiyonun kapalı $[u, v]_\alpha$ α -aralığında $\star$ -ortalamasının tanımı verilecektir. Bu tez çalışmasında bu ortalama $M_\beta f[u, v]_\alpha$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.16: $f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu $\star$ -süreklili bir fonksiyon olsun. Ayrıca $(x_n)_{1 \leq n \leq m}$ dizisi $[u, v]_\alpha \subset A$ aralığının m -katlı tekdüze α -parçalanışı olsun. Bu durumda f fonksiyonunun kapalı $[u, v]_\alpha$ α -aralığında $\star$ -ortalaması eğer yakınsak ise

$$M_\beta f[u, v]_\alpha = {}^\beta \lim_{m \rightarrow \infty} M_\beta \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)\}$$

biçimindeki β -limit ile tanımlanır ve $M_\beta f[u, v]_\alpha$ ile gösterilir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.17: $f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$ bir $\star$ -süreklili fonksiyon olsun. f 'nin $[u, v]_\alpha \subset A$ kapalı aralığında $\star$ integrali

$$\int_{[u, v]_\alpha}^* f = [\iota(v) \dot{-} \iota(u)] \dot{\times} M_\beta f[u, v]_\alpha$$

olarak tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972).

2.3. Hiperbolik Fonksiyonlar

Tanım 2.18: Hiperbolik sinüs ($\sinh$), hiperbolik kosinüs ($\cosh$), hiperbolik tanjant ($\tanh$), hiperbolik kotanjant ($\coth$) fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

a) $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$

b) $\cosh: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty), \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$

c) $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\tanh} = (-1, 1), \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)},$

d) $\coth: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus (-1, 1), \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}, x \neq 0$

(Thomas vd., 2009)

Önerme 2.2: Hiperbolik fonksiyonlar aşağıdaki özdeşlikleri sağlar: $\forall x, y \in \mathbb{R}_t,$

a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1,$

b) $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$

c) $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$

d) $\tanh(x + y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x) \cdot \tanh(y)},$

$$e) \tanh(x - y) = \frac{\tanh(x) - \tanh(y)}{1 - \tanh(x) \cdot \tanh(y)}$$

(Thomas vd., 2009).

İspat:

a)

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= [\cosh(x) + \sinh(x)][\cosh(x) - \sinh(x)] \\ &= [\cosh(x) + \sinh(x)][\cosh(-x) + \sinh(-x)] \\ &= e^x \cdot e^{-x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2[e^{x+y} - e^{-(x+y)}] \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \\ &= \sinh(x + y) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y) &= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right] + \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2[e^{x+y} + e^{-(x+y)}] \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} \\ &= \cosh(x + y) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \tanh(x + y) &= \frac{\sinh(x + y)}{\cosh(x + y)} \\ &= \frac{\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)}{\cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)} \\ &= \frac{[\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)] \div [\cosh(x) \cosh(y)]}{[\cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)] \div [\cosh(x) \cosh(y)]} \\ &= \frac{\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} + \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}}{1 + \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \cdot \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}} \\ \tanh(x + y) &= \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x) \tanh(y)} \end{aligned}$$

e) Bir üstteki şıkta y yerine $(-y)$ yazılır ve $\tanh(x)$ 'in tek fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\tanh(x - y) &= \tanh(x + (-y)) \\
&= \frac{\tanh(x) + \tanh(-y)}{1 + \tanh(x) \tanh(-y)} \\
\tanh(x - y) &= \frac{\tanh(x) - \tanh(y)}{1 - \tanh(x) \cdot \tanh(y)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.3: Hiperbolik fonksiyonların türevleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

- i) $\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh(x),$
- ii) $\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh(x),$
- iii) $\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \frac{1}{\cosh^2(x)},$
- iv) $\frac{d}{dx}(\coth(x)) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$

(Thomas vd., 2009).

Hiperbolik fonksiyonların tersleri, ters hiperbolik fonksiyonlar olarak söylenir ve hiperbolik fonksiyonların başlarına “a” veya “ar” getirilerek gösterilebilecekleri gibi sağ üst kısmına “-1” yazılarak da gösterilebilirler. Bu çalışmada, hiperbolik fonksiyonların başlarına “a” yazılarak ters hiperbolik fonksiyonlar aşağıda görüleceği gibi ifade edilmiştir:

- a) $\operatorname{asinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$
- b) $\operatorname{acosh}: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty),$
- c) $\operatorname{atanh}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R},$
- d) $\operatorname{acoth}: \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(Thomas vd., 2009).

Önerme 2.4: Ters hiperbolik tanjant fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dx} \operatorname{atanh}(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

olarak hesaplanır (Thomas vd., 2009).

3. HİPERBOLİK TANJANT ARİTMETİK

Bu bölümde hiperbolik tanjant sayı kümeleri, bu sayı kümelerinde sıralama bağıntıları, hiperbolik tanjant aritmetikte kullanılan temel işlemler verilmiştir.

3.1. Hiperbolik Tanjant Sayılar

Hiperbolik tanjant aritmetikte dört işlem ve diğer işlemleri yapabilmek için önce hiperbolik tanjant sayılar tanımlanmalıdır. Aşağıda hiperbolik tanjant aritmetik için reel sayılar, tam sayılar ve doğal sayılar tanımlanacaktır.

Tanım 3.1: Hiperbolik tanjant aritmetik için reel sayı, tam sayı ve doğal sayı kümeleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\mathbb{R}_t = \{\tanh(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = (-1,1),$$

$$\mathbb{Z}_t = \{\tanh(n) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathbb{N}_t = \{\tanh(n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Hiperbolik tanjant pozitif ve hiperbolik tanjant negatif sayılar sırasıyla aşağıdaki biçimde gösterilecektir.

$$\mathbb{R}_t^+ = \{\tanh(x) \mid x \in \mathbb{R}^+\} = \{e^x \mid x > 0\} = (0,1),$$

$$\mathbb{R}_t^- = \{\tanh(x) \mid x \in \mathbb{R}^-\} = \{e^x \mid x < 0\} = (-1,0)$$

$$\mathbb{Z}_t^+ = \{\tanh(n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\} = \{e^n \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0\},$$

$$\mathbb{Z}_t^- = \{\tanh(n) \mid n \in \mathbb{Z}^-\} = \{e^n \mid n \in \mathbb{Z}, n < 0\}.$$

Ayrıca, hiperbolik tanjant aritmetikte negatif olmayan ve pozitif olmayan reel sayılar ile tam sayılar şu şekilde verilir:

$$\mathbb{R}_t^{+,0} = \{\tanh(x) \mid x \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}_t^{-,0} = \{\tanh(x) \mid x \leq 0\},$$

$$\mathbb{Z}_t^{+,0} = \{\tanh(n) \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\},$$

$$\mathbb{Z}_t^{-,0} = \{\tanh(n) \mid n \in \mathbb{Z}, n \leq 0\}.$$

3.1.1. Hiperbolik Tanjant Sıralama

Tanım 3.2: $\mathbb{S} = \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{S}_t$ sayı kümesinde sıralama aşağıdaki biçimde tanımlanır: $\forall x, y \in \mathbb{S}_t$

$$x <_t y \Leftrightarrow \operatorname{atanh}(x) < \operatorname{atanh}(y)$$

Önerme 3.1: $x, y \in \mathbb{R}_t$ sayıları verilsin. Bu durumda

$$x <_t y \Leftrightarrow x < y$$

çift gerektirmesi geçerlidir.

İspat: Hiperbolik tanjantın ters fonksiyonu olan $\operatorname{atanh}(x)$ artan fonksiyon olduğundan sıralamayı korur:

$$\operatorname{atanh}(x) < \operatorname{atanh}(y) \Leftrightarrow x < y$$

Buradan $x, y \in \mathbb{R}_t$ için $x <_t y \Leftrightarrow x < y$ geçerli olduğu görülür.

Hiperbolik tanjant reel sayılardaki sıralama ile reel sayı kümesindeki sıralama aynı şekilde olduğundan çalışmanın devamında $<_t$ sıralaması yerine $<$ kullanılacaktır.

3.1.4. Hiperbolik Tanjant Aritmetiğin Temel İşlemleri

Tanım 3.3: $x, y \in \mathbb{R}_t$ olmak üzere hiperbolik tanjant aritmetiğin dört temel işlemi aşağıda verilmiştir:

i) $x \oplus_t y = \tanh[\operatorname{atanh} x + \operatorname{atanh} y] = \frac{x+y}{1+x \cdot y}$

ii) $x \ominus_t y = \tanh[\operatorname{atanh} x - \operatorname{atanh} y] = \frac{x-y}{1-x \cdot y}$

iii) $x \odot_t y = \tanh[\operatorname{atanh} x \cdot \operatorname{atanh} y]$

iv) $x \oslash_t y = \tanh[\operatorname{atanh} x \div \operatorname{atanh} y], y \neq 0$

(Czachor, 2021).

Önerme 3.2: Yukarıdaki tanımlardan dolayı aşağıdaki işlemler geçerlidir;

i) $\tanh(a) \oplus_t \tanh(b) = \tanh(a + b), \forall a, b \in \mathbb{R},$

ii) $\tanh(a) \ominus_t \tanh(b) = \tanh(a - b), \forall a, b \in \mathbb{R},$

iii) $\tanh(a) \odot_t \tanh(b) = \tanh(a \cdot b), \forall a, b \in \mathbb{R},$

iv) $\tanh(a) \oslash_t \tanh(b) = \tanh\left(\frac{a}{b}\right), \forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

İspat:

i)

$$\begin{aligned}\tanh(a) \oplus_t \tanh(b) &= \tanh[\operatorname{atanh}(\tanh(a)) + \operatorname{atanh}(\tanh(b))] \\ &= \tanh[a + b]\end{aligned}$$

Diğer şıklarda benzer şekilde ispatlanır.

Önerme 3.3: Bir $x \in \mathbb{R}_t$ sayısının hiperbolik tanjant toplama işlemine göre tersi $(-x) \in \mathbb{R}_t$ sayıdır.

İspat: Hiperbolik tanjant toplama işlemine göre etkisiz eleman $\tanh(0) = 0$ dır. x ile $(-x)$ sayılarının hiperbolik tanjant toplamı aşağıda görüleceği gibi etkisiz elemanı verdiği için bu iki eleman birbirlerinin bu toplama göre tersidir.

$$\begin{aligned}x \oplus_t (-x) &= \tanh(\operatorname{atanh}(x) + \operatorname{atanh}(-x)) \\ &= \tanh(\operatorname{atanh}(x) - \operatorname{atanh}(x)) \\ &= \tanh(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Tanım 3.4: $x \in \mathbb{R}_t, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x^{n\odot} = \tanh[(\operatorname{atanh} x)^n]$$

biçiminde tanımlanır.

Bu tanıma göre

$$x^{0\odot} = \tanh[(\operatorname{atanh} x)^0] = \tanh(1)$$

$$x^{0\odot} = \frac{\sinh(1)}{\cosh(1)} = \frac{e^1 - e^{-1}}{e^1 + e^{-1}} = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1},$$

$$x^{1\odot} = \tanh[\operatorname{atanh} x] = x$$

olur. Diğer taraftan kuvvet alma işlemi hiperbolik tanjant çarpma yapılarak da hesaplanabilir. Örneğin,

$$x^{2\odot} = x \odot_t x = \tanh[(\operatorname{atanh} x)^2],$$

$$x^{3\odot} = (x \odot_t x) \odot_t x = \tanh[(\operatorname{atanh} x)^3].$$

Verilen bu tanım, kuvvetler, reel sayı olacak şekilde genelleştirilebilir.

Tanım 3.5: $x \in \mathbb{R}_t, r \in \mathbb{R}$ için kuvvet alma işlemi şu şekilde verilir:

$$x^{r \odot t} = \tanh[(\operatorname{atanh} x)^r].$$



4. HİPERBOLİK TANJANT ANALİZ

4.1. Hiperbolik Tanjant Mutlak Değer

Bu kısımda hiperbolik tanjant mutlak değerin tanımı ve özellikleri ile birlikte örnekler verilecektir.

Tanım 4.1: $|\cdot|_t: \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}_t^{+,0}$ tanımlı ve

$$|u|_t = \begin{cases} u, & 0 \leq_t u, \\ -u, & u <_t 0 \end{cases}$$

biçimindeki fonksiyona hiperbolik tanjant mutlak değer fonksiyonu denir.

Örnek 4.1: Aşağıda iki sayının hiperbolik tanjant mutlak değerleri hesaplanmıştır.

i) $\left|\frac{1}{5}\right|_t = \frac{1}{5},$

ii) $\left|-\frac{3}{4}\right|_t = \frac{3}{4}.$

Örnek 4.2: Aşağıda verilen iki sayının hiperbolik tanjant mutlak değerleri tanımlı değildir.

i) $|2|_t$ tanımlı değildir. Çünkü $2 \notin \mathbb{R}_t,$

ii) $|-7|_t$ tanımlı değildir. Çünkü $-7 \notin \mathbb{R}_t.$

Önerme 4.1: $u, v \in \mathbb{R}_t$ olmak üzere hiperbolik tanjant mutlak değer fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- $|u|_t \geq 0,$
- $|u|_t = 0 \Leftrightarrow u = 0,$
- $|u \odot_t v|_t = |u|_t \odot_t |v|_t,$
- $|x \oplus_t y|_t \leq |x|_t \oplus_t |y|_t.$

4.2. Hiperbolik Tanjant Limit ve Hiperbolik Tanjant Süreklilik

Tanım 4.2: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonunun $x, a \in \mathbb{R}$ noktasına yaklaşırken hiperbolik tanjant limiti $L \in \mathbb{R}_t$ sayısıdır denir ancak ve ancak $\varepsilon > 0$ hiperbolik tanjant sayısı keyfi olarak seçildiğinde

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$$

için

$$f(x) \in (L \ominus_t \varepsilon, L \oplus_t \varepsilon) = \left(\frac{L - \varepsilon}{1 - L \cdot \varepsilon}, \frac{L + \varepsilon}{1 + L \cdot \varepsilon} \right)$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunabilir. Hiperbolik tanjant limit için

$${}^t\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

gösterimi kullanılacaktır.

Önerme 4.2: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonunun $x, a \in \mathbb{R}$ noktasına yaklaşırken hiperbolik tanjant limiti için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$${}^t\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \tanh \left[\lim_{x \rightarrow a} (\operatorname{atanh} \circ f)(x) \right]$$

Tanım 4.3: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonu $a \in \mathbb{R}$ noktasında hiperbolik tanjant süreklidir denir ancak ve ancak

$${}^t\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

eşitliği vardır. f bir açık I aralığındaki her noktada hiperbolik tanjant sürekli ise I aralığı üzerinde hiperbolik tanjant süreklidir denir.

Hiperbolik tanjant süreklilik için $\varepsilon - \delta$ tanımı da verilebilir.

Tanım 4.4: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonu $a \in \mathbb{R}$ noktasında hiperbolik tanjant süreklidir denir ancak ve ancak $\varepsilon > 0$ hiperbolik tanjant sayısı keyfi olarak seçildiğinde

$$x \in (a - \delta, a + \delta)$$

için

$$f(x) \in (f(a) \ominus_t \varepsilon, f(a) \oplus_t \varepsilon) = \left(\frac{f(a) - \varepsilon}{1 - f(a) \cdot \varepsilon}, \frac{f(a) + \varepsilon}{1 + f(a) \cdot \varepsilon} \right)$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunabilir.

Örnek 4.3: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$, $g(x) = (3^x - 1)/(3^x + 1)$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun $x = 2$ noktasında hiperbolik tanjant sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Öncelikle

$$\begin{aligned}
|g(x) \ominus_t g(2)|_t &= \left| \frac{g(x) - g(2)}{1 - g(x) \cdot g(2)} \right|_t \\
&= \left| \frac{\frac{3^x - 1}{3^x + 1} - \frac{3^2 - 1}{3^2 + 1}}{1 - \frac{3^x - 1}{3^x + 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2 + 1}} \right|_t \\
&= \left| \frac{\frac{3^x - 1}{3^x + 1} - \frac{4}{5}}{1 - \frac{3^x - 1}{3^x + 1} \cdot \frac{4}{5}} \right|_t \\
&= \left| \frac{\frac{3^x - 9}{5 \cdot (3^x + 1)}}{\frac{3^x + 9}{5 \cdot (3^x + 1)}} \right|_t \\
&= \left| \frac{3^x - 9}{3^x + 9} \right|_t \\
&= \left| \frac{(3^x - 9) \cdot 3^{-(x+2)/2}}{(3^x + 9) \cdot 3^{-(x+2)/2}} \right|_t \\
&= \left| \frac{3^{(x-2)/2} - 3^{-(x-2)/2}}{3^{(x-2)/2} + 3^{-(x-2)/2}} \right|_t \\
&= \left| \frac{e^{\frac{\ln 3}{2}(x-2)} - e^{\frac{-\ln 3}{2}(x-2)}}{e^{\frac{\ln 3}{2}(x-2)} + e^{\frac{-\ln 3}{2}(x-2)}} \right|_t \\
&= \left| \tanh \left(\frac{\ln 3}{2} (x - 2) \right) \right|_t \\
&= \tanh \left(\left| \frac{\ln 3}{2} (x - 2) \right| \right) \\
&= \tanh \left(\frac{\ln 3}{2} |x - 2| \right),
\end{aligned}$$

yani

$$|g(x) \ominus_t g(2)|_t = \tanh \left(\frac{\ln 3}{2} |x - 2| \right)$$

olduğuna dikkat edelim. Hiperbolik tanjant sürekliliği göstermek için $\varepsilon - \delta$ tanımını kullanalım. Her $0 < \varepsilon < 1$ için $\delta = \frac{2}{\ln 3} \operatorname{atanh}(\varepsilon)$ alınırsa $|x - 2| < \delta$ iken

$$\begin{aligned} |x - 2| < \delta &= \frac{2}{\ln 3} \operatorname{atanh}(\varepsilon) \\ \frac{\ln 3}{2} |x - 2| &< \operatorname{atanh}(\varepsilon) \\ \tanh\left(\frac{\ln 3}{2} |x - 2|\right) &< \varepsilon \end{aligned}$$

ve böylece

$$|g(x) \ominus_t g(2)|_t < \varepsilon$$

olduğu görülür.

4.3. Hiperbolik Tanjant Türev

f sürekli fonksiyonu için

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

limiti varsa bu limit değerine $f(x)$ fonksiyonunun klasik anlamda türevi denir.

Tanım 4.5: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonu verilsin. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $x_0 \in I$ ise varlığı halinde

$$f'^t(x_0) = {}^t\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) \ominus_t f(x_0)] \oslash_t \tanh(h)$$

limitiyle bulunan sayıya f fonksiyonunun x_0 noktasındaki hiperbolik tanjant türevi denir.

Gösterim 4.1: $f(x), f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonunun bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasındaki hiperbolik tanjant türevi

$$f'^t(x_0) \text{ veya } (f(x))'_{x=x_0}$$

ile gösterilecektir.

Gösterim 4.2: $D_t f(x)$ ile $f(x)$ fonksiyonunun hiperbolik tanjant türev fonksiyonu gösterilecektir.

Tek taraflı hiperbolik tanjant türevler, hiperbolik tanjant limit kullanılarak klasik analizdeki tek taraflı türevlere benzer şekilde tanımlanır.

Teorem 4.1: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonu hem klasik anlamda hem de hiperbolik tanjant anlamda türevlenebilir olsun. Bu durumda bu iki türev arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$f'^t(x) = \tanh((\operatorname{atanh} \circ f)'(x))$$

veya

$$f'^t(x) = \tanh\left(\frac{f'(x)}{1 - f^2(x)}\right).$$

İspat:

$$f'^t(x) = {}^t\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) \ominus_t f(x)] \oslash_t \tanh(h)$$

$$f'^t(x) = {}^t\lim_{h \rightarrow 0} \tanh[\operatorname{atanh}(f(x+h)) - \operatorname{atanh}(f(x))] \oslash_t \tanh(h)$$

$$f'^t(x) = {}^t\lim_{h \rightarrow 0} \tanh\left(\frac{\operatorname{atanh}(f(x+h)) - \operatorname{atanh}(f(x))}{h}\right)$$

$$f'^t(x) = \tanh\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{atanh}(f(x+h)) - \operatorname{atanh}(f(x))}{h}\right)$$

$$f'^t(x) = \tanh\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{atanh} \circ f)(x+h) - (\operatorname{atanh} \circ f)(x)}{h}\right)$$

$$f'^t(x) = \tanh((\operatorname{atanh} \circ f)'(x))$$

$$f'^t(x) = \tanh\left(\frac{1}{1 - f^2(x)} \cdot f'(x)\right)$$

Buradan

$$f'^t(x) = \tanh\left(\frac{f'(x)}{1 - f^2(x)}\right)$$

eşit olduğu görülür.

Örnek 4.4: $f(x) = \frac{5^x - 3^x}{5^x + 3^x}$ fonksiyonunun hiperbolik tanjant türevini bulunuz.

Çözüm: Önce $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \frac{5^x - 3^x}{5^x + 3^x} = \frac{(5^x - 3^x) \cdot 3^{-x}}{(5^x + 3^x) \cdot 3^{-x}}$$

eşit olduğundan

$$f(x) = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1}{\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1}$$

biçiminde yazılabilir. Bu fonksiyonun türevi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1\right]' \cdot \left[\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right] - \left[\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1\right] \left[\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right]'}{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right]^2} \\ &= \frac{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{5}{3}\right] \cdot \left[\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right] - \left[\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1\right] \cdot \left[\left(\frac{5}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{5}{3}\right]}{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right]^2} \\ &= \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{5}{3} \cdot \left\{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right] - \left[\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1\right]\right\}}{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right]^2} \\ f'(x) &= \frac{2 \cdot \ln \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x}{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right]^2} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve ayrıca

$$1 - f^2(x) = 1 - \left[\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1}{\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1}\right]^2$$

$$\begin{aligned}
1 - f^2(x) &= 1 - \frac{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1\right]^2}{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right]^2} \\
&= 1 - \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} + 2\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1} \\
&= \frac{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} + 2\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right] - \left[\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right]}{\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} + 2\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1} \\
1 - f^2(x) &= \frac{4\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right]^2}
\end{aligned}$$

olduğuna dikkat edelim. Hiperbolik tanjant türev ile ilgili yukarıdaki teoremden,

$$\begin{aligned}
f'^t(x) &= \tanh\left(\frac{f'(x)}{1 - f^2(x)}\right) \\
&= \tanh\left(\frac{2 \cdot \ln \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x}{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right]^2} \div \frac{4\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right]^2}\right) \\
f'^t(x) &= \tanh\left(\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}\right)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Örnek 4.5: $f(x) = \frac{e^{6+10x}-1}{e^{6+10x}+1}$ fonksiyonunun hiperbolik tanjant türevini bulunuz.

Çözüm: Öncelikle

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{10e^{6+10x} \cdot (e^{6+10x} + 1) - (e^{6+10x} - 1) \cdot 10e^{6+10x}}{(e^{6+10x} + 1)^2} \\
f'(x) &= \frac{20e^{6+10x}}{(e^{6+10x} + 1)^2}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve

$$\begin{aligned}
1 - f^2(x) &= 1 - \left(\frac{e^{6+10x} - 1}{e^{6+10x} + 1} \right)^2 \\
&= 1 - \frac{(e^{6+10x} - 1)^2}{(e^{6+10x} + 1)^2} \\
&= \frac{(e^{6+10x} + 1)^2 - (e^{6+10x} - 1)^2}{(e^{6+10x} + 1)^2} \\
&= \frac{2 \cdot 2e^{6+10x}}{(e^{6+10x} + 1)^2} \\
1 - f^2(x) &= \frac{4e^{6+10x}}{(e^{6+10x} + 1)^2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Hiperbolik tanjant türev ile ilgili yukarıdaki teorem yardımıyla,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \tanh \left(\frac{f'(x)}{1 - f^2(x)} \right) \\
&= \tanh \left(\frac{20e^{6+10x}}{(e^{6+10x} + 1)^2} \div \frac{4e^{6+10x}}{(e^{6+10x} + 1)^2} \right) \\
&= \tanh(5)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

g fonksiyonu a noktasında klasik anlamda sürekli olup fakat bu noktada hiperbolik tanjant türevi var olmayabilir.

Örnek 4.6:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

şeklinde parçalı fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyonun $x = 0$ noktasında sürekli olduğunu ancak hiperbolik tanjant türevlenemeyeceğini gösteriniz.

Çözüm: $g(x)$ yukarıdaki gibi tanımlanırsa

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} g(h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} g(h) = g(0) = 0$$

eşitliklerinden g fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekli olduğu tespit edilir. Hiperbolik tanjant türevlenebilir olup olmadığını anlamak için tek taraflı limitleri hesaplayalım. Sağ taraftan türev

$$\begin{aligned}
{}^t \lim_{h \rightarrow 0^+} \tanh((\operatorname{atanh} \circ g)'(h)) &= \tanh \left\{ \lim_{h \rightarrow 0^+} (\operatorname{atanh} \circ g)'(h) \right\} \\
&= \tanh \left\{ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g'(h)}{1 - g^2(h)} \right\} \\
&= \tanh \left\{ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{4} \sin(h)}{1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos h\right)^2} \right\} \\
&= \tanh(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan sol taraftan türev

$$\begin{aligned}
{}^t \lim_{h \rightarrow 0^-} \tanh((\operatorname{atanh} \circ g)'(h)) &= \tanh \left\{ \lim_{h \rightarrow 0^-} (\operatorname{atanh} \circ g)'(h) \right\} \\
&= \tanh \left\{ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2} \cos(h)}{1 - \frac{1}{4} \sin^2(h)} \right\} \\
&= \tanh \left\{ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}}{1} \right\} \\
&= \tanh\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde $g'^t(0)$ mevcut değildir. Yani fonksiyonun $x = 0$ noktasında hiperbolik tanjant türevi yoktur.

Teorem 4.2: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonu bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında hiperbolik tanjant türevlenebilirdir ancak ve ancak o noktada klasik anlamda türevlenebilirdir.

İspat: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$, x noktasında klasik türevlenebilir olsun. $|f(x)| \neq 1$ olduğundan $1 - f^2(x) \neq 0$ dir. Bundan dolayı

$$f'^t(x) = \tanh\left(\frac{f'(x)}{1 - f^2(x)}\right)$$

eşitliğinin sağ tarafının tanımlı olduğu görülür yani f fonksiyonunun x noktasındaki hiperbolik tanjant türevi vardır.

Diğer yandan, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonu x noktasında hiperbolik tanjant türevlenebilir olsun.

$$f'(x) = (1 - f^2(x)) \cdot (\operatorname{atanh} \circ f'_t)(x)$$

eşitliği vardır. $f'_t(x) \in \mathbb{R}_t$ olduğundan $(\operatorname{atanh} \circ f'_t)(x) \in \mathbb{R}$ olur. Ayrıca $f(x)$ tanımlı olduğu her yerde $(1 - f^2(x))$ tanımlıdır. Böylelikle f fonksiyonunun x noktasındaki klasik türevinin tanımlı olduğu görülür. ■

Teorem 4.3: Sırasıyla hiperbolik tanjant anlamda türevlenebilir ve klasik anlamda türevlenebilir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. $(f \circ g)(x)$, fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$(f \circ g)'_t(x) = \tanh \left\{ \frac{f'(g(x)) \cdot g'(x)}{1 - (f \circ g)^2(x)} \right\}.$$

İspat:

$$\begin{aligned} (f \circ g)'_t(x) &= \tanh\{(\operatorname{atanh} \circ (f \circ g))'(x)\} \\ &= \tanh \left\{ \frac{(f \circ g)'(x)}{1 - (f \circ g)^2(x)} \right\} \\ &= \tanh \left\{ \frac{f'(g(x)) \cdot g'(x)}{1 - (f \circ g)^2(x)} \right\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. ■

Gösterim 4.3: g''_t ile g'_t fonksiyonunun hiperbolik tanjant türevi gösterilir ve g fonksiyonunun ikinci mertebeden hiperbolik tanjant türevi olarak adlandırılır.

Tanım 4.6: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonunun $x \in \mathbb{R}$ noktasında n kez tekrarlanan türev alma işlemi ile n . mertebeden hiperbolik tanjant türevi

$$g^{(n)}_t(x) = \tanh \left\{ \frac{d^n}{dx^n} (\operatorname{atanh} \circ g)(x) \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.4: f fonksiyonunun a noktasında hiperbolik tanjant türevi varsa bu noktada klasik anlamda süreklidir.

İspat: f fonksiyonunun a noktasında hiperbolik tanjant türevi varsa klasik anlamda da türevi vardır. Bu sebeple f fonksiyonunun a noktasında klasik anlamda sürekli olduğu görülür. ■

4.4. Hiperbolik Tanjant Türevin Özellikleri

Teorem 4.5: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonu verilsin. $f'^t(x) = 0$ eşittir ancak ve ancak $f(x) = C \in \mathbb{R}_t$ şeklinde sabit bir fonksiyondur.

İspat: $f(x) = C \in \mathbb{R}_t$ ise

$$f'^t(x) = \tanh\left(\frac{C'}{1-C^2}\right) = \tanh 0 = 0$$

bulunur. Diğer yandan $f'^t(x) = 0$ ise

$$\begin{aligned} f'^t(x) &= 0 \\ \tanh\{(\operatorname{atanh} \circ f)'(x)\} &= 0 \\ (\operatorname{atanh} \circ f)'(x) &= 0 \\ (\operatorname{atanh} \circ f)(x) &= c, c \in \mathbb{R} \\ \operatorname{atanh}(f(x)) &= c \\ f(x) &= C, \end{aligned}$$

eşit olur. Burada $C = \tanh(c) \in \mathbb{R}_t$ keyfi sabittir. ■

Teorem 4.6: $f(x) = \tanh(cx)$, ($c \in \mathbb{R}$ sabit) fonksiyonunun hiperbolik tanjant türevi, $D_t \tanh(cx) = \tanh(c)$ biçiminde sabit bir fonksiyondur.

İspat:

$$\begin{aligned} D_t \tanh(cx) &= \tanh\left\{\frac{d}{dx}[\operatorname{atanh}(\tanh(cx))]\right\} \\ &= \tanh\left(\frac{d}{dx}(cx)\right) \\ &= \tanh(c) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

■

Örnek: $f(x) = \frac{5^x - 3^x}{5^x + 3^x}$ fonksiyonunun hiperbolik tanjant türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{5^x - 3^x}{5^x + 3^x} \\
 &= \frac{(5^x - 3^x) \div (5^{x/2} \cdot 3^{x/2})}{(5^x + 3^x) \div (5^{x/2} \cdot 3^{x/2})} \\
 &= \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{x}{2}} - \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{-x}{2}}}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{-x}{2}}} \\
 &= \frac{\left(e^{\ln \frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}x} - \left(e^{\ln \frac{5}{3}}\right)^{\frac{-1}{2}x}}{\left(e^{\ln \frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}x} + \left(e^{\ln \frac{5}{3}}\right)^{\frac{-1}{2}x}} \\
 &= \frac{e^{\left(\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}\right)x} - e^{-\left(\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}\right)x}}{e^{\left(\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}\right)x} + e^{-\left(\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}\right)x}} \\
 f(x) &= \tanh \left[\left(\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3} \right) x \right]
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki teoremden

$$f'^t(x) = \tanh \left(\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3} \right)$$

bulunur.

Teorem 4.7: $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ hiperbolik tanjant türevlenebilir iki fonksiyon ve $k \in \mathbb{R}_t$ bir sabit olsun. Bu durumda, $(k \odot_t g), (g \oplus_t h), (g \odot_t h), (g \oslash_t h)$ fonksiyonları da hiperbolik tanjant türevlenebilir ve bu fonksiyonların hiperbolik tanjant türevleri

- i) $(k \odot_t g(x))'^t = k \odot_t g'^t(x),$
- ii) $(g \oplus_t h)^t(x) = g'^t(x) \oplus_t h'^t(x),$
- iii) $(g \ominus_t h)^t(x) = g'^t(x) \ominus_t h'^t(x),$
- iv) $(g \odot_t h)^t(x) = [g'^t(x) \odot_t h(x)] \oplus_t [g(x) \odot_t h'^t(x)],$
- v) $(g \oslash_t h)^t(x) = \{[g'^t(x) \odot_t h(x)] \ominus_t [g(x) \odot_t h'^t(x)]\} \oslash_t h^{2 \odot_t}(x),$

biçimindeki formüller ile hesaplanır

İspat:

i)

$$\begin{aligned}
 (k \odot_t g(x)) &= \tanh[\operatorname{atanh}(k) \cdot (\operatorname{atanh} \circ g)(x)] \\
 (k \odot_t g(x))'^t &= D_t\{\tanh[\operatorname{atanh}(k) \cdot (\operatorname{atanh} \circ g)(x)]\} \\
 &= \tanh\{[\operatorname{atanh}(k) \cdot (\operatorname{atanh} \circ g)(x)]'\} \\
 &= \tanh\{\operatorname{atanh}(k) \cdot (\operatorname{atanh} \circ g)'(x)\} \\
 &= k \odot_t \tanh[(\operatorname{atanh} \circ g)'(x)] \\
 &= k \odot_t g'^t(x)
 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 (g \oplus_t h)(x) &= \tanh[(\operatorname{atanh} \circ g)(x) + (\operatorname{atanh} \circ h)(x)] \\
 (g \oplus_t h)^t(x) &= D_t\{\tanh[(\operatorname{atanh} \circ g)(x) + (\operatorname{atanh} \circ h)(x)]\} \\
 &= \tanh\{[(\operatorname{atanh} \circ g)(x) + (\operatorname{atanh} \circ h)(x)]'\} \\
 &= \tanh\{(\operatorname{atanh} \circ g)'(x) + (\operatorname{atanh} \circ h)'(x)\} \\
 &= \tanh[(\operatorname{atanh} \circ g)'(x)] \oplus_t \tanh[(\operatorname{atanh} \circ h)'(x)] \\
 &= g'^t(x) \oplus_t h'^t(x)
 \end{aligned}$$

iii) , iv) ve v) benzer şekilde ispatlanır.

Önerme 4.3: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ hiperbolik tanjant türevlenebilir fonksiyonu verilsin. Eğer $g'^t(x) = 0$ eşittir ancak ve ancak $g'(x) = 0$ eşittir.

İspat: $g'^t(x) = 0$ ise

$$g'^t(x) = \tanh\left\{\frac{g'(x)}{1 - g^2(x)}\right\} = 0$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
 \frac{g'(x)}{1 - g^2(x)} &= \operatorname{atanh}(0) \\
 \frac{g'(x)}{1 - g^2(x)} &= 0 \\
 g'(x) &= 0
 \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan $g'(x) = 0$ ise

$$g'^t(x) = \tanh \left\{ \frac{g'(x)}{1 - g^2(x)} \right\} = \tanh(0)$$

$$g'^t(x) = 0$$

bulunur. ■

Teorem 4.8: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonunun (u, v) açık aralığında hiperbolik tanjant türevi var ve bu fonksiyon $[u, v]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Bu durumda $g(u) = g(v)$ ise $g'^t(c) = 0$ eşitliğini sağlayacak en az bir $c \in (u, v)$ sayısı vardır.

İspat: g fonksiyonunun (u, v) aralığında hiperbolik tanjant türevi var ise aynı aralıkta klasik anlamda da türevi vardır. Aynı zamanda g , $[u, v]$ aralığında sürekli ve $g(u) = g(v)$ olduğundan klasik analizdeki Rolle teoremi gereği $g'(c) = 0$ eşitliğini sağlayan en az bir $c \in (u, v)$ vardır. Böylelikle $g'^t(c) = 0$ sağlayan en az bir $c \in (u, v)$ noktasının varlığı ispatlanır. ■

Teorem 4.8, hiperbolik tanjant Rolle teoremi olarak adlandırılacaktır.

Teorem 4.9: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonu (u, v) açık aralığında hiperbolik tanjant türevlenebilir ve bu fonksiyon $[u, v]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Bu durumda

$$f'^t(c) = \tanh \left[\frac{(\operatorname{atanh} \circ f)(v) - (\operatorname{atanh} \circ f)(u)}{v - u} \right]$$

eşitliğini sağlayan en az bir $c \in (u, v)$ sayısı vardır.

İspat: Aşağıdaki iki fonksiyon

$$F(x) = f(u) \oplus_t \left\{ [f(v) \ominus_t f(u)] \odot_t \tanh \left(\frac{x-u}{v-u} \right) \right\}$$

$$G(x) = F(x) \ominus_t f(x)$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $F(u) = f(u)$, $F(v) = f(v)$ ve $G(u) = G(v) = 0$ eşitlikleri vardır. Hiperbolik tanjant Rolle teoreminden (teorem 4.8) $G'^t(c) = 0$ eşitliğini sağlayan $c \in (u, v)$ sayısı vardır.

$$G'^t(c) = 0$$

$$F'^t(c) \ominus_t f'^t(c) = 0$$

eşitliğinden $f'^t(c) = F'^t(c)$ elde edilir. İspat

$$\begin{aligned}
f'^t(c) &= F'^t(c) \\
&= 0 \oplus_t \left\{ [f(v) \ominus_t f(u)] \odot_t \tanh \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{x-u}{v-u} \right) \right] \right\}_{x=c} \\
&= [f(v) \ominus_t f(u)] \odot_t \tanh \left(\frac{1}{v-u} \right) \\
&= \tanh[(\operatorname{atanh} \circ f)(v) - (\operatorname{atanh} \circ f)(u)] \odot_t \tanh \left(\frac{1}{v-u} \right) \\
&= \tanh \left\{ \frac{(\operatorname{atanh} \circ f)(v) - (\operatorname{atanh} \circ f)(u)}{v-u} \right\}
\end{aligned}$$

eşitliğiyle biter. ■

Teorem 4.9, hiperbolik tanjant ortalama değer teoremi olarak adlandırılacaktır.

Teorem 4.10: $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_t$, (a, b) açık aralığında hiperbolik tanjant türevi olan ve tanımlı olduğu kapalı aralıkta sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\frac{(\operatorname{atanh} \circ g)'(c)}{(\operatorname{atanh} \circ h)'(c)} = \frac{(\operatorname{atanh} \circ g)(b) - (\operatorname{atanh} \circ g)(a)}{(\operatorname{atanh} \circ h)(b) - (\operatorname{atanh} \circ h)(a)}$$

eşitliğini sağlayan bir $c \in (a, b)$ sayısı vardır.

İspat: $(\operatorname{atanh} \circ g)$ ve $(\operatorname{atanh} \circ h)$, verilen kapalı aralıkta süreklidir. Ayrıca ilgili açık aralıkta bu iki fonksiyonun klasik türevi vardır. Klasik analizdeki Cauchy teoreminden bir $c \in (a, b)$ sayısı için

$$\frac{(\operatorname{atanh} \circ g)'(c)}{(\operatorname{atanh} \circ h)'(c)} = \frac{(\operatorname{atanh} \circ g)(b) - (\operatorname{atanh} \circ g)(a)}{(\operatorname{atanh} \circ h)(b) - (\operatorname{atanh} \circ h)(a)}$$

eşitliği sağlanır. ■

Önerme 4.4: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ hiperbolik tanjant türevi olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- $g'^t(x) > 0$ ise g klasik anlamda artan bir fonksiyondur,
- $g'^t(x) \geq 0$ ise g klasik anlamda azalmayan bir fonksiyondur,
- $g'^t(x) < 0$ ise g klasik anlamda azalan bir fonksiyondur,
- $g'^t(x) \leq 0$ ise g klasik anlamda artmayan bir fonksiyondur.

İspat: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonunun hiperbolik tanjant türevi ile klasik türevinin aynı işaretli olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
 g'^t(x) &= \tanh\left(\frac{g'(x)}{1-g^2(x)}\right) \\
 \operatorname{sgn}[g'^t(x)] &= \operatorname{sgn}\left[\tanh\left(\frac{g'(x)}{1-g^2(x)}\right)\right] \\
 &= \operatorname{sgn}\left[\frac{g'(x)}{1-g^2(x)}\right] \\
 &= \frac{\operatorname{sgn}[g'(x)]}{\operatorname{sgn}[1-g^2(x)]}
 \end{aligned}$$

Bu aşamada $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
 -1 &< g(x) < 1 \\
 0 &\leq g^2(x) < 1 \\
 -1 &< -g^2(x) \leq 0 \\
 0 &< 1 - g^2(x) \leq 1
 \end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı yani $1 - g^2(x)$ ifadesinin pozitif olduğu diğer bir ifadeyle

$$\operatorname{sgn}[1 - g^2(x)] = 1$$

olduğu bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sgn}[g'^t(x)] &= \frac{\operatorname{sgn}[g'(x)]}{\operatorname{sgn}[1 - g^2(x)]} \\
 \operatorname{sgn}[g'^t(x)] &= \operatorname{sgn}[g'(x)]
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise g fonksiyonunun hiperbolik tanjant türevi ile klasik türevinin aynı işaretli olduğunu söyler. Böylelikle ispat biter. ■

Önerme 4.5: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ hiperbolik tanjant türevi olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $c \in \mathbb{R}$ için

- Eğer $g'^t(c) = 0$ ve $g''^t(c) > 0$ ise c noktasında g 'nin bir yerel minimumu vardır,
- Eğer $g'^t(c) = 0$ ve $g''^t(c) < 0$ ise c noktasında g 'nin bir yerel maksimumu vardır.

İspat:

$$g'^t(x) = \tanh\left(\frac{g'(x)}{1 - g^2(x)}\right)$$

$$g''^t(x) = \tanh\left[\left(\frac{g'(x)}{1 - g^2(x)}\right)'\right]$$

$$g''^t(x) = \tanh\left[\frac{g''(x)(1 - g^2(x)) + 2(g'(x))^2 g(x)}{(1 - g^2(x))^2}\right]$$

olarak hesaplanır. Eğer $g'^t(c) = 0$ ise $g'(c) = 0$ olur ve

$$g''^t(c) = \tanh\left[\frac{g''(c)(1 - g^2(c)) + 2(g'(c))^2 g(c)}{(1 - g^2(c))^2}\right]$$

$$g''^t(c) = \tanh\left[\frac{g''(c)}{1 - g^2(c)}\right]$$

olarak bulunur. Buradan g fonksiyonunun hiperbolik tanjant türevini sıfıra eşitleyen c noktasında ikinci mertebeden hiperbolik tanjant türevi ile ikinci mertebeden klasik türevinin aynı işaretli olduğunu söylenebilir.

$g'^t(c) = 0$ ve $g''^t(c) > 0$ için $g'(c) = 0$ ve $g''(c) > 0$ olur. Böylelikle c noktasında g 'nin bir yerel minimumu olduğu görülür.

$g'^t(c) = 0$ ve $g''^t(c) < 0$ için $g'(c) = 0$ ve $g''(c) < 0$ olur. Böylelikle c noktasında g 'nin bir yerel maksimumu olduğu görülür.

■

4.5. Hiperbolik Tanjant İntegral

Bu bölümde hiperbolik tanjant ters türev tanıtılmış, hiperbolik tanjant belirsiz integral kavramı verilip klasik analizdeki karşılığı ile ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca hiperbolik tanjant belirli integral tanımı ve alakalı teoremler verilmiştir.

4.5.1. Hiperbolik Tanjant Belirsiz İntegral

Tanım 4.7: $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ olsun. Eğer $F'^t(x) = f(x)$ ise F fonksiyonu, f fonksiyonunun bir hiperbolik tanjant ters türevi olarak adlandırılır.

Tanım 4.8: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonunun tüm hiperbolik tanjant ters türevlerinin kümesi f fonksiyonunun hiperbolik tanjant belirsiz integrali olarak adlandırılır ve

$${}^t \int f(x) dx$$

biçiminde gösterilir.

Önerme 4.6: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonunun hiperbolik tanjant belirsiz integrali için

$${}^t \int f(x) dx = \tanh \left[\int (\operatorname{atanh} \circ f)(x) dx \right]$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonunun bir keyfi hiperbolik tanjant ters türevi F olsun. Bu durumda

$$F'^t(x) = f(x)$$

$$\tanh[(\operatorname{atanh} \circ F)'(x)] = f(x)$$

$$(\operatorname{atanh} \circ F)'(x) = (\operatorname{atanh} \circ f)(x)$$

$$(\operatorname{atanh} \circ F)(x) = \int (\operatorname{atanh} \circ f)(x) dx$$

$$F(x) = \tanh \left[\int (\operatorname{atanh} \circ f)(x) dx \right]$$

$F(x)$ fonksiyonu $f(x)$ fonksiyonunun hiperbolik tanjant ters türevlerinden keyfi olarak seçildiğinden

$${}^t \int f(x) dx = \tanh \left[\int (\operatorname{atanh} \circ f)(x) dx \right]$$

eşit olduğu görülür.

Örnek 4.7: $f(x) = 0$ fonksiyonunun hiperbolik tanjant belirsiz integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
{}^t \int 0 dx &= \tanh \left[\int (\operatorname{atanh} \circ f)(x) dx \right] \\
&= \tanh \left[\int (\operatorname{atanh})(0) dx \right] \\
&= \tanh \left[\int 0 dx \right] \\
&= \tanh(c), c \in \mathbb{R} \\
&= K
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $K = \tanh(c) \in \mathbb{R}_t$ bir keyfi sabittir. Böylelikle $K \in \mathbb{R}_t$ bir hiperbolik tanjant keyfi sabit olmak üzere

$${}^t \int 0 dx = K$$

olarak bulundu.

Önerme 4.7: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonunun bir hiperbolik tanjant ters türevi $F(x)$ fonksiyonu olsun. Bu durumda f fonksiyonunun hiperbolik tanjant belirsiz integrali için

$${}^t \int f(x) dx = \frac{F(x) + C}{1 + C \cdot F(x)}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $C \in \mathbb{R}_t$ hiperbolik tanjant integral için bir keyfi sabittir.

İspat:

$$\begin{aligned}
{}^t \int f(x) dx &= \tanh \left[\int (\operatorname{atanh} \circ f)(x) dx \right] \\
{}^t \int f(x) dx &= \tanh \left[\int (\operatorname{atanh} \circ F'^t)(x) dx \right] \\
{}^t \int f(x) dx &= \tanh \left[\int (\operatorname{atanh} \circ F)'(x) dx \right] \\
{}^t \int f(x) dx &= \tanh[(\operatorname{atanh} \circ F)(x) + c] \\
{}^t \int f(x) dx &= \frac{F(x) + \tanh(c)}{1 + \tanh(c) \cdot F(x)}, c \in \mathbb{R} \\
{}^t \int f(x) dx &= \frac{F(x) + C}{1 + C \cdot F(x)}
\end{aligned}$$

Yukarıda kullanılan c klasik integral için bir keyfi sabittir. $C = \tanh(c) \in \mathbb{R}_t$ hiperbolik tanjant integral için bir keyfi sabittir.

■

Örnek 4.8: $f(x) = a, a \in \mathbb{R}_t$ fonksiyonunun hiperbolik tanjant belirsiz integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} {}^t \int a dx &= \tanh \left[\int \operatorname{atanh}(a) dx \right] \\ &= \tanh[x \cdot \operatorname{atanh}(a) + c] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $c \in \mathbb{R}$ klasik integral için bir keyfi sabittir.

4.5.2. Hiperbolik Tanjant Belirli İntegral

Tanım 4.9: Verilen bir $[u, v] \subset \mathbb{R}$ aralığında hiperbolik tanjant sürekli olan bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonunun bu aralık üzerindeki hiperbolik tanjant integrali aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$${}^t \int_u^v f(x) dx = M_t f[u, v] \odot_t \tanh[v - u]$$

(Grossman ve Katz, 1972).

Önerme 4.8: Verilen bir $[u, v] \subset \mathbb{R}$ aralığında hiperbolik tanjant sürekli olan bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$${}^t \int_u^v f(x) dx = \tanh \left[\int_u^v (\operatorname{atanh} \circ f)(x) dx \right]$$

İspat: $(x_n)_{1 \leq n \leq m}, [u, v]$ aralığının m katlı tekdüze parçalanışı olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^t \int_u^v f(x) dx &= M_t f[u, v] \odot_t \tanh[v - u] \\ &= {}^t \lim_{m \rightarrow \infty} M_t \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)\} \odot_t \tanh[v - u] \\ &= {}^t \lim_{m \rightarrow \infty} \tanh \left(\frac{\sum_{n=1}^m \operatorname{atanh}(f(x_n))}{m} \right) \odot_t \tanh[v - u] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= {}^t \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\tanh[v - u] \odot_t \tanh \left(\frac{\sum_{n=1}^m \operatorname{atanh}(f(x_n))}{m} \right) \right] \\
&= {}^t \lim_{m \rightarrow \infty} \tanh \left[(v - u) \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{n=1}^m (\operatorname{atanh} \circ f)(x_n) \right] \\
&= {}^t \lim_{m \rightarrow \infty} \tanh \left(\sum_{n=1}^m \frac{v - u}{m} \cdot (\operatorname{atanh} \circ f)(x_n) \right) \\
&= \tanh \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{v - u}{m} \cdot (\operatorname{atanh} \circ f)(x_n) \right) \\
&= \tanh \left[\int_u^v (\operatorname{atanh} \circ f)(x) dx \right]
\end{aligned}$$

■

Teorem 4.11: f fonksiyonu $[u, v]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in [u, v]$ için

$$g(x) = \int_u^x f(x) dx$$

eşit olsun. Bu durumda $\forall x \in (u, v)$ için

$$g'^t(x) = f(x)$$

sağlanır.

İspat: Önerme 4.8' den

$$g(x) = \int_u^x f(x) dx$$

$$g(x) = \tanh \left[\int_u^x (\operatorname{atanh} \circ f)(x) dx \right]$$

yazılır. Her iki tarafın önce $\operatorname{atanh}(x)$ fonksiyonu ile soldan bileşkesi alınır ve sonra klasik türevi alınırsa

$$(\operatorname{atanh} \circ g)(x) = \int_u^x (\operatorname{atanh} \circ f)(x) dx$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{atanh} \circ g)(x) = \frac{d}{dx} \int_u^x (\operatorname{atanh} \circ f)(x) dx$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{atanh} \circ g)(x) = (\operatorname{atanh} \circ f)(x)$$

elde edilir. Son olarak her iki tarafın $\tanh(x)$ fonksiyonu ile soldan bileşkesi alınırsa

$$\begin{aligned} \tanh \left[\frac{d}{dx}(\operatorname{atanh} \circ g)(x) \right] &= \tanh[(\operatorname{atanh} \circ f)(x)] \\ g'^t(x) &= f(x) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır.

■

Teorem 4.12: f'^t hiperbolik tanjant türevi $[u, v]$ aralığında sürekli ise

$$\int_u^v f'^t(x) dx = \frac{f(v) - f(u)}{1 - f(u)f(v)}$$

eşitliği vardır.

İspat:

$$\begin{aligned} \int_u^v f'^t(x) dx &= \int_u^v \tanh[(\operatorname{atanh} \circ f)'(x)] dx \\ &= \int_u^v (\tanh \circ (\operatorname{atanh} \circ f)')(x) dx \\ &= \tanh \left\{ \int_u^v [\operatorname{atanh} \circ (\tanh \circ (\operatorname{atanh} \circ f)')](x) dx \right\} \\ &= \tanh \left\{ \int_u^v (\operatorname{atanh} \circ f)'(x) dx \right\} \\ &= \tanh\{(\operatorname{atanh} \circ f)(v) - (\operatorname{atanh} \circ f)(u)\} \\ &= \frac{f(v) - f(u)}{1 - f(u)f(v)} \end{aligned}$$

elde edilir.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında öncelikle literatürde mevcut olan α aritmetik ve $\star$ analizdeki tanımlar, kavramlar ve temel teoremler verilmiştir. Sonra hiperbolik fonksiyonlar ile ilgili temel bilgilere yer verilmiştir.

Devamında üretici hiperbolik tanjant fonksiyonu, $\tanh(x)$, olan Newtonyen olmayan aritmetik verilmiştir. Jane Grossman, Michael Grossman ve Robert Katz 1983 yılında benzer bir üretcin, $\tanh(x/2)$, ürettiği aritmetiği ve bu aritmetiğin toplama ve çıkarma işlemlerini tanıtmışlardır (Grossman vd., 1983). Marek Czachor, hiperbolik tanjant fonksiyonunun, $\tanh(x)$, üretici olduğu aritmetiği ve ilgili toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin tanımlarını vermiştir (Czachor, 2021). Fakat Czachor bu aritmetik ile ilgili analizin türev ve integralini tanımlanmamıştır.

Bu tezde, hiperbolik tanjant analiz olarak isimlendirilen ve hiperbolik tanjant fonksiyonunun, $\tanh(x)$, üretici olduğu Newtonyen olmayan analiz çalışılmıştır. Hiperbolik tanjant türev ve hiperbolik tanjant integral ilk kez tanıtılmıştır. Ayrıca bu analiz ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Son olarak klasik analizdeki kavramlar ve temel teoremlerin bu analizde karşılıkları incelenmiştir.

KAYNAKÇA

- Bal, A., Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2023). Solutions of multiplicative integral equations via the multiplicative power series method. *Politeknik Dergisi*, 26 (1), 311-320.
- Bashirov, A. E., Kurpinar, E. M. ve Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337(1), 36-48.
- Campbell, D. (1999). Multiplicative calculus and student projects. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9(4), 327-332.
- Córdova-Lepe, F. (2006). The multiplicative derivative as a measure of elasticity in economics. *TEMAT-Theaeteto Atheniensi Mathematica*, 2(3).
- Cordova-Lepe, F., Robledo, G. ve Cabrera-Villegas, J. (2015). Population growth modeling with boom and bust patterns: the impulsive differential equation formalism. *Journal of Biological Systems*, 23(supp01), 135-149.
- Czachor, M. (2021). Non-Newtonian mathematics instead of non-Newtonian physics: Dark matter and dark energy from a mismatch of arithmetics. *Foundations of Science*, 26, 75-95.
- Çakmak, A. F. ve Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(1), 1-17.
- Duyar, B. S. ve Erdogan, F. (2020). On non-Newtonian power series and its applications. *Konuralp Journal of Mathematics*, 8(2), 294-303.
- Erdoğan M. (2016). *Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integraller. Yüksek lisans tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (437950).*
- Filip, D. ve Piatecki, C. (2014). A non-Newtonian examination of the theory of exogenous economic growth. hal-00945781f.
- Florack, L. ve van Assen, H. (2012). Multiplicative calculus in biomedical image analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 42(1), 64-75.
- Goktas, S., Yilmaz, E. ve Yar, A. C. (2022). Multiplicative derivative and its basic properties on time scales. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(4), 2097-2109.
- Göktaş, S., Kemaloğlu, H. ve Yilmaz, E. (2022). Multiplicative conformable fractional Dirac system. *Turkish Journal of Mathematics*, 46(3), 973-990.
- Grossman, M. ve Katz, R. (1972). *Non-Newtonian calculus*. Lee Press, Pigeon Cove, MA
- Grossman, M. (1979). An introduction to non-Newtonian calculus. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, 10(4), 525-528.

- Grossman, J., Grossman, M. ve Katz, R. (1983). *Averages: a new approach*. Non-Newtonian Calculus.
- Gulsen, T., Yilmaz, E. ve Goktas, S. (2022). Multiplicative Dirac system. *Kuwait Journal of Science*, 49(3).
- Gülşen, T. (2023). Some approaches for solving multiplicative second-order linear differential equations with variable exponentials and multiplicative Airy's equation. *Turkish Journal of Science and Technology*, 18(2), 301-309.
- Gürbulak M.E. (2023). *Geometrik (çarpımsal) sayısal analizde bağ (spline) ara değer bulma yöntemi. Yüksek lisans tezi, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gümüşhane, (812552).*
- Gürefe, Y. (2009). *Çarpımsal analiz ve uygulamaları. Yüksek lisans tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, (252639).*
- Stanley, D. (1999). A multiplicative calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9(4), 310-326.
- Tekin, S. ve Başar, F. (2013). Certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field. *Abstract and Applied Analysis* 2013(739319), 1-11. <http://dx.doi.org/10.1155/2013/739319>.
- Thomas, G. B., Finney, R. L., Weir, M. D., Hass, J. ve Giordano, F. R. (2009). *Thomas calculus*. (R. Korkmaz, Çev.). Beta Yayıncılık. (Orijinal eserin yayın tarihi 2005).
- Yalcin, N., Celik, E. ve Gokdogan, A. (2016). Multiplicative Laplace transform and its applications. *Optik*, 127(20), 9984-9995.
- Yalçın, N. (2016). *Çarpımsal Türev ve Çarpımsal Lineer Diferensiyel Denklemler, Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Erzurum, (434858).*
- Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2021). Solutions of multiplicative ordinary differential equations via the multiplicative differential transform method. *Aims Mathematics*, 6(4), 3393-3409.
- Yalcın, N. ve Dedetürk, M. (2023). Solutions of multiplicative linear differential equations via the multiplicative power series method. *Sigma*, 41(4), 837-847.
- Yilmaz, E., Gulsen, T. ve Goktas, S. (2023). Reconstruction of Green's function for multiplicative Sturm-Liouville problem. *Filomat*, 37(3), 761-773.

ÖZGEÇMİŞ

Zeynep DEMİR, lise eğitimini Elazığ Kaya Karakaya Fen lisesinde tamamladı. 2009-2013 yılları arasında Erzincan Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünü tamamladı. 2021 yılında Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Tezli Yüksek Lisans programına yerleşti.

