

**ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HİPERBOLİK ÜÇÜNCÜ DERECE DEN JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS**  
**SAYILARININ ÖZELLİKLERİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MUSTAFA ALTINSOY**

**ARALIK 2022**

**ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HİPERBOLİK ÜÇÜNCÜ DERECEDEN JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS**  
**SAYILARININ ÖZELLİKLERİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Mustafa ALTINSOY**

**DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Can Murat DİKMEN**

**ZONGULDAK**

**Aralık 2022**

**KABUL:**

Mustafa ALTINSOY tarafından hazırlanan “Hiperbolik Üçüncü Dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayılarının Özellikleri” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 23/12/2022

**Danışman:** Dr. Öğr. Üyesi Can Murat DİKMEN .....

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

**Üye:** Prof. Dr. Yüksel SOYKAN .....

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

**Üye:** Dr. Öğr. Üyesi İnci OKUMUŞ .....

İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Mühendislik Fakültesi, Mühendislik Bilimleri Bölümü

---

**ONAY:**

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../..../20..

Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



*“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”*

Mustafa ALTINSOY

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### HİPERBOLİK ÜÇÜNCÜ DERECEDEN JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS SAYILARININ ÖZELLİKLERİ

Mustafa ALTINSOY

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Can Murat DİKMEN

Aralık 2022, 49 sayfa

Bu çalışmada, Horadam tarafından 1996 yılında tanımlanmış olan Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizilerinin genel özellikleri incelenerek (bakınız [1]), ikinci dereceden hiperbolik Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas ile üçüncü dereceden hiperbolik Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizilerinin tanımları ve bazı önemli özellikleri verilmiştir (bakınız [2], [3]).

Birinci bölümde sayı dizilerinin genel tarihçesi ile bazı önemli sayı dizilerinin tanımları verilmiştir.

İkinci bölümde ikinci dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizilerinin tanımları verilerek bu dizilerin sağladıkları bazı özellikler verilmiştir. Daha sonra, ikinci dereceden hiperbolik Jacobsthal ve hiperbolik Jacobsthal-Lucas sayı dizileri tanımlanarak, Binet formülü, üreten fonksiyonu, Simson formülü ve lineer toplam formülleri verilmiştir (bakınız [2]).

Üçüncü bölümde ise önce üçüncü dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizilerinin tanımları ve temel özellikleri verilmiş, daha sonra üçüncü dereceden hiperbolik Jacobsthal ve hiperbolik Jacobsthal-Lucas sayı dizilerine ait Binet formülleri, üreten fonksiyonları ve bazı özdeşlikler elde edilmiştir. (bakınız [3]).

## ÖZET (devam ediyor)

Son olarak, dördüncü bölümde hiperbolik Jacobsthal vektörleri tanıtılmış ve bu vektörlerin Lorentzian iç ve vektörel çarpımı üzerinde çalışılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizileri, hiperbolik Jacobsthal ve hiperbolik Jacobsthal-Lucas sayı dizileri, hiperbolik Jacobsthal vektörleri.

**Bilim Kodu:** 403.03.01



## **ABSTRACT**

**M. Sc. Thesis**

### **PROPERTIES OF HYPERBOLIC THIRD ORDER JACOBSTHAL AND JACOBSTHAL LUCAS NUMBERS**

**Mustafa ALTINSOY**

**Zonguldak Bülent Ecevit University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics**

**Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Can Murat DİKMEN**

**December 2022, 49 pages**

In this study, the general properties of Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas number sequences, which were defined by Horadam in 1996, were examined, (see [1]) and the definitions and some important properties of second order hyperbolic Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas and third order hyperbolic Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas sequences were given (see [2], [3]).

In the first chapter, the general history of number sequences and definitions of some important number sequences are given.

In the second chapter, definitions of second order Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas number sequences are given and some properties of these sequences are given. Then, second order hyperbolic Jacobsthal and hyperbolic Jacobsthal-Lucas number sequences are defined, Binet formula, generating function, Simson formula and linear sum formulas are given (see [2]).

In the third chapter, first the definitions and basic properties of the third order Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas number sequences are given, then the Binet formulas, generating functions and some identities of the third order hyperbolic Jacobsthal and hyperbolic Jacobsthal-Lucas number sequences are obtained (see [3]).

## **ABSTRACT (continued)**

Finally, at the end of this chapter, hyperbolic Jacobsthal vectors are introduced and the Lorentzian inner and cross products of these vectors are studied.

**Keywords:** Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas number sequences, hyperbolic Jacobsthal and hyperbolic Jacobsthal-Lucas number sequences, hyperbolic Jacobsthal vectors.

**Science Code:** 403.03.01



## TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübelerini paylaşan, her konuda benden ilgi, alaka ve samimiyetini esirgemeyen pek değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Can Murat DİKMEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eğitimim sırasında beni yetiştiren, üzerimde emeği geçen, özveri ile bizlere bilgilerini aktaran Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarına teşekkürü borç bilirim.

Beni bu günlere getiren, beni yetiştiren, aldığım her kararda yanımda olan çok değerli aileme, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşim Tuğba'ya ve varlığından güç aldığım çocuklarım Ahmet ve Ömer'e sonsuz teşekkür ederim.

Son olarak bilime verdiği değeri, “Dünyada her şey için, medeniyet için, hayat için, muvaffakiyet için en hakiki mürşit ilimdir, fendir. İlim ve fennin haricinde mürşit aramak gaflettir, cehalettir, dalalettir.” sözüyle dillendiren ve şahsıma ışık tutan başöğretmen Mustafa Kemal ATATÜRK'e sonsuz şükranlarımı sunarım.



## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                          | <u>Sayfa</u> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| KABUL .....                                                                                              | ii           |
| ÖZET .....                                                                                               | iii          |
| ABSTRACT .....                                                                                           | v            |
| TEŞEKKÜR .....                                                                                           | vii          |
| İÇİNDEKİLER.....                                                                                         | ix           |
| ÇİZELGELER DİZİNİ .....                                                                                  | xi           |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....                                                                      | xiii         |
| <br>BÖLÜM 1 GİRİŞ.....                                                                                   | <br>1        |
| <br>BÖLÜM 2 İKİNCİ DERECE DEN HİPERBOLİK JACOBSTHAL VE<br>JACOBSTHAL-LUCAS DİZİLERİNİN İNCELENMESİ ..... | <br><br>5    |
| 2.1 JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS DİZİLERİ .....                                                        | 5            |
| 2.2 HİPERBOLİK SAYILAR .....                                                                             | 6            |
| 2.3 HİPERBOLİK JACOBSTHAL VE HİPERBOLİK JACOBSTHAL-LUCAS<br>DİZİLERİ .....                               | 7            |
| <br>BÖLÜM 3 ÜÇÜNCÜ DERECE DEN HİPERBOLİK JACOBSTHAL VE<br>JACOBSTHAL-LUCAS DİZİLERİNİN İNCELENMESİ ..... | <br><br>21   |
| 3.1 ÜÇÜNCÜ DERECE DEN JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS DİZİLERİ ..                                         | 21           |
| 3.2 HİPERBOLİK ÜÇÜNCÜ DERECE JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS<br>DİZİLERİ .....                            | 24           |
| <br>BÖLÜM 4 HİPERBOLİK JACOBSTHAL VEKTÖRLERİ .....                                                       | <br>39       |
| <br>KAYNAKLAR.....                                                                                       | <br>45       |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                                           | 49           |



## ÇİZELGELER DİZİNİ

No

Sayfa

Çizelge 1.1 Literatürdeki bazı sayı dizileri ..... 4





## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

### SİMGELER

|                                   |                                                       |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\mathbb{Z}$                      | : Tamsayılar Kümesi                                   |
| $\mathbb{R}$                      | : Reel sayılar kümesi                                 |
| $\mathbb{N}$                      | : Doğal sayılar kümesi                                |
| $\mathbb{N}_0$                    | : Sıfır dahil Doğal sayılar kümesi                    |
| $J_n$                             | : Jacobsthal sayısı                                   |
| $J_n^{(3)}$                       | : Üçüncü dereceden Jacobsthal sayısı                  |
| $\tilde{J}_n$                     | : Hiperbolik Jacobsthal sayısı                        |
| $\tilde{J}_n^{(3)}$               | : Üçüncü dereceden Hiperbolik Jacobsthal sayısı       |
| $\vec{J}_n$                       | : Jacobsthal vektörü                                  |
| $\vec{\tilde{J}}_n$               | : Hiperbolik Jacobsthal vektörü                       |
| $j_n$                             | : Jacobsthal-Lucas sayısı                             |
| $j_n^{(3)}$                       | : Üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas sayısı            |
| $\tilde{j}_n$                     | : Hiperbolik Jacobsthal-Lucas sayısı                  |
| $\tilde{j}_n^{(3)}$               | : Üçüncü dereceden Hiperbolik Jacobsthal-Lucas sayısı |
| $\vec{j}_n$                       | : Jacobsthal vektörü                                  |
| $\vec{\tilde{j}}_n$               | : Hiperbolik Jacobsthal vektörü                       |
| $F_n$                             | : Fibonacci sayısı                                    |
| $L_n$                             | : Lucas sayısı                                        |
| $P_n$                             | : Pell sayısı                                         |
| $N_n$                             | : Narayana sayısı                                     |
| $\langle \cdot   \cdot \rangle_L$ | : Lorentzian iççarpım                                 |
| $\times_L$                        | : Lorentzian vektörel çarpım                          |



## BÖLÜM 1

### GİRİŞ

Ortaçağın en büyük matematikçileri arasında adı geçen Leonardo Fibonacci'nin hayatı ile ilgili pek fazla bilgiye ulaşılamamaktadır. İtalya'da 1170'li yıllarda Pisa şehrinde doğduğu sanılmaktadır. Babasının işi nedeniyle Bugia adlı Kuzey Afrika limanına atandığı ve burada Arap bir hocadan Fibonacci'nin matematik dersi aldığı bilinmektedir. Hint Arap sayılarını  $(1,2,3,\dots)$  böylece öğrenir. Fibonacci matematiği Araplardan alıp Avrupa'nın tanınmasını sağlayan kişi olarak da anılır. Fibonacci hakkında bilgilere ulaşmak daha çok yazmış olduğu kitapları ile mümkün olmuştur. Fibonacci'nin 1202'de yazdığı "Liber Abaci" kitabı ilk yazdığı kitap olup bunun dışında "Practica Geometria" ( The Practice of Geometry ) (1220), "Liber Quadratorum" (The Book of Square Numbers) (1225) "Flos" (The flower) (1225) yazmış olduğu matematik alanında diğer kitaplardır. Eserleri içinde en ünlü olan, Fibonacci sayılarının birbiriyle oranı olarak elde edilen Altın Oran'ın anlatıldığı "Liber Abaci" adlı kitabıdır. Bu kitabında Fibonacci, bir arkadaşının tavşan çiftliği ile ilgili olduğunu iddia ettiği bir problem sorar. Tavşan çiftliğine ilk ay bir erkek ve bir dişi yavru tavşan konulmuştur. Bir ay sonra erginleşen bu tavşanlar bir çift yavru doğuruyor. Her ay erişken hale gelen tavşanlarda yavru tavşan doğuruyor. Tavşanların ölmedikleri kabul edilecek olursa, bu şekilde yavru doğurmaya devam ederlerse  $n$ . ayda kaç çift tavşan çiftlikte olur diye sorar. Bu soru Fibonacci sayılarının elde edilmesini verir. Çiftlikte ilk ay bir çift yeni doğmuş tavşan olsun. Henüz yavrulamadıkları için tavşanlar, ikinci ayda da çiftlikte bir çift tavşan vardır. Erişkin hale gelen bu tavşanlar bir çift yavru verecekleri için üçüncü ayda çiftlikte iki çift tavşan vardır. Dördüncü ayda doğan çift doğurmayacak ancak anne ve baba bir çift yavru yeniden yapacak ve çiftlikte dördüncü ayda üç çift tavşan vardır. Tavşanların çoğalmasına bu şekilde devam edilerek  $n$ . aydaki çiftlikteki tavşan çiftlerinin sayısı  $F_n$  ile gösterilirse,  $F_1 = 1$  ve  $F_2 = 1$  olmak üzere,  $n \geq 1$  için  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , yineleme bağıntısı ile bulunur. Yani ilk iki terim hariç sonraki her

terim kendisinden önceki iki terim toplanarak bulunur. Buna göre Fibonacci sayıları

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

şeklinde gösterilir. Fibonacci sayılarının ardışık terimlerinden büyüğü küçüğüne oranlandığında elde edilen sayılar gittikçe Altın Oran'a yakınsar. 1,618... sayısı olan Altın Oran doğadaki canlının ve cansızın şeklinde ve yapısında karşımıza çıkan uyum açısından en yetkin boyutları veren özel bir orandır. Örneğin; ayçiçeğinin sağdan sola doğru ve soldan sağa doğru merkezinden dışarı doğru çıkıldığında tane sayılarının birbirine oranında, papatyada yaprakların sayılarında, çam kozalağında, tütün bitkisinde, salyangozun kabuğunda, deniz kabuğunda, Süleymaniye ve Selimiye camilerinde, insan vücudunda, Mekke ve Kâbe'de de görülmektedir. Fibonacci sayı dizisi sayılar teorisinde büyük öneme sahip olmasının yanında farklı bilim dallarında da sıklıkla kullanılmakta ve daha birçok yerde uygulanmaktadır. İtalyan matematikçi olan Edouardo Lucas (1842-1891) Fibonacci sayı dizisinin başlangıç şartlarını değiştirerek ve Fibonacci sayılarında kullanılan bir terim kendisinden önceki iki terimin toplamına eşittir kuralını uygulamış ve Lucas sayı dizileri diye adlandırdığı yeni bir sayı dizisi tanımlamıştır. Bu sayı dizisi  $L_0 = 2$  ve  $L_1 = 1$  olmak üzere,  $n \geq 1$  için  $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ , yineleme bağıntısıyla elde edilir. Buna göre Lucas sayıları

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, ...

şeklinde gösterilir. Fibonacci sayı dizisinde olduğu gibi doğada 123 sağ sarmalı ve 76 sol sarmalı olan Lucas ayçiçekleri olduğu bilinmektedir. Bu dizilerden faydalanarak elde edilen ve bilim dünyasında ilgi uyandıran başka sayı dizileri de vardır. Horadam (bakınız [4]) dizilerle ilgili yaptığı çalışmalarda, Pell ve Pell Lucas sayı dizilerinin tanımlarını yapmış ve bu dizinin terimlerinin isimlerini Pell ve Pell-Lucas sayıları diye ifadelendirmiştir. Horadam (bakınız [1]) Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizilerini araştırmış, bu dizileri açıklamış ve bu dizilerin arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Ayrıca Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının genel formülünü ve karakteristik köklerini vermiştir. Ayrıca, tanımladığı bu dizilerin bazı özelliklerini bulup ispatlamıştır. Spickerman (bakınız [5]) çalışmasında, Tribonacci-Lucas sayılarının Binet formüllerine yer vermiştir. Melham (bakınız [6]) Pell ve Pell-Lucas sayıları üzerine yaptığı araştırmasında, Pell ve Pell-Lucas sayıları ile ilgili eşitlikleri açıklamış, Fibonacci sayıları ve Pell sayılarını toplam formülü ile göstermiştir.

Fibonacci dizisi, Lucas dizisi, Pell dizisi, Pell-Lucas dizisi, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizileri ile ilgili çok fazla çalışma yapılmış, birçok özdeşlik bulunmuştur. Çalışmaların çoğunda, elde edilen özdeşlikler ve yapılan araştırmalar, öncelikle Fibonacci sayı dizisine yönelik olarak elde edilmiş olup sonraki dönemlerde diğer sayı dizileri incelenip benzer özdeşlikler bu sayı dizileri için de elde edilmiştir. Örneğin; Fibonacci sayı dizisindeki herhangi bir terimi aradaki tüm terimleri hesaplamaya gerek kalmadan genel yoldan elde edilişi; Jacques Philippe Marie Binet tarafından verilmiş ve zaman içinde diğer sayı dizileri ve polinomlar için de literatürde Binet formülü ya da Binet benzeri formül ismiyle ifade edilen, genel terimi temsil etmek için yararlanılan formüller verilmiştir ([7]). Böylece bu sayı dizileri ve polinomlarına yönelik olarak, yeni birçok özdeşlik Binet formülleri aracılığıyla elde edilmiştir. Fibonacci sayılarının Binet formülü:

$x^2 - x - 1 = 0$  denkleminin kökleri  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  olmak üzere,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

biçimindedir. Benzer şekilde Pell sayılarının Binet formülü:

$x^2 - 2x - 1 = 0$  denkleminin kökleri  $\gamma = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \delta = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$  olmak üzere,

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

biçimindedir.

Fibonacci sayılarına benzer olarak Narayana sayıları, 14. yüzyılda Hintli matematikçi Narayana tarafından tanıtılmıştır. Fibonacci'nin tavşan problemine benzer olarak, inek ve buzağı sürüstü problemi şu şekilde verilir: Bir inek her yıl bir buzağı üretir ve başlangıçtan itibaren dördüncü yılında her buzağı, her yılın başında bir buzağı üretir. 20 yıl sonra toplam kaç buzağı vardır? Bu problem, Fibonacci'nin tavşanlarla ilgili problemi çözdüğü şekilde çözülebilir (bakınız [7]). Eğer  $n$  yıl ise, o zaman Narayana problemi  $N_0 = 0, N_1 = 1, N_2 = 1$ , olmak üzere  $N_{n+3} = N_{n+2} + N_n, n \geq 0$  yineleme denklemi ile modellenir (bakınız [8, 9]). İlk birkaç terim

0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, ...

şeklindedir. Bu diziye Narayana dizisi (Fibonacci-Narayana dizisi veya Narayana'nın inekler dizisi) denir.

Şimdi literatürde çok kullanılan bazı sayı dizilerini tablo olarak aşağıdaki şekilde verebiliriz:

**Çizelge 1.1** Literatürdeki bazı sayı dizileri

| Sayı Dizileri             | Yineleme bağıntıları                | Başlangıç değerleri                            |
|---------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------------|
| $F_n$ Fibonacci           | $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$           | $F_0 = 0, F_1 = 1$                             |
| $L_n$ Lucas               | $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$           | $L_0 = 2, L_1 = 1$                             |
| $J_n$ Jacobsthal          | $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$          | $J_0 = 0, J_1 = 1$                             |
| $j_n$ Jacobsthal-Lucas    | $j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$          | $j_0 = 2, j_1 = 1$                             |
| $C_n$ Kompleks Jacobsthal | $C_n = J_n + iJ_{n+1}$              | $C_0 = i, C_1 = 1 + i$                         |
| $D_n^J$ Dual Jacobsthal   | $D_n^J = J_n + \varepsilon J_{n+1}$ | $D_0^J = \varepsilon, D_1^J = 1 + \varepsilon$ |
| $P_n$ Pell                | $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$          | $P_0 = 0, P_1 = 1$                             |
| $Q_n$ Pell-Lucas          | $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$          | $Q_0 = 2, Q_1 = 2$                             |
| $q_n$ Modified Pell       | $q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}$          | $q_0 = 1, q_1 = 1$                             |
| $N_n$ Narayana            | $N_{n+3} = N_{n+2} + N_n$           | $N_0 = 0, N_1 = 1, N_2 = 1$                    |

Son olarak, Kompleks sayılar  $i^2 = -1$ ,  $i \notin \mathbb{R}$  ve  $x, y \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $x + iy$  şeklinde tanımlanır. Ayrıca dual sayılar  $\varepsilon^2 = 0$ ,  $\varepsilon \notin \mathbb{R}$  ve  $x, y \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $x + \varepsilon y$  şeklinde tanımlanır. Buna benzer olarak hiperbolik sayılar  $h^2 = 1$ ,  $h \notin \mathbb{R}$  ve  $x, y \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $x + hy$  şeklinde tanımlanır. Bu sayılar yardımıyla hiperbolik ve dual Fibonacci ve Fibonacci -Lucas sayı dizileri tanımlanmış ve bir çok yazar tarafından bu çalışmalar diğer sayı dizilerine aktarılmıştır (örneğin [1], [2], [10-16] gibi). Daha sonra kompleks, dual ve hiperbolik sayıların birleştirilmesi ile hibrid sayılar oluşturulmuş ve bu çalışmalar hibrid sayılara taşınmıştır (örneğin [17] ve [18] gibi).

## BÖLÜM 2

### İKİNCİ DERECEDEDEN HİPERBOLİK JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS DİZİLERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde öncelikle ikinci dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizileri üzerinde durulacak daha sonra hiperbolik sayılar ve hiperbolik Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizileri üzerinde durulacaktır.

#### 2.1 JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS DİZİLERİ

**Tanım 2.1.1** *İkinci dereceden Jacobsthal dizisi  $\{J_n\}_{n \geq 0}$  ile gösterilir ve  $J_0 = 0, J_1 = 1$  başlangıç değerleri ile birlikte*

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2} \quad (2.1)$$

*ikinci dereceden yineleme bağıntısı ile tanımlanır. Jacobsthal sayılarının ilk bir kaç teriminin*

0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, ...

*olduğunu görebiliriz. Benzer şekilde ikinci dereceden Jacobsthal-Lucas dizisi  $\{j_n\}_{n \geq 0}$  ile gösterilir ve  $j_0 = 2, j_1 = 1$  başlangıç değerleri ile birlikte*

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2} \quad (2.2)$$

*ikinci dereceden yineleme bağıntısı ile tanımlanır. Jacobsthal-Lucas sayılarının ilk bir kaç teriminin*

2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 511, 1025, ...

*olduğunu görebiliriz. Negatif indisler için Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları aşağıdaki gibi verilebilir.*

$$J_{-n} = \frac{1}{2}(J_{2-n} - J_{1-n}), \quad (2.3)$$

$$j_{-n} = \frac{1}{2}(j_{2-n} - j_{1-n}) \quad (2.4)$$

$n \geq 1$  için. Bu nedenle, negatif indisler için Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarından bazıları sırasıyla

$$\cdots, \frac{43}{128}, \frac{-21}{64}, \frac{11}{32}, \frac{-5}{16}, \frac{3}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}$$

ve

$$\cdots, \frac{-127}{128}, \frac{65}{64}, \frac{-31}{32}, \frac{17}{16}, \frac{-7}{8}, \frac{5}{4}, \frac{-1}{2}$$

olarak verilebilir.

Jacobsthal sayılarının Binet formülü, üreteç fonksiyonu, Simson formülü ve lineer toplam formülü sırasıyla aşağıdaki eşitlikler ile verilmiştir (bakınız [1], [19-21]).

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n), \\ \sum_{n=1}^{\infty} J_n x^{n-1} &= \frac{1}{1-x-2x^2}, \\ J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 &= (-1)^n 2^{n-1}, \\ J_m J_{n-1} - J_{m-1} J_n &= (-1)^n 2^{n-1} J_{m-n}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$J_{m+2}J_n - J_m J_{n+2} = (-1)^{n+1} 2^n J_{m-n}, \tag{2.6}$$

$$J_m J_{n+1} + 2J_{m-1}J_n = J_{m+n}, \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=0}^n J_k = \frac{1}{2}(J_{n+2} - 1). \tag{2.8}$$

**Tanım 2.1.2** Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formülü, üreteç fonksiyonu, Simson formülü ve lineer toplam formülü sırasıyla aşağıdaki eşitlikler ile verilmiştir (bakınız [4], [19-21]).

$$\begin{aligned} j_n &= 2^n + (-1)^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} j_n x^n &= \frac{2-x}{1-x-2x^2}, \\ j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2 &= 9(-2)^{n-1}, \\ \sum_{k=0}^n j_k &= \frac{1}{2}(j_{n+2} - 1). \end{aligned} \tag{2.9}$$

## 2.2 HİPERBOLİK SAYILAR

Hiperbolik sayılar  $\mathbb{H}$  kümesi şu şekilde tanımlanabilir:

$$\mathbb{H} = \{z = x + hy \mid h \notin \mathbb{R}, h^2 = 1, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Ek olarak, herhangi iki hiperbolik  $z_1$  ve  $z_2$  sayısının toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri şu şekilde tanımlanır:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + hy_1) \pm (x_2 + hy_2) = (x_1 \pm x_2) + h(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + hy_1) \times (x_2 + hy_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + h(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Ayrıca, iki hiperbolik sayının bölünmesi şu şekilde verilir:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + hy_1}{x_2 + hy_2} = \frac{(x_1 + hy_1)(x_2 - hy_2)}{(x_2 + hy_2)(x_2 - hy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 - y_2^2} + h \frac{x_1y_2 + y_1x_2}{x_2^2 - y_2^2}.$$

$z = x + hy$  sayısının hiperbolik eşleniği

$$\bar{z} = z^\dagger = x - hy$$

ile gösterilir. Burada  $\bar{\bar{z}} = z$  olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca, sahip olduğumuz herhangi bir  $z_1, z_2$  ve  $z$  hiperbolik sayıları için

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2,$$

$$\|z\|^2 = z \times \bar{z} = x^2 - y^2$$

eşitlikleri kolayca elde edilir. Hiperbolik sayılar hakkında daha fazla bilgi için (bakınız [22-29]).

### 2.3 HİPERBOLİK JACOBSTHAL VE HİPERBOLİK JACOBSTHAL-LUCAS DİZİLERİ

Hiperbolik Fibonacci dizisi Fügen Torunbalcı Aydın tarafından çalışılmış ve bunların özellikleri araştırılmıştır (bakınız [10]). Daha sonra Can Murat Dikmen bu çalışmayı hiperbolik Jacobsthal dizisi için yapmıştır (bakınız [2]). Bu kısımda bu çalışma üzerinde durulacaktır.

**Tanım 2.3.1** *Hiperbolik Jacobsthal sayıları  $h^2 = 1$  ve  $h \notin \mathbb{R}$  olmak üzere  $\tilde{J}_0 = h$ ,  $\tilde{J}_1 = 1 + h$  başlangıç koşulları ile birlikte*

$$\tilde{J}_n = J_n + hJ_{n+1} \tag{2.10}$$

*ile tanımlanır. Bu durumda hiperbolik Jacobsthal sayı dizisinin ilk bir kaç terimi*

$$h, 1 + h, 1 + 3h, 3 + 5h, 5 + 11h, 11 + 21h, 21 + 43h, 43 + 85h, \dots$$

olarak hesaplanır. Kolaylıkla görüleceği gibi

$$\tilde{J}_n = \tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_{n-2} \quad (2.11)$$

dir. Bunu görmek için

$$\begin{aligned} \tilde{J}_n &= J_n + hJ_{n+1} = J_{n-1} + 2J_{n-2} + h(J_n + 2J_{n-1}) \\ &= (J_{n-1} + hJ_n) + 2(J_{n-2} + hJ_{n-1}) = \tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_{n-2} \end{aligned}$$

işlemlerini yapabiliriz.

**Tanım 2.3.2** Hiperbolik Jacobsthal-Lucas sayıları  $h^2 = 1$  ve  $h \notin \mathbb{R}$  olmak üzere

$\tilde{j}_0 = 2 + h, \tilde{j}_1 = 1 + 5h$  başlangıç koşulları ile birlikte

$$\tilde{j}_n = j_n + hj_{n+1} \quad (2.12)$$

ile tanımlanır. Bu durumda hiperbolik Jacobsthal-Lucas sayı dizisinin ilk bir kaç terimi

$$2 + h, 1 + 5h, 5 + 7h, 7 + 17h, 17 + 31h, 31 + 65h, 65 + 127h, 127 + 257h, \dots$$

olarak hesaplanır. Kolaylıkla görüleceği gibi

$$\tilde{j}_n = \tilde{j}_{n-1} + 2\tilde{j}_{n-2} \quad (2.13)$$

dir. Bunu görmek için

$$\begin{aligned} \tilde{j}_n &= j_n + hj_{n+1} = j_{n-1} + 2j_{n-2} + h(j_n + 2j_{n-1}) \\ &= (j_{n-1} + hj_n) + 2(j_{n-2} + hj_{n-1}) = \tilde{j}_{n-1} + 2\tilde{j}_{n-2} \end{aligned}$$

işlemlerini yapabiliriz.

**Teorem 2.3.3** Eğer  $\tilde{J}_n$  bir hiperbolik Jacobsthal sayısı ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{J}_{n+1}}{\tilde{J}_n} = 2$$

dir.

**İspat.**  $J_n$  Jacobsthal sayısı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{n+1}}{J_n} = 2$$

olduğunu biliyoruz (bakınız [1]). Bu durumda bu limit değerini  $\tilde{J}_n$  hiperbolik Jacobsthal sayıları için kullanırsak

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{J}_{n+1}}{\tilde{J}_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{n+1} + hJ_{n+2}}{J_n + hJ_{n+1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{n+1} + h(J_{n+1} + 2J_n)}{J_n + hJ_{n+1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{J_{n+1}}{J_n} + h(\frac{J_{n+1}}{J_n} + 2)}{1 + h\frac{J_{n+1}}{J_n}} \\
&= \frac{2 + h(2 + 2)}{1 + 2h} = \frac{2 + 4h}{1 + 2h} = 2
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. ■

Şimdi Binet formülünü verelim.

**Teorem 2.3.4** *Hiperbolik Jacobsthal ve hiperbolik Jacobsthal-Lucas dizisi için Binet formülü*

$$\tilde{J}_n = \frac{1}{3} ((1 + 2h)2^n - (1 - h)(-1)^n), \quad (2.14)$$

$$\tilde{j}_n = (1 + 2h)2^n + (1 - h)(-1)^n \quad (2.15)$$

ile verilir.

**İspat.**  $J_n = \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n)$  Binet formülünü kullanarak

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_n &= J_n + hJ_{n+1} \\
&= \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n) + h\frac{1}{3} (2^{n+1} - (-1)^{n+1}) \\
&= \frac{1}{3} (-1)^n (h - 1) + \frac{1}{3} 2^n (1 + 2h) \\
&= \frac{1}{3} ((1 + 2h)2^n - (1 - h)(-1)^n)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde  $j_n = 2^n + (-1)^n$  Binet formülünü kullanarak

$$\begin{aligned}
\tilde{j}_n &= j_n + hj_{n+1} \\
&= 2^n + (-1)^n + h(2^{n+1} + (-1)^{n+1}) \\
&= (1 + 2h)2^n + (1 - h)(-1)^n
\end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Hiperbolik Jacobsthal dizisi için Binet formülünü aşağıdaki şekliyle vermek işlemlerde kolaylık sağlar.

**Sonuç 2.3.5** *Hiperbolik Jacobsthal dizisi ve hiperbolik Jacobsthal-Lucas dizisi için Binet formülü*

$$\tilde{J}_n = \frac{1}{3}(1+2h)(2^n + (1-h)(-1)^n), \quad (2.16)$$

$$\tilde{j}_n = (1+2h)(2^n - (1-h)(-1)^n) \quad (2.17)$$

şeklinde verilebilir.

**İspat.** Hiperbolik Jacobsthal dizisi için (2.14) Binet formülünü kullanarak

$$\begin{aligned} \tilde{J}_n &= \frac{1}{3}(1+2h)2^n - (1-h)(-1)^n = \frac{1}{3}(1+2h) \left( 2^n - \left( \frac{1-h}{1+2h} \right) (-1)^n \right) \\ &= \frac{1}{3}(1+2h) \left( 2^n - \left( \frac{1-2h}{1-4h^2} \right) (1-h)(-1)^n \right) \\ &= \frac{1}{3}(1+2h) \left( 2^n - \left( \frac{1-2h-h+2}{-3} \right) (-1)^n \right) \\ &= \frac{1}{3}(1+2h)(2^n + (1-h)(-1)^n) \end{aligned}$$

olduğunu görürüz.

Benzer şekilde hiperbolik Jacobsthal-Lucas dizisi için (2.15) Binet formülünü kullanarak

$$\begin{aligned} \tilde{j}_n &= ((1+2h)2^n + (1-h)(-1)^n) = (1+2h) \left( 2^n + \left( \frac{1-h}{1+2h} \right) (-1)^n \right) \\ &= (1+2h) \left( 2^n + \left( \frac{1-h}{1-4h^2} \right) (1-2h)(-1)^n \right) \\ &= (1+2h) \left( 2^n + \left( \frac{1-2h-h+2}{-3} \right) (-1)^n \right) \\ &= (1+2h)(2^n - (1-h)(-1)^n) \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. ■

Şimdi, hiperbolik Jacobsthal ve hiperbolik Jacobsthal-Lucas dizisi için üreteç fonksiyonunu verelim. Jacobsthal sayı dizisinin üreteç fonksiyonu için [19-21] numaralı kaynaklara bakılabilir.

**Teorem 2.3.6** *Hiperbolik Jacobsthal ve hiperbolik Jacobsthal-Lucas dizileri için üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{J}_n x^n = \frac{h+x}{1-x-2x^2} \quad (2.18)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n x^n = \frac{2+h+(-1+4h)x}{1-x-2x^2}$$

dir.

**İspat.** Hiperbolik Jacobsthal dizisinin üreteç fonksiyonu için

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{J}_n x^n$$

yazalım. Buradan

$$\begin{aligned} (1 - x - 2x^2)g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{J}_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{J}_n x^n - 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{J}_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{J}_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{J}_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{J}_n x^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{J}_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{J}_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{J}_{n-2} x^n \\ &= (\tilde{J}_0 + \tilde{J}_1 x) - \tilde{J}_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{(\tilde{J}_n - \tilde{J}_{n-1} - 2\tilde{J}_{n-2})}_{=0} x^n \\ &= \tilde{J}_0 + (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_0)x \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemi yeniden düzenleyip,  $\tilde{J}_0 = h$  ve  $\tilde{J}_1 = 1 + h$  olduğu kullanılırsa

$$g(x) = \frac{\tilde{J}_0 + (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_0)x}{1 - x - 2x^2} = \frac{h + x}{1 - x - 2x^2}$$

sonucu elde edilir.

Benzer şekilde Jacobsthal-Lucas dizileri için

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n x^n$$

yazalım. Buradan

$$\begin{aligned} (1 - x - 2x^2)g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n x^n - 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n x^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{j}_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{j}_{n-2} x^n \\ &= (\tilde{j}_0 + \tilde{j}_1 x) - \tilde{j}_0 x - \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{(\tilde{j}_n - \tilde{j}_{n-1} - 2\tilde{j}_{n-2})}_{=0} x^n \\ &= \tilde{j}_0 + (\tilde{j}_1 - \tilde{j}_0)x \end{aligned}$$

elde edilir. Burada,  $\tilde{j}_0 = 2 + h$  ve  $\tilde{j}_1 = 1 + 5h$  olduğu kullanılırsa

$$g(x) = \frac{\tilde{j}_0 + (\tilde{j}_1 - \tilde{j}_0)x}{1 - x - 2x^2} = \frac{2 + h + (-1 + 4h)x}{1 - x - 2x^2}$$

eşitliği elde edilir. ■

[14] kaynağında Teorem 2.3 te bu sonuç

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n x^n = \frac{2 + 4h + (1 - 4h)x}{1 - x - 2x^2}$$

şeklinde yanlış yazılmıştır.

Şimdi hiperbolik Jacobsthal ve hiperbolik Jacobsthal-Lucas dizisi için lineer toplam formüllerini verelim.

**Teorem 2.3.7** Her  $n \geq 0$  için

$$\sum_{k=0}^n \tilde{J}_k = \frac{1}{2}(\tilde{J}_{n+2} - (1 + h)) \text{ ve } \sum_{k=0}^n \tilde{j}_k = \frac{1}{2}(\tilde{j}_{n+2} - (1 + 5h)) \quad (2.19)$$

lineer toplam formülleri sağlanır.

**İspat.** Bunu görmek için  $\tilde{J}_k = J_k + hJ_{k+1}$  yazarız ve aşağıdaki Jacobsthal dizisi için (2.8) toplam formülünü kullanırız

$$\sum_{k=0}^n J_k = \frac{1}{2}(J_{n+2} - 1).$$

Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \tilde{J}_k &= \sum_{k=0}^n (J_k + hJ_{k+1}) = \sum_{k=0}^n J_k + h \sum_{k=0}^n J_{k+1} \\ &= \frac{1}{2}(J_{n+2} - 1) + h \sum_{k=1}^{n+1} J_k \\ &= \frac{1}{2}(J_{n+2} - 1) + h \left( \frac{1}{2}(J_{n+3} - 1) - J_0 \right) \\ &= \frac{1}{2}(J_{n+2} + hJ_{n+3}) - \frac{1}{2}(1 + h) \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{J}_{n+2} - (1 + h)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde  $\tilde{j}_k = j_k + hj_{k+1}$  yazar ve aşağıdaki Jacobsthal-Lucas dizisi için (2.9) toplam formülünü kullanırsak

$$\sum_{k=0}^n j_k = \frac{1}{2}(j_{n+2} - 1)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \tilde{j}_k &= \sum_{k=0}^n (j_k + h j_{k+1}) = \sum_{k=0}^n j_k + h \sum_{k=0}^n j_{k+1} \\
&= \frac{1}{2}(j_{n+2} - 1) + h \sum_{k=1}^{n+1} j_k \\
&= \frac{1}{2}(j_{n+2} - 1) + h \left( \frac{1}{2}(j_{n+3} - 1) - j_0 \right) \\
&= \frac{1}{2}(j_{n+2} + h j_{n+3}) - \frac{1}{2}(1 + 5h) \\
&= \frac{1}{2}(\tilde{j}_{n+2} - (1 + 5h))
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Şimdi hiperbolik Jacobsthal ve hiperbolik Jacobsthal-Lucas dizileri için birkaç özdeşlik verelim.

**Teorem 2.3.8** (*Catalan özdeşliği*)  $\forall n, m \in \mathbb{N}$  için aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{n+m} \tilde{J}_{n-m} - \tilde{J}_n^2 &= \frac{1}{9} (-2)^{n-m} (1 - (-2)^m)^2 (1 - h), \\
\tilde{j}_{n+m} \tilde{j}_{n-m} - \tilde{j}_n^2 &= (-1 + h) (-2)^{n-m} (1 - (-2)^m)^2.
\end{aligned}$$

**İspat.** (2.14) Binet formülünü kullanarak,

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{n+m} \tilde{J}_{n-m} - \tilde{J}_n^2 &= \frac{1}{3} ((1 + 2h)2^{n+m} - (1 - h)(-1)^{n+m}) \frac{1}{3} ((1 + 2h)2^{n-m} - (1 - h)(-1)^{n-m}) \\
&\quad - \frac{1}{9} ((1 + 2h)2^n - (1 - h)(-1)^n)^2 \\
&= -\frac{1}{9} (1 + 2h)(1 - h) (2^{n+m} (-1)^{n-m} + (-1)^{n+m} 2^{n-m} - 2 (-1)^n 2^n) \\
&= -\frac{1}{9} (-2)^{n-m} (2^{2m} + 1 - 2(-2)^m) (1 + 2h)(1 - h) \\
&= -\frac{1}{9} (-2)^{n-m} (1 - (-2)^m)^2 (-1 + h) \\
&= \frac{1}{9} (-2)^{n-m} (1 - (-2)^m)^2 (1 - h)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (2.15) Binet formülünü kullanarak,

$$\begin{aligned}
\tilde{j}_{n+m} \tilde{j}_{n-m} - \tilde{j}_n^2 &= ((1 + 2h)2^{n+m} + (1 - h)(-1)^{n+m}) ((1 + 2h)2^{n-m} + (1 - h)(-1)^{n-m}) \\
&\quad - ((1 + 2h)2^n + (1 - h)(-1)^n)^2 \\
&= (1 + 2h)(1 - h) (2^{n+m} (-1)^{n-m} + (-1)^{n+m} 2^{n-m} - 2 (-1)^n 2^n) \\
&= (-1 + h) (-2)^{n-m} (2^{2m} + 1 - 2(-2)^m) \\
&= (-1 + h) (-2)^{n-m} (1 - (-2)^m)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Catalan özdeşliğinde  $m = 1$  alınırsa hiperbolik Jacobsthal sayılar ve hiperbolik Jacobsthal-Lucas dizileri için Cassini özdeşliğini elde ederiz.

**Sonuç 2.3.9** (*Cassini özdeşliği*)  $\forall n, m \in \mathbb{N}$  için aşağıdaki özdeşlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{n+1}\tilde{J}_{n-1} - \tilde{J}_n^2 &= (-2)^{n-1}(1-h). \\ \tilde{J}_{n+1}\tilde{J}_{n-1} - \tilde{J}_n^2 &= 9(-2)^{n-1}(-1+h).\end{aligned}$$

İyi bilinen d'Ocagne, Gelin-Cesàro ve Melham özdeşlikleri de (2.14) veya (2.16) Binet formülleri kullanılarak elde edilebilir. Bir sonraki teoremde hiperbolik Jacobsthal ve hiperbolik Jacobsthal-Lucas dizileri için d'Ocagne, Gelin-Cesàro ve Melham özdeşliklerinin bulunuşunu göstereceğiz.

**Teorem 2.3.10**  $n$  ve  $m$  herhangi iki tamsayı olsun. O halde aşağıdaki özdeşlikler doğru olur:

(a) (*d'Ocagne özdeşliği*)

$$\tilde{J}_{m+1}\tilde{J}_n - \tilde{J}_m\tilde{J}_{n+1} = \frac{1}{3}(1-h)((-1)^n 2^m - (-1)^m 2^n).$$

(b) (*Gelin-Cesàro özdeşliği*)

$$\tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+1}\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n-2} - \tilde{J}_n^4 = \frac{1}{9}(-2)^n(h-1)(2^{n-2} + 13(-2)^{n-2} + 1).$$

(c) (*Melham özdeşliği*)

$$\tilde{J}_{n+1}\tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+6} - \tilde{J}_{n+3}^3 = \frac{1}{3}(h-1)(-2)^{n+2}(2^{n+1} - 5(-1)^n).$$

**İspat.**

(a)  $\tilde{J}_n = \frac{1}{3}((1+2h)2^n - (1-h)(-1)^n)$  Binet formülünü kullanarak,

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{m+1}\tilde{J}_n - \tilde{J}_m\tilde{J}_{n+1} &= \frac{1}{9}((1+2h)2^{m+1} - (1-h)(-1)^{m+1})((1+2h)2^n - (1-h)(-1)^n) \\ &\quad - \frac{1}{9}((1+2h)2^m - (1-h)(-1)^m)((1+2h)2^{n+1} - (1-h)(-1)^{n+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{9} \left[ ((5+4h)2^{m+n+1} + 2(1-h)(-1)^{m+n+1} - (h-1)(-1)^{m+1}2^n - (h-1)2^{m+1}(-1)^n) \right] \\
&\quad - \frac{1}{9} \left[ ((5+4h)2^{m+n+1} + 2(1-h)(-1)^{m+n+1} - (h-1)(-1)^m2^{n+1} - (h-1)2^m(-1)^{n+1}) \right] \\
&= \frac{1}{9}(1-h) \left[ (-1)^{m+1}2^n + 2^{m+1}(-1)^n - (-1)^m2^{n+1} - 2^m(-1)^{n+1} \right] \\
&= \frac{1}{9}(1-h) \left[ 3(-1)^n2^m - 3(-1)^m2^n \right] \\
&= \frac{1}{3}(1-h) \left[ (-1)^n2^m - (-1)^m2^n \right]
\end{aligned}$$

elde ederiz.

(b)  $\tilde{J}_n = \frac{1}{3}(1+2h)(2^n + (1-h)(-1)^n)$  Binet formülünde  $2^n = a$  ve  $(1-h)(-1)^n = b$  alınırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+1}\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n-2} - \tilde{J}_n^4 &= \frac{1}{81}(1+2h)^4 \left[ (4a+b)(2a-b) \left( \frac{a}{2} - b \right) \left( \frac{a}{4} + b \right) - (a+b)^4 \right] \\
&= \frac{1}{81}(41+40h) \left[ (8a^2 - 2ab - b^2) \left( \frac{a^2}{8} + \frac{ab}{4} - b^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - (a^4 + b^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3) \right] \\
&= \frac{1}{81}(41+40h) \left[ \left( \frac{7}{4}a^3b + \frac{7}{4}ab^3 - \frac{69}{8}a^2b^2 \right) - (4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3) \right] \\
&= \frac{1}{81}(41+40h) \left[ -\frac{9}{4}a^3b - \frac{9}{4}ab^3 - \frac{117}{8}a^2b^2 \right] \\
&= \frac{-1}{72}(1-h)(-2)^n [2a^2 + 2b^2 + 13ab] \\
&= \frac{-1}{72}(1-h)(-2)^n [2^{2n+1} + 4(1-h) + 13(-2)^n(1-h)] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{72} [2^{3n+1}(1-h) + (1-h)2^{n+3} + 13(-1)^n2^{2n+1}(1-h)] \\
&= \frac{1}{9}(-2)^n(h-1) [2^{2n-2} + 13(-2)^{n-2} + 1]
\end{aligned}$$

elde ederiz.

(c)  $\tilde{J}_n = \frac{1}{3}(1+2h)(2^n + (1-h)(-1)^n)$  Binet formülünde  $2^n = a$  ve  $(1-h)(-1)^n = b$  alınırsa

$$\tilde{J}_{n+1}\tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+6} - \tilde{J}_{n+3}^3 = \frac{1}{27}(1+2h)^3 [(2a-b)(4a+b)(64a+b) - (8a-b)^3]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{27}(13+14h) [(8a^2 - 2ab - b^2)(64a + b) - (512a^3 - 192a^2b + 24ab^2 - b^3)] \\
&= \frac{1}{27}(13+14h) [(-120a^2b - 66ab^2) - (-192a^2b + 24ab^2)] \\
&= \frac{1}{27}(13+14h) [72a^2b - 90ab^2] \\
&= \frac{1}{27}(13+14h)(1-h)(-2)^n [72 \cdot 2^n - 90(1-h)(-1)^n] \\
&= \frac{1}{3}(h-1)(-2)^n (8 \cdot 2^n - 10(1-h)(-1)^n) \\
&= \frac{1}{3}(-2)^n (8 \cdot 2^n (h-1) - 20(h-1)(-1)^n) \\
&= \frac{1}{3}(h-1)(-2)^{n+2} (2^{n+1} - 5(-1)^n)
\end{aligned}$$

elde ederiz. ■

Teorem 2.3.10 (a) şıkında  $m = n - 1$  alınırsa

$$\tilde{J}_n^2 - \tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n+1} = \frac{1}{3}(1-h)((-1)^n 2^{n-1} + (-1)^n 2^n) = (1-h)(-1)^n 2^{n-1} \quad (2.20)$$

Simson formülü elde edilir. Ayrıca (a) şıkında eğer  $\tilde{J}_{m+1}\tilde{J}_n - \tilde{J}_m\tilde{J}_{n+1}$  yerine  $\tilde{J}_{m+1}\tilde{J}_n + 2\tilde{J}_m\tilde{J}_{n-1}$  yazılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{m+1}\tilde{J}_n + 2\tilde{J}_m\tilde{J}_{n-1} &= \frac{1}{9}((5+4h)2^{m+n+1} + 2(1-h)(-1)^{m+n+1} \\
&\quad - (h-1)(-1)^{m+1}2^n - (h-1)2^{m+1}(-1)^n) + \frac{2}{9}((5+4h)2^{m+n-1} + 2(1-h)(-1)^{m+n-1} \\
&\quad + (h-1)(-1)^{m+1}2^{n-1} + (h-1)2^m(-1)^n) \\
&= \frac{1}{3}((5+4h)2^{m+n} - 2(1-h)(-1)^{m+n})
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde hiperbolik Jacobsthal-Lucas dizisi için d'Ocagne, Gelin-Cesàro ve Melham özdeşlikleri aşağıdaki gibidir.

**Teorem 2.3.11**  $n$  ve  $m$  herhangi iki tamsayı olsun. O halde aşağıdaki özdeşlikler doğru olur:

(a) (d'Ocagne özdeşliği)

$$\tilde{j}_{m+1}\tilde{j}_n - \tilde{j}_m\tilde{j}_{n+1} = 3(-1+h)[2^m(-1)^n - 2^n(-1)^m].$$

(b) (*Gelin-Cesàro özdeşliği*)

$$\tilde{j}_{n+2}\tilde{j}_{n+1}\tilde{j}_{n-1}\tilde{j}_{n-2} - \tilde{j}_n^4 = 9(-2)^n (1-h) [2^{2n-2} + 1 - 13(-2)^{n-2}].$$

(c) (*Melham özdeşliği*)

$$\tilde{j}_{n+1}\tilde{j}_{n+2}\tilde{j}_{n+6} - \tilde{j}_{n+3}^3 = 9(-2)^{n+2} (h-1) [2^{n+1} + 5(-1)^n].$$

**İspat.**

(a) (2.15) Binet formülünü kullanarak,

$$\begin{aligned} \tilde{j}_{m+1}\tilde{j}_n - \tilde{j}_m\tilde{j}_{n+1} &= ((1+2h)2^{m+1} + (1-h)(-1)^{m+1}) ((1+2h)2^n + (1-h)(-1)^n) \\ &\quad - ((1+2h)2^m + (1-h)(-1)^m) ((1+2h)2^{n+1} + (1-h)(-1)^{n+1}) \\ &= ((5+4h)2^{m+n+1} + 2(1-h)(-1)^{m+n+1} + (h-1)(-1)^{m+1}2^n + (h-1)2^{m+1}(-1)^n) \\ &\quad - [((5+4h)2^{m+n+1} + 2(1-h)(-1)^{m+n+1} + (h-1)(-1)^m2^{n+1} + (h-1)2^m(-1)^{n+1})] \\ &= (-1+h) [(-1)^{m+1}2^n + 2^{m+1}(-1)^n - (-1)^m2^{n+1} - 2^m(-1)^{n+1}] \\ &= (-1+h) [3(-1)^n2^m - 3(-1)^m2^n] \\ &= 3(-1+h) [(-1)^n2^m - (-1)^m2^n] \end{aligned}$$

elde ederiz. Dikkat edilirse bu sonuç [14] numaralı makaledeki Teorem 2.5 te bulunan sonuçtan farklıdır. Orada yanlış bir şekilde

$$\tilde{j}_{m+1}\tilde{j}_n - \tilde{j}_m\tilde{j}_{n+1} = 3(-1+h) ((-2)^m(-1)^n - (-2)^n(-1)^m)$$

sonucu yazılmıştır.

(b)  $\tilde{j}_n = (1+2h)(2^n + (-1+h)(-1)^n)$  Binet formülünde  $2^n = a$  ve  $(-1+h)(-1)^n = b$  alınırsa

$$\tilde{j}_{n+2}\tilde{j}_{n+1}\tilde{j}_{n-1}\tilde{j}_{n-2} - \tilde{j}_n^4 = (1+2h)^4 \left[ (4a+b)(2a-b) \left( \frac{a}{2} - b \right) \left( \frac{a}{4} + b \right) - (a+b)^4 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= (41 + 40h) \left[ (8a^2 - 2ab - b^2) \left( \frac{a^2}{8} + \frac{ab}{4} - b^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - (a^4 + b^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3) \right] \\
&= (41 + 40h) \left[ \left( \frac{7}{4}a^3b + \frac{7}{4}ab^3 - \frac{69}{8}a^2b^2 \right) - (4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3) \right] \\
&= (41 + 40h) \left[ -\frac{9}{4}a^3b - \frac{9}{4}ab^3 - \frac{117}{8}a^2b^2 \right] \\
&= \frac{-9}{8}(-1 + h)(-2)^n [2a^2 + 2b^2 + 13ab] \\
&= \frac{9}{8}(1 - h)(-2)^n [2^{2n+1} + 4(1 - h) - 13(-2)^n(1 - h)] \\
&= 9(-2)^n [2^{2n-2}(1 - h) + (1 - h) - 13(-2)^{n-2}(1 - h)] \\
&= 9(-2)^n(1 - h) [2^{2n-2} + 1 - 13(-2)^{n-2}]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

elde ederiz. Yine dikkat edilirse bu sonuç [14] numaralı makaledeki Teorem 2.6 da bulunan sonuçtan farklıdır. Orada bizim bulduğumuz sonucun  $-1$  katı olan

$$\frac{9}{8}(-1 + h)(-2)^n [2^{2n+1} + 4(1 - h) - 13(-2)^n(1 - h)]$$

sonucu yazılmıştır. Doğrusu (2.21) satırındaki gibi olmalıdır.

(c)  $\tilde{j}_n = (1 + 2h)(2^n + (-1 + h)(-1)^n)$  Binet formülünde  $2^n = a$  ve  $(-1 + h)(-1)^n = b$  alınırsa

$$\begin{aligned}
&\tilde{j}_{n+1}\tilde{j}_{n+2}\tilde{j}_{n+6} - \tilde{j}_{n+3}^3 = (1 + 2h)^3 [(2a - b)(4a + b)(64a + b) - (8a - b)^3] \\
&= (13 + 14h) [(8a^2 - 2ab - b^2)(64a + b) - (512a^3 - 192a^2b + 24ab^2 - b^3)] \\
&= (13 + 14h) [(-120a^2b - 66ab^2) - (-192a^2b + 24ab^2)] \\
&= (13 + 14h) [72a^2b - 90ab^2] \\
&= (13 + 14h)(-1 + h)(-2)^n [72 \cdot 2^n - 90(-1 + h)(-1)^n] \\
&= 9(1 - h)(-2)^n (2^{n+3} + 10(1 - h)(-1)^n) \\
&= 9(-2)^n (2^{n+3}(1 - h) + 20(1 - h)(-1)^n) \\
&= 9(-2)^{n+2}(1 - h) [2^{n+1} + 5(-1)^n]
\end{aligned} \tag{2.22}$$

elde ederiz. ■

Teorem 2.3.11 (a) şıkında  $m = n - 1$  alınırsa .

$$\tilde{j}_n^2 - \tilde{j}_{n-1}\tilde{j}_{n+1} = 3(-1 + h) [2^{n-1}(-1)^n + 2^n(-1)^n] = 9(1 - h)(-2)^{n-1} \quad (2.23)$$

Simson formülü elde edilir.

Bu bölümde hiperbolik Jacobsthal ve hiperbolik Jacobsthal-Lucas dizilerini ele aldık ve bazı önemli özdeşlikleri elde ettik. Sonraki bölümde bu dizilerin üçüncü dereeden alındığı zaman oluşan yeni özdeşlikler üzerinde durulacaktır.





## BÖLÜM 3

### ÜÇÜNCÜ DERECEDEDEN HİPERBOLİK JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS DİZİLERİNİN İNCELENMESİ

Hiperbolik sayılar son zamanlarda çeşitli yazarlar tarafından incelenmiştir. Önce Aydın Fibonacci sayıları için, Dikmen Jacobsthal sayıları için tanımladı. Soykan bunu Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları ve Pell sayıları için tanımladı. Daha sonra Taşyurdu bunu Tribonacci ve Tribonacci-Lucas Dizileri için tanımladı (bakınız [2, 10, 13, 15]).

Bu bölümde hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarını tanıtlıyoruz ve yineleme bağıntıları, Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve lineer toplam formlerini elde ediyoruz.

#### 3.1 ÜÇÜNCÜ DERECEDEDEN JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS DİZİLERİ

İlk olarak, bu kısımda üçüncü dereceden hiperbolik Jacobsthal ve üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas sayıları hakkında biraz bilgi vereceğiz (bakınız [21, 30, 31]).

**Tanım 3.1.1** *Üçüncü dereceden Jacobsthal dizisi  $\{J_n^{(3)}\}_{n \geq 0}$  olmak üzere  $J_0 = 0$ ,  $J_1 = 1$ ,  $J_2 = 1$  başlangıç değerleri ile*

$$J_n^{(3)} = J_{n-1}^{(3)} + J_{n-2}^{(3)} + 2J_{n-3}^{(3)} \quad (3.1)$$

*üçüncü dereceden yineleme bağıntısı ile tanımlanır. Benzer şekilde üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas dizisi  $\{j_n^{(3)}\}_{n \geq 0}$  olmak üzere  $j_0^{(3)} = 2$ ,  $j_1^{(3)} = 1$ ,  $j_2^{(3)} = 5$  başlangıç değerleri ile*

$$j_n^{(3)} = j_{n-1}^{(3)} + j_{n-2}^{(3)} + 2j_{n-3}^{(3)}$$

*üçüncü dereceden yineleme bağıntısı ile tanımlanır. Üçüncü dereceden Jacobsthal ve üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas sayılarından bazıları sırasıyla*

0, 1, 1, 2, 5, 9, 18, 37, 73, 146, 293, ...

ve

2, 1, 5, 10, 17, 37, 74, 145, 293, 586, 1169, ...

dir.

Negatif indisler için üçüncü dereceden Jacobsthal ve üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas sayıları  $n \geq 1$  için aşağıdaki gibi verilebilir:

$$J_{-n}^{(3)} = \frac{1}{2} \left( J_{3-n}^{(3)} - J_{2-n}^{(3)} - J_{1-n}^{(3)} \right), \quad (3.2)$$

$$j_{-n}^{(3)} = \frac{1}{2} \left( j_{3-n}^{(3)} - j_{2-n}^{(3)} - j_{1-n}^{(3)} \right). \quad (3.3)$$

Bu nedenle, negatif indisler için üçüncü dereceden Jacobsthal ve üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas sayılarından bazıları sırasıyla

$$\dots, \frac{-9}{64}, \frac{-9}{32}, \frac{7}{16}, \frac{-1}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, 0$$

ve

$$\dots, \frac{-41}{32}, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, \frac{-5}{4}, \frac{1}{2}, 1, -1, 1$$

dir.

Yineleme bağıntılarını çözmek için kullanılan standart teknikler ile, yardımcı denklem ve kökleri

$$x^3 - x^2 - x - 2 = 0; \quad x = 2 \text{ ve } x = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}$$

olarak bulunur. Son iki karmaşık sayı birimin küp kökü olduğundan bu sayıları

$\omega_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  ve  $\omega_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$  ile gösterebiliriz. Buradan, üçüncü dereceden Jacobsthal ve üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas sayıları için Binet formülleri sırasıyla

$$J_n^{(3)} = \frac{2}{7}2^n + \left( \frac{-3 - 2i\sqrt{3}}{21} \right) \omega_1^n + \left( \frac{-3 + 2i\sqrt{3}}{21} \right) \omega_2^n$$

ve

$$j_n^{(3)} = \frac{8}{7}2^n + \left( \frac{3 + 2i\sqrt{3}}{7} \right) \omega_1^n + \left( \frac{3 - 2i\sqrt{3}}{7} \right) \omega_2^n$$

olarak bulunurlar (bakınız [21] ).

Üçüncü dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(3)} x^n = \frac{x}{1 - x - x^2 - 2x^3}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_n^{(3)} x^n = \frac{2 - x + 2x^2}{1 - x - x^2 - 2x^3}$$

dir (bakınız [21]).

Üçüncü dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları için bazı kullanışlı özdeşlikler Cook ve Bacon tarafından [21]'de verilmiştir. Bunlar:

Lineer toplam formülü:

$$\sum_{k=0}^n J_k^{(3)} = \begin{cases} J_{n+1}^{(3)}, & n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ J_{n+1}^{(3)} - 1, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}, \quad (3.4)$$

$$\sum_{k=0}^n j_k^{(3)} = \begin{cases} j_{n+1}^{(3)} - 2, & n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ j_{n+1}^{(3)} + 1, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}, \quad (3.5)$$

ve

$$3J_n^{(3)} + j_n^{(3)} = 2^{n+1}, \quad (3.6)$$

$$j_n^{(3)} - 3J_n^{(3)} = 2j_{n-3}^{(3)}, \quad (3.7)$$

$$J_{n+2}^{(3)} - 4J_n^{(3)} = \begin{cases} -2, & n \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ 1, & n \not\equiv 1 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}, \quad (3.8)$$

$$j_n^{(3)} - 4J_n^{(3)} = \begin{cases} 2, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ -3, & n \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ 1, & n \equiv 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}, \quad (3.9)$$

$$j_{n+1}^{(3)} + j_n^{(3)} = 3J_{n+1}^{(3)}, \quad (3.10)$$

$$j_n^{(3)} - J_{n+2}^{(3)} = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ -1, & n \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ 0, & n \equiv 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}, \quad (3.11)$$

$$(j_n^{(3)})^2 - 9(J_n^{(3)})^2 = 2^{n+2} j_{n-3}^{(3)} \quad (3.12)$$

özdeşlikleridir. Biz bu formül ve özdeşlikleri hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal dizileri için bir sonraki kısımda geliştireceğiz.

### 3.2 HİPERBOLİK ÜÇÜNCÜ DERECE JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS DİZİLERİ

[10]'da Aydın hiperbolik Fibonacci dizisini tanımlamış ve özelliklerini araştırmıştır. [2]'de, Dikmen hiperbolik Jacobsthal dizisini tanımlamış ve özelliklerini araştırmıştır. Daha

sonra Taşyurdu, Soykan ve Göcen, Tribonacci, Tribonacci-Lucas, üçüncü dereceden Pell, Pell-Lucas dizileri için hiperbolik sayıları tanımladılar. (bakınız [11, 13, 17]). Gerda-Morales dual üçüncü dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizisini tanımlamış ve özelliklerini araştırmıştır (bakınız [31]). Bu bölümde hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizisinin tanımlanmakta ve özellikleri araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar [3] makalesinde yayınlanmıştır.

$h^2 = 1$  ( $h \notin \mathbb{R}$ ) olmak üzere  $\tilde{J}_0^{(3)} = h$ ,  $\tilde{J}_1^{(3)} = 1 + h$  ve  $\tilde{j}_0^{(3)} = 2 + h$ ,  $\tilde{j}_1^{(3)} = 1 + 5h$  başlangıç değerleri ile birlikte.  $n$ . hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal sayısı  $\tilde{J}_n^{(3)}$  ve  $n$ . hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas sayısı  $\tilde{j}_n^{(3)}$  sırasıyla

$$\tilde{J}_n^{(3)} = J_n^{(3)} + hJ_{n+1}^{(3)} \quad (3.13)$$

$$\tilde{j}_n^{(3)} = j_n^{(3)} + hJ_{n+1}^{(3)} \quad (3.14)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Bu eşitliklerden kolayca elde edilen ilk birkaç hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal sayısı ile hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas sayısı sırasıyla

$$h, 1 + h, 1 + 2h, 2 + 5h, 5 + 9h, 9 + 18h, 18 + 37h, 37 + 73h, \dots$$

$$2 + h, 1 + 5h, 5 + 10h, 10 + 17h, 17 + 37h, 37 + 74h, 74 + 145h, \dots$$

şeklindedir. Burada

$$\tilde{J}_n^{(3)} = \tilde{J}_{n-1}^{(3)} + \tilde{J}_{n-2}^{(3)} + 2\tilde{J}_{n-3}^{(3)} \quad (3.15)$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir. Bunu görmek için

$$\begin{aligned} \tilde{J}_n^{(3)} &= J_n^{(3)} + hJ_{n+1}^{(3)} = J_{n-1}^{(3)} + J_{n-2}^{(3)} + 2J_{n-3}^{(3)} + h(J_n^{(3)} + J_{n-1}^{(3)} + 2J_{n-2}^{(3)}) \\ &= (J_{n-1}^{(3)} + hJ_n^{(3)}) + (J_{n-2}^{(3)} + hJ_{n-1}^{(3)}) + 2(J_{n-3}^{(3)} + hJ_{n-2}^{(3)}) = \tilde{J}_{n-1}^{(3)} + \tilde{J}_{n-2}^{(3)} + 2\tilde{J}_{n-3}^{(3)} \end{aligned}$$

yazarız. Benzer şekilde

$$\tilde{j}_n^{(3)} = \tilde{j}_{n-1}^{(3)} + \tilde{j}_{n-2}^{(3)} + 2\tilde{j}_{n-3}^{(3)} \quad (3.16)$$

olduğu gösterilebilir.

Şimdi aşağıdaki teoremden başlayarak tez çalışmamızda elde edilen bazı sonuçları vermeye başlayabiliriz.

**Theorem 3.2.1**  $\tilde{J}_n^{(3)}$  hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal sayısı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{J}_{n+1}^{(3)}}{\tilde{J}_n^{(3)}} = 2$$

dir.

**İspat.** Burada üçüncü dereceden Jacobsthal sayısı  $J_n^{(3)}$  için elde edilen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{n+1}^{(3)}}{J_n^{(3)}} = 2$$

limit değerini kullanacağız. Buradan  $\tilde{J}_n^{(3)}$  hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal sayısının tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{J}_{n+1}^{(3)}}{\tilde{J}_n^{(3)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{n+1}^{(3)} + hJ_{n+2}^{(3)}}{J_n^{(3)} + hJ_{n+1}^{(3)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{n+1}^{(3)} + h(J_{n+1}^{(3)} + J_n^{(3)} + 2J_{n-1}^{(3)})}{J_n^{(3)} + hJ_{n+1}^{(3)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{J_{n+1}^{(3)}}{J_n^{(3)}} + h \left( \frac{J_{n+1}^{(3)}}{J_n^{(3)}} + 1 + 2\frac{J_{n-1}^{(3)}}{J_n^{(3)}} \right)}{1 + h \frac{J_{n+1}^{(3)}}{J_n^{(3)}}} \\ &= \frac{2 + h(2 + 1 + 1)}{1 + 2h} = \frac{2 + 4h}{1 + 2h} = 2 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. ■

Benzer şekilde hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas dizisi için ardaşık iki teriminin limitini hesaplayabiliriz.

**Teorem 3.2.2**  $\tilde{j}_n^{(3)}$  hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas sayısı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{j}_{n+1}^{(3)}}{\tilde{j}_n^{(3)}} = 2$$

dir.

**İspat.** Burada üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas sayısı  $j_n^{(3)}$  için elde edilen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{j_{n+1}^{(3)}}{j_n^{(3)}} = 2$$

limit değerini kullanacağız. Buradan  $\tilde{j}_n^{(3)}$  hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal sayısının

tanımını kullanarak

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{j}_{n+1}^{(3)}}{\tilde{j}_n^{(3)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{j_{n+1}^{(3)} + h j_{n+2}^{(3)}}{j_n^{(3)} + h j_{n+1}^{(3)}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{j_{n+1}^{(3)} + h(j_{n+1}^{(3)} + j_n^{(3)} + 2j_{n-1}^{(3)})}{j_n^{(3)} + h j_{n+1}^{(3)}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{j_{n+1}^{(3)}}{j_n^{(3)}} + h \left( \frac{j_{n+1}^{(3)}}{j_n^{(3)}} + 1 + 2 \frac{j_{n-1}^{(3)}}{j_n^{(3)}} \right)}{1 + h \frac{j_{n+1}^{(3)}}{j_n^{(3)}}} \\
&= \frac{2 + h(2 + 1 + 1)}{1 + 2h} = \frac{2 + 4h}{1 + 2h} = 2
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. ■

Bu sonucun ardından, Binet formülünü verelim.

**Teorem 3.2.3** *Hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal dizisi  $\tilde{J}_n^{(3)}$  ve üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas dizisi  $\tilde{j}_n^{(3)}$  için Binet formülü sırasıyla*

$$\tilde{J}_n^{(3)} = \frac{2}{7} 2^n (1 + 2h) + \left( \frac{-3 - 2i\sqrt{3}}{21} \right) \omega_1^n (1 + \omega_1 h) + \left( \frac{-3 + 2i\sqrt{3}}{21} \right) \omega_2^n (1 + \omega_2 h) \quad (3.17)$$

ve

$$\tilde{j}_n^{(3)} = \frac{8}{7} 2^n (1 + 2h) + \left( \frac{3 + 2i\sqrt{3}}{7} \right) \omega_1^n (1 + \omega_1 h) + \left( \frac{3 - 2i\sqrt{3}}{7} \right) \omega_2^n (1 + \omega_2 h) \quad (3.18)$$

şeklinde verilebilir. Burada  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  daha önce olduğu gibi birimin karmaşık küp kök-leridir.

**İspat.**  $J_n^{(3)}$  ve  $j_n^{(3)}$  için elde edilen

$$J_n^{(3)} = \frac{2}{7} 2^n + \left( \frac{-3 - 2i\sqrt{3}}{21} \right) \omega_1^n + \left( \frac{-3 + 2i\sqrt{3}}{21} \right) \omega_2^n$$

ve

$$j_n^{(3)} = \frac{8}{7} 2^n + \left( \frac{3 + 2i\sqrt{3}}{7} \right) \omega_1^n + \left( \frac{3 - 2i\sqrt{3}}{7} \right) \omega_2^n$$

Binet formüllerini kullanarak

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_n^{(3)} &= J_n^{(3)} + hJ_{n+1}^{(3)} \\
&= \frac{2}{7}2^n + \left(\frac{-3-2i\sqrt{3}}{21}\right)\omega_1^n + \left(\frac{-3+2i\sqrt{3}}{21}\right)\omega_2^n + \\
&\quad + h\left(\frac{2}{7}2^{n+1} + \left(\frac{-3-2i\sqrt{3}}{21}\right)\omega_1^{n+1} + \left(\frac{-3+2i\sqrt{3}}{21}\right)\omega_2^{n+1}\right) \\
&= \frac{2}{7}2^n(1+2h) + \left(\frac{-3-2i\sqrt{3}}{21}\right)\omega_1^n(1+\omega_1h) + \left(\frac{-3+2i\sqrt{3}}{21}\right)\omega_2^n(1+\omega_2h)
\end{aligned}$$

olduğu gösterilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\tilde{j}_n^{(3)} &= j_n^{(3)} + hj_{n+1}^{(3)} \\
&= \frac{8}{7}2^n + \left(\frac{3+2i\sqrt{3}}{7}\right)\omega_1^n + \left(\frac{3-2i\sqrt{3}}{7}\right)\omega_2^n + \\
&\quad + h\left(\frac{8}{7}2^{n+1} + \left(\frac{3+2i\sqrt{3}}{7}\right)\omega_1^{n+1} + \left(\frac{3-2i\sqrt{3}}{7}\right)\omega_2^{n+1}\right) \\
&= \frac{8}{7}2^n(1+2h) + \left(\frac{3+2i\sqrt{3}}{7}\right)\omega_1^n(1+\omega_1h) + \left(\frac{3-2i\sqrt{3}}{7}\right)\omega_2^n(1+\omega_2h)
\end{aligned}$$

olduğu gösterilir. ■

Hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal dizisi için Binet formülünün aşağıdaki gibi verilmesi kullanışlı olabilir.

**Sonuç 3.2.4** *Hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal dizisi ve hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas dizisi için Binet formülü sırasıyla*

$$\tilde{J}_n^{(3)} = \begin{cases} \frac{1}{7}(2^{3k+1} - 2 + h(2^{3k+2} + 3)) & , \quad n = 3k \text{ ise} \\ \frac{1}{7}(2^{3k+2} + 3 + h(2^{3k+3} - 1)) & , \quad n = 3k + 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{7}(2^{3k+3} - 1 + h(2^{3k+4} - 2)) & , \quad n = 3k + 2 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\tilde{j}_n^{(3)} = \begin{cases} \frac{1}{7}(2^{3k+3} + 6 + h(2^{3k+4} - 9)) & , \quad n = 3k \text{ ise} \\ \frac{1}{7}(2^{3k+4} - 9 + h(2^{3k+5} + 3)) & , \quad n = 3k + 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{7}(2^{3k+5} + 3 + h(2^{3k+6} + 6)) & , \quad n = 3k + 2 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.20)$$

şeklinde verilebilir.

**İspat.** Hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal dizisi için (3.17) Binet formülünde  $n = 3k$

için  $\omega_1^n = \omega_2^n = 1$  ve  $\omega_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  ve  $\omega_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$  olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_n^{(3)} &= \frac{2}{7}2^n(1+2h) + \left(\frac{-3-2i\sqrt{3}}{21}\right)(1+\omega_1h) + \left(\frac{-3+2i\sqrt{3}}{21}\right)(1+\omega_2h) \\
&= \left(\frac{2}{7}2^{3k} + \frac{-3-2i\sqrt{3}}{21} + \frac{-3+2i\sqrt{3}}{21}\right) + \\
&\quad + h\left(\frac{2^{3k+2}}{7} + \frac{-3-2i\sqrt{3}}{21}\omega_1 + \frac{-3+2i\sqrt{3}}{21}\omega_2\right) \\
&= \frac{1}{7}(2^{3k+1} - 2 + h(2^{3k+2} + 3))
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde  $n = 3k + 1$  için  $\omega_1^n = \omega_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  ve  $\omega_2^n = \omega_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$  olduğu kullanılır ise

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_n^{(3)} &= \frac{2}{7}2^n(1+2h) + \left(\frac{-3-2i\sqrt{3}}{21}\right)\omega_1(1+\omega_1h) + \left(\frac{-3+2i\sqrt{3}}{21}\right)\omega_2(1+\omega_2h) \\
&= \left(\frac{2}{7}2^{3k+1} + \frac{-3-2i\sqrt{3}}{21}\omega_1 + \frac{-3+2i\sqrt{3}}{21}\omega_2\right) + \\
&\quad + h\left(\frac{2^{3k+3}}{7} + \frac{-3-2i\sqrt{3}}{21}\omega_1^2 + \frac{-3+2i\sqrt{3}}{21}\omega_2^2\right) \\
&= \frac{1}{7}(2^{3k+2} + 3 + h(2^{3k+3} - 1))
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak  $n = 3k + 2$  için  $\omega_1^n = \omega_1^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$  ve  $\omega_2^n = \omega_2^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  olduğundan

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_n^{(3)} &= \frac{2}{7}2^n(1+2h) + \left(\frac{-3-2i\sqrt{3}}{21}\right)\omega_1^2(1+\omega_1h) + \left(\frac{-3+2i\sqrt{3}}{21}\right)\omega_2^2(1+\omega_2h) \\
&= \left(\frac{2}{7}2^{3k+2} + \frac{-3-2i\sqrt{3}}{21}\omega_1^2 + \frac{-3+2i\sqrt{3}}{21}\omega_2^2\right) + \\
&\quad + h\left(\frac{2^{3k+4}}{7} + \frac{-3-2i\sqrt{3}}{21} + \frac{-3+2i\sqrt{3}}{21}\right) \\
&= \frac{1}{7}(2^{3k+3} - 1 + h(2^{3k+4} - 2))
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas dizisi için (3.18) Binet

formülünde  $n = 3k$  için  $\omega_1^n = \omega_2^n = 1$  ve  $\omega_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  ve  $\omega_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$  olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{j}_n^{(3)} &= \frac{8}{7}2^n(1+2h) + \left(\frac{3+2i\sqrt{3}}{7}\right)\omega_1^n(1+\omega_1h) + \left(\frac{3-2i\sqrt{3}}{7}\right)\omega_2^n(1+\omega_2h) \\ &= \left(\frac{8}{7}2^{3k} + \frac{3+2i\sqrt{3}}{7} + \frac{3-2i\sqrt{3}}{7}\right) + \\ &\quad + h\left(\frac{2^{3k+4}}{7} + \frac{3+2i\sqrt{3}}{7}\omega_1 + \frac{3-2i\sqrt{3}}{7}\omega_2\right) \\ &= \frac{1}{7}(2^{3k+3} + 6 + h(2^{3k+4} - 9))\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde  $n = 3k + 1$  için  $\omega_1^n = \omega_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  ve  $\omega_2^n = \omega_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$  olduğu kullanılır ise

$$\begin{aligned}\tilde{j}_n^{(3)} &= \frac{8}{7}2^n(1+2h) + \left(\frac{3+2i\sqrt{3}}{7}\right)\omega_1(1+\omega_1h) + \left(\frac{3-2i\sqrt{3}}{7}\right)\omega_2(1+\omega_2h) \\ &= \left(\frac{8}{7}2^{3k+1} + \frac{3+2i\sqrt{3}}{7}\omega_1 + \frac{3-2i\sqrt{3}}{7}\omega_2\right) + \\ &\quad + h\left(\frac{2^{3k+5}}{7} + \frac{3+2i\sqrt{3}}{7}\omega_1^2 + \frac{3-2i\sqrt{3}}{7}\omega_2^2\right) \\ &= \frac{1}{7}(2^{3k+4} - 9 + h(2^{3k+5} + 3)),\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak  $n = 3k + 2$  için  $\omega_1^n = \omega_1^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$  ve  $\omega_2^n = \omega_2^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  olduğundan

$$\begin{aligned}\tilde{j}_n^{(3)} &= \frac{8}{7}2^n(1+2h) + \left(\frac{3+2i\sqrt{3}}{7}\right)\omega_1(1+\omega_1h) + \left(\frac{3-2i\sqrt{3}}{7}\right)\omega_2(1+\omega_2h) \\ &= \left(\frac{8}{7}2^{3k+2} + \frac{3+2i\sqrt{3}}{7}\omega_1^2 + \frac{3-2i\sqrt{3}}{7}\omega_2^2\right) + \\ &\quad + h\left(\frac{2^{3k+6}}{7} + \frac{3+2i\sqrt{3}}{7} + \frac{3-2i\sqrt{3}}{7}\right) \\ &= \frac{1}{7}(2^{3k+5} + 3 + h(2^{3k+6} + 6))\end{aligned}$$

bulunur. ■

Şimdi, hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu verelim. Üçüncü dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu için (bakınız [21]).

**Teorem 3.2.5** *Hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal sayıları ve hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas sayıları için üreteç fonksiyonları sırasıyla*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n = \frac{h+x}{1-x-x^2-2x^3} \quad (3.21)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n = \frac{2 + h + (-1 + 4h)x + (2 + 4h)x^2}{1 - x - x^2 - 2x^3}$$

şeklindedir.

**İspat.** Hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n$$

kullanarak,

$$\begin{aligned} (1 - x - x^2 - 2x^3)g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n - 2x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^{n+3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{j}_{n-1}^{(3)} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{j}_{n-2}^{(3)} x^n - 2 \sum_{n=3}^{\infty} \tilde{j}_{n-3}^{(3)} x^n \\ &= \left( \tilde{j}_0^{(3)} + \tilde{j}_1^{(3)} x + \tilde{j}_2^{(3)} x^2 \right) - \tilde{j}_0^{(3)} x - \tilde{j}_1^{(3)} x^2 - \tilde{j}_0^{(3)} x^2 \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} \left( \underbrace{\tilde{j}_n^{(3)} - \tilde{j}_{n-1}^{(3)} - \tilde{j}_{n-2}^{(3)} - 2\tilde{j}_{n-3}^{(3)}}_{=0} \right) x^n \\ &= \tilde{j}_0^{(3)} + \left( \tilde{j}_1^{(3)} - \tilde{j}_0^{(3)} \right) x - \left( \tilde{j}_0^{(3)} + \tilde{j}_1^{(3)} - \tilde{j}_2^{(3)} \right) x^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Yukarıdaki denklemi yeniden düzenlersek,  $\tilde{j}_0^{(3)} = h$ ,  $\tilde{j}_1^{(3)} = 1 + h$  ve

$\tilde{j}_2^{(3)} = 1 + 2h$  olduğundan

$$g(x) = \frac{\tilde{j}_0^{(3)} + \left( \tilde{j}_1^{(3)} - \tilde{j}_0^{(3)} \right) x - \left( \tilde{j}_0^{(3)} + \tilde{j}_1^{(3)} - \tilde{j}_2^{(3)} \right) x^2}{1 - x - x^2 - 2x^3} = \frac{h + x}{1 - x - x^2 - 2x^3}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n$$

eşitliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
(1 - x - x^2 - 2x^3)f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n - 2x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^{n+3} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n^{(3)} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{j}_{n-1}^{(3)} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{j}_{n-2}^{(3)} x^n - 2 \sum_{n=3}^{\infty} \tilde{j}_{n-3}^{(3)} x^n \\
&= \left( \tilde{j}_0^{(3)} + \tilde{j}_1^{(3)} x + \tilde{j}_2^{(3)} x^2 \right) - \tilde{j}_0^{(3)} x - \tilde{j}_1^{(3)} x^2 - \tilde{j}_0^{(3)} x^2 \\
&\quad + \sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{\left( \tilde{j}_n^{(3)} - \tilde{j}_{n-1}^{(3)} - \tilde{j}_{n-2}^{(3)} - 2\tilde{j}_{n-3}^{(3)} \right)}_{=0} x^n \\
&= \tilde{j}_0^{(3)} + \left( \tilde{j}_1^{(3)} - \tilde{j}_0^{(3)} \right) x - \left( \tilde{j}_0^{(3)} + \tilde{j}_1^{(3)} - \tilde{j}_2^{(3)} \right) x^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $\tilde{j}_0^{(3)} = 2 + h$ ,  $\tilde{j}_1^{(3)} = 1 + 5h$  ve  $\tilde{j}_2^{(3)} = 5 + 10h$  olduğundan

$$f(x) = \frac{\tilde{j}_0^{(3)} + \left( \tilde{j}_1^{(3)} - \tilde{j}_0^{(3)} \right) x - \left( \tilde{j}_0^{(3)} + \tilde{j}_1^{(3)} - \tilde{j}_2^{(3)} \right) x^2}{1 - x - x^2 - 2x^3} = \frac{2 + h + (-1 + 4h)x + (2 + 4h)x^2}{1 - x - x^2 - 2x^3}$$

elde ederiz. ■

Şimdi, hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının toplam formülünü verelim.

**Teorem 3.2.6**  $n \geq 0$  için,

$$\sum_{k=0}^n \tilde{J}_k^{(3)} = \frac{1}{3} \left( \tilde{J}_{n+2}^{(3)} + 2\tilde{J}_n^{(3)} - \tilde{J}_2^{(3)} + \tilde{J}_0^{(3)} \right), \quad (3.22)$$

$$\sum_{k=0}^n \tilde{j}_k^{(3)} = \frac{1}{3} \left( \tilde{j}_{n+2}^{(3)} + 2\tilde{j}_n^{(3)} - \tilde{j}_2^{(3)} + \tilde{j}_0^{(3)} \right) \quad (3.23)$$

dir.

**İspat.** Burada üçüncü dereceden Jacobsthal toplam formülü

$$\sum_{k=0}^n J_k^{(3)} = \frac{1}{3} \left( J_{n+2}^{(3)} + 2J_n^{(3)} - 1 \right)$$

kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \tilde{J}_k^{(3)} &= \sum_{k=0}^n \left( J_k^{(3)} + h J_{k+1}^{(3)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^n J_k^{(3)} + h \sum_{k=0}^n J_{k+1}^{(3)} \\
&= \frac{1}{3} \left( J_{n+2}^{(3)} + 2J_n^{(3)} - 1 \right) + \frac{h}{3} \left( J_{n+2}^{(3)} + 2J_n^{(3)} + 3J_{n+1}^{(3)} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{3} \left( J_{n+2}^{(3)} + 2 \left( J_n^{(3)} + h J_{n+1}^{(3)} \right) - 1 + h \left( J_{n+2}^{(3)} + J_{n+1}^{(3)} + 2J_n^{(3)} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{1}{3} \left( J_{n+2}^{(3)} + 2\tilde{J}_n^{(3)} - 1 + h \left( J_{n+3}^{(3)} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{1}{3} \left( J_{n+2}^{(3)} + h J_{n+3}^{(3)} + 2\tilde{J}_n^{(3)} - (1 + h) \right) \\
&= \frac{1}{3} \left( \tilde{J}_{n+2}^{(3)} + 2\tilde{J}_n^{(3)} - (1 + h) \right)
\end{aligned}$$

sonuç olarak,

$$\sum_{k=0}^n \tilde{J}_k^{(3)} = \frac{1}{3} (\tilde{J}_{n+2}^{(3)} + 2\tilde{J}_n^{(3)} - \tilde{J}_2^{(3)} + \tilde{J}_0^{(3)})$$

elde etmiş oluruz. Benzer şekilde, üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas toplam formülünü

$$\sum_{k=0}^n j_k^{(3)} = \frac{1}{3} \left( j_{n+2}^{(3)} + 2j_n^{(3)} - 3 \right)$$

kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \tilde{j}_k^{(3)} &= \sum_{k=0}^n \left( j_k^{(3)} + h j_{k+1}^{(3)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^n j_k^{(3)} + h \sum_{k=0}^n j_{k+1}^{(3)} \\
&= \frac{1}{3} \left( j_{n+2}^{(3)} + 2j_n^{(3)} - 3 \right) + \frac{h}{3} \left( j_{n+2}^{(3)} + 2j_n^{(3)} + 3j_{n+1}^{(3)} - 3j_0^{(3)} - 3 \right) \\
&= \frac{1}{3} \left( j_{n+2}^{(3)} + 2 \left( j_n^{(3)} + h j_{n+1}^{(3)} \right) - 3 + h \left( j_{n+2}^{(3)} + j_{n+1}^{(3)} + 2j_n^{(3)} - 9 \right) \right) \\
&= \frac{1}{3} \left( j_{n+2}^{(3)} + 2\tilde{j}_n^{(3)} - 3 + h \left( j_{n+3}^{(3)} - 9 \right) \right) \\
&= \frac{1}{3} \left( j_{n+2}^{(3)} + h j_{n+3}^{(3)} + 2\tilde{j}_n^{(3)} - 3(1 + 3h) \right) \\
&= \frac{1}{3} \left( \tilde{j}_{n+2}^{(3)} + 2\tilde{j}_n^{(3)} - 3(1 + 3h) \right).
\end{aligned}$$

elde ederiz, sonuç olarak

$$\sum_{k=0}^n \tilde{j}_k^{(3)} = \frac{1}{3} \left( \tilde{j}_{n+2}^{(3)} + 2\tilde{j}_n^{(3)} - \tilde{j}_2^{(3)} + \tilde{j}_0^{(3)} \right)$$

bulunur. ■

**Sonuç 3.2.7**  $n \geq 0$  için, hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının toplam formülleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \tilde{J}_k^{(3)} &= \begin{cases} J_{n+1}^{(3)} (1 + 2h), & n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ J_{n+1}^{(3)} (1 + 2h) - (1 + h), & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}, \\ \sum_{k=0}^n \tilde{j}_k^{(3)} &= \begin{cases} (j_{n+1}^{(3)} - 2) (1 + 2h), & n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ (j_{n+1}^{(3)} + 1) (1 + 2h) - 3h, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}\end{aligned}$$

şeklindedir.

**İspat.** Hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal formülünü kullanarak (3.4) ve (3.5),

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \tilde{J}_k^{(3)} &= \sum_{k=0}^n (J_k^{(3)} + hJ_{k+1}^{(3)}) \\ &= \sum_{k=0}^n J_k^{(3)} + h \sum_{k=0}^n J_{k+1}^{(3)} \\ &= \begin{cases} J_{n+1}^{(3)}, & n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ J_{n+1}^{(3)} - 1, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} + h \begin{cases} J_{n+1}^{(3)}, & n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ J_{n+1}^{(3)} - 1, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} \\ &\quad + hJ_{n+1}^{(3)} - hJ_0^{(3)} \\ &= \begin{cases} J_{n+1}^{(3)} (1 + h) + hJ_{n+1}^{(3)} - hJ_0^{(3)}, & n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ J_{n+1}^{(3)} (1 + h) - 1 - h + hJ_{n+1}^{(3)} - hJ_0^{(3)}, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} \\ &= \begin{cases} J_{n+1}^{(3)} (1 + 2h), & n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ J_{n+1}^{(3)} (1 + 2h) - (1 + h), & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}.\end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \tilde{j}_k^{(3)} &= \sum_{k=0}^n (j_k^{(3)} + hj_{k+1}^{(3)}) \\ &= \sum_{k=0}^n j_k^{(3)} + h \sum_{k=0}^n j_{k+1}^{(3)} \\ &= \begin{cases} j_{n+1}^{(3)} - 2, & n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ j_{n+1}^{(3)} + 1, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} + h \begin{cases} j_{n+1}^{(3)} - 2, & n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ j_{n+1}^{(3)} + 1, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} \\ &\quad + hj_{n+1}^{(3)} - hj_0^{(3)} \\ &= \begin{cases} (j_{n+1}^{(3)} - 2) (1 + h) + hj_{n+1}^{(3)} - 2h, & n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ (j_{n+1}^{(3)} + 1) (1 + h) + hj_{n+1}^{(3)} - 2h, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (j_{n+1}^{(3)} - 2) (1 + 2h), & n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ (j_{n+1}^{(3)} + 1) (1 + 2h) - 3h, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}.\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Şimdi hiperbolik  $\left(\tilde{J}_n^{(3)}\right)$  üçüncü dereceden Jacobsthal dizisi için birkaç özel özdeşlik vere-  
lim.

**Teorem 3.2.8** *Hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal dizisi  $\left(\tilde{J}_n^{(3)}\right)$  ve hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas dizisi  $\left(\tilde{j}_n^{(3)}\right)$  için*

$$\begin{aligned}
3\tilde{J}_n^{(3)} + \tilde{j}_n^{(3)} &= 2^n (1 + 2h), \\
\tilde{j}_n^{(3)} - 3\tilde{J}_n^{(3)} &= 2\tilde{j}_{n-3}^{(3)}, \\
\tilde{J}_{n+2}^{(3)} - 4\tilde{J}_n^{(3)} &= \begin{cases} 1 - 2h, & n = 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ -2 + h, & n = 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ 1 + h, & n = 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}, \\
\tilde{j}_n^{(3)} - 4\tilde{J}_n^{(3)} &= \begin{cases} 2 - 3h, & n = 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ -3 + h, & n = 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ 1 + 2h, & n = 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}, \\
\tilde{j}_{n+1}^{(3)} + \tilde{j}_n^{(3)} &= 3\tilde{J}_{n+1}^{(3)}, \\
\tilde{j}_n^{(3)} - \tilde{J}_{n+2}^{(3)} &= \begin{cases} 1 - h, & n = 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ -1, & n = 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ h, & n = 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}, \\
\left(\tilde{j}_n^{(3)}\right)^2 - 9\left(\tilde{J}_n^{(3)}\right)^2 &= 2^{n+1} \left(\tilde{j}_{n-3}^{(3)} + 2\tilde{j}_{n-2}^{(3)}\right) + 2h \left(\tilde{j}_n^{(3)}\tilde{j}_{n+1}^{(3)} - 9\tilde{J}_n^{(3)}\tilde{J}_{n+1}^{(3)}\right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat.** [18] numaralı makalede verilen formülleri yerine yazdığımızda (3.6) kullanılarak;

$$\begin{aligned}
3\tilde{J}_n^{(3)} + \tilde{j}_n^{(3)} &= 3 \left( J_n^{(3)} + hJ_{n+1}^{(3)} \right) + j_n^{(3)} + hj_{n+1}^{(3)} \\
&= 3J_n^{(3)} + j_n^{(3)} + h \left( 3J_{n+1}^{(3)} + j_{n+1}^{(3)} \right) \\
&= 2^{n+1} + h2^{n+2} = 2^{n+1} (1 + 2h)
\end{aligned}$$

elde ederiz. (3.7) eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\tilde{j}_n^{(3)} - 3\tilde{J}_n^{(3)} &= j_n^{(3)} + hj_{n+1}^{(3)} - 3 \left( J_n^{(3)} + hJ_{n+1}^{(3)} \right) \\
&= j_n^{(3)} - 3J_n^{(3)} + h \left( j_{n+1}^{(3)} - 3J_{n+1}^{(3)} \right) \\
&= 2j_{n-3}^{(3)} + 2hj_{n-2}^{(3)}
\end{aligned}$$

elde ederiz. (3.8) eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{n+2}^{(3)} - 4\tilde{J}_n^{(3)} &= \left( J_{n+2}^{(3)} + hJ_{n+3}^{(3)} \right) - 4 \left( J_n^{(3)} + hJ_{n+1}^{(3)} \right) \\
&= \left( J_{n+2}^{(3)} - 4J_n^{(3)} \right) + h \left( J_{n+3}^{(3)} - 4J_{n+1}^{(3)} \right) \\
&= \begin{cases} -2, & n = 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ 1, & n \neq 1 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} + h \begin{cases} -2, & n = 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ 1, & n \neq 0 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 - 2h, & n = 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ -2 + h, & n = 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ 1 + h, & n = 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}
\end{aligned}$$

elde ederiz. (3.9) eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\tilde{j}_n^{(3)} - 4\tilde{J}_n^{(3)} &= \left( j_n^{(3)} + hj_{n+1}^{(3)} \right) - 4 \left( J_n^{(3)} + hJ_{n+1}^{(3)} \right) \\
&= \left( j_n^{(3)} - 4J_n^{(3)} \right) + h \left( j_{n+1}^{(3)} - 4J_{n+1}^{(3)} \right) \\
&= \begin{cases} 2, & n = 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ -3, & n = 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ 1, & n = 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} + h \begin{cases} 2, & n + 1 = 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ -3, & n + 1 = 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ 1, & n + 1 = 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2, & n = 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ -3, & n = 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ 1, & n = 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} + \begin{cases} -3, & n = 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ 1, & n = 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ 2, & n = 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2 - 3h, & n = 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ -3 + h, & n = 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ 1 + 2h, & n = 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}
\end{aligned}$$

elde ederiz. (3.10) eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\tilde{j}_{n+1}^{(3)} + \tilde{j}_n^{(3)} &= j_{n+1}^{(3)} + hj_{n+2}^{(3)} + j_n^{(3)} + hj_{n+1}^{(3)} \\
&= j_{n+1}^{(3)} + j_n^{(3)} + h \left( j_{n+2}^{(3)} + j_{n+1}^{(3)} \right) \\
&= 3J_{n+1}^{(3)} + 3hJ_{n+2}^{(3)},
\end{aligned}$$

elde ederiz. (3.11) eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\tilde{j}_n^{(3)} - \tilde{J}_{n+2}^{(3)} &= \left( j_n^{(3)} + h j_{n+1}^{(3)} \right) - \left( J_{n+2}^{(3)} + h J_{n+3}^{(3)} \right) \\
&= \left( j_n^{(3)} - J_{n+2}^{(3)} \right) + h \left( j_{n+1}^{(3)} - J_{n+3}^{(3)} \right) \\
&= \begin{cases} 1, & n = 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ -1, & n = 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ 0, & n = 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} + h \begin{cases} 1, & n = 2 \pmod{3} \text{ ise} \\ -1, & n = 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ 0, & n = 1 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 - h, & n = 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ -1, & n = 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ h, & n = 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}
\end{aligned}$$

elde ederiz. (3.12) kullanarak,

$$\begin{aligned}
\left( \tilde{j}_n^{(3)} \right)^2 - 9 \left( \tilde{J}_n^{(3)} \right)^2 &= \left( j_n^{(3)} + h j_{n+1}^{(3)} \right)^2 - 9 \left( J_n^{(3)} + h J_{n+1}^{(3)} \right)^2 \\
&= \left( j_n^{(3)} \right)^2 + \left( j_{n+1}^{(3)} \right)^2 + 2h j_n^{(3)} j_{n+1}^{(3)} \\
&\quad - 9 \left[ \left( J_n^{(3)} \right)^2 + \left( J_{n+1}^{(3)} \right)^2 + 2h J_n^{(3)} J_{n+1}^{(3)} \right] \\
&= \left[ \left( j_n^{(3)} \right)^2 - 9 \left( J_n^{(3)} \right)^2 \right] + \left[ \left( j_{n+1}^{(3)} \right)^2 - 9 \left( J_{n+1}^{(3)} \right)^2 \right] \\
&\quad + 2h \left( j_n^{(3)} j_{n+1}^{(3)} - 9 J_n^{(3)} J_{n+1}^{(3)} \right) \\
&= 2^{n+2} \left( j_{n-3}^{(3)} + 2j_{n-2}^{(3)} \right) + 2h \left( j_n^{(3)} j_{n+1}^{(3)} - 9 J_n^{(3)} J_{n+1}^{(3)} \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. ■

Hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları  $h^2 = 1$  ( $h \notin \mathbb{R}$ ) olacak şekilde  $\tilde{J}_0^{(3)} = h$ ,  $\tilde{J}_1^{(3)} = 1 + h$  ve  $\tilde{j}_0^{(3)} = 2 + h$ ,  $\tilde{j}_1^{(3)} = 1 + 5h$  başlangıç koşulları ile birlikte  $n$ . hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal sayısı  $\tilde{J}_n^{(3)}$  ve  $n$ . hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas sayısı  $\tilde{j}_n^{(3)}$  sırasıyla

$$\tilde{J}_n^{(3)} = J_n^{(3)} + h J_{n+1}^{(3)},$$

$$\tilde{j}_n^{(3)} = j_n^{(3)} + h j_{n+1}^{(3)},$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Bu bölümde hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal sayılarını tanımlamış ve yineleme bağıntıları, Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve toplam formülleri araştırılmıştır. Diğer yazarlar tarafından dual hiperbolik, Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayıları (bakınız [10, 15]) ve hiperbolik genelleştirilmiş Pell sayıları (bakınız [13]) üzerine yeni çalışmalar

vardır. Bu sayıların dual formu [31]'de Cerda-Morales tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmaya hiperbolik üçüncü dereceden Jacobsthal vektörlerini tanımlamak ve özelliklerini araştırarak devam edeceğiz.





## BÖLÜM 4

### HİPERBOLİK JACOBSTHAL VEKTÖRLERİ

Bu bölümde hiperbolik Jacobsthal vektörlerinin Lorentzian iç ve vektörel çarpımları üzerinde durulacaktır.

$\vec{z}_1 = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $\vec{z}_2 = (y_1, y_2, y_3) \mathbb{R}^3$  uzayında iki vektör olsun.  $z_1$  ve  $z_2$  için Lorentzian iç çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır, (bakınız [32] ve [33]),

$$z_1 z_2 = \langle \vec{z}_1, \vec{z}_2 \rangle_L = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3. \quad (4.1)$$

$\vec{z} = (x_1, x_2, x_3)$  için

$$\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle_L = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

ve

$$\|\vec{z}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

sağlanır.  $\mathbb{R}^3$  vektör uzayına  $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$  Lorentzian iç çarpımı ile birlikte Lorentzian iç çarpım uzayı denir ve  $\mathbb{L}^{2,1}$  veya  $\mathbb{L}^3$  ile gösterilir.

Bir hiperbolik Jacobsthal vektör

$$\vec{\tilde{J}}_n = (\tilde{J}_n, \tilde{J}_{n+1}, \tilde{J}_{n+2})$$

şeklinde tanımlanır. (3.13) ve (3.15) eşitliklerinden görüyoruz ki  $\vec{J}_n = (J_n, J_{n+1}, J_{n+2})$  ve  $\vec{J}_{n+1} = (J_{n+1}, J_{n+2}, J_{n+3})$  Jacobsthal vektörleri ve  $h^2 = 1$  olmak üzere

$$\vec{J}_n = \vec{J}_n + h \vec{J}_{n+1}$$

dir.

$\vec{\tilde{J}}_n$  hiperbolik Jacobsthal vektörünün  $\lambda \in \mathbb{R}$  skaleri ile çarpımı

$$\lambda \vec{\tilde{J}}_n = \lambda \vec{J}_n + h \lambda \vec{J}_{n+1}$$

ile verilir.  $\vec{\tilde{J}}_n$  ve  $\vec{\tilde{J}}_m$  vektörlerinin eşit olması için gerek ve yeter koşul

$$J_n = J_m$$

$$J_{n+1} = J_{m+1}$$

$$J_{n+2} = J_{m+2}$$

$$J_{n+3} = J_{m+3}$$

olmasıdır.  $\vec{\tilde{J}}_n$  hiperbolik Jacobsthal vektörünün ilk birkaç tanesi

$$\vec{\tilde{J}}_0 = (\tilde{J}_0, \tilde{J}_1, \tilde{J}_2) = (J_0 + hJ_1, J_1 + hJ_2, J_2 + hJ_3) = (h, 1 + h, 1 + 3h),$$

$$\vec{\tilde{J}}_1 = (\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3) = (J_1 + hJ_2, J_2 + hJ_3, J_3 + hJ_4) = (1 + h, 1 + 3h, 3 + 5h),$$

$$\vec{\tilde{J}}_2 = (\tilde{J}_2, \tilde{J}_3, \tilde{J}_4) = (J_2 + hJ_3, J_3 + hJ_4, J_4 + hJ_5) = (1 + 3h, 3 + 5h, 5 + 11h)$$

$\vdots$

olarak bulunur. Şimdi hiperbolik Jacobsthal vektörlerinin Lorentzian iç çarpımını verelim.

**Teorem 4.0.9**  $\vec{\tilde{J}}_n$  ve  $\vec{\tilde{J}}_m$  iki hiperbolik Jacobsthal vektör olsun.  $\vec{\tilde{J}}_n$  ve  $\vec{\tilde{J}}_m$  vektörlerinin Lorentzian iç çarpımı aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\tilde{J}}_n, \vec{\tilde{J}}_m \right\rangle_{\mathbb{L}} &= (J_m J_n + 2J_{m+1} J_{n+1} - J_{m+3} J_{n+3}) \\ &\quad + h(J_{m+1} J_{n+2} + J_{m+2} J_{n+1} - J_{m+2} J_{n+3} - J_{m+3} J_{n+2} + J_n J_{m+1} + J_m J_{n+1}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

**İspat.**  $\vec{\tilde{J}}_n = (\tilde{J}_n, \tilde{J}_{n+1}, \tilde{J}_{n+2})$  ve  $\vec{\tilde{J}}_m = (\tilde{J}_m, \tilde{J}_{m+1}, \tilde{J}_{m+2})$  vektörlerinin Lorentzian iç çarpımları

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\tilde{J}}_n, \vec{\tilde{J}}_m \right\rangle_{\mathbb{L}} &= \tilde{J}_n \tilde{J}_m + \tilde{J}_{n+1} \tilde{J}_{m+1} - \tilde{J}_{n+2} \tilde{J}_{m+2} \\ &= \left\langle \vec{J}_n, \vec{J}_m \right\rangle + \left\langle \vec{J}_{n+1}, \vec{J}_{m+1} \right\rangle + h \left[ \left\langle \vec{J}_n, \vec{J}_{m+1} \right\rangle + \left\langle \vec{J}_{n+1}, \vec{J}_m \right\rangle \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

ile verilir, burada  $\vec{J}_n = (J_n, J_{n+1}, J_{n+2})$  Jacobsthal vektördür. (4.1) kullanılarak

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{J}_n, \vec{J}_m \right\rangle &= J_n J_m + J_{n+1} J_{m+1} - J_{n+2} J_{m+2}, \\ \left\langle \vec{J}_{n+1}, \vec{J}_{m+1} \right\rangle &= J_{n+1} J_{m+1} + J_{n+2} J_{m+2} - J_{n+3} J_{m+3}, \\ \left\langle \vec{J}_n, \vec{J}_{m+1} \right\rangle &= J_n J_{m+1} + J_{n+1} J_{m+2} - J_{n+2} J_{m+3}, \\ \left\langle \vec{J}_{n+1}, \vec{J}_m \right\rangle &= J_{n+1} J_m + J_{n+2} J_{m+1} - J_{n+3} J_{m+2} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki dört denklemi yerine koyarsak istenilen (4.2) eşitliği elde edilmiş olur.

Yukarıdaki teoremden  $m = n$  yazılırsa:

$$\left\| \vec{\tilde{J}}_n \right\|_{\mathbb{L}} = \left\langle \vec{\tilde{J}}_n, \vec{\tilde{J}}_n \right\rangle_{\mathbb{L}} = (J_n^2 + 2J_{n+1}^2 - J_{n+3}^2) + 2h(J_{n+1}J_{n+2} + J_nJ_{n+1} - J_{n+2}J_{n+3}) \quad (4.4)$$

$J_{n+3} = 3J_{n+1} + 2J_n$  yazılırsa

$$\begin{aligned} \left\| \vec{\tilde{J}}_n \right\|_{\mathbb{L}} &= (J_n^2 + 2J_{n+1}^2 - (3J_{n+1} + 2J_n)^2) + 2h(J_nJ_{n+1} - J_{n+2}^2 - J_{n+2}J_{n+1}) \\ &= (-3J_n^2 - 7J_{n+1}^2 - 12J_{n+1}J_n) + 2h(-5J_nJ_{n+1} - 4J_n^2 - 2J_{n+1}^2) \end{aligned}$$

bulunur.

$\vec{z}_1$  ve  $\vec{z}_2$  vektörlerinin  $\mathbb{L}^3$  Lorentzian uzayındaki vektörel çarpımı

$$\vec{z}_1 \times_{\mathbb{L}} \vec{z}_2 = \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = -i(x_2y_3 - x_3y_2) + j(x_1y_3 - x_3y_1) + k(x_1y_2 - x_2y_1)$$

ile tanımlanır.

Benzer olarak  $\vec{\tilde{J}}_n$  ve  $\vec{\tilde{J}}_m$  hiperbolik Jacobsthal vektörlerinin vektörel çarpımı üzerine aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 4.0.10**  $\vec{\tilde{J}}_n$  ve  $\vec{\tilde{J}}_m$  iki hiperbolik Jacobsthal vektör olsun.  $\vec{\tilde{J}}_n = \tilde{J}_n + h\tilde{J}_{n+1}$  ve  $\vec{\tilde{J}}_m = \tilde{J}_m + h\tilde{J}_{m+1}$  vektörlerinin Lorentzian vektörel çarpımı aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{J}}_n \times_{\mathbb{L}} \vec{\tilde{J}}_m &= \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ \tilde{J}_n & \tilde{J}_{n+1} & \tilde{J}_{n+2} \\ \tilde{J}_m & \tilde{J}_{m+1} & \tilde{J}_{m+2} \end{vmatrix} \\ &= \left( \vec{J}_n \times \vec{J}_m + \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_{m+1} \right) + h \left( \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_m + \vec{J}_n \times \vec{J}_{m+1} \right) \quad (4.5) \\ &= (-1)^n 2^n J_{m-n} (1-h) (2i+j+k). \quad (4.6) \end{aligned}$$

**İspat.**  $\vec{\tilde{J}}_n = (\tilde{J}_n, \tilde{J}_{n+1}, \tilde{J}_{n+2})$  ve  $\vec{\tilde{J}}_m = (\tilde{J}_m, \tilde{J}_{m+1}, \tilde{J}_{m+2})$  vektörlerinin Lorentzian vektörel çarpımları

$$\vec{\tilde{J}}_n \times_{\mathbb{L}} \vec{\tilde{J}}_m = \left( \vec{J}_n \times \vec{J}_m + \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_{m+1} \right) + h \left( \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_m + \vec{J}_n \times \vec{J}_{m+1} \right)$$

ile verilir, burada  $\vec{J}_n = (J_n, J_{n+1}, J_{n+2})$  Jacobsthal vektördür.

$$\begin{aligned}
\vec{J}_n \times \vec{J}_m &= -i(J_{n+1}J_{m+2} - J_{n+2}J_{m+1}) + j(J_nJ_{m+2} - J_{n+2}J_m) \\
&\quad + k(J_nJ_{m+1} - J_{n+1}J_m) \\
&= -i(-1)^n 2^{n+1}J_{m-n} + j(-1)^{n+1}2^n J_{m-n} + k(-1)^{n+1}2^n J_{m-n} \\
&= (-1)^{n+1}2^n J_{m-n}(2i + j + k)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
\vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_{m+1} &= -i(J_{n+2}J_{m+3} - J_{n+3}J_{m+2}) + j(J_{n+1}J_{m+3} - J_{n+3}J_{m+1}) \\
&\quad + k(J_{n+1}J_{m+2} - J_{n+2}J_{m+1}) \\
&= -i(-1)^{n+1}2^{n+2}J_{m-n} + j(-1)^n 2^{n+1}J_{m-n} + k(-1)^n 2^{n+1}J_{m-n} \\
&= (-1)^n 2^{n+1}J_{m-n}(2i + j + k)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
\vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_m &= -i(J_{n+2}J_{m+2} - J_{n+3}J_{m+1}) + j(J_{n+1}J_{m+2} - J_{n+3}J_m) \\
&\quad + k(J_{n+1}J_{m+1} - J_{n+2}J_m) \\
&= -i(-1)^{n+1}2^{n+2}J_{m-n-1} + j(-1)^n 2^{n+1}J_{m-n-1} + k(-1)^n 2^{n+1}J_{m-n-1} \\
&= (-1)^n 2^{n+1}J_{m-n-1}(2i + j + k)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\vec{J}_n \times \vec{J}_{m+1} &= -i(J_{n+1}J_{m+3} - J_{n+2}J_{m+2}) + j(J_nJ_{m+3} - J_{n+2}J_{m+1}) \\
&\quad + k(J_nJ_{m+2} - J_{n+1}J_{m+1}) \\
&= -i(-1)^n 2^{n+1}J_{m-n+1} + j(-1)^{n+1}2^n J_{m-n+1} + k(-1)^{n+1}2^n J_{m-n+1} \\
&= (-1)^{n+1}2^n J_{m-n+1}(2i + j + k)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

olduğunu aşağıdaki eşitlikleri kullanarak elde ederiz:

$$\begin{aligned}
J_nJ_{m+1} - J_{n+1}J_m &= (-1)^{n+1}2^n J_{m-n}, \\
J_{n+1}J_{m+2} - J_{n+2}J_{m+1} &= (-1)^n 2^{n+1}J_{m-n}, \\
J_{n+2}J_{m+3} - J_{n+3}J_{m+2} &= (-1)^{n+1}2^{n+2}J_{m-n}, \\
J_{n+1}J_{m+3} - J_{n+2}J_{m+2} &= (-1)^n 2^{n+1}J_{m-n+1}, \\
J_{n+2}J_{m+2} - J_{n+3}J_{m+1} &= (-1)^{n+1}2^{n+2}J_{m-n-1}, \\
J_{n+1}J_{m+1} - J_{n+2}J_m &= (-1)^n 2^{n+1}J_{m-n-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_n J_{m+2} - J_{n+1} J_{m+1} &= (-1)^{n+1} 2^n J_{m-n+1}, \\
J_n J_{m+2} - J_{n+2} J_m &= (-1)^{n+1} 2^n J_{m-n}, \\
J_{n+1} J_{m+3} - J_{n+3} J_{m+1} &= (-1)^n 2^{n+1} J_{m-n}, \\
J_{n+1} J_{m+2} - J_{n+3} J_m &= (-1)^n 2^{n+1} J_{m-n-1}, \\
J_n J_{m+3} - J_{n+2} J_{m+1} &= (-1)^{n+1} 2^n J_{m-n+1}.
\end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
\vec{\tilde{J}}_n \times_{\mathbb{L}} \vec{\tilde{J}}_m &= \left( \vec{J}_n \times \vec{J}_m + \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_{m+1} \right) + h \left( \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_m + \vec{J}_n \times \vec{J}_{m+1} \right) \\
&= \left[ (-1)^{n+1} 2^n J_{m-n} + (-1)^n 2^{n+1} J_{m-n} \right. \\
&\quad \left. + h \left( (-1)^n 2^{n+1} J_{m-n-1} + (-1)^{n+1} 2^n J_{m-n+1} \right) \right] (2i + j + k) \\
&= (-1)^n 2^n J_{m-n} \\
&\quad + h \left( (-1)^n 2^{n+1} J_{m-n-1} + (-1)^{n+1} 2^n (J_{m-n} + 2J_{m-n-1}) \right) (2i + j + k) \\
&= (-1)^n 2^n J_{m-n} (1 - h) (2i + j + k)
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 4.0.11**  $\vec{\tilde{J}}_n, \vec{\tilde{J}}_m$  ve  $\vec{\tilde{J}}_l$  hiperbolik Jacobsthal vektörler olsun.  $\vec{\tilde{J}}_n = J_n + hJ_{n+1}$ ,  $\vec{\tilde{J}}_m = J_m + hJ_{m+1}$  ve  $\vec{\tilde{J}}_l = J_l + hJ_{l+1}$  vektörlerinin Lorentzian iç ve vektörel çarpımları aşağıdaki şekildedir:

$$\left\langle \vec{\tilde{J}}_n \times_{\mathbb{L}} \vec{\tilde{J}}_m, \vec{\tilde{J}}_l \right\rangle = 0.$$

**İspat.**  $\vec{\tilde{J}}_n \times_{\mathbb{L}} \vec{\tilde{J}}_m = \left( \vec{J}_n \times \vec{J}_m + \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_{m+1} \right) + h \left( \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_m + \vec{J}_n \times \vec{J}_{m+1} \right)$   
ve  $\vec{\tilde{J}}_l = \vec{J}_l + h\vec{J}_{l+1}$  olduğundan,

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{\tilde{J}}_n \times_{\mathbb{L}} \vec{\tilde{J}}_m, \vec{\tilde{J}}_l \right\rangle &= \left\langle \vec{J}_n \times \vec{J}_m, \vec{J}_l \right\rangle + \left\langle \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_{m+1}, \vec{J}_l \right\rangle \\
&\quad + h \left[ \left\langle \vec{J}_n \times \vec{J}_m, \vec{J}_{l+1} \right\rangle + \left\langle \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_{m+1}, \vec{J}_{l+1} \right\rangle \right] \\
&\quad + h \left[ \left\langle \vec{J}_n \times \vec{J}_{m+1}, \vec{J}_l \right\rangle + \left\langle \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_m, \vec{J}_l \right\rangle \right] \\
&\quad + \left\langle \vec{J}_n \times \vec{J}_{m+1}, \vec{J}_{l+1} \right\rangle + \left\langle \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_m, \vec{J}_{l+1} \right\rangle
\end{aligned} \tag{4.11}$$

(4.7), (4.8), (4.9) ve (4.10) eşitlikleri kullanılır ise

$$\begin{aligned}
\left\langle (2i + j + k), \vec{\tilde{J}}_l \right\rangle &= (-1)^{n+1} 2^n J_{m-n} (2J_l + J_{l+1} - J_{l+2}) = 0 \\
\left\langle (2i + j + k), \vec{\tilde{J}}_{l+1} \right\rangle &= (-1)^{n+1} 2^n J_{m-n} (2J_{l+1} + J_{l+2} - J_{l+3}) = 0
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\langle \vec{J}_n \times \vec{J}_m, \vec{J}_l \rangle &= (-1)^{n+1} 2^n J_{m-n} \langle (2i+j+k), \vec{J}_l \rangle = 0 \\
\langle \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_{m+1}, \vec{J}_l \rangle &= (-1)^n 2^{n+1} J_{m-n} \langle (2i+j+k), \vec{J}_l \rangle = 0 \\
\langle \vec{J}_n \times \vec{J}_m, \vec{J}_{l+1} \rangle &= (-1)^{n+1} 2^n J_{m-n} \langle (2i+j+k), \vec{J}_{l+1} \rangle = 0 \\
\langle \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_{m+1}, \vec{J}_{l+1} \rangle &= (-1)^n 2^{n+1} J_{m-n} \langle (2i+j+k), \vec{J}_{l+1} \rangle = 0 \\
\langle \vec{J}_n \times \vec{J}_{m+1}, \vec{J}_l \rangle &= (-1)^{n+1} 2^n J_{m-n+1} \langle (2i+j+k), \vec{J}_l \rangle = 0 \\
\langle \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_m, \vec{J}_l \rangle &= (-1)^n 2^{n+1} J_{m-n-1} \langle (2i+j+k), \vec{J}_l \rangle = 0 \\
\langle \vec{J}_n \times \vec{J}_{m+1}, \vec{J}_{l+1} \rangle &= (-1)^{n+1} 2^n J_{m-n+1} \langle (2i+j+k), \vec{J}_{l+1} \rangle = 0 \\
\langle \vec{J}_{n+1} \times \vec{J}_m, \vec{J}_{l+1} \rangle &= (-1)^n 2^{n+1} J_{m-n-1} \langle (2i+j+k), \vec{J}_{l+1} \rangle = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu sonuçlar (4.11) te yerine yazılırsa,  $\langle \vec{J}_n \times_{\mathbb{L}} \vec{J}_m, \vec{J}_l \rangle = 0$  sonucu elde edilir. Hierbolik Jacobsthal vektörleri için verdiğimiz teoremleri hiperbolik Jacobsthal-Lucas için de benzer şekilde verebiliriz. Ayrıca, üçüncü dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas vektörlerinin Lorentzian iç ve vektörel çarpımları için de bu çalışma devam ettirilebilir. Bundan sonraki çalışmalarda bu problem üzerinde durulması planlanmaktadır.

## KAYNAKLAR

- [1] **Horadam A F** (1996) Jacobsthal Representation Numbers. *Fib. Quart.* 34, 40-54.
- [2] **Dikmen C M** (2019) Hyperbolic Jacobsthal Numbers, *Asian Research Journal of Math.*, 15 (4): 1-9.
- [3] **Dikmen C M and Altinsoy M** (2022) On Third Order Hyperbolic Jacobsthal Numbers. *Konuralp Journal of Math.*, 10 (1): 118-126.
- [4] **Horadam A F** (1971) Pell Identities *Fib. Quart.*, 9 (3): 245-252.
- [5] **Spickerman W R** (1982) Binet's Formula for the Tribonacci Numbers, *Fib. Quart.*, 20: 118-120.
- [6] **Melham R** (1999) Sums Involving Fibonacci and Pell Numbers. *Portugaliae Math.*, 56 (3): 309-318.
- [7] **Koshy T** (2001) *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley & Sons., 2.
- [8] **Allouche J P and Johnson J** (1996) Narayana's cows and delayed morphisms, In: *Articles of 3rd Computer Music Conference JIM96, France, 2-7, recherche.ircam.fr/equipes/repmus/jim96/actes/Allouche.ps.*
- [9] **Soykan Y** (2020) On Generalized Narayana Numbers. *Int. J. Adv. Appl. Math. Mech.*, 7 (3): 43-56.
- [10] **Aydın F T** (2019). Hyperbolic Fibonacci Sequence, *Universal Journal of Math. and Applications*, 2 (2): 59-64.
- [11] **Aydın F T** (2018) On Generalisations of the Jacobsthal Sequence, *Notes on Number Theory and Discrete Math.*, 24 (1): 120-135.
- [12] **Soykan Y** (2021) On Dual Hyperbolic Generalized Fibonacci Numbers. *Indian Journal of Pure and Appl. Math.*, 52 (1): 62-78.
- [13] **Soykan Y and Göcen M** (2020) Properties of Hyperbolic Generalized Pell Numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Math.*, 26 (4): 136-153.
- [14] **Taş S** (2022) On Hyperbolic Jacobsthal-Lucas Sequence, *Fundamental Journal of Math. and Appl.*, 5 (1): 16-20.
- [15] **Taşyurdu Y** (2019) Hyperbolic Tribonacci and Tribonacci-Lucas Sequences, *International Journal of Math. Analysis.* 13 (12): 565-572.

## KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [16] **Cihan A, Azak A Z, Güngör M A and Tosun M** (2019) A Study on Dual Hyperbolic Fibonacci and Lucas Numbers, *An., St. Univ. Ovidius Constanta*, 27 (1): 35-48.
- [17] **Soykan Y and Taşdemir E** (2021) Generalized Tetranacci Hybrid Numbers. In *Annales Mathematicae Silesianae. Sciendo*.
- [18] **Szynal A and Włoch I** (2018). On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Hybrid Numbers. In *Annales Mathematicae Silesianae*.
- [19] **Atanassov K** (2012) Short Remarks on Jacobsthal Numbers, *Notes Number Theory Discrete Math.*, 18 (2): 63-64.
- [20] **Atanassov K** (2011) Remark on Jacobsthal Numbers, Part 2. *Notes Number Theory Discrete Math.*, 17 (2): 37-39.
- [21] **Charles K Cook and Michael R B** (2013). Some Identities for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers Satisfying Higher Order Recurrence Relations, In *Annales Mathematicae et Informaticae*, 41: 27-39.
- [22] **Sobczyk G** (1995) The Hyperbolic Number Plane, *The College Math. Journal*, 26 (4): 268-280.
- [23] **Motter A E and Rosa A F** (1998) Hyperbolic Calculus, *Advances Appl. Clifford Algebras*, 8 (1): 109-128.
- [24] **Güncan A N and Erbil Y** (2014) The q-Fibonacci Hyperbolic Functions, *Appl. Math. Inf. Sci.*, 8 (1L): 81-88.
- [25] **Catoni F, Boccaletti R, Cannata R, Catoni V, Nichelatti E and Zampatti P** (2008) *The Math. of Minkowski Space-Time*, Birkhauser, Basel.
- [26] **Gargoubi H and Kossentini S** (2016) f-algebra Structure on Hyperbolic Numbers, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 26 (4): 1211-1233.
- [27] **Jancewicz B** (1996) *The Extended Grassmann Algebra of  $R_3$* , In *Clifford (Geometric) Algebras with Applications and Engineering*, Birkhauser, Boston, 389-421.
- [28] **Khadjiev D and Göksal Y** (2016) Applications of Hyperbolic Numbers to the Invariant Theory in Two-dimensional Pseudo-Euclidean space, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 26, 645-668.
- [29] **Barreira L, Popescu L H and Valls C** (2016) Hyperbolic Sequences of Linear Operators and Evolution Maps, *Milan J. Math.*, 84: 203-216.
- [30] **Cerda Morales G** (2017) Identities for Third Order Jacobsthal Quaternions, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 27 (2): 1043-1053.
- [31] **Cerda Morales G** (2017) A Note On Dual Third Order Jacobsthal Vectors, *Preprints, arXiv:1712.08950v1[math.RA]*.

## KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [32] **Ratcliffe J G** (1994) *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag.
- [33] **Akutagawa K and Nishikawa S** (1990) The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-Space, *Tohoku Math. Journal*, (42): 67-82.





## ÖZGEÇMİŞ

Mustafa ALTINSOY, ilköğrenimini Akyazı’da, orta öğrenimini Kadıköy’de tamamladıktan sonra 2008 yılında Trabzon Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. Ardından 2011 yılında Yeditepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans programını tamamladı. 2011 yılında Milli Eğitim Bakanlığı’na bağlı olarak Antalya ilinde başladığı Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği görevine Bartın ilinde halen devam etmektedir.