

155869

HİPERBOLİK UZAYDA SİMPLEKSLERİN TEPE AÇILARI

ATAKAN TUĞKAN YAKUT

DOKTORA TEZİ
(MATEMATİK)

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

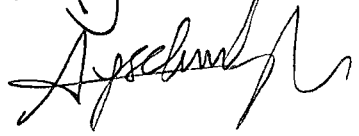
ARALIK 2004

ANKARA

Atakan Tuğkan YAKUT tarafından hazırlanan HİPERBOLİK UZAYDA SİMPEKSLERİN TEPE AÇILARI adlı bu tezin .DOKTORA tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.


Prof. Dr. Baki KARLIĞA
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU 
Üye : Prof. Dr. Rüstem KAYA 
Üye : Prof. Dr. Erdem ESİN 
Üye : Prof. Dr. Baki KARLIĞA 
Üye : Yrd. Doç. Dr. Ayşe YANLI 

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	iv
SİMGELER	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Öklidyen Uzay.....	6
2.2. Küresel Uzay	9
2.3. Lorentz Uzayı	11
2.4. Hiperbolik ve de Sitter Uzay	12
2.5. Öklidyen, Küresel, Hiperbolik Uzayda Tanımlar.....	13
3. HİPERBOLİK UZAY VE MODELLERİ.....	16
3.1. Modeller	16
3.1.1. Üst yarı uzay(Upper-half space) modeli.....	16
3.1.2. Disk modeli	17
3.1.3. Yarı küre modeli.....	18
3.1.4. Klein modeli	18
3.1.5. Hiperboloidal model	18
3.2. Hiperbolik Uzayın Modelleri Arasındaki İzometrilere	20
3.2.1. J ile U arasındaki izometri	23
3.2.2. J ile I arasındaki izometri.....	30

3.2.3. K ile J arasındaki izometri	38
3.2.4. H ile J arasındaki izometri	44
4. ÖKLİDYEN SİMPLEKSLER İÇİN TEPE AÇILLARI ve n-BOYUTLU SİNÜS	53
4.1. Öklidyen Simpleksler	53
4.1.1. Öklidyen simpleksler için tepe açıları ve n-boyutlu sinüs.....	54
4.1.2. n-boyutlu polar sinüs	58
4.1.3. Polar simpleksler için n-boyutlu sinüs.....	60
4.1.4. Polar simpleksler için n-boyutlu polar sinüs.....	64
5. KÜRESEL n-SİMPLEKSLER VE n-BOYUTLU SİNÜS.....	68
5.1. Küresel n- Simpleksler.....	68
5.1.1. Küresel n- simpleksler için tepe açıları ve n-boyutlu sinüs.	68
5.1.2. Küresel polar simpleksler için tepe açıları	78
5.2. Küresel Uzayda Uzaklıklar	89
5.2.1. Küresel Uzayda Bir Noktanın Küresel Hiperdüzleme olan Uzaklığı ..	89
5.2.2. Küresel Uzayda Bir Noktanın Küresel(n-2) Düzleme olan Uzaklığı ..	92
6. HİPERBOLİK n-SİMPLEKSLER VE n-BOYUTLU SİNÜS.....	104
6.1. Hiperbolik n-Simplekler	104
6.1.1. Hiperbolik n- simpleksler için tepe açıları ve n-boyutlu sinüs.	108
6.1.2. Hiperbolik polar simpleksler için tepe açıları	113
6.2. Hiperbolik Uzayda Uzaklıklar.....	124
6.2.1. Hiperbolik Uzayda Bir Noktanın Hiperbolik Hiperdüzleme olan Uzaklığı	124
6.2.2. Hiperbolik Uzayda Bir Noktanın Hiperbolik (n-2) Düzleme olan Uzaklığı	127

7. SONUÇ VE ÖNERİLER	139
KAYNAKLAR.....	140
ÖZGEÇMİŞ.....	143



HİPERBOLİK UZAYDA SİMPLEKSLERİN TEPE AÇILARI

(Doktora Tezi)

Atakan Tuğkan YAKUT

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2004

ÖZET

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümlerde sırası ile temel kavramlar ve hiperbolik uzaydaki çalışmalar hakkında tarihi bilgiler verildi. İkinci bölümde hiperbolik uzayın modelleri ve bu modeller arasındaki izometrilere tanıtıldı. Dördüncü ve beşinci bölümlerde sırası ile Öklidyen ve küresel simpleksler için n -boyutlu sinüs, n -boyutlu polar sinüs ve bunlar arasındaki bağıntılar incelendi. Üstelik, beşinci bölümde bir noktanın küresel hiperdüzlem ve $(n-2)$ -boyutlu düzleme olan küresel uzaklıkları verildi. Altıncı bölümde hiperbolik simpleksler için n -boyutlu sinüs, n -boyutlu polar sinüs ve bunlar arasındaki bağıntılar bulundu. Ayrıca bu bölümde bir noktanın hiperbolik hiperdüzlem ve $(n-2)$ -boyutlu düzleme olan hiperbolik uzaklıkları hesaplandı. Yedinci bölüm de bu çalışmadan elde edilen sonuçların özeti ve hedeflerine ayrıldı.

Bilim Kodu : 403.0201
Anahtar Kelimeler : Hiperbolik uzay, simplex, n -hedral açı, n -boyutlu sinüs
Sayfa Adedi : 141
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Baki KARLIĞA

VERTEX ANGLES OF SIMPLICES IN HYPERBOLIC SPACE

(Ph. D. Thesis)

Atakan Tuğkan YAKUT

GAZI UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

December 2004

ABSTRACT

This thesis is consists of seven sections. In the first and second sections, the historical knowledges about the studies in hyperbolic space and basic concepts are given, respectively. In the third section, the models of hyperbolic space and the isometries of that models are presented. In the fourth and fifth sections, the n -dimensional sine, n -dimensional polar sine and the relations between them are examined for the Euclidean and spherical simplices, respectively. Moreover , in the fifth section spherical distances to the spherical hyperplane and $(n-2)$ -plane of a point are given. In the sixth section n -dimensional sine, n -dimensional polar sine and relations between them are found for the hyperbolic simplices. Furthermore, hyperbolic distances to the hyperbolic hyperplane and $(n-2)$ -plane of a point are calculated. The seventh section is prepared for the summary of results obtained by that study and its goals.

Science Code : 403.02.01

Key Words : Hyperbolic space, simplex, n -hedral angle, n -dimensional sine

Page Number: 141

Adviser : Prof. Dr. Baki KARLIĞA

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, bana ışık tutan değerli hocam Sayın Prof.Dr. Baki KARLIĞA'ya, ayrıca kıymetli tecrübelerinden faydalandığım Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU ile Prof Dr. Erdoğan ESİN'e ve de eşsiz bir sabır ve manevi destekle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan biricik eşim Sevgi ve beni özlemle bekleyen oğlum Yiğit'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Hiperbolik geometri ve diğer alanlarla bağlantısı.....	5
Şekil 3.1. Üst yarı düzlem.....	17
Şekil 3.2. Poincare diski.....	17
Şekil 3.3. Üst yarı küre.....	18
Şekil 3.4. Klein diski.....	19
Şekil 3.5. İki kanatlı hiperboloidin üst kanadı.....	19
Şekil 3.6. J den U üzerine stereografik izdüşüm.....	23
Şekil 3.7. U dan J üzerine stereografik izdüşüm.....	26
Şekil 3.8. J den I üzerine stereografik izdüşüm.....	31
Şekil 3.9. I dan J üzerine stereografik izdüşüm.....	35
Şekil 3.10. K dan J üzerine dik izdüşüm.....	39
Şekil 3.11. J dan K üzerine dik izdüşüm.....	42
Şekil 3.12. H dan J üzerine ters stereografik izdüşüm.....	46
Şekil 3.13. J dan H üzerine stereografik izdüşüm.....	50
Şekil 4.1. Öklidyen 3-simpleksin tepe açısı.....	55
Şekil 5.1. Küresel 2- simpleksin tepe açısı.....	74
Şekil 5.2. Polar 2- simpleksin tepe açısı.....	79
Şekil 5.3. Bir noktanın küresel hiperdüzleme küresel uzaklığı.....	89
Şekil 5.4. Bir noktanın küresel (n-2)-düzleme küresel uzaklığı.....	92
Şekil 6.1. Hiperbolik 2-simpleksin tepe açısı.....	108
Şekil 6.2. Polar Hiperbolik 2-simpleksin tepe açısı.....	114
Şekil 6.3. Bir noktanın hiperbolik hiperdüzleme hiperbolik uzaklığı.....	124

Şekil 6.4. Bir Noktanın hiperbolik (n-2)-düzleme hiperbolik uzaklığı.....127

Şekil 6.5. H^2 de Hiperbolik 2-simpleksin tepe açıları.....136



SİMGELER

Bu tezde kullanılan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler	Açıklama
d_E	Öklidyen uzaklık fonksiyonu
R^{n+1}	(n+1)-boyutlu vektör uzayı
E^n	n-boyutlu Öklidyen uzay
S^n	n-boyutlu Küresel uzay
d_S	Küresel uzaklık fonksiyonu
$\langle , \rangle_L$	Lorentzien iç çarpım
R_1^n	n-boyutlu Lorentzien uzay
S_1^n	De Sitter uzay
H^n	Hiperbolik uzay
d_H	Hiperbolik uzaklık fonksiyonu
C	Konveks küme
Ω_E	Öklidyen n-simpleks
Ω_E^d	Polar n-simpleks
θ_{ij}	Dihedral açı
Ω_S	Küresel n-simpleks
Ω_S^d	Küresel uzayda polar n-simpleks
G	Gram matris
M	Ayrıt matris
Ω_H	Hiperbolik uzayda n-simpleks
Ω_H^d	Hiperbolik uzayda polar n-simpleks
$(P_i, V_{P_i} \cap \hat{V}_{P_i} \cap V_{P_{n+1}})$	n-simpleksin P_i tepesinde ki n-hedral açı

1. GİRİŞ

Hiperbolik Geometrinin Tarihçesi

Hiperbolik geometrinin tarihçesi ile ilgili olarak burada verilenler, Felix Klein(1) Roberto Bonola(2) ve Rosenfeld(3) e dayanılarak oluşturulmuştur. Bu tarihçeye geçmeden önce Öklid' in beş temel postülatını vermekte fayda vardır. Çünkü Hiperbolik Geometrinin çıkışı bu beş temel postülattan beşincisine dayanmaktadır.

1. İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
2. Bir doğru sınırsız bir şekilde uzatılabilir.
3. Merkezi ve yarıçapı verilen bir çember çizilebilir.
4. Bütün dik açılar eşittir.
5. Farklı iki doğruyu kesen bir doğru bu iki doğru ile aynı tarafta eş açılar oluşturursa iki doğru veya bunların uzantıları birbirini kesmez. Bir başka deyişle uzantıları birbirini keserse aynı tarafta oluşan açılar toplamı 180° den küçüktür.

Bu postülatların beşincisi oldukça karmaşık bir yapıya sahip olduğu düşünülmüştür. İlk dört postülat verildiği zaman, beşincisinin aşağıda verilen paralellik postülatına denk olduğu kolaylıkla görülmektedir. Beşinci postülat yerine sık sık paralellik postülatı da kullanılmaktadır.

Paralellik postülatı: Düzlemde bir nokta ve bu noktayı üzerinde bulundurmeyen bir doğru verildiği zaman, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan bir tek doğru vardır.

İki bin yıldan beri matematikçiler ilk dört postülattan beşinci postülatı elde etmeye çalışmışlardır. Her bir durum için ilave postülatlar yaparak beşinci postülatı ulaşmaya çalışmışlar, her bir durumda da bu postülatların gerçekte bunların beşinci postülatına denk olduğu sonucuna varmışlardır.

İlk defa orijinali 1533 de Basle de, daha sonra Barozzi tarafından Latince olarak Padua da basılan Proclus(400) un eserinde ilave postülat olarak , bir doğru verildiğinde bir tarafındaki sabit uzaklıktaki noktaların bir doğru teşkil ettiği kabulünü kullandığı görülmüştür(4).

Bir ingiliz matematikçisi olan John Wallis(1616-1703), her üçgene verilen ölçülerde benzer bir üçgenin var olduğu kabulünü kullanmıştır. Daha genel anlamıyla keyfi büyüklükteki her figüre benzer figürler vardır demiştir. Wallis'in bu fikri ünlü bir Türk matematikçisi olan Nasirüddin Tusi'ye dayanmaktadır(5).

İtalyan matematikçisi Girolamo Saccheri(1667-1733) iki açısı 90° olan dörtgenleri göz önüne almıştır. O bu dörtgenlerde iki düşey doğrunun eşit uzunluğa sahip olduğunu düşünerek geriye kalan iki açının 90° den küçük olabileceğinin mümkün olduğu(non-Öklidyen hal) sonucuna varmıştır(6).

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) benzer konuda ilerlemiş ve bunu daha da genişletmeye çalışmıştır. Onun çalışmaları ölümünden sonra (7) de basılmıştır.

Göttingen matematikçisi olan Kastner(1719-1800) ise öğrencisi Klügel'in(1739-1812) tezinde paralellik postülatına otuz farklı şekilde yaklaştırmaya çalışmıştır(8).

19. yüzyılda bu konu üzerine oldukça yoğun çalışmalar yapılmış ve beşinci postülatı değişik bir açıdan incelemeye çalışmışlar ve sonuçta aşağıdaki postülatı ulaşımlardır.

Düzlemde bir doğru ve üzerinde olmayan bir nokta verildiğinde, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel birden çok doğru geçer.

Bu postülat Öklidyen Geometrideki paralellik postülatı gibi hiperbolik geometri veya non-Öklidyen geometrinin temelini oluşturmuştur.

Bu değişimin alışılmadık neticeleri Non-Öklidyen geometrinin sürpriz özellikleri ve temelleri olarak tanımlanmıştır. Örneğin; bir üçgende iç açıların toplamı 180° değildir, veya bir doğruyun her iki tarafındaki eşit uzaklıktaki noktaların kümesi gerçekte bir doğru değil eğri teşkil ederler vs.

Hiperbolik geometrinin tarihinde üç profesyonel ikide amatör matematikçi önemli rol oynamıştır. Amatör matematikçiler Schweikart(1780-1859) ve onun yeğeni Taurinus'tur(1799-1874). 1816 ya kadar Schweikart beşinci postülatı bağımsız olarak bir "Astral Geometry" adıyla bir geometri geliştirmiştir. Yapmış olduğu çalışmaları bastırmamıştır. Yeğeni Taurinus ise 1824 yılında bir Hiperbolik Geometri elde etmiştir(9).

Profesyonel matematikçiler ise Carl Friedrich Gauss(1777-1855), Nikolai İvanoviç Lobachevskii(1793-1856) ve Janos Bolyai(1802-1860) dir. Gauss'un kendi malikanesindeki çalışmalarından anlaşılmaktadır ki, gençlik yıllarında paralellik postülatını ele almış ve 1817 yılında Non-Öklidyen geometrinin basit bir ifadesini vermiştir. O verdiği bu ifade de bazı karşılaştırmalar yapmış ve bildiklerini küçük yorumlarla vermiştir(10). Janos Bolyai nin babası Farkas Wolfgang(1775-1856), Gauss' un öğrencilikten arkadaşıydı ve hayatı boyunca onunla birlikteydi. Farkas da hayatının büyük bir bölümünü paralellik postülatını ispatlamaya vakfetti fakat başaramadı. Onun çalışmaların bıraktığı yerden oğlu azimli bir şekilde devam ederek 1823' de Hiperbolik Geometrinin temelini oluşturdu. Bolyai' nin yaptığı çalışmalar babasının yazdığı kitabın sonuna ilave edilerek 1832-33 de yayınlanmıştır(11). Lobachevskii' de Non-Öklidyen Geometriyi geniş bir şekilde ele almış ve onun çalışmaları da 1829 'da yayınlanmıştır(12).

Gauss, Bolyai ve Lobachevskii Non-Öklidyen geometriyi bir sentetik baz üzerinde aksiyomatik olarak geliştirmiş, bu geometrinin ne analitik anlamına ne de analitik modellerine bakmamışlardır. Bu matematikçiler kendi geometrilerinin tutarlılığını ispatlama yoluna gitmemişler, non-Öklidyen geometride geniş irdelemeler yaparak hükümler vermişlerdir. Yaptıkları çalışmaların tutarlılığı daha sonraki tarihlerde keşfedilmiştir. Lobachevskii Öklidyen geometrinin trigonometrik formüllerine

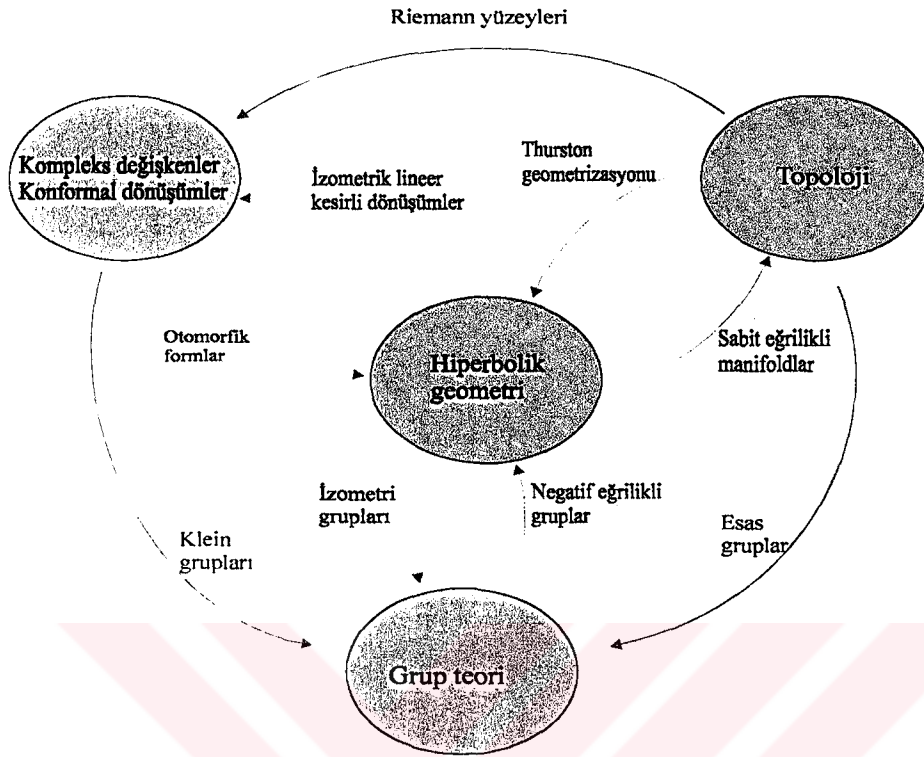
dayanarak bir Non-Öklidyen trigonometri geliştirmiştir. Hiperbolik Non-Öklidyen geometrinin analitik çalışılmasına esas gereksinim Euler, Gaspard Monge ve Gauss'un eğrisel yüzeyler üzerine yapmış olduğu çalışmalarda ortaya çıkmıştır. 1837' de Lobachevskii, sabit negatif eğrilikli eğrisel yüzeylerin Non-Öklidyen Geometride temsil edilebilirliğini önermiş, iki yıl sonra yapılan çalışma yayınlanmış ve bu çalışma sabit eğrilikli yüzeyler üzerine geniş bir çalışma alanı oluşturmuştur. Bu nedenle, literatürde Hiperbolik uzayın bir diğer ismi ise Lobachevskii uzayı olarak adlandırılır.

Bernhard Riemann(1826-1866), yüzeylerin oldukça geniş bir genellemesini yapmıştırdı(13). Bu ise günümüzde Riemann Manifoldları olarak adlandırılmaktadır. Riemann'ın çalışmaları bir sıçrama tahtası olmuştur. Yapılar arasındaki bağıntılar Eugenio Beltrami tarafından 1868' de açık bir şekilde ortaya konmuştur(14). Öklidyen Geometri ne kadar tutarlı ise non-Öklidyen Geometrinin de o kadar tutarlı olduğunun anlaşılması üzerine, non-Öklidyen geometri için analitik modeller kurularak çalışmalar yapılmıştır. Bu modellerin konformal üç tanesi Henri Poincare nin adıyla anılır. Poincare modelleri verirken kompleks değerleri kullanmıştırdı(15).

Hiperbolik geometri üç temel konuda ilerleme kaydetmiştir.

- (i) Kompleks değerkenler ve konformal dönüşümler: Poincare'nin Hiperbolik uzay tanımının temelini oluşturur.
- (ii) Topoloji: Özellikle Thurston'un 3-manifoldların geometrizeasyonun yapılandırması(16).
- (iii) Grup teorisi: Gromov' un kombinatoryal grup teorisi(17).

Esasen hiperbolik geometri bu üç konunun merkezinde yer almaktadır.



Şekil 1. 1. Hiperbolik geometri ve diğer alanlarla bağlantısı

Hiperbolik uzayın beş temel modeli ve bunlar arasındaki izometrik geçişler bu tezde verilerek bu modellerden sadece Hiperboloidal model, Hiperbolik uzay olarak alınmış ve çalışmalar bu model üzerinde yapılandırılmıştır. Non-Öklidyen Polihedral geometride simplekslerin özellikleri oldukça geniş bir yer tutmaktadır. Literatürde alan ve hacim hesapları ile ilgili pek çok çalışma yapılmış, fakat bugüne kadar non-Öklidyen(Hiperbolik) geometride sadece üç boyutta hiperbolik üçgenlerin, dörtgenlerin, beşgenlerin vs. düzlemsel açılarının verilmesi dışında simplekslerin tepe açıları ile ilgili herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklidyen Uzay

n-boyutlu Öklid uzayı için standart analitik model, n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayıdır. Bu çalışmada $\mathbb{R}^n$ standart reel vektör uzayı Öklid uzayı olarak alınacaktır. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklidyen iç çarpım simetrik bilinear ve aynı zamanda $x \neq 0$ için $\langle x, x \rangle > 0$ olduğundan non-dejeneredir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ üzerindeki iç çarpım pozitif tanımlıdır. $\langle, \rangle, V$ vektör uzayı üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olsun. $v \in V$ nin $\langle, \rangle$ şeklinde tanımlı iç çarpıma göre normu

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

şeklinde tanımlı bir reel sayıdır. $x \in \mathbb{R}^n$ nin Öklidyen iç çarpıma göre normu $|x|$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.1. (Cauchy-Schwarz eşitsizliği): $\langle, \rangle, V$ reel vektör uzayı üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olsun. $u, v \in V$ için;

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

eşitsizliği vardır.

İspat: (18,19) dan görülebilir.

Tanım 2.1.2. $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, iki vektör arasındaki Öklidyen uzaklık ;

$$d_E(x, y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.3. d_E Öklidyen uzaklık fonksiyonu R^n üzerinde bir metriktir.

İspat: (18-20) dan görülebilir.

Tanım 2.1.4. R^n üzerinde tanılanan d_E metriğine Öklid metriği denir. Dolayısıyla Öklid uzayı bir metrik uzaydır(18-20).

Tanım 2.1.5. X ve Y iki metrik uzay olmak üzere, her $x, y \in X$ için, $\phi: X \rightarrow Y$ dönüşümü

$$d_Y(\phi(x), \phi(y)) = d_X(x, y)$$

eşitliğini sağlıyorsa ϕ ye bir izometri denir. ϕ dönüşümü birebir ve örten bir dönüşümdür. E^n den kendisi üzerine tanımlı izometri Öklidyen izometri olarak adlandırılır(18-19).

Tanım 2.1.6. $\phi: R^n \rightarrow R^n$ dönüşümünün bir ortogonal dönüşüm olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in R^n$ için;

$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

olmasıdır(19).

Tanım 2.1.7. $[a, b]$, R de kapalı bir aralık ve $a < b$ olmak üzere, $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ sürekli fonksiyonuna X metrik uzayında bir eğri denir.

Eğer $X = E^n$ ise γ eğrisinin lineer olması için gerek ve yeter şart, her $t \in [a, b]$ için;

$$\gamma(a + t(b-a)) = \gamma(a) + t(\gamma(b) - \gamma(a))$$

olmasıdır(19).

Tanım 2.1.8. E^n nin x, y, z gibi üç noktası için $y = x + t(z - x)$ olacak şekilde bir $t \in [0, 1]$ reel sayısı varsa bu üç noktaya doğrusaldır denir(19).

Tanım 2.1.9. $[a, b]$, $\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık ve $a < b$ olmak üzere, $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ dönüşümü uzunluk koruyan sürekli fonksiyon ise, α ya X metrik uzayında bir jeodezik yay denir(19).

Tanım 2.1.10. Bir X metrik uzayında, $x, y \in X$ için, $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ jeodezik yayının görüntüsüne başlangıç noktası x , bitiş noktası y olan jeodezik parça denir(19).

Sonuç 2.1.11. E^n nin jeodezik parçaları kendisinin doğru parçalarıdır(19).

Tanım 2.1.12. X bir metrik uzay olsun. $x, y \in X$ ayrık çifti için, x ve y yi içeren bir tek jeodezik parça varsa X metrik uzayına jeodezik olarak konveks dir denir(19).

Tanım 2.1.13. Bir X metrik uzayında bir jeodezik, $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$ şeklinde bir jeodezik doğrunun görüntüsüdür(19).

Sonuç 2.1.14. E^n nin jeodezikleri kendisinin doğrularıdır(19).

Tanım 2.1.15. E^n Öklidyen uzayda bir koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere;

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i + b = 0$$

ile tanımlanan hiperdüzlem B olsun. E^n de

$$B_1 = \{P \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i(P) + b > 0 (< 0), P \in E^n\}$$

şeklinde tanımlanan alt uzaya yarı uzay denir(18). $B \cup B_1$ kümesine kapalı yarı-uzay denir.

2.2. Küresel Uzay

n-boyutlu küresel geometri için standart model;

$$S^n = \{x \in R^{n+1} : |x| = 1\}$$

ile tanımlanan R^{n+1} in S^n birim küresidir. S^n üzerindeki Öklidyen metrik;

$$d_E(x, y) = |x - y|$$

ile verilir. Fakat bu metrik R^{n+1} in vektör yapısına dayanılarak verildiğinden S^n ye özgü bir metrik değildir.

Tanım 2.2.1. $x, y \in S^n$ iki vektör ve bu iki vektör arasındaki Öklidyen açısı $\theta(x, y)$ olsun. x ve y arasındaki küresel uzunluk;

$$d_S(x, y) = \theta(x, y)$$

şeklinde bir reel sayıdır. Burada $0 \leq d_S(x, y) \leq \pi$ ve $d_S(x, y) = \pi$ olması için gerek ve yeter şart $y = -x$ olmasıdır. Eğer $y = -x$ ise x ve y vektörlerine antipodal dir denir(19,20).

Teorem 2.2.2. d_S küresel uzunluk fonksiyonu S^n üzerinde bir metriktir.

İspat: (19) dan görülebilir.

Tanım 2.2.3. d_S metriği ile birlikte S^n uzayı küresel n-uzay olarak adlandırılır (19,20).

Tanım 2.2.4. S^n nin bir büyük çemberi R^{n+1} in iki boyutlu alt vektör uzayı ile S^n nin arakesitidir. $x, y \in S^n$ iki farklı nokta olsun. x, y lineer bağımsız ise, R^{n+1} in $V(x, y)$ ile gösterilen iki boyutlu bir alt uzayını gererler. Böylece, $S(x, y) = S^n \cap V(x, y)$ kümesi, x ve y yi içeren S^n nin bir büyük çemberidir. S^n nin jeodezikleri onun büyük çemberleridir(19).

Tanım 2.2.5. S^n nin bir hiperbolik m -düzlemi, R^{n+1} in $(m+1)$ -boyutlu alt vektör uzayı ile S^n nin arakesitidir(19). S^n nin küresel 1-düzlemi onun küresel doğruları, küresel $(n-1)$ -düzlemi onun hiperdüzlemi olarak adlandırılır.

2.3. Lorentz Uzayı

$x, y \in R^n$ iki vektör ve $n > 1$ olsun. x ile y nin Lorentzian iç çarpımı;

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n \quad [2.1]$$

ile tanımlanan indefinit bir iç çarpımdır. Bu iç çarpımla birlikte R^n uzayına Lorentz uzayı denir ve R_1^n ile gösterilir(19). R_1^n uzayında bir x vektörünün Lorentz normu;

$$\|x\| = |\langle x, x \rangle_L|^{1/2}$$

ile, x ve y vektörünün Lorentz uzunluğu;

$$d_L(x, y) = \|x - y\|$$

ile tanımlanır(19).

Tanım 2.3.1. R_1^n Lorentz uzayında, $\|x\| = 0$ olacak şekildeki bütün x lerin kümesine, yani;

$$\{ x \in R_1^n \mid x_n^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \}$$

şeklindeki C^{n-1} kümesine ışık-konisi (light-koni) denir. $\|x\| = 0$ ise x vektörüne ışık benzeri(light-like veya null) vektör denir(19,21).

Tanım 2.3.2. $x \in R_1^n$ için, $\|x\| > 0$ ise x vektörüne uzay benzeri(space-like) vektör denir. C^{n-1} hiperkonisinin dışı; R_1^n nin uzay benzeri vektörlerden oluşan açık alt kümesidir(19,21,22).

Tanım 2.3.3. $x \in R_1^n$ için, $\|x\| < 0$ oluyorsa x vektörüne (time-like) vektör denir. C^{n-1} hiperkonisinin içi; R_1^n nin zaman benzeri vektörlerinden oluşan açık alt kümesidir. Eğer, $x_1 > 0$ ($x_1 < 0$) ise x vektörüne pozitif(negatif) zaman benzeri denir(19,21,22).

Tanım 2.3.4. $x, y \in R_1^n$ için, $\langle x, y \rangle_L = 0$ oluyorsa x, y vektörlerine Lorentz ortogonal dir denir(19).

Teorem 2.3.5. x, y vektörleri, R_1^n de sıfırdan farklı Lorentz ortogonal iki vektör olsun. Eğer x vektörü zaman benzeri ise, y vektörü uzay benzeridir.

İspat: (19) sayfa 60-61 den görülebilir.

Önerme 2.3.6. R_1^n nin bir V alt vektör uzayının;

- 1) Zaman benzeri olması için gerek ve yeter şart V nin en az bir zaman benzeri vektöre sahip olmasıdır,
- 2) Uzay benzeri olması için gerek ve yeter şart V deki sıfırdan farklı her vektörün uzay benzeri olmasıdır,

- 3) Işık benzeri olması için gerek ve yeter şart V deki sıfırdan farklı her vektör için $\|x\| = 0$ olmasıdır(19,21).

İspat: (19) sayfa 61 den görülebilir.

Tanım 2.3.7. x ve y , R_1^n de pozitif(negatif) zaman benzeri iki vektör olsun.

$$\langle x, y \rangle_L = -\|x\| \|y\| \cosh \eta(x, y)$$

olacak şekilde negatif olmayan bir tek $\eta(x, y)$ reel sayısı vardır. x ve y arasındaki Lorentz zaman benzeri (time-like) açısı, $\eta(x, y)$ olarak tanımlanır(19,22).

2.4. Hiperbolik ve de Sitter Uzay

$S_1^n \subset R_1^{n+1}$ ve $S_1^n = \{x \in R_1^{n+1} | \langle x, x \rangle_L = 1\}$ kümesine n -boyutlu birim pseudo-küresel uzay (de Sitter uzayı), $H_0^n = \{x \in R_1^{n+1} | \langle x, x \rangle_L = -1\}$ kümesine de n -boyutlu birim pseudo-hiperbolik uzay denir. H_0^n uzayının iki bağlantılı bileşeni $H_{0,+}^n$ ve $H_{0,-}^n$ olmak üzere, bu bileşenlerin her biri n -boyutlu hiperbolik uzayın bir modeli olarak alınabilir. Biz literatüre bağlı kalarak hiperbolik uzayın modeli olarak pozitif bileşeni göz önüne alacağız, yani; $H_{0,+}^n = H^n \subset R_1^{n+1}$ olarak alacağız.

Tanım 2.4.1. $x, y \in H^n \subset R_1^{n+1}$ ve x ile y arasındaki Lorentzian zaman benzeri açısı $\eta(x, y)$ olsun. x ve y arasındaki hiperbolik uzunluk;

$$d_H(x, y) = \eta(x, y)$$

şeklinde tanımlı bir reel sayıdır. $\langle x, y \rangle_L = -\|x\| \|y\| \cosh \eta(x, y)$ olduğundan;

$$\cosh d_H(x, y) = -\langle x, y \rangle_L$$

olur(19,21).

Teorem 2.4.2. d_H hiperbolik uzunluk fonksiyonu H^n üzerinde bir metriktir.

İspat: (19) dan görülebilir.

Tanım 2.4.3. d_H metriği ile birlikte H^n uzayı hiperbolik n-uzay olarak adlandırılır(19).

Tanım 2.4.4. H^n nin bir doğrusu R_1^{n+1} in iki boyutlu zaman benzeri alt vektör uzayı ile H^n nin arakesitidir. $x, y \in H^n$ vektörleri R_1^{n+1} in $V(x, y)$ ile gösterilen iki boyutlu bir zaman benzeri alt uzayını gererler. Böylece, $L(x, y) = H^n \cap V(x, y)$, x, y den geçen içeren H^n nin bir doğrusudur. Buna göre, H^n nin jeodezikleri onun doğrularıdır(19).

Tanım 2.4.5. H^n nin bir m -düzlemi R_1^{n+1} in $(m+1)$ boyutlu zaman benzeri alt vektör uzayı ile H^n nin arakesitidir(19).

H^n nin bir hiperbolik 1-düzlemi onun hiperbolik doğruları, hiperbolik $(n-1)$ -düzlemi onun hiperdüzlemi olarak adlandırılır.

2.5. Öklidyen, Küresel , Hiperbolik Uzayda Tanımlar

Burada $X = H^n, E^n, S^n$ olarak alınacaktır.

Tanım 2.5.1. X in bir alt kümesi C olsun. Her $x, y \in C$ ayrık çifti için x ve y yi içeren doğru parçası C de kalıyorsa($X = S^n$ için $y \neq -x$), C kümesine konveks küme denir(18,19,21).

Tanım 2.5.2. X in bir H hiperdüzlemi, X uzayını iki kapalı yarı-uzaya böler. Bu yarı-uzayların sınırı hiperdüzlemdir(21).

Teorem 2.5.3. X de bir kapalı konveks küme yarı-uzayların arakesitidir.

İspat: (21) den görülebilir.

Tanım 2.5.4. X de bir konveks polihedron , boştan farklı sonlu sayıda H_i kapalı yarı-uzaylarının arakesitinden oluşur ve;

$$P = \bigcap_{i=1}^k H_i$$

şeklinde ifade edilir(21).

Tanım 2.5.5. X de bir konveks alt küme C olsun. ∂C nin boştan farklı en büyük konveks alt kümesine C nin bir kenarı(side) denir(19).

Tanım 2.5.6. X de n -boyutlu bir konveks polihedron P olsun. $k=1,...,n+1$ için P nin bir k -yüzü(face), P nin $(k+1)$ yüzünün bir kenarı(side) olarak tanımlanır(19).

Tanım 2.5.7. X de n -boyutlu bir konveks polihedron P olsun. P nin 0-yüzüne, P nin tepesi(vertex) denir(19).

Tanım 2.5.8. X in her bir A alt kümesi için, A yı içeren X in bütün konveks alt kümelerini arakesitine A nın konvekslik bölgesi denir(19,23).

Tanım 2.5.9. X de n -boyutlu bir polihedron P olsun. Eğer P nin sonlu sayıda tepe noktası varsa ve P , bu tepelerin konvekslik bölgesi ise($P \in S^n$ için antipodal noktaları içermezse) P ye bir çok köşeli (politop) denir(19).

Tanım 2.5.10. Eğer $x_0, x_1, ..., x_n$ noktaları n' den daha küçük boyutlu bir düzlemde kapsanmıyorsa bu nokta kümesine genel durumludur denir(21).

Önerme 2.5.11. X nin boştan farklı bir alt kümesi S olsun. S tarafından gerilen ve S yi içeren bir en küçük alt uzay vardır ve $\langle S \rangle$ ile gösterilir. Bu uzay S yi içeren bütün alt uzayların arakesitidir(23).

Sonuç 2.5.12. Eğer $\text{boy}(X) = n < \infty$ ise X in $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}, (n+1)$ nokta kümesinin bir afin çatı oluşturması için gerek ve yeter şart $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle = X$ olmasıdır(23).

Tanım 2.5.13. $X = E^n$ in bir $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}, (k+1)$ -nokta kümesine; $\text{boy}\langle x_0, x_1, \dots, x_k \rangle = k$ oluyorsa afin bağımsızdır denir(23).

Tanım 2.5.14. X de $(n+1)$ tepe noktalı, n -boyutlu bir politop'a bir n -simpleks denir(19)

Tanım 2.5.15. $X = E^n$ de bir n -simpleks , $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ gibi E^n nin afin bağımsız $(n+1)$ noktasının konvekslik bölgesi olarak tanımlanır(19,23).

İki boyutlu simplekse üçgen, üç boyutlu simplekse dörtyüzlü(tetrahedron) denir.

3. HİPERBOLİK UZAY VE MODELLERİ

R_1^{n+1} , $(n+1)$ - boyutlu Lorentz - Minkowski uzayı olsun. $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ olmak üzere bu uzaydaki indefinit iç çarpım;

$$\langle x, y \rangle_L = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

şeklinde tanımlanır. H_0^n pseudo-hiperbolik uzayı $\{x \mid \langle x, x \rangle = -1\}$ ile verilir. H_0^n pseudo-hiperbolik uzayının iki bileşeni H_+^n ve H_-^n dir. Bu bölümde Hiperbolik uzayın beş modeli tanıtılarak daha sonra bunlar arasındaki izometrilere verilip, $n = 2$ için geometrik irdelemeler yapılmıştır.

3.1. Modeller

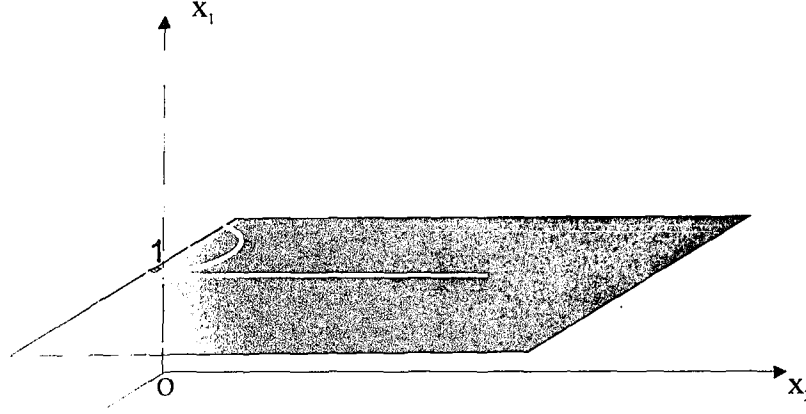
3.1.1. Üst-yarı uzay (Upper-Half Space) modeli

$U = \{ (1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in R_1^{n+1} : x_{n+1} > 0 \}$ cümlesine $x_{n+1} = 0$ hiperdüzlemine göre Üst yarı-uzay denir.

Literatürde bu modelle Poincare Yarı -Uzay Modeli de denilmektedir. Bu modeldeki $n = 2$ için hiperbolik doğrular iki şekilde belirlenir.

- i) $x_3 = 0$ düzlemine dik doğrular ile U^2 nin arakesiti alınarak,
- ii) Merkezi $x_1 = 1$ doğrusu üzerinde bulunan çemberlerin U^2 ile arakesiti alınarak belirlenir.

$$U^2 = \{ (1, x_2, x_3) \in R_1^3 : x_3 > 0 \}$$



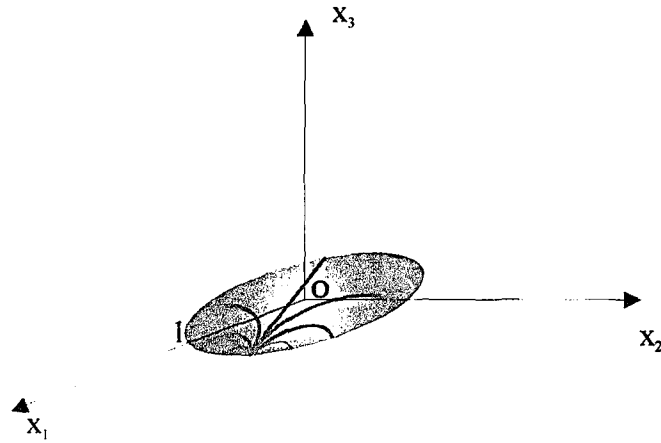
Şekil 3.1. Üst yarı düzlem

3.1.2. Disk modeli

$I = \{ (x_1, \dots, x_n, 0) \in R_1^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1 \}$ cümlesine Disk modeli denir.

Literatürde bu modele Poincare disk modeli veya konformal disk modeli de denilmektedir. Bu model $n = 2$ için, açılar Öklidyen açılarla konformdur ve doğruları da açık kirişler ile çemberin sınırına ortogonal çember yaylarıdır

$$I^2 = \{ (x_1, x_2, 0) \in R_1^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1 \};$$

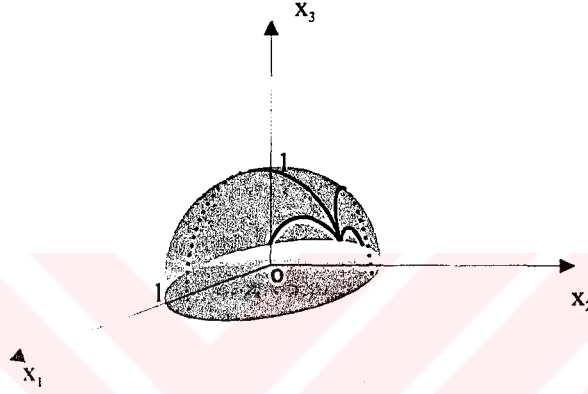


Şekil 3.2. Poincare diski

3.1.3. Yarı küre modeli

$J = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in R_1^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \text{ ve } x_{n+1} > 0 \}$ cümlesine Üst yarı küre veya yarı-küre modeli denir.

$n = 2$ için, $J^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R_1^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 > 0 \}$;

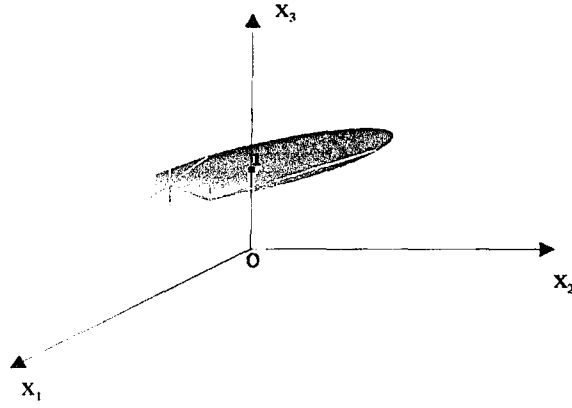


Şekil 3.3. Üst yarı küre

3.1.4. Klein modeli

$K = \{ (x_1, \dots, x_n, 1) \in R_1^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1 \}$ cümlesine Klein modeli denir. Bu model Beltrami-Klein modeli veya Projektif disk modeli olarak da bilinir. İlk olarak 1868 de Beltrami bu modelde doğruları sonsuzda ki çemberin açık kirişleri olarak belirlemiş daha sonra ise Klein 1871 de bu modeli Projektif geometriye dayandırmıştır.

$n = 2$ için $K^2 = \{ (x_1, x_2, 1) \in R_1^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$;



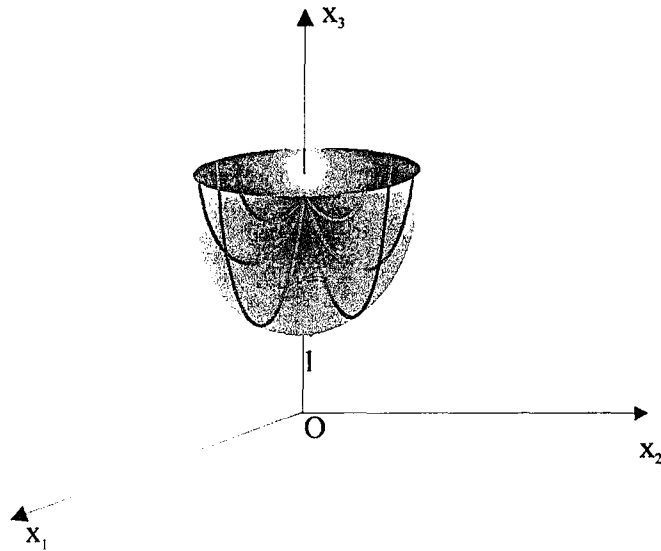
Şekil 3.4. Klein diski

$(0,0,1)$ merkezli $x_3 = 0$ düzlemine paralel diskin içine Klein diski denir.

3.1.5. Hiperboloidal model

$H = \{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in R_1^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, x_{n+1} > 0 \}$ cümlesine hiperbolik uzayın Hiperboloidal modeli denir.

$n = 2$ için $H^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R_1^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1, x_3 > 0 \}$;



Şekil 3.5. İki kanatlı hiperboloidin üst kanadı

3. 2. Hiperbolik uzayın modelleri arasındaki izometrilere

Yukarıda verilen beş modelin izometrik olarak denk olduğunu gösterebilmemiz için onlar arasındaki izometrilere ihtiyacımız vardır. Bunun için J modelini alarak bunlardan diğerlerine veya diğerlerinden bu model üzerine bir dönüşüm tanımlanarak gösterilebilir.

Teorem 3.2.1. R_1^{n+1} üzerinde tanımlı indefinite iç çarpım, H^n in tanjant uzayı üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım ortaya çıkarır.

İspat: $p = (\tilde{p}, p_{n+1}) \in H^n$ ve $x = (\tilde{x}, x_{n+1}) \neq 0 \in T_p(H^n)$ ve $\tilde{p}, \tilde{x} \in R_1^{n+1}$ olsun.

Bu durumda, $x_{n+1} = 0$ ise;

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle_L &= x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 \\ &= x_1^2 + \dots + x_n^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

olur. $x_{n+1} \neq 0$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \langle x, p \rangle_L &= \langle \tilde{x}, \tilde{p} \rangle_E - x_{n+1} p_{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\langle \tilde{x}, \tilde{p} \rangle_E = x_{n+1} p_{n+1}$$

olur ve

$$\begin{aligned} \langle p, p \rangle_L &= \langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle_E - p_{n+1}^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

olduğundan;

$$p_{n+1}^2 = \langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle_E + 1$$

bulunur. Böylece Cauchy – Schwartz eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_E \langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle_E &\geq \langle \tilde{x}, \tilde{p} \rangle_E^2 \\ &= (x_{n+1} p_{n+1})^2 \\ &= x_{n+1}^2 (\langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle_E + 1) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde;

$$\begin{aligned} \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_E \langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle_E &\geq x_{n+1}^2 \langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle_E + x_{n+1}^2 \\ \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_E \langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle_E - x_{n+1}^2 \langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle_E &\geq x_{n+1}^2 \\ (\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_E - x_{n+1}^2) \langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle_E &\geq x_{n+1}^2 \\ \langle x, x \rangle_L \langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle_E &\geq x_{n+1}^2 \end{aligned}$$

olur. $x_{n+1}^2 > 0$ olduğundan,

$$\langle x, x \rangle_L > 0$$

elde edilir. Bu ise R_1^{n+1} üzerindeki indefinite iç çarpımın, H^n nin tanjant uzayı üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım ortaya çıkardığını gösterir.

Hiperbolik geometrinin analitik modelleri diferensiyellenebilir manifoldlar (Riemann metrikli) olarak alınabilirler. Bunun için bir Riemann metriği tanımlanarak, R^n Öklidyen uzay üzerindeki geometrik kavramlarla birleştirilir.

R^n Öklidyen uzayı üzerinde bir Riemann metriği ds^2 olsun. Bu metrik her bir $p \in R^n$ noktası için p noktasındaki tanjant uzay üzerine pozitif tanımlı simetrik bir iç çarpım tahsis eder. Böyle bir iç çarpım verildiğinde uzunluk, alan, hacim gibi standart geometrik kavramları tanımlamak mümkündür. Uzunluk elementi $ds = \sqrt{ds^2}$ dir. Alan elementi ise dA dır. Eğer R^n nin standart koordinatları $x_1, \dots, x_n$ ise;

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j$$

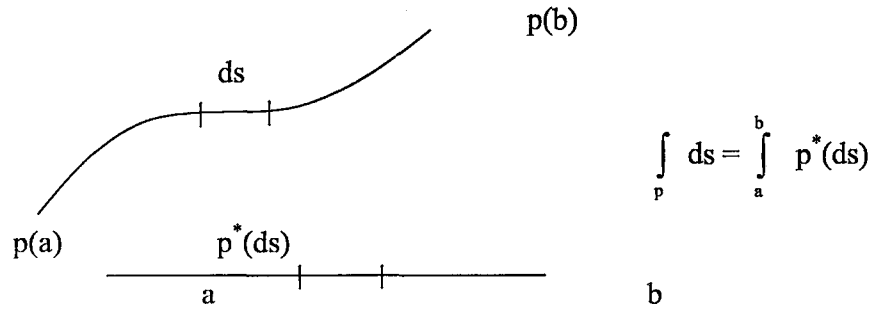
olur ve (g_{ij}) matrisi x üzerindeki diferensiyellenmeye bağlıdır. Simetrik ve pozitif tanımlıdır. (g_{ij}) nin determinantının karekökünü $\sqrt{|g|}$ ile gösterirsek;

$$dA = \sqrt{|g|} \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot \dots \cdot dx_n$$

yazılabilir. $f: R^k \rightarrow R^n$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. v ve w lar R^k nin u noktasındaki tanjant vektörler olmak üzere $f^*(ds^2)$ pull- back dönüşümünü;

$$f^*(ds^2)(v, w) = ds^2(Df(v), Df(w))$$

formülü ile tanımlayabiliriz. Burada Df türev dönüşümüdür.

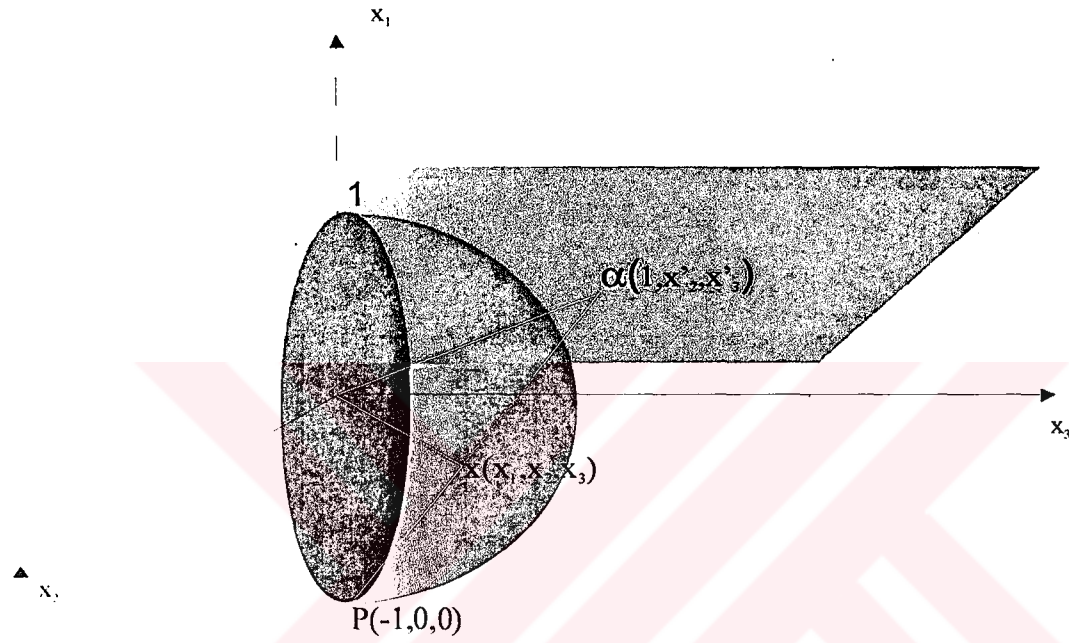


$$\int_p ds = \int_a^b p^*(ds)$$

$p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğri parçasının uzunluğunu p üzerinden ds ' in integrali alınarak hesaplanabilir.

3.2.1. J ile U arasındaki izometri

S^n nin $P = (-1, 0, \dots, 0)$ noktası çıkarılarak elde edilen stereografik izdüşüm $\alpha: J \rightarrow U$ olsun.



Şekil 3.6. J den U üzerine stereografik izdüşüm

Bu durumda şekilden;

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O\alpha(x)} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{P\alpha(x)} \\ &= \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{Px}\end{aligned}$$

eşitliği göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}(1, x'_2, \dots, x'_{n+1}) &= (-1, 0, \dots, 0) + \lambda ((x_1, \dots, x_{n+1}) - (-1, 0, \dots, 0)) \\ &= (-1 + \lambda(x_1 + 1), \lambda x_2, \dots, \lambda x_{n+1})\end{aligned}$$

olur ve buradan da;

$$\lambda = \frac{2}{x_1 + 1} \quad [3.1]$$

bulunur. [3,1] de bulunan λ değeri

$$x'_2 = \lambda x_2, \dots, x'_n = \lambda x_{n+1}$$

ifadesinde yerine yazılarak,

$$x'_2 = \frac{2x_2}{x_1 + 1}, \dots, x'_{n+1} = \frac{2x_{n+1}}{x_1 + 1}$$

elde edilir. O halde $\alpha: J \rightarrow U$ dönüşümü için

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow (1, \frac{2x_2}{x_1 + 1}, \dots, \frac{2x_{n+1}}{x_1 + 1}) \quad [3.2]$$

bulunur.

Teorem 3.2.2. Üst yarı uzay modeli ile Üst yarı küre modeli izometriktir.

İspat: U (Üst yarı uzay modeli) üzerindeki Riemann metriği

$$ds_U^2 = \frac{dx_2^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}$$

ve J (Üst Yarı Küre) üzerindeki Riemann metriği

$$ds_J^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}$$

ise $\alpha: J \rightarrow U$ için pull-back dönüşümü kullanılarak;

$$\alpha^*(ds_U^2) = ds_J^2$$

olduğu gösterilirse bu iki model izometriktir denir. [3.2] ifadesinden;

$$y_i = \frac{2x_i}{x_1 + 1} \quad (i = 2, \dots, n+1)$$

yazılabilir. Buradan

$$dy_i = \frac{2}{x_1 + 1} \left(dx_i - \frac{x_i}{x_1 + 1} dx_1 \right), \quad i = 2, \dots, n+1$$

olur. $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ olduğundan;

$$x_1 dx_1 = - (x_2 dx_2 + \dots + x_{n+1} dx_{n+1}) \quad \text{ve} \quad x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 - x_1^2$$

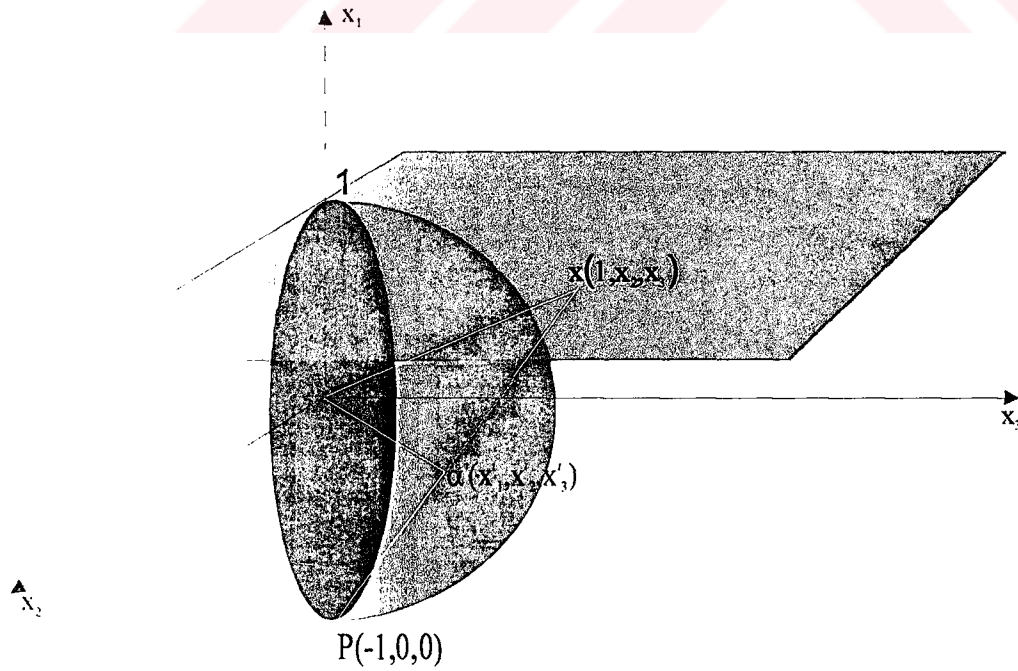
ifadeleri bulunur. O halde;

$$\begin{aligned} \alpha^*(ds_U^2) &= \frac{1}{y_{n+1}^2} (dy_2^2 + \dots + dy_{n+1}^2) \\ &= \frac{4(x_1 + 1)^2}{4x_{n+1}^2(x_1 + 1)^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 - \frac{2dx_1}{x_1 + 1} \sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i - \frac{dx_1^2}{(x_1 + 1)^2} \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 + \frac{2}{x_1 + 1} x_1 \cdot dx_1^2 + \frac{dx_1^2}{(x_1 + 1)^2} (1 - x_1^2) \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 + \frac{2}{x_1 + 1} x_1 \cdot dx_1^2 + \frac{(1 - x_1) dx_1^2}{x_1 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 + \frac{2x_1 dx_1^2}{x_1 + 1} + \frac{dx_1^2}{x_1 + 1} - \frac{x_1 dx_1^2}{x_1 + 1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} dx_i + \frac{x_1 dx_1^2}{x_1 + 1} + \frac{dx_1^2}{x_1 + 1} \right) \\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} dx_i + \frac{(1+x_1)dx_1^2}{x_1 + 1} \right) \\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2} (dx_1 + \sum_{i=2}^{n+1} dx_i) \\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} dx_i \right) \\
&= \frac{(dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2)}{x_{n+1}^2} \\
&= ds_J^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine; S^n nin $P = (-1, 0, \dots, 0)$ noktası çıkarılarak elde edilen ters stereografik izdüşüm $\alpha' : U \rightarrow J$ olsun.



Şekil 3.7. U dan J üzerine stereografik izdüşüm

Bu durumda,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O\alpha'(x)} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{P\alpha'(x)} \\ &= \overrightarrow{OP} + \lambda' \overrightarrow{Px}\end{aligned}$$

çşitliğınden;

$$\begin{aligned}(x'_1, \dots, x'_{n+1}) &= (-1, 0, \dots, 0) + \lambda' ((1, x_2, \dots, x_{n+1}) - (-1, 0, \dots, 0)) \\ &= (-1 + 2\lambda', \lambda' x_2, \dots, \lambda' x_{n+1})\end{aligned}$$

ve buradan

$$x'_1 = 2\lambda' - 1, \quad x'_i = \lambda' x_i \quad (i = 2, \dots, n+1)$$

bulunur. $\sum_{i=1}^{n+1} x'_i = 1$ olduğundan

$$(2\lambda' - 1)^2 + \sum_{i=2}^{n+1} \lambda' x_i^2 = 1$$

yazılabilir. Bu ifadeden λ' değeri

$$\lambda' = \frac{4}{4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2}$$

olarak belirlenir. Buradan da;

$$x'_1 = \frac{4 - \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2}{4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2}, \quad x'_i = \frac{4x_i}{4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2} \quad (i = 2, \dots, n+1)$$

elde edilir. O halde $\alpha' : U \rightarrow J$ dönüşümü için;

$$(x'_1, \dots, x'_{n+1}) = \left(\frac{4 - \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2}{4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2}, \frac{4x_2}{4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2}, \dots, \frac{4x_{n+1}}{4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2} \right).$$

$\alpha' : U \rightarrow J$ dönüşümü için, U (Üst yarı uzay modeli) üzerindeki Riemann metriği

$$ds_U^2 = \frac{dx_2^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}$$

ve J (Üst Yarı Küre) üzerindeki Riemann metriği

$$ds_J^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}$$

olmak üzere, $\alpha' : H \rightarrow J$ için pull-back dönüşümü kullanılarak,

$$\alpha'^*(ds_J^2) = ds_U^2$$

olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.

$$y_1 = \frac{4 - \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2}{4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2}, y_i = \frac{4x_i}{4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2} \quad (i = 2, \dots, n+1)$$

olarak alınırsa,

$$dy_1 = \frac{-16 \sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i}{(4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2)^2}$$

vc

$$dy_i = \frac{4}{4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2} (dx_i - \frac{2x_i}{4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2} \sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i) \quad (i = 2, \dots, n+1)$$

elde edilir. Pull-back dönüşümü ile;

$$\begin{aligned} \alpha'^*(ds_J^2) &= \frac{1}{y_{n+1}^2} dy_1^2 + \frac{1}{y_{n+1}^2} \sum_{i=2}^{n+1} dy_i^2 \\ &= \frac{1}{y_{n+1}^2} (dy_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} dy_i^2) \\ &= \frac{(4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2)^2}{16x_{n+1}^2} \left[\frac{256(\sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i)^2}{(4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2)^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{16}{(4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2)^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 - \frac{4 \sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i \cdot \sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i}{4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2} + \frac{4(\sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i)^2 \cdot \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2}{(4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2)^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left[\frac{16(\sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i)^2}{(4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2)^2} + \sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 - \frac{4(\sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i)^2}{4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2} + \frac{4(\sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i)^2 \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2}{(4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left[\sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 + \frac{4(\sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i)^2}{(4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2)^2} (4 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 - 4 - \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2) \right] \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 \\ &= ds_U^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.2. J ile I arasındaki izometri

S'' nin $P = (0, 0, \dots, 0, -1)$ noktası çıkarılarak elde edilen stereografik izdüşüm $\beta: J \rightarrow I$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O\beta(x)} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{P\beta(x)} \\ &= \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{Px}\end{aligned}$$

ifadesi göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}(x'_1 \dots x'_n, 0) &= (0, 0, \dots, 0, -1) + \lambda((x_1 \dots x_{n+1}) - (0, 0, \dots, 0, -1)) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, -1 + \lambda(x_{n+1} + 1))\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan;

$$x'_1 = \lambda x_1, \dots, x'_n = \lambda x_n \quad [3.3]$$

ve

$$0 = -1 + \lambda(x_{n+1} + 1)$$

eşitliğinden,

$$\lambda = \frac{1}{1 + x_{n+1}}$$

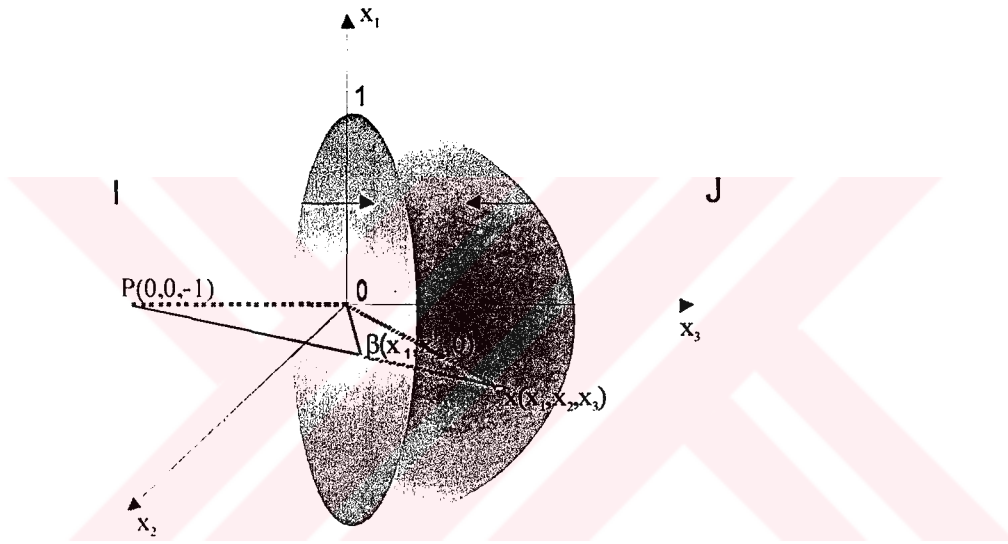
bulunur. Bu değer [3.3] de yazılırsa;

$$x'_1 = \frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, x'_n = \frac{x_n}{1+x_{n+1}}, x'_{n+1} = 0 \quad [3.4]$$

olur. O halde $\beta: J \rightarrow I$ için,

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}, 0 \right)$$

elde edilir.



Şekil 3.8. J den I üzerine stereografik izdüşüm

Teorem 3. 2.3. Disk modeli ile Üst Yarı Küre modeli izometriktir.

İspat: I üzerindeki Riemann metriği,

$$ds_I^2 = 4 \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2}$$

J üzerindeki Riemann metriği,

$$ds_J^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}$$

ise, $\beta: J \rightarrow I$ için pull-back dönüşümü kullanılarak

$$\beta^*(ds_I^2) = ds_J^2$$

olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.

$$y_1 = \frac{x_1}{1+x_{n+1}}, y_2 = \frac{x_2}{1+x_{n+1}}, \dots, y_n = \frac{x_n}{1+x_{n+1}}, y_{n+1} = 0$$

olduğundan,

$$dy_i = \frac{1}{1+x_{n+1}} \left(dx_i - \frac{x_i}{1+x_{n+1}} dx_{n+1} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

bulunur. Ayrıca;

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$$

ve

$$x_1 dx_1 + \dots + x_{n+1} dx_{n+1} = 0$$

ifadelerinden,

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 - x_{n+1}^2 \quad [3.5]$$

$$\sum_{i=1}^n x_i dx_i = -x_{n+1} dx_{n+1} \quad [3.6]$$

bulunur. Bu durumda I üzerindeki Riemann metriği

$$ds_j^2 = 4 \frac{\sum_{i=1}^n dy_i^2}{(1 - \sum_{i=1}^n y_i^2)^2} \quad [3.7]$$

olduğundan [3.5] ve [3.6] değerler [3.7] de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \beta^*(ds_j^2) &= 4 \frac{\frac{1}{(1+x_{n+1})^2} \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 - 2 \frac{dx_{n+1}}{1+x_{n+1}} \sum_{i=1}^n x_i dx_i + \frac{dx_{n+1}^2}{(1+x_{n+1})^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)}{\left(1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1+x_{n+1}} \right)^2 \right)^2} \\ &= 4 \frac{\frac{1}{(1+x_{n+1})^2} \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 + \frac{2 dx_{n+1} (x_{n+1} dx_{n+1})}{1+x_{n+1}} + \frac{(1-x_{n+1}^2) dx_{n+1}^2}{(1+x_{n+1})^2} \right)}{\left(1 - \frac{1}{(1+x_{n+1})^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2} \\ &= 4 \frac{\frac{1}{(1+x_{n+1})^2} \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 + 2 \frac{x_{n+1} dx_{n+1}^2}{1+x_{n+1}} + \frac{dx_{n+1}^2}{(1+x_n)} - \frac{x_{n+1} dx_{n+1}^2}{(1+x_{n+1})} \right)}{\left(1 - \frac{1}{(1+x_{n+1})^2} (1-x_{n+1}^2) \right)^2} \\ &= 4 \frac{\frac{1}{(1+x_{n+1})^2} \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 + \frac{dx_{n+1}^2 (1+x_{n+1})}{(1+x_{n+1})} \right)}{\left(1 - \frac{1-x_{n+1}}{1+x_{n+1}} \right)^2} \\ &= 4 \frac{\frac{1}{(1+x_{n+1})^2} \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2}{\left(\frac{1+x_{n+1}-1+x_{n+1}}{1+x_{n+1}} \right)^2} \\ &= 4 \frac{\frac{1}{(1+x_{n+1})^2} \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2}{\left(\frac{2x_{n+1}}{1+x_{n+1}} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4 \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2}{(1+x_{n+1})^2} \\
&= \frac{4x_{n+1}^2}{(1+x_{n+1})^2} \\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2} \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2 \\
&= ds_j^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine; S^n nin, $P = (0, 0, \dots, 0, -1)$ noktası çıkarılarak elde edilen ters stereografik izdüşüm $\beta': I \rightarrow J$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O\beta'(x)} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{P\beta'(x)} \\
&= \overrightarrow{OP} + \lambda' \overrightarrow{Px}
\end{aligned}$$

ifadesi göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
(x'_1, \dots, x'_n, x'_{n+1}) &= (0, 0, \dots, 0, -1) + \lambda'((x_1, \dots, x_n, 0) - (0, 0, \dots, 0, -1)) \\
&= (\lambda'x_1, \lambda'x_2, \dots, \lambda'x_n - 1 + \lambda')
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$x'_1 = \lambda'x_1, \dots, x'_n = \lambda'x_n, x'_{n+1} = \lambda' - 1 \quad [3.8]$$

olur.

$$x'^2_1 + \dots + x'^2_{n+1} = 1 \quad [3.9]$$

değeri göz önüne alınarak [3.8] de ki değerler [3.9] da yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\lambda' = \frac{2}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad [3.10]$$

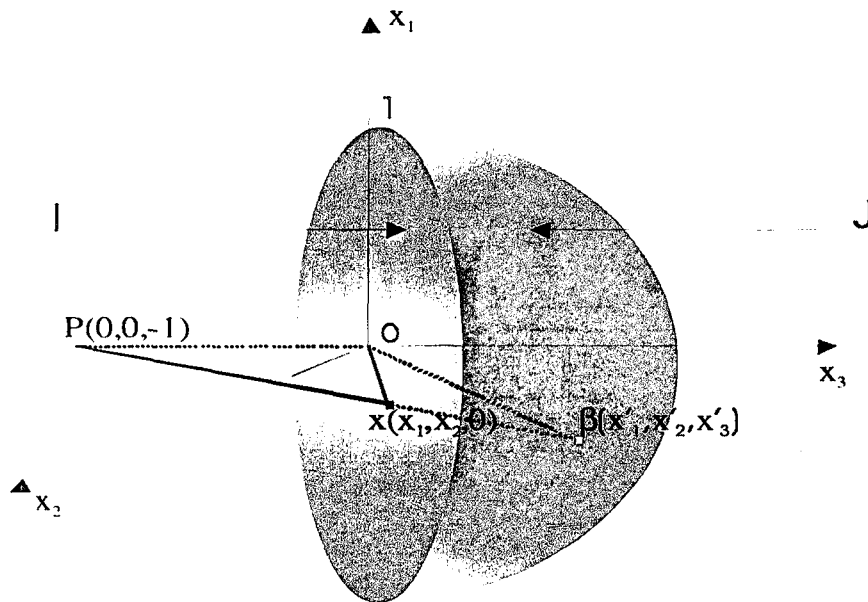
bulunur. [3.10] ifadesi [3.8] de yerlerine yazılırsa;

$$x'_1 = \frac{2x_1}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, \dots, x'_n = \frac{2x_n}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, x'_{n+1} = \frac{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

olur. O halde $\beta': I \rightarrow J$ dönüşümü için,

$$(x_1, \dots, x_n, 0) \rightarrow \left(\frac{2x_1}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, \frac{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \quad [3.11]$$

elde edilir.



Şekil 3.9. I dan J üzerine stereografik izdüşüm

$\beta' : I \rightarrow J$ dönüşümü için, I üzerindeki Riemann metriği,

$$ds_I^2 = 4 \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2}$$

J üzerindeki Riemann metriği,

$$ds_J^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}$$

ise $\beta' : I \rightarrow J$ dönüşümü için pull-back dönüşümü kullanılarak

$$\beta'^*(ds_J^2) = ds_I^2$$

olduğu gösterilmelidir.

[3.11] den ;

$$y_i = \frac{2x_i}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad i = 1, \dots, n$$

ve

$$y_{n+1} = \frac{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad [3.12]$$

yazılabilir. Buradan,

$$dy_i = \frac{2}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2} (dx_i - \frac{2x_i}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2} \sum_{i=1}^n x_i dx_i)$$

ve

$$dy_{n+1} = \frac{-4 \sum_{i=1}^n x_i dx_i}{(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^2}$$

elde edilir. Buradan da;

$$\sum_{i=1}^n dy_i^2 = \frac{4}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2} \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 - \frac{4 \sum_{i=1}^n x_i dx_i \sum_{i=1}^n x_i dx_i}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2} + \frac{4x_i^2 (\sum_{i=1}^n x_i dx_i)^2}{(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \right) \quad [3.13]$$

$$(dy_{n+1})^2 = \frac{16 (\sum_{i=1}^n x_i dx_i)^2}{(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^4} \quad [3.14]$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} ds_i^2 &= \frac{dy_1^2 + \dots + dy_{n+1}^2}{y_{n+1}^2} \\ &= \frac{1}{y_{n+1}^2} \left(\sum_{i=1}^n dy_i^2 + dy_{n+1}^2 \right) \end{aligned} \quad [3.15]$$

yazılabilir. [3.12] , [3.13] ve [3.14] ifadeleri [3.15] de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
ds_j^2 &= \frac{4}{(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 - \frac{4(\sum_{i=1}^n x_i dx_i)^2}{(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^2} (1 + \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1) \right) \\
&= \frac{4}{(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 \right) \\
&= ds_I^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.3. K ile J arasındaki izometri

$\gamma: K \rightarrow J$ dik izdüşüm olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O\gamma(x)} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{P\gamma(x)} \\
&= \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{Px}
\end{aligned}$$

ifadesinden,

$$\begin{aligned}
(x'_1, \dots, x'_n, x'_{n+1}) &= (x_1, \dots, x_n, 0) + \lambda((x_1, \dots, x_n, 1) - (x_1, \dots, x_n, 0)) \\
&= (x_1, \dots, x_n, \lambda)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da,

$$x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, \dots, x'_n = x_n, \dots, x'_{n+1} = \lambda \quad [3.16]$$

olur.

$$x'^2_1 + x'^2_2 + \dots + x'^2_n + x'^2_{n+1} = 1$$

için

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \lambda^2 = 1$$

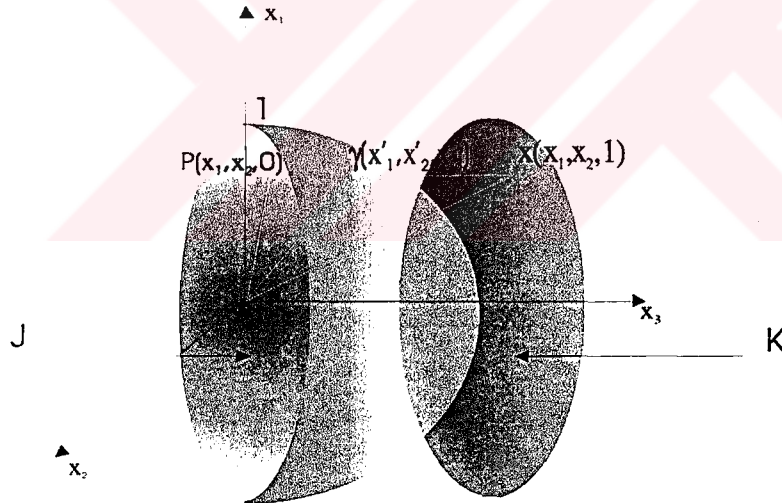
ifadesinden,

$$\lambda = \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}$$

elde edilir. Buradan, $\gamma: K \rightarrow J$ dönüşümü için,

$$(x_1, \dots, x_n, 1) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2})$$

bulunur.



Şekil 3.10. K dan J üzerine dik izdüşüm

Teorem 3.2.4. Klein diski ile Üst Yarı Küre modeli izometriktir.

İspat: J üzerindeki Riemann metriği,

$$ds_j^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}$$

K üzerindeki Riemann metriği,

$$ds_k^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)} + \frac{(x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n)^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2}$$

olduğundan, $\gamma: K \rightarrow J$ dönüşümü için pull back dönüşümü kullanılarak,

$$\gamma^*(ds_j^2) = ds_k^2$$

olduğu gösterilmelidir.

[3.16] dan,

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n$$

ve

$$y_{n+1}^2 = 1 - y_1^2 - \dots - y_n^2 = 1 - x_1^2 - \dots - x_n^2.$$

yazılabilir. O halde;

$$dy_i = dx_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ve

$$y_{n+1} dy_{n+1} = -(x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n)$$

olur. Bu durumda,

$$\gamma^*(ds_j^2) = \frac{1}{y_{n+1}^2} (dy_1^2 + \dots + dy_n^2) + \frac{1}{y_{n+1}^2} dy_{n+1}^2$$

yazabiliriz. Buradan da,

$$\begin{aligned} \gamma^*(ds_j^2) &= \frac{1}{y_{n+1}^2} (dy_1^2 + \dots + dy_{n+1}^2) \\ &= \frac{1}{y_{n+1}^2} (dy_1^2 + \dots + dy_n^2) + \frac{1}{y_{n+1}^2} dy_{n+1}^2 \\ &= \frac{1}{(1-x_1^2 - \dots - x_n^2)} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2) + \frac{(x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n)^2}{(1-x_1^2 - x_n^2)^2} \\ &= ds_K^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine; $\gamma' : J \rightarrow K$ dik izdüşüm olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O\gamma'(x)} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{P\gamma'(x)} \\ &= \overrightarrow{OP} + \lambda' \overrightarrow{Px} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan;

$$\begin{aligned} (x'_1, \dots, x'_n, 1) &= (x_1, x_2, \dots, x_n, 0) + \lambda'((x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - (x_1, x_2, \dots, x_n, 0)) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n, 0) + \lambda'(0, 0, \dots, 0, x_{n+1}) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda' x_{n+1}) \end{aligned}$$

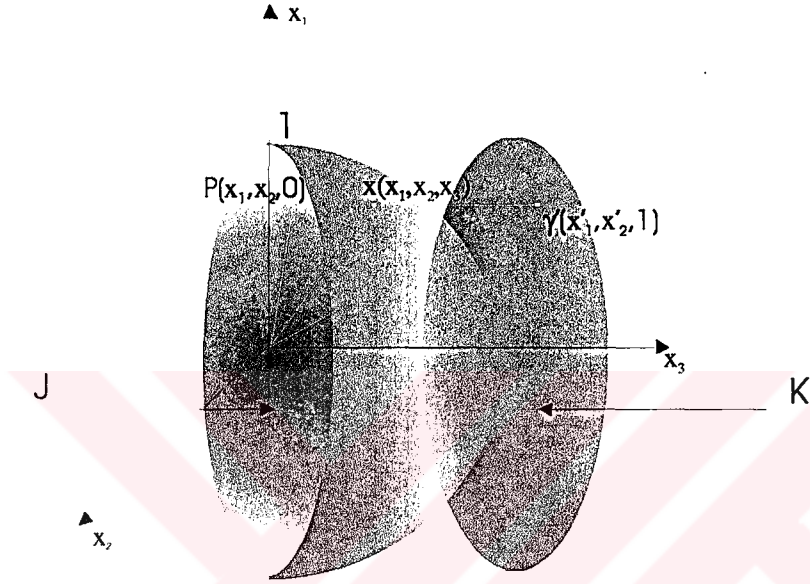
ifadesi göz önüne alınırsa;

$$x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, \dots, x'_n = x_n, \dots, \lambda' x'_{n+1} = 1 \quad [3.17]$$

bulunur. $\gamma' : J \rightarrow K$ dönüşümü için,

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 1)$$

elde edilir.



Şekil 3.11. J dan K üzerine dik izdüşüm

$\gamma': J \rightarrow K$ dönüşümü için, J üzerindeki Riemann metriği,

$$ds_j^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}$$

K üzerindeki Riemann metriği,

$$ds_k^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)} + \frac{(x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n)^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2}$$

olduğundan, $\gamma': J \rightarrow K$ dönüşümü için, pull back dönüşümü kullanılarak,

$$\gamma^*(ds_k^2) = ds_j^2$$

olduğunu göstermeliyiz.

[3.17] den,

$$y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n, y_{n+1} = 1$$

yazılabilir. Buradan,

$$dy_1 = dx_1, \dots, dy_n = dx_n, dy_{n+1} = 0$$

olur. Diğer taraftan,

$$y_1^2 + \dots + y_n^2 + y_{n+1}^2 = 1$$

ifadesinden

$$y_{n+1}^2 = 1 - \sum_{i=1}^n y_i^2$$

ve

$$y_{n+1} dy_{n+1} = -\left(\sum_{i=1}^n x_i dx_i\right)$$

olur.

$$\begin{aligned} \gamma^*(ds_K^2) &= \frac{\sum_{i=1}^n dy_i^2}{(1 - \sum_{i=1}^n y_i^2)} + \frac{(\sum_{i=1}^n y_i dy_i)^2}{(1 - \sum_{i=1}^n y_i^2)^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n dx_i^2}{x_{n+1}^2} + \frac{(x_{n+1} dx_{n+1})^2}{x_{n+1}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x_{n+1}^2} \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2 \\
&= ds_J^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.4. H ve J arasındaki izometri

$\delta: H \rightarrow J$ için S^n nin $P = (0, 0, \dots, 0, -1)$ noktası çıkarılarak elde edilen ters stereografik izdüşüm δ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O\delta(x)} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{P\delta(x)} \\
&= \overrightarrow{OP} + \lambda(\overrightarrow{Px})
\end{aligned}$$

ifadesinden

$$\begin{aligned}
(x'_1, \dots, x'_{n+1}) &= (0, 0, \dots, 0, -1) + \lambda((x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - (0, 0, \dots, 0, -1)) \\
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n, -1 + \lambda(x_{n+1} + 1))
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da,

$$x'_1 = \lambda x_1, \dots, x'_n = \lambda x_n, x'_{n+1} = -1 + \lambda(x_{n+1} + 1) \quad [3.18]$$

olur.

$$x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$1 = (\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + \dots + \lambda^2 x_n^2 + (-1 + \lambda(x_{n+1} + 1))^2)$$

$$1 = \lambda^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2) + (-1 + \lambda(x_{n+1} + 1))^2 \quad [3.19]$$

yazılabilir.

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1$$

denklemden

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = x_{n+1}^2 - 1 \quad [3.20]$$

olur. [3.20] ifadesi [3.19] da kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \lambda^2 (x_{n+1}^2 - 1) + (1 - 2\lambda(x_{n+1} + 1) + \lambda^2 (x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} + 1)) &= 1 \\ 2\lambda^2 x_{n+1}^2 - 2\lambda x_{n+1} + 2\lambda^2 x_{n+1} - 2\lambda &= 0 \\ 2\lambda (\lambda x_{n+1}^2 - x_{n+1} - 1 + \lambda x_{n+1}) &= 0 \quad \lambda \neq 0 \\ \lambda x_{n+1}^2 - x_{n+1} - 1 + \lambda x_{n+1} &= 0 \\ \lambda x_{n+1} (x_{n+1} + 1) &= x_{n+1} + 1 \\ \lambda x_{n+1} &= 1 \\ \lambda &= \frac{1}{x_{n+1}} \end{aligned} \quad [3.21]$$

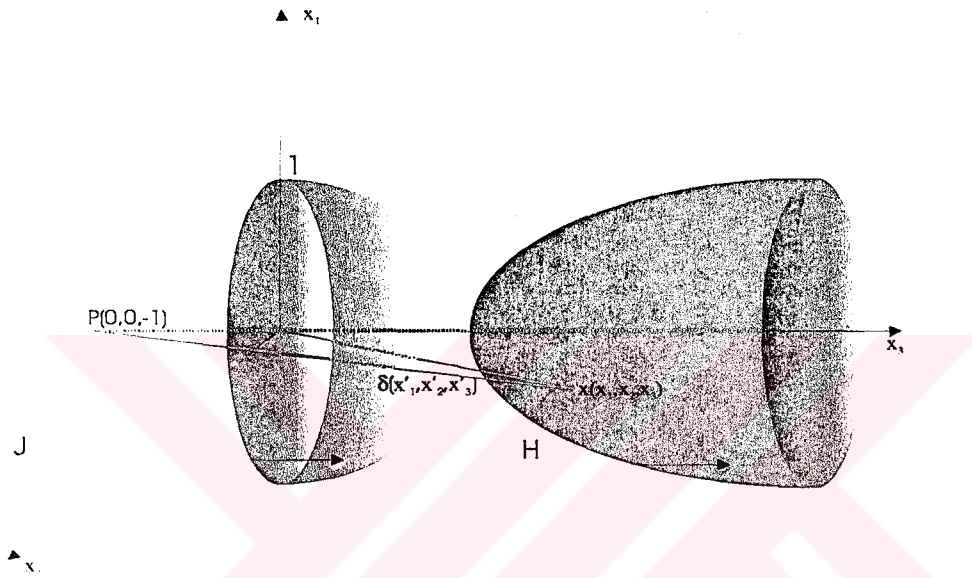
bulunur. O halde [3.21] de bulunan değer, [3.18] de yerine yazılırsa;

$$x'_1 = \frac{x_1}{x_{n+1}}, x'_2 = \frac{x_2}{x_{n+1}}, \dots, x'_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}, x'_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}} \quad [3.22]$$

olur. Buradan, $\delta: H \rightarrow J$ dönüşümü için,

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+1}} \right)$$

elde edilir.



Şekil 3.12. H dan J üzerine ters stereografik izdüşüm

Teorem 3.2.5. Hiperboloidal model ile Üst Yarı Küre modeli izometriktir.

İspat: J üzerindeki Riemann metriği,

$$ds_J^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}$$

H üzerindeki Riemann metriği

$$ds_H^2 = \sum_{i=1}^n dx_i^2 - dx_{n+1}^2$$

olduğundan $\delta: H \rightarrow J$ dönüşümü için pull back dönüşümü kullanılarak,

$$\delta^*(ds_j^2) = ds_H^2$$

olduğu gösterilmelidir.

[3.22] den;

$$y_1 = \frac{x_1}{x_{n+1}}, y_2 = \frac{x_2}{x_{n+1}}, \dots, y_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}, y_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} dy_i &= \frac{1}{x_{n+1}} \left(dx_i - \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}} x_i \right) \quad (i = 1 \dots n) \\ dy_i^2 &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(dx_i^2 - 2x_i dx_i \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}} + x_i^2 \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \right) \\ \sum_{i=1}^n dy_i^2 &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 - \frac{2dx_{n+1}}{x_{n+1}} \sum_{i=1}^n x_i dx_i + \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \end{aligned} \quad [3.23]$$

vc

$$\begin{aligned} dy_{n+1} &= -\frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}^2} \\ (dy_{n+1})^2 &= \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^4} \end{aligned} \quad [3.24]$$

bulunur. Ayrıca,

$$x_1^2 + \dots x_n^2 = x_{n+1}^2 - 1$$

çiftliğinden

$$\sum_{i=1}^n x_i dx_i = x_{n+1} dx_{n+1} \quad [3.25]$$

olur. J üzerindeki Riemann metriği

$$ds_J^2 = \frac{1}{y_{n+1}^2} \sum_{i=1}^n dy_i^2 + \frac{1}{y_{n+1}^2} dy_{n+1}^2 \quad [3.26]$$

şeklinde yazılabileceğinden, [3.23], [3.24], [3.25] ifadeleri [3.26] da kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \delta^*(ds_J^2) &= \frac{1}{x_{n+1}^2} (x_{n+1}^2) \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 - \frac{2dx_{n+1}}{x_{n+1}} x_{n+1} dx_{n+1} + \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} (-1 + x_{n+1}^2) + x_{n+1}^2 \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^4} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n dx_i^2 - \frac{2x_{n+1} dx_{n+1}^2}{x_{n+1}} - \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} + \frac{x_{n+1}^2 dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} + \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^4} \\ &= \sum_{i=1}^n dx_i^2 - dx_{n+1}^2 - \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} + \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \\ &= \sum_{i=1}^n dx_i^2 - dx_{n+1}^2 \\ &= (ds_H^2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine; S'' nin $P = (0, 0, \dots, 0, -1)$ noktası çıkarılarak elde edilen stereografik izdüşüm $\delta': J \rightarrow H$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} O\delta'(x) &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{P\delta'(x)} \\ &= \overrightarrow{OP} + \lambda'(\overrightarrow{Px}) \end{aligned}$$

ifadesinden;

$$\begin{aligned}
 (x'_1, \dots, x'_{n+1}) &= (0, 0, \dots, 0, -1) + \lambda' (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - (0, 0, \dots, 0, -1) \\
 &= (\lambda' x_1, \lambda' x_2, \dots, \lambda' x_n, -1 + \lambda' (x_{n+1} + 1))
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da,

$$x'_1 = \lambda' x_1, \dots, x'_n = \lambda' x_n, x'_{n+1} = -1 + \lambda' (x_{n+1} + 1) \quad [3.27]$$

olur.

$$x_1^2 + \dots - x_{n+1}^2 = -1$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\lambda'^2 (x_1^2 + \dots x_n^2) - (-1 + \lambda' (x_{n+1} + 1)) \quad [3.28]$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

ifadesinden

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 - x_{n+1}^2 \quad [3.29]$$

bulunur. [3.29] ifadesi [3.28] de yerine yazılarak düzenlenirse,

$$\lambda' = \frac{1}{x_{n+1}} \quad [3.30]$$

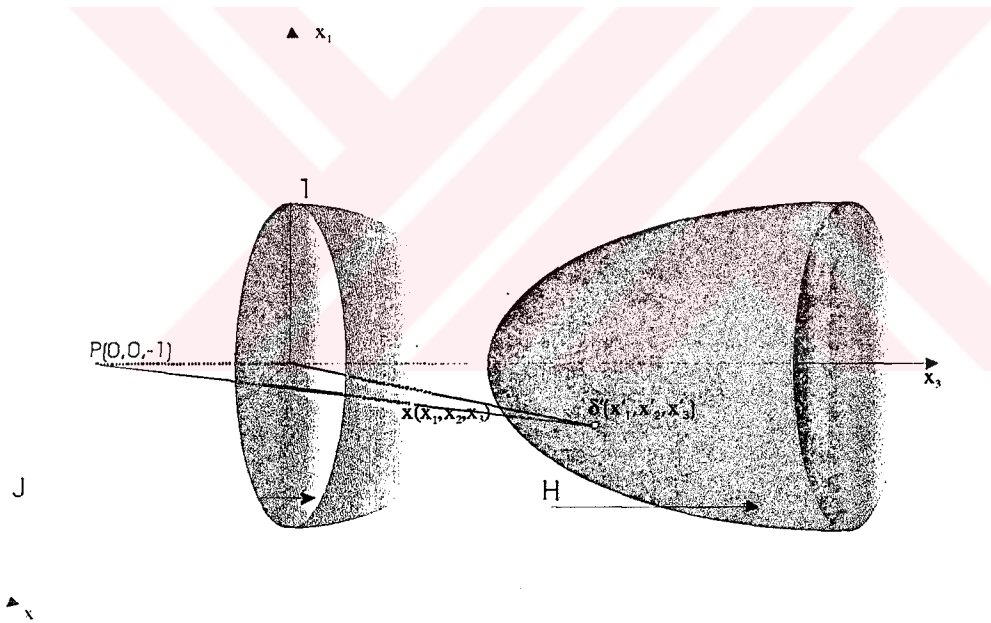
elde edilir. Buradan da, [3.30] ifadesi [3.27] de yerine yazılırsa;

$$x'_1 = \frac{x_1}{x_{n+1}}, x'_2 = \frac{x_2}{x_{n+1}}, \dots, x'_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}, x'_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}} \quad [3.31]$$

olur. O halde, $\delta': J \rightarrow H$ dönüşümü için,

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+1}} \right)$$

elde edilir.



Şekil 3.13. J dan H üzerine stereografik izdüşüm

$\delta': J \rightarrow H$ dönüşümü için, J ve H üzerindeki Riemann metrikleri sırasıyla,

$$ds_J^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \quad \text{ve} \quad ds_H^2 = \sum_{i=1}^n dx_i^2 - dx_{n+1}^2$$

olduğundan $\delta': J \rightarrow H$ dönüşümü için pull back dönüşümünü kullanarak,

$$\delta'^*(ds_H^2) = ds_J^2$$

olduğunu göstermeliyiz

[3.31] den;

$$y_1 = \frac{x_1}{x_{n+1}}, y_2 = \frac{x_2}{x_{n+1}}, \dots, y_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}, y_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} dy_i &= \frac{1}{x_{n+1}} \left(dx_i - \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}} x_i \right), \quad i = 1, \dots, n \\ dy_i^2 &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(dx_i^2 - 2x_i dx_i \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}} + x_i^2 \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \right) \\ \sum_{i=1}^n dy_i^2 &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 - \frac{2dx_{n+1}}{x_{n+1}} \sum_{i=1}^n x_i dx_i + \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \end{aligned} \quad [3.32]$$

ve

$$\begin{aligned} dy_{n+1} &= -\frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}^2} \\ (dy_{n+1})^2 &= \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^4} \end{aligned} \quad [3.33]$$

bulunur. Ayrıca,

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 - x_{n+1}^2$$

çşitliğinden;

$$\sum_{i=1}^n x_i dx_i = -x_{n+1} dx_{n+1} \quad [3.34]$$

olur. H üzerindeki Riemann metriği,

$$(ds_H^2) = \sum_{i=1}^n dy_i^2 - dy_{n+1}^2 \quad [3.35]$$

olduğundan [3.32], [3.33], [3.34] ifadeleri [3.35] kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \delta'^*(ds_H^2) &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 - \frac{2dx_{n+1}}{x_{n+1}} \sum_{i=1}^n x_i dx_i + \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^4} \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 - \frac{2dx_{n+1}}{x_{n+1}} x_{n+1} dx_{n+1} + \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} (1 - x_{n+1}^2) \right) - \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^4} \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 - \frac{2x_{n+1} dx_{n+1}^2}{x_{n+1}} x_{n+1} + \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} - \frac{x_{n+1}^2 dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} - \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 + dx_{n+1}^2 \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2 \\ &= ds_J^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

4 ÖKLİDYEN SİMPLEKSLER İÇİN TEPE AÇILARI ve n-BOYUTLU SİNÜS

4.1. Öklidyen Simpleksler

Tanım 4.1.1. (Gram determinant): E^n , n-boyutlu yönlendirilmiş Öklidyen uzay ve $\{P_i\}_{i=1,2,\dots,k}$ de E^n nin k-elemanlı bir alt kümesi ise $\{P_i\}$ -nin Gram determinanı ;

$$\text{Gram}(P_1, P_2, \dots, P_k) = \det(\langle P_i, P_j \rangle) = \begin{vmatrix} \|P_1\|^2 & \langle P_1, P_2 \rangle & \dots & \langle P_1, P_k \rangle \\ \langle P_2, P_1 \rangle & \|P_2\|^2 & \dots & \langle P_2, P_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle P_k, P_1 \rangle & \langle P_k, P_2 \rangle & \dots & \|P_k\|^2 \end{vmatrix}$$

ile tanımlanan bir skaldır(23).

Teorem 4.1.2. E^n , n-boyutlu yönlendirilmiş Öklidyen uzay ve $\overrightarrow{OP_i} = P_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $P_1, P_2, \dots, P_n$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzün hacmi $[P_1, P_2, \dots, P_n]$ ile gösterilirse;

$$[P_1, P_2, \dots, P_n] = \text{Gram}(P_1, P_2, \dots, P_n)^{1/2}$$

şeklindedir.

İspat: (18, 23) den görülebilir.

Teorem 4.1.3. E^n , yönlendirilmiş n-boyutlu Öklidyen uzay olsun. E^n nin $\{P_i\}_{i=1,\dots,n-1}$ gibi (n-1)-vektörü verildiğinde, $\langle P_1 \times P_2 \times \dots \times P_{n-1}, P \rangle = \delta_E(P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P)$ şartını

sağlayacak şekilde her $P \in E^n$ için bir tek $P_1 \times P_2 \times \dots \times P_{n-1} \in E$ vardır. Bu vektöre P_i vektörlerinin dış(cross)-çarpımı denir.

Burada $\delta(P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P) = \text{Gram}(P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P)^{1/2}$ dir. Bu cross-çarpımın aşağıdaki özellikleri vardır.

- i) $(P_1, P_2, \dots, P_{n-1}) \in E^{n-1} \rightarrow P_1 \times P_2 \times \dots \times P_{n-1} \in E^n$ dönüşümü bir multilineer alterne formdur.
- ii) $P_1 \times P_2 \times \dots \times P_{n-1} = 0$ olması için gerek ve yeter şart P_i lerin lineer bağımlı olmasıdır.
- iii) $P_1 \times P_2 \times \dots \times P_{n-1} \in (R_{P_1} + R_{P_2} + \dots + R_{P_{n-1}})^\perp$
- iv) $\|P_1 \times P_2 \times \dots \times P_{n-1}\| = \text{Gram}(P_1, P_2, \dots, P_{n-1})^{1/2}$

İspat: (23) den görülebilir.

4.1.1. Öklidyen simpleksler için tepe açıları ve n-boyutlu sinüs

Teorem 4.1.4. E^n , n-boyutlu yönlendirilmiş Öklidyen uzay ve $\overline{OP_i} = P_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, $\Omega_E = \langle O, P_1, \dots, P_n \rangle$ n-simpleksinin O tepesi, $(O, P_1 P_2 \dots P_n)$ ile gösterilirse; bu tepe noktasındaki tepe açısının n-boyutlu sinüsü;

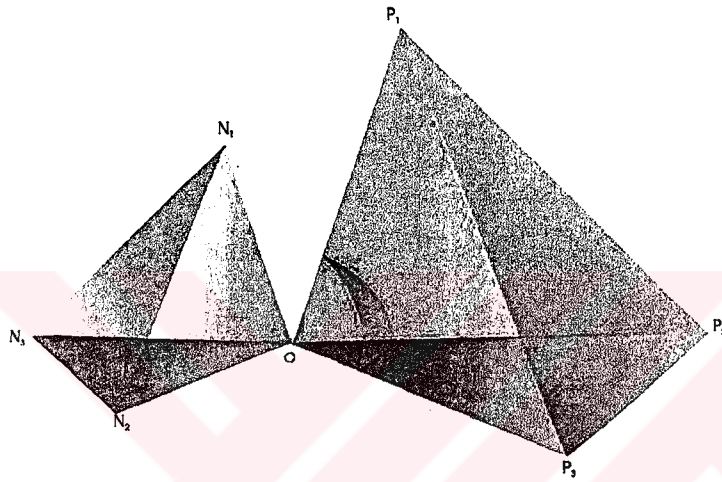
$${}^n \sin(O, P_1 P_2 \dots P_n) = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_n]^{n-1}}{\prod_{i=1}^n [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n]}$$

şeklindedir.

İspat:

$$\vec{N}_i = (-1)^{n-i} P_1 \times P_2 \times \dots \times \hat{P}_i \times \dots \times P_n$$

vektörleri P_i tepesine zıt $(n-1)$ -yüzlerin normalleridir(24).



Şekil 4.1. Öklidyen 3-simpleksin tepe açısı

$$\vec{e}_i = (-1)^{n-i} \frac{P_1 \times P_2 \times \dots \times \hat{P}_i \times \dots \times P_n}{\|P_1 \times P_2 \times \dots \times \hat{P}_i \times \dots \times P_n\|}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

vektörleri, P_i tepesine zıt $(n-1)$ -yüzlerin birim normal vektörleri olsun. Bu durumda;

$$\det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \\ [N_1 \quad \dots \quad N_n] \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} \langle P_1, N_1 \rangle & \dots & \langle P_1, N_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle P_n, N_1 \rangle & \dots & \langle P_n, N_n \rangle \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} \langle P_1, N_1 \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle P_2, N_2 \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \langle P_n, N_n \rangle \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$= \langle P_1, N_1 \rangle \langle P_2, N_2 \rangle \dots \langle P_n, N_n \rangle$$

$$= \begin{vmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{vmatrix}$$

olduğundan,

$$\begin{vmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{vmatrix}^{n-1}$$

olur. Ve yahut ta;

$$[N_1, N_2, \dots, N_n] = [P_1, P_2, \dots, P_n]^{n-1}. \quad [4.1]$$

Ayrıca;

$$\det \left(\begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} [e_1 \dots e_n] \right) = \det \begin{bmatrix} \langle P_1, e_1 \rangle & \dots & \langle P_1, e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle P_n, e_1 \rangle & \dots & \langle P_n, e_n \rangle \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{bmatrix} \langle P_1, \frac{N_1}{\|N_1\|} \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle P_2, \frac{N_2}{\|N_2\|} \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \langle P_n, \frac{N_n}{\|N_n\|} \rangle \end{bmatrix}_{n \times n} \\
&= \langle P_1, \frac{N_1}{\|N_1\|} \rangle \langle P_2, \frac{N_2}{\|N_2\|} \rangle \dots \langle P_n, \frac{N_n}{\|N_n\|} \rangle \\
&= \begin{vmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{vmatrix} \frac{1}{\|N_1\| \|N_2\| \dots \|N_n\|}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{vmatrix}^{n-1} \frac{1}{\|N_1\| \|N_2\| \dots \|N_n\|}$$

elde edilir ki [4.1] ifadesinden,

$$\begin{vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{vmatrix} = \frac{[N_1, N_2, \dots, N_n]}{\|N_1\| \|N_2\| \dots \|N_n\|} \quad [4.2]$$

bulunur. Yine [4.1] ifadesi ve Teorem 4.1.2 göz önüne alınırsa;

$$\begin{vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{vmatrix} = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_n]^{n-1}}{\prod_{i=1}^n [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n]}$$

$$= {}^n \sin(O, P_1 P_2 \dots P_n)$$

olur. Bu ise $\Omega_E = \langle O, P_1, \dots, P_n \rangle$ simpleksinin $(O, P_1 P_2 \dots P_n)$ tepesindeki tepe açısının sinüsüdür (Genelleştirilmiş sinüs teoremi) (25).

Örnek 4.1.5 . $n=3$ alınarak, bir dörtyüzlü için 3-boyutlu sinüs,

$${}^3 \sin(O, P_1 P_2 P_3) = \frac{[P_1, P_2, P_3]^2}{[P_1, P_2][P_2, P_3][P_3, P_1]}$$

şeklinde belirlenir.

4.1.2. n-Boyutlu polar sinüs

Teorem 4.1.6. E^n , n-boyutlu yönlendirilmiş Öklidyen uzay ve $\overrightarrow{OP_i} = P_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\Omega_E = \langle O, P_1, \dots, P_n \rangle$ n-simpleks olsun. $(O, P_1 P_2 \dots P_n)$ tepesindeki tepe açısının polar sinüsü;

$${}^n \text{pol} \sin(O, P_1 P_2 \dots P_n) = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_n]}{[P_1][P_2] \dots [P_n]}$$

şeklindedir.

İspat: E^n , n-boyutlu yönlendirilmiş Öklidyen uzay ve $\overrightarrow{OP_i} = P_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, $\Omega_E = \langle O, P_1, \dots, P_n \rangle$ n-simpleksini göz önüne alalım. O zaman;

$$\begin{aligned}
\det \left(\begin{bmatrix} \frac{P_1}{\|P_1\|} \\ \vdots \\ \frac{P_n}{\|P_n\|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{P_1}{\|P_1\|} & \dots & \frac{P_n}{\|P_n\|} \end{bmatrix} \right) &= \det \begin{bmatrix} \langle \frac{P_1}{\|P_1\|}, \frac{P_1}{\|P_1\|} \rangle & \dots & \langle \frac{P_1}{\|P_1\|}, \frac{P_n}{\|P_n\|} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \frac{P_n}{\|P_n\|}, \frac{P_1}{\|P_1\|} \rangle & \dots & \langle \frac{P_n}{\|P_n\|}, \frac{P_n}{\|P_n\|} \rangle \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\|P_1\|^2 \|P_2\|^2 \dots \|P_n\|^2} \begin{vmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle & \langle P_1, P_2 \rangle & \dots & \langle P_1, P_n \rangle \\ \langle P_2, P_1 \rangle & \langle P_2, P_2 \rangle & \dots & \langle P_2, P_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \langle P_n, P_1 \rangle & \langle P_n, P_2 \rangle & \dots & \langle P_n, P_n \rangle \end{vmatrix}_{n \times n} \\
&= \frac{1}{\|P_1\|^2 \|P_2\|^2 \dots \|P_n\|^2} \text{Gram}(P_1, P_2, \dots, P_n)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan;

$$\left| \begin{bmatrix} \frac{P_1}{\|P_1\|} \\ \vdots \\ \frac{P_k}{\|P_k\|} \\ \vdots \\ \frac{P_n}{\|P_n\|} \end{bmatrix} \right|^2 = \frac{1}{\|P_1\|^2 \|P_2\|^2 \dots \|P_n\|^2} \text{Gram}(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

elde edilir. O halde;

$$\left| \begin{bmatrix} \frac{P_1}{\|P_1\|} \\ \vdots \\ \frac{P_k}{\|P_k\|} \\ \vdots \\ \frac{P_n}{\|P_n\|} \end{bmatrix} \right|^2 = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_n]}{[P_1][P_2] \dots [P_n]} \quad [4.3]$$

olur. $\Omega_E = \langle O, P_1, \dots, P_n \rangle$ simpleksinin $(O, P_1 P_2 \dots P_n)$ köşesindeki tepe açısının polar sinüsü ;

$${}^n \text{pol sin}(O, P_1 P_2 \dots P_n) = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_n]}{[P_1][P_2] \dots [P_n]}$$

şeklindedir(25).

Eğer P_i ler birim vektörler ise ;

$${}^n \text{pol sin}(O, P_1 P_2 \dots P_n) = {}^n \text{pol sin}(P_1 P_2 \dots P_n) = [P_1, P_2, \dots, P_n]$$

ifadesine P_i ($i=1, \dots, n$) tepeli küresel simpleksin polar sinüsü de denir(25). Bu tanım $n=3$ için bir dörtyüzlünün hacmi için verilen tanıma denk bir ifadedir. Çünkü; dörtyüzlünün hacmi V ile gösterilirse;

$$V = \frac{1}{6} |P_1| |P_2| |P_3| {}^3 \text{pol sin}(O, P_1 P_2 P_3)$$

şeklindedir. Benzer bir formülde küresel üçgenleri kullanarak Euler tarafından ifade edilmiştir(26). Deteminant fonksiyonunu kullanarak Grassmann da aynı formülü bulmuştur. Polar sinüs ile ilgili diğer çalışmalar Schoute(27), Sommerville(28), Dörband(29) tarafından yapılmıştır.

4.1.3. Polar simpleksler için n-boyutlu sinüs

Tanım 4.1.7. E^n , n-boyutlu yönlendirilmiş Öklidyen uzay olsun. $\overrightarrow{OP_i} = P_i$, $i=1, 2, \dots, n$ için $\Omega_E = \langle O, P_1, \dots, P_n \rangle$ n-simpleksinin poları;

$$\overrightarrow{e_i} = (-1)^{n-i} \frac{P_1 \times P_2 \times \dots \times \hat{P}_i \times \dots \times P_n}{\|P_1 \times P_2 \times \dots \times \hat{P}_i \times \dots \times P_n\|}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

vektörleri, c_i tepesine zıt (n-1)-yüzlerin birim normal vektörleri olmak üzere $\Omega_E^d = \langle O, e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ n-simpleksidir.

Teorem 4.1.8. $\overrightarrow{Oe_i} = e_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$) ler birim vektörler olmak üzere;

$\Omega_E^d = \langle O, e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ n-simpleksinin O tepesindeki tepe açısının n-boyutlu sinüsü;

$${}^n \sin(O, e_1 e_2 \dots e_n) = \frac{[e_1, e_2, \dots, e_n]^{n-1}}{\prod_{i=1}^n [e_1, e_2, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]}$$

şeklindedir.

İspat:

$$\overrightarrow{P_i} = (-1)^{n-i} (e_1 \times e_2 \times \dots \hat{e}_i \times \dots \times e_n)$$

vektörleri, e_i tepesine zıt olan (n-1)-yüzlerin normal vektörleri olacaktır. Şimdi;

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} [P_1 \dots P_n] \right) &= \det \begin{bmatrix} \langle e_1, P_1 \rangle & \dots & \langle e_1, P_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, P_1 \rangle & \dots & \langle e_n, P_n \rangle \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \langle P_1, e_1 \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle P_2, e_2 \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \langle P_n, e_n \rangle \end{bmatrix}_{n \times n} \\ &= \langle P_1, e_1 \rangle \langle P_2, e_2 \rangle \dots \langle P_n, e_n \rangle \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{vmatrix}$$

olduğundan;

$$\begin{vmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{vmatrix}^{n-1} = [e_1, e_2, \dots, e_n]^{n-1} \quad [4.4]$$

bulunur. Ayrıca;

$$\vec{p}_i = (-1)^{n-i} \frac{e_1 \times e_2 \times \dots \times \hat{e}_i \times \dots \times e_{n-1}}{\|e_1 \times e_2 \times \dots \times \hat{e}_i \times \dots \times e_{n-1}\|} = \frac{P_i}{\|P_i\|} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

olduğundan,

$$\det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \\ [e_1 \quad \dots \quad e_n] \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} \langle p_1, e_1 \rangle & \dots & \langle p_1, e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle p_n, e_1 \rangle & \dots & \langle p_n, e_n \rangle \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} \langle e_1, \frac{P_1}{\|P_1\|} \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle e_2, \frac{P_2}{\|P_2\|} \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \langle e_n, \frac{P_n}{\|P_n\|} \rangle \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle e_1, \frac{P_1}{\|P_1\|} \rangle \langle e_2, \frac{P_2}{\|P_2\|} \rangle \dots \langle e_n, \frac{P_n}{\|P_n\|} \rangle \\
&= \begin{vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{vmatrix} \frac{1}{\|P_1\| \|P_2\| \dots \|P_n\|}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{vmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{vmatrix} = \frac{1}{\|P_1\| \|P_2\| \dots \|P_n\|} \begin{vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{vmatrix}^{n-1}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{vmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{vmatrix} = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_k]}{\|P_1\| \|P_2\| \dots \|P_k\|} \quad [4.5]$$

bulunur. [4.5] ifadesi ve Teorem 4.1.3 göz önüne alınırsa;

$$\begin{vmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{vmatrix} = \frac{[e_1, e_2, \dots, e_n]^{n-1}}{\prod_{i=1}^n [e_1, e_2, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]}$$

olur. Buradan da;

$${}^n \sin(O, e_1 e_2 \dots e_n) = \frac{[e_1, e_2, \dots, e_n]^{n-1}}{\prod_{i=1}^n [e_1, e_2, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]}$$

elde edilir.

4.1.4. Polar simpleksler için n-boyutlu polar sinüs

Teorem 4.1.9. E^n , n-boyutlu yönlendirilmiş Öklidyen uzay olsun. $\overrightarrow{OP_i} = P_i$, $i=1,2,\dots,n$ için $\Omega_E = \langle O, P_1, \dots, P_n \rangle$ n-simpleksinin poları, $\overrightarrow{Oe_i} = e_i$, $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere, $\Omega_E^d = \langle O, e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ n-simpleksi ise; O tepesindeki tepe açısının n-boyutlu polar sinüsü;

$${}^n \text{pol sin}(O, e_1 e_2 \dots e_n) = [e_1, e_2, \dots, e_n]$$

olur.

İspat:

$\overrightarrow{Oe_i} = e_i$ ($i=1,2,\dots,n$) ler birim vektörler olduğundan,

$$\det \left(\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{bmatrix}$$

$$= \text{Gram}(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

bulunur.

$$\begin{vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{vmatrix}^2 = \text{Gram}(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

elde edilir ki buradan;

$$\begin{vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{vmatrix} = \text{Gram}(e_1, e_2, \dots, e_n)^{\frac{1}{2}}$$

olur. Buradan da;

$${}^n \text{pol sin}(O, e_1 e_2 \dots e_n) = \left| [e_1, e_2, \dots, e_n] \right| \quad [4.6]$$

bulunur. Yani $\Omega^d = \langle O, e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ simpleksinin $(O, e_1 e_2 \dots e_n)$ köşesindeki tepe açısının polar sinüsü,

$${}^n \text{pol sin}(O, e_1 e_2 \dots e_n) = \left| [e_1, e_2, \dots, e_n] \right|$$

şeklindedir.

Sonuç 4.1.10. $\Omega_E = \langle O, P_1, \dots, P_n \rangle$ n-simpleksinin $(O, P_1 P_2 \dots P_n)$ tepesindeki tepe açısının n-boyutlu sinüsü, $\Omega_E^d = \langle O, e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ n-simpleksinin $(O, e_1 e_2 \dots e_n)$ tepesindeki tepe açısının n-boyutlu polar sinüsüne eşittir.

İspat: Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.9 dan;

$${}^n \text{pol sin}(O, e_1 e_2 \dots e_n) = \|[e_1, e_2, \dots, e_n]\| = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_n]^{n-1}}{\prod_{i=1}^n [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n]} = {}^n \text{sin}(O, P_1 P_2 \dots P_n)$$

olduğu görülür.

Sonuç 4.1.11. $\Omega_E^d = \langle O, e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ n-simpleksinin $(O, e_1 e_2 \dots e_n)$ tepesindeki tepe açısının n-boyutlu sinüsü, $\Omega_E = \langle O, P_1, \dots, P_n \rangle$ n-simpleksinin $(O, P_1 P_2 \dots P_n)$ tepesindeki tepe açısının n-boyutlu polar sinüs'üne eşittir.

İspat: Teorem 4.1.6 ve Teorem 4.1.8 den;

$${}^n \text{pol sin}(O, P_1 P_2 \dots P_n) = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_n]}{[P_1][P_2] \dots [P_n]} = \frac{[e_1, e_2, \dots, e_n]^{n-1}}{\prod_{i=1}^n [e_1, e_2, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]} = {}^n \text{sin}(O, e_1 e_2 \dots e_n)$$

olduğu görülür.

Sonuç 4.1.11. Öklidyen uzayda $\overrightarrow{OP_1} = v_1, \overrightarrow{OP_2} = v_2, \dots, \overrightarrow{OP_n} = v_n$ vektörleri tarafından belirlenen n-simpleksin n-boyutlu hacmi;

$$V = \frac{[v_1, v_2, \dots, v_n]}{n!},$$

ile tanımlanırken, bu simplex' in $(n - 1)$ -boyutlu yüzlerinin hacmi ise,

$$V_1 = \frac{[v_2, v_3, \dots, v_n]}{(n-1)!}, \dots, V_n = \frac{[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}]}{(n-1)!}$$

şeklindedir. Genelleştirilmiş sinüs teoremine göre hacim formülü ise,

$$V^{n-2} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} V_1 V_2 \dots V_n \sin(O, P_1 P_2 \dots P_n) \quad [4.7]$$

ile ifade edilir(25).

Tanım 4.1.12. $\Omega = \langle 0, P_1, P_2, \dots, P_n \rangle$ simpleksinin, $\Omega_{n-1} = \langle 0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1} \rangle$ (n-1)-yüzü ile $\Omega_i = \langle 0, P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n \rangle$ (n-1)-yüzü arasındaki diedral açı θ_{in} olmak üzere, n-boyutlu sinüs için çarpım formülü ;

$${}^n \sin(O, P_1 P_2 \dots P_n) = {}^{n-1} \sin(O, P_1 P_2 \dots P_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} \sin \theta_{in}$$

şeklinde tanımlanır(25).

5. KÜRESEL n-SİMPLEKSLER VE n-BOYUTLU SİNÜS

5.1. Küresel n-Simpleksler

n- boyutlu küresel geometride sinüs kuralı ilk kez 1877 de İtalyan matematikçi Enrico d'Ovidio tarafından keşfedilmiştir(30). Bu keşifle birlikte n-boyutlu sinüse dual kavram olan n-boyutlu polar sinüs ün varlığı ortaya çıkmıştır. Bir çok matematikçi bu konuda çalışmalar yapmıştır. İsveçli matematikçi Folke Erikson da bu konuyu 1978 de "*The law of sines for tetrahedra and n-simplices*" isimli makalesinde geniş bir şekilde ele almıştır(25).

$S^n \subset R^{n+1}$ ve $S^n = \{x \in R^{n+1} | \langle x, x \rangle = 1\}$ ile tanımlanan uzaya n-boyutlu küresel uzay denir(21). $\overrightarrow{OP_i} = P_i$, $i=1,2,...,n+1$ olmak üzere $P_1, P_2, ..., P_{n+1} \in S^n \subset R^{n+1}$ için, $\Omega_S = \langle P_1, P_2, ..., P_{n+1} \rangle$ küresel simpleks olsun. $V_{P_j}^i = P_j - \langle P_i, P_j \rangle P_i$, $(i, j = 1, 2, ..., n+1)$ vektörleri P_i tepesinde ki P_j doğrultusundaki teğet vektörlerdir(21).

5.1.1. Küresel n-simpleksler için tepe açıları ve n-boyutlu sinüs

Lemma 5.1.1. $S_\ell : R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$

$$(P_k) \rightarrow S_\ell(P_k) = P_k - \langle P_\ell, P_k \rangle P_\ell \quad (k, l=1, ..., n+1),$$

lineer dönüşüm olmak üzere;

$$\text{Gram}(P_\ell, S_\ell(P_1), ..., S_\ell(\hat{P}_\ell), ..., S_\ell(P_{n+1})) = \text{Gram}(P_1, ..., P_{n+1}).$$

İspat:

$$A = \begin{bmatrix} P_1 \\ S_\ell(P_1) \\ \vdots \\ S_\ell(\hat{P}_\ell) \\ \vdots \\ S_\ell(P_{n+1}) \end{bmatrix} \text{ matrisini göz önüne alalım.}$$

$$S_\ell(P_1) = P_1 - \langle P_1, P_\ell \rangle P_\ell$$

olduğundan ;

1.satırın, $\langle P_1, P_\ell \rangle$ katını 2.satıra,

.. $\langle P_2, P_\ell \rangle$ katını 3.satıra,

.. ...

.. $\langle P_\ell, P_\ell \rangle$ katını ℓ . satıra,

.. ..

.. $\langle P_\ell, P_{n+1} \rangle$ katını (n+1). Satıra

ilave edilirse;

$$A = \begin{bmatrix} P_\ell \\ S_\ell(P_1) \\ \vdots \\ S_\ell(\hat{P}_\ell) \\ \vdots \\ S_\ell(P_{n+1}) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} P_\ell \\ P_1 \\ \vdots \\ \hat{P}_\ell \\ \vdots \\ P_{n+1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu işlemler determinant değerini değiştirmedüğinden Teorem 4.1.3 ve Gramian tanımından;

$$\begin{aligned} \text{Gram}(P_1, \dots, P_{n+1})^{1/2} &= \det |\langle P_i, P_j \rangle| \\ &= \det |\langle P_i, S_\ell(P_j) \rangle| \\ &= \text{Gram}(P_\ell, S_\ell(P_1), \dots, S_\ell(\hat{P}_\ell), \dots, S_\ell(P_{n+1}))^{1/2} \end{aligned}$$

bulunur. O halde;

$$\text{Gram}(P_\ell, S_\ell(P_1), \dots, S_\ell(\hat{P}_\ell), \dots, S_\ell(P_{n+1})) = \text{Gram}(P_1, \dots, P_{n+1})$$

eşitliği geçerlidir.

Lemma 5.1.2. $S_\ell : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$$S_\ell(P_k) = P_k - \langle P_\ell, P_k \rangle P_\ell, (k=1, \dots, n+1)$$

şeklindeki lineer dönüşüm olmak üzere,

$$\text{Gram}(P_\ell, S_\ell(P_1), \dots, S_\ell(\hat{P}_\ell), \dots, S_\ell(\hat{P}_i), \dots, S_\ell(P_{n+1})) = \text{Gram}(P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}).$$

olur.

İspat:

$$A = \begin{bmatrix} P_\ell \\ S_\ell(P_1) \\ \vdots \\ S_\ell(\hat{P}_\ell) \\ \vdots \\ S_\ell(\hat{P}_{i-1}) \\ S_\ell(\hat{P}_{i+1}) \\ \vdots \\ S_\ell(\hat{P}_{n+1}) \end{bmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. A matrisinin satır vektörleri;

$$\alpha_1 = P_\ell$$

$$\alpha_2 = S_\ell(P_1)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_\ell = S_\ell(P_\ell)$$

$$\alpha_{\ell+1} = S_\ell(P_{\ell+1})$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{n+1} = S_\ell(P_{n+1})$$

$$\alpha_i = S_l(P_{i+1})$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{n-1} = S_l(P_n)$$

$$\alpha_n = S_l(P_{n+1})$$

olsun. $l < i$ için,

$$\varepsilon_k(\alpha_k) = \begin{cases} \alpha_k + \langle P_l, P_{k-1} \rangle > \alpha_1 & , \quad 2 \leq k \leq l \\ \alpha_k + \langle P_l, P_k \rangle > \alpha_1 & , \quad l+1 \leq k \leq i-1 \\ \alpha_k + \langle P_l, P_{k+1} \rangle > \alpha_1 & , \quad i \leq k \leq n \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlı, yani;

$$\varepsilon_k(\alpha_j) = \alpha_j, \quad k \neq j$$

şeklinde tanımlanan ε_k , $k = 2, 3, \dots, n+1$ elemanter satır operasyonları A matrisine sırasıyla uygulandığında;

$$\varepsilon_{n+1} \varepsilon_n \dots \varepsilon_3 \varepsilon_2 A = \begin{bmatrix} P_l \\ P_1 \\ \vdots \\ \hat{P}_l \\ \vdots \\ \hat{P}_i \\ \vdots \\ P_{n+1} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

$$\varepsilon_{n+1} \varepsilon_n \dots \varepsilon_3 \varepsilon_2 A = B$$

olarak alınıp bu eşitliğin her iki tarafı transpozeleriyle çarpılırsa;

$$(\varepsilon_{n+1}\varepsilon_n...\varepsilon_3\varepsilon_2)AA^T(\varepsilon_{n+1}\varepsilon_n...\varepsilon_3\varepsilon_2A)^T = B.B^T$$

elde edilir.

$$(\varepsilon_{n+1}\varepsilon_n...\varepsilon_3\varepsilon_2) = \varepsilon$$

alınırsa;

$$\varepsilon(A.A^T) \varepsilon^T = B.B^T$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki yanının determinantı alınırsa,

$$|\varepsilon| \cdot |AA^T| \cdot |\varepsilon^T| = |BB^T|$$

veya

$$|AA^T| \cdot |\varepsilon|^2 = |BB^T| \quad [5.1]$$

olur. Buradan;

$$|AA^T| = \text{Gram}(P_l, S_l(P_1), \dots, S_l(\hat{P}_l), \dots, S_l(\hat{P}_i), \dots, S_l(\hat{P}_i), \dots, S_l(P_{n+1})) \quad [5.2]$$

$$|BB^T| = \text{Gram}(P_1, \dots, P_l, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}) \quad [5.3]$$

elde edilir. $k > l$ için;

$$\varepsilon_k(\alpha_1) = \alpha_1$$

$$\varepsilon_k(\alpha_2) = \alpha_2$$

$\vdots$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k(\alpha_l) &= \alpha_l \\
&\vdots \\
\varepsilon_k(\alpha_k) &= \alpha_k + \langle P_l, P_k \rangle \alpha_1 \\
&\vdots \\
\varepsilon_k(\alpha_{n+l}) &= \alpha_{n+l}
\end{aligned}$$

olduğundan;

$$\varepsilon_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \langle P_k, P_l \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

k.sütun
↓

← k.satır

matrisi için

$$\det |\varepsilon_k| = 1$$

olur. $k \leq l$ için aynı eşitliğin sağlandığı benzer şekilde gösterilebilir. O halde;

$$\begin{aligned}
\det |\varepsilon| &= |\varepsilon_{n+1} \varepsilon_n \dots \varepsilon_3 \varepsilon_2| \\
&= 1.
\end{aligned}
\tag{5.4}$$

[5.2], [5.3], [5.4] ifadeleri [5.1] de yerlerine yazılırsa;

$$Gram(P_\ell, S_\ell(P_1), \dots, S_\ell(\hat{P}_\ell), \dots, S_\ell(\hat{P}_i), \dots, S_\ell(P_{n+1})) = Gram(P_1, \dots, P_l, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1})$$

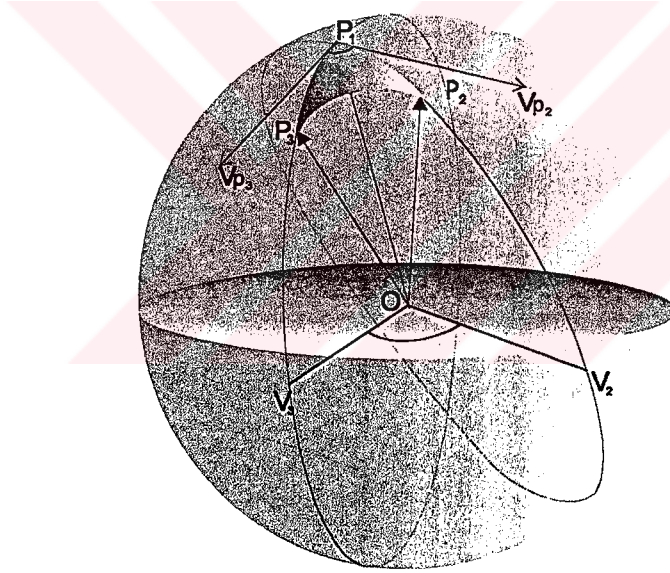
bulunur.

Teorem 5.1.3. $P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \in S^n \subset R^{n+1}$ için $\Omega_S = \langle P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$ küresel simpleksinin P_i tepesindeki n-hedral açının sinüsü ;

$${}^n \sin(P_i, P_1 P_2 \dots \hat{P}_i \dots P_{n+1}) = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_k, \dots, P_{n+1}]}$$

şeklindedir(25).

İspat:



Şekil 5. 1. Küresel 2- simpleksin tepe açısı

$$N_i = (-1)^{n+1-i} (V_{P_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{P_i}^i \times \dots \times V_{P_{n+1}}^i)$$

$$N_k = (-1)^{n+1-k} (V_{P_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{P_k}^i \times \dots \times P_i \times \dots \times V_{P_{n+1}}^i)$$

vektörleri, P_i ve $V_{P_k}^i$ ($i, k = 1, 2, \dots, n+1$) teğet vektörüne sahip ayrıtlara zıt $(n-1)$ -yüzlerin normalleri olmak üzere,

$$P_i = e_i = \frac{N_i}{\|N_i\|}$$

vc

$$e_k = (-1)^{n+1-k} \frac{V_{P_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{P_k}^i \times \dots \times P_i \times \dots \times V_{P_{n+1}}^i}{\|V_{P_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{P_k}^i \times \dots \times P_i \times \dots \times V_{P_{n+1}}^i\|}$$

$$= \frac{N_k}{\|N_k\|}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1$$

vektörleri de birim normallerdir(24,31,32). Buradan;

$$\det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} V_{P_1}^i & \dots & P_i & \dots & V_{P_{n+1}}^i \end{bmatrix} = \frac{1}{\|N_1\| \dots \|\hat{N}_i\| \dots \|N_{n+1}\|} \underbrace{\det \begin{bmatrix} V_{P_2}^i \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V_{P_{n+1}}^i \end{bmatrix} \dots \det \begin{bmatrix} V_{P_2}^i \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V_{P_{n+1}}^i \end{bmatrix}}_{n\text{-çarpım}}$$

olduğundan,

$$\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\|N_1\| \dots \|\hat{N}_i\| \dots \|N_{n+1}\|} \left(\det \begin{bmatrix} V_{P_2}^i \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V_{P_{n+1}}^i \end{bmatrix} \right)^{n-1} \quad [5.5]$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\det \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ N_{n+1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & \dots & P_i & \dots & N_{n+1} \end{bmatrix} = \left(\det \begin{bmatrix} V_{P_2}^i \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V_{P_{n+1}}^i \end{bmatrix} \right)^n$$

olduğundan,

$$\det \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ N_{n+1} \end{bmatrix} = \left(\det \begin{bmatrix} V_{P_2}^i \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V_{P_{n+1}}^i \end{bmatrix} \right)^{n-1} \quad [5.6]$$

elde edilir. O halde;

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\|N_1\| \dots \|\hat{N}_i\| \dots \|N_{n+1}\|} \det \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ N_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\det[N_1 \dots P_i \dots N_{n+1}]}{\|N_1\| \dots \|\hat{N}_i\| \dots \|N_{n+1}\|}. \end{aligned} \quad [5.7]$$

[5.6], [5.7] ifadeleri ile Teorem 4.1.3 den,

$$\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{(\det[V_{P_1}^i \dots P_i \dots V_{P_{n+1}}^i])^{n-1}}{\|N_1\| \dots \|\hat{N}_i\| \dots \|N_{n+1}\|}$$

elde edilir. Lemma 5.1.1 ve Lemma 5.1.2 den;

$$\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_k, \dots, P_{n+1}]}$$

bulunur. Buradan küresel simpleksler için n-boyutlu sintis;

$$^n \sin(P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}) = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_k, \dots, P_{n+1}]}$$

olur.

Teorem 5.1.4. $P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \in S^n \subset R^{n+1}$ için $\Omega_S = \langle P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$ küresel simpleks olsun. P_i tepesine zıt yüz F_i ile gösterilirse;

$$\text{Gram}(P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1})^{1/2} = [P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}]$$

olur.

İspat: P_i tepesine zıt yüz F_i ile gösterilsin.

$$\vec{e}_i = (-1)^{n+1-i} \frac{P_1 \times P_2 \times \dots \times \hat{P}_i \times \dots \times P_{n+1}}{\|P_1 \times P_2 \times \dots \times \hat{P}_i \times \dots \times P_{n+1}\|}$$

vektörü F_i yüzünün birim normali olmak üzere;

$$\det \left(\begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ P_{n+1} \end{bmatrix} [P_1 \dots e_i \dots P_{n+1}] \right) = \begin{vmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle & \dots & \langle P_1, e_i \rangle & \dots & \langle P_1, P_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle e_i, P_1 \rangle & \dots & \langle e_i, e_i \rangle & \dots & \langle e_i, P_{n+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle P_{n+1}, P_1 \rangle & \dots & \langle P_{n+1}, e_i \rangle & \dots & \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle & \dots & \langle P_1, P_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle P_{n+1}, P_1 \rangle & \dots & \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle \end{vmatrix}_{n \times n}$$

$$= \text{Gram}(P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1})$$

$$= |\det[\langle P_k, P_l \rangle]|, \quad k, l \neq i \text{ ve } k, l = 1, 2, \dots, n+1$$

olur ki buradan;

$$\left(\det \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ P_{n+1} \end{bmatrix} \right)^2 = \text{Gram}(P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1})$$

ve

$$\det \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ P_{n+1} \end{bmatrix} = \text{Gram}(P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1})^{1/2} \quad [5.8]$$

bulunur. Yani;

$$\text{Gram}(P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1})^{1/2} = \left| [P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}] \right|$$

olur.

5.1.2 Küresel polar simpleksler için tepe açıları

$\Omega_S = \langle P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$ küresel simpleks olsun. Ω_S simpleksinin polar duali ,

$$e_i = (-1)^{n+1-i} \frac{P_1 \times \dots \times \hat{P}_i \times \dots \times P_{n+1}}{\|P_1 \times \dots \times \hat{P}_i \times \dots \times P_{n+1}\|}, i = 1, 2, \dots, n+1$$

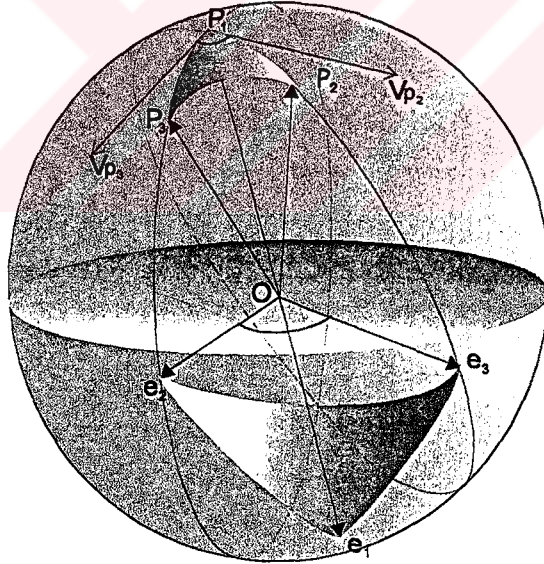
vektörleri P_i tepelerine zıt yüzlerin birim normalleri olmak üzere;
 $\Omega_s^d = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n+1} \rangle$ simpleksidir. $V_{e_j}^i = e_j - \langle e_i, e_j \rangle e_i$, $i, j = 1, 2, \dots, n+1$
vektörleri e_i tepesinde ki e_j doğrultusundaki teğet vektörlerdir(21).

Teorem 5.1.5. $\Omega_s = \langle P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$ küresel simpleksinin poları
 $\Omega_s^d = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n+1} \rangle$ simpleksi olmak üzere, e_i tepesindeki tepe açısının n-boyutlu
sinüsü;

$${}^n \sin(e_1, e_2, \dots, e_{n+1}) = \frac{[e_1, e_2, \dots, e_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} [e_1, e_2, \dots, \hat{e}_k, \dots, e_{n+1}]}$$

şeklindedir.

İspat:



Şekil 5.2. Polar 2- simpleksin tepe açısı

$$N_i^d = (-1)^{n+1-i} (V_{e_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{e_i}^i \times \dots \times V_{e_{n+1}}^i)$$

$$N_k^d = (-1)^{n+1-k} (V_{e_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{e_k}^i \times \dots \times e_i \times \dots \times V_{e_{n+1}}^i)$$

vektörleri, e_i ve $V_{e_k}^i$ ($i, k = 1, 2, \dots, n+1$) teğet vektörüne sahip ayrıtlara zıt (n-1)-yüzlerin normaleri olmak üzere,

$$e_i^d = e_i = \frac{N_i^d}{\|N_i^d\|}$$

ve

$$e_k^d = (-1)^{n+1-k} \frac{V_{e_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{e_k}^i \times \dots \times e_i \times \dots \times V_{e_{n+1}}^i}{\|V_{e_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{e_k}^i \times \dots \times e_i \times \dots \times V_{e_{n+1}}^i\|}$$

$$= \frac{N_k^d}{\|N_k^d\|}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1$$

vektörleri de birim normalerdir.

$$\det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i^d \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{e_1}^i & \dots & e_i & \dots & V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{\|N_1^d\| \dots \|\hat{N}_i^d\| \dots \|N_{n+1}^d\|} \underbrace{\det \begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix} \dots \det \begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix}}_{\text{n-çarpım}}$$

olduğundan,

$$\det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i^d \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} = \frac{1}{\|N_1^d\| \dots \|\hat{N}_i^d\| \dots \|N_{n+1}^d\|} \left(\det \begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix} \right)^{n-1} \quad [5.9]$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\det \begin{bmatrix} N_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ N_{n+1}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^d & \dots & e_i & \dots & N_{n+1}^d \end{bmatrix} = \left(\det \begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix} \right)^n$$

olduğundan

$$\det \begin{bmatrix} N_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ N_{n+1}^d \end{bmatrix} = \left(\det \begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix} \right)^{n-1} \quad [5.10]$$

elde edilir. O halde;

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} &= \frac{1}{\|N_1^d\| \dots \|\hat{N}_i^d\| \dots \|N_{n+1}^d\|} \det \begin{bmatrix} N_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ N_{n+1}^d \end{bmatrix} \\ &= \frac{\det \begin{bmatrix} N_1^d & \dots & e_i & \dots & N_{n+1}^d \end{bmatrix}}{\|N_1^d\| \dots \|\hat{N}_i^d\| \dots \|N_{n+1}^d\|}. \end{aligned} \quad [5.11]$$

[5.10] , [5.11] ifadeleri ile Teorem 4.1.3 den,

$$\det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} = \frac{\left(\det \begin{bmatrix} V_{e_1}^i & \dots & e_i & \dots & V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix} \right)^{n-1}}{\|N_1^d\| \dots \|\hat{N}_i^d\| \dots \|N_{n+1}^d\|}$$

elde edilir. Lemma 5.1.1 ve Lemma 5.2.2 den;

$$\det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} = \frac{[e_1, e_2, \dots, e_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} [e_1, e_2, \dots, \hat{e}_k, \dots, e_{n+1}]}$$

bulunur. Buradan küresel polar simpleksler için n-boyutlu sinüs;

$$^n \sin(e_i, e_1, e_2, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}) = \frac{[e_1, e_2, \dots, e_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} [e_1, e_2, \dots, \hat{e}_k, \dots, e_{n+1}]}$$

olur.

Teorem 5.1.6. $P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \in S^n \subset R^{n+1}$ için $\Omega_S = \langle P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$ küresel simpleks olsun. Ω_S 'nin polar'ı $\Omega_S^d = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n+1} \rangle$ simpleksi olmak üzere;

$$\text{Gram}(e_1, e_2, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})^{1/2} = [e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}]$$

olur.

İspat: e_i tepesine zıt yüz F_i ile gösterilsin.

$$e_i^d = (-1)^{n+1-i} \frac{e_1 \times e_2 \times \dots \times \hat{e}_i \times \dots \times e_{n+1}}{\|e_1 \times e_2 \times \dots \times \hat{e}_i \times \dots \times e_{n+1}\|}$$

vektörü F_i yüzünün birim normali olmak üzere;

$$\det \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i^d \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & \dots & e_i^d & \dots & e_{n+1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_i^d \rangle & \dots & \langle e_1, e_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle e_i^d, e_1 \rangle & \dots & \langle e_i^d, e_i^d \rangle & \dots & \langle e_i^d, e_{n+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_{n+1}, e_1 \rangle & \dots & \langle e_{n+1}, e_i^d \rangle & \dots & \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_{n+1}, e_1 \rangle & \dots & \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle \end{vmatrix}_{n \times n}$$

$$= Gram(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})$$

$$= |\det[\langle e_k, e_l \rangle]|, \quad k, l \neq i \text{ ve } k, l = 1, 2, \dots, n+1$$

olur. Buradan;

$$\left(\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i^d \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \right)^2 = Gram(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})$$

ve

$$\left(\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i^d \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \right) = Gram(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})^{1/2} \quad [5.12]$$

bulunur. $\square$

P_i ve $V_{P_k}^i$ vektörleri O , P_b , P_k tarafından belirlenen düzlemde olduklarından

Teorem 5.1.3 deki;

$$N_i = (-1)^{n+1-i} (V_{P_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{P_i}^i \times \dots \times V_{P_{n+1}}^i)$$

ve

$$N_k = (-1)^{n+1-k} (V_{P_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{P_k}^i \times \dots \times P_i \times \dots \times V_{P_{n+1}}^i)$$

normal vektörlerin yerine;

$$P_i = e_i = \frac{N_i}{\|N_i\|}$$

ve

$$e_k = (-1)^{n+1-k} \frac{P_1 \times \dots \times \hat{P}_k \times \dots \times P_i \times \dots \times P_{n+1}}{\|P_1 \times \dots \times \hat{P}_k \times \dots \times P_i \times \dots \times P_{n+1}\|}$$

$$= \frac{N_k}{\|N_k\|}, i, k = 1, 2, \dots, n+1$$

alınırsa;

$$\det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \\ [e_1 \dots e_i \dots e_{n+1}] \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_i \rangle & \dots & \langle e_1, e_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle e_i, e_1 \rangle & \dots & \langle e_i, e_i \rangle & \dots & \langle e_i, e_{n+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_{n+1}, e_1 \rangle & \dots & \langle e_{n+1}, e_i \rangle & \dots & \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

çiftliğinden,

$$\left(\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_{n+1}, e_1 \rangle & \dots & \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle \end{vmatrix}_{n \times n}$$

elde edilir. Buradan da;

$$\left(\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \right)^2 = \text{Gram}(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})$$

ve

$$\left(\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \right) = \text{Gram}(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})^{1/2}$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafına n-boyutlu polar simpleksin e_i tepesine zıt F_i yüzünün n-boyutlu polar sinüsü denir ve

$${}^n \text{pol sin}(e_1 e_2 \dots \hat{e}_i \dots e_{n+1}) = \left[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1} \right]$$

şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde e_i ve $V_{e_k}^i$ vektörleri O , e_i , e_k tarafından belirlenen düzlemde olduklarından Teorem 5.1.5 de;

$$N_i^d = (-1)^{n+1-i} (V_{e_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{e_i}^i \times \dots \times V_{e_{n+1}}^i)$$

ve

$$N_k^d = (-1)^{n+1-k} (V_{e_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{e_k}^i \times \dots \times e_i \times \dots \times V_{e_{n+1}}^i)$$

vektörleri, e_i ve $V_{e_k}^i$ teğet vektörüne sahip ayrıta zıt (n-1)-yüzlerin normalleri olmak üzere

$$e_i^d = P_i = \frac{N_i}{\|N_i\|}$$

ve

$$e_k^d = (-1)^{n+1-k} \frac{e_1 \times e_2 \times \dots \times \hat{e}_k \times \dots \times e_{n+1}}{\|e_1 \times e_2 \times \dots \times \hat{e}_k \times \dots \times e_{n+1}\|} = P_k, \quad k=1, 2, \dots, n+1$$

alınırsa;

$$\det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^d & \dots & e_i & \dots & e_{n+1}^d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \langle e_1^d, e_1^d \rangle & \dots & \langle e_1^d, e_i \rangle & \dots & \langle e_1^d, e_{n+1}^d \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle e_i, e_1^d \rangle & \dots & \langle e_i, e_i \rangle & \dots & \langle e_i, e_{n+1}^d \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_{n+1}^d, e_1^d \rangle & \dots & \langle e_{n+1}^d, e_i \rangle & \dots & \langle e_{n+1}^d, e_{n+1}^d \rangle \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

çiftliğinden,

$$\left(\det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{vmatrix} \langle e_1^d, e_1^d \rangle & \dots & \langle e_1^d, e_{n+1}^d \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_{n+1}^d, e_1^d \rangle & \dots & \langle e_{n+1}^d, e_{n+1}^d \rangle \end{vmatrix}_{n \times n}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle & \dots & \langle P_1, P_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle P_{n+1}, P_1 \rangle & \dots & \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle \end{vmatrix}_{n \times n}$$

olur. Sonuç olarak,

$$\det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} = \text{Gram}(P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1})^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafına n -boyutlu simpleksin P_i tepesine zıt F_i yüzünün n -boyutlu polar sinüsü denir ve

$${}^n \text{pol sin}(P_1 P_2 \dots \hat{P}_i \dots P_{n+1}) = \left[P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1} \right]$$

şeklinde gösterilir.

Sonuç 5.1.7.

$${}^n \text{sin}(P_i, P_1 P_2 \dots \hat{P}_i \dots P_{n+1}) = {}^n \text{pol sin}(e_1 e_2 \dots \hat{e}_i \dots e_{n+1}) = \frac{\left[P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \right]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \left[P_1, P_2, \dots, \hat{P}_k, \dots, P_{n+1} \right]}.$$

İspat: Teorem 5.1.3 ve Teorem 5.1.6 dan açıktır.

Sonuç 5.1.8.

$${}^n \text{sin}(e_i, e_1 e_2 \dots \hat{e}_i \dots e_{n+1}) = {}^n \text{pol sin}(P_1 P_2 \dots \hat{P}_i \dots P_{n+1}) = \left[P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1} \right].$$

İspat: Teorem 5.1.4 ve Teorem 5.1.5 den açıktır.

Teorem 5.1.9. $\Omega_s = \langle P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$ küresel simpleksinin $(P_s, P_{s+1} \dots P_{n+1} P_1 \dots P_{s-1})$ tepesini P_s ile, P_s tepesine zıt $(n-1)$ -yüzü F_s ile gösterilirse;

$$\frac{{}^n \text{pol sin } F_1}{{}^n \text{sin } P_1} = \frac{{}^n \text{pol sin } F_2}{{}^n \text{sin } P_2} = \dots = \frac{{}^n \text{pol sin } F_s}{{}^n \text{sin } P_s} = \dots = \frac{{}^n \text{pol sin } F_{n+1}}{{}^n \text{sin } P_{n+1}}$$

olur.

İspat:

$$\begin{aligned} {}^n \text{pol sin } F_i &= {}^n \text{pol sin}(P_1 P_2 \dots \hat{P}_i \dots P_{n+1}) \\ &= \left[P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1} \right], i = 1, 2, \dots, n+1 \end{aligned} \quad [5.13]$$

olur.

$$\begin{aligned} {}^n \text{sin } P_i &= {}^n \text{sin}(P_i, P_1 P_2 \dots \hat{P}_i \dots P_{n+1}) \\ &= \frac{\left[P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \right]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \left[P_1, P_2, \dots, \hat{P}_k, \dots, P_{n+1} \right]} \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \end{aligned} \quad [5.14]$$

olduğu görülür. [5.13] ifadesi [5.14] ifadesine taraf tarafa bölünürse;

$$\frac{{}^n \text{pol sin } F_i}{{}^n \text{sin } P_i} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \left[P_1, P_2, \dots, \hat{P}_k, \dots, P_{n+1} \right]}{\left[P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \right]^{n-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

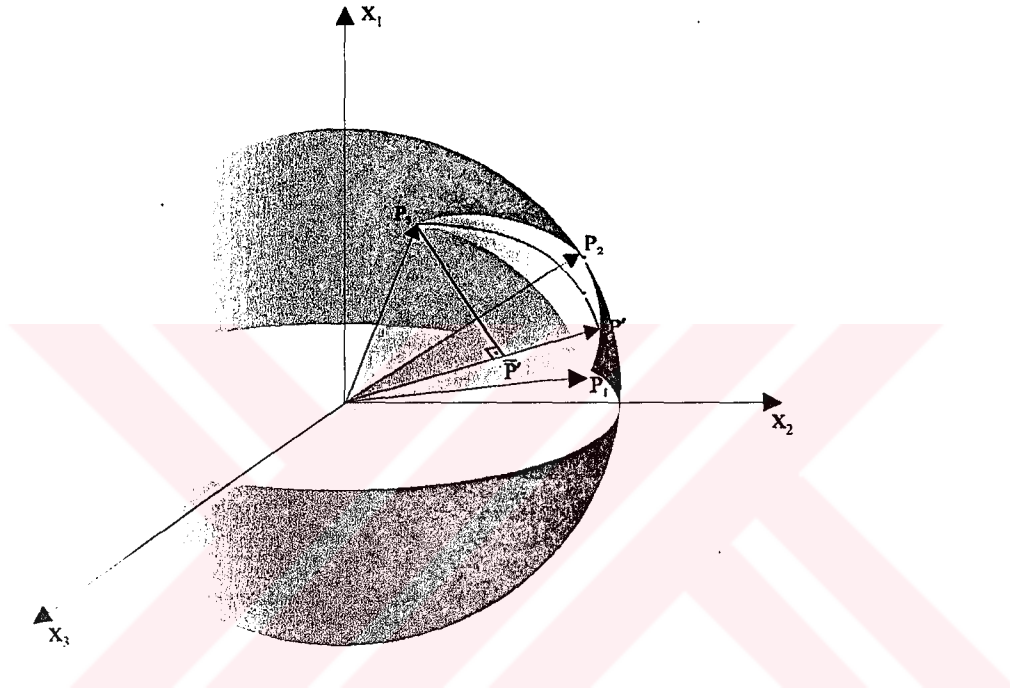
bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafı i -indisinden bağımsız olduğundan,

$$\frac{{}^n \text{pol sin } F_1}{{}^n \text{sin } P_1} = \frac{{}^n \text{pol sin } F_2}{{}^n \text{sin } P_2} = \dots = \frac{{}^n \text{pol sin } F_{n+1}}{{}^n \text{sin } P_{n+1}} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \left[P_1, P_2, \dots, \hat{P}_k, \dots, P_{n+1} \right]}{\left[P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \right]^{n-1}}$$

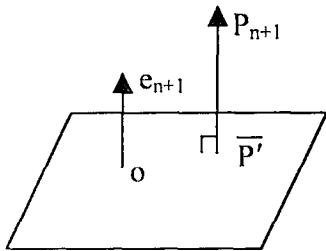
olduğu görülür.

5.2. Küresel Uzayda Uzaklıklar

5.2.1. Küresel Uzayda Bir Noktanın Küresel Hiperdüzleme Olan Uzaklığı



Şekil 5.3. Bir noktanın küresel hiperdüzleme küresel uzaklığı



$\vec{e}_i$, ($i = 1, 2, \dots, n+1$) ler birim normal vektörler ve $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = 1$ olmak üzere;

$$\overrightarrow{P_{n+1}P'} = \lambda \vec{e}_{n+1}$$

[5.15]

yazılabilir. [5.15] eşitliğinin her iki yanını $\overrightarrow{e_{n+1}}$ ile iç çarpıma tabii tutulursa;

$$\begin{aligned}\lambda &= \langle \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP_{n+1}}, \overrightarrow{e_{n+1}} \rangle \\ &= - \langle \overrightarrow{OP_{n+1}}, \overrightarrow{e_{n+1}} \rangle\end{aligned}\quad [5.16]$$

bulunur. [5.16] ifadesinde bulunan λ değeri [5.15] de yerine yazılıp düzenlenirse;

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_{n+1}} - \langle \overrightarrow{OP_{n+1}}, \overrightarrow{e_{n+1}} \rangle \overrightarrow{e_{n+1}}$$

olur. Burada $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}, P' \in S^n$ dır. $c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

$$\overrightarrow{OP'} = c \cdot \overrightarrow{OP'} \quad [5.17]$$

yazılabilir(21). $P' \in S^n$ olduğundan

$$\langle \overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{OP'} \rangle = 1.$$

Buradan;

$$c^2 \langle \overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{OP'} \rangle = 1$$

ve

$$c = \frac{1}{\sqrt{\langle \overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{OP'} \rangle}}$$

bulunur.

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_{n+1}} - \langle \overrightarrow{OP_{n+1}}, \overrightarrow{e_{n+1}} \rangle \overrightarrow{e_{n+1}}$$

ifadesi göz önüne alınarak;

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{OP'} \rangle &= \langle \overrightarrow{OP_{n+1}} - \langle \overrightarrow{OP_{n+1}}, \overrightarrow{e_{n+1}} \rangle \overrightarrow{e_{n+1}}, \overrightarrow{OP_{n+1}} - \langle \overrightarrow{OP_{n+1}}, \overrightarrow{e_{n+1}} \rangle \overrightarrow{e_{n+1}} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{OP_{n+1}}, \overrightarrow{OP_{n+1}} \rangle - \langle \overrightarrow{OP_{n+1}}, \overrightarrow{e_{n+1}} \rangle^2 \\ &= 1 - \langle \overrightarrow{OP_{n+1}}, \overrightarrow{e_{n+1}} \rangle^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\overrightarrow{e_i} = e_i$ ve $\overrightarrow{OP_i} = P_i$, $i = 1, \dots, n+1$ alınarak, bulunan bu değer [5.17] de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{\sqrt{\langle P', P' \rangle}} (P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2}} (P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1}) \end{aligned} \quad [5.18]$$

bulunur. [5.18] ifadesinin her iki tarafı P_{n+1} ile iç çarpıma tabii tutulursa;

$$\langle P_{n+1}, P' \rangle = \sqrt{1 - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2} \quad [5.19]$$

olur. [5.19] ifadesi düzenlenirse;

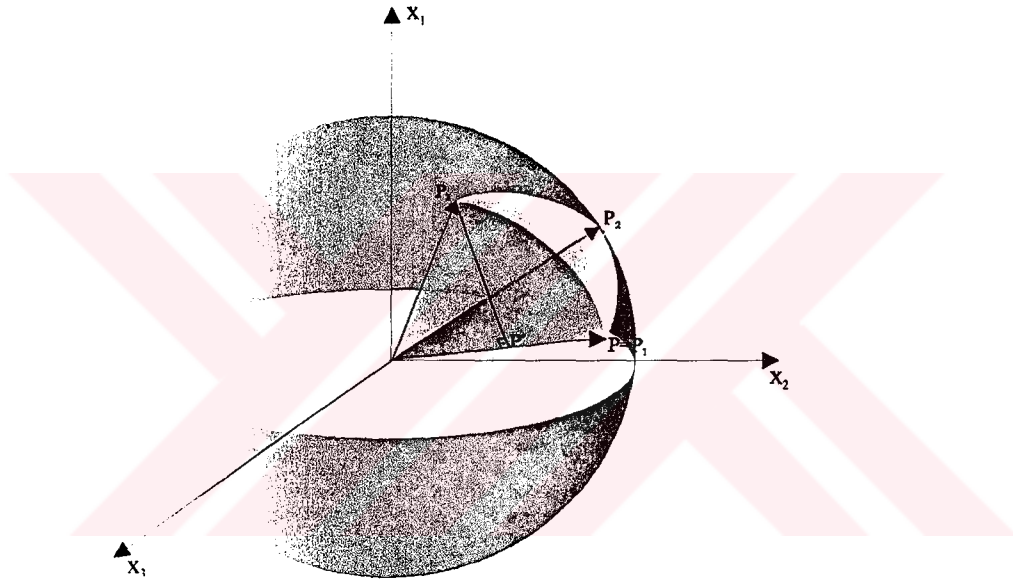
$$\begin{aligned} \langle P_{n+1}, P' \rangle^2 &= 1 - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 \\ \cos^2 \eta(P_{n+1}, P') &= 1 - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 \\ \sin \eta(P_{n+1}, P') &= |\langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle| \end{aligned} \quad [5.20]$$

elde edilir. [5.20] ifadesinde $P' \in H_{e_{n+1}}$ olduğundan,

$$\sin \eta(P_{n+1}, H_{e_{n+1}}) = |\langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle|$$

bulunur ki bu, küresel uzayda bir P_{n+1} noktasının $H_{e_{n+1}}$ hiperdüzlemine olan uzaklığıdır.

5.2.2. Küresel Uzayda Bir Noktanın Küresel (n-2)-Düzleme Olan Uzaklığı



Şekil 5.4. Bir noktanın küresel (n-2)-düzleme küresel uzaklığı

$$\overrightarrow{P_{n+1}P} = \lambda_1 e_{n+1} + \lambda_2 e'_n \quad [5.21]$$

şeklindedir. Burada;

$$\langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle = 1, \quad \langle e'_n, e'_n \rangle = 1$$

ve

$$e'_n = \frac{e_n - \langle e_{n+1}, e_n \rangle e_{n+1}}{\|e_n - \langle e_{n+1}, e_n \rangle e_{n+1}\|}.$$

$$\bar{P} - P_{n+1} = \lambda_1 e_{n+1} + \lambda_2 e'_n$$

çşitliğınden

$$- \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle = \lambda_1 \quad [5.22]$$

$$- \langle P_{n+1}, e'_n \rangle = \lambda_2 \quad [5.23]$$

yazılabilir. [5.22]ve [5.23] ifadeleri [5.21] de yerine yazılırsa;

$$\bar{P} = P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1} - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle e'_n \quad [5.24]$$

bulunur. $c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

$$O\bar{P} = c.O\vec{P}$$

olduğundan,

$$\langle P, P \rangle = 1 \text{ ve } c^2 \cdot \langle \bar{P}, \bar{P} \rangle = 1$$

olur. [5.24] ifadesinden,

$$\begin{aligned} \langle \bar{P}, \bar{P} \rangle &= \langle P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1} - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle e'_n, P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1} - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle e'_n \rangle \\ &= \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2 \\ &= 1 - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2 \end{aligned} \quad [5.25]$$

bulunur. $c \in \mathbb{R}^+$ olduğundan

$$c = \frac{1}{\sqrt{\langle P, \bar{P} \rangle}}$$

ve

$$\vec{OP} = \frac{1}{\sqrt{\langle \bar{P}, P \rangle}} \cdot \vec{OP} \quad [5.26]$$

olur. [5.25] ifadesi [5.26]de kullanılırsa;

$$P = \frac{1}{\sqrt{1 - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2}} (P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1} - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle e'_n)$$

elde edilir. Buradan;

$$\langle P_{n+1}, P \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2}} (1 - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2) \quad [5.27]$$

şeklinde bulunur. [5.27] ifadesi düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \langle P_{n+1}, P \rangle^2 &= 1 - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2 \\ \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 + \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2 &= 1 - \langle P_{n+1}, P \rangle^2 \\ &= 1 - \cos^2 \eta(P_{n+1}, P) \\ &= \sin^2 \eta(P_{n+1}, P) \end{aligned} \quad [5.28]$$

[5.28] ifadesi düzenlenirse;

$$\sin \eta(P_{n+1}, P) = \sqrt{\langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 + \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2}$$

bulunur. $P \in \Pi_{c_{n+1}, c_n}$ olduğundan;

$$\sin \eta(P_{n+1}, H_{e_{n+1}, e_n}) = \sqrt{\langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 + \langle P_{n+1}, e_n \rangle^2}$$

elde edilir.

Tanım 5.2.1. $\Omega_S = \langle P_1, \dots, P_{n+1} \rangle$ küresel simpleksinin, $i \neq j$ olmak üzere; $\Lambda_i^n = \langle P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1} \rangle$ (n-1)-yüzü ile $\Delta_j^n = \langle P_1, P_2, \dots, \hat{P}_j, \dots, P_{n+1} \rangle$ (n-1)-yüzünün arakesiti olarak belirlenen $\Delta_{i,j}^n = \langle P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, \hat{P}_j, \dots, P_{n+1} \rangle$ (n-2)-yüzündeki açığa dihedral açı denir. $\Omega_E = \langle 0, P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$ (n+1)-Öklidyen simpleksinin $\Omega_i = \langle 0, P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1} \rangle$ yüzü ile $\Omega_j = \langle 0, P_1, P_2, \dots, \hat{P}_j, \dots, P_{n+1} \rangle$ yüzü arasındaki dihedral açı olarak tanımlanır ve θ_{ij} ile gösterilir. Buna göre;

$$Sp\{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \widehat{\overrightarrow{OP_i}}, \dots, \overrightarrow{OP_{n+1}}\} = Sp\{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{V_{P_1}}, \dots, \widehat{\overrightarrow{V_{P_i}}}, \dots, \overrightarrow{V_{P_{n+1}}}\}$$

ve

$$Sp\{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \widehat{\overrightarrow{OP_j}}, \dots, \overrightarrow{OP_{n+1}}\} = Sp\{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{V_{P_2}}, \dots, \widehat{\overrightarrow{V_{P_j}}}, \dots, \overrightarrow{V_{P_{n+1}}}\}$$

olduğundan, θ_{ij} dihedral açısı; $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{V_{P_2}}, \dots, \widehat{\overrightarrow{V_{P_i}}}, \dots, \overrightarrow{V_{P_{n+1}}}$ veya $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \widehat{\overrightarrow{OP_i}}, \dots, \overrightarrow{OP_{n+1}}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüz ile $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{V_{P_2}}, \dots, \widehat{\overrightarrow{V_{P_j}}}, \dots, \overrightarrow{V_{P_{n+1}}}$ veya $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \widehat{\overrightarrow{OP_j}}, \dots, \overrightarrow{OP_{n+1}}$ vektörleri üzerine kurulan iki (n-1) paralel yüz arasındaki açı olarak tanımlanabilir.

Teorem 5.2.2. $\Omega_S = \langle P_1, \dots, P_{n+1} \rangle$, S^n küresel uzayında bir n-simplex olsun. P_i tepesindeki n-dihedral açının sinüsü,

$${}^n \sin(P_i, V_{P_1} \dots \hat{V}_{P_i} \dots V_{P_{n+1}}) = \frac{[P_i, V_{P_1}, \dots, \hat{V}_{P_i}, \dots, V_{P_{n+1}}]^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n+1} [V_{P_1}, \dots, \hat{V}_{P_k}, \dots, V_{P_i}, \dots, V_{P_{n+1}}]} \quad [5.29]$$

Burada $i = 1, 2, \dots, n+1$ olmak üzere; $\vec{V}_{P_i}$ vektörleri P_i tepesinden $P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}$ tepelerine doğru çizilen teğet vektörlerdir.

İspat: Lemma 5.1.1 ve Lemma 5.1.2 den dolayı $P_i, V_{P_1}, \dots, \hat{V}_{P_i}, \dots, V_{P_{n+1}}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzün hacmi ile $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzün hacmi eşittir. $P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \in S^n$ olmak üzere, S^n de bir küresel simpleks, $\Omega_S = \langle P_1, \dots, P_{n+1} \rangle$ olsun. $i = 1, 2, \dots, n+1$ için $\vec{V}_{P_i}$ ler de, P_i tepesinden, $P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}$ tepeleri doğrultusunda ki teğet vektörler olmak üzere genelliği bozmadan P_1 tepesinde ki tepe açısını $(P_1, V_{P_2} V_{P_3} \dots V_{P_{n+1}})$ ile gösterelim. Lemma 5.1.1 ve (25) den;

$$\begin{aligned} \text{Gram}(P_{n+1}, P_1, V_{P_2}, \dots, V_{P_n}) &= \text{Gram}(\overrightarrow{P_{n+1}P'}, P_1, V_{P_2}, \dots, V_{P_n}) \\ &= \|\overrightarrow{P_{n+1}P'}\| \text{Gram}(P_1, V_{P_2}, \dots, V_{P_n}) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$\|\overrightarrow{P_{n+1}P'}\| = \frac{\text{Gram}(P_{n+1}, P_1, V_{P_2}, \dots, V_{P_n})}{\text{Gram}(P_1, V_{P_2}, \dots, V_{P_n})}$$

elde edilir. Yine Lemma 5.1.1 den;

$$\|\overrightarrow{P_{n+1}P'}\| = \frac{\text{Gram}(P_1, \dots, P_{n+1})}{\text{Gram}(P_1, \dots, P_n)} \quad [5.30]$$

olur. Lemma 5.1.2 den ;

$$\begin{aligned}
Gram(P_{n+1}, P_1, V_{p_2}, \dots, \hat{V}_{p_1}, \dots, V_{p_n}) &= Gram(\overrightarrow{P_{n+1}P}, P_1, V_{p_2}, \dots, \hat{V}_{p_1}, \dots, V_{p_n}) \\
&= \|\overrightarrow{P_{n+1}P}\| Gram(P_1, V_{p_2}, \dots, V_{p_1}, \dots, V_{p_n})
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade düzenlenirse ;

$$\|\overrightarrow{P_{n+1}P}\| = \frac{Gram(P_{n+1}, P_1, V_{p_2}, \dots, \hat{V}_{p_1}, \dots, V_{p_n})}{Gram(P_1, V_{p_2}, \dots, \hat{V}_{p_1}, \dots, V_{p_n})}$$

ve yahut da ,

$$\|\overrightarrow{P_{n+1}P}\| = \frac{Gram(P_{n+1}, P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n)}{Gram(P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n)} \quad [5.31]$$

bulunur. [5.30]ve [5.31] ifadelerinde,

$$\|\overrightarrow{P_{n+1}P'}\| = h' \text{ ve } \|\overrightarrow{P_{n+1}P}\| = h \text{ olarak alınırsa}$$

$$\sin \theta_{i,(n+1)} = \frac{h'}{h}$$

olduğundan;

$$\sin \theta_{i,(n+1)} = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}][P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n]}{[P_1, P_2, \dots, P_n][P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}]} \quad [5.32]$$

şeklinde olur. [5.32] ifadesini,

$$|[P_1, \dots, P_{n+1}]| = \frac{|[P_1, \dots, P_n]| |[P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}]|}{|[P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n]|} \sin \theta_{i,(n+1)}$$

şeklinde düzenleyerek, (n-1) defa çarpım alınırsa;

$$\begin{aligned} |[P_1, \dots, P_{n+1}]|^{n-1} &= \frac{|[P_1, \dots, P_n]|^{n-1} \prod_{i=2}^n |[P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}]|}{\prod_{i=2}^n |[P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n]|} \prod_{i=2}^n \sin \theta_{i,(n+1)} \\ &= \frac{|[P_1, \dots, P_n]|^{n-2} \prod_{i=2}^{n+1} |[P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}]|}{\prod_{i=2}^n |[P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n]|} \prod_{i=2}^n \sin \theta_{i,(n+1)} \quad [5.33] \end{aligned}$$

elde edilir. [5.33]de elde edilen ifadeyi,

$$\frac{|[P_1, \dots, P_{n+1}]|^{n-1}}{\prod_{i=2}^{n+1} |[P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}]|} = \frac{|[P_1, \dots, P_n]|^{n-2}}{\prod_{i=2}^n |[P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n]|} \prod_{i=2}^n \sin \theta_{i,(n+1)} \quad [5.34]$$

şeklinde düzenlersek, bu eşitliğin sol tarafı çarpım formülü göz önüne alındığı zaman küresel simpleks için n-boyutlu sinüse karşılık gelir. Yine çarpım formülü göz önüne alındığında sağ taraftaki birinci terim (n-1)-boyutlu sinüse karşılık gelir. O halde [5.34] ifadesinden;

$${}^n \sin(P_1, V_{p_1}, \dots, V_{p_{n+1}}) = {}^{n-1} \sin(P_1, V_{p_2}, \dots, V_{p_n}) \prod_{i=2}^n \sin \theta_{i,(n+1)} \quad [5.35]$$

elde edilir. Şimdi [5.35] ifadesinin sağ yanını göz önüne alalım. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
Sin0_{2,(n+1)} &= \frac{[P_1, \dots, P_{n+1}]}{[P_1, \dots, P_n]} \frac{[P_1, P_3, \dots, P_n]}{[P_1, P_3, \dots, P_{n+1}]} \\
Sin0_{3,(n+1)} &= \frac{[P_1, \dots, P_{n+1}]}{[P_1, \dots, P_n]} \frac{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_n]}{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_{n+1}]} \\
&\vdots \\
Sin0_{n-1,(n+1)} &= \frac{[P_1, \dots, P_{n+1}]}{[P_1, \dots, P_n]} \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_n]}{[P_1, \dots, P_{n-2}, P_n, P_{n+1}]} \\
Sin0_{n,(n+1)} &= \frac{[P_1, \dots, P_{n+1}]}{[P_1, \dots, P_n]} \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}]}{[P_1, \dots, P_{n-1}, P_{n+1}]}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

olur. [5.36] ifadesi taraf tarafa çarpılırsa;

$$\begin{aligned}
\prod_{i=2}^n Sin0_{i,(n+1)} &= \frac{[P_1, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}{[P_1, \dots, P_n]^{n-1}} \frac{[P_1, P_3, \dots, P_n]}{[P_1, P_3, \dots, P_{n+1}]} \frac{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_n]}{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_{n+1}]} \dots \\
&\dots \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_n]}{[P_1, \dots, P_{n-2}, P_n, P_{n+1}]} \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}]}{[P_1, \dots, P_{n-1}, P_{n+1}]}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
Sin0_{2,n} &= \frac{[P_1, \dots, P_n]}{[P_1, \dots, P_{n-1}]} \frac{[P_1, P_3, \dots, P_{n-1}]}{[P_1, P_3, \dots, P_n]} \\
Sin0_{3,n} &= \frac{[P_1, \dots, P_n]}{[P_1, \dots, P_{n-1}]} \frac{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_{n-1}]}{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_n]} \\
&\vdots \\
Sin0_{n-2,n} &= \frac{[P_1, \dots, P_n]}{[P_1, \dots, P_{n-1}]} \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-3}, P_{n-1}]}{[P_1, P_2, \dots, P_{n-3}, P_{n-1}, P_n]} \\
Sin0_{n-1,n} &= \frac{[P_1, \dots, P_n]}{[P_1, \dots, P_{n-1}]} \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-2}]}{[P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_n]}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

bulunur. [5.38]ifadesi taraf tarafa çarpılırsa ;

$$\prod_{i=2}^{n-1} \sin \theta_{i,n} = \frac{[P_1, \dots, P_n]^{n-2}}{[P_1, \dots, P_{n-1}]^{n-2}} \frac{[P_1, P_3, \dots, P_{n-1}]}{[P_1, P_3, \dots, P_n]} \frac{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_{n-1}]}{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_n]} \dots$$

$$\dots \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-3}, P_{n-1}]}{[P_1, \dots, P_{n-3}, P_{n-1}, P_n]} \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-2}]}{[P_1, \dots, P_{n-2}, P_n]} \quad [5.39]$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse;

$$\sin \theta_{2,4} = \frac{[P_1, P_2, P_3, P_4]}{[P_1, P_2, P_3]} \frac{[P_1, P_3]}{[P_1, P_3, P_4]} \quad [5.40]$$

$$\sin \theta_{3,4} = \frac{[P_1, P_2, P_3, P_4]}{[P_1, P_2, P_3]} \frac{[P_1, P_2]}{[P_1, P_2, P_4]} \quad [5.41]$$

ve

$$\sin \theta_{2,3} = \frac{[P_1, P_2, P_3]}{[P_1, P_2]} \frac{|P_1|}{[P_1, P_3]} \quad [5.42]$$

bulunur. [5.37], [5.39], [5.40], [5.41], [5.42]da elde edilen değerler taraf tarafa çarpılıp düzenlenirse ;

$$\prod_{i=2}^n \sin \theta_{i,(n+1)} \dots \prod_{i=2}^4 \sin \theta_{i,4} \prod_{i=2}^3 \sin \theta_{i,3} = \frac{[P_1, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}{[P_1, P_3, \dots, P_{n+1}][P_1, P_2, P_4, \dots, P_{n+1}] \dots [P_1, P_2, \dots, P_n]}$$

$$= {}^n \sin(P_1, P_2 \dots P_{n+1})$$

$$= {}^n \sin(P_1, V_{P_2} \dots V_{P_{n+1}})$$

elde edilir.

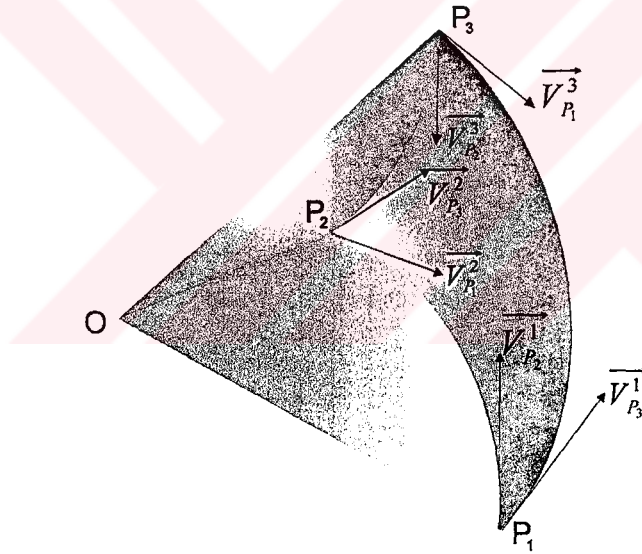
Sonuç 5.2.3. $P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \in S^n$ olmak üzere, $\Omega_S = \langle P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$, S^n de bir küresel simpleks olsun. $i, j = 1, 2, \dots, n+1$ için $\overrightarrow{V_{P_j}^i}$ ler de, P_i tepesinden, P_j tepeleri doğrultusunda ki teğet vektörler olmak üzere ;

$$Gram(P_1, P_2, \dots, P_{n+1}) = Gram(P_1, V_{P_1}^1, V_{P_2}^1, \dots, V_{P_{n+1}}^1), l = 1, 2, \dots, n+1$$

olur.

İspat: Lemma 5.1.1 den açıktır.

Örnek 5.2.4.



Şekil 5.5. S^2 de Küresel 2-simpleksin tepe açıları

$P_1, P_2, P_3 \in S^n$ olmak üzere $\overrightarrow{V_{P_j}^i}$ ($i, j = 1, 2, 3$) için $\overrightarrow{V_{P_j}^i} = P_j - \langle P_i, P_j \rangle P_i$ şeklinde tanımlı teğet vektörleri için;

$$Gram(P_1, P_2, P_3) = \det \begin{pmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle & \langle P_1, P_2 \rangle & \langle P_1, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_2 \rangle & \langle P_2, P_2 \rangle & \langle P_2, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_3 \rangle & \langle P_3, P_2 \rangle & \langle P_3, P_3 \rangle \end{pmatrix}^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} 1 & \langle P_1, P_2 \rangle & \langle P_1, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_2 \rangle & 1 & \langle P_2, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_3 \rangle & \langle P_2, P_3 \rangle & 1 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \\
&= (1 - \langle P_1, P_2 \rangle^2 - \langle P_1, P_3 \rangle^2 - \langle P_2, P_3 \rangle^2 + 2\langle P_1, P_2 \rangle \langle P_1, P_3 \rangle \langle P_2, P_3 \rangle)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

şeklindedir. $P_1, P_2, P_3 \in S^2$ olduğundan;

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \cos \theta_{12},$$

$$\langle P_1, P_3 \rangle = \cos \theta_{13},$$

$$\langle P_2, P_3 \rangle = \cos \theta_{23}$$

değerleri yukarıda yerlerine yazılırsa;

$$Gram(P_1, P_2, P_3) = (1 - \cos^2 \theta_{12} - \cos^2 \theta_{13} - \cos^2 \theta_{23} + 2 \cos \theta_{12} \cos \theta_{13} \cos \theta_{23})^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
Gram(P_1, V_{P_2}^1, V_{P_3}^1)^2 &= \det \begin{pmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle & \langle P_1, V_{P_2}^1 \rangle & \langle P_1, V_{P_3}^1 \rangle \\ \langle P_1, V_{P_2}^1 \rangle & \langle V_{P_2}^1, V_{P_2}^1 \rangle & \langle V_{P_2}^1, V_{P_3}^1 \rangle \\ \langle P_1, V_{P_3}^1 \rangle & \langle V_{P_3}^1, V_{P_2}^1 \rangle & \langle V_{P_3}^1, V_{P_3}^1 \rangle \end{pmatrix} \\
&= (1 - \langle P_1, P_2 \rangle^2)(1 - \langle P_1, P_3 \rangle^2) - \langle V_{P_2}^1, V_{P_3}^1 \rangle^2 \\
&= 1 - \langle P_1, P_2 \rangle^2 - \langle P_1, P_3 \rangle^2 - \langle P_1, P_2 \rangle^2 \langle P_1, P_3 \rangle^2 \\
&\quad - (\langle P_2, P_3 \rangle - \langle P_1, P_3 \rangle \langle P_1, P_2 \rangle)^2 \\
&= 1 - \langle P_1, P_2 \rangle^2 - \langle P_1, P_3 \rangle^2 - \langle P_2, P_3 \rangle^2 \\
&\quad + 2 \langle P_1, P_2 \rangle \langle P_1, P_3 \rangle \langle P_2, P_3 \rangle
\end{aligned}$$

olur. Buradan;

$$Gram(P_1, V_{P_2}^1, V_{P_3}^1) = (1 - \cos^2 \theta_{12} - \cos^2 \theta_{13} - \cos^2 \theta_{23} + 2 \cos \theta_{12} \cos \theta_{13} \cos \theta_{23})^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$Gram(P_2, V_{P_1}^2, V_{P_3}^2) = (1 - \cos^2 \theta_{12} - \cos^2 \theta_{13} - \cos^2 \theta_{23} + 2 \cos \theta_{12} \cos \theta_{13} \cos^2 \theta_{23})^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$Gram(P_3, V_{P_1}^3, V_{P_2}^3) = (1 - \cos^2 \theta_{12} - \cos^2 \theta_{13} - \cos^2 \theta_{23} + 2 \cos \theta_{12} \cos \theta_{13} \cos^2 \theta_{23})^{\frac{1}{2}}$$

olur. O halde

$$Gram(P_1, P_2, P_3) = Gram(P_3, V_{P_1}^3, V_{P_2}^3) = Gram(P_2, V_{P_1}^2, V_{P_3}^2) = Gram(P_1, V_{P_2}^1, V_{P_3}^1)$$

olduğu görülür.



6 HİPERBOLİK n-SİMPLEKSLER VE n-BOYUTLU SİNÜS

6.1. Hiperbolik n-Simpleksler

$\overrightarrow{OP_i} = P_i, i = 1, 2, \dots, n+1$ olmak üzere $P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \in H^n \subset R_1^{n+1}$ için P_i ler H^n nin elemanları olduğundan (pozitif) zaman benzeri (timelike) vektörlerdir ve $\langle P_i, P_i \rangle < 0$ dir. H^n de $(n+1)$ tepe noktalı, $\Omega_H = \langle P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$ kümesi genel durumludur ve konvekslik bölgesidir. Ω_H ya H^n de n -boyutlu bir *n-simpleks* denir(19). $V_{P_j}^i = P_j + \langle P_i, P_j \rangle P_i, i, j = 1, 2, \dots, n+1$ vektörleri P_i tepesinde ki P_j doğrultusundaki teğet vektörlerdir(21). Bu teğet vektörler uzay benzeri (spacelike) vektörlerdir. Bu teğet vektörler birim hale getirilirse ve S_1^n de-Sitter uzayının elemanları olurlar.

Tanım 6.1.1. H^n hiperbolik uzayında herhangi iki nokta arasındaki hiperbolik uzunluk $P_i, P_j \in H^n$ olmak üzere $\Phi_{ij} = \arccos h(-\langle P_i, P_j \rangle_L)$ şeklinde tanımlı reel sayıdır(19,21,33).

Tanım 6.1.2(Dihedral Açısı). Ω_H, H^n hiperbolik uzayında $P_1, \dots, P_{n+1}$ tepeli bir n -simpleks olsun. Ω_H nin P_i ve P_j tepelerine zıt ij -yinci yüzlerinin arakesitinin eş boyutu 2 dir. Bu iki yüz arasındaki açıya dihedral açı denir ve θ_{ij} ile gösterilir(18,33)

Tanım 6.1.3 (Gram Matrisi). $G = [-\cos \theta_{ij}]$ simetrik matrisine Ω_H simpleksinin Gram Matrisi denir(21,33)

Tanım 6.1.4. (Ayrıt Matrisi). Ω_H nin herhangi iki P_i, P_j tepesi arasındaki uzaklık $\Phi_{ij} = \arccos h(-\langle P_i, P_j \rangle)$ şeklindedir ve Ω_H nin ayrıt uzunluğu olarak tanımlanır(34). $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ tepeli Ω_H hiperbolik n -simpleksinin ayrıt matrisi $M = [\langle P_i, P_j \rangle_L] = [-\cosh \langle P_i, P_j \rangle_L]$ şeklinde tanımlanır(34).

Lemma 6.1.5. H^n de n_i ve n_j normallerine sahip H_{n_i} ve H_{n_j} düzlemlerinin kesişmesi için gerek ve yeter şart $|\langle n_i, n_j \rangle| < 1$ olmasıdır.

İspat: (21.33) den görülebilir.

Tanım 6.1.6. R_1^{n+1} (n+1)-boyutlu Lorentz uzayının n_i normalli hiperdüzlemi H_{n_i} olsun. $H_{n_i} \cap H^n$ arakesitine H^n hiperbolik uzayının n_i normalli (n-1)-boyutlu düzlemi denir(19)

Tanım 6.1.7. R_1^{n+1} uzayının $H_{n_1}, H_{n_2}, \dots, H_{n_k}$ gibi hiperdüzlemleri için $(H_{n_1} \cap H_{n_2} \cap \dots \cap H_{n_k}) \cap H^n$ arakesitine H^n hiperbolik uzayının (n-k)-boyutlu düzlemi denir(19).

Tanım 6.1.7. H^n hiperbolik uzayında Ω_H hiperbolik simpleksi için P_i noktasındaki tepe açısı $(P_i, V_{P_1}^i \dots \hat{V}_{P_i}^i \dots V_{P_{n+1}}^i)$ şeklinde tanımlanır. Burada $V_{P_j}^i$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$) vektörleri P_i tepe noktasından P_j tepe noktalarına doğru çizilen teğet vektörlerdir.

Lemma 6.1.8: R_1^{n+1} Lorentz uzayı olmak üzere

$$S_\ell : R_1^{n+1} \rightarrow R_1^{n+1}$$

$$(P_k) \rightarrow S_\ell(P_k) = P_k + \langle P_\ell, P_k \rangle_L P_\ell \quad (k, \ell = 1, \dots, n+1)$$

lincer dönüşümü için;

$$\text{Gram}(P_\ell, S_\ell(P_1), \dots, S_\ell(\hat{P}_\ell), \dots, S_\ell(P_{n+1})) = \text{Gram}(P_1, \dots, P_{n+1}).$$

olur.

İspat: Lemma 5.1.1 dekinde benzer şekilde ispatlanır.

Lemma 6.1.9. $S_\ell : R_1^{n+1} \rightarrow R_1^{n+1}$

$$S_\ell(P_k) = P_k + \langle P_\ell, P_k \rangle_L P_\ell \quad (k, l=1, \dots, n+1)$$

lineer dönüşümü için,

$$\text{Gram}(P_\ell, S_\ell(P_1), \dots, S_\ell(\hat{P}_\ell), \dots, S_\ell(\hat{P}_1), \dots, S_\ell(P_{n+1})) = \text{Gram}(P_1, \dots, \hat{P}_1, \dots, P_{n+1}).$$

olur.

İspat: Lemma 5.1.2 dekinde benzer şekilde ispatlanır.

Lemma 6.1.10. $u, v \in R_1^{n+1}$ olmak üzere;

$$\langle u, v \rangle_L = \langle J(u), v \rangle_E$$

çiftliği vardır.

İspat: (19)' dan görülebilir.

Lemma 6.1.11. $u \in H^n \subset R_1^{n+1}$ için $u^\perp = \{u' \in S_1^n \mid \langle u, u' \rangle = 0\}$ spacelike hiperdüzlem olmak üzere; $u, v \in H^n \subset R_1^{n+1}$ timelike vektörleri için $(u^\perp \cap v^\perp) \cap S_1^n \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $|\langle u, v \rangle| < 1$ veya $|\langle u, v \rangle| \geq 1$ olmasıdır.

- i) $u^\perp \cap v^\perp$ timelike ise, $(u^\perp \cap v^\perp) \cap S_1^n$ altuzayı S_1^n de Sitter uzayında (n-2)-boyutlu spacelike düzlemdir $\Leftrightarrow |\langle u, v \rangle| < 1$ dir.
- ii) $u^\perp \cap v^\perp$ spacelike ise, $(u^\perp \cap v^\perp) \cap S_1^n$ altuzayı S_1^n de Sitter uzayında (n-2)-boyutlu timelike düzlemdir $\Leftrightarrow |\langle u, v \rangle| \geq 1$

İspat: $u, v \in H^n \subset R_1^{n+1}$ ve $u^\perp, v^\perp$ spacelike altuzaylar olsun. $(u^\perp \cap v^\perp) \cap S_1^k \neq \emptyset$ ise $u^\perp \cap v^\perp = (\text{Sp}\{u\} + \text{Sp}\{v\})^\perp$ olur. Buradan;

$$(u^\perp \cap v^\perp)^\perp = \text{Sp}\{u\} + \text{Sp}\{v\}$$

olduğundan $\alpha \in (u^\perp \cap v^\perp)^\perp$ ise $\alpha = au + bv$ şeklinde yazılabilir.

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = -a^2 + 2\langle u, v \rangle ab - b^2$$

ifadesinden,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi için,

$\Delta_{11} = -1$ ve $\Delta_{22} = 1 - \langle u, v \rangle^2$ olur. Buradan;

$\Delta_{11} = (-1)^1(-1) = 1 > 0$ ve $\Delta_{22} = (-1)^2(1 - \langle u, v \rangle^2) = 1 - \langle u, v \rangle^2 > 0$ ise $|\langle u, v \rangle| < 1$ olur ve $\text{Sp}\{u\} + \text{Sp}\{v\}$ iç çarpım uzayı uzay benzeri(spacelike) alt uzay olur.

Tersine, $\text{Sp}\{u\} + \text{Sp}\{v\}$ uzay benzeri(spacelike) alt uzay ise;

$$(u^\perp \cap v^\perp) \cap S_1^n = (\text{Sp}\{u\} + \text{Sp}\{v\})^\perp \cap S_1^n \neq \emptyset$$

olur.

$\Delta_{11} = -1 < 0$, $\Delta_{22} = 1 - \langle u, v \rangle^2 \leq 0$ ise $|\langle u, v \rangle| \geq 1$ olur. Bu ise $\text{Sp}\{u\} + \text{Sp}\{v\}$ nin indefinit alt uzay, yani; zaman benzeri (timelike) altuzay olmasıdır.

Tersine $\text{Sp}\{u\} + \text{Sp}\{v\}$ timelike altuzay ise $(u^\perp \cap v^\perp) \cap S_1^n \neq \emptyset$ olur.

6.1.1 Hiperbolik n-simpleksler için tepe açıları ve n-boyutlu sinüs

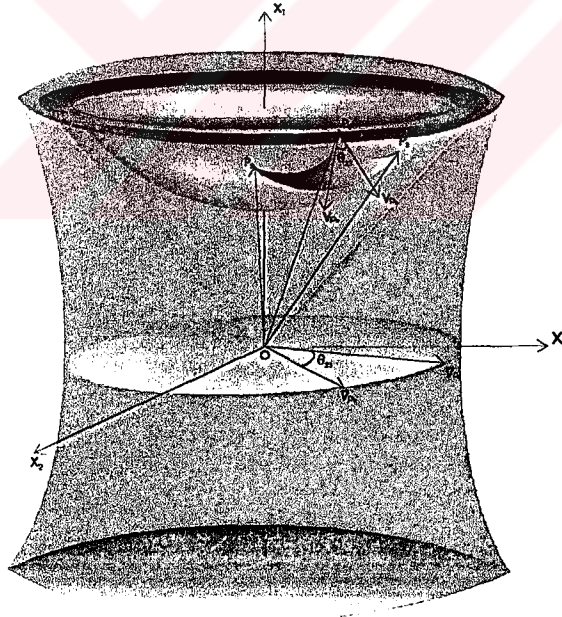
Teorem 6.1.12. $\Omega_H = \langle P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$ hiperbolik simpleks olsun.

$V_{P_i}^i = P_j + \langle P_i, P_j \rangle P_i$, $i, j = 1, 2, \dots, n+1$ vektörleri P_i tepesinde ki P_j doğrultusundaki teğet vektörler olmak üzere P_i tepesindeki n-hedral açının sinüsü ;

$${}^n \sin(P_i, P_1 P_2 \dots \hat{P}_i \dots P_{n+1}) = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_k, \dots, P_{n+1}]}$$

şeklindedir.

İspat:



Şekil 6.1. Hiperbolik 2-simpleksin tepe açısı

$$N_i = (-1)^{n+1-i} (V_{P_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{P_i}^i \times \dots \times V_{P_{n+1}}^i)_L$$

$$N_k = (-1)^{n+1-k} (V_{P_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{P_k}^i \times \dots \times P_i \times \dots \times V_{P_{n+1}}^i)_L$$

vektörleri, P_i ve $V_{P_i}^i$ ($i, k = 1, 2, \dots, n+1$) teğet vektörüne sahip ayrıtlara zıt $(n-1)$ -yüzlerin normalleri olmak üzere,

$$P_i = e_i = \frac{N_i}{\|N_i\|_L}$$

ve

$$\begin{aligned} e_k &= (-1)^{n+1-k} \frac{V_{P_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{P_k}^i \times \dots \times P_i \times \dots \times V_{P_{n+1}}^i}{\|V_{P_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{P_k}^i \times \dots \times P_i \times \dots \times V_{P_{n+1}}^i\|_L} \\ &= \frac{N_k}{\|N_k\|}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1 \end{aligned}$$

vektörleri de birim normallerdir ve de Sitter uzayın elemanlarıdır. Lemma 6.1.10 göz önüne alınırsa;

$$\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{P_1}^i & \dots & P_i & \dots & V_{P_{n+1}}^i \end{bmatrix} = \frac{1}{\|N_1\| \dots \|\hat{N}_i\| \dots \|N_{n+1}\|} \underbrace{\det \begin{bmatrix} V_{P_2}^i \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V_{P_{n+1}}^i \end{bmatrix} \dots \det \begin{bmatrix} V_{P_2}^i \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V_{P_{n+1}}^i \end{bmatrix}}_{n\text{-çarpım}}$$

olduğundan,

$$\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\|N_1\| \dots \|\hat{N}_i\| \dots \|N_{n+1}\|} \left(\det \begin{bmatrix} V_{P_2}^i \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V_{P_{n+1}}^i \end{bmatrix} \right)^{n-1} \quad [6.1]$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\det \left(\begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ N_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & \dots & P_i & \dots & N_{n+1} \end{bmatrix} \right) = \left(\det \begin{bmatrix} V_{P_2}^i \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V_{P_{n+1}}^i \end{bmatrix} \right)^n$$

olduğundan,

$$\det \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ N_{n+1} \end{bmatrix} = \left(\det \begin{bmatrix} V_{P_2}^i \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V_{P_{n+1}}^i \end{bmatrix} \right)^{n-1} \quad [6.2]$$

elde edilir. O halde;

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\|N_1\| \dots \|\hat{N}_i\| \dots \|N_{n+1}\|} \det \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ N_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\det[N_1 \dots P_i \dots N_{n+1}]}{\|N_1\| \dots \|\hat{N}_i\| \dots \|N_{n+1}\|}. \end{aligned} \quad [6.3]$$

[6.2], [6.3] ifadeleri ile Teorem 4.1.3 den,

$$\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{\left(\det[V_{P_1}^i \dots P_i \dots V_{P_{n+1}}^i] \right)^{n-1}}{\|N_1\| \dots \|\hat{N}_i\| \dots \|N_{n+1}\|}$$

elde edilir. Lemma 6.1.8 ve Lemma 6.1.9 dan;

$$\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_k, \dots, P_{n+1}]}$$

bulunur. Buradan hiperbolik simpleksler için n-boyutlu sinüs;

$$^n \sin(P_i, P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}) = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_k, \dots, P_{n+1}]}$$

olur.

Teorem 6.1.13. $P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \in H^n \subset R_1^{n+1}$ için $\Omega_H = \langle P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$ hiperbolik simpleks olsun. P_i tepesine zıt yüz F_i ile gösterilirse;

$$\text{Gram}(P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1})^{1/2} = [P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}]$$

olur.

İspat: P_i tepesine zıt yüz F_i ile gösterilsin.

$$\vec{e}_i = (-1)^{n+1-i} \frac{P_1 \times P_2 \times \dots \times \hat{P}_i \times \dots \times P_{n+1}}{\|P_1 \times P_2 \times \dots \times \hat{P}_i \times \dots \times P_{n+1}\|}$$

vektörü F_i yüzünün Lorentz birim normali olmak üzere;

$$\det \left(\begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ P_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \cdots e_i \cdots P_{n+1} \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle & \cdots & \langle P_1, e_i \rangle & \cdots & \langle P_1, P_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle e_i, P_1 \rangle & \cdots & \langle e_i, e_i \rangle & \cdots & \langle e_i, P_{n+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle P_{n+1}, P_1 \rangle & \cdots & \langle P_{n+1}, e_i \rangle & \cdots & \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle & \cdots & \langle P_1, P_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle P_{n+1}, P_1 \rangle & \cdots & \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle \end{vmatrix}_{n \times n}$$

$$= \text{Gram}(P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1})$$

$$= |\det[\langle P_k, P_l \rangle]|, \quad k, l \neq i \text{ ve } k, l = 1, 2, \dots, n+1$$

olur ki buradan;

$$\left(\det \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ P_{n+1} \end{bmatrix} \right)^2 = \text{Gram}(P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1})$$

ve

$$\det \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ P_{n+1} \end{bmatrix} = \text{Gram}(P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1})^{\frac{1}{2}} \quad [6.4]$$

olur. Yani;

$$Gram(P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1})^{1/2} = \left\| [P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}] \right\|$$

bulunur.

6.1.2 Hiperbolik polar simpleksler için tepe açıları

$\Omega_H = \langle P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$ hiperbolik n-simpleks olsun. Ω_H simpleksinin polar duali, P_i tepelerine zıt yüzlerin birim normalleri,

$$e_i = (-1)^{n+1-i} \frac{P_1 \times \dots \times \hat{P}_i \times \dots \times P_{n+1}}{\|P_1 \times \dots \times \hat{P}_i \times \dots \times P_{n+1}\|}, i = 1, 2, \dots, n+1$$

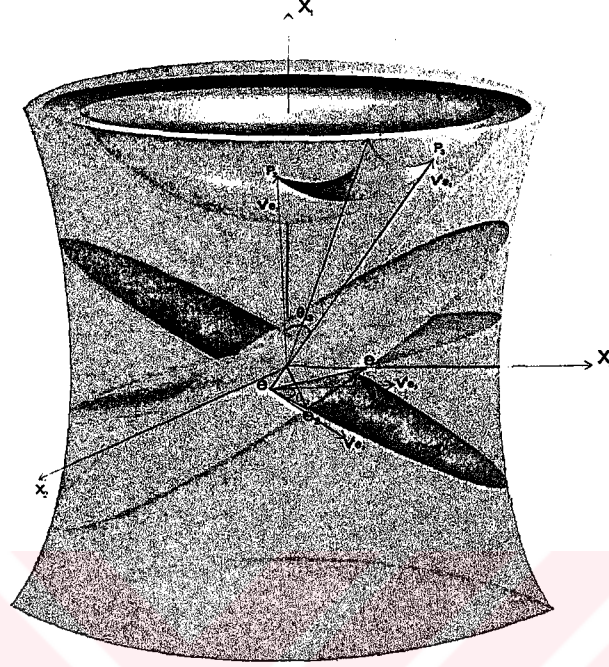
vektörleri olmak üzere $\Omega_H^d = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n+1} \rangle$ simpleksidir. $V_{e_j}^i = e_j - \langle e_i, e_j \rangle e_i$, $i, j = 1, 2, \dots, n+1$ vektörleri e_i tepesinde ki e_j doğrultusundaki teğet vektörlerdir(21). Bu simpleks de Sitter uzayındadır.

Teorem 6.1.14. $\Omega_H^d = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n+1} \rangle$ polar simpleksinin, e_i tepesindeki tepe açısının n-boyutlu sinüsü;

$$^n \sin(e_i, e_1 e_2 \dots \hat{e}_i \dots e_{n+1}) = \frac{[e_1, e_2, \dots, e_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} [e_1, e_2, \dots, \hat{e}_k, \dots, e_{n+1}]}$$

şeklindedir.

İspat:



Şekil 6.2. Polar Hiperbolik 2-simpleksin tepe açısı

$$N_i^d = (-1)^{n+1-i} (V_{e_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{e_i}^i \times \dots \times V_{e_{n+1}}^i)_L$$

$$N_k^d = (-1)^{n+1-k} (V_{e_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{e_k}^i \times \dots \times e_i \times \dots \times V_{e_{n+1}}^i)_L$$

vektörleri, e_i ve $V_{e_k}^i$ ($i, k = 1, 2, \dots, n+1$) teğet vektörüne sahip ayrıtlara zıt $(n-1)$ -yüzlerin normalleri olmak üzere,

$$e_i^d = e_i = \frac{N_i^d}{\|N_i^d\|_L}$$

ve

$$e_k^d = (-1)^{n+1-k} \frac{V_{e_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{e_k}^i \times \dots \times e_i \times \dots \times V_{e_{n+1}}^i}{\|V_{e_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{e_k}^i \times \dots \times e_i \times \dots \times V_{e_{n+1}}^i\|_L}$$

$$= \frac{N_k^d}{\|N_k^d\|}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1$$

vektörleri de birim normallerdir. Lemma 6.1.10 dan;

$$\det \begin{pmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i^d \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} V_{e_1}^i & \dots & e_i & \dots & V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix} = \frac{1}{\|N_1^d\| \dots \|\hat{N}_i^d\| \dots \|N_{n+1}^d\|} \underbrace{\det \begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix} \dots \det \begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix}}_{n\text{-}\text{çarpım}}$$

olduğundan,

$$\det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i^d \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} = \frac{1}{\|N_1^d\| \dots \|\hat{N}_i^d\| \dots \|N_{n+1}^d\|} \left(\det \begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix} \right)^{n-1} \quad [6.5]$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\det \begin{pmatrix} N_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ N_{n+1}^d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} N_1^d & \dots & e_i & \dots & N_{n+1}^d \end{bmatrix} = \left(\det \begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix} \right)^n$$

olduğundan,

$$\det \begin{bmatrix} N_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ N_{n+1}^d \end{bmatrix} = \left(\det \begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix} \right)^{n-1} \quad [6.6]$$

elde edilir. O halde;

$$\det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} = \frac{1}{\|N_1^d\| \dots \|\hat{N}_i^d\| \dots \|N_{n+1}^d\|} \det \begin{bmatrix} N_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ N_{n+1}^d \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\det [N_1^d \dots e_i \dots N_{n+1}^d]}{\|N_1^d\| \dots \|\hat{N}_i^d\| \dots \|N_{n+1}^d\|}. \quad [6.7]$$

[6.6] , [6.7] ifadeleri ile Teorem 4.1.3 den,

$$\det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} = \frac{(\det [V_{e_1}^i \dots e_i \dots V_{e_{n+1}}^i])^{n-1}}{\|N_1^d\| \dots \|\hat{N}_i^d\| \dots \|N_{n+1}^d\|}$$

elde edilir. Lemma 6.1.8 ve Lemma 6.1.9 dan;

$$\det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} = \frac{[e_1, e_2, \dots, e_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} [e_1, e_2, \dots, \hat{e}_k, \dots, e_{n+1}]}$$

bulunur. Buradan küresel polar simpleksler için n-boyutlu sinüs;

$$^n \sin(e_i, e_1 e_2 \dots \hat{e}_i \dots e_{n+1}) = \frac{[e_1, e_2, \dots, e_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} [e_1, e_2, \dots, \hat{e}_k, \dots, e_{n+1}]}$$

olur.

Teorem 6.1.15. $P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \in H^n \subset R_1^{n+1}$ için $\Omega_H = \langle P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$ hiperbolik simpleks olsun. Ω_H 'nin polar simpleksi $\Omega_H^d = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n+1} \rangle$ simpleksi olmak üzere;

$$\text{Gram}(e_1 e_2 \dots \hat{e}_i \dots e_{n+1})^{1/2} = \|[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}]\|.$$

olur.

İspat: e_i tepesine zıt yüz F_i ile gösterilsin.

$$\vec{e}_i^d = (-1)^{n+1-i} \frac{e_1 \times e_2 \times \dots \times \hat{e}_i \times \dots \times e_{n+1}}{\|e_1 \times e_2 \times \dots \times \hat{e}_i \times \dots \times e_{n+1}\|_L}$$

vektörü F_i yüzünün Lorentz birim normali olmak üzere; Lemma 6.1.10 dan;

$$\det \left(\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i^d \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} [e_1 \dots e_i^d \dots e_{n+1}] \right) = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_i^d \rangle & \dots & \langle e_1, e_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle e_i^d, e_1 \rangle & \dots & \langle e_i^d, e_i^d \rangle & \dots & \langle e_i^d, e_{n+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_{n+1}, e_1 \rangle & \dots & \langle e_{n+1}, e_i^d \rangle & \dots & \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_{n+1}, e_1 \rangle & \dots & \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle \end{vmatrix}_{n \times n}$$

$$= \text{Gram}(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})$$

$$= |\det[\langle e_k, e_l \rangle]|, \quad k, l \neq i \text{ ve } k, l = 1, 2, \dots, n+1$$

olur. Buradan;

$$\left(\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i^d \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \right)^2 = \text{Gram}(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})$$

vc

$$\left(\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i^d \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \right) = \text{Gram}(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})^{\frac{1}{2}} \quad [6.8]$$

bulunur. $\square$

P_j ve $V_{P_j}^i$ vektörleri O , P_i, P_j tarafından belirlenen düzlemde olduklarından Teorem 6.1.12 dki,

$$N_i = (-1)^{n+1-i} (V_{P_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{P_i}^i \times \dots \times V_{P_{n+1}}^i)_L$$

$$N_k = (-1)^{n+1-k} (V_{P_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{P_k}^i \times \dots \times P_i \times \dots \times V_{P_{n+1}}^i)_L$$

ifadelerinde;

$$P_i = e_i = \frac{N_i}{\|N_i\|_L}$$

vc

$$e_k = (-1)^{n+1-k} \frac{P_1 \times \dots \times \hat{P}_k \times \dots \times P_i \times \dots \times P_{n+1}}{\|P_1 \times \dots \times \hat{P}_k \times \dots \times P_i \times \dots \times P_{n+1}\|_L}$$

$$= \frac{N_k}{\|N_k\|}, i, k = 1, 2, \dots, n+1$$

alınırsa;

$$\det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \cdots e_i \cdots e_{n+1} \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_i \rangle & \dots & \langle e_1, e_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle e_i, e_1 \rangle & \dots & \langle e_i, e_i \rangle & \dots & \langle e_i, e_{n+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_{n+1}, e_1 \rangle & \dots & \langle e_{n+1}, e_i \rangle & \dots & \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

eşitliğinden,

$$\left(\det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_{n+1}, e_1 \rangle & \dots & \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle \end{vmatrix}_{n \times n}$$

elde edilir. Buradan da;

$$\left(\det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{pmatrix} \right)^2 = Gram(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})$$

vc

$$\left(\det \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \right) = \text{Gram}(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})^{\frac{1}{2}}$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafına n -boyutlu hiperbolik polar simpleksin e_i tepesine zıt F_i yüzünün n -boyutlu polar sinüsü denir ve

$$^n \text{pol sin}(e_1 e_2 \dots \hat{e}_i \dots e_{n+1}) = \left[[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] \right]$$

şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde e_i ve $V_{e_k}^i$ vektörleri O , e_i , e_k tarafından belirlenen düzlemde olduklarından Teorem 6.1.14 de;

$$N_i^d = (-1)^{n+1-i} (V_{e_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{e_i}^i \times \dots \times V_{e_{n+1}}^i)_L$$

ve

$$N_k^d = (-1)^{n+1-k} (V_{e_1}^i \times \dots \times \hat{V}_{e_k}^i \times \dots \times e_i \times \dots \times V_{e_{n+1}}^i)_L$$

vektörleri, e_i ve $V_{e_k}^i$ teğet vektörüne sahip ayrıca zıt $(n-1)$ -yüzlerin normalleri olmak üzere;

$$e_i^d = P_i = \frac{N_i}{\|N_i\|_L}$$

ve

$$e_k^d = (-1)^{n+1-k} \frac{e_1 \times e_2 \times \dots \times \hat{e}_k \times \dots \times e_{n+1}}{\|e_1 \times e_2 \times \dots \times \hat{e}_k \times \dots \times e_{n+1}\|_L} = P_k, \quad k=1, 2, \dots, n+1$$

alınırsa;

$$\det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^d & \dots & e_i & \dots & e_{n+1}^d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \langle e_1^d, e_1^d \rangle & \dots & \langle e_1^d, e_i \rangle & \dots & \langle e_1^d, e_{n+1}^d \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle e_i, e_1^d \rangle & \dots & \langle e_i, e_i \rangle & \dots & \langle e_i, e_{n+1}^d \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_{n+1}^d, e_1^d \rangle & \dots & \langle e_{n+1}^d, e_i \rangle & \dots & \langle e_{n+1}^d, e_{n+1}^d \rangle \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

çşitliğinden,

$$\begin{aligned} \left(\det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} \right)^2 &= \begin{vmatrix} \langle e_1^d, e_1^d \rangle & \dots & \langle e_1^d, e_{n+1}^d \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_{n+1}^d, e_1^d \rangle & \dots & \langle e_{n+1}^d, e_{n+1}^d \rangle \end{vmatrix}_{n \times n} \\ &= \begin{vmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle & \dots & \langle P_1, P_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle P_{n+1}, P_1 \rangle & \dots & \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle \end{vmatrix}_{n \times n} \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak,

$$\det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} = \text{Gram}(P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1})^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafına n -boyutlu hiperbolik simpleksin P_i tepesine zıt F_i yüzünün n -boyutlu polar sinüsü denir ve

$${}^n \text{pol sin}(P_1 P_2 \dots \hat{P}_i \dots P_{n+1}) = \left[[P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}] \right]$$

şeklinde gösterilir.

Sonuç 6.1.16.

$${}^n \text{sin}(e_i, e_1 e_2 \dots \hat{e}_i \dots e_{n+1}) = {}^n \text{pol sin}(P_1 P_2 \dots \hat{P}_i \dots P_{n+1}) = \left[[P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}] \right]$$

olur.

İspat: Teorem 6.1.12 ve Teorem 6.1.15 den açıktır.

Sonuç 6.1.17.

$${}^n \text{sin}(P_i, P_1 P_2 \dots \hat{P}_i \dots P_{n+1}) = {}^n \text{pol sin}(e_1 e_2 \dots \hat{e}_i \dots e_{n+1}) = \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_k, \dots, P_{n+1}]}$$

olur.

İspat: Teorem 6.1.13 ve Teorem 6.1.14 den açıktır.

Teorem 6.1.18. $\Omega_H = \langle P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$ hiperbolik simpleksinin

$(P_s, P_{s+1} \dots P_{n+1} P_1 \dots P_{s-1})$ tepesini P_s ile P_s tepesine zıt $(n-1)$ -yüzü F_s ile gösterilirse

$$\frac{{}^n \text{pol sin } F_1}{{}^n \text{sin } P_1} = \frac{{}^n \text{pol sin } F_2}{{}^n \text{sin } P_2} = \dots = \frac{{}^n \text{pol sin } F_{n+1}}{{}^n \text{sin } P_{n+1}}$$

olur.

İspat:

$${}^n \text{pol sin } F_i = {}^n \text{pol sin}(P_1 P_2 \dots \hat{P}_i \dots P_{n+1})$$

$$= [P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}], i = 1, 2, \dots, n+1 \quad [6.9]$$

olur.

$$\begin{aligned} {}^n \sin P_i &= {}^n \sin(P_i, P_1 P_2 \dots \hat{P}_i \dots P_{n+1}) \\ &= \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_k, \dots, P_{n+1}]} \quad i=1, 2, \dots, n+1 \end{aligned} \quad [6.10]$$

olduğu görülür. [6.9] ifadesi [6.10] ifadesine taraf tarafa bölünürse;

$$\frac{{}^n \text{pol sin } F_i}{{}^n \sin P_i} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_k, \dots, P_{n+1}]}{[P_1, P_2, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

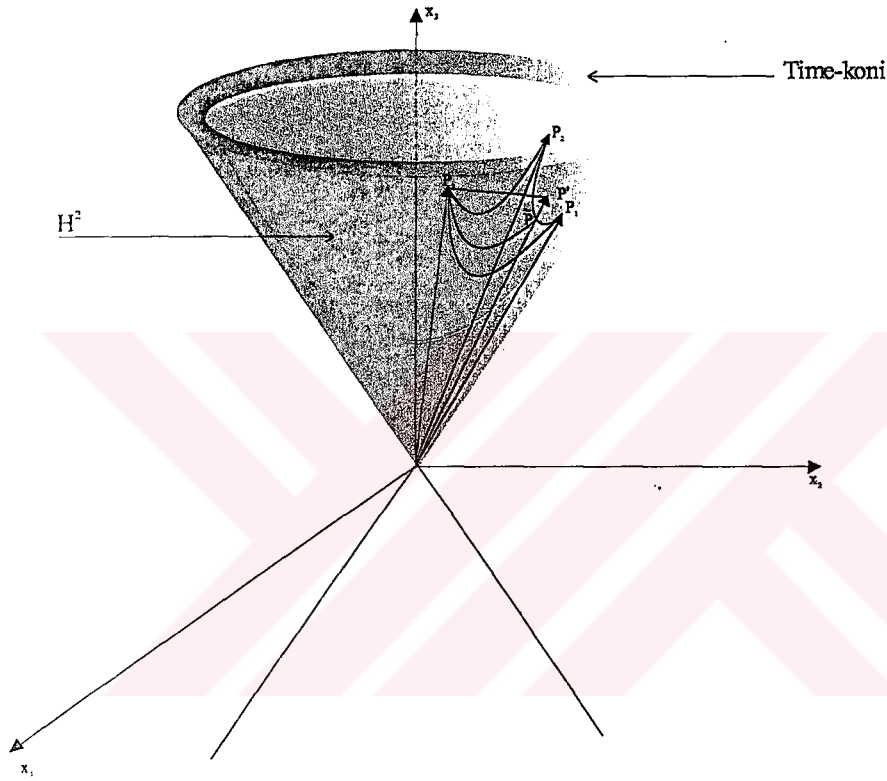
bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafı i -indisinden bağımsız olduğundan;

$$\frac{{}^n \text{pol sin } F_1}{{}^n \sin P_1} = \frac{{}^n \text{pol sin } F_2}{{}^n \sin P_2} = \dots = \frac{{}^n \text{pol sin } F_{n+1}}{{}^n \sin P_{n+1}} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_k, \dots, P_{n+1}]}{[P_1, P_2, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}$$

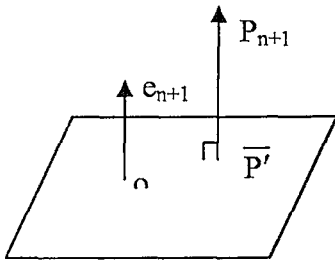
elde edilir.

6.2. Hiperbolik Uzayda Uzaklıklar

6.2.1. Hiperbolik Uzayda Bir Noktanın Hiperbolik Hiperdüzleme Olan Uzaklığı



Şekil 6.3. Bir noktanın hiperbolik hiperdüzleme hiperbolik uzaklığı



$\vec{e}_i$, ($i = 1, 2, \dots, n+1$) ler birim normal vektörler ve $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = -1$ olmak üzere;

$$\overrightarrow{P_{n+1}P'} = \lambda \vec{e}_{n+1}$$

[6.11]

yazılabilir. [6.11] eşitliğinin her iki yanını $\overrightarrow{e_{n+1}}$ ile iç çarpıma tabii tutulursa;

$$\begin{aligned}\lambda &= \langle \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP_{n+1}}, \overrightarrow{e_{n+1}} \rangle \\ &= - \langle \overrightarrow{OP_{n+1}}, \overrightarrow{e_{n+1}} \rangle\end{aligned}\quad [6.12]$$

bulunur. [6.12] ifadesinde bulunan λ değeri [6.11] de yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_{n+1}} - \langle \overrightarrow{OP_{n+1}}, \overrightarrow{e_{n+1}} \rangle \overrightarrow{e_{n+1}}$$

olur. Burada $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}, \overline{P'}, P' \in H^n$ dir. $c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere ,

$$\overrightarrow{OP'} = c \cdot \overrightarrow{OP'} \quad [6.13]$$

için $P' \in H^n$ olduğundan

$$\langle P', P' \rangle = -1.$$

Buradan;

$$c^2 \langle \overline{P'}, \overline{P'} \rangle = -1$$

ve

$$c^2 = \frac{-1}{\langle \overline{P'}, \overline{P'} \rangle} \quad [6.14]$$

bulunur.

$$\overline{P'} = P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1}$$

ifadesi göz önüne alınarak;

$$\begin{aligned}
\langle \overline{P'}, \overline{P'} \rangle &= \langle P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1}, P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1} \rangle \\
&= \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 \\
&= -1 - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu değer [6.14] de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
c^2 &= \frac{-1}{-1 - \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle^2} \\
&= \frac{-1}{-1 - \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle^2}
\end{aligned}$$

$c \in \mathbb{R}^+$ olduğundan;

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle^2}}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
P' &= \frac{1}{\sqrt{\langle \overline{P'}, \overline{P'} \rangle}} (P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2}} (P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1}) \\
&= \frac{P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1}}{\|P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1}\|} \tag{6.15}
\end{aligned}$$

bulunur. [6.15] ifadesinin her iki tarafı P_{n+1} ile iç çarpıma tabii tutulursa;

$$\langle P_{n+1}, P' \rangle = -\sqrt{1 + \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2} \tag{6.16}$$

olur. [6.16] ifadesinin her iki tarafının kareleri alınarak düzenlenirse;

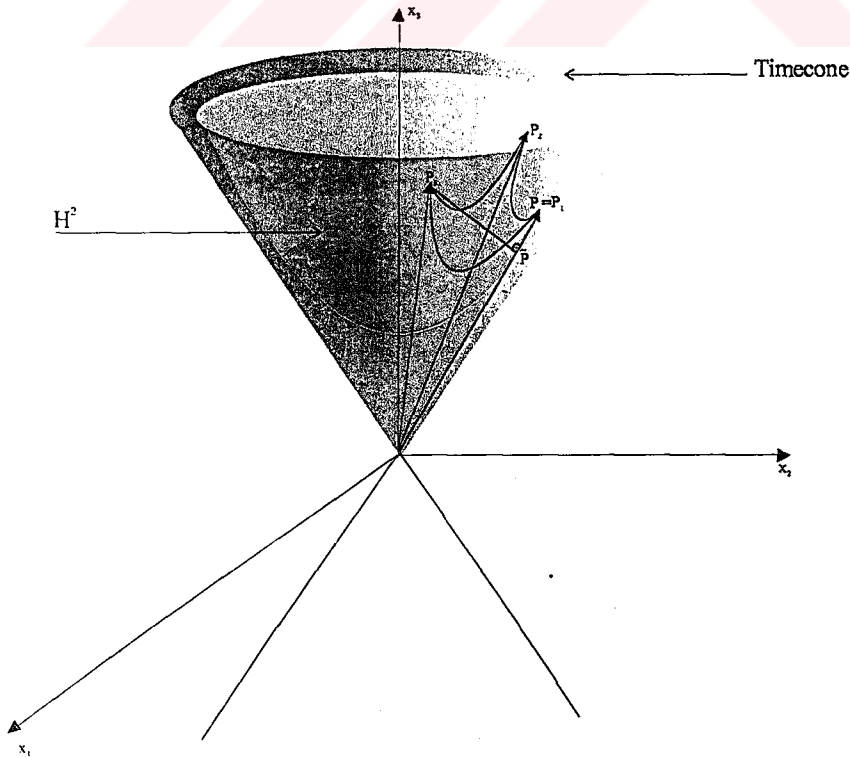
$$\begin{aligned} \langle P_{n+1}, P' \rangle^2 &= 1 + \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 \\ \cos^2 \eta(P_{n+1}, P') &= 1 + \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 \\ \sin \eta(P_{n+1}, P') &= |\langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle| \end{aligned} \quad [6.17]$$

elde edilir. [6.17] ifadesinde $P' \in H_{e_{n+1}}$ olduğundan,

$$\sin \eta(P_{n+1}, H_{e_{n+1}}) = |\langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle|$$

bulunur ki bu ise hiperbolik uzayda bir P_{n+1} noktasının $H_{e_{n+1}}$ hiperdüzlemine olan uzaklığıdır.

6.2.2. Hiperbolik Uzayda Bir Noktanın Hiperbolik (n-2)-Düzleme Olan Uzaklığı



Şekil 6.4. Bir Noktanın hiperbolik (n-2)-düzleme hiperbolik uzaklığı

$\langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle_L = 1$, $\langle e'_n, e'_n \rangle_L = 1$ olmak üzere;

$$\overrightarrow{P_{n+1}} = \lambda_1 e_{n+1} + \lambda_2 e'_n \quad [6.18]$$

şeklindedir. Burada;

$$e'_n = \frac{e_n - \langle e_{n+1}, e_n \rangle e_{n+1}}{\|e_n - \langle e_{n+1}, e_n \rangle e_{n+1}\|}$$

olup birim ortonormal vektördür. [6.18] ifadesinden,

$$\overline{P} - P_{n+1} = \lambda_1 e_{n+1} + \lambda_2 e'_n$$

yazılabilir. Buradan,

$$-\langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle = \lambda_1 \quad [6.19]$$

$$-\langle P_{n+1}, e'_n \rangle = \lambda_2 \quad [6.20]$$

yazılabilir. [6.19] ve [6.20] değerleri [6.18] de yerine yazılırsa;

$$\overline{P} = P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1} - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle e'_n \quad [6.21]$$

bulunur.

$c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

$$O\vec{P} = c.O\vec{P}$$

ifadesinden $P \in H^n$ olduğundan;

$$\langle P, P \rangle = -1 \text{ ve } c^2 \cdot \langle \bar{P}, \bar{P} \rangle = -1$$

bulunur. [6.21] ifadesinden,

$$\begin{aligned} \langle \bar{P}, \bar{P} \rangle &= \langle P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1} - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle e'_n, P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1} - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle e'_n \rangle \\ &= \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2 \\ &= -1 - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2 \end{aligned} \quad [6.22]$$

bulunur. $c \in \mathbb{R}^+$ olduğundan;

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{-1}{\langle \bar{P}, \bar{P} \rangle} \\ &= \frac{-1}{-1 - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2} \\ &= \frac{1}{1 + \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 + \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2} \end{aligned}$$

elde edilir ki buradan da

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 + \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2}}$$

olur. Bu değer,

$$\vec{OP} = \frac{1}{\sqrt{\langle \bar{P}, \bar{P} \rangle}} \cdot \vec{OP}$$

ifadesinde yerine yazılırsa;

$$P = \frac{1}{\sqrt{1 + \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 + \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2}} (-P_{n+1} - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1} - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle e'_n)$$

elde edilir. Her iki tarafın P_{n+1} ile iç çarpımı alınırsa;

$$\langle P_{n+1}, P \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 + \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2}} (-1 - \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 - \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2) \quad [6.23]$$

şeklinde bulunur. [6.23] ifadesinden;

$$\begin{aligned} \langle P_{n+1}, P \rangle^2 &= 1 + \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 + \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2 \\ \langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 + \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2 &= -1 + \langle P_{n+1}, P \rangle^2 \\ &= -1 - \cosh^2 \eta(P_{n+1}, P) \\ &= \sinh^2 \eta(P_{n+1}, P) \end{aligned} \quad [6.24]$$

olur. [6.24] ifadesi düzenlenirse;

$$\sinh \eta(P_{n+1}, P) = \sqrt{\langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 + \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2}$$

bulunur. $P \in H_{e_{n+1}, e_n}$ olduğundan

$$\sinh \eta(P_{n+1}, H_{e_{n+1}, e_n}) = \sqrt{\langle P_{n+1}, e_{n+1} \rangle^2 + \langle P_{n+1}, e'_n \rangle^2}$$

elde edilir.

Teorem 6. 2.1. Hiperbolik uzay Ω_H da bir n-simpleks olsun. P_i tepesinde ki n-hedral açının sinüsü,

$${}^n \text{Sin}(P_i, V_{p_1} \dots \hat{V}_{p_i} \dots V_{p_{n+1}}) = \frac{[P_i, V_{p_1}, \dots, \hat{V}_{p_i}, \dots, V_{p_{n+1}}]^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n+1} [V_{p_1}, \dots, \hat{V}_{p_k}, \dots, V_{p_i}, \dots, V_{p_{n+1}}]} \quad [6.25]$$

Burada $i = 1, 2, \dots, n+1$ olmak üzere; $\vec{V}_{p_k}$ vektörleri P_i tepesinden $P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}$ tepelerine doğru çizilen uzay benzeri (spacelike) teğet vektörlerdir.

İspat: Lemma 6.1.8 ve Lemma 6.1.9 dan dolayı $P_i, V_{p_1}, \dots, \hat{V}_{p_i}, \dots, V_{p_{n+1}}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzün hacmi ile $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzün hacmi eşittir. $P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \in H^n$ olmak üzere, H^n de bir hiperbolik simpleks, $\Omega_{II} = \langle P_1, \dots, P_{n+1} \rangle$ olsun. $i = 1, 2, \dots, n+1$ için $\vec{V}_{p_k}$ ler de, P_i tepesinden, $P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}$ tepeleri doğrultusunda ki teğet vektörler olmak üzere genelliği bozmadan P_1 tepesinde ki tepe açısını $(P_1, V_{p_2} V_{p_3} \dots V_{p_{n+1}})$ ile gösterelim.

Lemma 6.1.8 ve (25) den;

$$\begin{aligned} \text{Gram}(P_{n+1}, P_1, V_{p_2}, \dots, V_{p_n}) &= \text{Gram}(P_{n+1}, P', P_1, V_{p_2}, \dots, V_{p_n}) \\ &= \|P_{n+1} P'\| \text{Gram}(P_1, V_{p_2}, \dots, V_{p_n}) \end{aligned}$$

olur. Bu ifade düzenlenirse,

$$\|\vec{P_{n+1} P'}\| = \frac{\text{Gram}(P_{n+1}, P_1, V_{p_2}, \dots, V_{p_n})}{\text{Gram}(P_1, V_{p_2}, \dots, V_{p_n})}$$

elde edilir. Yine Lemma 6.1.8 den dolayı

$$\|\vec{P_{n+1} P'}\| = \frac{\text{Gram}(P_1, \dots, P_{n+1})}{\text{Gram}(P_1, \dots, P_n)} \quad [6.26]$$

olur. Lemma 6.1.9 dan ;

$$\begin{aligned} \text{Gram}(P_{n+1}, P_1, V_{p_2}, \dots, \hat{V}_{p_i}, \dots, V_{p_n}) &= \text{Gram}(\overrightarrow{P_{n+1}P}, P_1, V_{p_2}, \dots, \hat{V}_{p_i}, \dots, V_{p_n}) \\ &= \|\overrightarrow{P_{n+1}P}\| \text{Gram}(P_1, V_{p_2}, \dots, V_{p_i}, \dots, V_{p_n}) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\|\overrightarrow{P_{n+1}P}\| = \frac{\text{Gram}(P_{n+1}, P_1, V_{p_2}, \dots, \hat{V}_{p_i}, \dots, V_{p_n})}{\text{Gram}(P_1, V_{p_2}, \dots, \hat{V}_{p_i}, \dots, V_{p_n})}$$

veyahut ta

$$\|\overrightarrow{P_{n+1}P}\| = \frac{\text{Gram}(P_{n+1}, P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n)}{\text{Gram}(P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n)} \quad [6.27]$$

bulunur. [6.26] ve [6.27] ifadelerinde,

$$\|\overrightarrow{P_{n+1}P'}\| = h' \text{ ve } \|\overrightarrow{P_{n+1}P}\| = h \text{ olarak alınırsa;}$$

$$\sin \theta_{i,(n+1)} = \frac{h'}{h}$$

olduğundan

$$\sin \theta_{i,(n+1)} = \frac{\| [P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}] \| \| [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n] \|}{\| [P_1, P_2, \dots, P_n] \| \| [P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}] \|} \quad [6.28]$$

şeklinde olur. [6.28] ifadesini,

$$[P_1, \dots, P_{n+1}] = \frac{[P_1, \dots, P_n][P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}]}{[P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n]} \sin \theta_{i,(n+1)}$$

şeklinde yazarak (n-1) defa çarpım alınırsa;

$$[P_1, \dots, P_{n+1}]^{n-1} = \frac{[P_1, \dots, P_n]^{n-1} \prod_{i=2}^n [P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}]}{\prod_{i=2}^n [P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n]} \prod_{i=2}^n \sin \theta_{i,(n+1)}$$

$$= \frac{[P_1, \dots, P_n]^{n-2} \prod_{i=2}^{n+1} [P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}]}{\prod_{i=2}^n [P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n]} \prod_{i=2}^n \sin \theta_{i,(n+1)} \quad [6.29]$$

elde edilir. [6.29]de elde edilen eşitliği

$$\frac{[P_1, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}{\prod_{i=2}^{n+1} [P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}]} = \frac{[P_1, \dots, P_n]^{n-2}}{\prod_{i=2}^n [P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n]} \prod_{i=2}^n \sin \theta_{i,(n+1)} \quad [6.30]$$

şeklinde düzenlersek, bu eşitliğin sol tarafı çarpım formülü göz önüne alındığı zaman küresel simpleks için n-boyutlu sinüs e karşılık gelir. Yine çarpım formülü göz önüne alındığında sağ taraftaki birinci terim (n-1)-boyutlu sinüse karşılık gelir. O halde [6.30] ifadesinden;

$${}^n \sin(P_1, V_{p_2} \dots V_{p_{n+1}}) = {}^{n-1} \sin(P_1, V_{p_2} \dots V_{p_n}) \prod_{i=2}^n \sin \theta_{i,(n+1)} \quad [6.31]$$

elde edilir. Şimdi [6.31] ifadesinin sağ yanını göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
\text{Sin}\theta_{2,(n+1)} &= \frac{[P_1, \dots, P_{n+1}]}{[P_1, \dots, P_n]} \frac{[P_1, P_3, \dots, P_n]}{[P_1, P_3, \dots, P_{n+1}]} \\
\text{Sin}\theta_{3,(n+1)} &= \frac{[P_1, \dots, P_{n+1}]}{[P_1, \dots, P_n]} \frac{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_n]}{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_{n+1}]} \\
&\vdots \\
\text{Sin}\theta_{n-1,(n+1)} &= \frac{[P_1, \dots, P_{n+1}]}{[P_1, \dots, P_n]} \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_n]}{[P_1, \dots, P_{n-2}, P_n, P_{n+1}]} \\
\text{Sin}\theta_{n,(n+1)} &= \frac{[P_1, \dots, P_{n+1}]}{[P_1, \dots, P_n]} \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}]}{[P_1, \dots, P_{n-1}, P_{n+1}]}
\end{aligned} \tag{6.32}$$

[6.32] ifadesi taraf tarafa çarpılırsa;

$$\begin{aligned}
\prod_{i=2}^n \text{Sin}\theta_{i,(n+1)} &= \frac{[P_1, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}{[P_1, \dots, P_n]^{n-1}} \frac{[P_1, P_3, \dots, P_n]}{[P_1, P_3, \dots, P_{n+1}]} \frac{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_n]}{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_{n+1}]} \dots \\
&\dots \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_n]}{[P_1, \dots, P_{n-2}, P_n, P_{n+1}]} \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}]}{[P_1, \dots, P_{n-1}, P_{n+1}]} \tag{6.33}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\text{Sin}\theta_{2,n} &= \frac{[P_1, \dots, P_n]}{[P_1, \dots, P_{n-1}]} \frac{[P_1, P_3, \dots, P_{n-1}]}{[P_1, P_3, \dots, P_n]} \\
\text{Sin}\theta_{3,n} &= \frac{[P_1, \dots, P_n]}{[P_1, \dots, P_{n-1}]} \frac{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_{n-1}]}{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_n]} \\
&\vdots \\
\text{Sin}\theta_{n-2,n} &= \frac{[P_1, \dots, P_n]}{[P_1, \dots, P_{n-1}]} \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-3}, P_{n-1}]}{[P_1, P_2, \dots, P_{n-3}, P_{n-1}, P_n]}
\end{aligned} \tag{6.34}$$

$$\sin\theta_{n-1,n} = \frac{[P_1, \dots, P_n]}{[P_1, \dots, P_{n-1}]} \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-2}]}{[P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_n]}$$

[6.34] ifadesi taraf tarafa çarpılırsa ;

$$\begin{aligned} \prod_{i=2}^{n-1} \sin\theta_{i,n} &= \frac{[P_1, \dots, P_n]^{n-2}}{[P_1, \dots, P_{n-1}]^{n-2}} \frac{[P_1, P_3, \dots, P_{n-1}]}{[P_1, P_3, \dots, P_n]} \frac{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_{n-1}]}{[P_1, P_2, P_4, \dots, P_n]} \dots \\ &\quad \dots \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-3}, P_{n-1}]}{[P_1, \dots, P_{n-3}, P_{n-1}, P_n]} \frac{[P_1, P_2, \dots, P_{n-2}]}{[P_1, \dots, P_{n-2}, P_n]} \end{aligned} \quad [6.35]$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse;

$$\sin\theta_{2,4} = \frac{[P_1, P_2, P_3, P_4]}{[P_1, P_2, P_3]} \frac{[P_1, P_3]}{[P_1, P_3, P_4]} \quad [6.36]$$

$$\sin\theta_{3,4} = \frac{[P_1, P_2, P_3, P_4]}{[P_1, P_2, P_3]} \frac{[P_1, P_2]}{[P_1, P_2, P_4]} \quad [6.37]$$

ve

$$\sin\theta_{2,3} = \frac{[P_1, P_2, P_3]}{[P_1, P_2]} \frac{[P_1]}{[P_1, P_3]} \quad [6.38]$$

bulunur. [6.33], [6.35], [6.36], [6.37], [6.38]da elde edilen değerler taraf tarafa çarpılıp düzenlenirse ;

$$\begin{aligned} \prod_{i=2}^n \sin\theta_{i,(n+1)} \dots \prod_{i=2}^4 \sin\theta_{i,4} \prod_{i=2}^3 \sin\theta_{i,3} &= \\ \frac{[P_1, \dots, P_{n+1}]^{n-1}}{[P_1, P_3, \dots, P_{n+1}][P_1, P_2, P_4, \dots, P_{n+1}]\dots[P_1, P_2, \dots, P_n]} &= \\ = {}^n \sin(P_1, P_2, \dots, P_{n+1}) &= \\ = {}^n \sin(P_1, V_{P_2}, \dots, V_{P_{n+1}}) \end{aligned}$$

elde edilir.

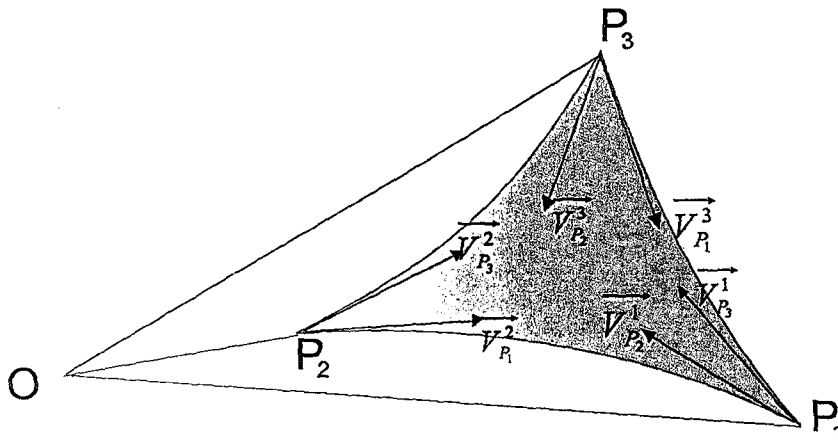
Sonuç 6.2.2. $P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \in H^n$ olmak üzere, $\Omega_H = \langle P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \rangle$, H^n de bir hiperbolik simpleks olsun. $\vec{V}_{P_i}^j$ ler de, P_j tepesinden, P_i tepeleri doğrultusunda ki teğet vektörler olmak üzere ;

$$\text{Gram}(P_1, P_2, \dots, P_{n+1}) = \text{Gram}(P_1, V_{P_2}^1, V_{P_3}^1, \dots, V_{P_{n+1}}^1) = \dots = \text{Gram}(P_{n+1}, V_{P_1}^{n+1}, \dots, V_{P_n}^{n+1})$$

olur.

İspat: Lemma 6.1.8 den açıktır.

Örnek 6.2.3. $P_1, P_2, P_3 \in H^n$ olmak üzere $\vec{V}_{P_i}^j$ ($i, j=1, 2, 3$) için $\vec{V}_{P_i}^j = P_j + \langle P_i, P_j \rangle P_i$ şeklinde tanımlı teğet vektörleri için;



Şekil 6.5. H^2 de Hiperbolik 2-simpleksin tepe açıları

$$\text{Gram}(P_1, P_2, P_3) = \det \begin{pmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle_L & \langle P_1, P_2 \rangle_L & \langle P_1, P_3 \rangle_L \\ \langle P_2, P_1 \rangle_L & \langle P_2, P_2 \rangle_L & \langle P_2, P_3 \rangle_L \\ \langle P_3, P_1 \rangle_L & \langle P_3, P_2 \rangle_L & \langle P_3, P_3 \rangle_L \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -1 & \langle P_1, P_2 \rangle_L & \langle P_1, P_3 \rangle_L \\ \langle P_1, P_2 \rangle_L & -1 & \langle P_2, P_3 \rangle_L \\ \langle P_1, P_3 \rangle_L & \langle P_3, P_2 \rangle_L & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -(1 - \langle P_1, P_2 \rangle^2 - \langle P_1, P_3 \rangle^2 - \langle P_2, P_3 \rangle^2 - 2 \langle P_1, P_2 \rangle \langle P_1, P_3 \rangle \langle P_2, P_3 \rangle)$$

şeklindedir. $P_1, P_2, P_3 \in H^n$ olduğundan;

$$\langle P_1, P_2 \rangle_L = -\cosh \theta_{12},$$

$$\langle P_1, P_3 \rangle_L = -\cosh \theta_{13},$$

$$\langle P_2, P_3 \rangle_L = -\cosh \theta_{23}$$

değerleri yukarıda yerlerine yazılırsa;

$$Gram(P_1, P_2, P_3) = -(1 - \cosh^2 \theta_{12} - \cosh^2 \theta_{13} - \cosh^2 \theta_{23} + 2 \cosh \theta_{12} \cosh \theta_{13} \cosh \theta_{23})$$

bulunur.

$$\begin{aligned} Gram(P_1, V_{P_2}^1, V_{P_3}^1) &= \det \begin{pmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle_L & \langle P_1, V_{P_2}^1 \rangle_L & \langle P_1, V_{P_3}^1 \rangle_L \\ \langle P_1, V_{P_2}^1 \rangle_L & \langle V_{P_2}^1, V_{P_2}^1 \rangle_L & \langle V_{P_2}^1, V_{P_3}^1 \rangle_L \\ \langle P_1, V_{P_3}^1 \rangle_L & \langle V_{P_3}^1, V_{P_2}^1 \rangle_L & \langle V_{P_3}^1, V_{P_3}^1 \rangle_L \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \langle V_{P_2}^1, V_{P_2}^1 \rangle_L & \langle V_{P_2}^1, V_{P_3}^1 \rangle_L \\ 0 & \langle V_{P_3}^1, V_{P_2}^1 \rangle_L & \langle V_{P_3}^1, V_{P_3}^1 \rangle_L \end{pmatrix} \\ &= (1 - \langle P_1, P_2 \rangle^2)(1 - \langle P_1, P_3 \rangle^2) - \langle V_{P_2}^1, V_{P_3}^1 \rangle^2 \\ &= 1 - \langle P_1, P_2 \rangle^2 - \langle P_1, P_3 \rangle^2 - \langle P_1, P_2 \rangle^2 \langle P_1, P_3 \rangle^2 \\ &\quad - (\langle P_2, P_3 \rangle - \langle P_1, P_3 \rangle \langle P_1, P_2 \rangle)^2 \\ &= 1 - \langle P_1, P_2 \rangle^2 - \langle P_1, P_3 \rangle^2 - \langle P_2, P_3 \rangle^2 \\ &\quad - 2 \langle P_1, P_2 \rangle \langle P_1, P_3 \rangle \langle P_2, P_3 \rangle \end{aligned}$$

olur. Buradan;

$$Gram(P_1, V_{P_2}^1, V_{P_3}^1) = -(1 - \cosh^2 \theta_{12} - \cosh^2 \theta_{13} - \cosh^2 \theta_{23} + 2 \cosh \theta_{12} \cosh \theta_{13} \cosh \theta_{23})$$

elde edilir. Benzer hesaplamalarla

$$Gram(P_2, V_{P_1}^2, V_{P_3}^2) = -(1 - \cosh^2 \theta_{12} - \cosh^2 \theta_{13} - \cosh^2 \theta_{23} + 2 \cosh \theta_{12} \cosh \theta_{13} \cosh \theta_{23})$$

ve

$$Gram(P_3, V_{P_1}^3, V_{P_2}^3) = -(1 - \cosh^2 \theta_{12} - \cosh^2 \theta_{13} - \cosh^2 \theta_{23} + 2 \cosh \theta_{12} \cosh \theta_{13} \cosh \theta_{23})$$

olur. O halde;

$$Gram(P_1, P_2, P_3) = Gram(P_3, V_{P_1}^3, V_{P_2}^3) = Gram(P_2, V_{P_1}^2, V_{P_3}^2) = Gram(P_1, V_{P_2}^1, V_{P_3}^1)$$

olduğu görülür.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk defa hiperbolik uzayda bir hiperbolik n -simpleksin tepe açıları ile bunların polar dualleri arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Hiperbolik uzayda ki bir n -simpleksin polar dualinin, de Sitter uzayında olduğu gösterilmiş ve polar simpleksin tepe açıları da hesaplanmıştır.

Bu çalışmanın gelecekteki hedefi; (34) de verilen bir hiperbolik simpleksin Gram matrisi ve ayrıt matrisi arasındaki bağıntıları kullanarak, tepe açıları ile ilgili bulunan bağıntıları ayrıt uzunluklarına bağlı olarak ifade etmektir.



KAYNAKLAR

1. Klein F., "Vorlesungen über nicht-Euklidische Geometrie", *Grundlehren der math. Wissenschaften* 26: Springer, Berlin, 171-192 (1928).
2. Bonola R., "Non-Euclidean Geometry", *Dover Publications*, New York, 5-79 (1955).
3. Rosenfeld B.A., "A history of non-Euclidean Geometry", translated by A. Shenitzer, *Studies Hist. Math. Phys. Sci.*, 12: Springer-Verlag, New York 43-67 (1988).
4. Friedlein, G., "Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii", *Leipzig, Teubner*, 17-68 (1873). Commentary of Proclus was first printed at Basle (1533).
5. Wallis, J., "Euclidis; disceptatio geometrica" *Opera Math. T. II*: 669-678, Oxford, (1693).
6. Saccheri, G., "Euclides ab omni nuevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa" *Universae Geometriae Principia*, Milan, 34-57 (1733).
7. Lambert, J. H., "Theorie del parallellinien", *Mag. Reine Angew. Math.*, 137-164, 325-358, (1786).
8. Klüggel, G. S., "Conatum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio" *Göttingen*, (1763).
9. Taurinus, F.A., "Geometriae Prima Elementa" *Cologne*, 76-98 (1826).
10. Gauss, C. F., "Grundlagen der Geometriae", In: Carl Friedrich Gauss Werke, VIII.; *Teubner*, Leipzig, 157-268 (1900).
11. Bolyai, J. and Bolyai, F., "Geometrische Untersuchungen", *Teubner*, Leipzig and Berlin, 63-91 (1913).
12. Lobachevskii, N.I., "Zwei geometrische Abhandlungen", *Bibliotheca math. Teubneriana* 70, Teubner, Leipzig, 21-38 (1898).
13. Riemann, G., F., B., "Über die hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 13 (1854).
14. Beltrami, E., "Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea", *Giorn. Mat.*, 6, 248-312, (1868).
15. Poincare H., "Science et methode", *E. Flammarion* Paris, 124-177, (1908).

16. Thurston W.P., "Three dimensional geometry and Topology", *Princeton Univ. Pres. Princeton*, 142-168, (1997).
17. Gromov M.,L., "Hyperbolic Groups" *MSRI publication 8*: New York, 88-110 (1987).
18. Hacısalihoğlu,H.H., "İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere" *A.Ü.Fen Fakültesi, Ankara*, 18-43 (1998).
19. Ratcliffe, J.G., "Foundations of Hyperbolic Manifolds",*Springer-Verlag* , Berlin, (1994).
20. Blumenthal L. "Theory and applications of Distance Geometry", *Chelsea Publishing Company* , New York, 97-101, (1970).
21. Vinberg, E.B., "Geometry II, Encyclopaedia of Mathematical Sciences" 29, *Springer-Verlag*, 4-79, (1993).
22. O'neil, B., "Semi-Riemannian Geometry" , *Academic Press. London*,46-49, 54-57, 108-114, 143-144, (1983).
23. Berger, M. "Geometry I", *Springer-Verlag*, Berlin Heidelberg, 196-217, (1987).
24. Cho, E. C. "The generalized cross product and the volume of a Simplex" *Appl. Math. Lett.*, 4(6),51-53, (1991).
25. Erikson, F. "The law of sines for tetrahedra and simplices" *Geom. Dedicata* 7,71- 80,(1978).
26. Euler L., *Nov.Com.Petr.* 4, 158 (1752-53)
27. Schoute, P.H. "Mehrdimensionale Geometrie I", *Leipzig*, 214-217, (1902).
28. Sommerville, D.M.Y., "An introduction to the Geometry of n-dimensions" *London*, 135-147(1929).
29. Dörband W., "Determinantensätze und Simplexeigenschaften", *Math.Nachr.*, 44,295- 304(1970).
30. D'ovidio, E., "Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante",*Mem. R. Acc. Lincei*(3) 1, 929-986(1877)(A shorter French version of this paper in *Math. Ann.* 12, 403-418(1877).
31. Bloom, D.M. , "Linear algebra and geometry", *Cambridge University Press*, London, 364-369, (1979).

32. Shaw R., "Vector cross product in n-dimensions", *Int.J. Mat.Ed.Sci.Tec.* 18, 803-816(1987).
33. Luo, F., "On a problem of Fenchel", *Geom. Dedicata*, 64, 277-282,(1997).
34. Karliġa, B., "Edge matrix of Hyperbolic Simplices" , *Geom. Dedicata, Kluwer Acad. Pub.* Preprint.



ÖZGEÇMİŞ

Atakan Tuğkan YAKUT, 19.08.1971 yılında Kayseri ye bağlı Pınarbaşı ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri de tamamladı. 1992 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 1995 yılı Ocak ayında Iğdır Melekli 100. Yıl Orta Okuluna matematik öğretmeni, Eylül ayında Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 1999 yılında “Transversal Simetrik Afın Hiperyüzey İmmersiyonları” isimli tezi ile Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansını tamamladı. 2001 yılında YÖK’ ün 35. maddesi uyarınca Doktora çalışmalarını tamamlamak üzere Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne görevlendirildi. Atakan T. YAKUT evli ve bir çocuk babasıdır.