



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**HİPERBOLİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ
ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ertan GÜNDOĞDU

DANIŞMAN

Doç. Dr. Yunus ATALAN

AKSARAY, 2023

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 202342002 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Ertan GÜNDOĞDU tarafından hazırlanan “**HİPERBOLİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Yunus ATALAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN ÇOPUR

Necmettin Erbakan Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 20/01/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Ertan GÜNDOĞDU

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan her sorun yaşadığımda elinden geleni fazlasıyla yapan, samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli ve danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren Doç. Dr. Yunus ATALAN'a teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum. Tez jürimde bulunan saygıdeğer hocalarıma teşekkür ederim.

Her daim maddi manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim değerli aileme de ayrıca sonsuz teşekkür ederim.

Ertan GÜNDOĞDU
AKSARAY, 2023

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Fonksiyonel Analize Ait Bazı Kavramlar	3
2.2 Sabit Nokta Teorisine Ait Bazı Kavramlar	6
3. HİPERBOLİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ ÜZERİNE	
BAZI SONUÇLAR	14
3.1 Klasik Tipten Bazı Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri.....	14
3.2 Hiperbolik Tipten Bazı Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri.....	17
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	40
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ.....	46

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HİPERBOLİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Ertan GÜNDOĞDU

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yunus ATALAN

ÖZET

Normlu uzaylar gibi lineer yapılara çok benzeyen konvekslik özelliklerine sahip olan hiperbolik uzaylar, sabit nokta teorisi için verimli bir çalışma alanı olmuştur. İlgili literatür incelendiğinde klasik sabit nokta iterasyon yöntemlerinin hiperbolik uzaylara taşınmasıyla birçok sabit nokta teoreminin elde edildiği görülebilir. Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde sabit nokta teorisine dair literatür bilgisi verilmiştir.

İkinci bölümde klasik analiz ve fonksiyonel analize ait temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde bazı sabit nokta iterasyon yöntemleri ile yeni iterasyon yöntemine yer verilmiş ve bu yöntem kullanılarak yakınsaklık, yakınsaklık denkliği, yakınsaklık hız analizi ve veri bağılılığı gibi bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde bu çalışmada elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve ileride yapılabilecek olası çalışmalara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Normlu uzaylar, Hiperbolik uzaylar, Sabit nokta, İterasyon Yöntemi, Yakınsaklık, Yakınsaklık denkliği, Yakınsaklık Hızı, Veri Bağılılığı

Ocak 2023; 46 sayfa

M.Sc. THESIS

SOME RESULTS ON THE FIXED POINT THEORY IN HYPERBOLIC SPACES

Ertan GÜNDOĞDU

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yunus ATALAN

ABSTRACT

Hyperbolic spaces, which have convexity properties very similar to linear structures such as normed spaces, have been a productive field of study for fixed point theory. When the relevant literature is examined, it can be seen that many fixed point theorems are obtained by transferring the classical fixed point iteration methods to hyperbolic spaces. This thesis consists of four parts.

In the first chapter, literature information about fixed point theory is given.

In the second part, the basic concepts of classical analysis and functional analysis are given.

In the third chapter, some fixed point iteration methods, and newly defined iteration method are given and some fixed point theorems such as convergence, the equivalence of convergence, convergence speed, and data dependency are obtained by using this method.

In the fourth chapter, the results obtained in this study are summarized and possible future studies are given.

Keywords: Normed spaces, Hyperbolic spaces, Fixed point, Iteration method, Convergence, Equivalence of convergence, Convergence speed, Data Dependency

January, 2023; 46 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. (3.21) şartını sağlayan bir T dönüşümünün sabit noktasının olmadığını gösterir grafik	21
--	----



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Hiperbolik tipten bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklığı.....	35
Çizelge 3.2. Hiperbolik tipten bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklığı.....	35
Çizelge 3.3. Hiperbolik tipten bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklığı.....	35



SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N} \cup \{0\}$	Sıfır eklenmiş doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{D}$	Cisim ($\mathbb{D} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{D} = \mathbb{C}$) uzayı
$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$	X üzerinde tanımlı metrik fonksiyonu
$\ \cdot\ : X \rightarrow \mathbb{F}$	X üzerinde tanımlı norm fonksiyonu
(X, d)	Metrik Uzay
$(X, \ \cdot\)$	Normlu uzay
$T: X \rightarrow Y$	X kümesinden Y kümesine tanımlı T dönüşümü
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$T^n(x)$	x noktasının T dönüşümü altındaki n . iterasyonu
$T(x)$	x noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü
$\text{card}F(T)$	$F(T)$ kümesinin kardinalitesi

1. GİRİŞ

Günlük hayatta değişik noktalarda karşılaşılan cebir ve analize ait problemlerin modellenmesine dair yapılan çalışmalarda temel oluşturmak için ihtiyaç duyulan sabit nokta teorisi, uygun değişikliklerle söz konusu problemlerin çözümüne ulaşmayı hedefler.

Tarihsel olarak sabit nokta teorisinin kökeni diferansiyel denklemler üzerine yaptıkları çalışmalarıyla bilinen Fransız matematikçiler Picard ve Poincare'a dayansa da sabit nokta teorisinin başlangıcı, kanıtlanmış ilk sabit nokta teoremi olarak bilinen Brouwer'ın klasik teoremine atfedilir. Ancak sabit nokta kavramının uygun bir çerçevede geniş bir uygulama alanına sahip olmasında Polonyalı matematikçi Banach'ın rolü büyüktür. 1922 yılında Banach'ın ispatlamış olduğu ve Banach Büzülme İlkesi olarak bilinen teorem, tam metrik uzaylarda daralma dönüşümü yardımıyla oluşturulan Picard iterasyon dizisinin bu dönüşümün tek olan sabit noktasına yakınsayacağını söyler [1].

Banach'ın bu teoremi uygulamalı matematikte olduğu kadar matematiğin diğer dallarında da etkisini göstermiş ve hızlı bir gelişimin önünü açarak birçok araştırmacının bu teoremi farklı yapılarla genişletmesini sağlamış ve bu sayede birçok yeni sabit nokta teoremi literatüre kazandırılmıştır (bkz [2-8]).

Banach uzaylarının geometrisi ile sabit nokta teorisi arasındaki ilişki çok faydalı ve güçlü olmuştur. Özellikle sabit nokta problemlerinde çalışılan uzayın geometrik özelliğinin kilit bir rolü vardır. Bu problemlerde ağırlıklı olarak konvekslik özelliği ve Banach uzaylarının diğer geometrik özellikleri kullanılmaktadır. Her Banach uzayı bir vektör uzayı olduğundan, bu uzaylara konveks bir yapı vermek daha kolaydır. Bu nedenle Banach uzaylarının geometrisi konveks yapıları ile yoğun bir şekilde çalışılmıştır (bkz. [9-12]). Ancak metrik uzaylarda konveks bir yapı elde etmek daha zordur. Bu zorluk Takahashi'nin metrik uzaylarda konvekslik kavramını tanımlamasıyla aşılmıştır [13].

Gerçek hayatta karşılaşılan birçok problem lineer olmayan formda ifade edilebildiği için bu problemlerin Banach uzayları gibi lineer yapılar yerine lineer olmayan yapılarda incelenmesi daha gerçekçi bir yaklaşımdır. Bu noktada, lineer

olmayan yapısı ve zengin geometrik özelliği nedeniyle hiperbolik uzay, bu problemlerin incelenmesinde sabit nokta teorisi için iyi bir matematiksel çerçeve sunmaktadır. Hiperbolik uzaylar, lineer uzaylara çok benzeyen konvekslik özelliklerine sahiptir. Bu uzay sınıfı, tüm normlu vektör uzaylarını, Hadamard manifoldlarını, CAT(0) uzayını, Hilbert yuvarını, Hilbert yuvarlarının kartezyen çarpımını ve R-trees gibi yapıları içerir.

2005 yılında, Kohlenbach [14] tarafından tanımlanan hiperbolik uzaylar, Geobel ve Kirk [15] tarafından verilen hiperbolik uzay tanımına göre daha kısıtlı ve Reich ve Shafrir [16] tarafından ortaya atılan hiperbolik uzay tanımından ise daha geneldir.

Bu çalışmaların bir sonucu olarak klasik sabit nokta iterasyon yöntemleri hiperbolik uzaylara taşınarak birçok sabit nokta teoremi elde edilmiştir (bkz. [17-20]).

Bu tez çalışmasında herhangi bir normlu uzayda tanımlanan yeni bir sabit nokta iterasyon yönteminin hiperbolik uzaylarda yeniden ifade edilmesiyle birlikte yakınsaklık, yakınsaklık denkliği, yakınsama hızının analizi ve veri bağıllığı gibi sabit nokta teoremleri irdelenmiştir. Elde edilen bazı sonuçlar nümerik örnekler yardımıyla desteklenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez çalışmasında temel teşkil eden bazı kavramlara yer verilmiştir.

2.1 Fonksiyonel Analize Ait Bazı Kavramlar

Tanım 2.1.1. M boştan farklı herhangi bir küme ve $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in M$ için;

- i. $\rho(x, y) \geq 0$
- ii. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- iii. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- iv. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

şartları sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna M üzerinde bir metrik, (M, ρ) ikilisine de bir metrik uzay denir [21].

Tanım 2.1.2. (M, ρ) bir metrik uzay olmak üzere bu uzayda $\{x_n\}$ dizisi ve bir $a \in M$ noktası verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N_0$ olduğunda, $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_0 = N_0(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, $\{x_n\}$ dizisine $a \in M$ noktasına yakınsaktır denir [22].

Tanım 2.1.3. (M, ρ) bir metrik uzay olmak üzere bu uzayda $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > N_0$ olduğunda $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_0 = N_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir [21].

Tanım 2.1.4. (M, ρ) bir metrik uzay olmak üzere eğer bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, M uzayına tam metrik uzay denir [22].

Tanım 2.1.5. (M, ρ) ve (N, ζ) iki metrik uzay, $\tau: M \rightarrow N$ bir dönüşüm ve $a_0 \in M$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $\rho(a, a_0) < \zeta$ olduğunda $\zeta(\tau(a), \tau(a_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\zeta = \zeta(a_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa, τ dönüşümüne a_0 noktasında süreklidir denir. Eğer τ dönüşümü X in her noktasında sürekli ise τ ya M de süreklidir denir [23].

Yukarıdaki tanımda adı geçen $\zeta > 0$ sayısı sadece ε 'a bağlı ise, τ dönüşümüne düzgün sürekli dönüşüm adı verilir. Şimdi metrik uzaylarda noktasal süreklilik ile dizisel süreklilik kavramlarının denk olduğunu gösteren aşağıdaki teoremi verelim [24].

Teorem 2.1.6. (M, ρ) ve (N, ς) iki metrik uzay olmak üzere $\tau: M \rightarrow N$ dönüşümü ve $a_0 \in M$ noktası verilsin. Aşağıdakiler denktir:

a) $\tau: M \rightarrow N$ dönüşümü $a_0 \in M$ noktasında süreklidir.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ koşulunu sağlayan her yakınsak (a_n) dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(a_n) = \tau(a_0).$$

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.1.7. (M, ρ) ve (N, ς) iki metrik uzay olmak üzere $\tau: X \rightarrow Y$ dönüşümü verilsin. τ dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul M uzayındaki yakınsak her (a_n) dizisi için $\tau\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(a_n)$ eşitliğinin sağlanmasıdır [23].

Sonuç olarak herhangi bir fonksiyonun sürekliliği için gerek ve yeter şartın bu fonksiyonun yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştürmesi olduğu görülür [23].

Tanım 2.1.8. $\Phi \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbb{D}$ bir cisim olsun. $+: \Phi \times \Phi \rightarrow \Phi$ ve $\cdot: \mathbb{D} \times \Phi \rightarrow \Phi$ işlemleri tanımlansın. Eğer her $x_1, x_2, x_3 \in \Phi$ ve her $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{D}$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, Φ kümesine $\mathbb{D}$ cismi üzerinde vektör uzayı denir:

$$\Phi_1. x_1 + x_2 \in \Phi.$$

$$\Phi_2. x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3.$$

$$\Phi_3. x_1 + \theta = \theta + x_1 = x_1 \text{ olacak şekilde } \theta \in \Phi \text{ vardır.}$$

$$\Phi_4. x_1 + (-x_1) = (-x_1) + x_1 = \theta \text{ olacak şekilde } -x_1 \in \Phi \text{ vardır.}$$

$$\Phi_5. x_1 + x_2 = x_2 + x_1.$$

$$\Phi_6. \eta_1 \cdot x_1 \in \Phi.$$

$$\Phi_7. \eta_1 \cdot (x_1 + x_2) = \eta_1 \cdot x_1 + \eta_1 \cdot x_2.$$

$$\Phi_8. (\eta_1 + \eta_2) \cdot x_1 = \eta_1 \cdot x_1 + \eta_2 \cdot x_1.$$

$$\Phi_9. (\eta_1 \cdot \eta_2) \cdot x_1 = \eta_1 \cdot (\eta_2 \cdot x_1).$$

$$\Phi_{10}. 1 \cdot x_1 = x_1.$$

$\mathbb{D}$ cisminin reel ya da kompleks olmasına göre Φ 'ye sırasıyla reel veya kompleks vektör uzay adı verilir [24].

Tanım 2.1.9. Φ bir vektör uzay ve $K \subset \Phi$ olsun. Her $x_1, x_2 \in K$ için

$$A = \{\varphi \in \Phi: \varphi = \eta_1 x_1 + (1 - \eta_1)x_2, 0 \leq \eta_1 \leq 1\} \subset K$$

ise K kümesine konvektir denir [23].

Tanım 2.1.10. $\mathcal{N}$ bir vektör uzay olsun ve $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ olmak üzere, $\|\cdot\|: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{D}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x_1, x_2 \in \mathcal{N}$ ve her $\eta_1 \in \mathbb{D}$ için

$$\mathcal{N}_1. \|x_1\| = 0 \Leftrightarrow x_1 = \theta$$

$$\mathcal{N}_2. \|\eta_1 \cdot x_1\| = |\eta_1| \cdot \|x_1\|$$

$$\mathcal{N}_3. \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$$

koşulları sağlanırsa $\|\cdot\|$ fonksiyonu $\mathcal{N}$ üzerinde bir norm, $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ ikilisi de normlu uzay adını alır [25].

Tanım 2.1.11. $\mathcal{N}$ normlu uzay ve $x_1, x_2 \in \mathcal{N}$ olsun. Eğer $\mathcal{N}$ uzayı, $\rho(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğine göre tam ise $\mathcal{N}$ 'ye Banach uzayı denir [26].

Tanım 2.1.12. $\mathcal{N}$ bir normlu uzay ve $\{a_n\}$, $\mathcal{N}$ uzayında bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, a) = 0$$

olacak şekilde bir $a \in \mathcal{N}$ varsa $\{a_n\}$ dizisi a noktasına kuvvetli yakınsaktır denir ve bu durum kısaca $a_n \rightarrow a$ ile gösterilir. Buradaki a noktasına $\{a_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti adı verilir [21].

2.2. Sabit Nokta Teorisine Ait Bazı Kavramlar

Tanım 2.2.1. X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer

$$Tx = x \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T 'nin sabit noktası denir ve T 'nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir [27].

Örnek 2.2.2

- i. Eğer $X = [0,4]$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = \sqrt{x^2 - 7x + 28}$ ise $F(T) = \{4\}$.
- ii. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = x + 8$ ise $F(T) = \emptyset$.
- iii. Eğer $X = [0,1]$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = \ln x + \frac{1}{x}$ ise $F(T) = \{1\}$.
- iv. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = x^2 - 2x$ ise $F(T) = \{0,3\}$.

Tanım 2.2.3. X bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \cdot d(x, y) \quad (2.2)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcut ise T 'ye bir Lipschitzian dönüşüm denir [27].

Her Lipschitzian dönüşümün düzgün sürekli olduğu açıktır.

Örnek 2.2.4. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = 5x - 1$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = |5x - 1 - (5y - 1)| = 5|x - y| = 5d(x, y)$$

elde edilir. Yani $\delta \geq 5$ için T dönüşümü Lipschitzian dönüşüm şartını sağlar.

Tanım 2.2.5. X bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \cdot d(x, y) \quad (2.3)$$

eşitsizliği en az bir $\delta \in [0,1)$ sayısı için sağlanıyorsa T 'ye contraction (daraltan) dönüşüm denir [27].

Banach [1] yukarıda tanımı verilen contraction dönüşümün hangi şartlar altında sabit noktaya sahip olacağını karakterize eden aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

Teorem 2.2.6. X bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir contraction dönüşüm olsun. Bu durumda

- i. T dönüşümü X uzayında bir tek u sabit noktaya sahiptir;
- ii. Herhangi bir $x_0 \in X$ başlangıç noktası için

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

eşitliğiyle verilen Picard iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi u noktasına yakınsar.

İspat: Başlangıç noktası olan $x_0 \in X$ için (2.4) eşitliğinden elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilmelidir. Dolayısıyla $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için (2.3) şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
d(x_{n+p}, x_n) &= d(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \\
&\leq \delta d(x_{n+p-1}, x_{n-1}) \\
&= \delta d(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \\
&\leq \delta^2 d(x_{n+p-2}, x_{n-2}) \\
&\vdots \\
&\leq \delta^n d(x_{n+p-n}, x_{n-n}) \\
&= \delta^n d(x_p, x_0) \\
&\leq \delta^n (d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_0)) \\
&\leq \delta^n (\delta d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-2}, x_0)) \\
&= \delta^n (d(x_{p-2}, x_0) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \delta d(x_{p-1}, x_{p-2})) \\
&\leq \delta^n [d(x_{p-2}, x_0) + \delta d(x_{p-2}, x_{p-3}) + \delta^2 d(x_{p-2}, x_{p-3})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& \leq \delta^n [d(x_1, x_0) + \delta d(x_1, x_0) + \delta^2 d(x_1, x_0) + \dots] \\
& = \delta^n d(x_1, x_0) (1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots) \\
& = \delta^n d(x_1, x_0) \left(\frac{1}{1 - \delta} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \left(\frac{\delta^n}{1 - \delta} \right) d(x_1, x_0)$$

olduğu elde edilir. $0 \leq \delta < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d(x_{n+p}, x_n) \rightarrow 0$ olur. Bu da $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir X 'te bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, d) uzayı tam olduğundan $x_n \rightarrow u$ olacak şekilde bir $u \in X$ elemanı vardır ve dolayısıyla da $x_{n+1} \rightarrow u$ yazılabilir. T dönüşümü sürekli olduğundan $Tx_n \rightarrow Tu$ olup $x_{n+1} = Tx_n$ denkleminde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $u = Tu$ elde edilir. Şimdi bu sabit noktanın tek olduğu gösterilmelidir. $\delta \in [0, 1)$ olmak üzere T dönüşümünün v gibi başka bir sabit noktası olsun. O halde

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \delta \cdot d(u, v) \Rightarrow (1 - \delta)d(u, v) \leq 0$$

elde edilir. $u \neq v$ olduğundan çelişki elde edilir. Dolayısıyla T bir tek sabit noktaya sahiptir. Bu ise ispatı tamamlar.

Bu teoremdaki (i) ve (ii) şartlarını sağlayan dönüşüme Picard operatörü denir. Yani bir tam metrik uzay üzerinde tanımlı, yalnızca bir tane sabit noktaya sahip olan kendi üzerine bir dönüşüm kullanılarak elde edilen Picard iterasyon dizisi, bu sabit noktaya yakınsak ise bu dönüşüm Picard operatörü olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.7. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \tag{2.5}$$

ise, T 'ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir [27].

Örnek 2.2.8. X Banach uzayı olsun. $T: X \rightarrow X$ dönüşümü, $T(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{25}$ şeklinde tanımlansın. O zaman T genişlemeyen bir dönüşümdür.

Çözüm: Gerçekten de her $x, y \in X$ ve $y \neq 0$ için

$$\|T(x) - T(y)\| = \left\| \frac{x}{4} + \frac{1}{25} - \left(\frac{y}{4} + \frac{1}{25} \right) \right\| = \left\| \frac{x}{4} - \frac{y}{4} \right\| = \frac{\|x - y\|}{4} \leq \|x - y\|$$

Örnek 2.2.9. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Tx = x + 15$ olsun. O halde

$$d(Tx, Ty) = |x + 15 - (y + 15)| = |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartı sağlanır. Dolayısıyla T genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu dönüşümün bir sabit noktası yoktur.

Teorem 2.2.6 ile verilen Banach Büzülme İlkesi'nde kullanılan dönüşümün sürekli olduğuna dikkat edilmelidir. Sürekli olma şartı taşımayan dönüşümler aracılığıyla bu teoremin birçok genellemesi yapılmıştır. Bu teoremlerden birisi 1968 yılında Kannan [28] tarafından ispatı verilen aşağıdaki teoremdir:

Teorem 2.2.10. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq a[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \quad (2.6)$$

olacak şekilde en az bir $a \in [0, \frac{1}{2})$ sayısı bulunabilirse, T bir Picard operatörüdür.

İspat: T dönüşümü (2.6) şartını sağlıyorsa, bu durumda $\text{card}F(T) \leq 1$ olur. $x_0 \in X$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0$ eşitliği ile verilen Picard iterasyonunu göz önüne alalım. (2.6)'dan

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq a[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]$$

veya

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{a}{1-a} d(x_{n-1}, x_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

yazılabilir. $a \in [0, \frac{1}{2})$ için $0 \leq \frac{a}{1-a} < 1$ olduğundan, Teorem 2.2.6'nın ispatında izlenen yola benzer şekilde $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin X 'te bir Cauchy dizisi olduğu ve dolayısıyla da bu uzayda yakınsak bir dizi olduğu sonucuna ulaşılır. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin limiti $x_* \in X$ olsun. Bu durumda,

$$d(x_*, Tx_*) \leq d(x_*, x_n) + d(x_n, Tx_*) \leq d(x_*, x_n) + a[d(x_n, x_{n-1}) + d(x_*, Tx_*)]$$

olup, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_*, Tx_*) \leq \frac{1}{1-a} d(x_*, x_n) + \frac{a}{1-a} d(x_{n-1}, x_n), \quad (2.8)$$

olduğu sonucuna ulaşılır. (2.7) ve (2.8)' den $n = 1, 2 \dots$ olmak üzere

$$d(x_*, Tx_*) \leq \frac{1}{1-a} d(x_*, x_n) + \left(\frac{a}{1-a}\right)^n d(x_0, x_1), \quad (2.9)$$

elde edilir. (2.9) ile verilen eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_*, Tx_*) = 0 \Leftrightarrow x_* = Tx_*$$

yani $F(T) = \{x_*\}$ olduğu görülür. Böylece her bir $x_0 \in X$ için $x_n \rightarrow x_*$ olur.

Örnek 2.2.11. $X = \mathbb{R}$ olsun ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$Tx = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ -\frac{1}{6}, & x > 1 \end{cases}$$

Bu durumda

- i. T sürekli değildir.
- ii. T dönüşümü (2.6) ile verilen şartı sağlar.

Çözüm: T dönüşümünün sürekli olmadığı açıktır. (ii) önermesini göstermek için aşağıdaki durumlar göz önüne alınmalıdır:

Durum I: Eğer $x \leq 1$ ve $y \leq 1$ ise

$$|Tx - Ty| = 0 \leq a[|x| + |y|]$$

eşitsizliği her $a \in [0, \frac{1}{2})$ için sağlanır.

Durum II: Eğer $x > 1$ ve $y > 1$ ise, Durum I'deki sonuç elde edilir.

Durum III: Eğer $x > 1$ ve $y \leq 1$ ise,

$$|Tx - Ty| = \frac{1}{6} \leq a \left[\left| x + \frac{1}{6} \right| + |y| \right]$$

eşitsizliği $a = \frac{1}{7}$ için sağlanır.

Durum IV: Eğer $x \leq 1$ ve $y > 1$ ise,

$$|Tx - Ty| = \frac{1}{6} \leq a \left[|x| + \left| y + \frac{1}{6} \right| \right]$$

eşitsizliği $a = \frac{1}{7}$ için sağlanır.

Sonuç olarak T dönüşümü (2.6) ile verilen şartı sağlar.

Kannan teoremindeki düşünceden hareketle T 'nin sürekli olmasını gerektirmeyen birçok dönüşüm kullanılarak bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir [29-31]. Bu teoremlerden biri Chatterjea [32] tarafından (2.6) şartına benzer bir şart kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

Teorem 2.2.12. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \quad (2.10)$$

olacak şekilde en az bir $b \in [0, \frac{1}{2})$ sayısı varsa T bir Picard operatörüdür.

Rhoades [33] tarafından verilen bir örnekte (2.2) ile verilen contractive olma şartı ile (2.6) ve (2.10) ile verilen contractive olma şartlarının birbirlerinden bağımsız oldukları

gösterilmiştir. 1972 yılında Zamfirescu, [34] ile verilen çalışmasında (2.2), (2.6) ve (2.10) şartlarını bir araya getirerek aşağıda verilen önemli sonucu elde etti:

Teorem 2.2.13. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$(z_1) \quad d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y)$$

$$(z_2) \quad d(Tx, Ty) \leq a[d(x, Tx) + d(y, Ty)],$$

$$(z_3) \quad d(Tx, Ty) \leq b \cdot [d(x, Ty) + d(y, Tx)],$$

koşullarından en az birisinin doğru olacağı şekilde, $\delta \in [0,1)$ ile $0 < a, b < \frac{1}{2}$ şartlarını sağlayan δ, a ve b reel sayıları varsa, bu durumda T bir Picard operatörüdür.

İspat: $x, y \in X$ alalım ve (z_1) , (z_2) veya (z_3) şartlarından en az biri doğru olsun.

i. Eğer (z_2) doğru ise,

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq a[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \\ &\leq a\{d(x, Tx) + [d(y, x) + d(x, Tx) + d(Tx, Ty)]\} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$(1 - a)d(Tx, Ty) \leq 2ad(x, Tx) + ad(x, y)$$

veya

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{2a}{1-a}d(x, Tx) + \frac{a}{1-a}d(x, y)$$

ii. Eğer (z_3) doğru ise,

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{2b}{1-b}d(x, Tx) + \frac{b}{1-b}d(x, y)$$

olur. Bu durumda

$$\lambda := \left\{ \delta, \frac{a}{1-a}, \frac{b}{1-b} \right\}$$

şeklinde seçilirse $\lambda \in [0,1)$ olur ve her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq 2\lambda d(x, Tx) + \lambda d(x, y) \quad (2.11)$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde, her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq 2\lambda d(x, Ty) + \lambda d(x, y) \quad (2.12)$$

eşitsizliği elde edilir. (2.11)'den $\text{card}F(T) \leq 1$ olduğu görülür. Şimdi T 'nin bir tek sabit noktaya sahip olduğu gösterilmelidir. $x_0 \in X$ keyfi bir başlangıç noktası olsun ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = Tx_n$ eşitliği ile verilen Picard iterasyonundan elde edilen dizi olsun. Eğer

$$x := x_n$$

$$y := x_{n-1}$$

iki ardışık yaklaşım ise, bu durumda (2.12)'den

$$d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq 2\lambda d(x_n, Tx_{n-1}) + \lambda d(x_n, x_{n-1})$$

yani,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1})$$

olduğu elde edilir. Buradan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nin bir Cauchy dizisi olduğu ve böylece yakınsak olduğu sonucuna ulaşılır. $x_* \in X$ bu dizinin limiti olsun. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$ olur. (2.11) ile verilen eşitsizlikle birlikte üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} d(x_*, Tx_*) &\leq d(x_*, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tx_*) \\ &\leq d(x_*, x_{n+1}) + \lambda d(x_*, x_n) + 2\lambda d(x_n, Tx_n) \end{aligned}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için $d(x_n, Tx_n) = d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ olduğundan

$$d(x_*, Tx_*) = 0 \Leftrightarrow x_* = Tx_*$$

bulunur. Yani her bir $x_n \in X$ için $F(T) = \{x_*\}$ ve $x_n \rightarrow x_*$ ($n \rightarrow \infty$) dir.

3. HİPERBOLİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde literatürdeki bazı klasik sabit nokta iterasyon yöntemleri ile bu yöntemlerin hiperbolik tipte yazılmasıyla elde edilen yöntemlere yer verilmiştir. Ayrıca yeni hiperbolik tipte iterasyon yöntemi aracılığıyla elde edilen sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır:

3.1 Klasik Tipten Bazı Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri

X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun:

Tanım 3.1.1

$$x_{n+1} = Tx_n = T^n x_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

eşitliğiyle verilen yönteme Picard iterasyon yöntemi denir [35].

Örnek 3.1.2 $u(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt$ Volterra integral denkleminde $u_0(x) = 0$ başlangıç koşulu altında Picard iterasyonu uygulansın. Bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerli olacaktır:

$$u_{n+1}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 u_n(t)dt \quad (n \geq 0)$$

Başlangıç koşulu yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$u_1(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2$$

$$u_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5,$$

$$u_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{8!}x^8$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse yukarıda verilen eşitliğin çözümü

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) = e^x$$

şeklinde olur [36].

Teorem 2.2.6’da verilen contraction olma şartı değiştirildiğinde Picard iterasyon yönteminden elde edilen dizinin limiti mevcut olmayabilir. Aşağıda verilen örnek bu durumu göstermektedir:

Örnek 3.1.3 $C = [0,5] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $T: C \rightarrow C$, $Tx = 5 - x$ dönüşümü tanımlansın. T genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ dir. Herhangi bir $x_0 = m \neq \frac{5}{2}$ noktası için (3.1) ile verilen Picard iterasyonu kullanılırsa

$$x_1 = Tx_0 = 5 - m$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2x_0 = m$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = 5 - m$$

$$\vdots$$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \dots = T^n x_0$$

$$\vdots$$

olur. Yani $(5 - m, m, 5 - m, m, \dots)$ dizisi elde edilir. Bu dizinin $m \neq \frac{5}{2}$ için yakınsak olmadığı açıktır. Dolayısıyla Picard iterasyonu genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamayabilir. Bu nedenle araştırmacılar yeni iterasyon yöntemleri tanımlayarak farklı dönüşüm sınıfları için de bu yöntemler üzerine çalışmışlardır.

Tanım 3.1.4 $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n \quad (3.2)$$

eşitliğiyle verilen yönteme Mann iterasyon yöntemi denir [37].

Tanım 3.1.5 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n Tv_n \\ v_n = (1 - \beta_n)u_n + \beta_n Tu_n \end{cases} \quad (3.3)$$

eşitliğiyle verilen yöntem Ishikawa-iterasyon yöntemi denir [38].

Tanım 3.1.6 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, \end{cases} \quad (3.4)$$

eşitliğiyle verilen yöntem Noor iterasyon yöntemi denir [39].

Tanım 3.1.7 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 - \alpha_n)v_n + \alpha_n T v_n \\ v_n = (1 - \beta_n)w_n + \beta_n T w_n \\ w_n = (1 - \gamma_n)u_n + \gamma_n T u_n \end{cases} \quad (3.5)$$

eşitliğiyle verilen yöntem SP iterasyon yöntemi denir [40].

Tanım 3.1.8 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)T x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \quad (3.6)$$

eşitliğiyle verilen yöntem CR iterasyon yöntemi denir [41].

Tanım 3.1.9 $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = T y_n \\ y_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \end{cases} \quad (3.7)$$

eşitliğiyle verilen yöntem Picard-Mann-iterasyon yöntemi denir [42].

Tanım 3.1.10 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 - \alpha_n)T u_n + \alpha_n T v_n \\ v_n = (1 - \beta_n)u_n + \beta_n T u_n \end{cases} \quad (3.8)$$

eşitliğiyle verilen yöntem Agarwal-S-iterasyon yöntemi denir [43].

Tanım 3.1.11 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} m_{n+1} = (1 - \alpha_n)Ts_n + \alpha_n Tk_n \\ s_n = (1 - \beta_n)Tm_n + \beta_n Tk_n \\ k_n = (1 - \gamma_n)m_n + \gamma_n Tm_n \end{cases} \quad (3.9)$$

eşitliğiyle verilen yöntem Abbas-Nazır iterasyon yöntemi denir [44].

3.2 Hiperbolik Tipten Bazı Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri

Literatürde farklı şekillerde ifade edilen hiperbolik uzay kavramları bulunabilir [15,16, 45,46]. Ancak bu çalışmada Kohlenbach [14] tarafından aşağıdaki şekilde verilen hiperbolik uzay tanımı esas alınmıştır:

Tanım 3.2.1. (M, d) bir metrik uzay ve her $x, y, z, w \in M$ ve $\alpha, \beta \in [0,1]$ için $W: M \times M \times [0,1] \rightarrow M$ konvekslik fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa (M, d, W) üçlüsüne hiperbolik uzay denir:

- (Θ_1) $d(z, W(x, y, \alpha)) \leq (1 - \alpha)d(z, x) + \alpha d(z, y);$
- (Θ_2) $d(W(x, y, \alpha), W(x, y, \beta)) = |\alpha - \beta| d(x, y);$
- (Θ_3) $W(x, y, \alpha) = W(y, x, 1 - \alpha);$
- (Θ_4) $d(W(x, z, \alpha), W(y, w, \alpha)) \leq (1 - \alpha)d(x, y) + \alpha d(z, w).$

(M, d) metrik uzayı $W: M \times M \times I \rightarrow M$ dönüşümü ile birlikte göz önüne alınsın. Bu durumda;

- (M, d) uzayı yukarıda verilen özelliklerden yalnızca (Θ_1) koşulunu sağlarsa bu durumda (M, d) uzayına Takahashi [13] anlamında konveks metrik uzay denir.
- (M, d) uzayı $(\Theta_1 - \Theta_3)$ koşullarını sağlarsa bu durumda (M, d) uzayına Goebel-Kirk [15] tipinde hiperbolik uzay denir.
- (Θ_4) koşulu Reich ve Shafrir [16] tarafından hiperbolik uzaylar sınıfını tanımlamak için kullanılmıştır.

X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Yukarıda verilen klasik sabit nokta iterasyon yöntemlerinin hiperbolik tipte yeniden yazılmasıyla aşağıdaki iterasyon yöntemleri elde edilir:

Tanım 3.2.2 $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = W\{x_n, Tx_n, \alpha_n\} \quad (3.10)$$

eşitliğiyle verilen yönteme hiperbolik tipten Mann iterasyon yöntemi denir.

Tanım 3.2.3 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} u_{n+1} = W\{u_n, Tv_n, \alpha_n\} \\ v_n = W\{u_n, Tu_n, \beta_n\} \end{cases} \quad (3.11)$$

eşitliğiyle verilen yönteme hiperbolik tipten Ishikawa iterasyon yöntemi denir.

Tanım 3.2.4 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\{x_n, Ty_n, \alpha_n\} \\ y_n = W\{x_n, Tz_n, \beta_n\} \\ z_n = W\{x_n, Tx_n, \gamma_n\} \end{cases} \quad (3.12)$$

eşitliğiyle verilen yönteme hiperbolik tipten Noor iterasyon yöntemi denir.

Tanım 3.2.5 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} u_{n+1} = W\{v_n, Tv_n, \alpha_n\} \\ y_n = W\{w_n, Tw_n, \beta_n\} \\ z_n = W\{u_n, Tu_n, \gamma_n\} \end{cases} \quad (3.13)$$

eşitliğiyle verilen yönteme hiperbolik tipten SP iterasyon yöntemi denir.

Tanım 3.2.6 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\{y_n, Ty_n, \alpha_n\} \\ y_n = W\{Tx_n, Tz_n, \beta_n\} \\ z_n = W\{x_n, Tx_n, \gamma_n\} \end{cases} \quad (3.14)$$

eşitliğiyle verilen yönteme hiperbolik tipten CR iterasyon yöntemi denir.

Tanım 3.2.7 $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = W\{x_n, Tx_n, \alpha_n\} \end{cases} \quad (3.15)$$

eşitliğiyle verilen yönteme hiperbolik tipten Picard-Mann iterasyon yöntemi denir.

Tanım 3.2.8 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} u_{n+1} = W\{Tu_n, Tv_n, \alpha_n\} \\ v_n = W\{u_n, Tu_n, \beta_n\} \end{cases} \quad (3.16)$$

eşitliğiyle verilen yöntem hiperbolik tipten Agarwal-S iterasyon yöntemi denir.

Tanım 3.2.9 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} m_{n+1} = W\{Ts_n, Tk_n, \alpha_n\} \\ s_n = W\{Tm_n, Tk_n, \beta_n\} \\ k_n = W\{m_n, Tm_n, \gamma_n\} \end{cases} \quad (3.17)$$

eşitliğiyle verilen yöntem hiperbolik tipten Abbas-Nazır iterasyon yöntemi denir.

Yukarıda bir kısmı verilen iterasyon süreçlerinden esinlenerek yeni tanımlamış olduğumuz dört adım klasik sabit nokta iterasyonu şu şekildedir:

Tanım 3.2.10 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\mu_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Ty_n + \alpha_nTz_n \\ y_n = (1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)w_n + \gamma_nTw_n \\ w_n = (1 - \mu_n)x_n + \mu_nTx_n \end{cases} \quad (3.18)$$

Bu yöntemin hiperbolik tipte yeniden yazılmasıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

Tanım 3.2.11 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\mu_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\{Ty_n, Tz_n, \alpha_n\} \\ y_n = W\{Tx_n, Tz_n, \beta_n\} \\ z_n = W\{w_n, Tw_n, \gamma_n\} \\ w_n = W\{x_n, Tx_n, \mu_n\} \end{cases} \quad (3.19)$$

Tanım 3.2.12. X bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + \varphi(d(x, Tx)) \quad (3.20)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\delta \in [0,1)$ sabiti ve $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, sürekli ve kesin artan bir φ fonksiyonu bulunabilirse bu dönüşüme contractive like dönüşümü denir [47].

X 'in bir normlu uzay olması durumunda $d(x, y) = \|x - y\|$ eşitliği kullanılarak (3.20) ile verilen ifade aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\|Tx - Ty\| \leq \delta \|x - y\| + \varphi(\|x - Tx\|) \quad (3.21)$$

Bu tanım, Berinde [48], Harder ve Hicks [49], Zamfirescu [34], Osilike ve Udomene [50] tarafından yapılan tanımlardan daha geneldir. Birçok matematikçi, bu dönüşümün bir tek sabit noktaya sahip olduğu kabulü altında bazı sabit nokta teoremleri elde etmiştir (bkz. [51-55]). Ancak, Atalan ve Karakaya [18] tarafından X tam uzay olsa bile bu dönüşümün sabit noktaya sahip olmayabileceği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir:

Örnek 3.2.13 $X = [0, 1]$ olmak üzere $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $Tx = \frac{1}{e^x} + \frac{1}{2}\sin x^2 + 0.75$ ile tanımlanan dönüşümü göz önüne alalım. T dönüşümünün (3.21) koşulunu sağladığını göstermeliyiz. $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\varphi(t) = \frac{t}{40}$ şeklinde seçelim. φ fonksiyonunun artan, sürekli ve $\varphi(0) = 0$ koşulunu sağladığı açıktır. T dönüşümü kullanılarak

$$|Tx - Ty| = |e^{-x} - e^{-y} + \frac{1}{2}(\sin x^2 - \sin y^2)|$$

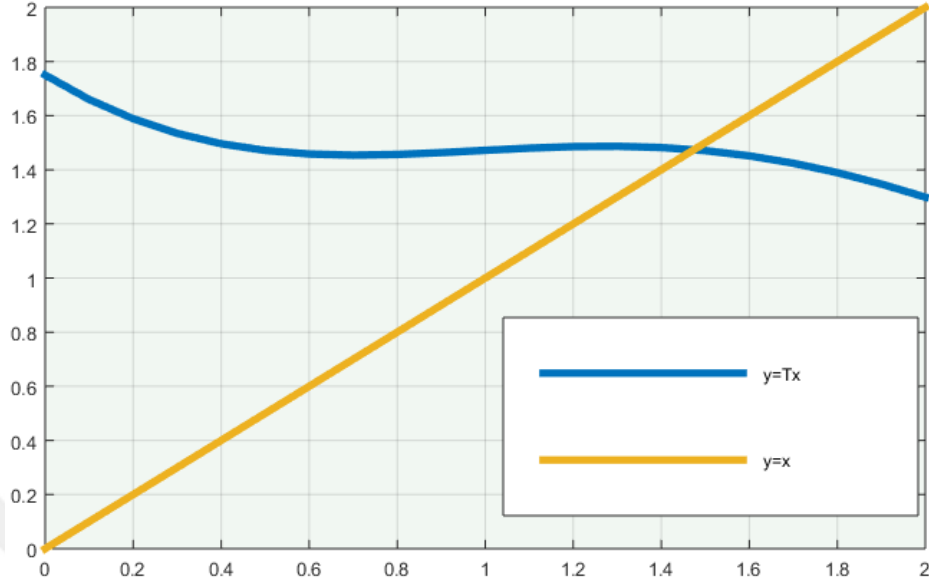
ve

$$\varphi[\|x - Tx\|] = 0,025 \left| x - e^{-x} - \frac{1}{2}(\sin x^2) - 0,75 \right|$$

eşitlikleri yazılabilir. $\delta = 0.7$ seçilirse her $x, y \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} \left| e^{-x} - e^{-y} + \frac{1}{2}(\sin x^2 - \sin y^2) \right| &\leq 0.7 |x - y| \\ &+ 0,025 \left| x - e^{-x} - \frac{1}{2}(\sin x^2) - 0,75 \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Yani T dönüşümü (3.21) koşulunu sağlar. Ancak Şekil 3.1'den görülebileceği gibi T dönüşümünün $[0,1]$ aralığında bir sabit noktası yoktur:



Şekil 3.1. (3.21) şartını sağlayan bir T dönüşümünün sabit noktasının olmadığını gösterir grafik

Bosede ve Rhodes [56] (3.21) ile verilen dönüşümün p gibi bir sabit noktaya sahip olması halinde her $x \in X$ ve $\delta \in [0,1)$ için aşağıdaki eşitsizliği sağladığını gözlemlemiştir:

$$\|Tx - p\| \leq \delta \|x - p\| \quad (3.22)$$

Bu nedenle (3.21) ile verilen dönüşüm yerine (3.22) ile verilen dönüşümü göz önüne almak gereksiz işlem yapmaktan kurtulmaya yardımcı olacaktır. Ayrıca (3.22) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &\leq \|Tx - p\| + \|Ty - p\| \\ &\leq \delta \|x - p\| + \delta \|y - p\| \\ &\leq \delta \|x - y\| + 2\delta \|y - p\| \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir.

Lemma 3.2.14. [57] $p \in [0,1)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ şartını sağlayan negatif olmayan $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi göz önüne alınsın. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$c_{n+1} \leq pc_n + d_n$$

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif dizisi varsa $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ 'dır.

Lemma 3.2.15. [57] $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ aşağıdaki eşitsizliği sağlayan negatif olmayan iki dizi olsun:

$$c_{n+1} \leq (1 - \theta_n)c_n + d_n$$

burada her $n \geq n_0$ için $\theta_n \in (0,1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n = \infty$ ve $\frac{d_n}{\theta_n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) dır. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ olur.

Lemma 3.2.16. [58] Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan bir dizi, $\theta_n \in (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n = \infty$ ve $\phi_n \geq 0$ olsun. Her $n \geq n_0$ için

$$s_{n+1} \leq (1 - \theta_n)s_n + \theta_n \phi_n$$

eşitsizliğinin sağlanacağı şekilde bir n_0 sayısı mevcut olsun. Bu durumda

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \phi_n$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 3.2.17 [59] $\{\theta_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1, 2$ olmak üzere aynı θ noktasına yakınsayan iki dizi olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\theta_n^{(1)} - \theta\|}{\|\theta_n^{(2)} - \theta\|} = 0$$

ise $\{\theta_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi θ noktasına $\{\theta_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine göre daha hızlı yakınsar denir.

Tanım 3.2.18 [60] $\{\theta_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1, 2$ olmak üzere aynı θ noktasına yakınsayan iki iterasyon dizisi için

$$\|\theta_n^{(1)} - \theta\| \leq \Pi_n^{(1)}$$

$$\|\theta_n^{(1)} - \theta\| \leq \Pi_n^{(2)}$$

hata tahminleri geçerli olsun ki bu tahminler Berinde [61] anlamında mümkün olan en iyi tahminlerdir. Burada $i = 1, 2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\Pi_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$ sıfır noktasına yakınsayan pozitif diziler olmak üzere eğer $\{\Pi_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\{\Pi_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden (Tanım 3.2.17 anlamında) daha hızlı yakınsarsa o zaman $\{\theta_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi de $\{\theta_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar denir.

Tanım 3.2.19. [58] $A_1, A_2: C \rightarrow C$ iki operatör olsun. Her $x \in C$ ve sabit bir $\varepsilon > 0$ için $\|A_1x - A_2x\| \leq \varepsilon$ ise A_2 'ye A_1 'in yaklaşım operatörü adı verilir.

Teorem 3.2.20 H bir hiperbolik metrik uzay ve C, H 'ın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere $T: C \rightarrow C$ 'ye (3.22) şartını sağlayan x_* gibi bir sabit noktaya sahip quasi-contractive bir dönüşüm olsun. (3.19) ile verilen yeni iterasyon metodundan elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartı altında x_* sabit noktasına yakınsar.

İspat: $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x_*$ olduğu gösterilecektir. (Θ_1) , (3.19) ve (3.22) kullanılarak

$$\begin{aligned} d(w_n, x_*) &= d(W(x_n, Tx_n, \mu_n), x_*) \\ &\leq (1 - \mu_n)d(x_n, x_*) + \mu_n d(Tx_n, x_*) \\ &\leq (1 - \mu_n)d(x_n, x_*) + \mu_n \delta d(x_n, x_*) \\ &= [1 - \mu_n(1 - \delta)]d(x_n, x_*) \end{aligned} \tag{3.24}$$

ve

$$\begin{aligned} d(z_n, x_*) &= d(W(w_n, Tw_n, \gamma_n), x_*) \\ &\leq (1 - \gamma_n)d(w_n, x_*) + \gamma_n d(Tw_n, x_*) \\ &\leq (1 - \gamma_n)d(w_n, x_*) + \gamma_n \delta d(w_n, x_*) \\ &= [1 - \gamma_n(1 - \delta)]d(w_n, x_*) \end{aligned} \tag{3.25}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.24) eşitsizliği (3.25)' te yerine yazılırsa;

$$d(z_n, x_*) \leq [1 - \gamma_n(1 - \delta)][1 - \mu_n(1 - \delta)] d(x_n, x_*) \quad (3.26)$$

olur. $\{\gamma_n\}, \{\mu_n\} \in [0,1]$ olduğundan

$$\begin{aligned} [1 - \gamma_n(1 - \delta)] &\leq 1 \\ [1 - \mu_n(1 - \delta)] &\leq 1 \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu nedenle

$$d(z_n, x_*) \leq d(x_n, x_*) \quad (3.27)$$

yazılabilir. Benzer düşünceyle

$$\begin{aligned} d(y_n, x_*) &= d(W(Tx_n, Tz_n, \beta_n), x_*) \\ &\leq (1 - \beta_n)d(Tx_n, x_*) + \beta_n d(Tz_n, x_*) \\ &\leq (1 - \beta_n)\delta d(x_n, x_*) + \beta_n \delta d(z_n, x_*) \end{aligned} \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.27) eşitsizliği (3.28)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} d(y_n, x_*) &\leq (1 - \beta_n)\delta d(x_n, x_*) + \beta_n \delta d(x_n, x_*) \\ &= \delta d(x_n, x_*) \end{aligned} \quad (3.29)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_*) &= d(W(Ty_n, Tz_n, \alpha_n), x_*) \\ &\leq (1 - \alpha_n)d(Ty_n, x_*) + \alpha_n d(Tz_n, x_*) \\ &\leq (1 - \alpha_n)\delta d(y_n, x_*) + \alpha_n \delta d(z_n, x_*) \end{aligned} \quad (3.30)$$

olup (3.27) ve (3.29) eşitsizlikleri (3.30)'da yerine yazılırsa

$$d(x_{n+1}, x_*) \leq (1 - \alpha_n)\delta^2 d(x_n, x_*) + \alpha_n \delta d(x_n, x_*)$$

yazılabilir. $\delta \in [0,1]$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten

$$d(x_{n+1}, x_*) \leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)] d(x_n, x_*) \quad (3.31)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik n kez tekrar edilirse

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_*) &\leq [1 - \alpha_{n-1}(1 - \delta)] d(x_{n-1}, x_*) \\
d(x_{n-1}, x_*) &\leq [1 - \alpha_{n-2}(1 - \delta)] d(x_{n-2}, x_*) \\
&\vdots \\
d(x_1, x_*) &\leq [1 - \alpha_0(1 - \delta)] d(x_0, x_*)
\end{aligned}$$

olur. Bulunan bu eşitsizlikler iç içe yazılırsa

$$d(x_{n+1}, x_*) \leq \prod_{i=0}^n [1 - \alpha_i(1 - \delta)] d(x_0, x_*) \quad (3.32)$$

elde edilir. Her $x > 0$ için $[0, x]$ aralığında $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonuna Ortalama Değer Teoremi uygulanırsa $1 - x \leq e^{-x}$ olduğu görülür. Bu eşitsizlikten hareketle (3.32) eşitsizliği aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_*) &\leq \prod_{i=0}^n e^{-(1-\delta)\alpha_i} d(x_0, x_*) \\
&= \frac{d(x_0, x_*)}{e^{-(1-\delta)\sum_{i=0}^n \alpha_i}}
\end{aligned} \quad (3.33)$$

Bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limiti alındığında, $x_n \rightarrow x_*$ olduğu görülür. Böylelikle ispat tamamlanır.

Bu teoremdaki $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartına ihtiyaç olmaksızın yakınsama sonucunun elde edilebileceği aşağıda gösterilmiştir:

Teorem 3.2.21 H, C ve T Teorem 3.2.20’de olduğu gibi tanımlansın. Bu durumda (3.19) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi T operatörünün x_* sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Teorem 3.2.20’nin ispatında verilen aşağıdaki eşitsizlik göz önüne alınsın:

$$d(x_{n+1}, x_*) \leq (1 - \alpha_n)\delta^2 d(x_n, x_*) + \alpha_n \delta d(x_n, x_*)$$

$\delta \in [0,1)$ olduğundan bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_*) &\leq (1 - \alpha_n)\delta d(x_n, x_*) + \alpha_n\delta d(x_n, x_*) \\ &= \delta d(x_n, x_*) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limiti alındığında, $x_n \rightarrow x_*$ olduğu görülür.

Teorem 3.2.22 H, C ve T Teorem 3.2.20’de olduğu gibi tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty \in [0,1]$ olmak üzere $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n = \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. (3.19) ile verilen yeni hiperbolik tipten iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi $x_* \in F(T)$ ’ye yakınsar.
- ii. (3.10) ile verilen hiperbolik tipten Mann iterasyon yönteminden elde edilen $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi $x_* \in F(T)$ ’ye yakınsar.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x_*$ kabulü altında $u_n \rightarrow x_*$ olduğu gösterilecektir. (3.10) iterasyon yöntemi, (3.19) iterasyon yöntemi, (3.22) - (3.23) eşitsizlikleri ile (Θ_1) ve (Θ_4) şartları kullanılarak;

$$\begin{aligned} d(x_n, Tx_n) &\leq d(x_n, x_*) + d(Tx_n, x_*) \\ &\leq (1 + \delta)d(x_n, x_*) \end{aligned} \tag{3.34}$$

ve

$$\begin{aligned} d(y_n, Ty_n) &\leq d(y_n, x_*) + d(Ty_n, x_*) \\ &\leq (1 + \delta)d(y_n, x_*) \end{aligned}$$

olup (3.29) ile verilen eşitsizlik yukarıda yerine yazılırsa

$$d(y_n, Ty_n) \leq \delta(1 + \delta)d(x_n, x_*) \tag{3.35}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(z_n, Tz_n) &\leq d(z_n, x_*) + d(Tz_n, x_*) \\ &\leq (1 + \delta)d(z_n, x_*) \end{aligned}$$

olup (3.27) eşitsizliği kullanılırsa

$$d(z_n, Tz_n) \leq (1 + \delta)d(x_n, x_*) \quad (3.36)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(w_n, Tw_n) &\leq d(w_n, x_*) + d(Tw_n, x_*) \\ &\leq (1 + \delta)d(w_n, x_*) \end{aligned}$$

olup (3.24) eşitsizliği yukarıda yerine yazılırsa

$$d(w_n, Tw_n) \leq (1 + \delta)[1 - \mu_n(1 - \delta)]d(x_n, x_*)$$

elde edilir. $[1 - \mu_n(1 - \delta)] \leq 1$ olduğu düşünülürse

$$d(w_n, Tw_n) \leq (1 + \delta)d(x_n, x_*) \quad (3.37)$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} d(w_n, u_n) &= d(W(x_n, Tx_n, \mu_n), u_n) \\ &\leq (1 - \mu_n)d(x_n, u_n) + \mu_n d(Tx_n, u_n) \\ &\leq (1 - \mu_n)d(x_n, u_n) + \mu_n d(x_n, Tx_n) + \mu_n d(x_n, u_n) \\ &= d(x_n, u_n) + \mu_n d(x_n, Tx_n) \end{aligned}$$

olup (3.34) eşitsizliği yukarıda yerine yazılırsa

$$d(w_n, u_n) \leq d(x_n, u_n) + \mu_n(1 + \delta)d(x_n, x_*) \quad (3.38)$$

elde edilir. Benzer düşünceyle

$$\begin{aligned} d(z_n, u_n) &= d(W(w_n, Tw_n, \gamma_n), u_n) \\ &\leq (1 - \gamma_n)d(w_n, u_n) + \gamma_n d(Tw_n, u_n) \\ &\leq (1 - \gamma_n)d(w_n, u_n) + \gamma_n d(w_n, Tw_n) + \gamma_n d(w_n, u_n) \\ &= d(w_n, u_n) + \gamma_n d(w_n, Tw_n) \end{aligned}$$

yazılabilir. (3.37)-(3.38) eşitsizlikleri yukarıda yerine yazılırsa

$$d(z_n, u_n) \leq d(x_n, u_n) + (\gamma_n + \mu_n)(1 + \delta)d(x_n, x_*) \quad (3.39)$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned}
d(y_n, u_n) &= d(W(Tx_n, Tz_n, \beta_n), u_n) \\
&\leq (1 - \beta_n)d(Tx_n, u_n) + \beta_n d(Tz_n, u_n) \\
&\leq (1 - \beta_n)d(x_n, Tx_n) + (1 - \beta_n)d(x_n, u_n) \\
&\quad + \beta_n d(z_n, Tz_n) + \beta_n d(z_n, u_n)
\end{aligned}$$

(3.34), (3.36) ve (3.39) eşitsizlikleri yukarıda yerine yazılırsa

$$d(y_n, u_n) \leq d(x_n, u_n) + (1 + \delta)[1 + \beta_n(\gamma_n + \mu_n)]d(x_n, x_*) \quad (3.40)$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, u_{n+1}) &= d(W(Ty_n, Tz_n, \alpha_n), W(u_n, Tu_n, \alpha_n)) \\
&\leq (1 - \alpha_n)d(Ty_n, u_n) + \alpha_n d(Tz_n, Tu_n) \\
&\leq (1 - \alpha_n)d(y_n, Ty_n) + (1 - \alpha_n)d(y_n, u_n) \\
&\quad + \alpha_n \delta d(z_n, u_n) + 2\alpha_n \delta d(z_n, x_*)
\end{aligned}$$

olup, (3.27), (3.35) ve (3.39)-(3.40) eşitsizlikleri yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, u_{n+1}) &\leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)]d(x_n, u_n) \\
&\quad + \left\{ (1 - \alpha_n)(1 + \delta)(\delta + 1 + \beta_n(\gamma_n + \mu_n)) \right. \\
&\quad \left. + \alpha_n \delta [(1 + \delta) + (\gamma_n + \mu_n) + 2] \right\} d(x_n, x_*)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\theta_n &= \alpha_n(1 - \delta) \\
c_n &= d(x_n, u_n) \\
d_n &= \left\{ (1 - \alpha_n)(1 + \delta)(\delta + 1 + \beta_n(\gamma_n + \mu_n)) \right. \\
&\quad \left. + \alpha_n \delta [(1 + \delta) + (\gamma_n + \mu_n) + 2] \right\} d(x_n, x_*)
\end{aligned}$$

şeklinde seçilirse Lemma 3.2.15'in şartları sağlanır. Bu nedenle $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, u_n) = 0$

olur. Ayrıca

$$d(u_n, x_*) \leq d(x_n, u_n) + d(x_n, x_*)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, x_*) = 0$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $n \rightarrow \infty$ iken $u_n \rightarrow x_*$ kabulü altında $x_n \rightarrow x_*$ olduğu gösterilecektir.

(3.10) iterasyon yöntemi, (3.19) iterasyon yöntemi, (3.22) -(3.23) eşitsizlikleri ile (Θ_1) ve (Θ_4) şartları kullanılarak;

$$\begin{aligned} d(u_n, Tu_n) &\leq d(u_n, x_*) + d(Tu_n, x_*) \\ &\leq (1 + \delta)d(u_n, x_*) \end{aligned} \quad (3.41)$$

ve

$$\begin{aligned} d(u_n, w_n) &= d(u_n, W(x_n, Tx_n, \mu_n)) \\ &\leq (1 - \mu_n)d(u_n, x_n) + \mu_n d(u_n, Tx_n) \\ &\leq (1 - \mu_n)d(u_n, x_n) + \mu_n d(u_n, Tu_n) + \mu_n d(Tu_n, Tx_n) \\ &\leq (1 - \mu_n)d(u_n, x_n) + \mu_n d(u_n, Tu_n) \\ &\quad + \mu_n \delta d(u_n, x_n) + 2\mu_n \delta d(u_n, x_*) \end{aligned}$$

olur. (3.41) eşitsizliği yukarıda yerine yazılırsa

$$d(u_n, w_n) \leq [1 - \mu_n(1 - \delta)]d(u_n, x_n) + \mu_n(1 + 3\delta)d(u_n, x_*)$$

elde edilir. $[1 - \mu_n(1 - \delta)] \leq 1$ olduğundan

$$d(u_n, w_n) \leq d(u_n, x_n) + \mu_n(1 + 3\delta)d(u_n, x_*) \quad (3.42)$$

yazılabilir. Benzer düşünceyle

$$\begin{aligned} d(u_n, z_n) &= d(u_n, W(w_n, Tw_n, \gamma_n)) \\ &\leq (1 - \gamma_n)d(u_n, w_n) + \gamma_n d(u_n, Tw_n) \\ &\leq (1 - \gamma_n)d(u_n, w_n) + \gamma_n d(u_n, Tu_n) + \gamma_n d(Tu_n, Tw_n) \\ &\leq (1 - \gamma_n)d(u_n, w_n) + \gamma_n d(u_n, Tu_n) \\ &\quad + \gamma_n \delta d(u_n, w_n) + 2\gamma_n \delta d(u_n, x_*) \\ &= [1 - \gamma_n(1 - \delta)]d(u_n, w_n) + \gamma_n d(u_n, Tu_n) + 2\gamma_n \delta d(u_n, x_*) \end{aligned} \quad (3.43)$$

yazılabilir. (3.41) -(3.42) eşitsizlikleri (3.43)'te yerine yazılır ve $[1 - \gamma_n(1 - \delta)] \leq 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$d(u_n, z_n) \leq d(u_n, x_n) + \left\{ \frac{[1 - \gamma_n(1 - \delta)]\mu_n(1 + 3\delta)}{\gamma_n(1 + 3\delta)} \right\} d(u_n, x_*)$$

olduğu görülür.

$$\xi_n^{(1)} = \left\{ \frac{[1 - \gamma_n(1 - \delta)]\mu_n(1 + 3\delta)}{\gamma_n(1 + 3\delta)} \right\}$$

olsun. Bu durumda

$$d(u_n, z_n) \leq d(u_n, x_n) + \xi_n^{(1)} d(u_n, x_*) \quad (3.44)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(u_n, y_n) &= d(u_n, W(Tx_n, Tz_n, \beta_n)) \\ &\leq (1 - \beta_n)d(u_n, Tx_n) + \beta_n d(u_n, Tz_n) \\ &\leq (1 - \beta_n)d(u_n, Tu_n) + (1 - \beta_n)d(Tu_n, Tx_n) \\ &\quad + \beta_n d(u_n, Tu_n) + \beta_n d(Tu_n, Tz_n) \\ &\leq (1 - \beta_n)\delta d(u_n, x_n) + 2(1 - \beta_n)\delta d(u_n, x_*) \\ &\quad + \beta_n \delta d(u_n, z_n) + 2\beta_n \delta d(u_n, x_*) + d(u_n, Tu_n) \end{aligned} \quad (3.45)$$

olup (3.41) ve (3.44) eşitsizlikleri (3.45)'te yerine yazılırsa

$$d(u_n, y_n) \leq \delta d(u_n, x_n) + (1 + 3\delta + \beta_n \delta \xi_n^{(1)}) d(u_n, x_*)$$

olur. $\delta < 1$ olduğu dikkate alınır ve

$$\left(\xi_n^{(2)} \right) = \left(1 + 3\delta + \beta_n \delta \xi_n^{(1)} \right)$$

seçilirse

$$d(u_n, y_n) \leq d(u_n, x_n) + \xi_n^{(2)} d(u_n, x_*) \quad (3.46)$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
d(u_{n+1}, x_{n+1}) &= d(W(u_n, Tu_n, \alpha_n), W(Ty_n, Tz_n, \alpha_n)) \\
&\leq (1 - \alpha_n)d(u_n, Ty_n) + \alpha_n d(Tu_n, Tz_n) \\
&\leq (1 - \alpha_n)d(u_n, Tu_n) + (1 - \alpha_n)d(Tu_n, Ty_n) \\
&\quad + \alpha_n d(Tu_n, Tz_n) \\
&\leq (1 - \alpha_n)d(u_n, Tu_n) \\
&\quad + (1 - \alpha_n)\delta d(u_n, y_n) + 2(1 - \alpha_n)\delta d(u_n, x_*) \\
&\quad + \alpha_n \delta d(u_n, z_n) + 2\alpha_n \delta d(u_n, x_*) \\
&= (1 - \alpha_n)d(u_n, Tu_n) + (1 - \alpha_n)\delta d(u_n, y_n) \\
&\quad + \alpha_n \delta d(u_n, z_n) + 2\delta d(u_n, x_*)
\end{aligned}$$

olup, (3.41), (3.44) ve (3.46) eşitsizlikleri yukarıda yerine yazılır ve $\delta < 1$ olduğu göz önüne alınarak yukarıdaki eşitsizlik yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, u_{n+1}) &\leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)]d(u_n, x_n) \\
&\quad + \left\{ \begin{array}{l} 1 + 3\delta - \alpha_n(1 + \delta) \\ + \delta \xi_n^{(2)}(1 - \alpha_n) + \alpha_n \delta \xi_n^{(1)} \end{array} \right\} d(u_n, x_*)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\theta_n &= \alpha_n(1 - \delta) \\
c_n &= d(u_n, x_n) \\
d_n &= \left\{ \begin{array}{l} 1 + 3\delta - \alpha_n(1 + \delta) \\ + \delta \xi_n^{(2)}(1 - \alpha_n) + \alpha_n \delta \xi_n^{(1)} \end{array} \right\} d(u_n, x_*)
\end{aligned}$$

şeklinde seçilirse Lemma 3.2.15'in şartları sağlanır. Bu nedenle $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, x_n) = 0$ olur. Ayrıca

$$d(x_n, x_*) \leq d(u_n, x_n) + d(u_n, x_*)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_*) = 0$ olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.23 H, C ve T Teorem 3.2.20'de olduğu gibi tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n\}_{n=0}^\infty, \{\gamma_n\}_{n=0}^\infty \in [0, 1]$ dizileri için aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$i. \quad \alpha_1 \leq \alpha_n \leq 1$$

$$ii. \quad \beta_1 \leq \beta_n \leq 1$$

$$iii. \quad \gamma_1 \leq \gamma_n \leq 1$$

$x_0 = m_0 \in C$ olmak üzere (3.19) ile verilen yeni hiperbolik tipten iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi ve (3.17) ile verilen hiperbolik tipten Abbas-Nazır iterasyon yönteminden elde edilen $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi göz önüne alınsın. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi x_* sabit noktasına $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

İspat: (Θ_1) , (3.17) ve (3.22) kullanılarak

$$\begin{aligned} d(k_n, x_*) &= d(W(m_n, Tm_n, \gamma_n), x_*) \\ &\leq (1 - \gamma_n)d(m_n, x_*) + \gamma_n d(Tm_n, x_*) \\ &\leq (1 - \gamma_n)d(m_n, x_*) + \gamma_n \delta d(m_n, x_*) \\ &= [1 - \gamma_n(1 - \delta)]d(m_n, x_*) \end{aligned} \tag{3.47}$$

elde edilir. Benzer düşünceyle

$$\begin{aligned} d(s_n, x_*) &= d(W(Tm_n, Tk_n, \beta_n), x_*) \\ &\leq (1 - \beta_n)d(Tm_n, x_*) + \beta_n d(Tk_n, x_*) \\ &\leq (1 - \beta_n)\delta d(m_n, x_*) + \beta_n \delta d(k_n, x_*) \end{aligned} \tag{3.48}$$

olur. (3.47) eşitsizliği (3.48)'de yerine yazılır ve $\delta \in [0,1)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$d(s_n, x_*) \leq [1 - \beta_n \gamma_n(1 - \delta)]d(m_n, x_*) \tag{3.49}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(m_{n+1}, x_*) &= d(W(Ts_n, Tk_n, \alpha_n), x_*) \\ &\leq (1 - \alpha_n)d(Ts_n, x_*) + \alpha_n d(Tk_n, x_*) \\ &\leq (1 - \alpha_n)\delta d(s_n, x_*) + \alpha_n \delta d(k_n, x_*) \end{aligned} \tag{3.50}$$

olup (3.47) ve (3.49) eşitsizlikleri (3.50)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} d(m_{n+1}, x_*) &\leq (1 - \alpha_n)\delta[1 - \beta_n \gamma_n(1 - \delta)]d(m_n, x_*) \\ &\quad + \alpha_n \delta[1 - \gamma_n(1 - \delta)]d(m_n, x_*) \end{aligned}$$

yazılabilir. $\delta \in [0,1)$ ve $[1 - \gamma_n(1 - \delta)] \leq 1$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten

$$d(m_{n+1}, x_*) \leq [1 - \alpha_n \beta_n \gamma_n (1 - \delta)] d(m_n, x_*) \quad (3.51)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik n kez tekrar edilirse

$$\begin{aligned} d(m_n, x_*) &\leq [1 - \alpha_{n-1} \beta_{n-1} \gamma_{n-1} (1 - \delta)] d(m_{n-1}, x_*) \\ d(m_{n-1}, x_*) &\leq [1 - \alpha_{n-2} \beta_{n-2} \gamma_{n-2} (1 - \delta)] d(m_{n-2}, x_*) \\ &\vdots \\ d(m_1, x_*) &\leq \delta^2 [1 - \alpha_0 \beta_0 \gamma_0 (1 - \delta)] d(m_0, x_*) \end{aligned}$$

olur. Bulunan bu eşitsizlikler iç içe yazılırsa

$$d(m_{n+1}, x_*) \leq \prod_{i=0}^n [1 - \alpha_i \beta_i \gamma_i (1 - \delta)] d(m_0, x_*) \quad (3.52)$$

elde edilir. Ayrıca Teorem 3.2.20’de (3.32) ile verilen aşağıdaki eşitsizliği göz önüne alalım:

$$d(x_{n+1}, x_*) \leq \prod_{i=0}^n [1 - \alpha_i (1 - \delta)] d(x_0, x_*) \quad (3.53)$$

(3.52) – (3.53) eşitsizliklerine (i – iii) kabulleri uygulanırsa:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_*) &\leq [1 - \alpha_1 (1 - \delta)]^{n+1} d(x_0, x_*) \\ d(m_{n+1}, x_*) &\leq [1 - \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 (1 - \delta)]^{n+1} d(m_0, x_*) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_n^1 &= [1 - \alpha_1 (1 - \delta)]^{n+1} d(x_0, x_*) \\ \mathcal{U}_n^2 &= [1 - \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 (1 - \delta)]^{n+1} d(m_0, x_*) \end{aligned}$$

şeklinde seçilsin.

$$\Psi_n = \frac{\mathcal{U}_n^1}{\mathcal{U}_n^2} = \frac{[1 - \alpha_1 (1 - \delta)]^{n+1} d(x_0, x_*)}{[1 - \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 (1 - \delta)]^{n+1} d(m_0, x_*)}$$

denirse

$$\Psi_n = \left[\frac{1 - \alpha_1(1 - \delta)}{1 - \alpha_1\beta_1\gamma_1(1 - \delta)} \right]^{n+1}$$

olur.

$$\gamma_1 < 1 \Rightarrow \alpha_1\beta_1\gamma_1 < \alpha_1\beta_1$$

$$\beta_1 < 1 \Rightarrow \alpha_1\beta_1 < \alpha_1$$

eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_1\gamma_1 &< \alpha_1 \\ &\Rightarrow \alpha_1\beta_1\gamma_1(1 - \delta) < \alpha_1(1 - \delta) \\ &\Rightarrow \left[\frac{1 - \alpha_1(1 - \delta)}{1 - \alpha_1\beta_1\gamma_1(1 - \delta)} \right] < 1 \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu nedenle $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n = 0$ bulunur. Dolayısıyla Tanım 3.2.18'den $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin x_* sabit noktasına $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine göre daha hızlı yakınsadığı sonucuna ulaşılır.

Örnek 3.2.24 $H = \mathbb{R}$ ve $C = [0,1]$ olmak üzere $T: C \rightarrow C$

$$Tx = \frac{1}{6} \sinh(x^2 - 0.05) + \frac{1}{12} \cosh x^2$$

şeklinde tanımlansın. $\varphi(t) = \frac{2t}{25}$ ve $\delta \in [0.3,1)$ olmak üzere T dönüşümü bir contractive-like dönüşümdür. Ayrıca $[0,1]$ aralığında T dönüşümünün $x_* = 0,07596065361271$ şeklinde bir tek sabit noktası vardır ve bu nedenle T dönüşümü (3.22) ile verilen şartı sağlar. $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \mu_n = \frac{n}{n+1}$ olmak üzere (3.10)-(3.17) eşitlikleriyle verilen hiperbolik tipten iterasyon yöntemleri ve (3.19) ile verilen yeni hiperbolik tipteki iterasyon yönteminin $x_0 = 0.80$ başlangıç koşulu için yakınsama davranışları Çizelge 3.1-Çizelge 3.3'te gösterilmiştir:

Çizelge 3.1. Hiperbolik tipten bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklığı.

x_n	Yeni İterasyon (3.19)	Abbas-Nazır (3.17)	Agarwal-S (3.16)
x_0	0.80	0.80	0.80
x_1	0.08511529600751	0.09971597977446	0.16256385158800
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_4	0.07596065364198	0.07596065722391	0.07596085245411
x_5	0.07596065361273	0.07596065362721	0.07596065524625
x_6	0.07596065361271	0.07596065361276	0.07596065362450
x_7	$\vdots$	0.07596065361271	0.07596065361279
x_8	$\vdots$	$\vdots$	0.07596065361271
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 3.2. Hiperbolik tipten bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklığı.

x_n	SP (3.13)	CR (3.14)	Picard-Mann (3.15)
x_0	0.80	0.80	0.80
x_1	0.20141267697694	0.12099854491118	0.11999872131456
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_6	0.07596065364812	0.07596065361865	0.07596065361305
x_7	0.07596065361282	0.07596065361273	0.07596065361271
x_8	0.07596065361271	0.07596065361271	$\vdots$
x_9	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{10}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 3.3. Hiperbolik tipten bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklığı.

x_n	Mann (3.10)	Ishikawa (3.11)	Noor (3.12)
x_0	0.80	0.80	0.80
x_1	0.50256449093072	0.45999936065728	0.45612825673022
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{15}	0.07596065361349	0.07596065361277	0.07596065361276
x_{16}	0.07596065361278	0.07596065361272	0.07596065361271
x_{17}	0.07596065361272	0.07596065361271	$\vdots$
x_{18}	0.07596065361271	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 3.1'den görülmektedir ki

- ❖ (3.16) ile verilen hiperbolik tipteki Agarwal-S iterasyon yönteminden elde edilen dizi T 'nin sabit noktasına 8. adımda ulaşırken
- ❖ (3.17) ile verilen hiperbolik tipteki Abbas-Nazır iterasyon yönteminden elde edilen dizi T 'nin sabit noktasına 7. adımda ulaşırken
- ❖ (3.19) ile verilen yeni hiperbolik tipteki iterasyon yönteminden elde edilen dizi T 'nin sabit noktasına 6. adımda ulaşmıştır.

Çizelge 3.2'den aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

- ❖ (3.15) ile verilen hiperbolik tipteki Picard-Mann iterasyon yönteminden elde edilen dizi T 'nin sabit noktasına 7. adımda ulaşırken
- ❖ Sırasıyla (3.13) ve (3.14) ile verilen hiperbolik tipteki SP ve CR iterasyon yöntemlerinden elde edilen diziler T 'nin sabit noktasına 8. adımda ulaşmıştır. Ancak bu dizilerin her bir adımını incelendiğinde CR iterasyon dizisinin SP iterasyon dizisine göre *daha hızlı hareket ettiği* yorumu yapılabilir.

Çizelge 3.3'ten görülmektedir ki

- ❖ (3.10) ile verilen hiperbolik tipteki Mann iterasyon yönteminden elde edilen dizi T 'nin sabit noktasına 18. adımda ulaşırken
- ❖ (3.11) ile verilen hiperbolik tipteki Ishikawa iterasyon yönteminden elde edilen dizi T 'nin sabit noktasına 17. adımda ulaşırken
- ❖ (3.12) ile verilen hiperbolik tipteki Noor iterasyon yönteminden elde edilen dizi T 'nin sabit noktasına 16. adımda ulaşmıştır.

Teorem 3.2.25 H, C ve T Teorem 3.2.20’de olduğu gibi tanımlansın. p_* sabit noktasına sahip S operatörü, x_* sabit noktasına sahip T ’nin yaklaşım operatörü olsun. T dönüşümü kullanılarak (3.19) ile verilen yeni hiperbolik tipten iterasyon yönteminden elde edilen dizi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin. S dönüşümü için aşağıda verilen yöntemden elde edilen dizi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin:

$$\begin{cases} a_{n+1} = W\{Sb_n, Sc_n, \alpha_n\} \\ b_n = W\{Sa_n, Sc_n, \beta_n\} \\ c_n = W\{d_n, Sd_n, \gamma_n\} \\ d_n = W\{a_n, Sa_n, \mu_n\} \end{cases} \quad (3.54)$$

burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in [0,1]$ ve $\frac{1}{2} \leq \alpha_n$ dir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ için $a_n \rightarrow p_*$ ise

$$d(x_*, p_*) \leq \frac{6\varepsilon}{1-\delta}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: (3.19) ve (3.54) iterasyon yöntemleri, (3.22)-(3.23) eşitsizlikleri ile (Θ_1) ve (Θ_4) şartları kullanılarak

$$\begin{aligned} d(d_n, w_n) &= d(W(a_n, Sa_n, \mu_n), W(x_n, Tx_n, \mu_n)) \\ &\leq (1 - \mu_n)d(a_n, x_n) + \mu_n d(Sa_n, Tx_n) \\ &\leq (1 - \mu_n)d(a_n, x_n) + \mu_n d(Sa_n, Ta_n) + \mu_n d(Ta_n, Tx_n) \\ &\leq (1 - \mu_n)d(a_n, x_n) + \mu_n \varepsilon \\ &\quad + \mu_n \delta d(a_n, x_n) + 2\mu_n \delta d(x_n, x_*) \\ &= [1 - \mu_n(1 - \delta)]d(a_n, x_n) + 2\mu_n \delta d(x_n, x_*) + \mu_n \varepsilon \end{aligned}$$

olur. $[1 - \mu_n(1 - \delta)] \leq 1$ olduğu düşünülürse, yukarıdaki eşitsizlik

$$d(d_n, w_n) \leq d(a_n, x_n) + 2\mu_n \delta d(x_n, x_*) + \mu_n \varepsilon \quad (3.55)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
d(c_n, z_n) &= d(W(d_n, Sd_n, \gamma_n), W(w_n, Tw_n, \gamma_n)) \\
&\leq (1 - \gamma_n)d(d_n, w_n) + \gamma_n d(Sd_n, Tw_n) \\
&\leq (1 - \gamma_n)d(d_n, w_n) + \gamma_n d(Sd_n, Td_n) + \gamma_n d(Td_n, Tw_n) \\
&\leq (1 - \gamma_n)d(d_n, w_n) + \gamma_n \varepsilon \\
&\quad + \gamma_n \delta d(d_n, w_n) + 2\gamma_n \delta d(w_n, x_*) \\
&= [1 - \gamma_n(1 - \delta)]d(d_n, w_n) + 2\gamma_n \delta d(w_n, x_*) + \gamma_n \varepsilon
\end{aligned}$$

yazılabilir. $[1 - \gamma_n(1 - \delta)] \leq 1$ ve $[1 - \mu_n(1 - \delta)] \leq 1$ olduğu göz önüne alınarak (3.24) ile (3.55) eşitsizlikleri yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
d(c_n, z_n) &\leq d(a_n, x_n) + 2\mu_n \delta d(x_n, x_*) \\
&\quad + \mu_n \varepsilon + 2\gamma_n \delta d(x_n, x_*) + \gamma_n \varepsilon \\
&= d(a_n, x_n) + 2\delta(\mu_n + \gamma_n)d(x_n, x_*) + (\mu_n + \gamma_n)\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.56}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
d(b_n, y_n) &= d(W(Sa_n, Sc_n, \beta_n), W(Tx_n, Tz_n, \beta_n)) \\
&\leq (1 - \beta_n)d(Sa_n, Tx_n) + \beta_n d(Sc_n, Tz_n) \\
&\leq (1 - \beta_n)d(Sa_n, Ta_n) + (1 - \beta_n)d(Ta_n, Tx_n) \\
&\quad + \beta_n d(Sc_n, Tc_n) + \beta_n d(Tc_n, Tz_n) \\
&\leq (1 - \beta_n)\varepsilon + (1 - \beta_n)\delta d(a_n, x_n) + 2(1 - \beta_n)\delta d(x_n, x_*) \\
&\quad + \beta_n \varepsilon + \beta_n \delta d(c_n, z_n) + 2\beta_n \delta d(z_n, x_*)
\end{aligned}$$

olup (3.27) ve (3.56) eşitsizlikleri yukarıda yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
d(b_n, y_n) &\leq d(a_n, x_n) \\
&\quad + 2\delta[1 + \delta\beta_n(\mu_n + \gamma_n)]d(x_n, x_*) + \varepsilon(1 + \beta_n\delta(\mu_n + \gamma_n))
\end{aligned} \tag{3.57}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
d(a_{n+1}, x_{n+1}) &= d(W(Sb_n, Sc_n, \alpha_n), W(Ty_n, Tz_n, \alpha_n)) \\
&\leq (1 - \alpha_n)d(Sb_n, Ty_n) + \alpha_n d(Sc_n, Tz_n) \\
&\leq (1 - \alpha_n)d(Sb_n, Tb_n) + (1 - \alpha_n)d(Tb_n, Ty_n) \\
&\quad + \alpha_n d(Sc_n, Tc_n) + \alpha_n d(Tc_n, Tz_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (1 - \alpha_n)\varepsilon + (1 - \alpha_n)\delta d(b_n, y_n) + 2(1 - \alpha_n)\delta d(y_n, x_*) \\ &\quad + \alpha_n\varepsilon + \alpha_n\delta d(c_n, z_n) + 2\alpha_n\delta d(z_n, x_*) \end{aligned}$$

olup $\delta \in [0,1)$ olduğu göz önüne alınarak (3.27), (3.29) ve (3.56) eşitsizlikleri yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} d(a_{n+1}, x_{n+1}) &\leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)]d(a_n, x_n) \\ &\quad + \left\{ \frac{2\delta^2(1 - \alpha_n)[1 + \delta\beta_n(\mu_n + \gamma_n)]}{+2\delta^2(1 - \alpha_n) + 2\delta^2\alpha_n(\mu_n + \gamma_n) + 2\alpha_n\delta} \right\} d(x_n, x_*) \\ &\quad + \left\{ \frac{1 + \delta(1 - \alpha_n)[1 + \delta\beta_n(\mu_n + \gamma_n)]}{+\alpha_n\delta(\mu_n + \gamma_n)} \right\} \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{1}{2} \leq \alpha_n \Rightarrow 1 - \alpha_n \leq \alpha_n$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\mu_n\} \in [0,1]$ olduğu göz önüne alınarak yukarıdaki eşitsizlikte gereken işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} d(a_{n+1}, x_{n+1}) &\leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)]d(a_n, x_n) \\ &\quad + \alpha_n(1 - \delta) \left[\frac{(20\delta^2 + 2\delta)d(x_n, x_*) + 6\varepsilon}{(1 - \delta)} \right] \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} s_n &= d(a_n, x_n) \\ \theta_n &= \alpha_n(1 - \delta) \\ \phi_n &= \left[\frac{(20\delta^2 + 2\delta)d(x_n, x_*) + 6\varepsilon}{(1 - \delta)} \right] \end{aligned}$$

şeklinde seçilirse Lemma 3.2.16'nın bütün şartları sağlanır. Bu nedenle

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(a_n, x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(20\delta^2 + 2\delta)d(x_n, x_*) + 6\varepsilon}{(1 - \delta)} \right]$$

eşitsizliği geçerlidir. $n \rightarrow \infty$ için $a_n \rightarrow p_*$ ve $x_n \rightarrow x_*$ olduğundan

$$d(x_*, p_*) \leq \frac{6\varepsilon}{1 - \delta}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında yeni bir dört adımlı klasik sabit nokta iterasyon yöntemi tanımlanmış ve bu yöntemin hiperbolik uzaylarda yeniden yazılmasıyla oluşan iterasyon yöntemi kullanılarak bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Teorem 3.2.20’de sabit noktaya sahip contractive-like dönüşümler aracılığıyla yeni hiperbolik tipten iterasyon yönteminden elde edilen dizinin yakınsak olduğu $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartı altında ispatlanmıştır. Teorem 3.2.21’ de $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartına gerek olmaksızın yakınsaklık sonucunun elde edilebileceği gösterilmiştir. Teorem 3.2.22 ile yeni hiperbolik tipten iterasyon yöntemi ile hiperbolik tipten Mann iterasyon yöntemi arasında yakınsama anlamında bir denklik kurulabileceği ispatlanmıştır. Teorem 3.2.23’te yeni hiperbolik tipten iterasyon yönteminin hiperbolik tipten bazı mevcut iterasyon yöntemlerine göre daha hızlı olduğu gösterilmiş ve bu sonuç Örnek 3.2.24’te verilen Çizelge 3.1-Çizelge 3.3’te nümerik olarak gösterilmiştir. Teorem 3.2.25’te contractive-like dönüşümler için yeni hiperbolik tipten iterasyon yöntemi kullanılarak veri bağıllığı sonucu irdelenmiştir.

Sabit nokta teorisi ile ilgilenen araştırmacılar bu tezde tanımlanan yeni klasik iterasyon yöntemini kullanarak farklı dönüşümler aracılığıyla birçok matematiksel yapıda sabit nokta teoremlerini irdelleyebilir ve uygun koşullar altında diferansiyel-integral denklem sınıflarının çözümlerini analiz edebilirler.

KAYNAKLAR

1. Banach, S., 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fundamenta Mathematicae*, 3, 1, 133-181.
2. Ciric, L.B., 2009. Some new results for Banach contractions and Edelstein contractive mappings on Fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons & Fractals*, 42, 1, 146-154.
3. Ciric, L.B., 1974. A generalization of Banach's contraction principle, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45, 2, 267-273.
4. Hardy, G.E. ve Rogers, T., 1973. A generalization of a fixed point theorem of Reich, *Canadian Mathematical Bulletin*, 16, 2, 201-206.
5. Meir, A. ve Keeler, E., 1969. A theorem on contraction mappings, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 28, 2, 326-329.
6. Rhoades, B.E., Park, S. ve Moon, K.B., 1990. On generalization of Meir-Keeler type contraction maps, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 146, 482-494.
7. Nadler Jr., S.B., 1969. Multivalued contraction mappings, *Pacific Journal of Mathematics*, 30, 2, 475-488.
8. Suzuki, T., 2001. Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 253, 2, 440-458.
9. Chen, L., Cui, Y., Hudzik H. ve Kaczmarek, R., 2017. Ellipsoidal geometry of Banach spaces and applications, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 18, 279-308.
10. Cui, Y., Hudzik, H., Kaczmarek, R., Ma, H., Wang, Y. ve Zhang, M., 2016. On some applications of geometry of Banach spaces and some new results related to the fixed point theory in Orlicz sequence spaces, *Journal of Mathematical Study*, 49, 325-378.
11. Dilworth, S., Kutzarova, D., Lancien L ve Randrianarivony, N., 2014. Asymptotic geometry of Banach spaces and uniform quotient maps, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 142, 2747-2762.
12. Godefroy, G., Lancien, G. ve Zizler, V., 2014. The non-linear geometry of Banach spaces after Nigel Kalton, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 44, 1529-1583.
13. Takahashi, W.A., 1970. Convexity in metric space and nonexpansive mappings, *Kodai Mathematical Journal*, 22, 142-149.
14. Kohlenbach, U., 2005. Some logical metatheorems with applications in functional analysis, *Transactions of the American Mathematical Society*, 357, 89-128.

15. Geobel, K. ve Kirk, W.A., 1983. Iteration processes for nonexpansive mappings, *Contemporary Mathematics*, 21, 115-123.
16. Reich, S. ve Shafrir, I., 1990. Nonexpansive iterations in hyperbolic spaces, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 15, 6, 537-558.
17. Alfuraidan, M.R. ve Khamsi, M.A., 2015. Fixed points of monotone nonexpansive mappings on a hyperbolic metric space with a graph, *Fixed Point Theory and Applications*, 44, 1-10.
18. Atalan, Y. ve Karakaya, V., 2019. Investigation of some fixed point theorems in hyperbolic spaces for a three step iteration process. *Korean Journal of Mathematics*, 27, 4, 929-947.
19. Gursoy, F., Khan A.R. ve Fukhar-ud-din, H., 2017. Convergence and data dependence results for quasi-contractive type operators in hyperbolic spaces, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46, 377-388.
20. Khan A.R, Fukhar-ud-din, H. ve Khan, M. A. A., 2012. An implicit algorithm for two finite families of nonexpansive maps in hyperbolic spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 54, 1-12.
21. Kreyszig, E., 1989. *Introductory functional analysis with applications*, Wiley New York.
22. Maddox, I.J., 1988. *Elements of functional analysis*, CUP Archive.
23. Brown, A.L. ve Page, A., 1970. *Elements of functional analysis*, Van Nostrand-Reinhold.
24. Pugachev, V.S. ve Sinitsyn, I.N., 1999. *Lectures on functional analysis and applications*, World Scientific.
25. Moore, R.E. ve Cloud, M.J., 2007. *Computational functional analysis*, Elsevier.
26. Curtain, R.F. ve Pritchard, A.J., 1977. *Functional analysis in modern applied mathematics*, Academic Press.
27. Berinde, V., 2006. *Iterative approximation of fixed points*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
28. Kannan, R., 1968. Some results on fixed points, *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, 60, 71-76.
29. Rus, I.A., 1979. *Principles and applications of the fixed point theory*, Editura Dacia, Cluj-Napoca.
30. Rus, I.A., 2001. *Generalized contractions and applications*, Cluj University Press, Cluj-Napoca.

31. Taskovic, M., 1986. Osnove teorije fiksne tacke, Fundamental elements of fixed point theory, Matematicka Biblioteka 50, Belgrad.
32. Chatterjea, S., 1972. Fixed-point theorems, Comptes Rendus de L'Academie Bulgare des Sciences, 25, 727-730.
33. Rhoades, B.E., 1993. Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures II, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 24, 691-703.
34. Zamfirescu, T., 1972. Fix point theorems in metric spaces, Archiv der Mathematik, 23, 292-298.
35. Picard, E., 1890. Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives, Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, 6, 145-210.
36. Wazwaz, A.-M., 2011. Linear and nonlinear integral equations, Methods and Applications, Springer Science and Business Media.
37. Mann, W.R., 1953. Mean value methods in iteration, Proceedings of the American Mathematical Society, 4, 506-510.
38. Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, Proceedings of the American Mathematical Society, 44, 1, 147-150.
39. Noor, M.A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 251, 217-229.
40. Phuengrattana, W. ve Suantai, S., 2011. On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-iterations for continuous functions on an arbitrary interval, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235, 9, 3006-3014.
41. Chugh, R., Kumar, V. ve Kumar, S., 2012. Strong convergence of a new three step iterative scheme in Banach spaces, American Journal of Computational Mathematics, 2, 345-357.
42. Khan, S.H., 2013. A Picard-Mann hybrid iterative process, Fixed Point Theory and Applications, 69, 1-10.
43. Agarwal, R.P., Regan, D.O. ve Sahu, D.R., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 8, 1, 61-79.
44. Abbas, M. ve Nazir, T., 2014. A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems, Matematički Vesnik, 66, 2, 223-234.

45. Goebel, K. ve Reich, S., 1984. Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 83, Dekker, New York.
46. Kirk, W.A., 1982. Krasnosel'skii iteration process in hyperbolic spaces, Numerical Functional Analysis and Optimization, 4, 371–381 Zbl 0505.47046 MR 0673318.
47. Imoru, C.O. ve Olatinwo, M.O., 2003. On the stability of Picard and Mann iteration processes, Carpathian Journal of Mathematics, 19, 155–160
48. Berinde, V., 2002. On the stability of some fixed point procedures, Buletinul Stiintific al Universitatii Baia Mare, Seria B, Fascicola Matematica-Informatica, 1, 7-14.
49. Harder, A.M. ve Hicks, T.L., 1988. Stability results for fixed point iteration procedures, Mathematica Japonica, 33, 693-706.
50. Osilike, M.O. ve Udomene, A., 1999. Short proofs of stability results for fixed point iteration procedures for a class of contractive-type mappings, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 30, 1229-1234.
51. Chugh, R. ve Kumar, V., 2011. Data dependence of Noor and SP iterative schemes when dealing with quasi-contractive operators, International Journal of Computer Applications, 40, 41-46.
52. Jamil, Z.Z. ve Ahmed, B.A., 2015. Convergence and data dependence result for Picard S-iterative scheme using contractive-like operators, American Review of Mathematics and Statistics, 3, 83-86.
53. Khan, S.H., 2013. Fixed points of contractive-like operators by a faster iterative process, International Journal of Mathematics and Computer Science, 7, 57-59.
54. Olatinwo, M.O., Owojori, O.O. ve Imoru, C.O., 2006. On some stability results for fixed point iteration procedure, Journal of Mathematics and Statistical Science, 2, 339-342.
55. Olatinwo, M.O., 2010. Some stability results for nonexpansive and quasi-nonexpansive operators in uniformly convex Banach space using two new iterative processes of Kirk-type, 43, 101-114.
56. Bosede, A.O. ve Rhoades, B.E., 2010. Stability of Picard and Mann iteration for a general class of functions, Journal of Advanced Mathematical Studies, 3, 23-26.
57. Weng, X., 1991. Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mapping, Proceedings of the American Mathematical Society, 113, 727-731.

58. Soltuz, S.M. ve Grosan, T., 2008. Data dependence for Ishikawa iteration when dealing with contractive-like operators, *Fixed Point Theory and Applications*, 2008, 1-7.
59. Brezinski, C., 2000. Convergence acceleration during the 20th century, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 122, 1-21.
60. Berinde, V., 2004. Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators, *Fixed Point Theory and Applications*, 2, 97-105.
61. Berinde, V., 2016. On a notion of rapidity of convergence used in the study of fixed point iterative methods, *Creative Mathematics and Informatics*, 25, 29-40.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Ertan GÜNDOĞDU

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Batum Shota Rustaveli Devlet Üniversitesi, Matematik Bölümü
2005-2010

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2020-2023

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Özel Ak İrfan Okulu / Matematik Öğretmeni, 2015-Devam ediyor

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Gündoğdu, E. ve Atalan, Y., 2022. Rate of Convergence Analysis for a New Fixed Point Iteration, International Mediterranean Congress, 16-18 November 2022, Mersin, TÜRKİYE.