

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERGRUPLARA GİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA AŞÇIOĞLU

EKİM 2019

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERGRUPLARA GİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma AŞÇIOĞLU

DANIŞMAN: Prof. Dr. Erdal COŞKUN

ZONGULDAK

Ekim 2019

KABUL:

Fatma AŞÇIOĞLU tarafından hazırlanan “Hipergruplara Giriş” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle/oyçokluğuyla kabul edilmiştir. 23/10/2019

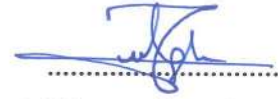
Danışman: Prof. Dr. Erdal COŞKUN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



Üye: Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



Üye: Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN

Düzce Üniversitesi, Göllyaka Meslek Yüksekokulu



ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım./....../2019



Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

F. Catali
Fatma AŞÇIOĞLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HİPERGRUPLARA GİRİŞ

Fatma AŞÇIOĞLU

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erdal COŞKUN

Ekim 2019, 65 sayfa

1975 yılında Jewett tarafından tanımlanan Hipergruplar, lokal kompakt grupların bir genellemesi olarak ortaya çıkmıştır. Bu kavramla ilgili genel bilgiler Bloom ve Heyer'in "Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups" isimli çalışmasında yer almaktadır. Bu tezde hipergrupların tanımına, bazı özelliklerine ve alt hipergruplara yer verilmiştir. Hipergruplar için gerekli olan ölçüm uzayları ve konvolüsyon çarpımları da ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Konvolüsyon Çarpımı, Zayıf Topoloji, Michael Topolojisi, Hipergruplar

Bilim Kodu: 403.03.01



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

INTRODUCTION TO THE HYPERGROUPS

Fatma AŞÇIOĞLU

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

**Thesis Advisor: Prof. Dr. Erdal COŞKUN
October 2019, 65 pages**

As a generalization of the local compact groups, the hypergroups are introduced by Jewett in 1975. The general information about this concept is given by Bloom and Heyer in “Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups”. In this thesis, the definition and some properties of hypergroups and subhypergroups are given. Moreover, the measure spaces and convolution products which are necessary for hypergroups are investigated.

Keywords: Convolution Product, Weak Topology, Michael Topology, Hypergroups

Science Code: 403.03.01



TEŞEKKÜR

Tez konusunun seçiminden itibaren çalışmalarımda bana yardımcı olan, görüş öneri ve bilgilerini benimle paylaşan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Erdal COŞKUN'a, yüksek lisansa başladığım günden beri yardımlarını esirgemeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN hocama, bu çalışma boyunca en büyük destekçim olan aileme ve eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.





İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
 BÖLÜM 1 GİRİŞ.....	 1
1.1 σ – CEBİRLER VE ÖLÇÜM.....	1
1.2 ÖLÇÜLEBİLİR DÖNÜŞÜMLER.....	3
1.3 σ – CEBİRLERİN ÇARPIMLARI.....	4
1.4 İKİ ÖLÇÜMÜN ÇARPIMI.....	5
1.5 KONVOLÜSYON ÇARPIMI.....	6
1.5.1 Konvolüsyon Çarpımın Özellikleri.....	7
 BÖLÜM 2 ZAYIF TOPOLOJİ.....	 11
2.1 GENEL TOPOLOJİDEN ÖN BİLGİLER.....	11
2.2 $\sigma(X, X^*)$ TOPOLOJİSİ.....	14
2.3 $\sigma(X^*, X)$ TOPOLOJİSİ.....	16
 BÖLÜM 3 LOKAL KOMPAKT UZAYLAR.....	 19

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
3.1 KONİ TOPOLOJİSİ	19
3.2 POZİTİF SÜREKLİ LİNEER DÖNÜŞÜMLER	20
3.3 POZİTİF SÜREKLİ BİLİNEER DÖNÜŞÜMLER	23
3.3.1 Kompakt Alt Kümelerin Uzayı (Michael Topolojisi)	24
3.4 İNVOLÜSYON	24
 BÖLÜM 4 HİPERGRUPLAR	 27
4.1 HİPERGRUPLARA GİRİŞ	27
4.2 FONKSİYONLARIN ÖTELENMESİ	29
4.3 ALT İNVARYANT VE İNVARYANT ÖLÇÜMLER	29
4.4 KÜMELERİN KONVOLÜSYONU	31
4.5 FONKSİYON VE ÖLÇÜMLERİN KONVOLÜSYONU	32
4.6 ALT İNVARYANT ÖLÇÜMÜN VARLIĞI	34
4.7 HAAR ÖLÇÜMÜ	36
4.8 MODÜLER FONKSİYON	40
4.9 FONKSİYON VE ÖLÇÜMLERİN KONVOLÜSYONU	42
4.10 MUTLAK SÜREKLİ ÖLÇÜMLER	45
4.11 KONVOLÜSYON CEBİRİ	46
4.11.1 Kompleks Değerli Fonksiyonlar ve Ölçümler	46
4.11.2 L_p Uzayları	47
4.12 ÇARPIMSAL FONKSİYONLAR	48
 BÖLÜM 5 BAZI ÖZEL HİPERGRUPLAR	 51
5.1 AYRIK HİPERGRUPLAR	51
5.2 KOMPAKT HİPERGRUPLAR	52
5.3 DEĞİŞMELİ HİPER GRUPLAR	53

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
5.4 SÜREKLİ AFİN ETKİSİ	54
5.5 KOSETLER.....	56
5.6 ÖRNEKLER.....	57
5.7 ALT HİPERGRUPLAR	60
KAYNAKLAR.....	63
ÖZGEÇMİŞ	65



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

X	: Keyfi bir küme
$\mathcal{M}$	: σ -cebiri
$\mathcal{P}(X)$	: X in kuvvet kümesi
A^t	: A kümesinin tümleyeni
μ	: Ölçüm
$\mathcal{R}$	: Halka
$\bigotimes_{i=1}^n$	: σ -cebirlerin çarpımı
$(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$	: Ölçüm uzayı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{R}}$	: $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ kompaktlaştırılmış reel sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{R}}_+$	: $\overline{\mathbb{R}}_+ := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x \geq 0\}$ genişletilmiş pozitif reel sayılar kümesi
$M^e(\mathbb{R}^p)$	: $\mathbb{R}^p$ üzerindeki sonlu Borel ölçümlerinin kümesi
$M(X)$	: X üzerindeki Borel ölçümlerinin kümesi
$M^+(X)$	: X üzerindeki negatif olmayan Borel ölçümlerinin kümesi
$M_c(X)$	: X üzerindeki kompakt dayanaklı Borel ölçümlerinin kümesi
p_x	: x in birim nokta kütlesi
$M^1(X)$	: X üzerindeki olasılık ölçümü
$C(X)$	: X üzerindeki sürekli fonksiyonların kümesi
$C^+(X)$	: X üzerindeki negatif olmayan sürekli fonksiyonların kümesi
$C_b(X)$	: X üzerindeki sınırlı sürekli fonksiyonların kümesi
$C_c(X)$	: X üzerindeki kompakt dayanaklı sürekli fonksiyonların kümesi
$M^\infty(X)$	: $[0, \infty]$ aralığında değer alan, X üzerinde Borel ölçümlerinin kümesi
$B^\infty(X)$	: $[0, \infty]$ aralığında değer alan, X üzerinde Borel fonksiyonlarının kümesi
$\mathcal{K}(X)$	: X in tüm boş olmayan kompakt alt kümelerinin ailesi
cA	: A 'nın kapanışı

$C_0(X)$: X üzerindeki sonsuzda sıfır olan sürekli fonksiyonların kümesi
 $M_\alpha(K)$: $M(K)$ 'de m 'ye göre mutlak sürekli olan ölçümlerin kümesi

KISALTMALAR

$A_n \uparrow X$: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ artarak X 'e yakınsayan küme dizisi
 $day f$: f fonksiyonunun dayanağı
 $pos f$: $\{x: f(x) > 0\}$



BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 σ -CEBİRLER VE ÖLÇÜM

Tanım 1.1

X herhangi bir küme ve $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun.

a) $X \in \mathcal{M}$

b) $A \in \mathcal{M}$ ise $A^t \in \mathcal{M}$

c) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ ise

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

koşullarını sağlayan $\mathcal{M}$ ye X üzerinde bir σ -cebiri denir.

Örnek 1.1

X herhangi bir küme ve $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} = \{A \subset X : A \text{ ya da } A^t \text{ sayılabilir}\}$$

olsun. Bu durumda $\mathcal{M}$ bir σ -cebirdir.

a) $X^t = \emptyset$ sayılabilir olduğundan $X \in \mathcal{M}$ dir.

b) $A \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda A ya da A^t sayılabilir olduğundan $(A^t)^t$ ya da A^t sayılabilir. Böylece $A^t \in \mathcal{M}$ dir.

c) Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için A_n sayılabilir ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ de sayılabilir.

Eğer en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için A_{n_0} sayılabilir değilse,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^t = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^t \subset A_{n_0}^t$$

olup, $A_{n_0}^t$ sayılabilir kümesinin tüm alt kümeleri de sayılabilir olduğundan $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^t$ sayılabilir.

Bu durumda $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ dir.

Tanım 1.2

X herhangi bir küme ve $\mathcal{M}$, X üzerinde bir σ -cebiri olsun. $\mathcal{M}$ üzerinde tanımlı μ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, μ fonksiyonuna $\mathcal{M}$ üzerinde bir ölçümdür denir:

- a) $\mu(\emptyset) = 0$
- b) $\mu \geq 0$
- c) $\mathcal{M}$ σ -cebiri için ikişer ikişer ayrık $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ için

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Her $A \in \mathcal{M}$ için $\mu(A)$ ya A nın ölçümü denir.

Örnek 1.2

X herhangi bir küme, $G(X) = \{A: A \subset X\}$ ve $\mu: G(X) \rightarrow [0, \infty]$ olmak üzere,

$$\mu(E) = \begin{cases} \infty & ; \quad E \text{ sonsuz ise} \\ n(E) & ; \quad E \text{ sonlu ise} \end{cases}$$

bir ölçümdür. μ ölçümüne X üzerinde sayma ölçümü denir. (Burada $n(E)$ nicelik sayısıdır.)

Tanım 1.3

Bir $\mathcal{R}$ halkası üzerindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{M}$ de $A_n \uparrow X$ ve $\mu(A_n) < \infty$ olan bir $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi varsa μ ölçümüne σ -sonlu denir.

1.2 ÖLÇÜLEBİLİR DÖNÜŞÜMLER

$(X, \mathcal{M})$ ve $(X', \mathcal{M}')$ ölçülebilir uzaylar ve $T: X \rightarrow X'$ herhangi bir dönüşüm olmak üzere her $A' \in \mathcal{M}'$ için $T^{-1}(A') \in \mathcal{M}$ oluyorsa T ye $(\mathcal{M} - \mathcal{M}')$ ölçülebilirdir denir.

Teorem 1.1

$(X, \mathcal{M})$ ve $(X', \mathcal{M}')$ ölçüm uzayları ve $\mathcal{F}', \mathcal{M}'$ nün bir üretici olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

a) $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ dönüşümü ölçülebilirdir.

b) Her $A' \in \mathcal{F}'$ için $T^{-1}(A') \in \mathcal{M}$ dir.

Teorem 1.2

$T: (X, \mathcal{M}) \rightarrow (X', \mathcal{M}')$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\mathcal{M}$ üzerindeki, her bir μ ölçümü $\mathcal{M}'$ üzerindeki bir μ' ölçümüne

$$A' \rightarrow \mu(T^{-1}(A'))$$

dönüşümü ile resmedilir ve

$$\mu'(A') := \mu(T^{-1}(A'))$$

biçiminde gösterilir.

Kanıt:

$(A'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}'$, ikişer ikişer ayrık kümeler ise $(T^{-1}(A'_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ de ikişer ikişer ayrıktır ve

$$T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A'_n)$$

dir. Böylece

$$\mu'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) = \mu\left(T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A'_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(A'_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(A'_n)$$

olur.

$\mu' \geq 0$ ve $\mu'(\emptyset) = 0$ olduğu açıkça görülür.

Tanım 1.4

μ' ölçümüne μ ölçümünün T dönüşümü altındaki resmi denir.

$A' \in \mathcal{M}'$ için,

$$T(\mu)(A') := \mu(T^{-1}(A'))$$

biçiminde gösterilir (Bauer 1972).

1.3 σ – CEBİRLERİN ÇARPIMLARI

$i = 1, 2, \dots, n$ için $(X_i, \mathcal{M}_i)$ ölçülebilir uzaylar olmak üzere,

$$X := \prod_{i=1}^n X_i = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

ve $p_i: X \rightarrow X_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) dönüşümü her i için $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in X$ noktasını i -inci koordinatı olan w_i ye dönüştüren dönüşüm olsun. $X_1, X_2, \dots, X_n$ üzerinde $p_1, p_2, \dots, p_n$ dönüşümleri ile üretilen σ -cebirlere sırasıyla $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n$ olmak üzere

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{M}_i = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_n = \mathcal{M}(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

σ -cebirlere $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n$ σ -cebirlerin çarpımı denir (Bauer 1972).

Tanım 1.5

Herhangi iki kümenin arakesitini (birleşimini) kapsayan $\mathcal{F}$ küme sistemlerine $\cap$ -stabil (ya da $\cup$ -stabil)'dir denir.

Teorem 1.3

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\mathcal{F}_i$, X_i deki $\mathcal{M}_i$ σ -cebiri üreten $\cap$ -stabil bir küme ve $(E_{ik})_{k \in \mathbb{N}}$ küme dizisi $(E_{ik})_{k \in \mathbb{N}} \uparrow X_i$ ye yakınsayan kümelerin bir dizisi olsun.

Bu durumda $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_n$ σ -cebiri $E_i \in \mathcal{F}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ çarpım sistemi tarafından üretilir (Bauer 1972).

Uyarı 1.1

$i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ ölçüm uzayı verilsin ve $n \geq 2$ ve her bir $\mathcal{M}_i$ için σ -cebiri bir $\mathcal{F}_i$ üretici olsun. Keyfi $E_i \subset \mathcal{F}_i$ kümeleri için

$$\pi(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \mu_1(E_1) \cdot \mu_2(E_2) \cdot \dots \cdot \mu_n(E_n).$$

Tanımı kullanılarak $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_n$ σ -cebiri üzerinde bir π ölçümünün varlığı kanıtlanabilir (Bauer 1972).

1.4 İKİ ÖLÇÜMÜN ÇARPIMI

Tanım 1.6

$i = 1, 2$ için $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ ölçüm uzayı olsun. Her $Q \subset X_1 \times X_2$ kümesi ve her $\omega_i \in X_i$ için

$$Q_{\omega_1} = \{\omega_2 \in X_2 : (\omega_1, \omega_2) \in Q\}$$

$$Q_{\omega_2} = \{\omega_1 \in X_1 : (\omega_1, \omega_2) \in Q\}$$

ifadelerine Q nin ω_i -kesitidir denir ve Q_{ω_i} biçiminde gösterilir.

Lemma 1.1

μ_1 ve μ_2 σ -sonlu ölçümler olmak üzere her $Q \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ için

$$\omega_1 \rightarrow \mu_2(Q_{\omega_1})$$

fonksiyonu X_1 de $\mathcal{M}_1$ -ölçülebilir ve

$$\omega_2 \rightarrow \mu_1(Q_{\omega_2})$$

fonksiyonu X_2 de $\mathcal{M}_2$ -ölçülebilirdir (Bauer 1972).

Teorem 1.4

$i = 1, 2$ için $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ σ -sonlu ölçüm uzayları olsun. Bu durumda

$$\pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$$

olan, $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ üzerinde bir π ölçüm uzayı vardır ve her $Q \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ için

$$\pi(Q) = \int \mu_2(Q_{\omega_1}) \mu_1(d\omega_1) = \int \mu_1(Q_{\omega_2}) \mu_2(d\omega_2)$$

dir (Bauer 1972).

Tanım 1.7

$i = 1, 2$ için $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ σ -sonlu ölçüm uzayları için $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ üzerindeki π ölçümüne μ_1 ve μ_2 ölçümlerinin çarpımı denir ve $\mu_1 \otimes \mu_2$ ile gösterilir.

Lemma 1.2

$i = 1, 2$ için $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ σ -sonlu ölçülebilir uzaylar ve

$$f: X_1 \times X_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$$

fonksiyonu $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ de ölçülebilir olsun. Bu durumda

$$\omega_2 \rightarrow \int f_{\omega_2} d\mu_1 \text{ ve } \omega_1 \rightarrow \int f_{\omega_1} d\mu_2$$

fonksiyonları sırasıyla $\mathcal{M}_1$ -ölçülebilirdir ve $\mathcal{M}_2$ - ölçülebilirdir. Öyleyse

$$\int f(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \left(\int (f_{\omega_2} d\mu_1) \right) \mu_2(d\omega_2) = \int \left(\int (f_{\omega_1} d\mu_2) \right) \mu_1(d\omega_1)$$

dir (Bauer 1972).

1.5 KONVOLÜSYON ÇARPIMI

p -boyutlu $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}^p)$ Borel ölçülebilir uzayı verilsin. $\mathfrak{B}^p$ üzerindeki her sonlu μ ölçümü sonlu Borel ölçümü olarak adlandırılır. Bu ölçümlerin kümesi $M^e(\mathbb{R}^p)$ ile gösterilmek üzere her $\mu \in M^e(\mathbb{R}^p)$ için

$$\|\mu\| = \mu(\mathbb{R}^p)$$

sayısına μ ölçümünün toplam kütlesi denir.

Noktaların toplanması için $\mathbb{R}^p$ nin grup yapısı kullanılacaktır. $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in M^e(\mathbb{R}^p)$ sonlu sayılabilir ölçümle ilişkilendirilebilir. Çarpım ölçümünden farklı olarak konvolüsyon çarpımı $\mathfrak{B}^p$ üzerinde bir ölçümdür ve $M^e(\mathbb{R}^p)$ nin bir elemanıdır (Bauer 1972).

$\mathfrak{B}^{np} := \underbrace{\mathfrak{B}^p \otimes \dots \otimes \mathfrak{B}^p}_{n \text{ tane}}$ olduğundan $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n$ çarpım ölçümü olsun.

Bu durumda

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n \in M^e(\mathbb{R}^p)$$

dir.

$$A_n: \mathbb{R}^{pn} \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

şeklinde tanımlanan A_n dönüşümü süreklidir ve böylece $\mathfrak{B}^{np} - \mathfrak{B}^p$ ölçülebilirdir (Bauer 1972).

Tanım 1.8

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in M^e(\mathbb{R}^p)$ olmak üzere

$$\mu_1 * \mu_2 * \dots * \mu_n = A_n(\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n)$$

ifadesine A_n dönüşümü altında $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n$ e ölçümlerin konvolüsyonu denir.

1.5.1 Konvolüsyon Çarpımın Özellikleri:

$$a) (\mu_1 * \mu_2 * \dots * \mu_n)(\mathbb{R}^p) = (\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n)(\mathbb{R}^{np}) = \|\mu_1\| \cdot \|\mu_2\| \cdot \dots \cdot \|\mu_n\|$$

konvolüsyon çarpımın temel özelliğidir ve

$$\|\mu_1 * \mu_2 * \dots * \mu_n\| = \|\mu_1\| \cdot \|\mu_2\| \cdot \dots \cdot \|\mu_n\|$$

eşitliği de geçerlidir.

b) Konvolüsyon çarpımı $n=2$ ye kadar incelemek yeterlidir.

c) $M^e(\mathbb{R}^p)$ deki ν_1 ve ν_2 ölçümleri için $\nu_1 + \nu_2$ de $M^e(\mathbb{R}^p)$ dedir.

Her $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ve $\nu \in M^e(\mathbb{R}^p)$ için $\alpha\nu$ de $M^e(\mathbb{R}^p)$ nin elemanıdır.

$\mu, \nu_1, \nu_2, \nu \in M^e(\mathbb{R}^p)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{aligned} \mu * (\nu_1 + \nu_2) &= \int \mu(B - y)(\nu_1 + \nu_2) dy = \int \mu(B - y)(\nu_1(dy) + \nu_2(dy)) \\ &= \int \mu(B - y)\nu_1(dy) + \int \mu(B - y)\nu_2(dy) \end{aligned}$$

$$= \mu * \nu_1 + \mu * \nu_2$$

ve

$$\begin{aligned} \mu * (\alpha\nu) &= \int \mu(B-y)(\alpha\nu)(dy) \\ &= \int \mu(B-y)\alpha.\nu(dy) \\ &= \alpha.(\mu * \nu) \end{aligned}$$

dir.

d) $\nu_1, \nu_2 \in M^e(\mathbb{R}^p), \nu_1 + \nu_2 \in M^e(\mathbb{R}^p)$ için;

$$\|\nu_1 + \nu_2\| = (\nu_1 + \nu_2)(\mathbb{R}^p) = (\nu_1)(\mathbb{R}^p) + (\nu_2)(\mathbb{R}^p) = \underbrace{\|\nu_1\|}_{<\infty} + \underbrace{\|\nu_2\|}_{<\infty} < \infty$$

dir.

e) Benzer şekilde $\alpha\nu \in M^e(\mathbb{R}^p)$ için

$$\|\alpha\nu\| = (\alpha\nu)(\mathbb{R}^p) = \alpha(\nu(\mathbb{R}^p)) = \alpha \underbrace{\|\nu\|}_{<\infty} < \infty \in M^e(\mathbb{R}^p).$$

Aşağıdaki ifadeler dağılıma kuralından çıkar.

f) Ölçümlerin her (ν_n) dizisi için $\sum \|\nu_n\| < \infty$ olduğundan $M^e(\mathbb{R}^p)$ dedir. $\sum \nu_n$ ayrıca $M^e(\mathbb{R}^p)$ de bir ölçümdür. Böylece her $\mu \in M^e(\mathbb{R}^p)$ için

$$\begin{aligned} \mu * \left[\sum_{i=1}^n \nu_n \right] &= \int \mu(B-y) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \right] (dy) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int \mu(B-y) \nu_n(dy) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu * \nu_n \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right)(\mathbb{R}^p) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k v_n(\mathbb{R}^p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^k v_n \right\| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \|v_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < \infty \in M^e(\mathbb{R}^p)\end{aligned}$$

dir (Bauer 1972).





BÖLÜM 2

ZAYIF TOPOLOJİ

2.1 GENEL TOPOLOJİDEN ÖN BİLGİLER

Bir X kümesi, bir $(Y_i)_{i \in I}$ topolojik uzaylar ailesi ve $f_i: X \rightarrow (Y_i, \tau_i)$ olacak şekilde $(f_i)_{i \in I}$ dönüşümlerinin bir ailesi verilsin.

X üzerinde, tüm f_i leri sürekli yapan bir topoloji tanımlanacaktır. Bunu en basit yoldan gerçekleştirebilmek için X de bu amaç için gerekli olandan fazla açık küme bulunmaması gerekmektedir.

O_i lerin Y_i üzerinde açık küme olduğunda tüm $f_i^{-1}(O_i)$ lerin X üzerinde açık olduğu süreklilik tanımından açıktır. Bunların sonlu kesişimleri de açık olmalıdır ve bu sonlu kesişimlerin herhangi birleşimleri de açık olmalıdır.

Lemma 2.1

X bir küme ve $\mathcal{Q} \subset P(X)$ olsun.

• $\emptyset, X \in \mathcal{Q}$,

• $\mathcal{Q}$, sonlu kesişimler altında kapalı ise

$$\tau = \{\bigcup_{O \in \mathcal{O}} O \mid \mathcal{O} \subset \mathcal{Q}\}$$

X üzerinde bir topolojidir.

Kanıt:

Tanımdan $\emptyset, X \in \mathcal{Q}$ olduğundan $\emptyset, X \in \tau$ dur. Ayrıca yine tanımdan τ birleşimler altında kapalıdır. τ nun sonlu kesişimler altındaki kapallılığı incelenecektir.

$A_1, A_2 \in \tau$ olsun. Burada,

$$A_1 = \bigcup_{O_1 \in \mathcal{O}_1} O_1 \text{ ve } A_2 = \bigcup_{O_2 \in \mathcal{O}_2} O_2$$

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{\substack{O_1 \in \mathcal{O}_1 \\ O_2 \in \mathcal{O}_2}} O_1 \cap O_2$$

olacak şekilde $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{Q}$ vardır.

$\mathcal{Q}$ nun sonlu kesişimler altında kapalı olan bir alt kümesi olan $\mathcal{O}$,

$\{O_1 \cap O_2 \mid O \in \mathcal{O}_1, O \in \mathcal{O}_2\}$ ailesini simgelesin.

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O \in \tau$$

dir. Yani τ sonlu kesişimler altında kapalıdır.

Sonuç 2.1

$i \in I$ ve O_i, Y_i de açık olmak üzere tüm sonlu arakesitlerin birleşiminin ailesi olan $f_i^{-1}(O_i)$ bir topolojidir. Bu topolojiye X üzerinde $(f_i)_{i \in I}$ ler tarafından üretilen zayıf topoloji denir ve $\sigma(X, (f_i)_{i \in I})$ şeklinde gösterilir.

$(f_i)_{i \in I}$ fonksiyonları bu topolojiye göre süreklidir.

Teorem 2.1

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X de bir dizi olsun. Bu dizi $\sigma(X, (f_i)_{i \in I})$ zayıf topolojide yakınsaktır ancak ve ancak

$$\forall i \in I, \lim_{n \rightarrow \infty} f_i(x_n) = f_i(x)$$

dir.

Kanıt:

Öncelikle dizinin zayıf topolojide $x \in X$ e yakınsadığı varsayalım. Her $j \in I$ için j fonksiyonu $\sigma(X, (f_i)_{i \in I})$ de sürekli olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_j(x_n) = f_j(x)$$

dir.

Tersine $\forall i \in I$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_i(x_n) = f_i(x)$$

olacak şekilde $x \in X$ bulunduğu varsayılınsın. x i içeren bir O açık kümesi alınsın. Zayıf topoloji tanımından $J \subset I$ sonlu kümesi ve her $j \in J$ için $O_j \subset Y_j$ olacak şekilde $(O_j)_{j \in J}$ açık kümesi vardır, öyle ki

$$x \in \bigcap_{j=1}^n f_{i_j}^{-1}(O_j).$$

Yani,

$$\forall j \in J, f_j(x) \in O_j$$

dir.

$j \in J$ alınsın, $(f_j(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $f_j(x)$ e yakınsadığı bilinmektedir. O_j , $f_j(x)$ i içerir ve

$$\forall n \geq N_j, f_j(x_n) \in O_j$$

olacak şekilde $N_j \in \mathbb{N}$ vardır.

$N = \max \{N_j : j \in J\}$ seçilirse

$$\forall n \geq N, \forall j \in J, f_j(x_n) \in O_j$$

elde edilir. Bir başka deyişle

$$\forall n \geq N, x_n \in \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(O_j) \subset O$$

dir. Yani $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\sigma(X, (f_i)_{i \in I})$ topolojisinde x e yakınsar (Lecomte, 2006).

Teorem 2.2

(Z, τ) bir topolojik uzay ve $\varphi: Z \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. φ , τ ve $\sigma(X, (f_i)_{i \in I})$ topolojilerine göre süreklidir ancak ve ancak her $i \in I$ için $f_i \circ \varphi$ süreklidir.

Kanıt

φ , τ ve $\sigma(X, (f_i)_{i \in I})$ topolojilerine göre sürekli ise her $i \in I$ için $f_i \circ \varphi$ nin sürekli olduğu açıktır.

Tersine her $i \in I$ için $f_i \circ \varphi$ sürekli olsun.

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow x &\Rightarrow (f_i \circ \varphi)(x_n) \rightarrow (f_i \circ \varphi)(x) \\ &\Rightarrow f_i(\varphi(x_n)) \rightarrow f_i(\varphi(x)) \end{aligned}$$

Teorem 2.1'den

$$\Rightarrow \varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$$

$\varphi(x) \in O_x \Rightarrow \varphi^{-1}(O_x)$ in Z de açık olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} O_x &= \bigcup_{O \in \mathcal{O}} \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(O_i) \\ \varphi^{-1}(O_x) &= \bigcup_{O \in \mathcal{O}} \bigcap_{i=1}^n (\varphi^{-1} \circ f_i^{-1})(O_i) \end{aligned}$$

açıktır. Yani $(f_i \circ \varphi)^{-1}$ açıktır.

Zayıf topoloji noktasal yakınsaklık topolojisidir. A herhangi bir küme ve

$X = \{f: A \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ fonksiyon}\}$ olsun. $\forall a \in A$ için

$$\forall f \in X \quad \varphi_a(f) = f(a)$$

olan $\varphi_a: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. Noktasal yakınsaklık topolojisi $\sigma(X, (f_a)_{a \in A})$ dır.

Bu topolojide yakınsak fonksiyonlar dizisi ancak ve ancak noktasal yakınsar.

2.2 $\sigma(X, X^*)$ TOPOLOJİSİ

Bu bölümde X bir normlu uzay olarak alınacak ve aksi belirtilmediği sürece tam olmadığı varsayılacaktır.

Tanım 2.1

X üzerindeki zayıf topoloji $\sigma(X, (f)_{f \in X^*})$ topolojisi. Bu topoloji kolaylık sağlaması adına $\sigma(X, X^*)$ olarak gösterilecektir.

Teorem 2.3

$\sigma(X, X^*)$ topolojisi Hausdorff'tur.

Kanıt

$x, y \in X$ iki farklı nokta olsun. $\|x - y\| > 0$ olduğundan $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$ nun y yi içermeyecek şekilde bir ε pozitif vardır. $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$ konveks açık olduğundan $\{y\}$ den bir hiperdüzlem ile kesin olarak ayrılabilirdiği Hahn-Banach teoreminin geometrik formundan bilinmektedir.

Burada $f \in X^*$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ vardır, öyle ki

$$\forall u \in \mathcal{B}(x, \varepsilon) (f, u) < \alpha < (f, y).$$

Özellikle,

$$(f, x) < \alpha < (f, y)$$

olur. Bu nedenle,

$$x \in f^{-1}((-\infty, \alpha)) \text{ ve } y \in f^{-1}((\alpha, +\infty))$$

olur. Bu iki küme zayıf açıktır ve ayrık kümelerdir. Böylece $\sigma(X, X^*)$ topolojisi Hausdorff'tur.

Önerme 2.1

a) Zayıf topoloji norm topolojisinden daha zayıftır. Her zayıf açık küme aynı zamanda kuvvetli açıktır.

b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x e zayıf yakınsar ancak ve ancak

$$\forall f \in X^* \lim_{n \rightarrow \infty} (f, x_n) = (f, x).$$

c) Her kuvvetli yakınsak dizi aynı zamanda zayıf yakınsaktır.

d) Eğer $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X de x e zayıf yakınsayan bir dizi ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sınırlı ve

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

e) Eğer $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X de x e zayıf yakınsayan bir dizi ise ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X^* da f ye kuvvetli yakınsayan bir dizi ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, x_n) = (f, x)$$

dir.

2.3 $\sigma(X^*, X)$ TOPOLOJİSİ

X deki herhangi bir eleman X^* da sınırlı lineer fonksiyon olabilir. Ölçüm yardımıyla $\forall f \in X^*$ için $(f, x) = (x, f)$ yazılabilir.

Tanım 2.2

X^* üzerindeki zayıf-* topolojisi $\sigma(X^*, (x)_{x \in X})$ tir. Kolaylık sağlamak amacı ile $\sigma(X^*, X)$ ile gösterilecektir.

Teorem 2.4

$\sigma(X^*, X)$ topolojisi Hausdorff'tur.

Kanıt

$f, g \in X^*$ iki farklı eleman olsun. $(f, x) \neq (g, x)$ olacak şekilde $x \in X$ vardır.

Örneğin $(f, x) < (g, x)$ olduğu varsayılırsa $(f, x) < \alpha < (g, x)$ olacak şekilde bir α gerçek sayısı bulunur.

Böylece,

$$f \in x^{-1}((-\infty, \alpha)) \text{ ve } g \in x^{-1}((\alpha, +\infty))$$

olur. Bunlar f ve g yi ayıran iki ayrık zayıf-* açık kümelerdir.

Önerme 2.2

a) X^* üzerindeki zayıf-* topolojisi $\sigma(X^*, X^{**})$ zayıf topolojisinden daha zayıftır.

b) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi X^* da f ye zayıf-* yakınsaktır ancak ve ancak

$$\forall x \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, x) = (f, x)$$

dir.

c) X^* da her kuvvetli yakınsak dizi aynı zamanda zayıf-* yakınsaktır.

d) Eğer $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X de f ye zayıf-* yakınsıyor ise $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sınırlı ve

$$\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$$

dir.

e) Eğer , X^* da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x e zayıf-* yakınsak ve X^* da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x e kuvvetli yakınsak ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, x_n) = (f, x)$$

dir (Lecomte 2006).



BÖLÜM 3

LOKAL KOMPAKT UZAYLAR

3.1 KONİ TOPOLOJİSİ

X lokal kompakt bir Hausdorff uzayı olsun. $M^+(X)$ üzerindeki koni topolojisi, her $f \in C_c^+(X)$ için, $\mu \rightarrow \int_X f d\mu$ ve $\mu \rightarrow \mu(X)$ dönüşümlerinin sürekli olduğu en zayıf topolojidir. Bu topoloji, zayıf- * topolojisine eşittir ancak ve ancak X kompaktır.

Buradan sonraki bölümlerde, M^+ üzerindeki topoloji koni topolojisidir.

Lemma 3.1

$M^+(X)$ deki sonlu dayanaklı ölçümlerin kümesi $M^+(X)$ de yoğundur.

Lemma 3.2

X ten $M^+(X)$ in kapalı bir alt kümesine tanımlanan $x \rightarrow p_x$ dönüşümü bir homeomorfizmdir.

Lemma 3.3

D bir yönlendirilmiş küme ve $\{\mu_\beta\}_{\beta \in D}$, $M^+(X)$ de μ ölçümüne yakınsayan bir ağ olsun. $\{f_\beta\}_{\beta \in D}$, $C_b^+(X)$ de X in alt kompakt alt kümeleri üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir ağ olsun ve $\|f_\beta\|_u$ nun sınırlı olduğu varsayalım. Bu durumda,

$$\lim_{\beta} f_\beta \mu_\beta = f \mu$$

olur.

Kanıt

$N = \sup \|f_a\|_u$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. A , X in $\mu(X - A) < \varepsilon/2N$ olacak şekilde bir kompakt alt kümesi olsun. $g \leq 1$ olacak şekilde X üzerinde $g \in C_c^+(X)$ ve A üzerinde $g = 1$ seçelim. Böylece,

$$\begin{aligned} \int f_\beta d\mu_\beta - \int f d\mu &= \int gf d\mu_\beta - \int gf d\mu - \int g(f - f_\beta) d\mu_\beta \\ &+ \int (1 - g)f_\beta d\mu_\beta - \int (1 - g)f d\mu \end{aligned}$$

olur. g kompakt dayanağa sahip olduğundan,

$$\limsup_\beta \left| \int f_\beta d\mu_\beta - \int f d\mu \right| \leq 2N \int (1 - g) d\mu < \varepsilon$$

elde edilir.

Teorem 3.1

$L: M(X) \rightarrow \mathbb{C}$ linner dönüşümü verilsin. L dönüşümü $M^+(X)$ te sürekli dir ancak ve ancak her $\mu \in M(X)$ için

$$L(\mu) = \int_X h d\mu$$

olacak şekilde X üzerinde sınırlı sürekli bir h fonksiyonu vardır (Jewett 1975).

Kanıt

h , X üzerinde sınırlı sürekli bir fonksiyon ve L yukarıda tanımlandığı gibiyse Lemma 3.3'ten L sürekli dir.

L nin sürekli olduğu varsayalım. h fonksiyonu $h(x) = L(p_x)$ şeklinde tanımlansın. Lemma 3.2'den h sürekli dir. Ayrıca, sonlu dayanaklı tüm ölçümler için $L(\mu) = \int h d\mu$ dür. Eğer h sınırlı ise Lemma 3.1 ve Lemma 3.3'ten her $\mu \in M^+(X)$ ve dolayısıyla her $\mu \in M(X)$ için $L(\mu) = \int h d\mu$ olur. h fonksiyonunun sınırlı olmadığı varsayalım. Her $n \geq 1$ için $|h(x_n)| \geq n$ olacak şekilde $x_n \in X$ vardır. $\mu_n = (1/h(x_n))p_{x_n}$ olsun. Böylece her n için $\mu_n \rightarrow 0$ ve $L(\mu_n) = 1$ olur. L sürekli olduğu için bu bir çelişkidir.

3.2 POZİTİF SÜREKLİ LİNEER DÖNÜŞÜMLER

Tanım 3.1

X ve Y lokal kompakt Hausdorff uzayları olsun ve

$$M(X) \rightarrow M(Y)$$

$$\mu \rightarrow \mu'$$

şeklinde tanımlanan lineer dönüşüm verilsin. Aşağıdaki özellikleri sağlayan dönüşüme pozitif-süreklidir denir:

- a) $\mu \geq 0$ iken $\mu' \geq 0$,
- b) $M^+(X) \rightarrow M^+(Y)$ kısıtlanmış dönüşümü süreklidir.

Eğer g, Y üzerinde bir Borel fonksiyonu ise g' fonksiyonu X üzerinde,

$$g'(x) := \int_Y g d(p_x')$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.4

$\mu \in M(X)$ ve $g \in C_b(Y)$ olsun. Buna göre aşağıdaki özellikler sağlanır:

- a) $N = \sup \|p_z'\|$ sonludur,
- b) $\|\mu'\| \leq N\|\mu\|$,
- c) g' süreklidir ve $\|g'\|_u \leq N\|g\|_u$,
- d) $\int_Y g d\mu = \int_X g' d\mu$ (Jewett 1975).

Yukarıda verilen Lemma 3.4'e göre

$$\mu' = \int_X p_x' \mu(dx)$$

yazılabilir. Burada μ' integrali X üzerinde ölçüm değerli bir fonksiyondur. Bazen dönüşümü sonsuz negatif olmayan ölçüme genişletmek mümkündür. $m \in M^\infty(X)$ olsun ve her $g \in C_c^+(Y)$ için $\int g' dm$ nin sonlu olduğu varsayalım. Riesz temsil teoremine göre her $g \in C_c^+(Y)$ için,

$$\int_Y g dm' = \int_X g' dm$$

olacak şekilde $M^\infty(Y)$ de tek bir tane m' ölçümü vardır. Bu durumda

$$m' = \int_X p_x' m(dx)$$

notasyonu kullanılabilir.

Teorem 3.2

m, X üzerinde negatif olmayan bir ölçüm olsun ve m' ölçümünün tanımlı olduğu varsayalım.

a) Eğer g, Y üzerinde zayıf-yarı sürekli fonksiyon ise g' fonksiyonu X üzerinde zayıf-yarı sürekli ve

$$\int g dm' = \int g' dm$$

dir.

b) $g \in B^\infty(Y)$ ise $g' \in B^\infty(X)$ dir.

c) $g \in B^\infty(Y)$ ve g, m' ölçümüne göre σ -sonlu ise g', m ölçümüne göre σ -sonludur ve

$$\int g dm' = \int g' dm$$

dir (Jewett 1975).

Lemma 3.5

$$X \rightarrow M^+(Y)$$

$$x \rightarrow \omega_x$$

dönüşümü sürekli olsun. $\|\omega_x\|$ in sınırlı olduğu varsayalım. Bu durumda

$$M(X) \rightarrow M(Y)$$

$$p_x \rightarrow \omega_x$$

dönüşümü, pozitif sürekli lineer dönüşümü için bir tek uzantıya sahiptir (Jewett 1975).

3.3 POZİTİF SÜREKLİ BİLİNEER DÖNÜŞÜMLER

X, Y ve Z lokal kompakt Hausdorff uzayları olsun.

$$M(X) \times M(Y) \rightarrow M(Z)$$

$$(\mu, \nu) \rightarrow \mu * \nu$$

bilineer dönüşümü verilsin. Aşağıdaki özellikleri sağlayan dönüşüme pozitif süreklidir denir:

a) $\mu \geq 0$ ve $\nu \geq 0$ iken $\mu * \nu \geq 0$,

b) $M^+(X) \times M^+(Y) \rightarrow M^+(Z)$ kısıtlanmış dönüşümü süreklidir (Jewett 1975).

Lemma 3.6

$\mu \in M(X)$ ve $\nu \in M(Y)$ için $\mu * \nu = (\mu \times \nu)'$ olacak şekilde bir tek

$$M(X \times Y) \rightarrow M(Z)$$

$$\pi \rightarrow \pi'$$

pozitif sürekli lineer dönüşümü vardır.

Lemma 3.6'dan görüleceği üzere, Hewitt ve Ross'da kullanıldığı gibi,

$$\mu * \nu = \int_Y \int_X (p_x * p_y) \mu(dx) \nu(dy)$$

formülü yazılabilir. Yine benzer şekilde eğer $\mu \in M^+(X)$ ve $m \in M^\infty(Y)$ ise $\mu * m$,

$$\mu * m = (\mu \times m)'$$

ile verilebilir. Son olarak eğer $\mu * m$ tanımlı ise

$$\mu * m = \int_Y (\mu * p_y) m(dy)$$

şeklindedir.

Lemma 3.7

$$X \times Y \rightarrow M^+(Z)$$

$$(x, y) \rightarrow \omega_{x,y}$$

sürekli bir dönüşüm olsun. $\|\omega_{x,y}\|$ nin sınırlı olduğu varsayalım.

$$M(X) \times M(Y) \rightarrow M(Z)$$

$$(p_x, p_y) \rightarrow \omega_{x,y}$$

dönüşümü, pozitif sürekli bilineer dönüşümü için bir tek uzantıya sahiptir.

3.3.1 Kompakt Alt Kümelerin Uzayı (Michael Topolojisi)

$X \neq \emptyset$ lokal kompakt Hausdorff uzayı olsun. $\mathcal{K}(X)$, X in tüm boş olmayan kompakt alt kümelerinin ailesini belirtsin ve $A, B \subset X$ olmak üzere $\mathcal{K}_A(B) := \{C \in \mathcal{K}(X) : C \cap A \neq \emptyset, C \subset B\}$ olsun. U ve V , X üzerinde açık kümeler olmak üzere $\mathcal{K}_U(V)$ alt tabanlarıyla oluşturulan $\mathcal{K}(X)$ topolojisi ele alınsın. Bu topoloji Ernest Michael tarafından ayrıntılı olarak incelendiği için Michael topolojisi olarak da bilinmektedir. Bu topolojinin özellikleri kısaca şu şekildedir:

- a) $\mathcal{K}(X)$, lokal kompakt Hausdorff uzayıdır.
- b) Eğer X kompakt ise $\mathcal{K}(X)$ kompakttır.
- c) Eğer Y , X in alt uzayı ise $\mathcal{K}(Y)$, $\mathcal{K}(X)$ in alt uzayıdır ve eğer Y kapalı ise $\mathcal{K}(Y)$ kapalıdır.
- d) X ten $\mathcal{K}(X)$ in kapalı alt kümelerine tanımlanan $x \rightarrow \{x\}$ dönüşümü homeomorfizmdir.
- e) X in boş olmayan sonlu alt kümelerinin ailesi $\mathcal{K}(X)$ te yoğundur.
- f) Eğer Ω , $\mathcal{K}(X)$ in kompakt bir alt kümesi ise $B = \bigcup_{A \in \Omega} A$, X in kompakt bir alt kümesidir (Michael 1951).

3.4 İNVLÜSYON

Tanım 3.2

$X \neq \emptyset$ lokal kompakt Hausdorff uzayı olsun. $x \rightarrow x^-$ dönüşümü X in bir homeomorfizmi ve her $x \in X$ için $(x^-)^- = x$ ise bu dönüşüm X in topolojik involüsyonu olarak adlandırılır. Böyle bir dönüşüm verilsin. Eğer f, X te bir fonksiyon $A \subset X$ ve μ, X üzerinde bir Borel ölçümü ise f^- , A^- ve μ^- aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$f^-(x) = f(x^-),$$

$$A^- = \{x^- : x \in A\},$$

$$\mu^-(B) = \mu(B^-).$$

Eğer $f \in B^\infty(X)$ ve $\mu \in M^\infty(X)$ ise

$$\int_X f^- d\mu = \int_X f d\mu^-$$

dir (Jewet 1975).





BÖLÜM 4

HİPERGRUPLAR

4.1 HİPERGRUPLARA GİRİŞ

Tanım 4.1

$K \neq \emptyset$ lokal kompakt bir küme ve $(M^e(K), +)$ bir vektör uzayı olmak üzere, üzerinde (ikinci bir) bilineer işlem var ise aşağıdaki dört koşulun sağlanması durumunda $(K, *)$ ikilisine bir hipergrup ve $*$ işlemine ise K üzerinde bir konvolüsyondur denir.

H1) Her $x, y, z \in K$ için

$$p_x * (p_y * p_z) = (p_x * p_y) * p_z$$

dir.

H2) Her $x \in K$ için

$$p_e * p_x = p_x = p_x * p_e$$

olacak şekilde bir tek $e \in K$ vardır,

H3) a)

$$-: K \rightarrow K$$

$$x \rightarrow x^-$$

dönüşümü bir homeomorfizm ve $\forall x \in K$ için

$$(x^-)^- = x$$

olacak şekilde involüsyon olarak adlandırılan bir dönüşüm vardır.

b) Her $x, y \in K$ için

$$(p_x * p_y)^- = p_{y^-} * p_{x^-}$$

dir.

c) Her $x, y \in K$ için

$$e \in \text{day}(p_x * p_y) \Leftrightarrow x = y^-$$

geçerlidir.

H4) a) Her $x, y \in K$ için $p_x * p_y$ kompakt dayanaklı olasılık ölçümüdür.

b)

$$K \times K \rightarrow M^1(K)$$

$$(x, y) \rightarrow p_x * p_y$$

dönüşümü zayıf topolojiye göre süreklidir.

c)

$$K \times K \rightarrow \mathcal{K}(K)$$

$$(x, y) \rightarrow \text{day}(p_x * p_y)$$

dönüşümü süreklidir. Burada $\mathcal{K}(K)$, K nin kompakt alt kümelerinin uzayıdır ve bu uzay Michael Topolojisi ile donatılmıştır (Kastner 1995).

Tanım 4.2

Hipergrup tanımında verilen şartlardan sadece H1 ve H4 şartlarını sağlayan $(K, *)$ ikilisine bir yarı hipergrup denir.

Hipergruplar ve gruplar arasındaki ilişki aşağıdaki iki önerme ile ifade edilmiştir.

Önerme 4.1

$(K, *)$ bir hipergrup olsun. K deki her x, y nokta çifti için $p_x * p_y = p_{x \cdot y}$ olacak şekilde $x \cdot y \in K$ var ise, bu durumda $(K, \cdot)$ bir lokal kompakt grup olur.

Önerme 4.2

$(G, \cdot)$ lokal kompakt bir grup olsun. Eğer $*$, G de standart konvolüsyon belirtiyor ise $(G, *)$ bir hipergruptur.

4.2 FONKSİYONLARIN ÖTELEMESİ

Eğer f , K üzerinde bir Borel fonksiyonu ve $x, y \in K$ ise

$$f(x * y) = f_x(y) = f^y(x) = \int_K f d(p_x * p_y)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bundan sonraki alt bölümlerde $f(x * y) = f'(x, y)$ gösterimi kullanılacaktır.

Lemma 4.1

f, K üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $x \in K$ olsun.

- a) $(s, t) \rightarrow f(s * t)$ dönüşümü $K \times K$ üzerinde süreklidir.
- b) f_x ve f^x , K üzerinde sürekli fonksiyonlardır (Jewett 1975).

Lemma 4.2

$f \in B^\infty(K)$, $\mu, \nu \in M^+(K)$ ve $x, y, z \in K$ olsun. Bu durumda,

- a) $(s, t) \rightarrow f(s * t)$ dönüşümü $K \times K$ da Borel fonksiyonudur.
- b) f_x ve f^x , K da Borel fonksiyonlarıdır.
- c) $\int_K f d(\mu * \nu) = \int_K \int_K f(s * t) \mu(ds) \nu(dt)$.
- d) $\int_K f_x d\mu = \int_K f d(p_x * \mu)$.
- e) $f_x(y * z) = f^z(x * y)$ (Jewett 1975).

4.3 ALT İNVARİYANT VE İNVARİYANT ÖLÇÜMLER

Eğer her $x \in K$ için $p_x * m$ tanımlı ve $p_x * m \leq m$ ise $M^\infty(K)$ deki bir m ölçümü sol-alt invaryant olarak adlandırılır. Eğer her $x \in K$ için $p_x * m$ tanımlı ve $p_x * m = m$ ise $M^\infty(K)$ deki m ölçümü sol-invaryant olarak adlandırılır.

Lemma 4.3

m , K üzerinde bir sol-alt invariant ölçüm olsun. $f \in B^\infty(K)$, $x \in K$ ve $\mu, \nu \in M^+(K)$ olmak üzere,

a) $\int_K f_x dm \leq \int_K f dm$ dir.

b) Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise $\|f_x\|_p \leq \|f\|_p$ dir.

c) Eğer A, K nin kompakt bir alt kümesi ise $m(A) \leq m(\{x\} * A)$ dır.

d) $\mu * m$ tanımlı ve $\mu * m \leq \mu(K)m$ dir.

e) Eğer ν, m ölçümüne göre mutlak sürekli ise $\mu * \nu, m$ ölçümüne göre mutlak süreklidir (Jewett 1975).

Kanıt

a) Eğer f integrallenebilir ise Teorem 3.2 c) şikkından görülebilir.

b) $p < \infty$ olduğu varsayılın. $y \in K$ ise Hölder eşitsizliğinden $[f(x * y)]^p \leq f^p(x * y)$ olur. Dolayısıyla K da $(f_x)^p \leq (f^p)_x$ dir. Böylece $\|f_x\|_p \leq \|f\|_p$ elde edilir.

$p = \infty$ ve $\|f\|_\infty < \infty$ olduğu varsayılın. h lokal sıfır ve K de $g \leq \|f\|_\infty$ iken $f = g + h$ dir. Bu h_x in lokal sıfır olduğunu görmek için yeterlidir. $A \subset K$ kompakt ve $B = \{x\} * A$ kompakt olsun. A da $h_x = (i_B h)_x$ ve

$$\int_A h_x dm \leq \int_K (i_B h)_x dm \leq \int_K i_B h dm = \int_B h dm = 0$$

olur.

c) $B = \{x\} * A$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. B üzerinde $f = 1$ ve $\int f dm < m(B) + \varepsilon$ olacak şekilde $f \in C_c^+(K)$ seçilsin. A da $f_x = 1$ ve

$$m(A) \leq \int f_x dm \leq \int f dm < m(B) + \varepsilon$$

dur.

d) $f \in C_c^+(K)$ ise

$$\begin{aligned} \iint f(x * y) \mu(dx) m(dy) &= \iint f_x(y) m(dy) \mu(dx) \\ &\leq \iint f(y) m(dy) \mu(dx) \\ &= \mu(K) \int f dm \end{aligned}$$

dir.

e) Burada $\nu_n \in M^+(K)$ ölçümü ve c_n pozitif sayısı vardır, öyle ki $\nu_n \leq c_n m$ ve $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots$ dir. Böylece $\mu * \nu = \sum \mu * \nu_n$ dir ve bu toplam, normda yakınsaktır. Ayrıca, $\mu * \nu_n \leq c_n \mu(K) m$ olduğundan her $\mu * \nu_n$, m ölçümüne göre mutlak süreklidir.

Teorem 4.1

m , K de bir sol-invariant bir ölçüm olsun. $f \in B^\infty(K)$, $x \in K$, ve $\mu \in M^+(K)$ olmak üzere;

a) Eğer f , m ölçümüne göre σ -sonlu ise f_x , m ölçümüne göre σ -sonludur ve

$$\int_K f_x dm = \int_K f dm$$

dir.

b) $\mu * m = \mu(K) m$ dir.

4.4 KÜMELERİN KONVOLÜSYONU

Lemma 4.4

$A, B, C \subset K$ olmak üzere,

a) $A^- * B$, e elemanını içerir ancak ve ancak $A \cap B \neq \emptyset$ dir.

b) $(A * B) \cap C \neq \emptyset$ ancak ve ancak $B \cap (A^- * C) \neq \emptyset$.

c) $\{A_\beta\}_{\beta \in D}$ ve $\{B_\beta\}_{\beta \in D}$, $\mathcal{K}(K)$ de birer ağ olsun. Eğer $A_\beta \rightarrow A$ ve $B_\beta \rightarrow \{\infty\}$ ise $A_\beta * B_\beta \rightarrow \{\infty\}$ dur. Burada $A_\beta \rightarrow \{\infty\}$ ifadesi her kompakt $A \subset K$ için $A_\beta \subset K - A$ anlamına gelir.

d) Eğer B açıksa $A * B$ açıktır ve $(cA) * B = A * B$ dir.

e) Eğer A kompakt ve B kapalı ise $A * B$ kapalıdır.

4.5 FONKSİYON VE ÖLÇÜMLERİN KONVOLÜSYONU

$\mu \in M^+(K)$ ve $f \in B^\infty(K)$ olsun. $\mu * f$ ve $f * \mu$ konvolüsyonları K de aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(\mu * f)(x) = \int_K f(y^- * x) \mu(dy)$$

$$(f * \mu)(x) = \int_K f(x * y^-) \mu(dy).$$

Lemma 4.5

$\mu \in M^+(K)$ ve $f \in C_b^+(K)$ olsun.

a) $\mu * f$ süreklidir.

b) $\|\mu * f\|_u \leq \|\mu\| \cdot \|f\|_u$ dur (Jewett 1975).

Lemma 4.6

$\mu \in M^+(K)$ ve f, K üzerinde zayıf-yarı sürekli olsun.

a) $\mu * f$, zayıf-yarı süreklidir.

b) $\text{pos}(\mu * f) = (\text{day } \mu) * (\text{pos } f)$ dir (Jewett 1975).

Lemma 4.7

$\mu \in M^+(K)$ ve $f \in C_0^+(K)$ olsun.

a) $\mu * f \in C_0^+(K)$ dir.

b) $\mu_\beta \rightarrow \mu$, $M^+(K)$ de ise $\lim \|\mu_\beta * f - \mu * f\|_u = 0$ dir (Jewett 1975).

Lemma 4.8

$\mu, \nu \in M^+(K)$ ve $f \in B^\infty(K)$ olsun. Bu durumda,

a) $\mu * f$ bir Borel fonksiyonudur.

$$b) \int_K (\mu^- * f) dv = \int_K f d(\mu * \nu).$$

$$c) \mu * (\nu * f) = (\mu * \nu) * f.$$

$$d) \mu * (f * \nu) = (\mu * f) * \nu.$$

$$e) (\mu * f)^- = f^- * \mu^-.$$

Kanıt

a) Teorem 3.2 b) şikkından $\mu * f$, Borel fonksiyonudur.

b)

$$\begin{aligned} \int (\mu^- * f) dv &= \iint f(y^- * x) \mu^-(dy) \nu(dx) \\ &= \iint f(y * x) \mu(dy) \nu(dx) = \int f d(\mu * \nu). \end{aligned}$$

$x \in K$ ve $\pi = P_x$ olsun.

c)

$$\begin{aligned} [\mu * (\nu * f)](x) &= \int [\mu * (\nu * f)] d\pi = \int (\nu * f) d(\mu^- * \pi) \\ &= \int f d(\nu^- * \mu^- * \pi) = \int [(\mu * \nu) * f] d\pi. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} [\mu * (f * \nu)](x) &= \int [\mu * (f * \nu)] d\pi \\ &= \int (f * \nu) d(\mu^- * \pi) = \int f d(\mu^- * \pi * \nu^-). \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} (\mu * f)^-(x) &= (\mu * f)(x^-) = \int f(y^- * x^-) \mu(dy) \\ &= \int f^-(x * y) \mu(dy) = \int f^-(x * z^-) \mu^-(dz). \end{aligned}$$

Lemma 4.9

$\mu \in M^+(K)$ ve $m \in M^\infty(K)$ olsun. μ , kompakt destekli ise $\mu * m$ tanımlıdır ve

$day(\mu * m) = (day \mu) * (day m)$ dir.

4.6 ALT İNVARİYANT ÖLÇÜMÜN VARLIĞI**Lemma 4.10**

$f, k \in C_c^+(K)$ olsun. $k \neq 0$ olduğu varsayalım. Bu durumda $f \leq \mu * k$ olacak şekilde $\mu \in M_c^+(K)$ vardır.

Kanıt

$k(\alpha) > 0$ olacak şekilde bir $\alpha \in K$ seçelim. $x \in K$ ise $(p_x * p_{\alpha^-} * k)(x) > 0$ olduğu kolayca görülür. Böylece $\mu, p_x * p_{\alpha^-}$ formunun ölçümlerinin sonlu lineer kombinasyonu olarak seçilebilir.

Lemma 4.11

$f \in C_c^+(K)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Burada e nin aşağıdaki özelliğe sahip bir W açık komşuluğu vardır:

Eğer $x, y \in K$ ve $(p_x * p_y)(W) > 0$ ise $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dur.

Teorem 4.2

m sol-alt invariant ve m nin dayanağı K ye eşit olacak şekilde bir $m \in M^\infty(K)$ ölçümü vardır (Jewett 1975).

Eğer $f, k \in C_c^+(K)$ ve $k \neq 0$ ise

$$[f, k] = \inf\{\mu(K) : \mu \in M_c^+(K) \text{ ve } f \leq \mu * k\}$$

tanımı yapılabilir. Böylece aşağıdaki lemmadaki özellikler sağlanır.

Lemma 4.12

$\mu \in M_c^+(K)$, $c \geq 0$ ve $f, g, k \in C_c^+(K)$ olsun. $k \neq 0$ olduğu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- a) $[\mu * f, k] \leq \mu(K)[f, k]$,
- b) $[f + g, k] \leq [f, k] + [g, k]$,
- c) $[cf, k] = c[f, k]$,
- d) $f \leq g$ ise $[f, k] \leq [g, k]$,
- e) $g \neq 0$ ise $[f, k] \leq [f, g][g, k]$,
- f) $f \neq 0$ ise $[f, k] > 0$.

Kanıt

a) Eğer $f \leq v * k$ ise $\mu * f \leq \mu * v * k$ ve $[\mu * f, k] \leq (\mu * v)(K) = \mu(K)v(K)$ dır. Son olarak, $f \leq m * k$ ise $\|f\|_u \leq \|\mu\| \cdot \|k\|_u = \mu(K)\|k\|_u$ olur.

Diğerlerinin ispatı benzer olarak yapılabilir.

Tanım 4.3

$F \neq 0$, $C_c^+(K)$ nin sabit bir elemanı olsun. Eğer $f, k \in C_c^+(K)$ ve $k \neq 0$ ise,

$$I_k f = \frac{[f, k]}{[F, k]}$$

dir.

Lemma 4.13

$\mu \in M_c^+(K)$, $c \geq 0$ ve $f, g, k \in C_c^+(K)$ olsun. $k \neq 0$ olduğu varsayalım. Bu durumda,

$$I_k(\mu * f) \leq \mu(K)I_k f,$$

$$I_k(f + g) \leq I_k f + I_k g,$$

$$I_k(cf) = cI_k f,$$

$$f \leq g \text{ ise } I_k f \leq I_k g$$

dir. Ayrıca $f \neq 0$ ise

$$\frac{1}{[F, f]} \leq I_k f \leq [f, F].$$

4.7 HAAR ÖLÇÜMÜ

Tanım 4.4

Bir hipergrup üzerinde sıfır olmayan sol-invaryant ölçüm, sol Haar ölçümü olarak adlandırılır.

Lemma 4.14

Her hipergrup, bir sol Haar ölçümüne sahiptir.

Bu bölümde K nin bir hipergrup ve m nin K üzerinde bir sol Haar ölçümü olduğu kabul edilecektir.

Lemma 4.15

m ölçümünün dayanağı K ye eşittir.

Lemma 4.16

$\{k_\beta\}_{\beta \in D}$, $C_c^+(K)$ de $\int k_\beta dm = 1$ ve $day k_\beta \rightarrow \{e\}$ olacak şekilde bir ağ olsun.

a) Eğer $f \in C_c^+(K)$ ise $\lim_\beta \|(fm) * k_\beta^- - f\|_u = 0$ dır.

b) Eğer $\mu \in M^+(K)$ ise $\lim_\beta (\mu * k_\beta)m = \mu$.

Kanıt

a) $\varepsilon > 0$ olmak üzere, Lemma 4.11'den

$$x, y \in K, \beta \geq \beta_0 \text{ ve } k_\beta(x^- * y) > 0 \text{ ise } k_\beta(x^- * y) > 0$$

özelliğini sağlayan $\beta_0 \in D$ vardır. $x \in K$ ve $k = k_\beta$ olsun, $\beta \geq \beta_0$.

$$\begin{aligned} |(fm * k^-)(x) - f(x)| &= \left| \int k^-(y^- * x) f(y) m(dy) - f(x) \int k(x^- * y) m(dy) \right| \\ &\leq \int k(x^- * y) |f(y) - f(x)| m(dy) \\ &\leq \varepsilon \int k(x^- * y) m(dy) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

b) $g \in C_c^+(K)$ olsun. Lemma 4.8 b) şikkı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\int g(\mu * k_\beta) dm &= \int (\mu * k_\beta) d(gm) = \int k_\beta d(\mu^- * gm) = \int k_\beta^- d[(gm)^- * \mu] \\
&= \int (gm * k_\beta^-) d\mu
\end{aligned}$$

elde edilir ve son integral $\int g d\mu$ ye yakınsar. Ayrıca,

$$\int (\mu * k_\beta) dm = \iint k_\beta(y^- * x) \mu(dy) m(dx) = \int d\mu = \mu(K)$$

dir.

Teorem 4.3

$f, g \in B^\infty(K)$ ve $x \in K$ olsun. Eğer f ya da g, m ye göre σ -sonlu ise,

$$\int_K f(x * y) g(y) m(dy) = \int_K f(y) g(x^- * y) m(dy)$$

dir.

Kanıt

Simetri özelliğinden ve monoton yakınsaklık teoreminden $\int g dm$ sonlu olduğu varsayalım.

$h \in C_c^+(K)$ olsun. Eğer $j \in C_c^+(K)$ ise,

$$\begin{aligned}
\int j d(h_x m) &= \int h_x d(jm) = \int (p_{x^-} * h) d(jm) \\
&= \int h d(p_x * jm) \\
&= \lim_\beta \int (hm * k_\beta^-) d(p_x * jm) \\
&= \lim_\beta \int (p_{x^-} * hm * k_\beta^-) d(jm) \\
&= \lim_\beta \int j d[(p_{x^-} * hm * k_\beta^-) m] \\
&= \int j d(p_{x^-} * hm)
\end{aligned}$$

dir. Böylece $h_x m = p_{x^-} * h m$ olur. Lemma 4.2 c) şikkı kullanılarak,

$$\begin{aligned} \int h d(p_x * g m) &= \int h(x * y) g(y) m(dy) = \int h_x g dm = \int g d(p_{x^-} * h m) \\ &= \int g_{x^-} d(h m) = \int h d(g_{x^-} m) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$p_x * g m = (g_{x^-}) m$$

dir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \int f(x * y) g(y) m(dy) &= \int f d(p_x * g m) = \int f d(g_{x^-} m) = \int f g_{x^-} dm \\ &= \int f(y) g(x^- * y) m(dy) \end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.4 (Haar Ölçümünün Tekliği)

Eğer n, K üzerinde bir sol invaryant ölçüm ise $n = c m$ olacak şekilde negatif olmayan bir c reel sayısı vardır.

Kanıt

n, K de bir sol invaryant ölçüm, $\varepsilon > 0$ ve $f, g \in C_c^+(K)$ olsun. $f \neq 0$ ve $g \neq 0$ olduğu varsayalım. Lemma 4.7 b) şikkından

$$\lim_{y \rightarrow e} \|p_y * f - f * p_y\|_u = 0$$

dir. f kompakt dayanaklı olduğundan

$$\lim_{y \rightarrow e} \int_K |f_y - f^y| dn = 0$$

dır. Burada her $y \in U$ için,

$$\int_K |f_y - f^y| dn < (\varepsilon/2) \int_K f dm,$$

$$\int_K |g_y - g^y| dn < (\varepsilon/2) \int_K g dm$$

olacak şekilde e nin bir U açık komşuluğu vardır. $\int h dm > 0$ ve $h = h^-$ olacak şekilde $h \in C_c^+(K)$ seçilirse,

$$\begin{aligned} \left(\int h dn \right) \left(\int f dm \right) &= \int f(y) \left(\int h_y dn \right) m(dy) \\ &= \iint f(y) h(y^- * x) n(dx) m(dy) \\ &= \iint f(y) h^-(x^- * y) m(dy) n(dx) \\ &= \iint f(y) h(x^- * y) m(dy) n(dx) \\ &= \iint f(x * y) h(y) m(dy) n(dx) \\ &= \iint f(x * y) h(y) n(dx) m(dy) \\ &= \int h(y) \left(\int f^y dn \right) m(dy) \end{aligned}$$

h nin özelliğinden dolayı,

$$\begin{aligned} \left| \left(\int h dm \right) \left(\int f dn \right) - \left(\int h dn \right) \left(\int f dm \right) \right| &= \left| \left(\int h(y) \left(\int (f_y - f^y) dn \right) m(dy) \right) \right| \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \left(\int h dm \right) \left(\int f dm \right). \end{aligned}$$

Eşitsizliğin her iki tarafı bölünürse,

$$\left| \frac{\int f dn}{\int f dm} - \frac{\int h dn}{\int h dm} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Aynı işlem g için de geçerlidir,

$$\left| \frac{\int f dn}{\int f dm} - \frac{\int g dn}{\int g dm} \right| \leq \varepsilon.$$

Bu durum $c \geq 0$ için $n = cm$ olduğu anlamına gelir (Loomis 1963).

4.8 MODÜLER FONKSİYON

Modüler fonksiyon Δ, K de

$$m * p_{x^-} = \Delta(x)m$$

ile tanımlanır. $x \rightarrow \Delta(x)$ dönüşümü hipergrup K den pozitif reel değerli çarpım grubuna homeomorfizmdir. Δ nın sabitliğinin $\{x\} * \{y\}$ kümeleri üzerinde gerekli olduğuna dikkat edilmesi gerekmektedir.

Lemma 4.17

Eğer $x \in K$ ise $m * p_x = cm$ olacak şekilde bir tek pozitif c reel sayısı vardır.

Teorem 4.5

Δ fonksiyonu süreklidir ve

$$\Delta\Delta^- = 1, m = \Delta m^-$$

dir.

Kanıt

$f \in C_c^+(K)$ ve $f \neq 0$ olsun. Eğer $x \in K$ ise

$$\Delta(x) \int f dm = \int f d(m * p_{x^-}) = \int (f * p_x) dm$$

dir. Böylece, Lemma 4.7 b) şikkından Δ süreklidir. Eğer $g \in C_c^+(K)$ ise

$$\begin{aligned} \int f dm \int g dm^- &= \int f dm \int g^- dm = \iint f(x) g^-(x^- * y) m(dy) m(dx) \\ &= \iint f(x) g(y^- * x) m(dx) m(dy) \\ &= \iint f(y * x) g(x) m(dx) m(dy) \\ &= \int g(x) \left(\int f^x dm \right) m(dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int f \, dm \right) \int g(x) \Delta(x^-) m(dx) \\
&= \int f \, dm \int g \, d(\Delta^- m)
\end{aligned}$$

dir. Böylece $m^- = \Delta^- m$ olur. Buradan

$$m = (m^-)^- = (\Delta^- m)^- = \Delta m^- = \Delta \Delta^- m$$

dir.

Teorem 4.6

$x, y \in K$ olsun. $\Delta, \{x\} * \{y\}$ üzerinde sabit ve Δ nın bu kümeler üzerindeki değeri eşittir:

$$\Delta(x * y) = \Delta(x) \Delta(y) \text{ dir.}$$

Kanıt

$x, y \in K$ olmak üzere,

$$\Delta(x) \Delta(y) m = (m * p_{y^-}) * p_{x^-} = m * (p_x * p_y)^-$$

dir. Böylece $\Delta(x) \Delta(y) = \Delta(x * y)$ olur. Buradan her $\mu, \nu \in M_c(K)$ için,

$$\int \Delta \, d(\mu * \nu) = \int \Delta \, d\mu \int \Delta \, d\nu$$

elde edilir.

$x, y \in K$ olsun. $\mu = p_x * p_y, S = \text{day } \mu$ ve

$$\nu = \mu * \mu^- = p_x * p_y * p_{y^-} * p_{x^-}$$

dir. Böylece $\nu^- = \nu$ ve $\nu(K) = 1$ olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\int \Delta \, d\nu &= \Delta(x) \Delta(y) \Delta(y^-) \Delta(x^-) = 1 \\
\int \frac{1}{\Delta} \, d\nu &= \int \frac{1}{\Delta} \, d\nu^- = \int \Delta^- \, d\nu^- \int \Delta \, d\nu = 1 \\
\int \left(\Delta + \frac{1}{\Delta} \right) \, d\nu &= 2
\end{aligned}$$

dir. $\nu(K) = 1$ olduğundan, ν ölçümünün dayanağı üzerinde $\Delta = 1$ olmalıdır. $s, t \in S$ ise $\{s\} * \{t^-\}$ üzerinde $\Delta = 1$ ve böylece $1 = \Delta(s * t^-) = \Delta(s)/\Delta(t)$ olur. Δ , S üzerinde sabittir ve değeri $\Delta(x)\Delta(y)$ ye eşittir.

4.9 FONKSİYON VE ÖLÇÜMLERİN KONVOLÜSYONU

Lemma 4.18

$\{f_n\}$, $B^\infty(K)$ de azalmayan dizi olsun ve $f_n \rightarrow f$ olduğu varsayalım.

a) Eğer $x, y \in K$ ise $f_n(x * y) \rightarrow f(x * y)$ dir.

b) Eğer $\mu \in M^+(K)$ ise $\mu * f_n \rightarrow \mu * f$ dir.

Teorem 4.7

$\mu \in M^+(K)$ ve $f, g \in B^\infty(K)$ olsun.

a) Eğer f , σ -sonlu ise $\mu * f$, σ -sonludur.

b) Eğer $\int f dm < \infty$ ise $(\mu * f)m = \mu * (fm)$ dir.

c) Eğer $\int f dm < \infty$ ise $\int_K (\mu * f) dm = \mu(K) \int_K f dm$ dir.

d) Eğer f ya da g , σ -sonlu ise

$$\int_K (\mu * f)g dm = \int_K f(\mu^- * g)dm$$

dir.

Lemma 4.19

$\mu \in M^+(K)$, $f \in B^\infty(K)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun.

a) Eğer $\|f\|_p < \infty$ ise $\|\mu * f\|_p \leq \|\mu\| \cdot \|f\|_p$ dir.

b) Eğer $p < \infty$, $\|f\|_p < \infty$ ve $\{\mu_\beta\}_{\beta \in D}$, $M^+(K)$ de μ ye yakınsayan bir ağ ise

$$\lim_{\beta} \|\mu_\beta * f - \mu * f\|_p = 0$$

dir.

Kanıt

a) $\mu(K) = 1$ olduğu varsayalım. İlk olarak $p < \infty$ olsun. Bu durumda her $x \in K$ için,

$$\begin{aligned}(\mu * f)^p(x) &= \left(\int f(y^- * x) \mu(dy) \right)^p \\ &\leq \int [f(y^- * x)]^p \mu(dy) \\ &\leq \int f^p(y^- * x) \mu(dy) \\ &= (\mu * f^p)(x)\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\int (\mu * f)^p dm \leq \int (\mu * f^p) dm = \mu(K) \int f^p dm = \int f^p dm$$

elde edilir.

$p = \infty$ olma durumundaki ispat Lemma 4.3 b) şikkının ispatıyla benzerdir.

b) $p < \infty$ olduğundan ve $\|\mu_\beta\| = \mu_\beta(K)$ sayısı $\mu(K)$ ye yakınsadığından, sadece $f \in C_c^+(K)$ yi düşünmek yeterlidir. Lemma 4.7 b) şikkından,

$$\lim_{\beta} \|\mu_\beta * f - \mu * f\|_u = 0$$

dır ve Teorem 4.7 c) şikkından $\int (\mu_\beta * f) dm, \int (\mu * f) dm$ ye yakınsar. Böylece, hem $L_1(m)$ hem $L_\infty(m)$ de $\mu_\beta * f \rightarrow \mu * f$ olur. Bu $L_p(m)$ de yakınsama anlamına gelir.

Tanım 4.5

$f, g \in B^\infty(K)$ da olsun. Ancak (ve ancak) bu fonksiyonlardan en az biri σ -sonlu ise f ile g nin $f * g$ konvolüsyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(f * g)(x) = \int_K f(x * y) g(y^-) m(dy)$$

Bu alt bölümün geri kalanında $p, q \in [1, \infty]$ ve $1/p + 1/q = 1$ olduğu varsayılmıştır.

Lemma 4.20

$f, g \in B^\infty(K)$ olsun.

a) Eğer $x \in K$ ve f ya da g σ -sonlu ise,

$$(f * g)(x) = \int_K f_x g^- dm = \int_K f^- g^x dm^-$$

dir.

b) f ya da g , σ -sonlu ve $\{f_n\}$ ve $\{g_n\}$, $B^\infty(K)$ de sırasıyla f ve g ye yakınsayan azalmayan diziler ise $f_n * g_n \rightarrow f * g$ dir.

c) Eğer hemen hemen her yerde $f_1 = f$, lokal olarak hemen hemen her yerde $g_1 = g$ ve f σ -sonlu ise, K nin bütün noktalarında $f_1 * g_1 = f * g$ dir.

Teorem 4.8

$g, h \in B^\infty(K)$ olsun. $\|g\|_p < \infty$ ve $\|h\|_q < \infty$ olduğu varsayalım.

a) $g * h^-$ süreklidir.

b) $\|g * h^-\|_u \leq \|g\|_p \|h\|_q$ dir (Jewett 1975).

Lemma 4.21

$f, g \in B^\infty(K)$ olsun ve f ya da g nin σ -sonlu olduğu varsayalım.

a) $f * g$ zayıf-yarı süreklidir.

b) $(f * g)^- = g^- * f^-$ dir.

c) f ve g nin her ikisi de zayıf-yarı sürekli ise

$$pos(f * g) = (pos f) * (pos g)$$

dir (Jewett 1975).

Teorem 4.9

$\mu \in M^+(K)$ ve $f, g, h \in B^\infty(K)$ olsun.

a) $\int f dm < \infty$ ise $f * g = (fm) * g$ dir.

- b) f ya da g , σ -sonlu ise $\mu * (f * g) = (\mu * f) * g$ dir.
- c) $\int f dm < \infty$ ve $\int g dm < \infty$ ise $(f * g)m = (fm) * (gm)$ dir.
- d) $\int f dm < \infty$ ve $\int g dm < \infty$ ise $\int_K (f * g) dm = \int_K f dm \int_K g dm$ dir.
- e) f ve g fonksiyonlarının her ikisi de σ -sonlu ise $f * g$, σ -sonludur.
- f) g σ -sonlu ve f ya da h σ -sonludur ise $f * (g * h) = (f * g) * h$ tır.
- g) $\int_K (f * g) h dm = \int_K f (h * g^-) dm$ dir.

Teorem 4.10

$f, g, h \in B^\infty(K)$ olsun.

- a) Eğer $1 < p < \infty$, $\|g\|_p < \infty$ ve $\|h\|_q < \infty$ ise $g * h^- \in C_0^+(K)$ dir.
- b) $\|f\|_1 < \infty$ ve $\|g\|_p < \infty$ ise $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ dir.

4.10 MUTLAK SÜREKLİ ÖLÇÜMLER

$M(K)$ de m ye göre mutlak sürekli olan ölçümlerin kümesi $M_\alpha(K)$ ile gösterilecektir.

Teorem 4.11

$\nu \in M_\alpha^+(K)$ olsun.

- a) Eğer $\mu \in M^+(K)$ ise $\mu * \nu, \nu * \mu \in M_\alpha^+(K)$ dir.
- b) Eğer $\{\mu_\beta\}_{\beta \in D}, M^+(K)$ de μ ye yakınsayan bir ağ ise $\lim_{\beta} \|\mu_\beta * \nu - \mu * \nu\| = 0$ dir.

Kanıt

İlk kısım Lemma 4.3 e) şikkından görülebilir. İkinci kısmın ispatı için $f \in C_c^+(K)$ olsun.

$$\begin{aligned} \|\mu_\beta * \nu - \mu * \nu\| &\leq \|\mu_\beta * \nu - \mu_\beta * fm\| + \|\mu_\beta * fm - \mu * fm\| + \|\mu * fm - \mu * \nu\| \\ &\leq \|\mu_\beta\| \cdot \|\nu - fm\| + \|\mu_\beta * f - \mu * f\|_1 + \|\mu\| \cdot \|fm - \nu\|. \end{aligned}$$

Böylece Lemma 4.19 b) şikkından,

$$\limsup_{\beta} \|\mu_{\beta} * v - \mu * v\| \leq 2\mu(K)\|v - fm\|.$$

olur. Fakat, $\|v - fm\|$ keyfi olarak küçültülebilir.

Lemma 4.22

$v \in M^+(K)$ olsun ve $\lim_{x \rightarrow e} \|p_x * v - v\| = 0$ olduğu varsayalım. Bu durumda $v \in M_{\alpha}^+(K)$ dir.

Kanıt

$\varepsilon > 0$ ve U, e nin her $x \in U$ için $\|p_x * v - v\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir açık komşuluğu olsun. $\int k dm^- = 1$ ve $day k \subset U$ olacak şekilde $k \in C_c^+(K)$ seçilsin. $\|km^- * v - v\| \leq \varepsilon$ olduğu kolayca görülebilir. Fakat $km^- * v = (k * v)m^-$, $M_{\alpha}^+(K)$ dedir. Ayrıca, $M_{\alpha}^+(K)$ norm-kapalıdır. Dolayısıyla $v \in M_{\alpha}^+(K)$ dir.

4.11 KONVOLÜSYON CEBİRİ

Bu bölümde K nin bir hipergrup olduğu kabul edilecektir. Eğer $\mu \in M(K)$ ve $f \in B(K)$ ise

$$\mu_k \leq |\mu|, f_k \leq |f|$$

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4, f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$$

olacak şekilde $\mu_k \in M^+(K)$ ölçümü ve $f_k \in B^+(K)$ fonksiyonu vardır.

4.11.1 Kompleks Değerli Fonksiyonlar ve Ölçümler

$\mu \in M(K)$ için μ ölçümünün eşleniği μ^* ,

$$\mu^* = (\bar{\mu})^- = \overline{\mu^-}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 4.23

$\mu, v \in M^+(K)$ ve $f \in B(K)$ olmak üzere,

a) Eğer $x, y \in K$ ve $|f|(x * y)$ sonlu ise $f(x * y)$ tanımlıdır ve $|f|(x * y) \leq |f|(x * y)$ dir.

b) $|\mu| * |f|$ nin sonlu olduğu K nin noktalarında, $\mu * f$ tanımlı ve $|\mu * f| \leq |\mu| * |f|$ dir.

c) $|\mu * v| \leq |\mu| * |v|$ dir.

d) $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \cdot \|\nu\|$ dir.

e) $(\mu * \nu)(K) = \mu(K)\nu(K)$ dir.

f) Eğer f sınırlı ise

$$\int_K f d(\mu * \nu) = \int_K \int_K f(x * y) \mu(dx) \nu(dy)$$

dir.

4.11.2 L_p Uzayları

Bu bölümde m nin K üzerinde sol Haar ölçümü olduğu kabul edilecektir. $f \in B(K)$ için f fonksiyonunun eşleniği $f^* = (\Delta f)^-$ şeklinde tanımlanır. Eğer $f \in L_1(m)$ ise $f^* \in L_1(m)$ olduğuna dikkat edilmesi gerekmektedir.

Her $\mu \in M(K)$ için, $T_\mu: L_2(m) \rightarrow L_2(m)$ dönüşümü $T_\mu f = \mu * f$ şeklinde tanımlanır. Böyle bir T_μ , $L_2(m)$ de sınırlı lineer operatördür.

$$M(K) \rightarrow L_2(m)$$

$$\mu \rightarrow T_\mu$$

dönüşümü sol regüler temsil olarak adlandırılır.

Lemma 4.24

$f, g \in B(K)$ olsun. $|f| * |g|$ sonlu, $f * g$ tanımlı ve $|f * g| \leq |f| * |g|$ dir.

Teorem 4.12

$\mu \in M(K)$ ve $f \in L_1(m)$ olsun. $p, q \in [1, \infty]$, $1/p + 1/q = 1$ ve $g \in L_p(m)$ ve $h \in L_q(m)$ olsun. Bu durumda,

a) $\mu * g \in L_p(m)$ ve $\|\mu * g\|_p \leq \|\mu\| \cdot \|g\|_p$ dir.

b) $f * g \in L_p(m)$ ve $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ dir.

c) $\int_K (\mu * g) h \, dm = \int_K g (\mu^- * h) \, dm$ dir.

d) $g * h^-$ süreklidir ve $\|g * h^-\|_u \leq \|g\|_p \|h\|_q$ dir.

e) p ve q sonlu ise $g * h \in C_0(K)$ dir.

Teorem 4.13

$L_1(m)$ uzayı bir Banach *-cebiridir.

Teorem 4.14

$M_a(K)$ uzayı $M(K)$ da kapalı öz eşlenik bir idealdir.

Lemma 4.25

$f \in L_2(m)$ ve $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ kümesi $L_2(m)$ de ortonormal olsun. Bu durumda,

$$\left\| \sum_{k=1}^n |f * g_k^-|^2 \right\|_u \leq \|f\|_2^2$$

dir.

Kanıt

$\overline{g_k}$, ortonormal küme formundadır. $x \in K$ olsun. Bessel eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |(f * g_k^-)(x)|^2 &= \sum_{k=1}^n \left| \int f_x g_k dm \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n |\langle f_x, \overline{g_k} \rangle|^2 \leq \|f_x\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

dir.

4.12 ÇARPIMSAL FONKSİYONLAR

χ sürekli ve sıfıra eşit değil ise K üzerindeki kompleks değerli χ fonksiyonuna çarpımsal fonksiyon denir ve her $x, y \in K$ için

$$\chi(x * y) = \chi(x)\chi(y)$$

özellğini taşır. Tüm bu fonksiyonların kümesi $\mathfrak{X}(K)$ ile gösterilecektir ve $\mathfrak{X}(K)$ ye K nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaklık topolojisi verilecektir. $\mathfrak{X}(K)$ deki tüm sınırlı χ lerin kümesi $\mathfrak{X}_b(K)$ ile gösterilecektir.

$\chi \in \mathfrak{X}_b(K)$ için $F_\chi, M(K)$ üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F_\chi(\mu) = \int_K \bar{\chi} d\mu.$$

Bu alt bölümde K üzerinde sol Haar ölçümü m nin bulunduğu varsayılacaktır.

Lemma 4.26

$\chi \in \mathfrak{X}_b(K)$ olmak üzere,

- a) F_χ fonksiyonu, $M(K)$ üzerinde çarpımsal lineer fonksiyondur,
- b) $F_\chi, M_\alpha(K)$ üzerinde sifıra eşit değildir,
- c) $\chi^-, \bar{\chi} \in \mathfrak{X}_b(K)$ dir,
- d) $\chi(e) = 1 = \|\chi\|_u$ dur (Jewett 1975).

Lemma 4.27

$E, M_\alpha(K)$ üzerinde çarpımsal lineer fonksiyon olsun. $M_\alpha(K)$ üzerinde $F = E$ olacak şekilde $M(K)$ de bir tek F fonksiyonu vardır.

Kanıt

$M_\alpha(K), M(K)$ nin bir idealidir. $\nu, M_\alpha(K)$ nin $E(\nu) \neq 0$ olacak şekilde bir elemanı olduğunda F , aşağıdaki şekilde verilir:

$$F(\mu) = \frac{E(\mu * \nu)}{E(\nu)}.$$

Teorem 4.15

$F, M(K)$ üzerinde $M_\alpha(K)$ da sifıra eşit olmayacak şekilde çarpımsal lineer fonksiyon olsun. Bu durumda $F = F_\chi$ olacak şekilde bir tek $\chi \in \mathfrak{X}_b(K)$ vardır.

Kanıt

$M(K)$, birime sahip bir Banach cebiri olduğundan, $\|F\| = 1$ dir. $F(\nu) \neq 0$ olacak şekilde bir $\nu \in M_\alpha(K)$ seçilsin. Eğer $\mu_1, \mu_2 \in M(K)$ ise

$$|F(\mu_1) - F(\mu_2)| \leq \frac{\|\mu_1 * \nu - \mu_2 * \nu\|}{|F(\nu)|}$$

dir. Teorem 4.11 b) şikkından, F pozitif-süreklidir. Teorem 3.1'den, her $\mu \in M(K)$ için $F(\mu) = \int_K f d\mu$ olacak şekilde $f \in C_b(K)$ vardır ve $\chi = \bar{f}$ dir.

Teorem 4.16

$\{\chi_\beta\}_{\beta \in D}$, $\mathfrak{X}_b(K)$ de bir ağ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- a) χ_β , K nin kompakt alt kümelerinde, K üzerindeki χ fonksiyonuna düzgün yakınsar.
- b) F_{χ_β} fonksiyonunun $M_\alpha(K)$ üzerine kısıtlaması aynı küme üzerinde sıfırdan farklı bir fonksiyona noktasal olarak yakınsar (Jewett 1975).

Teorem 4.17

$\mathfrak{X}_b(K)$, lokal kompakt Hausdorff uzayı olsun. $\chi \rightarrow \chi^-$ ve $\chi \rightarrow \bar{\chi}$ dönüşümleri $\mathfrak{X}_b(K)$ nin topolojik involüsyonlarıdır.

BÖLÜM 5

BAZI ÖZEL HİPERGRUPLAR

5.1 AYRIK HİPERGRUPLAR

Topolojik bir gruptan farklı olarak bir hipergrup kendisiyle tamamen ilişkilendirilen cebirsel bir yapıya sahip değildir. Genel olarak, bir hipergrup ayrık topoloji ile verilirse işlem artık iyi tanımlı değildir. Diğer taraftan ise bir topolojik grup homojen olsa bile burada izole noktaları olan ancak ayrık olmayan bir hipergrup vardır.

Teorem 5.1

K bir ayrık hipergrup olsun. K üzerinde bir sol Haar ölçümü vardır. Eğer $m, m(\{e\}) = 1$ olan sol Haar ölçümü ise her $x \in K$ için

$$m(\{x\}) = \frac{1}{(p_{x^-} * p_x)m(\{e\})}$$

dir.

Kanıt

$x, y, z \in K$ için $[x * y, z] = (p_x * p_y)(\{z\})$ şeklinde tanımlansın. $[x * y, e] > 0$ ancak ve ancak $x = y^-$ dir. $x \in K$ için $[x] = 1/[x^- * x, e]$ olsun. Eğer $x, y, z \in K$ ise

$$(p_x * (p_y * p_z))(\{e\}) = ((p_x * p_y) * p_z)(\{e\})$$

$$\sum_{t \in K} [x * t, e][y * z, t] = \sum_{t \in K} [x * y, t][t * z, e]$$

$$[x * x^-, e][y * z, x^-] = [x * y, z^-][z^- * z, e]$$

$$[z][y * z, x^-] = [x^-][x * y, z^-]$$

dir.

m ölçümü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$m = \sum_{x \in K} [x] p_x.$$

Eğer $x, y \in K$ ise,

$$\begin{aligned} (p_y * m)(\{x^-\}) &= \sum_{z \in K} [z] (p_y * p_z)(\{x^-\}) \\ &= \sum_{z \in K} [z] [y * z, x^-] \\ &= \sum_{z \in K} [x^-] [x * y, z^-] \\ &= [x^-] = m(\{x^-\}) \end{aligned}$$

elde edilir (Jewett 1975).

Teorem 5.2

K bir hipergrup olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- a) K ayrıktır.
- b) Birim eleman e , K nin bir izole noktasıdır.
- c) $m(\{e\}) > 0$ olacak şekilde K üzerinde bir m Haar ölçümü vardır (Jewett 1975).

5.2 KOMPAKT HİPERGRUPLAR

Teorem 5.3

K bir kompakt hipergrup olsun. K üzerinde bir Haar ölçümü vardır.

Teorem 5.4

K bir hipergrup olsun. Eğer K de sonlu Haar ölçümü varsa K kompaktır.

Teorem 5.5

K bir kompakt hipergrup ve m , K de $m(K) = 1$ olacak şekilde bir Haar ölçümü olsun. Eğer $f, g \in L_2(m)$ ise $f * g \in L_2(m)$ ve

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

dir.

5.3 DEĞİŞMELİ HİPERGRUPLAR

K bir hipergrup olsun. Bu bölümde K nin değişmeli olduğu varsayılmaktadır. Yani tüm $x, y \in K$ için $p_x * p_y = p_y * p_x$ dir.

Ayrıca burada K nin bir m Haar ölçümü olduğunu varsayılacaktır. $\hat{K}$, $x \in K$ için

$$\chi(x^-) = \overline{\chi(x)}$$

olacak şekilde $\mathfrak{x}_b(K)$ deki tüm χ lerin kümesi olsun. $\hat{K} \neq \emptyset$ dir, çünkü 1 sabit fonksiyonunu içerir. Ayrıca $\chi \in \hat{K}$ ise $\chi^- = \bar{\chi}$, K dedir.

$\mu \in M(K)$ için K de μ nün $\hat{\mu}$ Fourier-Stieltjes dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\hat{\mu}(\chi) = \int_K \bar{\chi} d\mu.$$

$f \in L_1(m)$ için K de f nin Fourier dönüşümü m ye göre aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\hat{f}(\chi) = \int_K f \bar{\chi} dm.$$

Her $\mu \in M(K)$ için $|\hat{\mu}(\chi)| \leq \|T_\mu\|$ olacak şekilde tüm $\chi \in \hat{K}$ lerin kümesi S olsun. k , $\hat{K}$ deki herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$\|k\|_S = \sup_{\chi \in S} |k(\chi)|.$$

Daha sonra verilecek olan Levitan teoremi için ön bilgi oluşturulsun. π ölçümüne $\hat{K}$ üzerinde m ile ilişkili Plancherel ölçümü denir.

Teorem 5.6

- a) $\hat{K} \neq \emptyset$ uzayı (lokal kompakt), $\mathfrak{x}_b(K)$ nin kapalı alt uzayıdır.
- b) Her $\nu \in M_a(K)$ için $\chi \in \hat{K}$ ve $|\hat{\nu}(\chi)| \leq \|T_\nu\|$ ise $\chi \in S$ dir.
- c) $S \neq \emptyset$ kümesi, $\hat{K}$ nin kapalı bir alt kümesidir.
- d) $\mu \in M(K)$ ise $\|T_\mu\| = \|\hat{\mu}\|_S$ dir.

e) $\nu \in M_a(K)$ ise $\hat{\nu} \in C_0(\hat{K})$ dir.

f) $\{\hat{f} : f \in C_c(K)\}$ kümesi $C_0(\hat{K})$ nin yoğun öz eşlenik bir alt cebiridir.

Teorem 5.7 (Levitan Teoremi)

Her $f \in L_1(m) \cap L_2(m)$ için,

$$\int_K |f|^2 dm = \int_{\hat{K}} |\hat{f}|^2 d\pi$$

olacak şekilde $\hat{K}$ üzerinde bir tek negatif olmayan π ölçümü vardır. π nin dayanağı S ye eşittir. $\{\hat{f} : f \in C_c(K)\}$ kümesi $L_2(\pi)$ de yoğundur (Jewett 1975).

5.4 SÜREKLİ AFİN ETKİSİ

X topolojik uzayı üzerinde topolojik grup H nin sürekli etkisi, $x \in X$ ve $s, t \in H$ için

$$x^1 = x \text{ ve } (x^s)^t = x^{(st)}$$

olacak şekilde

$$X \times H \rightarrow X$$

$$(x, s) \rightarrow x^s$$

sürekli bir dönüşümdür. Eğer $x \in X$ ise x in H altındaki orbiti,

$$x^H = \{x^s : s \in H\}$$

ile gösterilir. Orbitlerin kümesi,

$$X^H = \{x^H : x \in X\}$$

şeklinde belirtilir.

G bir grup olsun. $A : G \rightarrow G$ dönüşümü, eğer $c \in G$ varsa ve her $x \in G$ için $A(x) = cB(x)$ olacak şekilde G nin bir B otomorfizmi varsa, afın dönüşüm olarak adlandırılır. Eğer $a, b \in G$ ve B, G nin bir otomorfizmi ise aBb afındır, çünkü $aBb = (ab)(b^{-1}Bb)$ ve $b^{-1}Bb$ otomorfizmdir.

G ve H topolojik gruplar olsun. H nin G üzerindeki sürekli afin etkisi, her $x \rightarrow x^s$ afin dönüşümü için $(x, s) \rightarrow x^s$ bir sürekli etkidir.

Teorem 5.8

$(x, s) \rightarrow x^s$ dönüşümü, boş olmayan lokal kompakt Hausdorff uzayı X üzerinde kompakt grup H nin bir sürekli etkisidir. X^H , X in kompakt alt kümelerine ayrışmasıdır ve X^H , $\mathcal{K}(X)$ in kapalı bir alt kümesidir. X^H üzerindeki bölüm topolojisi ile X^H üzerindeki bağlantılı topoloji birbirine eşittir. Bu topolojiyle birlikte X^H lokal kompakt Hausdorff uzayıdır ve doğal izdüşüm,

$$X \rightarrow X^H$$

$$x \rightarrow x^H$$

dönüşümü sürekli açık bir dönüşümdür.

Kanıt

π , doğal izdüşüm olsun. X^H nin $\mathcal{K}(X)$ in kapalı bir alt kümesi olduğu açıktır. U ve V , X in açık alt kümeleri ise

$$W = \pi^{-1}(\mathcal{K}_U(V)) = \{x \in X : x^H \subset V, x^H \cap U \neq \emptyset\}$$

kümesi X in açık bir alt kümesidir. Dolayısıyla, bağlantılı topoloji bölüm topolojisinde yer almaktadır. $Q \subset X^H$ bölüm topolojisinde açık olsun. $U = \pi^{-1}(Q)$, X te açıktır. Fakat $Q = \mathcal{K}(U^H) \cap X^H$ dir. Bu iki topoloji birbirine eşittir. Ayrıca, eğer W , X in açık bir alt kümesi ise $\pi(W) = \mathcal{K}(W^H) \cap X^H$, X^H nin açık bir alt kümesidir.

Teorem 5.9

G lokal kompakt bir grup ve H kompakt bir grup olsun ve $(x, s) \rightarrow x^s$ nin G üzerinde H grubunun bir sürekli afin etkisi olduğu varsayalım. λ , G üzerinde bir sol Haar ölçümü ve σ , H üzerinde normleştirilmiş Haar ölçümü olsun. G^H , bölüm topolojisine sahiptir. $x, y \in G$ için

$$(p_{x^H}) * (p_{y^H}) = \int_H \int_H p_{(x^s y^t)^H} \sigma(ds) \sigma(dt)$$

tanımlanır. Bu işlem iyi tanımlıdır ve G^H , bu işlemle birlikte bir yarı hipergruptur. Ayrıca,

$$m = \int_G p_{x^H} \lambda(dx)$$

ölçümü G^H üzerinde sol-invaryanttır.

Kanıt

İşlemin iyi tanımlı olduğu açıktır. Her $x \in G$ için $\omega_x \in M_c^+(G)$, $\int_G f d\omega_x = \int_H f(x^s) \sigma(ds)$ tarafından verilen olasılık ölçümü olsun. $G^H \rightarrow M^+(G)$, $x^H \rightarrow \omega_x$ dönüşümü iyi tanımlıdır ve süreklidir. Lemma 3.5'den dolayı $M(G^H) \rightarrow M(G)$, $\mu \rightarrow \mu'$ genişletilmiş dönüşümü vardır.

Her $s \in H$ için, G nin birim elemanının 1 olduğu yerde $a_s = (1^s)^{-1}$ olsun. $s \in H$ ve $x, y \in G$ için $(xy)^s = x^s a_s y^s$ dir. $\pi \in M_c^+(G)$ ölçümü, $\int_G f d\pi = \int_H f(a_s) \sigma(ds)$ şeklinde tanımlansın. $(x^s y^t)^u = x^{su} a_u y^{tu}$ hesaplaması, $\omega_x * \pi * \omega_y$ ölçümünün H altında invariant olduğunu gösterir ve

$$\omega_x * \pi * \omega_y = (p_{x^H} * p_{y^H})'$$

dir. Böylece konvolüsyon, $\mu, \nu \in M(G^H)$ için,

$$(\mu * \nu)' = \mu' * \pi * \nu'$$

olur. Dolayısıyla G^H , bir yarı hipergruptur. H kompakt ve etki, afin olduğundan, G nin her $x \rightarrow x^s$ dönüşümü λ invariant bırakır. Böylece, m ölçümü sol- invarianttır.

5.5. KOSETLER

G , lokal kompakt grup; H , G nin kompakt alt grubu; λ , G üzerinde sol Haar ölçümü ve σ , H üzerinde normalleştirilmiş Haar ölçümü olmak üzere, sol kosetlerin kümesi;

$$G/H = \{xH : x \in G\}$$

ve çift kosetlerin kümesi;

$$G // H = \{HxH : x \in G\}$$

üzerinde bölüm topolojisi vardır.

Teorem 5.10

$G // H$ uzayı,

$$p_{HxH} * p_{HyH} = \int_H p_{HxtHyH} \sigma(dt)$$

işlemi ile birlikte bir hipergruptur. Birim eleman $e = H = H1H$ dir. Eğer $x \in G$ ise $(HxH)^- = Hx^{-1}H$ dir. $G // H$ üzerindeki sol Haar ölçümü

$$m = \int_G p_{HxH} \lambda(dx)$$

dir (Jewett 1975).

Kanıt

$$(x, s) \rightarrow xs$$

dönüşümü, G/H orbit uzayı ile birlikte G üzerinde H nin sürekli afin etkisidir.

$$(x, (s, t)) \leftrightarrow s^{-1}xt$$

dönüşümü, $G // H$ orbit uzayı ile birlikte G üzerinde $H \times H$ nin sürekli afin etkisidir. Kanıtın devamı Teorem 5.9'un kanıtıyla benzer şekildedir.

5.6 ÖRNEKLER

K hipergrup ve $x \in K$ için eğer $x^- = x$ oluyorsa x e öz eşlenik denir. Eğer K nın her elemanı öz eşlenik ise K ya Hermitian hipergrup denir.

Örnek 5.1

$K = \{e, a\}$ iki elemanlı bir ayırık uzay ve β , $0 < \beta \leq 1$ olacak şekilde bir reel sayı olsun. β ya bağlı bir işlem aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$p_e * p_e = p_e \quad p_e * p_a = p_a$$

$$p_a * p_e = p_a \quad p_a * p_a = \beta p_e - (1 - \beta)p_a$$

K bir Hermitian hipergrup ve e birim elemandır. K ancak ve ancak $\beta = 1$ olması durumunda gruptur. K deki Haar ölçümü,

$$m = p_e + (1/\beta)p_a$$

dir. $\hat{K} = \{1, \chi\}$ olsun. $\chi(e) = 1$ ve $\chi(a) = -\beta$ dir. m ile ilişkili K üzerindeki Plancherel ölçümü,

$$\pi = \frac{\beta}{1+\beta}p_1 + \frac{1}{1+\beta}p_\chi$$

dir. $\hat{K}$ bir hipergruptur ve $\hat{K}$, K ye izomorftur, çünkü

$$\chi^2 = \beta \cdot 1 + (1 - \beta)\chi$$

dir (Jewett 1975).

Örnek 5.2

$K = \{e, a, b\}$ kümesi üç elemanlı bir ayrık uzay olsun. e birim eleman olmak üzere K üzerinde işlem şu şekilde tanımlansın:

$$p_a * p_a = \frac{1}{4}p_e + \frac{1}{20}p_a + \frac{7}{10}p_b$$

$$p_a * p_b = p_b * p_a = \frac{7}{20}p_a + \frac{3}{10}p_b$$

$$p_b * p_b = \frac{1}{4}p_e + \frac{3}{10}p_a + \frac{9}{20}p_b$$

K bir Hermitian hipergruptur ve K üzerindeki Haar ölçümü,

$$m = p_e + 4p_a + 4p_b$$

dir.

$\hat{K} = \{1, \chi, \psi\}$, e, a, b deki değerleri

$$1: 1, 1, 1$$

$$\chi: 1, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$$

$$\psi: 1, \frac{1}{10}, -\frac{7}{20}$$

dir. m ile ilişkili $\widehat{K}$ üzerindeki Plancherel ölçümü,

$$\pi = \frac{1}{9}p_1 + \frac{4}{17}p_\chi + \frac{100}{153}p_\psi$$

dir. Fakat $\widehat{K}$ hipergrup değildir, çünkü

$$\chi^2 = \frac{17}{36} \cdot 1 - \frac{3}{68}\chi + \frac{175}{306}\psi$$

dir (Jewett 1975).

Örnek 5.3

S_4 , $\{1,2,3,4\}$ kümesinin tüm permütasyonlarının grubu olsun. S_4 'ün elemanları döngüsel notasyonda yazılacak ve çarpım soldan sağa doğru hesaplanacaktır. Örneğin, $(12)(13) = (123)$. A_4 bu permütasyonların alt grubu olsun. $K = \{e, a, b, c\}$ elemanları aşağıda sütunlarda verilmiştir:

e	a	b	c
1	(12)(34)	(123)	(124)
	(13)(24)	(134)	(132)
	(14)(23)	(142)	(143)
		(243)	(234)

e birim elemanı ile birlikte K bir değişmeli hipergruptur. Dahası,

$$p_a * p_a = \frac{1}{3}p_e + \frac{2}{3}p_a, \quad p_a * p_b = p_b, \quad p_a * p_c = p_c$$

$$p_b * p_b = p_c, \quad p_b * p_c = \frac{1}{4}p_e + \frac{3}{4}p_a$$

$$p_c * p_c = p_b$$

$a^- = a$ ve $b^- = c$ olduğuna dikkat edilmesi gerekmektedir. K üzerindeki normalleştirilmiş Haar ölçümü,

$$m = \frac{1}{12}p_e + \frac{1}{4}p_a + \frac{1}{3}p_b + \frac{1}{3}p_c$$

dir. $\alpha = e^{2\pi i/3}$ ve $\beta = e^{4\pi i/3}$ olsun. $\widehat{K} = \{1, \chi, \psi, \xi\}$; e, a, b, c değerleri,

$$1: 1, 1, 1, 1$$

$$\chi: 1, 1, \alpha, \beta$$

$$\psi: 1, 1, \beta, \alpha$$

$$\xi: 1, -\frac{1}{3}, 0, 0$$

dir. m ile ilişkili $\widehat{K}$ üzerindeki Plancherel ölçümü,

$$\pi = p_1 + p_\chi + p_\psi + p_\xi$$

dir. $\widehat{K}$ bir hipergruptur.

$$\xi^2 = \frac{1}{9} \cdot 1 + \frac{1}{9} \chi + \frac{1}{9} \psi + \frac{2}{3} \xi$$

Diğer sonuçlar açıktır. Örneğin $\chi^2 = \psi$ ve $\chi\xi = \xi$ dir (Jewett 1975).

5.7 ALT HİPERGRUPLAR

Bu bölümde K nin bir hipergrup olduğu kabul edilecektir.

Tanım 5.1

K bir hipergrup olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $H \subset K$ kümesine alt hipergrup denir:

a) $H \neq \emptyset$ bir kapalı küme,

b) $H^- = H$,

c) $H * H \subset H$ dir.

b) ve c) maddelerinden $e \in H$ olduğu görülebilir (Jewett 1975).

$\mu, \nu \in M(H)$ ise bu ölçümler $M(K)$ nin elemanı olarak kabul edilebilirler ve $\mu * \nu$ de $M(H)$ nin elemanı olarak kabul edilebilir.

Lemma 5.1

$\emptyset \neq H \subset K$, $H * H \subset H$ ve $H^- = H$ olsun. H nin bağlantılı topolojiye göre lokal kompakt olduğu varsayılın. Bu durumda H , K nin bir alt hipergrubudur.

Kanıt

$e \in H$ olduğu açıktır. $x \in cH$ ve $\{x_\beta\}_{\beta \in D}$, H de x e yakınsayan bir ağ olsun. U ; $e \in U$ ve $A = c(U \cap H)$, H nin kompakt bir alt kümesi olacak şekilde K nin bir açık alt kümesidir. Her $\alpha, \beta \geq \beta_0$ için $\{x_\alpha\} * \{x_\beta\} \cap U \neq \emptyset$ olacak şekilde $\beta_0 \in D$ vardır. Böylece her $\alpha, \beta \geq \beta_0$ için $\{x_\alpha\} * \{x_\beta\} \cap A \neq \emptyset$ dir. $B = x_{\beta_0} * A$ olsun. Bu küme H nin kompakt alt kümesidir. Ayrıca $\beta \geq \beta_0$ için $x_\beta \in B$ dir. Bundan dolayı, $x \in B \subset H$ dir.

Lemma 5.2

$A \subset K$ olsun. Bu durumda K nin A kümesini içeren en küçük bir H alt hipergrubu vardır.

Lemma 5.3

H, K nin bir alt hipergrubu olsun. Eğer H nin içi boş değil ise H açıktır.

Kanıt

$U \neq \emptyset$, H nin içi olsun. $e \in U * U^-$ dir. Lemma 4.4 d) şikkından

$$H = (U * U^-) * H = U * (U^- * H)$$

kümesi K de açıktır.

Lemma 5.4

A ve B , K nin bağlantılı alt kümeleri olsun. $a \in A, b \in B$ ve

$$\{a\} * \{b\} \subset C \subset A * B$$

olacak şekilde C bağlantılı kümesi olduğu varsayalım. Bu durumda $A * B$ bağlantılıdır.

Kanıt

$V, W \subset K$ açık kümeler ve $(A * B) \cap V$ ve $(A * B) \cap W$ ayrık iken $A * B \subset V \cup W$ olduğu varsayalım. C , bu kümelerden birinde bulunur, $(A * B) \cap V$ de bulunduğu kabul edilsin.

$$P = \{(x, y) : \{x\} * \{y\} \in \mathcal{K}(V)\}$$

$$Q = \{(x, y) : \{x\} * \{y\} \in \mathcal{K}_W(K)\}$$

kümeleri $K \times K$ de açıktır. Ayrıca, $P \cup Q$ kümesi $A \times B$ yi içerir ve $(A \times B) \cap P$ ve $(A \times B) \cap Q$ ayrıktır. $(a, b) \in P$ ve $A \times B$ bağlantılı olduğundan $A \times B \subset P$ dir. Bundan dolayı $A * B \subset V$ olur.

Lemma 5.5

H, K daki e nin bileşeni olsun. Bu durumda H, K nın bir alt hipergrubudur.

Kanıt

H^- bağlantılı olduğundan $H^- = H$ dir. $\{e\} * \{e\} \subset \{e\} \subset H * H$ olduğundan $H * H$ bağlantılıdır. Böylece $H * H \subset H$ olur.

Lemma 5.6

$A \subset K$ kompakt bir küme ve $\alpha \in A$ olsun. $A * A \subset A$ olduğu varsayalım. Bu durumda $day \mu \subset A, p_\alpha * \mu = \mu$ ve $\mu * \mu = \mu$ olacak şekilde bir $\mu \in M^+(K)$ olasılık ölçümü bulunur.

Kanıt

Her $n \geq 1$ için,

$$\mu_n = \frac{1}{n} [p_\alpha + (p_\alpha * p_\alpha) + \dots + (p_\alpha)^n]$$

olsun. Böylece,

$$\|p_\alpha * \mu_n - \mu_n\| = \left\| \frac{1}{n} [p_\alpha - (p_\alpha)^n] \right\| \leq \frac{2}{n}$$

olur. A kompakt olduğundan ve tüm bu ölçümlerin dayanaklarını içerdiğinden $M^+(K)$ de $\{\mu_n\}$ dizisinin bir limit noktası μ vardır. $\mu(K) = 1$ ve $p_\alpha * \mu = \mu$ olduğu açıktır. Bu her $n \geq 1$ için $\mu_n * \mu = \mu$ anlamına gelir. Böylece, $\mu * \mu = \mu$ dir.

Teorem 5.11

K de bir Haar ölçümü bulunduğu varsayalım.

- Eğer $\mu \in M^+(K), \mu \neq 0$ ve $\mu * \mu = \mu$ ise $\mu^- = \mu, H = day \mu, K$ ninkompakt bir alt hipergruptur ve μ, H üzerindeki normalleştirilmiş Haar ölçümüdür.
- Eğer $H \neq \emptyset, K$ nin kompakt bir alt kümesi ve $H * H \subset H$ ise $H^- = H$ dir ve H, K nin bir alt grubudur.

KAYNAKLAR

- Bauer H** (1972) *Probablity Theory and Elements of Measure Theory*, ISBN: 0-03-081621-1 Holt, Rinehart and Winston, Inc, New York
- Bayraktar M** (2006) *Fonksiyonel Analiz*, ISBN: 975-6009-74-8, Gazi Kitabevi, Ankara, s.243-244.
- Bloom W R and Heyer H** (1994) *Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups*, de Gruyter Studies in Mathematics, Volume 20
- Hewitt E and Ross K A** (1963) *Abstract Harmonic Analysis*, Volume 1, Springer- Verlag, Berlin.
- Jewett R I** (1975) Spaces with an Abstract Convolution of Measures, *Advances in Mathematics* 18, p. 1-101.
- Kastner S** (1995) *Morphismen und asytmotische Gleichverteilung auf Hypergruppen*. ISBN: 3-86186-089-9, Stuttgart, p.1-134.
- Kreyszig E** (1978) *Introductory Functional Analysis with Applications*, ISBN: 0-471-50731-8, United States of Amerika, p.256-262.
- Lecomte D** (2006) Weak Topologies (23.05.2006). Adres: <https://perso.crans.org/lecomte/Math/WeakTopologies.pdf>
- Loomis L H** (1963) *An Intoduction to Abstract Harmonik Analysis*, Van Nostrand, Princeton.
- Michael E** (1951) Topologies on Spaces of Subsets, *Transactions of the American Mathematical Society* 71, p.152-182.
- Özmen N** (2007) Çarpım Ölçümleri. *Yüksek Lisans Tezi*, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Zonguldak.



ÖZGEÇMİŞ

Fatma AŞÇIOĞLU, 1991’de Bulgaristan’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Bursa’da tamamladı. Bursa Atatürk Anadolu Lisesinden mezun olduktan sonra 2009 yılında Bursa Uludağ Üniversitesi Matematik bölümüne başladı ve 2013’te mezun oldu. 2016 yılından bu yana Milli Eğitim Bakanlığında Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.

İLETİŞİM BİLGİLERİ:

E-posta: fatmacatakli@hotmail.com