

55137

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOMOGEN OLMAYAN BİR ORTAMDA
SAÇILMA PROBLEMİ

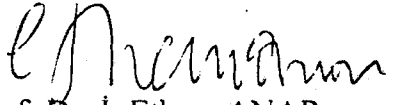


DOKTORA TEZİ
(MATEMATİK)

Adil MISIR
Eylül 1996

İ.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANI
1996

Bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım


Prof. Dr. İ. Ethem ANAR

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav jürisi

Başkan : Prof. Dr. Muhsin Mert 
Üye : Prof. Dr. Cevat Kart 
Üye : Prof. Dr. Münevver Tezer M. Tezer
Üye : Prof. Dr. İ. Ethem Anar 
Üye : Doç. Dr. İ. Baki Yaşar 

Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

**HOMOGEN OLMAYAN BİR ORTAMDA
SAÇILMA PROBLEMİ
(Doktora Tezi)**

Adil MISIR

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Eylül 1996**

ÖZ

Bu tez çalışmasında homogen olmayan geçirgen bir ortamda zaman harmonik ses dalgaları için bir saçılma ve bir ters saçılma problemi incelenmiştir. Saçılma probleminin çözümünün varlığı ve tekliği, problem bir integral denkleme indirgenerek ve integral operatörün kompaktlığı kullanılarak ispatlanmıştır. Ters saçılma problemi için $F(\hat{x};k,\alpha)$ far-field pattern fonksiyonu elde edilmiştir. $\mathfrak{I} = \{F(\hat{x};k,\alpha): n = 1, 2, 3, \dots\}$ tanımlanıp izdüşüm teoremi kullanılarak $L^2(\partial\Omega) = \overline{\text{span } \mathfrak{I}} \oplus \mathfrak{I}^\perp$ olduğu gösterilmiştir. Son olarak $\text{span } \mathfrak{I}$ 'in $L^2(\partial\Omega)$ da yoğun olması için uygun şartlar zaman harmonik ses dalgalarına karşılık gelen far-field pattern fonksiyonlarının sınıfı üzerine yüklenmiş ve bunun yardımıyla homogen olmayan iç saçılma probleminin varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

Bilim Kodu : 403.06.01

Anahtar Kelimeler: Scattering problem, acoustic waves, far-field pattern

Sayfa Adedi : 55

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. İ. Ethem ANAR

SCATTERING PROBLEM FOR AN INHOMOGENEOUS MEDIUM

(Ph. D. Thesis)

Adil MISIR

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
September 1996

ABSTRACT

In this thesis the scattering and the inverse scattering problems for time-harmonic acoustic waves in an inhomogeneous penetrable medium has been investigated. First the scattering problem has been reduced to an integral equation and then the existence and the uniqueness of it's solution have been showed by using the compactness of the integral operator corresponding to this integral equation. For the inverse scattering problem, the far-field pattern function $F(\hat{x}; k, \alpha)$ has been obtained. Next the set $\mathfrak{F} = \{ F(\hat{x}; k, \alpha) : n = 1, 2, 3, \dots \}$ has been considered and then using the projection theorem, it has been shown that $L^2(\partial\Omega) = \overline{\text{span } \mathfrak{F}} \oplus \mathfrak{F}^\perp$. Finally sufficient conditions have been given for the class of far-field patterns corresponding to the time-harmonic plane waves to be complete in $L^2(\partial\Omega)$, and by the aid of this the existence and the uniqueness of the solution of the interior inhomogeneous transmission problem have been showed.

Science Code : 403.06.01

Key Words : Scattering problem, acoustic waves, far-field pattern

Page Number : 55

Adviser : Prof. Dr. İ. Ethem ANAR

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana öneren ve tezin hazırlanmasında deneyimlerini, bilgilerini, faydalı tavsiyelerini ve zamanını benden esirgemeyen hocam Prof. Dr. İ. Ethem ANAR' a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bu çalışmam esnasında bana manevi destek veren ve bana zaman ayırıp problemimi daha iyi anlayıp yorumlamamı sağlayan meslektaş arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

SEMBOLLER

Sembol	Anlam
∂D	D bölgesinin sınırı
$\overline{D}$	D bölgesinin (kümesinin) kapanışı
$\overline{Z}$	Z kompleks sayısının eşleniği
R^n	n-boyutlu Euclid uzayı
$ \bullet $	R^n deki bir vektörün Euclid normu
$\hat{x}$	R^n deki birim vektör
$C(D)$	D de tanımlı reel veya kompleks değerli sürekli fonksiyonların normlu uzayı
$C^k(D)$	D de tanımlı k-inci mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli reel veya kompleks değerli fonksiyonların normlu uzayı
$\ \bullet\ $	Maksimum normu
$\exp$	Exponential (üstel)
O, o	Landau sembolleri
Δ, ∇^2	Laplace operatörü
Re	Reel kısım
Im	İmajiner kısım
grad, ∇	Gradient
$L^2(\partial\Omega)$	$\partial\Omega$ de karesi integrallenebilir fonksiyonların normlu uzayı

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
SEMBOLLER	IV
1. GİRİŞ	1
2. HOMOGEN OLMAYAN GEÇİRGEN (PENETRABLE) BİR ORTAM İÇİN AKUSTİK SAÇILMA PROBLEMİ	4
2.1. Problemin Ortaya Konması	4
2.2. Çözümün Tekliği	6
2.3. İntegral Gösterim	9
3. KOMPAKT OPERATÖRLER	15
4. HOMOGEN OLMAYAN BİR ORTAMDA YAYILAN ZAMAN HARMONİK DÜZLEMSEL SES DALGALARI İÇİN FAR-FİELD PATTERN FONKSİYONLARI	23
4.1. Problemin Ortaya Konması	23
4.2. Far-Field Pattern Fonksiyonu	24
4.3. İç Transmission Problemi	38
4.4. İntegral Denklem Metodu	48
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	55

1. GİRİŞ

Saçılma ve ters saçılma problemi bir çok matematikçi, fizikçi tarafından çalışılmıştır (Anar, İ.E, Çelebi, A.O., 1994; Colton, D., 1979; Colton, D., Krisch, A., 1984; Colton, D., Kleinman, R.E., 1980; Colton, D., Kress, R., 1992; Kitappa, R., Roach, G.F., 1975; Kitappa, R., Kleinman, R.E., 1975). Werner (Werner, P., “Zur Math...”, 1963; Werner, P., “Beaugh...”, 1963) akustik saçılım problemini incelemiş, bunlar için kalıcı sonuçlar elde etmiştir. Colton ve Kleinman (Colton, D., Kleinman, R.E., 1980) direkt ve inverse saçılma problemini incelemiştir. Ahner (Ahner J.F, 1975) çözüm kurma tekniği ile saçılma probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini elde etmiştir. Anar ve Çelebi (Anar, İ.E, Çelebi, A.O., 1994) engel (obstacle) bölgede yoğunluğun ve dalga sayısının konuma bağlı olması halinde bir saçılma problemini incelemiştir. Colton ve Kress (Colton, D., Kress, R., 1992) ses dalgaları için null field denklemlerinin Dirichlet, Neumann, impedance ve transmission sınır değer problemlerinin tek çözülebilirliğini göstermişlerdir. Colton ve Monk (Colton, D., Monk, P., 1987; Colton, D., Monk, P., 1988) izdüşüm teoremini kullanarak ters saçılma problemi için iki farklı optimizasyon metodu geliştirmişlerdir. Ayrıca sınır değer problemlerinin bir sınıfı üzerine yaptıkları bir araştırma ile far-field patternleri $L^2(\partial\Omega)$ da bir hiper yüzey civarında olduklarını göstermişlerdir. Kleinman ve Martin (Colton, D., Kress, R., 1992) transmission problemin çözümü için bir single bilinmeyen fonksiyonu için S sınır üzerinden bir single integral denklemi kullanarak çözüm metodu kurmuşlardır. Costabal ve Stephan (Colton, D., Kress, R., 1992) Galerkin yaklaşımını kullanarak transmission problemi için direkt sınır integral metodu geliştirmişlerdir. Son yıllarda engel bölgenin yoğunluğunun sabit olması halinde iki ve üç boyutta $F(\hat{x};k,\alpha)$ verilen far-field pattern fonksiyonunun yardımıyla ters saçılma problemi için nümerik çözüm kurma

metodları verilmiştir (Colton, D., 1989; Colton, D., Krisch, A., 1984; Colton, D., Kleinman, R.E., 1980; Sleeman, B.D., 1982). Colton (Colton, D., 1988) dalga sayısının yeterince küçük olması halinde far-field patternlerin sınıfının $L^2(\partial\Omega)$ da tam olduğunu göstermiştir.

Biz bu çalışmamızda engel bölgenin yoğunluğunu $\rho_i(x) \in C^1$ keyfi fonksiyonu olarak alıp saçılma ve ters saçılma problemini inceledik.

İkinci bölümde $S \subset \mathbb{R}^3$ basit bağlantılı, kapalı bir Lyapunoff yüzey, S ile sınırlı bölge V_i ve S nin dışında kalan bölge V_e olmak üzere V_i nin yoğunluğu, $\rho_i(x) \in C^1(\overline{V_i})$, dalga sayısı, $k_i(x) \in C^1(\overline{V_i})$ ve V_e nin yoğunluğu ρ_e , dalga sayısı k_e sabitleri iken $u^l(x) = \exp(ikx \cdot \alpha)$, $|\alpha| = 1$ doğrultusunda verilen ses dalgası için

$$u(x) = u^l(x) + u^s(x) \quad , \quad x \in V_e$$

$$(\nabla^2 + k_e^2) u^s(x) = 0 \quad , \quad x \in V_e$$

$$(\nabla^2 + k_i^2(x)) u(x) = 0 \quad , \quad x \in V_i$$

$$\rho_e u^+(x) = \rho_i(x) u^-(x) \quad , \quad x \in \partial D$$

$$\frac{\partial u^+(x)}{\partial n} = \frac{\partial u^-(x)}{\partial n} \quad , \quad x \in \partial D$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i k_e u^s \right) = 0 \quad , \quad r = |x|$$

saçılma problemi ele alınmış ve bu problem bir integral denkleme indirgenmiştir.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde elde edilen integral denkleme karşılık gelen integral operatörün kompakt olduğu ispatlanmıştır.

İki ve üçüncü bölüm tamamlanırken Kitappa ve Kleinman (Kitappa, R., Kleinman, R.E., 1975) nin kullandığı yöntemden faydalandık.

Dördüncü bölümde, $D \subset \mathbb{R}^3$ basit irtibatlı, homogen olmayan bir bölge olmak üzere, D nin geçirgenlik sayısı $a \geq 0$, lokal ses hızı $c(x) > 0$, $c(x) \in C^1(\bar{D})$ ve yoğunluğu $\rho_i(x) \in C^1(\bar{D})$, $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ nin ses hızı c_0 ve yoğunluğu ρ_e olmak üzere $\omega > 0$ frekans $k = \omega/c_0$ dalga sayısı $\kappa^2 = \omega(\omega + ia)/c_0^2$, $\zeta_e = -i\omega\rho_e$, $\zeta_i(x) = (a-i\omega)\rho_i(x)$ için $u^i(x) = \exp(ikx \cdot \alpha)$, $|\alpha| = 1$ doğrultusunda ses dalgasının verilmesi hali için

$$\Delta u_e + k^2 u_e = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$\Delta u_i + \kappa^2 n(x) u_i = 0, \quad x \in D, \quad n(x) = \left(\frac{c_0}{c(x)} \right)^2$$

$$\zeta_e u_e - \zeta_i(x) u_i(x) = 0, \quad x \in \partial D$$

$$\frac{\partial u_e(x)}{\partial n} - \frac{\partial u_i(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial D$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i k_e u^s \right) = 0, \quad r = |x|$$

ters saçılma problemi ele alındı, bu saçılma problemi için far-field pattern fonksiyonları oluşturuldu. Bu fanksiyonların sınıfı ile $L^2(\partial\Omega)$ arasındaki ilişki kuruldu. Son olarak bu ters saçılma probleminin yardımıyla homogen olmayan bir iç transmission probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümü tamamlarken Colton ve Monk' un (Colton, D., Monk, P., 1987; Colton, D., Monk, P., 1988) yönteminden faydalanılmıştır.

2. HOMOGEN OLMAYAN GEÇİRGEN (PENETRABLE) BİR ORTAM İÇİN AKUSTİK SAÇILMA PROBLEMİ

2.1. Problemin Ortaya Konması

S, R^3 de basit bağlantılı, kapalı, parçalı bir Lyapunoff yüzey olsun (veya bu biçimdeki yüzeylerin bir sonlu birleşimi olsun. Yani, S_i ler Lyapunoff yüzey parçaları olmak üzere $S = \sum_{i=1}^N S_i$ olsun) (Mikhlin, S.G., 1970). S nin sınırladığı iç bölgeyi V_i ($\bar{V}_i = V_i \cup S$) ile gösterelim ve orjinide V_i nin içinde bir yere yerleştirelim. S nin dışında kalan bölgeyi V_e ($\bar{V}_e = V_e \cup S$) ile gösterelim. x ve y , R^3 de iki nokta olmak üzere, bu iki nokta arasındaki uzaklığı $R := R(x,y) = |x-y|$ ile gösterelim. $x, x' \in S$ olsun. Bu noktalardaki normal vektörleri (S üzerinden V_e içine) sırasıyla $\hat{n}$ ve $\hat{n}'$ ile gösterelim. $\hat{n}$ ve $\hat{n}'$ doğrultusundaki türevleride sırasıyla $\frac{\partial}{\partial n}$ ve $\frac{\partial}{\partial n'}$ ile gösterelim.

Ayrıca,

$$u^+(x) := \lim_{x \in V_e \rightarrow x \in S} u(x) \quad , \quad u^-(x) := \lim_{x \in V_i \rightarrow x \in S} u(x)$$

$$\frac{\partial u^+(x)}{\partial n} := \lim_{x \in V_e \rightarrow x \in S} \frac{\partial u(x)}{\partial n} \quad , \quad \frac{\partial u^-(x)}{\partial n} := \lim_{x \in V_i \rightarrow x \in S} \frac{\partial u(x)}{\partial n}$$

ile tanımlayalım.

V_e bölgesinin yoğunluğu $\rho_e = \text{sabit}$, V_i bölgesinin yoğunluğu $\rho_i = \rho_i(x)$, $x \in V_i$, $\rho_i \in C^1(\bar{V}_i)$ fonksiyonu ile tanımlayalım. V_e deki dalga sayısını $k = k_e = \text{sabit}$ ile, V_i deki dalga sayısını da $k_i = k_i(x)$, $x \in V_i$, $k_i \in C^1(\bar{V}_i)$ ile gösterelim.

Gelen zaman harmonik dalga fonksiyonu $u^i(x)$ (incident wave) ve saçılan dalga fonksiyonu $u^s(x)$ (scattered wave) olmak üzere $u^i(x)$ verildiğinde aşağıdaki şartları sağlayan toplam alan $u = u^i + u^s$ (zaman harmonik potansiyeli) bulmak istiyoruz. $u^i(x)$ R^3 de hemen her yerde $(\nabla^2 + k_e^2) u^i = 0$ Helmholtz denklemini sağlar.

Aşağıda tanımlanan saçılma problemini gerçekleyen $u \in C^2(R^3 \setminus S) \cap C^1(S)$ yu arayalım. Öyleki;

$$u(x) = u^i(x) + u^s(x) \quad , \quad x \in V_e \quad (2.1)$$

$$(\nabla^2 + k_e^2) u^s(x) = 0 \quad , \quad x \in V_e \quad (2.2)$$

$$(\nabla^2 + k_i^2(x)) u(x) = 0 \quad , \quad x \in V_i \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_e u^+(x) - \rho_i(x) u^-(x) &= 0 \\ \frac{\partial u^+(x)}{\partial n} - \frac{\partial u^-(x)}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad , \quad x \in S \quad (2.4)$$

$r = |x|$ olmak üzere hemen her doğrultuda Sommerfeld yayılma şartı,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i k_e u^s \right) = 0 \quad (2.5)$$

sağlansın.

2.2. Çözümün Tekliği

$u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonları, Denklem (2.1)-Denklem (2.5) probleminin çözümleri olsunlar. $W(x) = u_1(x) - u_2(x)$ fonksiyonu,

$$(\nabla^2 + k_e^2) W(x) = 0 \quad , \quad x \in V_e \quad (2.6)$$

$$(\nabla^2 + k_i^2(x)) W(x) = 0 \quad , \quad x \in V_i \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_e W^+(x) &= \rho_i(x) W^-(x) \\ \frac{\partial W^+(x)}{\partial n} &= \frac{\partial W^-(x)}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad , \quad x \in S \quad (2.8)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial W}{\partial r} - i k_e W \right) = 0 \quad (2.9)$$

Denklem (2.1)-Denklem (2.5) saçılma problemine karşılık gelen Denklem (2.6)-Denklem (2.9) problemini gerçekler. Bu şartları gerçekleyen çözümün sadece $W = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Yeteri kadar büyük R yarıçaplı

$$\Sigma_R := \{ x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R \}$$

küresi S yi içinde bulundursun.

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R \} \setminus \overline{V_i}$$

olsun. Ω bölgesine birinci Green özdeşliğini uygularsak,

$$\int_{\Sigma_R} \overline{W} \frac{\partial W}{\partial n} dS(y) = \int_{\Omega} \left(\overline{W} \nabla^2 W + |\nabla W|^2 \right) dy + \int_S \overline{W^+} \frac{\partial W^+}{\partial n} dS(y) \quad (2.10)$$

olur.

Denklem (2.10) eşitliğinde Denklem (2.8) sınır şartları kullanılırsa

$$\int_{\Sigma_R} \overline{W} \frac{\partial W}{\partial n} dS(y) = \int_{\Omega} \left(\overline{W} \nabla^2 W + |\nabla W|^2 \right) dy + \int_S \left[\left(\frac{\overline{\rho_i(y)}}{\rho_e} \right) \overline{W^-} \frac{\partial W^-}{\partial n} \right] dS(y) \quad (2.11)$$

elde edilir.

Eğer Denklem (2.11) eşitliğinin sağ tarafındaki S üzerinden olan integrale Green teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_R} \overline{W} \frac{\partial W}{\partial n} dS(y) = & -k_e^2 \int_{\Omega} |W|^2 dy + \int_{\Omega} |\nabla W|^2 dy - \int_{V_i} \left(\frac{\overline{\rho_i(y)}}{\rho_e} \right) k_i^2(y) |W|^2 dy \\ & + \int_{V_i} \left(\frac{\overline{\rho_i(y)}}{\rho_e} \right) |\nabla W|^2 dy + \int_{V_i} \overline{W} \nabla \left(\frac{\overline{\rho_i(y)}}{\rho_e} \right) \nabla W dy \end{aligned} \quad (2.12)$$

elde edilir.

Denklem (2.12) eşitliği k_e ile çarpılır ve her iki tarafın imajiner kısmı alınır

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(k_e \int_{\Sigma_R} \overline{W} \frac{\partial W}{\partial n} dS(y) \right) = & \operatorname{Im} \left(-k_e^3 \int_{\Omega} |W|^2 dy \right) + \operatorname{Im} k_e \int_{\Omega} |\nabla W|^2 dy \\ & + \operatorname{Im} \left(-k_e \int_{V_i} \left(\frac{\overline{\rho_i(y)}}{\rho_e} \right) k_i^2(y) |W|^2 dy \right) + \operatorname{Im} k_e \int_{V_i} \left(\frac{\overline{\rho_i(y)}}{\rho_e} \right) |\nabla W|^2 dy \end{aligned}$$

$$+ \operatorname{Im} k_e \int_{V_i} \overline{W} \nabla \left(\frac{\overline{\rho_i(y)}}{\rho_e} \right) \nabla W \, dy \quad (2.13)$$

olur.

$\operatorname{Im} k_e > 0$ olduğunda $R \rightarrow \infty$ için Denklem (2.13) eşitliğinin sol tarafı sıfır olur (Kitappa, R., Kleinman, R.E., 1975). Böylece $R \rightarrow \infty$ için

$$\begin{aligned} 0 = & \operatorname{Im} (-k_e^3) \int_{V_e} |W|^2 \, dy + \operatorname{Im} k_e \int_{V_e} |\nabla W|^2 \, dy + \operatorname{Im} \int_{V_i} k_e \left(\frac{\overline{\rho_i(y)}}{\rho_e} \right) |\nabla W|^2 \, dy \\ & + \operatorname{Im} \left(-k_e \int_{V_i} \left(\frac{\overline{\rho_i(y)}}{\rho_e} \right) k_i^2(y) |W|^2 \, dy \right) + \operatorname{Im} \int_{V_i} k_e \overline{W} \nabla \left(\frac{\overline{\rho_i(y)}}{\rho_e} \right) \cdot \nabla W \, dy \end{aligned} \quad (2.14)$$

olur.

Kabul edelim ki

$$\operatorname{Im} k_e > 0 \quad (2.15)$$

$$\operatorname{Im} (k_e^3) < 0 \quad (2.16)$$

$$\operatorname{Im} \left[-k_e \left(\frac{\overline{\rho_i(x)}}{\rho_e} \right) k_i^2(x) \right] > 0, \quad x \in V_i \quad (2.17)$$

$$\int_{V_i} \operatorname{Im} \left[k_e \overline{W} \nabla \left(\frac{\overline{\rho_i(y)}}{\rho_e} \right) \cdot \nabla W \right] dy \geq 0 \quad (2.18)$$

eşitsizlikleri sağlansın. Bu durumda (Miranker, W.L., 1957) Rellich Lemmasından V_e de $|W|=|\nabla W|=0$ ve V_i de $|\nabla W|=0$ elde edilir. Böylece R^3 de $W \equiv 0$ olur.

2.1. Teorem: Kabul edelim ki Denklem (2.15)-Denklem (2.18) sağlasın. Bu durumda Denklem (2.6)-Denklem (2.9) saçılma probleminin çözümü sadece $W \equiv 0$ dır.

2.1. Sonuç: Denklem (2.1)-Denklem (2.5) saçılma probleminin bir tek çözümü vardır.

2.3. İntegral Gösterim

2.2. Teorem: R^3 de Helmholtz denkleminin bir temel çözümü

$$G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, \quad x \neq y \quad (2.19)$$

olsun. $u(x)$ Denklem (2.1)- Denklem (2.5) ile tanımlanan problemin bir çözümü ise, $\sigma(x)$, x noktasındaki katı açı (Mikhlin, S.G., 1970) ve

$$\alpha = \alpha(x) = \frac{\sigma(x)}{4\pi} \left(\frac{\rho_i(x)}{\rho_e} + 1 \right) \quad (2.20)$$

olmak üzere $u(x)$ aşağıdaki integral denklemi gerçekler.

$$\begin{aligned} & u^i(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} \rho_i(y) \nabla_y G(x, y) \nabla u(y) dy \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} \left[\nabla_y G(x, y) \nabla \rho_i(y) + \left\{ k_i^2(y) - k^2(1 + \rho_i(y)) \right\} G(x, y) \right] u(y) dy \\ & = \begin{cases} u(x) & ; \quad x \notin S \\ \alpha u^-(x) & ; \quad x \in S \end{cases} \end{aligned} \quad (2.21)$$

İspat: İspatı, üç adımda tamamlayacağız

a) $x \in \Omega$ olsun $G(x,y)$ fonksiyonu $x = y$ için bir singülerliğe sahiptir. Yeteri kadar küçük ε için $B_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^3 : |x-y| < \varepsilon\}$ yuvarını ve bu yuvarın sınırını ∂B_ε ile tanımlayalım. Ω bölgesine Green teoremini uygulayalım.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[u^s \nabla^2 G(x,y) - G(x,y) \nabla^2 u^s \right] dy &= \int_{\Sigma_R} \left(u^s \frac{\partial}{\partial n} G(x,y) - G(x,y) \frac{\partial u^s}{\partial n} \right) ds(y) \\ &+ \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u^s \frac{\partial}{\partial n} G(x,y) - G(x,y) \frac{\partial u^s}{\partial n} \right) ds(y) \\ &+ \int_S \left(u^{s^+} \frac{\partial}{\partial n} G(x,y) - G(x,y) \frac{\partial u^{s^+}}{\partial n} \right) ds(y) \end{aligned} \quad (2.22)$$

olur.

$x \in V_\varepsilon$ için $(\nabla^2 + k^2) u^s(x) = 0$ olduğundan Denklem (2.22) eşitliğinin sol tarafı sıfır olur. Ayrıca $u^s(x)$ ve $G(x,y)$ fonksiyonları Sommerfeld yayılma şartını sağladıklarından $R \rightarrow \infty$ için Σ_R yüzeyi üzerinden olan integral sıfır olur. Böylece

$$\int_S \left(u^{s^+} \frac{\partial}{\partial n} G(x,y) - G(x,y) \frac{\partial u^{s^+}}{\partial n} \right) ds(y) = - \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u^s \frac{\partial}{\partial n} G(x,y) - G(x,y) \frac{\partial u^s}{\partial n} \right) ds(y) \quad (2.23)$$

elde ederiz.

$\varepsilon \rightarrow 0$ için

$$- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u^s \frac{\partial}{\partial n} G(x, y) - G(x, y) \frac{\partial u^s}{\partial n} \right) ds(y) = 4\pi u^s(x)$$

elde edilir.

O halde $x \in V_\varepsilon$ için

$$u^s(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(u^{s^+}(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} G(x, y) - G(x, y) \frac{\partial u^{s^+}(y)}{\partial n} \right) ds(y) \quad (2.24)$$

elde ederiz.

b) $x \in V_i$ olsun. Bu durumda

$$0 = \int_S \left(u^{s^+} \frac{\partial}{\partial n} G(x, y) - G(x, y) \frac{\partial u^{s^+}}{\partial n} \right) ds(y) + \int_{\Sigma_R} \left(u^s \frac{\partial}{\partial n} G(x, y) - G(x, y) \frac{\partial u^s}{\partial n} \right) ds(y) \quad (2.25)$$

elde ederiz.

$R \rightarrow \infty$ için Denklem (2.25) eşitliğinin sol tarafındaki ikinci integral sıfır olacağından $x \in V_i$ için

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \left(u^{s^+}(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} G(x, y) - G(x, y) \frac{\partial u^{s^+}(y)}{\partial n} \right) ds(y) = 0 \quad (2.26)$$

olur.

c) $x \in S$ olsun. Bu durumda x noktasını merkez kabul eden ε yarıçaplı bir yuvar çizeriz. Bu yuvar için

$$\Sigma_\varepsilon = \{ y \in V_\varepsilon : |x - y| = \varepsilon \} \text{ ve } S_\varepsilon = \{ y \in S : |x - y| \leq \varepsilon \}$$

tanımlayalım ve $S'_\varepsilon = S \setminus S_\varepsilon$ diyelim. Bu durumda da Ω' yine S yüzeyini ve Σ_ε yüzeyini tamamen içine alan orijin merkezli R yarıçaplı küre ile $S'_\varepsilon \cup \Sigma_\varepsilon$ yüzeyi arasında kalan bölge olmak üzere,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \left(u^s \nabla^2 G(x, y) - G(x, y) \nabla^2 u^s \right) dy &= \int_{\Sigma_R} \left(u^s \frac{\partial}{\partial n} G(x, y) - G(x, y) \frac{\partial u^s}{\partial n} \right) ds(y) \\ &+ \int_{\Sigma_\varepsilon} \left(u^s \frac{\partial}{\partial n} G(x, y) - G(x, y) \frac{\partial u^s}{\partial n} \right) ds(y) \\ &+ \int_{S'_\varepsilon} \left(u^{s^+} \frac{\partial}{\partial n} G(x, y) - G(x, y) \frac{\partial u^{s^+}}{\partial n} \right) ds(y) \end{aligned} \quad (2.27)$$

olur.

Burada x noktasının, S nin düzgün bir parçası üzerinde yada S nin bir köşe noktası üzerinde olması gibi iki durum söz konusudur. Her iki durum için

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \left(u^{s^+}(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} G(x, y) - G(x, y) \frac{\partial u^{s^+}(y)}{\partial n} \right) ds(y) = \frac{\sigma(x)}{4\pi} u^s(x) \quad (2.28)$$

elde edilir.

(a), (b) ve (c) adımları birleştirildiğinde,

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \left(u^{s^+}(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} G(x, y) - G(x, y) \frac{\partial u^{s^+}(y)}{\partial n} \right) ds(y) = \begin{cases} u^s(x) & ; x \in V_e \\ \frac{\sigma(x)}{4\pi} u^s(x) & ; x \in S \\ 0 & ; x \in V_i \end{cases} \quad (2.29)$$

olur.

Benzer olarak V_i bölgesine Green teoremi uygulayarak

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \left(u^i(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} G(x,y) - G(x,y) \frac{\partial u^i(y)}{\partial n} \right) ds(y) = \begin{cases} 0 & ; x \in V_e \\ -\frac{4\pi - \sigma(x)}{4\pi} u^i(x) & ; x \in S \\ -u^i(x) & ; x \in V_i \end{cases} \quad (2.30)$$

elde ederiz.

Denklem (2.29) ve Denklem (2.30) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$u^i(x) + \frac{1}{4\pi} \int_S \left(u^+(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} G(x,y) - G(x,y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial n} \right) ds(y) = \begin{cases} u(x) & ; x \in V_e \\ \frac{\sigma(x)}{4\pi} u^+(x) & ; x \in S \\ 0 & ; x \in V_i \end{cases} \quad (2.31)$$

olur.

Yine Green formülleri yardımıyla ve Denklem (2.3) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_S \left(u^-(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} G(x,y) - G(x,y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial n} \right) ds(y) - \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} [k_i^2(y) - k^2] G(x,y) u(y) dy \\ & = \begin{cases} 0 & ; x \in V_e \\ -\frac{\sigma(x)}{4\pi} u^-(x) & ; x \in S \\ -u(x) & ; x \in V_i \end{cases} \quad (2.32) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Denklem (2.31) den Denklem (2.32)' yi çıkarır ve Denklem (2.4) sınır şartlarını kullanırsak,

$$\rho(x) = \frac{\rho_i(x)}{\rho_e} - 1 \quad (2.33)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} u^i(x) + \frac{1}{4\pi} \int_S \rho(y) u^-(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} G(x, y) ds(y) + \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} [k_i^2(y) - k^2] G(x, y) u(y) dy \\ = \begin{cases} u(x) & ; x \notin S \\ \alpha u^-(x) & ; x \in S \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

elde ederiz.

Ayrıca divergens teoreminden,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_S \rho(y) u^-(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} G(x, y) ds(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} [\rho(y) \nabla_y G(x, y) \nabla u(y) \\ + u(y) \{ \nabla_y G(x, y) \nabla \rho(y) - k^2 G(x, y) \rho(y) \}] dy \end{aligned} \quad (2.35)$$

olduğu görülür.

Eğer Denklem (2.35)' i Denklem (2.34) de yerine koyarsak $u(x)$ için

$$\begin{aligned} u^i(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} (\rho(y) \nabla_y G(x, y) \nabla u(y)) dy \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} [\nabla_y G(x, y) \nabla \rho(y) + \{k_i^2(y) - k^2(1 + \rho(y))\} G(x, y)] u(y) dy \\ = \begin{cases} u(x) & ; x \notin S \\ \alpha u^-(x) & ; x \in S \end{cases} \end{aligned}$$

integral gösterilimi elde edilir.

3. KOMPAKT OPERATÖRLER

$$C_p^1(\overline{V_i}) := \left\{ f : f \in C^1(\overline{V_i}), \quad \|\nabla f\| \leq P \|f\| \right\} \text{ olsun.}$$

$L_1 : C_p^1(\overline{V_i}) \rightarrow C(\overline{V_i})$ ve $L_2, L_3, L_4 : C(\overline{V_i}) \rightarrow C(\overline{V_i})$ operatörlerini aşağıda tanımlayalım.

$$(L_1 f)(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} \rho(y) \nabla_y G(x, y) \cdot \nabla f(y) dy \quad (3.1)$$

$$(L_2 f)(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} \nabla_y G(x, y) \cdot \nabla \rho(y) f(y) dy \quad (3.2)$$

$$(L_3 f)(x) := -\frac{1}{4\pi} \int_{V_i} k^2 \rho(y) G(x, y) f(y) dy \quad (3.3)$$

$$(L_4 f)(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} [k_i^2(y) - k^2] G(x, y) f(y) dy \quad (3.4)$$

Böylece Denklem (2.21) integral denklemini

$$u'(x) + (L_1 u)(x) + (L_2 u)(x) + (L_3 u)(x) + (L_4 u)(x) = \begin{cases} u(x) & ; x \notin S \\ \alpha u^-(x) & ; x \in S \end{cases} \quad (3.5)$$

yazabiliriz. Şimdi L_i ($i = 1, 2, 3, 4$) operatörlerinin kompaktlığını gösterelim.

3.1. Lemma: L_1 operatörü sürekli.

İspat: $x_1 \in V_i$ ve $0 < |h| < \frac{\delta}{2}$ olmak üzere $x = x_1 + h$ olsun.

$$|(L_1 f)(x_1 + h) - (L_1 f)(x)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{4\pi} \left| \int_{V_i} \rho(y) \nabla_y \left(\frac{e^{ik|x_1+h-y|}}{|x_1+h-y|} \right) \cdot \nabla f(y) dy - \int_{V_i} \rho(y) \nabla_y \left(\frac{e^{ik|x_1-y|}}{|x_1-y|} \right) \cdot \nabla f(y) dy \right| \\
&\leq \frac{P \|f\| \|\rho\|}{4\pi} \int_{V_i} \left| \nabla_y \left(\frac{e^{ik|x_1+h-y|}}{|x_1+h-y|} \right) - \nabla_y \left(\frac{e^{ik|x_1-y|}}{|x_1-y|} \right) \right| dy \\
&\leq \frac{P \|f\| \|\rho\|}{4\pi} \int_{V_i} \left| \frac{e^{ik|x_1+h-y|}}{|x_1+h-y|^2} \left\{ ik \overrightarrow{(y-(x_1+h))} - \frac{\overrightarrow{(y-(x_1+h))}}{|x_1+h-y|} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{ik|x_1-y|}}{|x_1-y|^2} \left\{ ik \overrightarrow{(y-x_1)} - \frac{\overrightarrow{(y-x_1)}}{|x_1-y|} \right\} \right| dy \tag{3.6}
\end{aligned}$$

olur.

$$\overrightarrow{A(t,y)} := e^{ik|t-y|} \left(ik \overrightarrow{(y-t)} - \frac{\overrightarrow{(y-t)}}{|y-t|} \right) \tag{3.7}$$

yi tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
|(L_1 f)(x_1+h) - (L_1 f)(x)| &\leq \frac{P \|f\| \|\rho\|}{4\pi} \int_{V_i} \left| \frac{\overrightarrow{A(x_1+h,y)}}{|x_1+h-y|^2} - \frac{\overrightarrow{A(x_1,y)}}{|x_1-y|^2} \right| dy \\
&\leq \frac{P \|f\| \|\rho\|}{4\pi} \left\{ \int_{|x_1-y| < \delta} \left| \frac{\overrightarrow{A(x_1+h,y)}}{|x_1+h-y|^2} - \frac{\overrightarrow{A(x_1,y)}}{|x_1-y|^2} \right| dy \right. \\
&\quad \left. + \int_{V_i \cap \{|x_1-y| \geq \delta\}} \left| \frac{\overrightarrow{A(x_1+h,y)}}{|x_1+h-y|^2} - \frac{\overrightarrow{A(x_1,y)}}{|x_1-y|^2} \right| dy \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{P \|f\| \| \rho \|}{4\pi} \left\{ \int_{|x_1-y|<\delta} \left(\frac{k}{|x_1+h-y|} + \frac{1}{|x_1+h-y|^2} + \frac{k}{|x_1-y|} + \frac{1}{|x_1-y|^2} \right) dy \right. \\
&\quad \left. + \int_{V_i \cap \{|x_1-y| \geq \delta\}} \left| \frac{\overrightarrow{A(x_1+h,y)}}{|x_1+h-y|^2} - \frac{\overrightarrow{A(x_1,y)}}{|x_1-y|^2} \right| dy \right\} \\
&\leq \frac{P \|f\| \| \rho \|}{4\pi} \left\{ \int_{|x_1-y|<\delta} \left(\frac{k}{|x_1+h-y|} + \frac{1}{|x_1+h-y|^2} \right) dy + \int_{|x_1-y|<\delta} \left(\frac{k}{|x_1-y|} + \frac{1}{|x_1-y|^2} \right) dy \right. \\
&\quad \left. + \int_{V_i \cap \{|x_1-y| \geq \delta\}} \left| \frac{\overrightarrow{A(x_1+h,y)}}{|x_1+h-y|^2} - \frac{\overrightarrow{A(x_1,y)}}{|x_1-y|^2} \right| dy \right\} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

olur.

$$I_1 := \int_{|x_1-y|<\delta} \left(\frac{k}{|x_1+h-y|} + \frac{1}{|x_1+h-y|^2} \right) dy \quad (3.9)$$

$$I_2 := \int_{|x_1-y|<\delta} \left(\frac{k}{|x_1-y|} + \frac{1}{|x_1-y|^2} \right) dy \quad (3.10)$$

olsun.

$$\Omega_1 := V_i \cap \{ |x_1-y| \geq \delta \} \quad (3.11)$$

tanımlayalım. $|x_1-y| < \delta$ yuvarında $|x_1+h-y| \leq |x_1-y| + |h| < 3/2 \delta$ olduğundan

$$I_1 = \int_{|x_1-y|<\delta} \left(\frac{k}{|x_1+h-y|} + \frac{1}{|x_1+h-y|^2} \right) dy$$

$$< \int_{|x_1+h-y|<\frac{3}{2}\delta} \left(\frac{k}{|x_1+h-y|} + \frac{1}{|x_1+h-y|^2} \right) dy = \frac{9k\pi}{2} \delta^2 + 6\pi\delta$$

olur. Böylece

$$I_1 < \left(\frac{9k\pi}{2} \delta + 6\pi \right) \delta \quad (3.12)$$

$$I_2 = \int_{|x_1-y|<\delta} \left(\frac{k}{|x_1-y|} + \frac{1}{|x_1-y|^2} \right) dy \leq (2\pi k\delta + 4\pi) \delta \quad (3.13)$$

elde edilir.

$\varepsilon > 0$ sayısını;

$$\frac{P \|f\| \|\rho\|}{4\pi} \left(\frac{13k\pi}{2} \delta + 10\pi \right) \delta < \frac{1}{2} \varepsilon \quad (3.14)$$

sağlanacak biçimde seçelim. Böylece Denklem (3.8) eşitsizliği

$$|(L_1 f)(x_1 + h) - (L_1 f)(x)| < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{P \|f\| \|\rho\|}{4\pi} \int_{\Omega_1} \left| \frac{\overrightarrow{A(x_1 + h, y)}}{|x_1 + h - y|^2} - \frac{\overrightarrow{A(x_1, y)}}{|x_1 - y|^2} \right| dy \quad (3.15)$$

olur.

δ yı sabitleyim. Ω_1 bölgesinde $|x_1 - y| \geq \delta$ sağlanır, dolayısıyla $\frac{\overrightarrow{A(x_1, y)}}{|x_1 - y|^2}$

fonksiyonu düzgün süreklidir. Bir h_0 keyfi küçük sayısı seçebiliriz, öyleki; $|h| < h_0$ olduğundan

$$\left| \frac{\overrightarrow{A(x_1 + h, y)}}{|x_1 + h - y|^2} - \frac{\overrightarrow{A(x_1, y)}}{|x_1 - y|^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2 \left(\frac{P \|f\| \|\rho\|}{4\pi} \right) |V_i|} \quad (3.16)$$

sağlanır (Mikhlin, S.G., 1970).

Burada $|V_i|$, V_i nin ölçüsüdür. Böylece Denklem (3.15) eşitsizliği

$$|(L_1 f)(x_1 + h) - (L_1 f)(x)| < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{\varepsilon |\Omega_1|}{2 \left(\frac{P \|f\| \|\rho\|}{4\pi} \right) |V_i|} < \varepsilon \quad (3.17)$$

olur. Burada $|\Omega_1|$, Ω_1 in ölçüsüdür. Denklem (3.17) eşitsizliği L_1 operatörünün sürekliliğini verir.

3.2. Lemma: L_2 operatörü kompakttır.

İspat: $R = |x - y|$ ve $\hat{R} = \frac{(x - y)}{|x - y|}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (L_2 f)(x) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} \left[\nabla_y \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right) \cdot \nabla \rho(y) \right] f(y) dy \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} \frac{(ikR - 1) e^{ikR} (\hat{R} \cdot \nabla \rho(y))}{R^2} f(y) dy \end{aligned} \quad (3.18)$$

olur.

$A(x, y) = (ikR - 1) e^{ikR} (\hat{R} \cdot \nabla \rho(y))$, $\overline{V_i} \times \overline{V_i}$ de ölçülebilir ve sınırlı olduğundan (Mikhlin, S.G., 1970) L_2 zayıf singüler bir operatördür. (Colton, D., Kress, R., 1983) dan dolayı L_2 , $C(\overline{V_i})$ üzerinde bir kompakt operatördür.

L_3 , L_4 zayıf singüler çekirdekli operatörlerdir, (Colton, D., Kress, R., 1983) dan dolayı L_3 ve L_4 $C(\overline{V_i})$ üzerinde kompakttır.

$$Tu = L_1u + L_2u + L_3u + L_4u \quad (3.19)$$

tanımı ile Denklem (3.5) integral denklemi $x \notin S$ için

$$u^i = (I - T) u \quad (3.20)$$

olur.

3.3. Lemma: L_1 operatörü $C_p^1(\overline{V_i})$ üzerinde sınırlıdır.

$$\begin{aligned} \text{İspat: } \|L_1 f\| &= \sup_{x \in V_i} |(L_1 f)(x)| = \sup_{x \in V_i} \left| \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} \rho(y) \nabla_y \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right) \cdot \nabla f(y) dy \right| \\ &\leq \frac{P \|f\| \|\rho\|}{4\pi} \int_{V_i} \left| \nabla_y \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right) \right| dy \leq P \|\rho\| H \left(\frac{kH}{2} + 1 \right) \|f\| \end{aligned}$$

olur. Yani, H , V_i nin çapı olmak üzere

$$\|L_1 f\| \leq P \|\rho\| H \left(\frac{kH}{2} + 1 \right) \|f\| \quad (3.21)$$

dır.

3.4. Lemma: L_2 operatörü sınırlıdır.

İspat: 3.3. Lemmanın adımları tekrarlanarak

$$\|L_2 f\| \leq \left[\|\nabla \rho\| H \left(\frac{kH}{2} + 1 \right) \right] \|f\| \quad (3.22)$$

olduğu görülür.

3.5. Lemma: L_3 operatörü sınırlıdır.

İspat: 3.3. Lemma ve 3.4. Lemma daki adımlar tekrarlanarak

$$\|L_3 f\| \leq \left(\frac{k^2 H^2 \|\rho\|}{4\pi} \right) \|f\| \quad (3.23)$$

elde edilir.

3.6. Lemma: L_4 operatörü sınırlıdır.

İspat: $M = \max_{x \in V_i} |k_i^2(x) - k^2|$

olmak üzere bir önceki Lemmanın yöntemi kullanılarak

$$\|L_4 f\| \leq \left(\frac{M^2 H^2}{4\pi} \right) \|f\| \quad (3.24)$$

olduğunu buluruz.

3.1. Teorem: Denklem (3.19) eşitliği ile tanımlanan T operatörü $C_p^1(\overline{V_i})$ üzerinde sınırlıdır.

İspat: $\|Tf\| = \sup_{x \in V_i} |(Tf)(x)| \leq \|L_1 f\| + \|L_2 f\| + \|L_3 f\| + \|L_4 f\| \quad (3.25)$

Denklem (3.21)-Denklem (3.24) eşitsizliklerinden

$$C := H \left(\frac{kH}{2} + 1 \right) (P \|\rho\| + \|\nabla \rho\|) + \frac{H^2}{4\pi} (M + k^2 \|\rho\|) \quad (3.26)$$

olmak üzere

$$\|Tf\| \leq C \|f\| \quad (3.27)$$

elde edilir.

$$\text{Yeteri kadar küçük } \|\rho\| = \left\| \frac{\rho_i(x)}{\rho_e} - 1 \right\|, M \text{ ve } \|\nabla \rho\| = \left\| \nabla \left(\frac{\rho_i(x)}{\rho_e} - 1 \right) \right\| \text{ için } C < 1$$

yapılabilir ve T operatörü bir daralma operatörü olur. Dolayısıyla Denklem (3.20) denklemini Neumann serisine açılabilir ve

$$\sum_{j=0}^{\infty} T^j u^i = u \quad (3.28)$$

elde edilir.

4. HOMOGEN OLMAYAN BİR ORTAMDA YAYILAN ZAMAN HARMONİK DÜZLEMSEL SES DALGALARI İÇİN FAR-FIELD PATTERN FONKSİYONLARI

4.1. Problemin Ortaya Konması

$D \subset \mathbb{R}^3$ homogen olmayan, basit irtibatlı bir bölge olsun. D nin ∂D sınırı, $\mathbb{R}^3$ ü biri sınırlı diğeri sınırsız iki bölgeye ayırsın. $\bar{n}$ ile ∂D nin birim dış normalini gösterelim.

D nin absorption (geçirgenlik) katsayısı $a \geq 0$ olsun. D deki lokal ses hızı, $c(x) > 0$, $x \in \bar{D}$ sürekli diferensiyellenebilir bir fonksyon olsun. $x \in \bar{D}$, $\rho_i(x) > 0$, $\rho_i(x) \in C^1$ olsun. $\rho_i(x)$ D nin yoğunluk fonksyonu olsun. $\rho_e > 0$ ve $c_0 > 0$ sabitleri $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ de sırasıyla yoğunluğu ve ses hızını gösterebilir.

$\omega > 0$ frekans, $k = \omega/c_0$ dalga sayısı olsun. $u^i(x) = \exp(i k x \cdot \alpha)$, $\alpha (|\alpha| = 1)$ doğrultusunda yayılan başlangıç gelen dalgası (incident wave) verilmiş olsun.

$\kappa^2 = \omega(\omega + ia)/c_0^2$, $n(x) = (c_0/c(x))^2$ ve Δ Laplasien olmak üzere;

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_e + \kappa^2 u_e &= 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \\ \Delta u_i + \kappa^2 n(x) u_i &= 0, & x \in D \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_e u_e - \zeta_i(x) u_i(x) &= 0, & x \in \partial D \\ \frac{\partial u_e}{\partial n} - \frac{\partial u_i}{\partial n} &= 0, & x \in \partial D \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

olacak şekilde $u_e \in C^2(R^3 \setminus \overline{D}) \cap C^1(R^3 \setminus D)$, $u_i \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ fonksiyonlarının belirlenmesi homogen olmayan bir ortamda zaman-harmonik düzlemsel ses dalgaları, probleminin matematiksel modelidir.

$x \in R^3 \setminus D$ için $u_e(x) = \exp(i k x \cdot \alpha) + u^s(x) = u^i(x) + u^s(x)$ dir ve $u^s(x)$ her $\hat{x} = x/|x|$ doğrultusunda düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i k u^s \right) = 0, \quad r = |x| \quad (4.3)$$

Sommerfeld yayılma şartını sağlar. Denklem (4.2) denkleminde $\zeta_e = -i\omega\rho_e$, $\zeta_i(x) = (a-i\omega)\rho_i(x)$, $i = \sqrt{-1}$ dir. $\rho_i(x) = \rho_i = \text{sabit}$ olması halinde Denklem (4.1)-Denklem (4.3) saçılım problemi, problemin çözümünün varlığı ve tekliği Werner (Werner, P., vol.6, 1963; Werner, P., vol.12, 1963) tarafından gösterilmiştir.

4.2. Far-Field Pattern Fonksiyonu

$\Delta u + k^2 u = 0$ Helmholtz denkleminin bir temel çözümü

$$\Phi(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, \quad x \neq y \quad (4.4)$$

dir. Eğer $R^3 \setminus \overline{D}$ bölgesine ikinci Green teoremini uygularsak

$$u^s(x) = - \int_{\partial D} \left[u^s(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \Phi(x,y) - \Phi(x,y) \frac{\partial u^s(y)}{\partial n} \right] ds(y), \quad x \in R^3 \setminus \overline{D} \quad (4.5)$$

elde ederiz. Benzer olarak $x \in R^3 \setminus \overline{D}$ için

$$0 = \int_{\partial D} \left[u^i(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \Phi(x, y) - \Phi(x, y) \frac{\partial u^i(y)}{\partial n} \right] ds(y), \quad x \in R^3 \setminus \overline{D} \quad (4.6)$$

elde ederiz.

Denklem (4.5) den Denklem (4.6) yı çıkarırsak $x \in R^3 \setminus \overline{D}$ için

$$u^s(x) = - \int_{\partial D} \left[u_e(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \Phi(x, y) - \Phi(x, y) \frac{\partial u_e(y)}{\partial n} \right] ds(y), \quad x \in R^3 \setminus \overline{D} \quad (4.7)$$

elde ederiz.

$|x| \rightarrow \infty$ için aşağıdaki asimptotik açılımları kullanalım (Colton, D., Kress, R., 1992)

$$\begin{aligned} |x-y| &= \sqrt{|x|^2 - 2xy + |y|^2} = |x| - \hat{x} \cdot y + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ \left. \begin{aligned} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ e^{-ik\hat{x} \cdot y} + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty \\ \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{-ik\hat{x} \cdot y} + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (4.8) \end{aligned}$$

olur.

Böylece $|x| \rightarrow \infty$ için Denklem (4.7) saçılan dalga fonksiyonu

$$u^s(x) = \frac{e^{ik \cdot x}}{|x|} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u_e(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{-ik \cdot \hat{x}y} - e^{-ik \cdot \hat{x}y} \frac{\partial u_e(y)}{\partial n} \right] ds(y) \right\} + o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \quad (4.9)$$

elde edilir.

$$F(\hat{x}; k, \alpha) := \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u_e(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{-ik \cdot \hat{x}y} - e^{-ik \cdot \hat{x}y} \frac{\partial u_e(y)}{\partial n} \right] ds(y) \quad (4.10)$$

tanımlarsak $u^s(x)$ için

$$u^s(x) = \frac{e^{ik \cdot x}}{|x|} F(\hat{x}; k, \alpha) + o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \quad (4.11)$$

gösterilimini elde ederiz.

$F(\hat{x}; k, \alpha)$ fonksiyonuna $u^i(x) = \exp(ik \cdot x - \alpha)$ başlangıç alanına karşılık gelen saçılan alanın “far-field pattern” fonksiyonu denir.

4.1. Tanım: ω_i , $i = 1, 2, 3, \dots, P$ farklı frekanslar, α_i , $i = 1, 2, 3, \dots, Q$ farklı doğrultular ve $x \in \partial\Omega = \{x : |x| = 1\}$ olmak üzere bunlara karşılık gelen $F(\hat{x}; k, \alpha)$ mn verilmesi halinde ∂D ve $n(x)$ bilinmeyenlerinin belirlenmesi problemine “ters saçılma problemi” denir.

$$g \in L^2(\partial\Omega) \quad \text{olsun.}$$

$$\int_{\partial\Omega} F(\hat{x}; k, \alpha) \overline{g(\hat{x})} ds(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u_e(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \overline{\int_{\partial\Omega} g(\hat{x}) e^{ik\hat{x}y} ds(\hat{x})} - \overline{\left(\int_{\partial\Omega} g(\hat{x}) e^{ik\hat{x}y} ds(\hat{x}) \right)} \frac{\partial u_e(y)}{\partial n} \right] ds(y) \quad (4.12)$$

elde ederiz.

$$V(y; k) := \int_{\partial\Omega} g(\hat{x}) e^{ik\hat{x}y} ds(\hat{x}) \quad (4.13)$$

tanımlarsak Denklem (4.12)

$$\int_{\partial\Omega} F(\hat{x}; k, \alpha) \overline{g(\hat{x})} ds(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u_e(y) \frac{\partial \overline{V(y; k)}}{\partial n(y)} - \overline{V(y; k)} \frac{\partial u_e(y)}{\partial n} \right] ds(y) \quad (4.14)$$

olur.

$V(y; k)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ de $\Delta V + k^2 V = 0$ Helmholtz denklemini sağlar. $V(y; k)$ fonksiyonuna Herglotz dalga fonksiyonu (Colton, D., Kress, R., 1983) ve g ye de V Herglotz dalga fonksiyonunun Herglotz çekirdeği denir.

α_n . $n = 1, 2, 3, \dots$ farklı doğrultulara karşılık gelen $F(\hat{x}; k, \alpha_n)$ far-field pattern fonksiyonlarının kümesini

$$\mathfrak{F} = \{ F(\hat{x}; k, \alpha_n) : n = 1, 2, \dots \} \quad (4.16)$$

ile göstereyim.

Bu durumda $\mathfrak{I}$ nin elemanlarını $\hat{x}$ nın bir fonksiyonu olarak düşündüğümüzde $\mathfrak{I}, L^2(\partial\Omega)$ nın bir alt kümesi olur (Royden, H.L., 1988) den

$$L^2(\partial\Omega) = \overline{\text{span } \mathfrak{I}} \oplus \mathfrak{I}^\perp$$

yazabiliriz. Burada $\mathfrak{I}^\perp, \mathfrak{I}$ nin ortogonal uzayıdır.

Şimdi $\mathfrak{I}^\perp$ i karakterize etmek için aşağıdaki iç transmission problemini ele alalım.

Kabul edelimki bir aşıkır olmayan V Herglotz wave fonksiyonu ve bir $W \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ fonksiyonu var olsun. Öyleki $\{V, W\}$ çifti

$$\left. \begin{aligned} \Delta V + k^2 V &= 0, \quad x \in D \\ \Delta W + \kappa^2 n(x)W &= 0, \quad x \in D \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_i(x)W &= \zeta_e V, \quad x \in \partial D \\ \frac{\partial W}{\partial n} &= \frac{\partial V}{\partial n}, \quad x \in \partial D \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

sınır değer probleminin çözümü olsun. Bu durumda Denklem (4.15)

$$\int_{\partial\Omega} F(\hat{x}; k, \alpha) \overline{g(\hat{x})} ds(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi\rho_e} \int_{\partial D} \rho_i(y) \left[u_i(y) \frac{\partial \overline{W(y)}}{\partial n} - \overline{W(y)} \frac{\partial u_i(y)}{\partial n} \right] ds(y) \quad (4.20)$$

olur.

Eğer Denklem (4.20) eşitliğinin sağ tarafına birinci Green özdeşliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial D} \rho_i(y) \left[u_i(y) \frac{\partial \overline{W(y)}}{\partial n} - \overline{W(y)} \frac{\partial u_i(y)}{\partial n} \right] ds(y) \\
&= \int_D \nabla \rho_i(y) \left(u_i(y) \nabla \overline{W(y)} - \overline{W(y)} \nabla u_i(y) \right) dy
\end{aligned} \tag{4.21}$$

elde ederiz.

4.1. Sonuç: Kabul edelim ki V bir Herglotz wave fonksiyonu ve $W \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ olmak üzere $\{V, W\}$ çifti Denklem (4.18) ve Denklem (4.19) probleminin aşikar olmayan çözümleri olsunlar.

$$\int_D \nabla \rho_i(y) \left(u_i(y) \nabla \overline{W(y)} - \overline{W(y)} \nabla u_i(y) \right) dy \neq 0 \tag{4.22}$$

ise, bu durumda Herglotz dalga fonksiyonunun çekirdeği $g, \mathfrak{I}$ ye dik (ortogonal) olamaz.

4.2. Tanım: k (veya ω) öyle olsun ki Denklem (4.18) ve Denklem (4.19) probleminin aşikar olmayan çözümü mevcut olsun. Bu durumda k (veya ω) sayısına transmission eigen değer denir.

4.1. Teorem: Kabul edelimki

$$\operatorname{Im} \overline{\zeta_e} \zeta_i(x) > 0, \operatorname{Im} \overline{\zeta_e \kappa^2} \zeta_i(x) \leq 0 \tag{4.23}$$

ve $W \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ için

$$\operatorname{Im} \left(\overline{\zeta_e} \int_D W(y) \nabla \zeta_i(y) \cdot \nabla \overline{W(y)} dy \right) \geq 0 \tag{4.24}$$

olsun. Bu durumda k (veya ω) bir transmission eigen değeri değildir.

İspat: Green teoreminden

$$\int_{\partial D} V(y; k) \frac{\partial \overline{V(y; k)}}{\partial n(y)} ds(y) = \int_D |\nabla V(y; k)|^2 dy - k^2 \int_D |V(y; k)|^2 dy \quad (4.25)$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \zeta_i(y) W(y; k) \frac{\partial \overline{W(y; k)}}{\partial n(y)} ds(y) &= \int_D \zeta_i(y) |\nabla W(y; k)|^2 dy + \int_D W(y) \nabla \zeta_i(y) \nabla \overline{W(y)} dy \\ &\quad - \kappa^2 \int_D n(y) \zeta_i(y) |\nabla W(y; k)|^2 dy \end{aligned} \quad (4.26)$$

yazabiliriz.

Denklem (4.25) eşitliğinin her iki tarafının imajiner kısmını alırsak

$$0 = \text{Im} \left(\int_{\partial D} V(y; k) \frac{\partial \overline{V(y; k)}}{\partial n(y)} ds(y) \right) \quad (4.27)$$

elde ederiz. Denklem (4.27) de Denklem (4.19) sınır şartlarını kullanırsak

$$0 = \text{Im} \left(\overline{\zeta_e} \int_{\partial D} \zeta_i(y) W(y; k) \frac{\partial \overline{W(y; k)}}{\partial n(y)} ds(y) \right) \quad (4.28)$$

elde ederiz.

Denklem (4.26) eşitliğinin her iki tarafının $\overline{\zeta_e}$ ile çarpıp sonra iki tarafın imajiner kısmını alırsak

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im} \left(\overline{\zeta_e} \int_{\partial D} \zeta_i(y) W(y; k) \frac{\partial \overline{W(y; k)}}{\partial n(y)} ds(y) \right) = \operatorname{Im} \left(\overline{\zeta_e} \int_D \zeta_i(y) |\nabla W(y; k)|^2 dy \right) \\
& + \operatorname{Im} \left(\overline{\zeta_e} \int_D W(y) \nabla \zeta_i(y) \nabla \overline{W(y)} dy \right) - \operatorname{Im} \left(\overline{\kappa^2 \zeta_e} \int_D n(y) \zeta_i(y) |W(y; k)|^2 dy \right) \quad (4.29)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Denklem (4.28) den dolayı Denklem (4.29) un sol tarafı sıfır olur. Denklem (4.23) ve Denklem (4.24) hipotezlerinden dolayı W nin bir sabit olması gerektiğini buluruz. Denklem (4.18) den dolayı bu sabit sıfırdır. Böylece $W = V = 0$ elde ederiz. Yani, k (veya ω) bir transmission eigen değeri değildir.

Burada hemen belirtelim ki fizik problemlerinde karşımıza çıkan $\zeta_e = -i\omega\rho_e$, $\zeta_i(x) = (a-i\omega)\rho_i(x)$ nicelikleri için $\operatorname{Im} \overline{\zeta_e} \zeta_i(x) = \omega a \rho_e \rho_i(x)$ ve

$$\operatorname{Im} \overline{\kappa^2 \zeta_e} \zeta_i(x) = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{c_0^2} (a\omega^2 + \omega^4) \rho_e \rho_i(x) \right] = 0 \quad \text{dır.}$$

Bu nedenle, eğer $a > 0$ ve $W \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ fonksiyonu Denklem (4.24) eşitsizliğini sağlıyorsa k (veya ω) bir transmission eigen değeri olamaz. Böylece $a > 0$ ve $W \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ Denklem (4.18) ve Denklem (4.24) ü gerçekleştiriyorsa $L^2(\partial\Omega) = \overline{\operatorname{span} \mathfrak{I}}$ olur.

4.1. Lemma: $F(\hat{x}; k, \alpha)$, $u^i(x) = \exp(ikx \cdot \alpha)$ ye karşılık gelen far-field pattern fonksiyonu olsun. Bu durumda $F(\hat{x}; k, \alpha) = F(-\alpha; k, -\hat{x})$ olur.

İspat: u^i ye karşılık gelen far-field fonksiyonu

$$F(\hat{x}; k, \alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u_e(y; k, \alpha) \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{-ik\hat{x}y} - e^{-ik\hat{x}y} \frac{\partial u_e(y; k, \alpha)}{\partial n(y)} \right] ds(y)$$

olduğunu Denklem (4.10) dan biliyoruz.

$u_e(x; k, \alpha) = u^i(x; k, \alpha) + u^s(x; k, \alpha)$ olduğundan

$$\begin{aligned} F(\hat{x}; k, \alpha) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[e^{iky\alpha} \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{-ik\hat{x}y} - e^{-ik\hat{x}y} \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{iky\alpha} \right] ds(y) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u^s(y; k, \alpha) \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{-ik\hat{x}y} - e^{-ik\hat{x}y} \frac{\partial u^s(y; k, \alpha)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \end{aligned} \quad (4.30)$$

yazarız.

Green teoreminden dolayı Denklem (4.30) un sağ tarafındaki ilk integral sıfır olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} F(\hat{x}; k, \alpha) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u^s(y; k, \alpha) \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{-ik\hat{x}y} - e^{-ik\hat{x}y} \frac{\partial u^s(y; k, \alpha)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u^s(y; k, \alpha) \frac{\partial}{\partial n(y)} u^i(y; k, -\alpha) - u^i(y; k, -\alpha) \frac{\partial u^s(y; k, \alpha)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \end{aligned} \quad (4.31)$$

olur. Denklem (4.31) de

$u^i(x;k,-\hat{x}) = u_e(x;k,-\hat{x}) - u^s(x;k,-\hat{x})$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} F(\hat{x};k,\alpha) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u^s(y;k,\alpha) \frac{\partial}{\partial n(y)} u_e(y;k,-\hat{x}) - u_e(y;k,-\hat{x}) \frac{\partial u^s(y;k,\alpha)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u^s(y;k,\alpha) \frac{\partial}{\partial n(y)} u^s(y;k,-\hat{x}) - u^s(y;k,-\hat{x}) \frac{\partial u^s(y;k,\alpha)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \quad (4.32) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Denklem (4.32) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci integrale Green teoremini uygularsak sıfır olduğunu görürüz. Bu durumda Denklem (4.32) eşitliği

$$F(\hat{x};k,\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u^s(y;k,\alpha) \frac{\partial}{\partial n(y)} u_e(y;k,-\hat{x}) - u_e(y;k,-\hat{x}) \frac{\partial u^s(y;k,\alpha)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \quad (4.33)$$

halini alır. Denklem (4.33) de

$u^s(x;k,\alpha) = u_e(x;k,\alpha) - u^i(x;k,\alpha)$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} F(\hat{x};k,\alpha) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u_e(y;k,\alpha) \frac{\partial}{\partial n(y)} u_e(y;k,-\hat{x}) - u_e(y;k,-\hat{x}) \frac{\partial u_e(y;k,\alpha)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u^i(y;k,\alpha) \frac{\partial}{\partial n(y)} u_e(y;k,-\hat{x}) - u_e(y;k,-\hat{x}) \frac{\partial u^i(y;k,\alpha)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \quad (4.34) \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz.

Green teoreminden dolayı Denklem (4.34) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk integral sıfırdır. Buradan

$$\begin{aligned}
 F(\hat{x}; k, \alpha) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u^i(y; k, \alpha) \frac{\partial}{\partial n(y)} u_e(y; k, -\hat{x}) - u_e(y; k, -\hat{x}) \frac{\partial u^i(y; k, \alpha)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[e^{iky\alpha} \frac{\partial}{\partial n(y)} u_e(y; k, -\hat{x}) - u_e(y; k, -\hat{x}) \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{iky\alpha} \right] ds(y) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u_e(y; k, -\hat{x}) \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{-iky(-\alpha)} - e^{-iky(-\alpha)} \frac{\partial u_e(y; k, -\hat{x})}{\partial n(y)} \right] ds(y) \\
 &= F(-\alpha; k, -\hat{x})
 \end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi bir düzlem dalga olan

$$W^i(x) = \int_{\partial\Omega} e^{ikx\alpha} g(\alpha) ds(\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (4.35)$$

yi ele alalım. Yani, gelen dalga bir Herglotz dalga fonksiyonu olsun.

$$\begin{aligned}
 W^i(x) &= \int_{\partial\Omega} u^i(x; k, \alpha) g(\alpha) ds(\alpha) \\
 &= \int_{\partial\Omega} u_e(x; k, \alpha) g(\alpha) ds(\alpha) - \int_{\partial\Omega} u^s(x; k, \alpha) g(\alpha) ds(\alpha)
 \end{aligned}$$

olur. Aşağıdaki tanımlamaları yapalım.

$$W(x) := \int_{\partial\Omega} u_e(x; k, \alpha) g(\alpha) ds(\alpha)$$

$$W^s(x) := \int_{\partial\Omega} u^s(x; k, \alpha) g(\alpha) ds(\alpha) \quad (4.36)$$

Bu durumda

$$\Delta W + k^2 W = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D} \quad (4.37)$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial W^s}{\partial r} - i k W^s \right) = 0, \quad r = |x| \quad (4.38)$$

gerçeklenir. Denklem (4.11) i Denklem (4.36) da yerine yazarsak

$$W^s(x) = \frac{e^{ikr}}{r} \int_{\partial\Omega} F(\hat{x}; k, \alpha) g(\alpha) ds(\alpha) + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (4.39)$$

elde ederiz. Böylece W^i ye karşılık gelen W^s saçılma alanının far-field pattern fonksiyonu

$$\int_{\partial\Omega} F(\hat{x}; k, \alpha) g(\alpha) ds(\alpha) \quad (4.40)$$

olur.

4.2. Lemma: $\mathfrak{I}$ nin ortogonal tümleyeninde öyle $W \in C^2(D) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$,

$W = W^i + W^s$ ve V Herglotz dalga fonksiyonları vardır ki

$$\left. \begin{aligned} \Delta W + k^2 W &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D} \\ \Delta V + k^2 V &= 0, \quad x \in D \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

$$\left. \begin{aligned} V &= W, & x &\in \partial D \\ \frac{\partial V}{\partial n} &= \frac{\partial W}{\partial n}, & x &\in \partial D \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial W^s}{\partial r} - i k W^s \right) = 0 \quad (4.43)$$

transmission problemini çözerler.

İspat: $h \in \mathfrak{I}^\perp$ olsun

$$\int_{\partial \Omega} F(\hat{x}; k, \alpha) \overline{h(\hat{x})} ds(\hat{x}) = 0 \quad (4.44)$$

olur. 4.1. Lemma dan her $\alpha \in \partial \Omega$ için

$$\int_{\partial \Omega} F(-\alpha; k, -\hat{x}) \overline{h(\hat{x})} ds(\hat{x}) = 0 \quad (4.45)$$

olur. Her $\hat{x} \in \partial \Omega$ için

$$\int_{\partial \Omega} F(\hat{x}; k, \alpha) \overline{h(-\alpha)} ds(\alpha) = 0 \quad (4.46)$$

dir. Denklem (4.46) eşitliğinin sol tarafı $g(\alpha) = \overline{h(-\alpha)} \in L^2(\partial \Omega)$ için $W^i(x)$ başlangıç alanına karşılık gelen W^s saçılma alanının far-field pattern fonksiyonudur. Fakat Denklem (4.46) dan W^s in far-field pattern fonksiyonu sıfır olur (Colton, D., Kress, R., 1983, Corollary 3.9) dan $R^3 \setminus \overline{D}$ de $W^s = 0$ olur. Böylece $x \in R^3 \setminus \overline{D}$ için $W = W^i = V$ olur. Dolayısıyla ∂D üzerinde $W = W^i$ ve $\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n}$ gerçekleşir.

4.3. Lemma: $x \in D$ için $a > 0$ ve

$$I_m \left(\kappa^2 W \nabla \rho_i(x) \nabla \overline{W(x)} \right) > 0 \quad (4.47)$$

ise k (veya ω) Denklem (4.18) Denklem (4.19) eigen değer problemi için bir transmission eigen değer değildir.

İspat: Green teoreminden

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_D \left(\nabla \nabla^2 \bar{V} - \bar{\nabla} \nabla^2 V \right) dy = \int_{\partial D} \left(V \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} - \bar{V} \frac{\partial V}{\partial n} \right) ds(y) \\
 &= \int_{\partial D} \left[\frac{\zeta_i(y)}{\zeta_e} W(y) \frac{\partial \bar{W}(y)}{\partial n} - \left(\frac{\zeta_i(y)}{\zeta_e} \right) \overline{W(y)} \frac{\partial W(y)}{\partial n} \right] ds(y) \\
 &= \frac{1}{\rho_e} \int_{\partial D} \rho_i(y) \left[\left(1 + i \frac{a}{\omega} \right) W(y) \frac{\partial \bar{W}(y)}{\partial n} - \left(1 - i \frac{a}{\omega} \right) \overline{W(y)} \frac{\partial W(y)}{\partial n} \right] ds(y) \\
 &= \frac{1}{\rho_e} \int_{\partial D} \rho_i(y) 2 \operatorname{Im} \left\{ \left(1 + i \frac{a}{\omega} \right) W(y) \frac{\partial \bar{W}(y)}{\partial n} \right\} ds(y)
 \end{aligned}$$

yazabiliriz.

$\rho_i(x) \in C^1(\bar{D})$ ve $\rho_i(x) > 0$ olduğundan

$$0 = \operatorname{Im} \left\{ \left(1 + i \frac{a}{\omega} \right) \int_{\partial D} \rho_i(y) W(y) \frac{\partial \bar{W}(y)}{\partial n} ds(y) \right\} \quad (4.48)$$

olur. Green özdeşliğinden

$$\begin{aligned}
 0 &= \operatorname{Im} \left\{ \left(1 + i \frac{a}{\omega} \right) \int_D \left[\rho_i(y) W(y) \nabla^2 \bar{W}(y) + \nabla \left(\rho_i(y) W(y) \nabla \bar{W}(y) \right) \right] dy \right\} \\
 &= \operatorname{Im} \int_D \left(1 + i \frac{a}{\omega} \right) \left(\kappa^2 n(y) \right) \rho_i(y) |W(y)|^2 dy \\
 &\quad + \operatorname{Im} \int_D \left(1 + i \frac{a}{\omega} \right) \rho_i(y) |\nabla W(y)|^2 dy + \operatorname{Im} \int_D \left(1 + i \frac{a}{\omega} \right) W(y) \nabla \rho_i(y) \nabla \bar{W}(y) dy \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\operatorname{Im} \left(1 + i \frac{a}{\omega} \right) \overline{\left(\kappa^2 n(x) \right)} = \operatorname{Im} \left[-\frac{1}{c(x)^2} (\omega^2 + a^2) \right] = 0$$

ve

$$\operatorname{Im} \int_D \left(1 + i \frac{a}{\omega} \right) \rho_i(y) |\nabla W(y)|^2 dy = \frac{a}{\omega} \int_D \rho_i(y) |\nabla W(y)|^2 dy \geq 0$$

dır.

$$\frac{\kappa^2}{k^2} = 1 + i \frac{a}{\omega} \text{ olduğundan}$$

$$\operatorname{Im} \int_D \left(1 + i \frac{a}{\omega} \right) W(y) \nabla \rho_i(y) \nabla \overline{W(y)} dy = \frac{1}{k^2} \operatorname{Im} \int_D \kappa^2 W(y) \nabla \rho_i(y) \nabla \overline{W(y)} dy$$

elde ederiz. Denklem (4.47) şartından dolayı bu integral pozitifdir. Böylece Denklem (4.49) un sağ yanı pozitif terimlerin toplamıdır. O halde D de $V = W = 0$ olur. Yani, $\{V, W\}$ Denklem (4.18) Denklem (4.19) problemi için bir eigen değer fonksiyon çifti değildir.

4.3. İç Transmission Problemi

$a = 0$ olması halinde aşağıdaki iç transmission problemi tanımlayalım.

$$\left. \begin{aligned} \Delta V + k^2 V &= 0, \quad x \in D \\ \Delta W + k^2 n(x) W &= 0, \quad x \in D \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_e V - \rho_i(x)W &= \rho_e \frac{e^{ikr}}{r}, & x \in \partial D \\ \frac{\partial}{\partial n}(V - W) &= \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r}, & x \in \partial D \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

Eğer $V \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, $W \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ Denklem (4.50) Denklem (4.51) probleminin bir çözümü ise ve özel olarak V fonksiyonu $g \in L^2(\partial\Omega)$ Herglotz çekirdekli bir Herglotz dalga fonksiyonu ise Denklem (4.15) i ve Denklem (4.51) sınır şartını kullanarak

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F(\hat{x}; k, \alpha) \overline{g(\hat{x})} ds(\hat{x}) &= \frac{1}{4\pi\rho_e} \int_{\partial D} \left[\rho_i(y) u_i(y) \frac{\partial \overline{V(y)}}{\partial n} - \rho_e \overline{V(y)} \frac{\partial u_i(y)}{\partial n} \right] ds(y) \\ &= \frac{1}{4\pi\rho_e} \int_{\partial D} \rho_i(y) \left[u_i(y) \frac{\partial \overline{W(y)}}{\partial n} - \overline{W(y)} \frac{\partial u_i(y)}{\partial n} \right] ds(y) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[\frac{\rho_i(y)}{\rho_e} u_i(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial u_i(y)}{\partial n} \right] ds(y) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F(\hat{x}; k, \alpha) \overline{g(\hat{x})} ds(\hat{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \rho_i(y) \left[u_i(y) \frac{\partial \overline{W(y)}}{\partial n} - \overline{W(y)} \frac{\partial u_i(y)}{\partial n} \right] ds(y) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u_e(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial u_e(y)}{\partial n} \right] ds(y) \end{aligned} \quad (4.52)$$

olur.

Denklem (4.52) eşitliğinin ikinci tarafındaki ikinci integrali ele alır ve $u_e = u^s + u^i = u^s(x) + e^{ikx\alpha}$ olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left[u_e(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial u_e(y)}{\partial n} \right] ds(y) &= \int_{\partial D} \left[e^{ik\alpha y} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial n} e^{ik\alpha y} \right] ds(y) \\ &+ \int_{\partial D} \left[u^s(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial u^s(y)}{\partial n} \right] ds(y) \end{aligned} \quad (4.53)$$

olur. Ayrıca Denklem (4.53) ün ikinci tarafındaki ikinci integrale $R^3 \setminus \overline{D}$ de Green teoremi uygulanırsa

$$\int_{\partial D} \left[u^s(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial u^s(y)}{\partial n} \right] ds(y) = 0 \quad (4.54)$$

elde ederiz. Böylece Denklem (4.52)

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega} F(\hat{x}; k, \alpha) \overline{g(\hat{x})} ds(\hat{x}) &= \frac{1}{4\pi\rho_e} \int_{\partial D} \rho_i(y) \left[u_i(y) \frac{\partial \overline{W(y)}}{\partial n} - \overline{W(y)} \frac{\partial u_i(y)}{\partial n} \right] ds(y) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[e^{ik\alpha y} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial n} e^{ik\alpha y} \right] ds(y) \end{aligned} \quad (4.55)$$

olur. Denklem (4.55) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci integrale D bölgesinde Green teoremi uygulanırsa

$$\int_{\partial D} \left[e^{ik\alpha y} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial n} e^{ik\alpha y} \right] ds(y) = 4\pi \quad (4.56)$$

elde ederiz. Denklem (4.56) nın bu değeri Denklem (4.55) de yerine yazılırsa

$$\int_{\partial \Omega} F(\hat{x}; k, \alpha) \overline{g(\hat{x})} ds(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi\rho_e} \int_{\partial D} \rho_i(y) \left[u_i(y) \frac{\partial \overline{W(y)}}{\partial n} - \overline{W(y)} \frac{\partial u_i(y)}{\partial n} \right] ds(y) + 1 \quad (4.57)$$

elde ederiz. Bu incelemelerden sonra, şimdi aşağıdaki lemmayı verelim.

4.4. Lemma: V, W fonksiyonları Denklem (4.50) Denklem (4.51) probleminin bir çözümü ise V ye $C^1(\bar{D})$ de bir Herglotz dalga fonksiyonu tarafından yaklaşılabılır.

Yani, $\forall \varepsilon > 0$ için bir $g_\varepsilon \in L^2(\partial\Omega)$ Herglotz çekirdeği vardır, öyleki

$$\left| \int_{\partial\Omega} F(\hat{x}; k, \alpha) \overline{g_\varepsilon(\hat{x})} ds(\hat{x}) - \left\{ \frac{1}{4\pi\rho_e} \int_D \rho_i(y) \left[u_i(y) \frac{\partial \overline{W(y)}}{\partial n} - \overline{W(y)} \frac{\partial u_i(y)}{\partial n} \right] ds(y) + 1 \right\} \right| < \varepsilon$$

sağlanır.

Şimdi Denklem (4.50) Denklem (4.51) homogen olmayan iç transmission probleminin çözümünün varlığını araştıralım.

Denklem (4.50)-Denklem (4.51) problemi;

$$(\nabla^2 - I)(V - W) = k^2 [n(x)W - V] + W - V, \quad x \in D \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(V - W) = \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad x \in \partial D \quad (4.59)$$

ve

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - I)(\rho_e V - \rho_i(x)W) &= k^2 [n(x)\rho_i(x)W - \rho_e V] - 2\nabla\rho_i(x) \cdot \nabla W(x) \\ &\quad - W\nabla^2\rho_i(x) - \rho_e V + \rho_i(x)W, \quad x \in D \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\rho_e V - \rho_i(x)W = \rho_e \frac{e^{ikr}}{r}, \quad x \in \partial D \quad (4.61)$$

problemine denktir.

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\cosh|x-y|}{|x-y|} + g(x, y) \quad D \text{ bölgesinde } \nabla^2 - I \text{ için Green}$$

fonksiyonu olsun (Copson, E.T., 1975). Green teoreminden,

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus B_\varepsilon} G(x, y) (\nabla^2 - I) (\rho_e V - \rho_i(y) W) dy = & - \int_{\partial D} (\rho_e V - \rho_i(y) W) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) \\ & + \int_{\partial B_\varepsilon} \left[G(x, y) \frac{\partial}{\partial n} (\rho_e V - \rho_i(y) W) - (\rho_e V - \rho_i(y) W) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \end{aligned} \quad (4.62)$$

yazabiliriz. $\varepsilon \rightarrow 0$ için

$$\int_{\partial B_\varepsilon} G(x, y) \frac{\partial}{\partial n(y)} (\rho_e V(y) - \rho_i(y) W(y)) ds(y) = 0$$

ve

$$- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} (\rho_e V(y) - \rho_i(y) W(y)) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) = \rho_e V(x) - \rho_i(x) W(x)$$

elde edilir. Böylece Denklem (4.62)

$$\begin{aligned} \rho_e V(x) - \rho_i(x) W(x) = & \int_D G(x, y) (\nabla^2 - I) (\rho_e V(y) - \rho_i(y) W(y)) dy \\ & + \int_{\partial D} (\rho_e V(y) - \rho_i(y) W(y)) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) \end{aligned} \quad (4.63)$$

bulunur.

Denklem (4.63) eşitliğinde Denklem (4.60) ve Denklem (4.61) eşitliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned} \rho_e V(x) - \rho_i(x) W(x) = & \int_D G(x, y) \left\{ k^2 [n(y) \rho_i(y) W(y) - \rho_e V(y)] - 2 \nabla \rho_i(y) \cdot \nabla W(y) \right. \\ & \left. - W(y) \nabla^2 \rho_i(y) - \rho_e V(y) + \rho_i(y) W(y) \right\} dy + \int_{\partial D} \rho_e \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) \end{aligned} \quad (4.64)$$

elde ederiz.

Şimdi $N(x,y)$ D bölgesinde $\nabla^2 - I$ için Neumann fonksiyonu olsun. D bölgesinde $N(x,y)$ ve $(V(x) - W(x))$ fonksiyonlarına Green teoremini uygularsak

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus B_\varepsilon} N(x,y) (\nabla^2 - I) (V - W)(y) dy &= \int_{\partial D} N(x,y) \frac{\partial}{\partial n(y)} [V(y) - W(y)] ds(y) \\ &+ \int_{\partial B_\varepsilon} \left[N(x,y) \frac{\partial}{\partial n(y)} [V(y) - W(y)] - [V(y) - W(y)] \frac{\partial N(x,y)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \end{aligned} \quad (4.65)$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} N(x,y) \frac{\partial}{\partial n(y)} (V(y) - W(y)) ds(y) &= 0 \\ - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} (V(y) - W(y)) \frac{\partial N(x,y)}{\partial n(y)} ds(y) &= V(x) - W(x) \end{aligned}$$

buluruz. Dolayısıyla Denklem (4.65) eşitliğinden $\varepsilon \rightarrow 0$ için

$$\begin{aligned} V(x) - W(x) &= \int_D N(x,y) (\nabla^2 - I) (V(y) - W(y)) dy \\ &- \int_{\partial D} N(x,y) \frac{\partial}{\partial n(y)} [V(y) - W(y)] ds(y) \end{aligned} \quad (4.66)$$

elde edilir.

Denklem (4.66) eşitliğinde Denklem (4.58) ve Denklem (4.59) eşitliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
V(x) - W(x) = & - \int_D \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} N(x, y) ds(y) \\
& + \int_{\partial D} N(x, y) \left\{ k^2 [n(y)W(y) - V(y)] + W(y) - V(y) \right\} dy \quad (4.67)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$$\phi_1(x) := - \int_{\partial D} N(x, y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{e^{ikr}}{r} ds(y) \quad (4.68)$$

$$\phi_2(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} \rho_e \frac{e^{ikr}}{r} ds(y) \quad (4.69)$$

olsun.

Şimdi $K_i : C^1(\overline{D}) \rightarrow C(\overline{D})$, $i = 1, 2, 3, 4$ operatörlerini

$$(K_1 V)(x) := - \int_D N(x, y) (k^2 + 1) V(y) dy \quad (4.70)$$

$$(K_2 W)(x) := \int_D N(x, y) (k^2 n(y) + 1) W(y) dy \quad (4.71)$$

$$(K_3 V)(x) := - \int_D G(x, y) \rho_e (k^2 + 1) V(y) dy \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned}
(K_4 W)(x) := & \int_D G(x, y) \left\{ \left[k^2 n(y) \rho_i(y) - \nabla^2 \rho_i(y) + \rho_i(y) \right] W(y) \right. \\
& \left. - 2 \nabla \rho_i(y) \nabla W(y) \right\} dy \quad (4.73)
\end{aligned}$$

tanımlayalım.

K_i ($i = 1, 2, 3, 4$) operatörleri Green ve Neumann fonksiyon çekirdekli kompakt operatörlerdir (Mikhlin, S.G., 1970). ϕ_1 ve ϕ_2 lerde D de verilmiş sadece sınır verilerine bağlı fonksiyonlardır.

Böylece Denklem (4.66) ve Denklem (4.64) denklemleri, sırasıyla

$$\left. \begin{aligned} V - W &= K_1 V + K_2 W + \phi_1 \\ \rho_e V - \rho_i(x) W &= K_3 V + K_4 W + \phi_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.74)$$

olur. Denklem (4.74)' ü matris formunda yazarsak

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \rho_e & \rho_i(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \rho_e & \rho_i(x) \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

Bu durumda Denklem (4.75) matris denklemi

$$A \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} + \Phi \quad (4.77)$$

biçimini alır.

$\Phi = 0$ olması $\kappa = k$, $\rho_e = \zeta_e$, $\rho_i(x) = \zeta_i(x)$ için Denklem (4.18)-Denklem (4.19) homogen transmission eigen değer problemine karşılık gelir. Bu yüzden k (veya ω) bir transmission eigen değer değil ise Denklem (4.77) eşitliğinin bir tek çözümü vardır.

Yukarıdaki incelemelerden sonra sonucu şu teoremle verelim.

4.2. Teorem : Kabul edelimki $x \in \bar{D}$ için $\rho_e \neq \rho_i(x)$ ve k (veya ω) bir transmission eigen değeri olmasın. Bu durumda Denklem (4.50)-Denklem (4.51) iç transmission probleminin bir tek $V, W \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ çözümü vardır.

ÖRNEK: $D = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1 \}$ olsun. Bu durumda $\kappa^2 n(x) = \kappa^2 - P(x)$ biçiminde yazılabiliyor ve $r = |x|$ olmak üzere

$$P(x) = -\frac{f''(r)}{f(r)} + 2\frac{f'(r)^2}{f(r)^2} - 2\kappa \cot \kappa r \frac{f'(r)}{f(r)}$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu ile birlikte a_0 bir sabit olmak üzere

$$W(x) = a_0 \frac{\sin \kappa r}{r f(r)}$$

fonksiyonu $x \in D$ için $\Delta W + \kappa^2 n(x) W = 0$ denklemini sağlar. Ayrıca b_0 bir sabit olmak üzere

$$V(x) = b_0 \frac{\sin \kappa r}{r}$$

fonksiyonunda $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ de $\Delta V + k^2 V = 0$ denklemini sağlar.

Eğer, $\rho_i(x) = \rho(|x|)$ ve

$$\det \begin{bmatrix} -\rho_i(1) \frac{\sin \kappa}{f(1)} & \rho_e \sin \kappa \\ \kappa \frac{\cos \kappa}{f(1)^2} - \frac{\sin \kappa}{f(1)} + \frac{f'(1) \sin \kappa}{f(1)^2} & k \cos \kappa - \sin \kappa \end{bmatrix} = 0$$

ise

$$\left. \begin{aligned} -a_o \rho_i(1) \frac{\sin \kappa}{f(1)} + b_o \rho_e \sin \kappa &= 0 \\ a_o \left(\kappa \frac{\cos \kappa}{f(1)^2} - \frac{\sin \kappa}{f(1)} + \frac{f'(1) \sin \kappa}{f(1)^2} \right) + b_o (k \cos \kappa - \sin \kappa) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.77.a)$$

denklem sisteminin bir tek çözümü olur.

Eğer (a_o, b_o) sabitleri Denklem (4.77.a) sisteminin bir çözümü olacak şekilde seçilirse

$\{W(x), V(x)\}$ fonksiyon çifti

$$\begin{aligned} \Delta V + \kappa^2 V &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \\ \Delta W + \kappa^2 n(x)W &= 0, \quad x \in D \\ \rho_e V - \rho_i(|x|)W &= 0, \quad x \in \partial D \\ \frac{\partial V(x)}{\partial n} - \frac{\partial W(x)}{\partial n} &= 0, \quad x \in \partial D \end{aligned}$$

transmission problemini çözerler.

$$\det \begin{bmatrix} -\rho_i(1) \frac{\sin \kappa}{f(1)} & \rho_e \sin \kappa \\ \kappa \frac{\cos \kappa}{f(1)^2} - \frac{\sin \kappa}{f(1)} + \frac{f'(1) \sin \kappa}{f(1)^2} & k \cos \kappa - \sin \kappa \end{bmatrix} \neq 0$$

ise

$$\left. \begin{aligned} -a_o \rho_i(1) \frac{\sin \kappa}{f(1)} + b_o \rho_e \sin \kappa &= \rho_e e^{ik} \\ a_o \left(\kappa \frac{\cos \kappa}{f(1)^2} - \frac{\sin \kappa}{f(1)} + \frac{f'(1) \sin \kappa}{f(1)^2} \right) + b_o (k \cos \kappa - \sin \kappa) &= (ik - 1) e^{ik} \end{aligned} \right\} \quad (4.77.b)$$

denklem sisteminin bir tek çözümü olur. (a_o, b_o) sabitleri Denklem (4.77.b) sisteminin bir çözümü olacak şekilde seçilirse $\{W(x), V(x)\}$ fonksiyon çifti

$$\Delta V + k^2 V = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$$

$$\Delta W + \kappa^2 n(x)W = 0, \quad x \in D$$

$$\rho_e V - \rho_i(|x|)W = \rho_e \frac{e^{ikr}}{r}, \quad x \in \partial D$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} - \frac{\partial W(x)}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad x \in \partial D$$

iç transmission problemini çözerler.

4.4. İntegral Denklem Metodu

Bu kesimde Denklem (4.50)-Denklem (4.51) ile ifade edilen iç transmission problemini bir integral denkleme indirgeyip, bu integral denklemin çözümünü araştıracağız.

W , Denklem (4.50)-Denklem (4.51) probleminin bir çözümü olsun. D bölgesine Green teoremini uygulayalım.

$$\begin{aligned} k^2 \int_D \Phi(x, y) (1 - n(y)) W(y) dy &= \int_{\partial D} \left[\Phi(x, y) \frac{\partial W(y)}{\partial n} - W(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \\ &+ \int_{\partial B_\varepsilon} \left[\Phi(x, y) \frac{\partial W(y)}{\partial n} - W(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \end{aligned} \quad (4.78)$$

olur.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \Phi(x, y) \frac{\partial W(y)}{\partial n} ds(y) = 0$$

ve

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} W(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) = W(x)$$

olduğundan,

$$W(x) = \int_{\partial D} \left[\Phi(x, y) \frac{\partial W(y)}{\partial n} - W(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \right] ds(y) - k^2 \int_D \Phi(x, y) (1 - n(y)) W(y) dy \quad (4.79)$$

elde ederiz.

Denklem (4.51) sınır şartlarını kullanırsak,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} \left[\Phi(x, y) \frac{\partial W(y)}{\partial n} - W(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \\ &= \int_{\partial D} \left\{ \Phi(x, y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \left(V(y) - \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{\rho_e}{\rho_i(y)} \left(V(y) - \frac{e^{ikr}}{r} \right) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \right\} ds(y) \end{aligned} \quad (4.80)$$

olur.

Böylece bir $g_0 \in L^2(\partial\Omega)$ için Denklem (4.80) in sağ yanı sadece x' in bir fonksiyonudur, buna W_0 diyelim.

$$\int_{\partial D} \left[\Phi(x, y) \frac{\partial W(y)}{\partial n} - W(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \right] ds(y) = W_0(x) \quad (4.81)$$

$$D \text{ de } \Delta W_0 + k^2 W_0 = 0 \quad \text{olur.}$$

Şimdi Denklem (4.79) integral denklemini bir operatör denklemlle ifade edebiliriz, şöyleki;

$$m(x) = 1 - n(x) \quad (4.82)$$

olsun.

$T : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ ye

$$(T W)(x) := \int_D \Phi(x, y) (1 - n(y)) W(y) dy \quad (4.83)$$

ile tanımlarsak Denklem (4.79) denklemi,

$$W = W_0 - k^2 T W \quad (4.84)$$

olur.

4.3. Teorem: $(I + k^2 T)^{-1}$ operatörü $L^2(D)$ üzerinde vardır ve her $k > 0$ değeri için sınırlı lineer operatördür.

İspat: Bu teoremin ispatını Colton ve Monk (Colton, D., Monk, P., 1988) vermiştir.

Ayrıca T bir daralma (contraction) operatördür (Colton, D., 1988). Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.4. Teorem: $W(x)$, Denklem (4.50)-Denklem (4.51) probleminin bir çözümü ve $W_0(x)$, $g_0 \in L^2(\partial\Omega)$ ya karşılık gelen Denklem (4.81) ile verilmiş fonksiyon olsun. Bu durumda Denklem (4.84) integral denkleminin $C^1(\overline{D})$ de bir tek çözümü vardır.

KAYNAKLAR

Anar, İ.E, Çelebi, A.O., "A Scattering Problem in R^n ", Bulletin of The Institute of Mathematics Academia Sinica, vol. 22, pp. 323-339, 1994.

Ahner, J.F, "The Exterior Dirichlet Problem for The Helmholtz Equation", J. Math. Anal. Appl., Vol. 52, pp. 415-429 1975.

Colton, D., "The Inverse Scattering Problem for A Cylinder", Proc. Royal Soc. Edinburg 84 A, pp. 135-143, 1979.

Colton, D., "The Inverse Scattering Problem for Time-Harmonic Acoustic Waves", SIAM REVIEW, vol. 26, pp. 323-350, 1984.

Colton, D., "Dense Sets and Far-Field Patterns for Acoustic Waves in An Inhomogeneous Medium", Proc. Edin. Mat. Soc., vol. 3, pp. 401-407, 1988.

Colton, D., Partial Differential Equations, The Rondon Hause, 1988.

Colton, D., "Far-Field Patterns and The Inverse Scattering Problem for Acoustic Waves in An Inhomogeneous Medium." Q. J. Mech. Appl. Math., vol. 42, pp. 317-326, 1989.

Colton, D., Krisch, A., "Dense Sets and Far-Field Patterns in Acoustic Waves Propogations", SIAM J. MATH ANAL., vol. 15, pp. 996-1006, 1984.

- Colton, D., Kleinman, R.E., "The Direct and Inverse Scattering Problem for An Arbitrary Cylinder: Dirichlet Boundary Condition", Proc. Royal. Soc. Edinburgh 86A, pp. 22-42, 1980.
- Colton, D., Kress, R., Integral Equation. Methods in Scattering Theory, John Wiley, New York, 1983.
- Colton, D., Kress, R., Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, Springer-Verlag, 1992.
- Colton, D., Monk, P., "The Inverse Scattering Problem for Time-Harmonic Acoustic Waves in An Penetrable Medium", Q. J. Mech. Appl. Math., vol. 40, pp. 189-212, 1987.
- Colton, D., Monk, P., "The Inverse Scattering Problem for Time-Harmonic Acoustic Waves in An Inhomogeneous Medium", Q. J. Mec. Appl. Math., vol. 41, pp. 97-125, 1988.
- Copley, G., "Fundemental Results Conserving Integral Representation in Acoustic Radiation", The Jouranl of The Acoistical Society of America, vol. 44, pp. 28-31, 1968.
- Copson, E.T., Partial Differential Equations, Cambridge University, 1975.
- Fleming, W., Function of Several Variables, Springer-Verlag, 1977.

Gilbarg, D., Trudinger, N.S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, 1977.

Günter, N.M., Potential Theory, Frederick Ungar Publishing Co, 1967.

Kitappa, R., Roach, G.F., "Boundary Integral Equations for The Three-Dimensional Helmholtz Equation", SIAM REVIEW., vol.16, pp. 214-236, 1975.

Kitappa, R., Kleinman, R.E., "Acoustic Scattering by Penetrable Homogeneous Medium", J. of Math. Physics., vol. 16, pp. 421-432, 1975.

Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis With Applications, John Wiley and Sons, 1978.

Mikhlin, S.G., Mathematical Physics An Advanced Course, North-Holland Publishing Company, 1970.

Miranker, W.L., "Uniqueness and Representation Theorem for Solution of $\Delta u + k^2 u = 0$ in Infinite Domains", J. Math. and Mech., vol. 6, pp. 847-858, 1957.

Müller, C., Foundations of The Math. Theory of Electromagnetic Waves, Springer-Berlin, 1969.

Sleeman, B.D., "The Inverse Scattering Problem of Acoustic Scattering", IMA. J. Appl. Math., vol. 29, pp. 113-142, 1982.

Royden, H.L., Real Analysis, Macmillan Publishing Company, 1988.

Werner, P., "Zur Mathematischen Theorie Akustischer Wellen Felder", Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 6, pp. 155-184, 1963.

Werner, P., "Beugungsprobleme Der Mathematischen Akustik", Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 12, pp. 155-184, 1963.



ÖZGEÇMİŞ

Adil MISIR 1965 yılında Rize-Ardeşen’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ardeşende tamamladı. Yüksek öğrenimini 1987 yılında Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü’ nde tamamladı. 1988 yılında Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen burada görev yapmaktadır.