

155803

**HOMOJEN OLMAYAN BİR ORTAMDA YAYILAN ZAMAN
HARMONİK AKUSTİK DALGALAR İÇİN UZAK ALAN
OPERATÖRÜNÜN ÖZELLİKLERİ VE TERS SAÇILMA TEORİSİ**

Ülkü (DİNLEMEZ) ATEŞ

**DOKTORA TEZİ
(MATEMATİK)**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ocak 2004

ANKARA

Ülkü (DİNLEMEZ) ATEŞ tarafından hazırlanan HOMOJEN OLMAYAN BİR ORTAMDA YAYILAN ZAMAN HARMONİK AKUSTİK DALGALAR İÇİN UZAK ALAN OPERATÖRÜN ÖZELLİKLERİ VE TERS SAÇILMA TEORİSİ adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Ibrahim Anar

Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

Tez Yöneticisi

19.12.03

Bu çalışma, jürimiz tarafından ...**MATEMATİK**..... Anabilim Dalında
.....**DOKTORA**..... tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Abdullah ALTIN

Abdullah Altın

Üye : Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

Bereketoglu

Üye : Prof. Dr. Aydın TIRYAKI

Aydin Tiryaki

Üye : Prof. Dr. Ömer AKIN

Ömer Akın

Üye : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

Ibrahim Anar

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

[Signature]

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SEMBOLLER.....	iv
1. GİRİŞ.....	1
2. KULLANILAN TANIMLAR, TEOREMLER VE TERS PROBLEM.....	6
2.1.Tanımlar.....	6
2.2.Teoremler.....	8
2.3.Homojen olmayan ortamda yayılan akustik dalgalar için ters saçılma problemi.....	12
3. HOMOJEN OLMAYAN BİR ORTAMDA YAYILAN AKUSTİK DALGALAR İÇİN UZAK ALAN OPERATÖRÜ.....	14
4. HOMOJEN OLMAYAN BİR ORTAMDA YAYILAN AKUSTİK DALGALAR İÇİN TERS SAÇILMA PROBLEMİ VE UZAK ALAN OPERATÖRÜNE AİT BAZI SONUÇLAR.....	29
5. SONUÇ.....	45
KAYNAKLAR.....	48
ÖZGEÇMİŞ.....	51

**HOMOJEN OLMAYAN BİR ORTAMDA YAYILAN ZAMAN HARMONİK
AKUSTİK DALGALAR İÇİN UZAK ALAN OPERATÖRÜNÜN
ÖZELLİKLERİ VE TERS SAÇILMA TEORİSİ
(Doktora Tezi)**

Ülkü (DİNLEMEZ) ATEŞ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2004**

ÖZET

Bu çalışmada homojen olmayan bir ortamda yayılan, zaman harmonik akustik dalgalar için uzak alan modeli çalışılmıştır. Uzak alan operatörünün özdeğerleri ve normalligi incelenmiştir. Saçılan operatörün birim operatör olduğu gösterilmiştir. Ters saçılma problemi çalışılmıştır. Son olarak da uzak alan operatörün birebirliği ve iç geçiş problemiyle arasındaki ilişki araştırılmıştır. Bütün bu incelemeler ve çalışmalarda emilgen bölgenin $\rho \in C^1(\mathbb{R}^3)$ yoğunluğu $\nabla \rho \neq 0$ kabul edilmiştir.

Bilim Kodu	: 226
Anahtar Kelimeler	: Ters saçılım , akustik dalgalar , uzak alan modeli
Sayfa Adedi	: 51
Tez Yöneticisi	: Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

**PROPERTIES OF THE FAR FIELD OPERATOR FOR TIME
HARMONIC ACOUSTIC WAVES BY AN INHOMOGENEOUS
MEDIUM AND INVERSE SCATTERING THEORY
(Ph. D. Thesis)**

ÜLKÜ (DİNLEMEZ) ATEŞ

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

January 2004

ABSTRACT

In this work, the far field pattern for the acoustic scattering waves in the non-homogeneous medium is studied. Both the eigenvalue for the far field operator and the identity operator for the scattering operator are investigated. The inverse scattering problem is studied. Also it is investigated the relationship between the injective of far field operator and interior transmission problem. All this researchs, density of the absorbing medium $\rho \in C^1(\mathbb{R}^3)$ is assumed that $\nabla \rho \neq 0$.

Science Code : 226
Key Words : inverse scattering , far field operator, acoustic waves
Page Number : 51
Adviser : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca beni yönlendiren, büyük özverilerde bulunup değerli ilgi ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen hocam sayın Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR'a, yaptığım çalışmaları belirli aralıklarla dinleme sabrını ve nezaketini gösteren değerli hocalarım sayın Prof. Dr. Abdullah ALTIN ve sayın Prof. Dr. Ömer AKIN'a ve ayrıca üzerimde emeği bulunan tüm hocalarıma teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.



SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simge	Açıklama
∂D	D bölgesinin sınırı
$\overline{D}$	D bölgesinin kapanışı
$L^2(\Omega)$	$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ üzerinde karesi integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$C(D)$	$D \subset \mathbb{R}^3$ de tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı
$C^k(D)$	$D \subset \mathbb{R}^3$ de tanımlı k . mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayı
F^*	F operatörünün adjointi
$\ \cdot\ $	$L^2(\Omega)$ da tanımlanan norm
$\overline{u}$	u fonksiyonunun kompleks eşleniği
$O,0$	Landau sembolleri
Δ	Laplace operatörü
∇	Gradient
v_g	g çekirdekli Herglotz dalga fonksiyonu

1.GİRİŞ

Direkt ve ters saçılma problemi bir çok matematikçi ve fizikçi tarafından çalışılmıştır. Ters saçılma probleminin çözümünün tekliğindeki ilk sonuçları Schiffer (1) vermiştir ve son zamanlarda Nachman (2), Novicov (3) ve Ramm (4) tarafından ele alınmıştır. Devanev (5) ve Langenberg (6) ters problemin birinci çeşit bir lineer integral denklem problemine indirgenmesiyle elde edilen lineerize probleme çalışmışlar, Imbriale ve Mittra (7) lineerleştirilmemiş ters saçılma problemini ilk olarak ele almışlardır. Bu matematikçilerin metodları verilen stabilizasyon sonuçlarına, analitik devama bağlıdır. 1980'lerin u_∞ uzak alan verisi hakkındaki bilgiden faydalanılarak ∂D nin belirlenmesi problemi olan akustik ters engel problemi Angell, Colton ve Kirsch (8,9), Kristensson ve Vogel (10), Tobocman (11), Murch Tan ve Well (12), Onishi, Ohura ve Kabayashi (13) ve Wang ve Chen (14) ve daha bir çok matematikçi tarafından ele alınmıştır. Bu araştırmacılar ters engel problemini tekrar formüle etmek için Green formülünü veya integral denklemlerini kullanmışlardır. Ters engel problemini Kirsch ve Kress (15,16) ve Colton ve Monk (17,18) matematikçiler lineer iyi kurulmamış (ill posed) ve lineer olmayan iyi kurulmuş (well posed) kısımlarına ayırmışlardır. Bu problemi teoriksel ve nümeriksel olarak analiz etmişler ve tanıtmışlardır. Kirsch ve Kress'in çalışmasında, k^2 , Γ nın içinde $-\Delta$ nın Dirichlet özdeğeri olmamak şartı ile D saçılan engel hakkında bir şey bilmeksizin, Γ yüzeyi D nin içine yerleştirilebilmektedir. Belirli k dalga sayısı ve belirli d olay yönü için bilinmeyen $\varphi \in L^2(\Gamma)$ yoğunluklu bir single-layer potansiyel gibi

$$u^s(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y) \quad [1.1]$$

u^s saçılan alan gösterilmeye çalışılmıştır ve bu durumda u_∞ uzak alan modeli

$$u_\infty(\hat{x}; d) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} e^{-ik\hat{x} \cdot y} \varphi(y) ds(y) \quad , \quad \hat{x} \in \Omega \quad [1.2]$$

gösterimine sahip olduğu gösterilmiştir. φ yoğunluğu u_∞ uzak alan modeli verildiğinde [1.2] birinci çeşit iyi kurulmamış (ill posed) integral denklemi çözülerek bulunur. Bilinmeyen ∂D , ∂D yüzeyi üzerinde verilen

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{ikx \cdot d} + u^s(x) \\ u(x) &= 0 \quad , \quad \partial D \text{ üzerinde} \end{aligned}$$

şartlarını kabul ederek ve [1.1] denklemini kullanarak belirlenir. Ters engel problemin çözümü için Colton ve Monk'un sunduğu metod ise lineer fonksiyoneli, olay alanının keyfi yönlerine göre, uzak alan modellerinin kümesi üzerindeki değerlerle tarif ederek belirlemeye çalışılır. Orijini içine alan saçılan engelin bilinmediğini, bütün $\hat{x}, d \in \Omega$ için u_∞ uzak alanın verildiğini kabul edip, belirli k ve p tam sayısı için

$$\int_{\Omega} u_\infty(\hat{x}; d) g(d) ds(d) = \frac{1}{ki^{p+1}} Y_p(\hat{x}) \quad , \quad \hat{x} \in \Omega \quad [1.3]$$

denklemini sağlayan bir $g \in L^2(\Omega)$ fonksiyonu belirlenir. Burada Y_p , p . mertebeden küresel harmoniktir. Sonra v Herglotz dalga fonksiyonu

$$v(x) = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad [1.4]$$

ile tanımlanır ise v fonksiyonu

$$v(x) = -h_p^{(1)}(k|x|) Y_p(\hat{x}) \quad , \quad \hat{x} \in \partial D \quad [1.5]$$

ile gösterilebilir. Burada $h_p^{(1)}$, p . mertebeden birinci çeşit küresel Hankel fonksiyonudur ve $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ dir. Ters saçılma problemin çözümü [1.5] denlemini sağlanarak ∂D bulunmasıyla sağlanır.

Anar ve Çelebi (19) engel bölgede yoğunluğu ve dalga sayısının konuma bağlı olması hainde, bir saçılma problemini incelemişlerdir.

Ters ortam problemi; u_∞ uzak alan modelinin bilinmesi ve

$$\Delta u(x) + k^2 n(x)u(x) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3$$

$$u(x) = e^{ikx \cdot d} + u^s(x)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0$$

denklemleri kullanılarak n kırılma indeksinin bulunması problemidir. Ters ortam probleminin çözümünde iki metod önerilmektedir. İlk metod

$$u(x) = e^{ikx \cdot d} - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y) m(y) u(y) dy \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad [1.6]$$

denkleminden

$$u_\infty(\hat{x}; d) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik\hat{x} \cdot y} m(y) u(y) dy \quad , \quad \hat{x} \in \Omega \quad [1.7]$$

denklemine sahip olmamıza ve sonra [1.6] denkleminden [1.7] kısıtlaması sağlanarak u ve m çözümünün araştırılmasına bağlıdır. Bu yaklaşımın çeşitli şekilleri Johson ve Tracy (20), Kleinman ve van den Berg (21), Wang ve Chew (22), Weston (23) matematikçiler tarafından kullanılmıştır. Akustik ters ortam probleminin çözümü için ikinci metod Colton ve Monk tarafından verilmiştir. (24,25) referanslarında ki bu

metod da, [1.3] denklemini sağlayan bir g fonksiyonu belirlenir. [1.4] ile tanımlanan v Herglotz dalga fonksiyonu inşa edilir. Ters ortam problemin çözümü

$$w(x) = v(x) - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y) m(y) w(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

w Lippmann-Schwinger denklemi ve m çözümü aranarak bulunur öyleki $|x| = a$ için m ve w ,

$$-k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y) m(y) w(y) dy = h_p^{(1)}(k|x|) Y_p(\hat{x})$$

kısıtlamasını sağlar. Burada a merkezi orijinde olan ve m nin desteğini içinde bulunduran B yuvarının yarıçapıdır.

Biz bu çalışmada ele aldığımız problem de emilgen bölgenin yoğunluğu $\rho(x) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ve $\nabla \rho \neq 0$ olarak aldığımız da

$$\Delta u(x) + k^2 n(x) u(x) = \frac{1}{\rho(x)} \nabla \rho(x) \nabla u(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

$$u(x) = e^{ik\alpha \cdot x} + u^s(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0, \quad \text{her doğrultuda}$$

formunu alır.

Bu çalışma , 1. Bölümü Giriş olmak üzere dört bölümden oluşmaktadır. 2. Bölümde direkt ve ters saçılma problemiyle ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. 3. ve 4. Bölümler tamamen özgün ve orijinal sonuçları kapsamaktadır.

3. Bölümde homojen olmayan bir ortamda yayılan dalgalar için uzak alan operatörünün özdeğerleri ve normalleri araştırılmıştır. Ayrıca saçılan operatörün birim operatör olduğu gösterilmiştir.
4. Bölümde homojen olmayan bir ortamda yayılan akustik dalgalar için ters saçılma probleminin çözümü araştırılmış ve uzak alan operatörünün bazı şartlar altında bire bir olduğu gösterilmiştir. Yukarıdaki probleme karşılık gelen, uzak alan operatörünün bire bir ve görüntü kümesinin yoğun olması için gerek ve yeter koşul *Teorem 4.4* de verilmiştir.



2. KULLANILAN TANIMLAR, TEOREMLER VE TERS PROBLEM

2.1. Tanımlar

Tanım 2.1.1

$\phi : IR \rightarrow IR$ (veya C) bir fonksiyon olsun. $K = \{x \in IR : \phi(x) \neq 0\}$ olmak üzere $\overline{K}$, ϕ 'nin desteği denir.

Tanım 2.1.2

X bir normlu uzay ve $T : X \rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. Eğer $T\phi = \lambda\phi$ olacak şekilde bir $\phi \in X$, $\phi \neq 0$ varsa λ , T 'nin özdeğeri ϕ de T 'nin özfonksiyonu denir. I birim operatör olmak üzere, eğer $(\lambda I - T)$ 'nin $(\lambda I - T)^{-1}$ tersi var ve sınırlı ise λ kompleks sayısı T nin regüler değeri olarak isimlendirilir. T nin bütün regüler değerlerinin kümesine $\rho(T)$ resolvent küme denir ve $R(\lambda; T) := (\lambda I - T)^{-1}$ ye resolvent operatör denir. $\sigma(T) = C \setminus \rho(T)$ kümesine T operatörünün spektrumu denir.

Tanım 2.1.3

Her $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ doğrultuda $\frac{\partial u}{\partial r} - iku = 0 \left(\frac{1}{r} \right)$, $r = |x| \rightarrow \infty$ koşulu sağlanıyor ise

u ya Sommerfeld yayılma şartını sağlıyor denir. Eğer u , $u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$,

$|x| \rightarrow \infty$ şartını sağlıyor ise u ya Sommerfeld sınırlılık (finiteness) şartını sağlıyor denir.

Tanım 2.1.4

$\hat{x}, \hat{\theta} \in \Omega$ için uzak alan modeli $u_{\infty}(\hat{x}; \hat{\theta})$ ve Ω birim küre olmak üzere

$F : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ bir operatör olsun. O zaman

$$Fg(\hat{x}) = \int_{\Omega} u_{\infty}(x; \hat{\theta}) g(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta}) \quad , \quad \hat{x} \in \Omega \text{ için}$$

integral operatörüne uzak alan operatörü denir. Burada $\hat{\theta}$ olay düzlem dalganın yönü , $\hat{x}$ gözlemlenen dalganın yönüdür.

Tanım 2.1.5

D , C^2 sınıfından sınırsız bir bölgenin açık tümleyeni olsun. φ integrallenebilir fonksiyonu için

$$u(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$$

ve

$$v(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$$

integrallerine sırasıyla φ yoğunluklu akustik single layer ve akustik double layer

potansiyeller denir. Burada $\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$, $(x \neq y)$ dir.

Tanım 2.1.6

Ω birim küre olmak üzere $F : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ bir operatör olsun. $N(F) := \{\varphi \in L^2(\Omega) : F\varphi = 0\}$ uzayına F nin sıfır uzayı denir.

Tanım 2.1.7

X ve Y birer normlu uzay olsun. Bu durumda $A : X \rightarrow Y$ lineer operatörü X in her sınırlı kümesini Y nin bir göreceli (relatively) kompakt kümesine dönüştürüyorsa A dönüşümüne kompaktır denir (38).

2.2. Teoremler

Teorem 2.2.1

X normlu bir uzay olsun. $T : X \rightarrow X$ kompakt lineer operatörün özdeğerlerinin kümesi sayılabilir (39).

Teorem 2.2.2

D , C^2 sınıfından sınırlı bir bölge ve ν , D nin dışına doğru yönlendirilmiş D nin sınırındaki birim normal vektör olsun. $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ fonksiyonunun sınır üzerindeki normal türevi,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \nu(x) \nabla u(x - h\nu(x)) \quad , \quad x \in \partial D$$

olmak üzere $u(x)$, $x \in D$ için,

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) - \int_D \{ \Delta u(y) + k^2 u(y) \} \Phi(x, y) dy$$

Green formülüne veya Helmholtz gösterilimine sahiptir (33). Burada

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, \quad x \neq y$$

Helmholtz denkleminin bir çözümüdür ve hacim integrali genelleştirilmiş integral anlamındadır.

Teorem 2.2.3

Helmholtz denkleminin yayılan her u çözümü, her $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ doğrultusunda

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ u_{\infty}(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty$$

asimtotik davranışına sahiptir. Burada u_{∞} , Ω birim küresi üzerinde tanımlanmış u nun uzak alan modelidir ve

$$u_{\infty}(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x} \cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x} \cdot y} \right\} ds(y), \quad \hat{x} \in \Omega$$

formundadır (33).

Teorem 2.2.4

$u_{\infty}(\hat{x}; \hat{\theta})$, olay düzlem dalganın $\hat{\theta}$ doğrultusuna ve gözlemlenen dalganın $\hat{x}$ doğrultusuna karşılık gelen uzak alan modeli olsun. Bu durumda, her $\hat{x}, \hat{\theta} \in \Omega$ için

$$u_{\infty}(\hat{x};\hat{\theta}) = u_{\infty}(-\hat{\theta};-\hat{x})$$

denklemini sağlar (33).

Teorem 2.2.5

Eğer $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$,

$$\Delta u(x) + k^2 n(x)u(x) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (i)$$

$$u = u^i + u^s \quad (ii)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0 \quad (iii)$$

probleminin bir çözümü ise o zaman u

$$u(x) = u^i(x) - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x,y)m(y)u(y)dy \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3$$

Lippmann-Schwinger integral denklemini sağlar. Karşıt olarak eğer $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ Lippmann-Schwinger denkleminin bir çözümü ise bu durumda $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$, (i)-(iii) probleminin çözümüdür. Burada $n \in C^2(\mathbb{R}^3)$ kırılma indeksi, $m := 1 - n$ ve $k > 0$ dalga sayısıdır (33).

Lemma (Rellich) 2.2.6

Kabul edelim ki D sınırlı bölgesi bir sınırsız bölgenin açık tümleyeni ve $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = 0$$

ifadesini sağlayan Helmholtz denkleminin bir çözümü olsun. O zaman $IR^3 \setminus \overline{D}$ da $u = 0$ olur (33).

Teorem 2.2 7

D sınırlı bölgesi bir sınırsız bölgenin açık tümleyeni ve $u \in C^2(IR^3 \setminus \overline{D})$ Helmholtz denkleminin yayılan bir çözümü olsun. Ayrıca $IR^3 \setminus \overline{D}$ bölgesinde u nun uzak alan modeli özdeş olarak sıfır olsun. Bu durumda $IR^3 \setminus \overline{D}$ 'da $u = 0$ olur (33).

Lemma 2.2.8

$g \in L^2(\Omega)$ fonksiyonu verilsin.

$$v^i(x) = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d) \quad , \quad x \in IR^3$$

olay dalgası için saçılma probleminin çözümü

$$v^s(x) = \int_{\Omega} u^s(x; d) g(d) ds(d) \quad , \quad x \in IR^3 \setminus \overline{D}$$

ile verilir ve v^s 'nin uzak alan modeli de

$$v_{\infty}(\hat{x}) = \int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}; d) g(d) ds(d) \quad , \quad x \in \Omega$$

olur.(33)

Teorem 2.2.9

$T : X \rightarrow Y$ bir sınırlı lineer operatör ve T^* , T nin adjointi olsun.Bu durumda T

$$T(X)^\perp = N(T^*) \quad \text{ve} \quad \overline{T(X)} = N(T^*)^\perp$$

denklemlerini sağlar (33).

Teorem 2.2.10

G , $\mathbb{R}^3$ de bir bölge ve $u \in C^2(G)$ ve G de $\Delta u + k^2 n(x)u = 0$ denkleminin bir çözümü olsun. $n \in C^2(\overline{G})$ dir ve u , $x_0 \in G$ nin bir komşuluğunda sifıra eşit olsun.Bu durumda u , G de özdeş olarak sifırdır (33).

2.3.Homojen Olmayan Ortamda Yayılan Akustik Dalgalar İçin Ters Saçılma Problemi

Kompakt destekli homojen olmayan ortamdan geçen akustik zaman harmonik düzlem dalganın yayılmasını ele alalım. $c(x)$ sesin lokal hızı, $\gamma(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^3$ emilgenlik olarak tanımlansın. $r = |x| \geq a$ için $\gamma(x) = 0$ ve $c(x) = c_0$ sabit olarak kabul edelim.Bu durumda w olay dalganın frekansı, $\hat{\alpha}$, $|\hat{\alpha}| = 1$ yayılmanın yönü,

$k = \frac{w}{c_0}$ dalga sayısı ve

$$n(x) = \left(\frac{c_0}{c(x)} \right)^2 + i \frac{\gamma(x)}{k}$$

kırılma indeksidir. n kompleks değerli bir fonksiyondur ve $\text{Re } n(x) \geq 0$ ve $\text{Im } n(x) \geq 0$ dir. $\Delta u + k^2 n(x)u = 0$ denklemi $\mathbb{R}^3$ ün her serbest kaynak bölgesinde

ele alınabilir. $|x| \geq a$ için $n(x) = 1$ dir. Bu demektir ki $\{x \in \mathbb{R}^3 : n(x) \neq 1\}$ homojen olmayan ortam, a yarıçaplı $K(0, a) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| < a\}$ yuvarın içinde yer alsın $K[0, a] = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| \leq a\}$ olmak üzere kaynağın $K[0, a]$ yuvarının dışında yer aldığını kabul edelim. Bu kaynak $K[0, a]$ da $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$ sağlanacak şekilde u^i olay alan olarak ele alınır sağlar. Bu bilgi altında u^i , ya bir nokta kaynaktır veya düzlem dalgadır yani; $|z| > a$ ile z de bir kaynak için $u^i(x) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}$ veya

$\hat{\theta} \in \mathbb{R}^3$ birim vektörü için $u^i(x) = e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$ olur. Her iki durumda da u^i , $K[0, a]$ da $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$ denkleminin bir çözümüdür. Birinci kısım için hızı c_0 olan kaynaktan ileriye doğru hareket eden u^i bir küresel dalga olarak tarif edilir. İkinci kısımda u^i , c_0 hızlı $\hat{\theta}$ yönünde hareket eden bir düzlem dalgadır.

n kırılma indeksi ile tarif edilen ortamda olay alan tedirgin edilirse bir u^s saçılan dalga meydana gelir. Toplam alan, kaynağın dışında $u = u^i + u^s$, $\Delta u + k^2 n u = 0$ Helmholtz denklemini sağlar. Ayrıca saçılan alan, ortamdan çok uzakta küresel dalga gibi davrandığı düşünülür. Bu, aşağıdaki yayılma şartı ile tarif edilebilir.

Yayılma şartı her doğrultuda'

$$\frac{\partial u^s}{\partial r}(x) - iku^s(x) = 0 \left(\frac{1}{r^2} \right), \quad r = |x| \rightarrow \infty, \quad \hat{x} = \frac{x}{|x|} \in S^2$$

sağlanmasıdır. Burada S^2 ile $\mathbb{R}^3$ de birim küre yüzeyi tanımlanmaktadır. Şimdi direkt saçılma probleminin tam tanımı verilebilir. $k > 0$ dalga sayısı $|x| \geq a$ için $n(x) = 1$ ile $n = n(x)$ kırılma indeksi olsun. u^i olay alan verilsin. Direkt problem toplam u alanını bulmak demektir. u $\mathbb{R}^3$ de kaynak bölgenin dışında, saçılan alan $u^s = u - u^i$ yayılma şartını sağlamak üzere Helmholtz denklemini sağlar.

Ters problemde farklı k dalga sayıları ve/veya farklı u^i dalgaları için $K(0, a)$ ın dışında u alanının ölçülmesinden n kırılma indeksi belirlenmeye çalışılır.

3. HOMOJEN OLMAYAN BİR ORTAMDA YAYILAN AKUSTİK DALGALAR İÇİN UZAK ALAN OPERATÖRÜ

Homojen olmayan $B \subset \mathbb{R}^3$ ortamından geçen akustik zaman harmonik düzlem dalganın yayılmasını ele alalım. Burada $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : n(x) \neq 1\}$, $m := 1 - n$ nin kompakt desteğidir. Kırılma indeksi $n \in C^1(\mathbb{R}^3)$ kompleks değerli ve $\text{Im } n \geq 0$ olsun. $k > 0$ yayılan dalganın sayısı ve w dalganın frekansı olmak üzere olay dalga,

$$U^i(x, t) = e^{i(kx \cdot \alpha - wt)} \quad [3,1]$$

ile verilsin. Burada $x \in \mathbb{R}^3$ olup $\alpha \in \mathbb{R}^3$ vektörü ($|\alpha| = 1$) olay dalganın yönüdür. B nin yoğunluğu $\rho = \rho(x)$ olsun. Kabul edelim ki $\nabla \rho \neq 0$ olsun. O zaman toplam alan $U(x, t) = u(x)e^{-iwt}$ ifadesindeki u genliği,

$$\Delta u(x) + k^2 n(x)u(x) = \frac{1}{\rho(x)} \nabla \rho(x) \nabla u(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad [3.2]$$

$$u(x) = e^{ik\alpha \cdot x} + u^s(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad [3.3]$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0, \quad |x| = r \quad [3.4]$$

probleminin çözümüdür. $u^s(x)$ saçılan dalgayı gösterir. [3.2]-[3.4] den $u^s(x) = u^s(x; \alpha)$ saçılan alanın asimtotik davranışı $u^i(x) = e^{ikx \cdot \alpha}$ olay dalgaya göre,

$$u^s(x; \alpha) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} u_\infty(\hat{x}; \alpha) + o\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow \infty \quad [3.5]$$

formundadır ve burada $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ dır. Şimdi [3.5] in doğruluğunu gösterelim;

u^s , $IR^3 \setminus \Omega_b$ de Helmholtz denkleminin yayılan çözümü olduğundan

$$\begin{aligned}
 u^s(x) &= \int_{\partial\Omega_b} \left\{ \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u^s(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \quad , \quad x \in IR^3 \setminus \Omega_b \\
 &= \int_{\partial\Omega_b} \left[u^s(y) \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \left\{ \frac{\partial e^{-ik\hat{x} \cdot y}}{\partial \nu(y)} + 0 \left(\frac{1}{|x|} \right) \right\} - \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y) \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \left\{ e^{-ik\hat{x} \cdot y} + 0 \left(\frac{1}{|x|} \right) \right\} \right] ds(y) \\
 &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega_b} \left\{ u^s(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x} \cdot y}}{\partial \nu(y)} - e^{-ik\hat{x} \cdot y} \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y) \right\} ds(y) + 0 \left(\frac{1}{|x|} \right) \right] , \quad |x| \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Ω_b , B yi içine alan açık yuvar ve $\partial\Omega_b$, Ω_b nin sınırındır. ν , $\partial\Omega_b$ nin birim dış normalidir. u_∞ , u^s saçılan alanın uzak alan modelidir ve

$$u_\infty(\hat{x}; \alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega_b} \left\{ u^s(\alpha) \frac{\partial e^{-ik\hat{x} \cdot \alpha}}{\partial \nu(\alpha)} - e^{-ik\hat{x} \cdot \alpha} \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(\alpha) \right\} ds(\alpha) \quad , \quad \hat{x} \in \Omega \quad [3.6]$$

formülü ile verebiliriz. Eğer Ω yı IR^3 de birim küre olarak tanımlarsak, o zaman $g \in L^2(\Omega)$ olmak üzere,

$$v(x) = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d) \quad [3.7]$$

ile tanımlanan $v(x)$ fonksiyonu,

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad [3.8]$$

Helmholtz denkleminin herhangi bir çözümüdür. Bu çözüme g çekirdekli Herglotz dalga fonksiyonu denir. [3.8] in [3.4] ü sağlayan çözümlerine yayılan çözüm denir. Bu tür çözümler [3.5] asimtotik davranışına sahiptir .

Lemma 3.1

$v^s, w^s \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b)$ saçılan iki dalga olsun. v_∞ ve w_∞ sırasıyla v^s, w^s ye karşı gelen uzak alan modelleri olsun. v^s ve w^s Helmholtz denkleminin yayılan çözümleri olsun. O zaman v^s ve w^s

$$\int_{\partial\Omega_b} \left\{ v^s \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s} \frac{\partial v^s}{\partial \nu} \right\} ds = -2ik \int_{\Omega} v_\infty \overline{w_\infty} ds \quad [3.9]$$

denklemini sağlar.

İspat

[3.9] denkleminin sol tarafındaki integralin değeri, $\partial\Omega_b$ yerine yeterince büyük $\overline{\Omega_b}$ yi içine alan, R yarıçaplı, merkezi orijinde olan bir küre için de aynı olur. Yani;

$$\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\}, \quad D_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}, \quad v^s, w^s \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b)$$

Helmholtz denkleminin yayılan çözümleri olduğu için $\Delta v^s + k^2 v^s = 0$ ve $\Delta w^s + k^2 w^s = 0$ sağlanır. $D_R \setminus \Omega_b$ bölgesine Green teoremini uygularsak,

$$\begin{aligned} \int_{D_R \setminus \Omega_b} \{v^s \Delta \overline{w^s} - \overline{w^s} \Delta v^s\} dx &= \int_{\Omega_R \cup \partial\Omega_b} \left\{ v^s \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s} \frac{\partial v^s}{\partial \nu} \right\} ds(x) \\ &= \int_{\partial\Omega_b} \left\{ v^s \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s} \frac{\partial v^s}{\partial \nu} \right\} ds(x) - \int_{\Omega_R} \left\{ v^s \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s} \frac{\partial v^s}{\partial \nu} \right\} ds(x) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\int_{\partial\Omega_b} \left\{ v^s \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s} \frac{\partial v^s}{\partial \nu} \right\} ds(x) = \int_{\Omega_R} \left\{ v^s \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s} \frac{\partial v^s}{\partial \nu} \right\} ds(x) \quad [3.10]$$

elde edilir. $v^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} v_\infty(\hat{x}; \alpha) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$, $w^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} w_\infty(\hat{x}; \alpha) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$

ifadelerini, [3.10] denkleminin sağ yanında yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_b} \left\{ v^s \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s} \frac{\partial v^s}{\partial \nu} \right\} ds(x) &= \int_{\Omega_R} \left\{ -\frac{2ik}{|x|^2} v_\infty(\hat{x}; \alpha) \overline{w_\infty(\hat{x}; \alpha)} + O\left(\frac{1}{|x|^3}\right) \right\} ds(x) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ -\frac{2ik}{|x|^2} v_\infty(\hat{x}; \alpha) \overline{w_\infty(\hat{x}; \alpha)} + O\left(\frac{1}{|x|^3}\right) \right\} |x|^2 \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= -2ik \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v_\infty(\hat{x}; \alpha) \overline{w_\infty(\hat{x}; \alpha)} \sin \varphi d\varphi d\theta + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ &= -2ik \int_{\Omega} v_\infty(\hat{x}; \alpha) \overline{w_\infty(\hat{x}; \alpha)} ds(x) + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty \\ &= -2ik \int_{\Omega} v_\infty(\hat{x}; \alpha) \overline{w_\infty(\hat{x}; \alpha)} ds(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.2

$v^s \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b)$ Helmholtz denkleminin bir yayılan çözümü olsun. v^s nin uzak alan modeli v_∞ olsun. w_h^i , h çekirdekli Herglotz dalga fonksiyonu olsun. O zaman,

$$\int_{\partial\Omega_b} \left\{ v^s \frac{\partial \overline{w_h^i}}{\partial \nu} - \overline{w_h^i} \frac{\partial v^s}{\partial \nu} \right\} ds = 4\pi \int_{\Omega} v_\infty \overline{h} ds \quad [3.11]$$

denklemini sağlar.

İspat

v^s saçılan alana karşılık gelen v_∞ uzak alan modelinin integral gösteriliminin

$$v_\infty(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega_b} \left\{ v^s(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x} \cdot y}}{\partial \nu(y)} - e^{-ik\hat{x} \cdot y} \frac{\partial v^s}{\partial \nu}(y) \right\} ds(y) \quad , \quad \hat{x} \in \Omega$$

olduğunu biliyoruz.

$$w_h^i(x) = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} h(d) ds(d)$$

olduğundan

$$\overline{w_h^i(x)} = \int_{\Omega} e^{-ikx \cdot d} \overline{h(d)} ds(d) \quad , \quad \frac{\partial \overline{w_h^i(x)}}{\partial \nu(x)} = \int_{\Omega} \frac{\partial e^{-ikx \cdot d}}{\partial \nu(x)} \overline{h(d)} ds(d) \quad [3.12]$$

[3.12] deki eşitlikleri kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_b} \left\{ v^s(x) \frac{\partial \overline{w_h^i}}{\partial \nu}(x) - \overline{w_h^i}(x) \frac{\partial v^s}{\partial \nu}(x) \right\} ds(x) &= \int_{\partial\Omega_b} \left\{ v^s(x) \int_{\Omega} \frac{\partial e^{-ikx \cdot d}}{\partial \nu(x)} \overline{h(d)} ds(d) \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} e^{-ikx \cdot d} \overline{h(d)} ds(d) \frac{\partial v^s}{\partial \nu}(x) \right\} ds(x) \\
&= \int_{\Omega} \overline{h(d)} \int_{\partial\Omega_b} \left\{ v^s(x) \frac{\partial e^{-ikx \cdot d}}{\partial \nu(x)} - e^{-ikx \cdot d} \frac{\partial v^s}{\partial \nu}(x) \right\} ds(x) ds(d) \\
&= 4\pi \int_{\Omega} v_{\infty}(d) \overline{h(d)} ds(d)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi u_{∞} uzak alan modeline göre F uzak alan operatörünü.

$$F: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad (Fg)(\hat{x}) = \int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}; d) g(d) ds(d) \quad [3.13]$$

ile tanımlayalım. Burada F operatörü $L^2(\Omega)$ da kompakt operatördür (33). Uzak alan operatörü ile Herglotz dalga fonksiyonu arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremle veriyoruz.

Teorem 3.3

v_g^i, v_h^i çekirdekleri sırasıyla $g, h \in L^2(\Omega)$ olan Herglotz dalga fonksiyonları olsunlar. v_g, v_h [3.2]-[3.4] ün çözümleri olsunlar. $e^{ikx \cdot d}$, v_g ve v_h ya göre v_g^i ve v_h^i ile yerdeğiştirsin. O zaman

$$\begin{aligned}
ik^2 \iint_{\Omega_b} \text{Im } n(x) v_g(x) \overline{v_h(x)} dx &= 2\pi(Fg, h) - ik(Fg, Fh) - 2\pi(g, Fh) \\
&\quad - \frac{1}{2} \iint_{\Omega_b} \frac{1}{\rho(x)} \nabla \rho(x) \{v_g(x) \nabla \overline{v_h(x)} - \overline{v_h(x)} \nabla v_g(x)\} dx
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

elde edilir. Burada $(\cdot, \cdot)$, $L^2(\Omega)$ da iç çarpımdır.

İspat

v_g^s ve v_h^s , v_g ve v_h ya göre saçılan alanları tanımlasınlar. Uzak alan modelleri $v_{g,\infty}$, $v_{h,\infty}$ olsun. Ω_b bölgesine Green teoremini uygularsak,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega_b} \{v_g \Delta \overline{v_h} - \overline{v_h} \Delta v_g\} dx &= \int_{\partial\Omega_b} \left\{ v_g \frac{\partial \overline{v_h}}{\partial \nu} - \overline{v_h} \frac{\partial v_g}{\partial \nu} \right\} ds(x) \\
\iint_{\Omega_b} \left\{ v_g \left(\frac{1}{\rho} \nabla \rho \nabla \overline{v_h} - k^2 \overline{nv_h} \right) - \overline{v_h} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \rho \nabla v_g - k^2 nv_g \right) \right\} dx \\
&= \int_{\partial\Omega_b} \left\{ (v_g^s + v_g^i) \frac{\partial (\overline{v_h^s} + \overline{v_h^i})}{\partial \nu} - (\overline{v_h^s} + \overline{v_h^i}) \frac{\partial (v_g^s + v_g^i)}{\partial \nu} \right\} ds(x) \\
&= \int_{\partial\Omega_b} \left\{ v_g^s \frac{\partial \overline{v_h^i}}{\partial \nu} - \overline{v_h^i} \frac{\partial v_g^s}{\partial \nu} \right\} ds(x) + \int_{\partial\Omega_b} \left\{ v_g^i \frac{\partial \overline{v_h^s}}{\partial \nu} - \overline{v_h^s} \frac{\partial v_g^i}{\partial \nu} \right\} ds(x) \\
&\quad + \int_{\partial\Omega_b} \left\{ v_g^s \frac{\partial \overline{v_h^s}}{\partial \nu} - \overline{v_h^s} \frac{\partial v_g^s}{\partial \nu} \right\} ds(x) + \int_{\partial\Omega_b} \left\{ v_g^i \frac{\partial \overline{v_h^i}}{\partial \nu} - \overline{v_h^i} \frac{\partial v_g^i}{\partial \nu} \right\} ds(x)
\end{aligned}
\tag{3.15}$$

elde edilir. [3.15] deki eşitliğin sağındaki son integral Green teoreminden sıfırdır. Ayrıca *Lemma 3.1* ve *Lemma 3.2* kullanılarak,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_b} \left\{ v_g^i \frac{\partial \bar{v}_h^s}{\partial \nu} - \bar{v}_h^s \frac{\partial v_g^i}{\partial \nu} \right\} ds(x) &= \int_{\partial\Omega_b} \left\{ \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d) \frac{\partial \bar{v}_h^s}{\partial \nu}(x) \right. \\ &\quad \left. - \bar{v}_h^s(x) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d) \right\} ds(x) \\ &= -4\pi \int_{\Omega} g(d) \overline{v_{h,\infty}(d)} ds(d) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\overline{v_{h,\infty}}(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega_b} \left\{ \bar{v}_h^s(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x} \cdot y}}{\partial \nu(y)} - e^{-ik\hat{x} \cdot y} \frac{\partial \bar{v}_h^s}{\partial \nu}(y) \right\} ds(y)$$

şeklindedir. v_g^i olay dalgaya göre uzak alan modeli, $Fg = v_{g,\infty}$ olmak üzere [3.15] eşitliği ;

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_b} \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \rho (v_g \nabla \bar{v}_h - \bar{v}_h \nabla v_g) + (n - \bar{n}) k^2 v_g \bar{v}_h \right\} dx \\ = -2ik \int_{\Omega} v_{g,\infty} \overline{v_{h,\infty}} ds(d) + 4\pi \int_{\Omega} v_{g,\infty} \bar{h} ds(d) - 4\pi \int_{\Omega} g \overline{v_{h,\infty}} ds(d) \end{aligned}$$

olur. Böylece ,

$$\iint_{\Omega_b} \frac{1}{\rho} \nabla \rho (v_g \nabla \bar{v}_h - \bar{v}_h \nabla v_g) dx + 2ik^2 \iint_{\Omega_b} \operatorname{Im} n v_g \bar{v}_h dx$$

$$= 4\pi(Fg, h) - 2ik(Fg, Fh) - 4\pi(g, Fh)$$

veya

$$ik^2 \iint_{\Omega_b} \operatorname{Im} n v_g \bar{v}_h dx = 2\pi(Fg, h) - ik(Fg, Fh) - 2\pi(g, Fh)$$

$$- \frac{1}{2} \iint_{\Omega_b} \frac{1}{\rho} \nabla \rho (v_g \nabla \bar{v}_h - \bar{v}_h \nabla v_g) dx \quad [3.16]$$

elde edilir.

Sonuç 3.4

$$\operatorname{Im} n \geq 0 \quad \text{veya} \quad 0 \leq \iint_{\Omega_b} \frac{1}{\rho} \nabla \rho (\operatorname{Im} v_g \nabla \operatorname{Re} v_g - \operatorname{Re} v_g \nabla \operatorname{Im} v_g) dx \quad [3.17]$$

olduğunu kabul edelim. O zaman F 'nin sıfır hariç reel özdeğeri yoktur.

İspat

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \neq 0$ için $Fg = \lambda g$ olsun. O zaman bir önceki teoremden $h = g$ seçersek

$$ik^2 \iint_{\Omega_b} \operatorname{Im} n |v_g|^2 dx = 2\pi(Fg, g) - ik(Fg, Fg) - 2\pi(g, Fg)$$

$$- \frac{1}{2} \iint_{\Omega_b} \frac{1}{\rho} \nabla \rho (v_g \nabla \bar{v}_g - \bar{v}_g \nabla v_g) dx$$

ve hipotezi kullanırsak ,

$$\begin{aligned}
 ik^2 \iint_{\Omega_b} \text{Im } n |v_g|^2 dx &= 2\pi(\lambda g, g) - ik(\lambda g, \lambda g) - 2\pi(g, \lambda g) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \iint_{\Omega_b} \frac{1}{\rho} \nabla \rho \left\{ (\text{Re } v_g + i \text{Im } v_g) (\nabla \text{Re } v_g - i \nabla \text{Im } v_g) \right. \\
 &\quad \left. - (\text{Re } v_g - i \text{Im } v_g) (\nabla \text{Re } v_g + i \nabla \text{Im } v_g) \right\} dx \\
 &= 2\pi\lambda \|g\|^2 - ik|\lambda|^2 \|g\|^2 - 2\pi\bar{\lambda} \|g\|^2 - i \iint_{\Omega_b} \frac{1}{\rho} \nabla \rho (\text{Im } v_g \nabla \text{Re } v_g - \text{Re } v_g \nabla \text{Im } v_g) dx \\
 &= 4\pi i \text{Im } \lambda \|g\|^2 - ik|\lambda|^2 \|g\|^2 - i \iint_{\Omega_b} \frac{1}{\rho} \nabla \rho (\text{Im } v_g \nabla \text{Re } v_g - \text{Re } v_g \nabla \text{Im } v_g) dx
 \end{aligned}$$

olur. O zaman ,

$$\begin{aligned}
 k^2 \iint_{\Omega_b} \text{Im } n |v_g|^2 dx &= 4\pi \text{Im } \lambda \|g\|^2 - k|\lambda|^2 \|g\|^2 \\
 &\quad - \iint_{\Omega_b} \frac{1}{\rho} \nabla \rho (\text{Im } v_g \nabla \text{Re } v_g - \text{Re } v_g \nabla \text{Im } v_g) dx
 \end{aligned}$$

elde edilir. $\lambda \in \mathbb{R}$ olduğundan $\text{Im } \lambda = 0$ olur. O halde son eşitlikten ,

$$k^2 \iint_{\Omega_b} \text{Im } n |v_g|^2 dx + k|\lambda|^2 \|g\|^2 + \iint_{\Omega_b} \frac{1}{\rho} \nabla \rho (\text{Im } v_g \nabla \text{Re } v_g - \text{Re } v_g \nabla \text{Im } v_g) dx = 0 \quad [3.18]$$

elde edilir. Bu durumda [3.18] in sol tarafı sıfırdan büyük veya eşit olduğundan

$$k|\lambda|^2\|g\|^2 = 0$$

olur. $k > 0$ ve $\lambda \neq 0$ olduğundan $\|g\|^2 = 0$ ve buradan $g = 0$ olmasını gerektirir. Bu da bizi çelişkiye götürür. O halde $\lambda \notin \mathbb{R}$ dir.

Sonuç 3.5

$\text{Im } n = 0$ ve $v_g = \overline{v_h}$ olsun. O zaman F normaldir. Yani; $FF^* = F^*F$ sağlanır. $S = I + \frac{ik}{2\pi} F$ saçılma operatörü birim operatördür. Yani; $SS^* = S^*S = I$ sağlanır.

İspat

Teorem 3.3 ve hipotezi kullanırsak ;

$$ik^2 \iint_{\Omega_b} \text{Im } n v_g \overline{v_h} dx = 2\pi(Fg, h) - ik(Fg, Fh) - 2\pi(g, Fh)$$

$$- \frac{1}{2} \iint_{\Omega_b} \frac{1}{\rho} \nabla \rho \{ v_g \nabla \overline{v_h} - \overline{v_h} \nabla v_g \} dx$$

ve buradan

$$0 = 2\pi(Fg, h) - ik(Fg, Fh) - 2\pi(g, Fh) \quad [3.19]$$

elde edilir.

$$ik(Fg, Fh) = 2\pi\{(Fg, h) - (g, Fh)\}$$

veya

$$\begin{aligned}(g, -ikF^*Fh) &= 2\pi\{(g, F^*h) - (g, Fh)\} \\ &= 2\pi(g, (F^* - F)h)\end{aligned}$$

bütün $g, h \in L^2(\Omega)$ için olur. Böylece

$$ikF^*F = 2\pi(F - F^*) \quad [3.20]$$

elde edilir. Burada ,

$$(Fg)(\hat{x}) = \int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}; d) g(d) ds(d)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}(F^*g)(\hat{x}) &= \int_{\Omega} \overline{u_{\infty}(d; \hat{x})} g(d) ds(d) \\ &= \int_{\Omega} \overline{u_{\infty}(-\hat{x}; -d)} g(d) ds(d) \\ &= \int_{\Omega} \overline{u_{\infty}(-\hat{x}; d)} g(-d) ds(d) \\ (F^*g)(\hat{x}) &= \overline{\int_{\Omega} u_{\infty}(-\hat{x}, d) \overline{g(-d)} ds(d)}\end{aligned}$$

elde edilir. $R : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $(Rg)(d) := g(-d)$ ile tanımlansın .

O zaman $\overline{RFR}g = F^*g$ olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned}
\overline{(RFRg)}(\hat{x}) &= \overline{\int_{\Omega} u_{\infty}(-\hat{x}; d)(R\bar{g})(d)ds(d)} \\
&= \overline{\int_{\Omega} u_{\infty}(-\hat{x}; d)\overline{g(-d)}ds(d)} \\
&= \overline{\int_{\Omega} u_{\infty}(-\hat{x}; -d)\overline{g(d)}ds(d)} \\
&= \overline{\int_{\Omega} u_{\infty}(d; \hat{x})\overline{g(d)}ds(d)} \\
&= \int_{\Omega} \overline{u_{\infty}(d; \hat{x})}g(d)ds(d) \\
&= (F^*g)(\hat{x})
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $g, h \in L^2(\Omega)$ için $(Rg, Rh) = (g, h) = (\bar{h}, \bar{g})$ sağlanır. Gösterelim;

$$\begin{aligned}
(Rg, Rh) &= \int_{\Omega} (Rg)(d)\overline{(Rh)(d)}ds(d) \\
&= \int_{\Omega} g(-d)\overline{h(-d)}ds(d) \\
&= \int_{\Omega} g(d)\overline{h(d)}ds(d) \\
&= (g, h)
\end{aligned}$$

[3.21]

$$\begin{aligned}
(\bar{h}, \bar{g}) &= \int_{\Omega} \overline{h(d)}\overline{\overline{g(d)}}ds(d) \\
&= \int_{\Omega} g(d)\overline{h(d)}ds(d)
\end{aligned}$$

$$= (g, h) \quad [3.22]$$

[3.21] ve [3.22] den $(Rg, Rh) = (g, h) = (\bar{h}, \bar{g})$ elde edilir. O halde $F^*g = \overline{RFRg}$ ve $F^*h = \overline{RFRh}$ sağlanır. O zaman

$$\begin{aligned} ik(F^*g, F^*h) &= ik(\overline{F^*h}, \overline{F^*g}) \\ &= ik(RFR\bar{h}, RFR\bar{g}) \\ &= ik(FR\bar{h}, FR\bar{g}) \\ &= 2\pi \{ (FR\bar{h}, R\bar{g}) - (R\bar{h}, FR\bar{g}) \} \\ &= 2\pi \{ (RFR\bar{h}, \bar{g}) - (\bar{h}, RFR\bar{g}) \} \\ &= 2\pi \{ (g, RFR\bar{h}) - (RFR\bar{g}, h) \} \\ &= 2\pi \{ (g, F^*h) - (F^*g, h) \} \end{aligned}$$

olur. $ik(F^*g, F^*h) = (g, -ikFF^*h)$ olduğundan

$$\begin{aligned} (g, -ikFF^*h) &= 2\pi \{ (g, F^*h) - (F^*g, h) \} \\ &= 2\pi \{ (g, F^*h) - (g, Fh) \} \\ (g, -ikFF^*h) &= 2\pi (g, (F^* - F)h) \end{aligned} \quad [3.23]$$

elde edilir. [3.23] denkleminde

$$ikFF^* = 2\pi(F - F^*) \quad [3.24]$$

elde edilir. [3.20] ve [3.24] den $FF^* = F^*F$ elde edilir. Bu sonuç F 'nin normal

olduğunu söyler. Şimdi $S = I + \frac{ik}{2\pi}F$ olmak üzere $SS^* = S^*S = I$ olduğunu

gösterelim.

$$(S^*Sg, g) = (Sg, Sg)$$

$$= \int_{\Omega} (Sg)(\overline{Sg}) ds$$

$$= \int_{\Omega} \left(I + \frac{ik}{2\pi} F \right) (g) \left(I + \frac{ik}{2\pi} \overline{F} \right) (g) ds$$

$$= (Ig, Ig) - \frac{ik}{2\pi} (Ig, Fg) + \frac{ik}{2\pi} (Fg, Ig) + \frac{k^2}{4\pi} (Fg, Fg)$$

$$= (Ig, Ig) - \frac{ik}{2\pi} (Ig, (F - F^*)g) + \frac{ik}{2\pi} (Ig, (F - F^*)g)$$

Böylece ,

$$(S^*Sg, g) = (Ig, Ig)$$

sağlanır. Yani ; $S^*S = I$ elde edilir. Benzer olarak $SS^* = I$ bulunur. F kompakt bir operatör olduğundan sayılabilir sayıda özdeğerleri vardır (39).

4. HOMOJEN OLMAYAN BİR ORTAMDA YAYILAN AKUSTİK DALGALAR İÇİN TERS SAÇILMA PROBLEMİ VE UZAK ALAN OPERATÖRÜNE AİT BAZI SONUÇLAR

Γ , m nin desteğinin içinde yer alan düzgün , kapalı bir yüzey olsun. Öyleki ; k^2 Γ nin içinde $-\Delta$ için bir Dirichlet özdeğerleri olmasın. Yani ; o zaman

$$-\Delta u = k^2 u \quad \Gamma \text{ nin içinde} \quad [4.1]$$

$$u = 0 \quad \Gamma \text{ nin üzerinde} \quad [4.2]$$

Dirichlet probleminin bir tek çözümü $u = 0$ olur. $\varphi \in L^2(\Gamma)$ için single layer potansiyeli

$$u_\varphi(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \quad [4.3]$$

ile tanımlanır. Burada Φ temel çözümü

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \quad , \quad x \neq y \quad [4.4]$$

formülü ile verilsin. u_φ nin uzak alan modeli ,

$$\begin{aligned} u_\varphi(x) &= \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) \\ &= \int_{\Gamma} e^{ik|x|} \left\{ \frac{e^{-ik\hat{x} \cdot y}}{4\pi} + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} \varphi(y) ds(y) \quad , \quad |x| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} e^{-ik\hat{x} \cdot y} \varphi(y) ds(y) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty$$

denkleminde

$$u_{\varphi,\infty}(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} e^{-ik\hat{x} \cdot y} \varphi(y) ds(y) \quad [4.5]$$

elde edilir. $\lambda \neq 0$ ve $g \in L^2(\Omega)$ için

$$\lambda g(\hat{x}) := u_{\varphi,\infty}(\hat{x}) \quad [4.6]$$

ile tanımlıyalım.

$$v_g(x) := \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d) \quad [4.7]$$

Herglotz dalga fonksiyonu olsun. Şimdi [3.2]-[3.4] saçılma probleminin uzak alan modeli u_{∞} a göre F uzak alan operatörünün spektrumunu $\sigma(F)$ ile gösterelim.

$\lambda \notin \sigma(F)$ için $g_l \in L^2(\Omega)$ fonksiyonu ,

$$Fg - \lambda g = \frac{1}{ki^{l+1}} Y_l \quad [4.8]$$

denkleminin bir tek çözümü olsun. Burada $Y_l(\hat{x})$, ($l = 0, 1, 2, 3, \dots$) l . mertebeden küresel harmonikler olsun. Saçılan alanın kendisinin uzak alan modeliyle tek olarak belirlendiğinden (33) ve ayrıca [4.8] ve tekliğin devamı prensibinden (33) eğer $\lambda g_l = u_{\varphi,\infty}$ integral denkleminin tek bir φ_l çözümü var ise ,

$$\int_{\Omega} u(x; d) g_l(d) ds(d) - v_{g_l}(x) - u_{\varphi_l}(x) = h_l^{(1)}(k|x|) Y_l(\hat{x}) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b \quad [4.9]$$

denklemini sağlanır. Şimdi [4.9] denklemini gösterelim; $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x; d) g_l(d) ds(d) - \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g_l(d) ds(d) - \int_{\Gamma} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \varphi_l(y) ds(y) \\ = h_l^{(1)}(k|x|) Y_l(\hat{x}) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b \\ = (-i)^l \frac{e^{ik|x|}}{ik|x|} \left\{ 1 + \sum_{p=1}^l \frac{a_{pl}}{(k|x|)^p} \right\} Y_l(\hat{x}) \\ = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ \frac{1}{k(i)^{l+1}} Y_l(\hat{x}) + \frac{Y_l(\hat{x})}{k(i)^{l+1}} \sum_{p=1}^l \frac{a_{pl}}{(k|x|)^p} \right\} \end{aligned} \quad [4.10]$$

Burada a_{pl} ler kompleks katsayılarıdır. $\int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g_l(d) ds(d)$ Herglotz dalga

fonksiyonu Helmholtz denklemini sağlamaktadır. Ayrıca Γ içinde k^2 , $-\Delta$ 'nın bir eigen değeri olmadığından bu Herglotz dalga fonksiyonu Γ içinde sıfıra eşittir. [4.10] denkleminin asimtotik açılımlarını yazarsak

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ u_{\infty}(\hat{x}; d) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} g_l(d) ds(d) - \int_{\Gamma} \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ \frac{e^{-ik\hat{x} \cdot y}}{4\pi} + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} \varphi_l(y) ds(y) \\ = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ \frac{1}{k(i)^{l+1}} Y_l(\hat{x}) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} \quad , \quad |x| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}; d) g_l(d) ds(d) - \int_{\Gamma} \frac{e^{-ik\hat{x} \cdot y}}{4\pi} \varphi_l(y) ds(y) = \frac{1}{k(i)^{l+1}} Y_l(\hat{x})$$

elde edilir. Burada $h_l^{(1)}$, l . mertebeden $(-L \leq l \leq L)$ birinci çeşit küresel Hankel fonksiyonudur. u_∞ yardımıyla n kırılma indeksinin bulunma problemi olan ters saçılma probleminin çözümü için şimdi [4.8],[4.9] sisteminden n yi elde etmeye çalışacağız. Eğer bu sistemi (33) deki optimizasyon problemi olarak formüle edersek, o zaman aşağıda vereceğimiz teoremden dolayı, değer (cost) fonksiyonelinin minimum değeri sıfır olur.

Teorem 4.1

$$Y := \left\{ w \in C^2(\overline{\Omega_b}) : \Delta w + k^2 n(x)w = \frac{1}{\rho} \nabla \rho \nabla w, \quad \Omega_b \text{'de} \right\} \text{ ve}$$

$$W := \left\{ \left(w - v_g - u_\varphi, \frac{\partial}{\partial \nu} (w - v_g - u_\varphi) \right) : \varphi \in L^2(\Gamma), \lambda g = u_{\varphi, \infty}, w \in Y \right\}$$

olsun. Kabul edelim ki $\lambda \notin \sigma(F)$ olsun. O zaman W , $L^2(\partial\Omega_b) \times L^2(\partial\Omega_b)$ de yoğundur.

İspat

j_0 , sıfırcıncı mertebeden küresel Bessel fonksiyonu olmak üzere ,

$$\int_{\Omega} e^{ikd(x-y)} ds(d) = 4\pi j_0(k|x-y|)$$

denklemini sağlanır (33). [4.6] yı kullanırsak

$$v_g(x) = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma} \varphi(y) j_0(k|x-y|) ds(y) \quad [4.11]$$

elde ederiz. $a, b \in L^2(\partial\Omega_b)$ olmak üzere $(\bar{a}, \bar{b}) \perp W$ olsun ; yani her $w \in Y$ ve $\varphi \in L^2(\Gamma)$ için ,

$$\int_{\partial\Omega_b} \left\{ (w - v_g - u_\varphi) \bar{a} + \frac{\partial}{\partial \nu} (w - v_g - u_\varphi) \bar{b} \right\} ds = 0 \quad [4.12]$$

sağlansın.

$$v(x) := \int_{\partial\Omega_b} \left\{ \Psi(x, y) \overline{a(y)} + \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Psi(x, y) \overline{b(y)} \right\} ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega_b \quad [4.13]$$

tanımlayalım. Burada $\Psi(x, y) := \frac{1}{\lambda} j_0(k|x-y|) + \Phi(x, y)$ dir. [4.12] de $w = 0$ alırsak o zaman ,

$$\int_{\partial\Omega_b} \left\{ (v_g + u_\varphi) \bar{a} + \frac{\partial}{\partial \nu} (v_g + u_\varphi) \bar{b} \right\} ds = 0$$

olur. v_g ve u_φ 'yi son denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega_b} \left[\left\{ \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{\lambda} j_0(k|x-y|) + \Phi(x, y) \right) \varphi(y) ds(y) \right\} \overline{a(x)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \left\{ \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{\lambda} j_0(k|x-y|) + \Phi(x, y) \right) \varphi(y) ds(y) \right\} \overline{b(x)} \right] ds(x) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.İntegrasyonun sırasını değıştirirsek,

$$\int_{\Gamma} \int_{\partial\Omega_b} \left\{ \Psi(x, y) \overline{a(x)} + \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \Psi(x, y) \overline{b(x)} \right\} ds(x) \varphi(y) ds(y) = 0$$

veya

$$\int_{\Gamma} v(y) \varphi(y) ds(y) = 0 \quad [4.14]$$

elde ederiz.[4.14] her $\varphi \in L^2(\Gamma)$ için sağlandığından Γ üzerinde $v = 0$ olur. v , $\Delta v + k^2 v = 0$ denklemini sağlar. k^2 , Γ içinde $-\Delta$ için bir Dirichlet özdeğeri olmadığından v , Γ içinde sıfırdır.Çözümün tekliğı prensibinden (33) Ω_b de $v = 0$ olur.Böylece L^2 de single ve double layer potansiyellerin sıçrama bağıntılarından (33),

$$v_+ = \bar{b}, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|_+ = -\bar{a} \quad \partial\Omega_b \text{ de} \quad [4.15]$$

elde edilir.Burada $+$, Ω_b nin dışından $\partial\Omega_b$ ye doğru limit almak anlamındadır.

[4.12] de $\varphi = 0$ alırsak o zaman

$$\int_{\partial\Omega_b} \left\{ w \bar{a} + \frac{\partial w}{\partial \nu} \bar{b} \right\} ds = 0 \quad [4.16]$$

olur.Burada [4.15] denklemleri [4.16] de yazılırsa her $w \in Y$ için

$$\int_{\partial\Omega_b} \left\{ w \left. \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|_+ - v_+ \frac{\partial w}{\partial \nu} \right\} ds = 0 \quad [4.17]$$

elde edilir. Şimdi

$$v^s(x) := \int_{\partial\Omega_b} \left\{ \Phi(x, y) \overline{a(y)} + \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu} \overline{b(y)} \right\} ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_b} \quad [4.18]$$

ve

$$v^0(x) := \int_{\partial\Omega_b} \left\{ j_0(k|x-y|) \overline{a(y)} + \frac{\partial j_0(k|x-y|)}{\partial\nu(y)} \overline{b(y)} \right\} ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad [4.19]$$

tanımlarını yapalım.

$$\int_{\Omega} e^{ikd \cdot (x-y)} ds(d) = 4\pi j_0(k|x-y|)$$

denklemini [4.19] de yazarsak

$$\begin{aligned} v^0(x) &= \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_b} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} e^{ikd \cdot (x-y)} ds(d) \overline{a(y)} + \frac{\partial}{\partial\nu(y)} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} e^{ikd \cdot (x-y)} ds(d) \overline{b(y)} \right\} ds(y) \\ &= \int_{\Omega} e^{ikd \cdot x} \tilde{g}(d) ds(d) \end{aligned} \quad [4.20]$$

elde edilir. Burada $\tilde{g} \in L^2(\Omega)$ olmak üzere ,

$$\tilde{g}(d) := \frac{1}{4\pi \lambda} \int_{\partial\Omega_b} \left\{ e^{-ikd \cdot y} \overline{a(y)} + \frac{\partial e^{-ikd \cdot y}}{\partial\nu(y)} \overline{b(y)} \right\} ds(y) \quad [4.21]$$

denklemini olarak tanımlanmıştır. [4.18] ve [4.21] denklemlerinden ,

$$v^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ \lambda \tilde{g}(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty$$

elde edilir. O zaman v^s nin uzak alan modeli $v_\infty = \lambda \tilde{g}$ olur. [4.17] denkleminde $\hat{z} \in \Omega$ için w yerine

$$w(x) = u^s(x; -\hat{z}) + e^{-ikx \cdot \hat{z}} \quad [4.22]$$

ifadesini yerine yazalım. $v = v^s + v^0$ ve Green teoremini kullanırsak ,

$$\begin{aligned} \iint_{D_R \setminus \Omega_b} \{w \Delta v - v \Delta w\} dx &= \int_{\Omega_R \cup \partial \Omega_b} \left\{ w \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial w}{\partial \nu} \right\} ds(x) \\ &= - \int_{\Omega_R} \left\{ w \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial w}{\partial \nu} \right\} ds(x) + \int_{\partial \Omega_b} \left\{ w \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial w}{\partial \nu} \right\} ds(x) \quad [4.23] \end{aligned}$$

[4.23] eşitliğinin sağındaki ilk integralde v ve w fonksiyonları Sommerfeld yayılma şartını ve Sommerfeld sınırlılık (finiteness) şartını sağladıklarından dolayı $R \rightarrow \infty$ için sıfır olur. Yani ; $R \rightarrow \infty$ için $v = w = 0$.Böylece [4.23] ,

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega_b} \left\{ w \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial w}{\partial \nu} \right\} ds(x) &= \iint_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b} \{w \Delta v - v \Delta w\} dx \\ &= \iint_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b} \left\{ \left(u^s(x; -\hat{z}) + e^{-ikx \cdot \hat{z}} \right) \Delta (v^s + v^0) - (v^s + v^0) \Delta \left(u^s(x; -\hat{z}) + e^{-ikx \cdot \hat{z}} \right) \right\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b} \{u^s(x; -\hat{z}) \Delta v^s(x) - v^s(x) \Delta u^s(x; -\hat{z})\} dx \\
&+ \iint_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b} \{u^s(x; -\hat{z}) \Delta v^0(x) - v^0(x) \Delta u^s(x; -\hat{z})\} dx \\
&+ \iint_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b} \{e^{-ikx \cdot \hat{z}} \Delta v^0(x) - v^0(x) \Delta e^{-ikx \cdot \hat{z}}\} dx \\
&+ \iint_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b} \{e^{-ikx \cdot \hat{z}} \Delta v^s(x) - v^s(x) \Delta e^{-ikx \cdot \hat{z}}\} dx
\end{aligned}$$

olur. v^s ve u^s , $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b$ 'de ve v^0 ve $e^{-ikx \cdot \hat{z}}$, $\mathbb{R}^3$ 'de Helmholtz denklemini sağladıklarından, son denklemin sağındaki ilk ve üçüncü integraller sıfır olur.

Böylece ,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b} \{u^s(x; -\hat{z}) \Delta v^0(x) - v^0(x) \Delta u^s(x; -\hat{z})\} dx \\
&+ \iint_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b} \{e^{-ikx \cdot \hat{z}} \Delta v^s(x) - v^s(x) \Delta e^{-ikx \cdot \hat{z}}\} dx = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Green teoremini $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b$ bölgesine uygularsak ,

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial \Omega_b} \left\{ u^s(x; -\hat{z}) \frac{\partial v^0(x)}{\partial \nu} - v^0(x) \frac{\partial u^s(x; -\hat{z})}{\partial \nu} \right\} ds(x) \\
&+ \int_{\partial \Omega_b} \left\{ e^{-ikx \cdot \hat{z}} \frac{\partial v^s(x)}{\partial \nu} - v^s(x) \frac{\partial e^{-ikx \cdot \hat{z}}}{\partial \nu} \right\} ds(x) = 0 \quad [4.24]
\end{aligned}$$

elde ederiz. [4.20] , [4.24] de yerine yazarsak ve integrasyon sırasını değiştirirsek ve

$$v_{\infty}(\hat{z}) = \int_{\partial\Omega_b} \left\{ e^{-ikx \cdot \hat{z}} \frac{\partial v^s}{\partial \nu}(x) - v^s(x) \frac{\partial e^{-ikx \cdot \hat{z}}}{\partial \nu(x)} \right\} ds(x)$$

denklemini kullanırsak [4.24] denklemi ,

$$v_{\infty}(\hat{z}) = \int_{\Omega} \tilde{g}(d) \tilde{u}_{\infty}(-d; -\hat{z}) ds(d) \quad [4.25]$$

olur. [4.25] de karşıtlık (reciprocity) (33) özelliği kullanılırsa ,

$$\begin{aligned} v_{\infty}(\hat{z}) &= \int_{\Omega} \tilde{g}(d) \tilde{u}_{\infty}(\hat{z}; d) ds(d) \\ &= F\tilde{g}(\hat{z}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$F\tilde{g} = v_{\infty} = \lambda \tilde{g}$$

elde edilir. Hipotezden $\lambda \notin \sigma(F)$ olduğundan $\tilde{g} = 0$ olur. Bu da $v_{\infty} = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b$ de $v^s = 0$ ve $\mathbb{R}^3$ de $v^0 = 0$ olur. Yani ; $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b$ de $v = 0$ olur. $\partial\Omega_b$ üzerinde

$$v_+ = \bar{b} \quad , \quad \left. \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|_+ = -\bar{a}$$

olduğundan $a = b = 0$ elde ederiz. Böylece W , $L^2(\partial\Omega_b) \times L^2(\partial\Omega_b)$ de yoğundur.

Lemma 4.2

$L^2(\Omega)$ uzayında $F = \{F(x; k, \alpha_n) : n = 1, 2, 3, \dots\}$ uzak alan modellerinin ortogonal tümleyeni, $g \in L^2(\Omega)$ fonksiyonlarından meydana gelir öyleki ;

$w \in C^2(\Omega_b) \cap C^1(\overline{\Omega_b})$ ve

$$v(x) = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot \hat{y}} g(\hat{y}) ds(\hat{y}) \quad , \quad \mathbb{R}^3$$

Herglotz dalga fonksiyonu olmak üzere $\{w, v\}$ ikilisi

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad , \quad \Omega_b \text{ de} \quad [4.26]$$

$$\Delta w + k^2 n(x)w = \frac{1}{\rho} \nabla \rho \nabla w \quad , \quad \Omega_b \text{ de} \quad [4.27]$$

$$\overline{w} = v \quad , \quad \frac{\partial \overline{w}}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \quad , \quad \partial \Omega_b \text{ de} \quad [4.28]$$

denklemlerini sağlar.

İspat

$F^\perp$ ile F nin ortogonal tümleyenini tanımlıyalım. Eğer $g \in F^\perp$ ise o zaman hipotezdeki kabulleri sağladığını göstereceğiz. Gerçekten eğer g lemmanın kabullerini sağlarsa o zaman $g \in F^\perp$ dir.

$g \in F^\perp$ kabul edelim. O zaman

$$(F, g) = \int_{\Omega} F(\hat{x}; k, \hat{\alpha}_n) \overline{g(\hat{x})} ds(\hat{x}) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ için}$$

olur.Karşılıklı (reciprocity) bağıntısından ve $\hat{\alpha}$ ya göre F nin sürekliliğinden

$$\int_{\Omega} F(\hat{x}; k, \hat{\alpha}) \overline{g(\hat{x})} ds(\hat{x}) = 0$$

$$\int_{\Omega} F(-\hat{\alpha}; k, -\hat{x}) \overline{g(\hat{x})} ds(\hat{x}) = 0 \quad , \quad \forall \hat{\alpha} \in \Omega \text{ için}$$

$-\hat{\alpha} = \hat{t}$ ve $-\hat{x} = \hat{v}$ alırsak

$$\int_{\Omega} F(\hat{t}; k, \hat{v}) \overline{g(-\hat{v})} ds(\hat{v}) = 0 \quad , \quad \forall \hat{t} \in \Omega \text{ için}$$

$\hat{t} \leftrightarrow \hat{v}$ alırsak

$$\int_{\Omega} F(\hat{v}; k, \hat{t}) \overline{g(-\hat{t})} ds(\hat{t}) = 0 \quad , \quad \forall \hat{v} \in \Omega \text{ için}$$

$\hat{\alpha} = \hat{t}$ ve $\hat{x} = \hat{v}$ alırsak

$$\int_{\Omega} F(\hat{x}; k, \hat{\alpha}) \overline{g(-\hat{\alpha})} ds(\hat{\alpha}) = 0 \quad , \quad \forall \hat{\alpha} \in \Omega \text{ için} \quad [4.29]$$

$\hat{\alpha}$ gelen dalgalar için $F(., k, \hat{\alpha})$ uzak alan modellerinin üst üste eklenmesi (süperpozisyonu) ile

$$w_{\infty}(\hat{x}) = \int_{\Omega} F(\hat{x}; k, \hat{\alpha}) \overline{g(-\hat{\alpha})} ds(\hat{\alpha})$$

ile verilir(33).O zaman

$$w^i(\hat{x}) = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot \hat{\alpha}} \overline{g(-\hat{\alpha})} ds(\hat{\alpha})$$

$$w^i(\hat{x}) = \int_{\Omega} e^{-ikx \cdot \hat{\alpha}} \overline{g(\hat{\alpha})} ds(\hat{\alpha})$$

$$\overline{w^i(x)} = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot \hat{\alpha}} g(\hat{\alpha}) ds(\hat{\alpha}) = v$$

$w^i(x)$ olay dalgaya göre [4.29] denkleminin sol tarafı w^s saçılan alanın uzak alan modelidir (33). Fakat [4.29] den w^s 'nin uzak alan modeli sıfırdır. Böylece IR^3 de $w^s = 0$ olur. Yani ; $w = w^s + w^i$ ise o zaman

$$w = w^i, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial w^i}{\partial \nu}, \quad \partial\Omega_b \text{ de}$$

olur. $\overline{w^i} = v$ dir. $w = w^s + w^i$ buradan $\overline{w} = \overline{w^s} + v$ olur ve buradan da

$$\overline{w} = v, \quad \frac{\partial \overline{w}}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad \partial\Omega_b \text{ de}$$

elde edilir.

Lemma 4.3

Eğer $\text{Im } n(x) > 0$ ve $v_g = \overline{v_h}$ ise o zaman F uzak alan operatörü bire birdir.

İspat

[3.14] denkleminde $v_g = \overline{v_h}$ alırsak

$$ik^2 \iint_{\Omega_b} \text{Im } n(x) (v_g(x))^2 dx = 2\pi(Fg, h) - ik(Fg, Fh) - 2\pi(g, Fh)$$

elde edilir. Buradan $g = h$ alırsak

$$ik^2 \iint_{\Omega_b} \text{Im } n(x) (v_g(x))^2 dx = 2\pi(Fg, g) - ik(Fg, Fg) - 2\pi(g, Fg) \quad [4.30]$$

elde edilir. $Fg = 0$ olsun ve bazı $x \in \Omega_b$ için $\text{Im } n(x) > 0$ alırsak o zaman [4.30] denklemi

$$ik^2 \iint_{\Omega_b} \text{Im } n(x) (v_g(x))^2 dx = 0$$

denklemine dönüşür. Buradan $v_g(x) = 0$ elde edilir. x i içine alan yuvar Ω_b tarafından içerildiğinden tekliğin devamı prensibinden Ω_b de $v_g = 0$ olur. Lippmann-Schwinger denkleminde Ω_b de $v'_g(x) = 0$ olur. O zaman $g = 0$ olur. Bu da F nin bire bir olduğunu söyler.

Teorem 4.4

[3.2]-[3.4] problemine karşılık gelen uzak alan operatörünün bire bir ve görüntü kümesinin yoğun olması için gerek ve yeter koşul

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad \Omega_b \text{ de} \quad [4.31]$$

$$\Delta w + k^2 n(x)w = \frac{1}{\rho} \nabla \rho \nabla w, \quad \Omega_b \text{ de} \quad [4.32]$$

$$w = v \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \quad , \quad \partial\Omega_b \text{ de} \quad [4.33]$$

iç geçiş probleminin $w \in C^2(\Omega_b) \cap C^1(\overline{\Omega_b})$ ve v Herglotz dalga fonksiyonunun mevcut olmamasıdır.

İspat

($\Leftarrow$): F nin bire birliğini gösterelim ; Kabul edelimki F bire bir olmasın.Yani ; $g \neq 0$ iken $Fg = 0$ olsun.[3.13] ile tanımlanan F operatörü

$$\hat{x} \in \Omega \text{ için } (Fg)(\hat{x}) = \int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}; d) g(d) ds(d) = 0$$

dir.Lemma 2.2.8'den

$$w_{\infty}(\hat{x}) = \int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}; d) g(d) ds(d)$$

olduğundan $w_{\infty} = 0$ olur. w_{∞} , w^s saçılan alanın uzak alan modeli olduğundan ve Teorem 2.2.7 den

$$w^s(x) = \int_{\Omega} u^s(x; d) g(d) ds(d) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b$$

olur.

$$w^i(x) = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d) = v \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3$$

dir. $w = w^i + w^s$ eşitliğinden $w = v + w^s$ olur. O halde

$$w = v \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \quad , \quad \partial\Omega_b \text{ 'de}$$

olur. Buradan w ve v iç geçiş probleminin bir çözümüdür. Biz hipotezde iç geçiş probleminin aşıkâr çözümleri haricinde çözümünün var olmadığını kabul ettiğimizden bu w ve v çözümleri ancak sıfır çözümleri olacaktır. O halde $\mathbb{R}^3$ de $v = 0$ olduğundan $g = 0$ dir. Şimdi F nin görüntü kümesinin yoğun olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned} (F^*g)(\hat{x}) &= \int_{\Omega} \overline{u_{\infty}(d; \hat{x})} g(d) ds(d) \\ &= \int_{\Omega} \overline{u_{\infty}(-\hat{x}; -d)} g(d) ds(d) \\ &= \int_{\Omega} \overline{u_{\infty}(-\hat{x}; d)} \overline{g(-d)} ds(d) \\ &= \overline{(Fh)(-\hat{x})} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\overline{g(-d)} = h(d)$ dir. O zaman F^* bire bir gerek ve yeter koşul F bire bir dir. $L^2(\Omega)$ da sınırlı F operatörleri için

$$N(F^*)^{\perp} = \overline{F(L^2(\Omega))}$$

vardır. Bu da F nin görüntü kümesinin yoğun olduğunu söyler.

($\Rightarrow$): [3.2]-[3.4] problemine karşılık gelen uzak alan operatörü bire bir ve görüntü kümesi yoğun olsun. Bu durumda [4.31]-[4.33] iç geçiş probleminin sadece aşıkâr çözümü vardır (37).

5. SONUÇ

Aşağıdaki bütün sonuçlar

$$\Delta u(x) + k^2 n(x)u(x) = \frac{1}{\rho(x)} \nabla \rho(x) \nabla u(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3$$

$$u(x) = e^{ik\alpha \cdot x} + u^s(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0 \quad , \quad |x| = r$$

saçılma problemi için elde edilmiştir. Burada $u^s(x)$ saçılan dalgayı gösterir.

Sonuç 5. 1.

$v^s, w^s \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b)$ saçılan iki dalga olsun. v_∞ ve w_∞ sırasıyla v^s, w^s 'ye karşı gelen uzak alan modelleri olsunlar. v^s ve w^s Helmholtz denkleminin yayılan çözümleri olsunlar. O zaman v^s ve w^s

$$\int_{\partial\Omega_b} \left\{ v^s \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s} \frac{\partial v^s}{\partial \nu} \right\} ds = -2ik \int_{\Omega} v_\infty \overline{w_\infty} ds$$

denklemini sağlar.

Sonuç 5.2.

$v^s \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_b)$ Helmholtz denkleminin bir yayılan çözümü olsun. v^s 'nin uzak alan modeli v_∞ olsun. w_h^i, h çekirdekli Herglotz dalga fonksiyonu olsun. O zaman,

$$\int_{\partial\Omega_b} \left\{ v^s \frac{\partial \overline{w_h^i}}{\partial \nu} - \overline{w_h^i} \frac{\partial v^s}{\partial \nu} \right\} ds = 4\pi \int_{\Omega} v_\infty \overline{h} ds$$

sağlanır.

Sonuç 5. 3.

v_g^i, v_h^i çekirdekleri sırasıyla $g, h \in L^2(\Omega)$ olan Herglotz dalga fonksiyonları olsunlar. v_g, v_h [3.2]-[3.3]'ün çözümleri olsunlar. $e^{ikx.d}$, v_g ve v_h 'ya göre v_g^i ve v_h^i ile yerdeğiştirsin. O zaman

$$ik^2 \iint_{\Omega_b} \text{Im } n(x) v_g(x) \overline{v_h(x)} dx = 2\pi(Fg, h) - ik(Fg, Fh) - 2\pi(g, Fh) \\ - \frac{1}{2} \iint_{\Omega_h} \frac{1}{\rho(x)} \nabla \rho(x) \{v_g(x) \nabla \overline{v_h(x)} - \overline{v_h(x)} \nabla v_g(x)\} dx$$

olduğu gösterildi. Burada $(.,.)$, $L^2(\Omega)$ 'da iç çarpımdır.

Sonuç 5. 4.

$$\text{Im } n \geq 0 \quad \text{veya} \quad 0 \leq \iint_{\Omega_b} \frac{1}{\rho} \nabla \rho (\text{Im } v_g \nabla \text{Re } v_g - \text{Re } v_g \nabla \text{Im } v_g) dx$$

olduğunu kabul edelim. O zaman F 'nin sıfır hariç reel özdeğerleri olmadığı gösterildi.

Sonuç 5. 5.

$\text{Im } n = 0$ ve $v_g = \overline{v_h}$ olsun. O zaman F normal olduğu, yani; $FF^* = F^*F$ sağlandığı ve $S = I + \frac{ik}{2\pi} F$ saçılan operatörün birim operatör olduğu, yani; $SS^* = S^*S = I$ sağlandığı gösterildi.

Sonuç 5.6.

$$Y := \left\{ w \in C^2(\overline{\Omega_b}) : \Delta w + k^2 n(x)w = \frac{1}{\rho} \nabla \rho \nabla w, \quad \Omega_b \text{'de} \right\} \text{ ve}$$

$$W := \left\{ \left(w - v_g - u_\varphi, \frac{\partial}{\partial \nu} (w - v_g - u_\varphi) \right) : \varphi \in L^2(\Gamma), \lambda g = u_{\varphi, \infty}, w \in Y \right\}$$

olsun. Kabul edelim ki $\lambda \notin \sigma(F)$ olsun. O zaman $W, L^2(\partial\Omega_b) \times L^2(\partial\Omega_b)$ 'de yoğun olduğu gösterildi.

Sonuç 5.7.

Eğer $\text{Im } n(x) > 0$ ve $v_g = \overline{v_h}$ ise o zaman F uzak alan operatörünün bire bir olduğu gösterildi.

Sonuç 5.8.

[3.2]-[3.4] problemine karşılık gelen uzak alan operatörünün bire bir ve görüntü kümesinin yoğun olması için gerek ve yeter koşul

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad \Omega_b \text{'de} \quad [4.31]$$

$$\Delta w + k^2 n(x)w = \frac{1}{\rho} \nabla \rho \nabla w, \quad \Omega_b \text{'de} \quad [4.32]$$

$$w = v, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad \partial\Omega_b \text{'de} \quad [4.33]$$

iç geçiş probleminin $w \in C^2(\Omega_b) \cap C^1(\overline{\Omega_b})$ ve v Herglotz dalga fonksiyonunun mevcut olmadığı gösterildi.

KAYNAKLAR

1. Lax, P. D. and Phillips, R. S., "Scattering Theory", *Academic Press*, New York, 173-176 (1967).
2. Nachman, A., "Reconstructions from boundary measurements", *Annals of Math.*, 128: 531-576 (1988).
3. Novikov, R., "Multidimensional inverse spectral problems for the equation $-\Delta\Psi + (v(x) - Eu(x))\Psi = 0$ ", *Translations in Func. Anal. And Its Appl.*, 22: 263-272 (1988).
4. Ramm, A. G., "Recovery of the potential from fixed energy scattering data", *Inverse Problems*, 4: 877-886 (1988).
5. Devaney, A. J., "Acoustic Tomography, in: inverse problems of acoustic and elastic waves", *SIAM Philadelphia*, 250-273 (1984).
6. Langenberg, K. J., "Applied inverse problems for acoustic, electromagnetic and elastic waves scattering", *Basic Methods of Tomography and Inverse Problems*, *Bristol and Philadelphia*, 127-467 (1987).
7. Imbriale, W. A. and Mittra, R., "The two dimensional inverse scattering problem", *IEEE Trans. Ant. Prop.*, AP-18: 633-642 (1970).
8. Angell, T. S., Colton, D. and Kirsch, A. "The three dimensional inverse scattering problem for acoustic waves", *J. Diff. Equations*, 46: 46-58, (1982).
9. Kristensson, G. and Vogel, C. R., "Inverse problems for acoustic waves using the penalised likelihood method", *Inverse Problems*, 2: 461-479 (1986).
10. Tobocman, W., "Inverse acoustic wave scattering in two dimensions from impenetrable targets", *Inverse Problems*, 5: 1131-1144 (1989).
11. Murch, R. D., Tan, D. G. H., and Wall, D. J. N., "Newton-Kantorovich method applied to two dimensional inverse scattering for an exterior Helmholtz Problem", *Inverse Problems*, 4: 1117-1128 (1988).
12. Onishi, K., Ohura, Y. and Kabayashi, K., "Inverse scattering in 2D for shape identification by BEM", *Boundary Elements XII*, Vol.2, Applications Fluid Mechanics and Field Problems, *Springer-Verlag*, New York, 435-446, (1990).
13. Wang, Y. M. and Chew, W. C., "An iterative solution of two dimensional electromagnetic inverse scattering problems", *Inter. Jour. Imaging Systems and Technology*, 1: 100-108 (1989).

14. Kirsch, A. and Kress, R., "A numerical method for an inverse scattering problem", *Inverse Problems*, **Academic Press**, Orlando, 279-290 (1987).
15. Kirsch, A. and Kress, R., "On an integral equation of the first kind in inverse acoustic scattering", *Inverse Problems*, **ISNM 77**: 93-102 (1986).
16. Colton, D. and Monk, P., "A novel method for solving the inverse scattering problem for time harmonic acoustic waves in the resonance region", ***SIAM J. Appl. Math.***, 45: 1039-1053 (1985).
17. Colton, D. and Monk, P., "A novel method for solving the inverse scattering problem for time harmonic acoustic waves in the resonance region II", ***SIAM J. Appl. Math.***, 46: 506-523 (1986).
18. Anar, İ. E. and Çelebi, A. O., "A scattering problem in IR^n ", ***Bulletin of The Institute of Mathematics Academia Sinica***, 22: 323-339 (1994).
19. Johnson, S. A. and Tracy, M. L., "Inverse scattering solutions by a sinc basis, multiple source, moment method- Part I, theory", ***Ultrasonic Imaging***, 361-375 (1983).
20. Kleinman, R. and van den Berg, P., "A hybrid method for two dimensional problems in tomography" ***J. Comp. Appl. Math.*** (to appear).
21. Wang, S. L. and Chen, Y. M., "An efficient numerical method for exterior and interior inverse problems of Helmholtz equation", ***Wave Motion***, 13: 387-399 (1991).
22. Weston, W. H., "Multifrequency inverse problem for the reduced wave equation: resolution cell and stability", ***J. Math. Physics***, 25: 3483-3488 (1984).
23. Colton, D. and Monk, P., "A new method for solving the inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium", ***Inverse problems***, 5: 1013-1026 (1989).
24. Colton, D. and Monk, P., "The inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium", ***Quart. J. Mech. Appl. Math.***, 41: 97-125 (1988).
25. Colton, D., "Partial Differential Equations", ***Random House***, New York, 243-299 (1988).
26. Colton, D., Coyle, J., Monk, P. "Recent developments in inverse acoustic scattering theory", ***SIAM Review***, 42(3): 369-414 (2000).

27. Colton, D. and Hahner, P., "Modified far field operators in inverse scattering theory", *SIAM J. Math. Anal.*, 24: 365-389 (1993).
28. Colton, D. and Monk, P., "On a class of integral equations of the kind in inverse scattering theory", *SIAM J. Appl. Math.*, 53: 847-860 (1993).
29. Colton, D. and Kirsch, A., "Dense sets and far field pattern in acoustic waves propagation", *SIAM J. Math. Anal.*, 15: 996-1006 (1984).
30. Colton, D., Kirsch, A. and Paivarinta L., "Far field patterns for acoustic waves inhomogeneous medium", *SIAM J. Math. Anal.*, 20(6): 1472-1483 (1989).
31. Colton, D. and Kress R., "Eigenvalues of the far field operator and inverse scattering theory", *SIAM J. Math. Anal.*, 26(3) : 601-615 (1995).
32. Colton, D. and Kress R., "Integral Equation Methods In Scattering Theory", *John Wiley & Sons*, New York, 1-30 (1996).
33. Colton, D. and Kress R., "Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory", *Springer-Verlag*, New York, 7-144, 203-236, 258-275 (1992).
34. Colton, D. and Kirsch, A., "Karp's theorem in acoustic scattering theory", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 103: 783-788 (1988).
35. Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", second edition, *Springer-Verlag*, Berlin, 13-23 (1983).
36. Kirsch, A., "An Introduction To The Mathematical Theory Of Inverse Problems", *Springer*, New York, 173-204 (1996).
37. Kirsch, A., "The denseness of the far field patterns for the transmission problem", *IMA Journal of Applied Mathematics*, 37: 213-225 (1986).
38. Kress, R., "Linear Integral Equations", *Springer-Verlag*, New York, 1-32 (1989).
39. Kreyszing, E., "Introductory Functional Analysis with Applications", *John Wiley & Sons*, New York, 405-425 (1978).
40. Mikhlin, S. G., "Mathematical Physics and Advanced Course", *North-Holland Publishing Company*, Amsterdam, 153-177 (1970).

ÖZGEÇMİŞ

Ülkü (DİNLEMEZ) ATEŞ 1971 yılında Çankırı'nın Merkez ilçesinde doğdu. İlk okulu Fevzi Çakmak İlkokulunda, ortaokulu Gülhane İlköğretim okulunda, liseyi ise Atatürk Kız Teknik ve Meslek Lisesinde tamamladı. Üniversite öğrenimine 1988 yılında girdiği Gazi Üniversitesi Fen ve Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladı. 1992 yılında aynı üniversiteden mezun oldu. 1993 yılında Gazi Üniversitesi Fen ve Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne araştırma görevlisi olarak girdi. 1997 yılında "Helmholtz Denklemiyle Bağlantılı Geçiş Problemleri" adlı teziyle yüksek lisansı bitirdi. Halen aynı üniversitede araştırma görevlisidir. Evli ve bir çocuk sahibidir.

